UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MICHEL FERREIRA GABY

# O USO DAS DESIGUALDADES ELEMENTARES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

BELÉM

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MICHEL FERREIRA GABY

# O USO DAS DESIGUALDADES ELEMENTARES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional

BELÉM

2020

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD**
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará**
**Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

G112u Gaby, Michel Ferreira.
O uso das desigualdades elementares na resolução de problemas de otimização / Michel Ferreira Gaby. — 2021.
88 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Tania Madeleine Begazo Valdivia
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Belém, 2021.

1. Desigualdades matemáticas. 2. Indução matemática. 3. Médias. 4. Valor absoluto. I. Título.

CDD 512.97

## CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

MICHEL FERREIRA GABY

# O USO DAS DESIGUALDADES ELEMENTARES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Esta Dissertação, apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN) da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática, foi julgada e aprovada pela seguinte banca examinadora:

Aprovada em 19/03/2021

---

Profª. Drª. Tânia Madeleine Begazo Valdivia (Orientadora) - PROFMAT/UFPA

---

Prof. Dr. Rogélio Daniel Benavides Guzman - PROFMAT/UFPA

---

Profª Drª. Irene Castro Pereira - PROFMAT/UFPA

---

Prof. Dr. Adam Oliveira da Silva - Faculdade de Matemática/UFPA

# DEDICATÓRIA

*Dedico à Deus por por ter me dado o dom da vida. A meus pais.A minha esposa e filho Obrigado por tudo!*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por ter me dado saúde, sabedoria e humildade em todos os momentos de minha vida.

À meus pais por me mostrarem que a educação é o meio transformador da sociedade e que através dela pude me tornar um cidadão de bem, conhecedor das minhas responsabilidades.

Agradeço também à minha família, minha esposa e meu filho, por me darem forças e incentivo nos momentos de angustia, tristeza e ausência devido a dedicação aos estudos.

Aos meus amigos de turma, pelo vínculo de amizade que construímos durante o programa, amizade essa que levarei pelo resto de minha vida, pelos dias e noites de estudos, mesmo quando trocavamos conhecimento pelo celular, e por sempre colaborarem com o meu crescimento intelectual, me incentivando e dando forças em todos os momentos que precisei de apoio.

À Universidade Federal do Pará UFPA, que nos oportunizou a realização de um sonho.

À todos os professores, aos coordenadores e à secretaria do curso, que de maneira direta e indireta contribuíram com os ensinamentos que levarei por toda a vida.

À minha orientadora, Professora Dra. Tânia Madeleine Begazo Valdivia que abraçou a ideia e contribuiu generosamente para a conclusão deste trabalho.

*"Ninguém ignora tudo.*

*Ninguém sabe tudo.*

*Todos nós sabemos alguma coisa.*

*Todos nós ignoramos alguma coisa.*

*Por isso aprendemos sempre."*

*Paulo Freire*

## RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre desigualdades, abordando com maior enfase as Desigualdades das Médias e de Cauchy-Schwarz que são bastante utilizadas para resolver problemas de otimização e segue fazendo um estudo de outras desigualdades como: a Desigualdade de Jensen, Desigualdade de Cauchy-Schwarz na forma de Engel, Desigualdade de Young, de Holder, de Minkowsky e outras, essas mais utilizadas em problemas de olimpíadas. Para isso, introduzimos um estudo sobre Indução Matemática devido a muitas desigualdades serem provadas por indução, seguindo com ideia de ordem nos números reais, valor absoluto e suas propriedades e finalizando com a aplicação dessas desigualdades na resolução de alguns problemas de otimização.

**Palavras chaves:** Desigualdades Matemáticas; Indução Matemática; Médias; Valor Absoluto.

## ABSTRACT

This paper presents a study on inequalities, approaching with greater emphasis the Averages and Cauchy-Schwarz Inequalities that are widely used to solve optimization problems and continues making a study of other inequalities such as: Jensen's Inequality, Cauchy-Schwarz Inequality in the form of Engel, Young's Inequality, Holder, Minkowsky and others, these most used in Olympics problems. To this end, we introduced a study on Mathematical Induction due to the fact that many inequalities are proved by induction, following with an idea of order in the real numbers, absolute value and their properties and ending with the application of these inequalities in solving some optimization problems.

**Key words:** Mathematical Inequalities; Mathematical induction; Averages; Absolute value.

# Lista de Figuras

# Sumário

# INTRODUÇÃO

Esse trabalho começou a ser imaginado quando estudava Desigualdades para a disciplina Números e Funções do primeiro semestre do Curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), na Universidade Federal do Pará (UFPa), assistindo à vídeo-aulas do Professor Fábio Henrique Souza, professor do ensino médio do Colégio Militar do Rio de Janeiro, professor da equipe de videoaulas do PIC/OBMEP, que de maneira bem didática e as vezes mais simples, resolvia problemas puramente algébricos e de Otimização (máximo e mínimo), sendo que os problemas de otimização só são vistos pelo aluno do ensino médio no primeiro ano ao estudar Funções Quadráticas, ficando suas resoluções limitadas ao estudo das coordenadas do vértice da parábola.

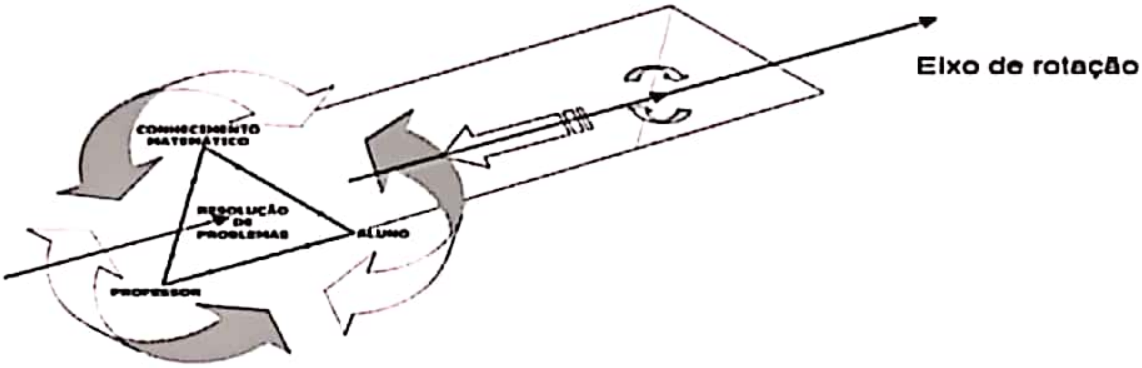
Ao tentar me aprofundar sobre o tema, percebi que existem poucos livros em língua portuguesa que tratam sobre o assunto, foi aí então que veio a decisão de escrever o trabalho como material que sirva de apoio para o professor que queira usá-lo como ferramenta extracurricular.

Segundo (D'AMBROSIO, 2008, p.4) o Brasil vem obtendo bons resultados em Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO), inclusive sediando a IMO-2017, que ocorreu no Rio de Janeiro no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Temos também muitos matemáticos brasileiros se destacando internacionalmente, entre eles Artur Ávila Cordeiro de Melo, primeiro latino americano a ganhar a Medalha Fields, considerada o Nobel da Matemática. Hoje o Brasil faz parte da União Matemática Internacional devido a sua quantidade e qualidade de produção científica e tecnológica, superando importantes países Europeus como Portugal, Holanda, Bélgica, etc., na contramão de tudo isso, temos um dos piores índices de aproveitamento escolar do mundo.

Diante desse paradoxo e motivado pela crescente procura dos meus alunos para treiná-los para as Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEPP), ou para pedir material de estudo para as provas das escolas superiores militares (IME, ITA, Colégio Naval, etc.), decidi também tornar esse trabalho acessível aos alunos que estão iniciando os estudos nesse sentido, abordando mais detalhadamente esses problemas e oferecendo um outro olhar para os problemas de máximo e mínimo trabalhados no currículo regular.

De acordo com Guérios e Júnior (2016), o ensino-aprendizagem pode se dar através de uma tríade, professor - aluno - conhecimento matemático, configurada como algo rígido, porém não estático, em constante movimento onde a resolução de problemas é o eixo que dá sustentação a esse movimento que não tem início e tampouco fim, conforme mostra a figura 1.

Figura 1: Movimento da aprendizagem e da docência




Fonte: Guérios e Júnior (2016)

Dessa forma os conteúdos matemáticos estariam passando pelos três vértices do triângulo, ora concentrados no professor, ora no aluno, ora em ambos.

Nesse processo de ensinar e aprender matemática temos a potencialização da descoberta, da criação e da motivação por parte do aluno.

Ao resolver problemas o aluno constrói os conceitos matemáticos através de situações que propiciem criar hipóteses e conjecturas estimulando sua curiosidade dentro da sua concepção da matemática.(D'AMBROSIO, 1998)

Tal argumentação vai de encontro com o que diz a BNCC em sua terceira competência específica de matemática e suas tecnologias:

> Utilizar estratégias e procedimentos matemáticos, em seus campos - Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística - para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.(BNCC, 2008, p.523)

Assim esperamos que ao resolver os problemas sobre outro olhar, utilizando outros métodos, conceitos ou procedimentos diferentes dos habituais, o aluno se motive e procure sanar possíveis defasagens de conteúdos, ampliar seus conhecimentos e melhorar as habilidades já adquiridas, contribuindo assim para uma melhora significativa no seu desempenho escolar.

A metodologia utilizada divide o trabalho em quatro capítulos.

No primeiro capítulo, falaremos sobre o Método de Indução, pois muitas desigualdades são demonstradas por esse método, iniciaremos falando sobre os axiomas de Peano até a 2ª Forma do Princípio de Indução também chamada de Indução Forte, mostrando através de exemplos como se demonstram igualdades e desigualdades.

No segundo capítulo, comentaremos de forma rápida e simples sobre o conjunto dos números reais abordando a sua descrição usando o método axiomático e de forma mais ampla, a ordem nesse conjunto, abordaremos também sobre valor absoluto e apresentaremos as desigualdades triangular, de Cauchy-Schwarz para dois pares de números e sua forma generalizada e também o Lema de Titu.

No terceiro capítulo, conceituaremos as principais médias (aritmética, geométrica, harmônica e quadrática), apresentaremos e demonstraremos as desigualdades das médias para dois termos assim como suas generalizações e também outras desigualdades importantes como as desigualdades de Jensen, Young, Holder e Minkowski que são bastante úteis na resolução de problemas de desigualdades em provas de olimpíadas.

No quarto capítulo, apresentaremos alguns problemas de otimização com suas respectivas soluções dando ênfase maior as desigualdades das médias.

# Capítulo 1

# INDUÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo falaremos sobre o método de indução apresentando os quatro axiomas de Peano que são fundamentais para a caracterização dos números naturais onde o último é conhecido como axioma da indução sendo a base para o que chamamos de Princípio da Indução Finita ou da Indução Matemática. Apresentaremos ainda a 2ª Forma do Princípio de Indução também chamada de Princípio da Indução Completa ou da Indução Forte.

Admitiremos definidas no conjunto dos naturais as operações de adição e multiplicação, denotadas respectivamente por $(+)$ e $(\cdot)$ e suas propriedades assim como uma relação de ordem e suas propriedades.

Deixaremos como sugestão para o leitor que queira se aprofundar no assunto as referências [12] e [13].

## 1.1 Indução Matemática

A medida que a civilização humana, lentamente, evoluía, ela se apoderou de um modelo abstrato de contagem (um, dois, três, quatro, cinco, ...), que são os números naturais. Tempos depois ela aprendeu a usar este modelo para contar os elementos de um conjunto e representá-los através de um processo engenhoso chamado de sistema de numeração decimal, o qual permite representar todos os números naturais utilizando os símbolos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e $9$. Assim, indicando por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, temos:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}.$$

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, cuja essência de sua caracterização foi proposta pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) através de uma lista de axiomas, baseia-se na noção de sucessor de um número natural.

Intuitivamente, o sucessor de um número natural é o número que vem logo depois dele na lista de números naturais, não havendo outros números entre eles.

A construção de Peano para o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é regida pelos seguintes 4 axiomas:

1) Todo número tem um único sucessor, que também é um número natural.

2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

3) Existe um único número natural, chamado **um** e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro.

4) Seja $X$ um conjunto de números naturais, isto é, $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e se , além disso, o sucessor de todo elemento de $X$ ainda pertence a $X$, então $X = \mathbb{N}$.

Podemos relacionar a noção de sucessor de um número natural com a ideia de adição. Assim, determinar o sucessor de um número natural equivale a somar uma unidade a esse número, dessa forma, representando por $n+1$ o sucessor do número natural $n$, os axiomas de Peano podem ser reescritos como:

1) Todo número natural $n$ tem um sucessor, representado por $n+1$.

2) Se $m+1 = n+1$, então $m = n$.

3) Existe um único número natural, designado por 1, tal que $n+1 \neq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4) Seja $X$ um conjunto de números naturais, isto é, $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e se, além disso, $n+1 \in X$, para cada $n \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Embora todos os quatro axiomas sejam fundamentais para a caracterização dos números naturais, o último é conhecido como o ***Princípio da Indução*** e é a base de um poderoso método de demonstração de propriedades referentes a números naturais. Usando a linguagem de proposições em vez de conjuntos, o Princípio da Indução costuma ser chamado de ***Princípio da Indução Finita ou da Indução Matemática.***

Assim, se quisermos provar que uma proposição $P(n)$, relativa ao número natural $n$, é válida para todos os valores n de $\mathbb{N}$, basta mostrar que o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} | P(n)$ é verdadeira$\}$, que é um subconjunto de $\mathbb{N}$ é o próprio conjunto $\mathbb{N}$. Pelo axioma da indução, basta mostrar que $1 \in X$ e que o sucessor de cada elemento de $X$ também está em $X$. Em termos da proposição $P(n)$, isto equivale a mostrar que:

i) $P(1)$ é válida;

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica na validade de $P(n+1)$.

Verificando esses dois fatos, conclui-se a validade de $P(n)$ para todos os valores de $n \in \mathbb{N}$.

## 1.2 Demonstrando Igualdades

A demonstração de uma igualdade utilizando o método de indução é muitas das vezes um processo simples, quando, em particular, um dos membros da igualdade é um somatório ou um produtório, pois, a passagem de $P(n)$ para $P(n+1)$ é quase sempre automática, bastando para isso, somar ou multiplicar a ambos os membros um novo termo ou fator de modo que ela se torne a igualdade que verifica a validade de $P(n+1)$.

**Exemplo 1.1.** *Prove, por indução, que* $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$.

**Solução.** *Para* $n \geq 1$ *consideremos a proposição*

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

*Queremos mostrar que* $P(n)$ *é verdadeira para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Para isso afirmamos que:*

*i)* $P(n)$ *é verdadeira para* $n = 1$.

*De fato, para* $n = 1$, *temos que o lado esquerdo de* $P(n)$ *é* $2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$ *e o lado direito é* $1^2 = 1$. *Assim* $P(1)$ *é verdadeira.*

*ii)* $P(n)$ *é verdadeira para um valor arbitrário* $n \in \mathbb{N}$ *implica* $P(n+1)$ *verdadeira.*

*De fato, admitindo que*

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \tag{1.1}$$

*para um certo valor de $n \in \mathbb{N}$, devemos mostrar que:*

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + [2(n+1)-1] = (n+1)^2.$$

*Para isso, somamos o novo termo $[2(n+1)-1]$ a ambos os membros de (1.1).*

*Assim, temos*

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + [2(n+1)-1] &= n^2 + [2(n+1)-1] \\ &= n^2 + 2n + 2 - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

*Portanto, a validade de $P(n)$ para um valor arbitrário de $n \in \mathbb{N}$, implica na validade de $P(n+1)$.*

*Logo, pelo Princípio da Indução, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.*

**Exemplo 1.2.** *Mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

**Solução.** *Seja* $P(n) : \left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n!}, n \in \mathbb{N}.$

*Vamos provar, por indução, que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, para isso vamos verificar que*

*i) $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$.*

*De fato, para $n = 1$, temos*
$\left(1+\frac{1}{1}\right) = 2$ *e* $\frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{(1+1)^1}{1!} = \frac{2^1}{1} = 2.$
*Daí, $P(1)$ é verdadeira ja que* $\left(1+\frac{1}{1}\right) = \frac{(1+1)^1}{1!}.$

*ii) $P(n)$ verdadeira para um valor arbitrário $n \in \mathbb{N}$, implica $P(n+1)$ verdadeira.*

*De fato, admitindo que*

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n!} \tag{1.2}$$

*devemos mostrar que:*

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{[(n+1)+1]^{n+1}}{(n+1)!}$$

*Para isso, multiplicamos ambos os membros da igualdade* (1.2) *por* $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.
*Assim, temos*

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \frac{(n+1)^n}{n!}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\\ &= \frac{(n+1)^n}{n!}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\\ &= \frac{\cancel{(n+1)^n}}{n!}\cdot\frac{(n+2)^n}{\cancel{(n+1)^n}}\cdot\frac{(n+2)}{(n+1)}\\ &= \frac{(n+2)^n\cdot(n+2)}{(n+1)\cdot n!}=\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}\\ &= \frac{[(n+1)+1]^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

*Portanto a validade de* $P(n)$ *para um valor arbitrário de* $n \in \mathbb{N}$, *implica na validade de* $P(n+1)$.

*Logo, pelo Princípio da Indução Finita,* $P(n)$ *é verdadeira para todo* $n \in \mathbb{N}$.

## 1.3 Demonstrando Desigualdades

Diferentemente das igualdades, a demonstração de desigualdades associadas a somatórios ou produtórios utilizando o método da indução, quase sempre não é um processo fácil, pois a inclusão do termo adicional a ambos os membros não torna automaticamente a desigualdade na forma desejada, e geralmente é necessário demonstrar uma outra desigualdade.

**Exemplo 1.3.** *Demonstrar a desigualdade de Bernoulli*

$$(1+h)^n \geq 1+nh,$$

*para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e todo* $h \in \mathbb{R}, h \geq -1$.

**Solução.** *Seja* $P(n) : (1+h)^n \geq 1+nh$. *Vamos provar, por indução sobre* $n$, *que* $P(n)$ *é verdadeira para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e todo* $h \in \mathbb{R}, h \geq -1$.

*Para isso, vamos mostrar que:*

*i)* $P(n)$ *é verdadeira para* $n = 1$.

*De fato,* $(1+h)^1 = 1+h \geq 1+1\cdot h$. *Daí,* $P(1)$ *é verdadeira.*

*ii) Suponhamos que* $P(n)$ *seja verdadeira para algum* $n \in \mathbb{N}$, *ou seja,*

$$(1+h)^n \geq 1+nh. \tag{1.3}$$

*Temos que mostrar que* $P(n+1)$ *também é verdadeira, isto é*

$$(1+h)^{(n+1)} \geq 1+(n+1)h.$$

*Para isso, vamos multiplicar ambos os membros da desigualdade* (1.3) *por* $(1+h)$, *obtendo*

$(1+h)^n \cdot (1+h) \geq (1+nh)\cdot(1+h)$, *a desigualdade não se altera pois,* $1+h \geq 0$.

*Daí*

$$(1+h)^{(n+1)} \geq 1+h+nh+nh^2 = 1+(n+1)h+nh^2.$$

*Observe que o membro da direita não se tornou da forma desejada* $1+(n+1)h$. *No entanto basta observar que* $1+(n+1)h+nh^2 \geq 1+(n+1)h$, *pois* $nh^2 \geq 0$.

*Assim,* $(1+h)^{(n+1)} \geq 1+(n+1)h+nh^2 \geq 1+(n+1)h$.

*Desta forma, mostramos que* $P(n+1)$ *é verdadeira para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e para todo* $h \geq -1$.

*Logo, pelo Princípio da Indução Finita,* $(1+h)^n \geq 1+nh$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e todo* $h \geq -1$.

**Exemplo 1.4.** *Mostre que:*

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}},\ \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

**Solução.** *Seja* $P(n) : \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}, n \in \mathbb{N}$.

*Vamos provar, por indução, que* $P(n)$ *é verdadeira para todo* $n \in \mathbb{N}$.

*Para isso, vamos mostrar que:*

*i) $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$.*

*De fato, para $n = 1$,*

$$\frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2} \; e \; \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad e \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

*ii) Suponhamos que $P(n)$ é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja:*

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}. \tag{1.4}$$

*Temos que mostrar que $P(n+1)$ também é verdadeira, ou seja*

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)}{2n}\cdot\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{2(n+1)+1}}.$$

*Para isso, vamos multiplicar os dois membros da desigualdade(1.4) por*

$$\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \frac{(2n+1)}{(2n+2)}.$$

*Assim temos*

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)}{2n}\cdot\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}$$

*Observe que o membro da direita não se tornou da forma desejada,*

$$\frac{1}{\sqrt{2(n+1)+1}} = \frac{1}{\sqrt{(2n+3)}}.$$

*No entanto, basta mostrarmos que*

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{2(n+1)+1}}.$$

*Note que*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{[2(n+1)-1]}{2(n+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} &\iff \frac{(2n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(2n+1)}\cdot(2n+2)^2} \leq \frac{1}{(2n+3)} \\
&\iff (2n+1)\cdot(2n+3) \leq (2n+2)^2 \\
&\iff 4n^2+8n+3 \leq 4n^2+8n+4 \\
&\iff 3 \leq 4
\end{aligned}$$

*Dessa forma, mostramos que $P(n+1)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*Logo, pelo Princípio da Indução Finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.*

### 1.3.1 Demonstrando Propriedades Que São Válidas Para Números Naturais A Partir De Um Certo Natural $n_0$

Para demonstrar propriedades que são válidas para números naturais a partir de um certo natural $n_0$, usaremos uma variante do Princípio da Indução e que será enunciado como 1ª Forma do Princípio de Indução Completa através do seguinte teorema:

**Teorema 1.** *Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural $n$ e seja $n_0$ um número natural.*

*Suponhamos que:*

*i)* $P(n_0)$ *é válida.*

*ii)* *Para todo* $n \geq n_0$, *a validade de* $P(n)$ *implica a validade de* $P(n+1)$.

*Então* $P(n)$ *é válida para todo* $n \geq n_0$.

*Demonstração.* A demonstração será feita por indução.

Tomando $X = \{n \in \mathbb{N} | P(n_0 + n - 1) \text{ é válida}\}$, então $1 \in X$, já que para $n = 1$ por *i)*, $P(n_0 + 1 - 1) = P(n_0)$ é válida.

Agora por *ii)*, se $n \in X$, então $n + 1 \in X$. Logo, pelo Axioma da Indução, $X = \mathbb{N}$. Isto significa que $P(n_0 + n - 1)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, que $P(n)$ é válida para todo $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. □

**Observação 1.1.** *Podemos adotar $n_0 = 0$ nos casos em que seja interessante considerar o zero como um número natural.*

**Exemplo 1.5.** *Mostre que $n! > 2^n$, para todo natural $n \geq 4$.*

**Solução.** *Seja $P(n) : n! > 2^n$ para $n \geq 4$, vamos mostrar, por indução, que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 4$.*

*Para isso, vamos mostrar que:*

*i)* $P(n)$ *é verdadeira para* $n = 4$.

*De fato,* $4! = 4.3.2.1 = 24 \quad e \quad 2^4 = 16$.

*Daí,* $P(4)$ *é verdadeira já que* $24 > 16$.

*ii) Para todo* $n \geq 4$, *a validade de* $P(n)$ *implica a validade de* $P(n+1)$, *ou seja,*

$$(n+1)! > 2^{(n+1)}.$$

*Para isso, vamos multiplicar os dois membros da desigualdade* $n! > 2^n$ *por* $(n+1)$.

*Assim, temos*

$$(n+1) \cdot n! > (n+1) \cdot 2^n \Rightarrow (n+1)! > (n+1) \cdot 2^n.$$

*Observe que o membro da direita não se tornou da forma desejada,* $(2^{(n+1)} = 2^n \cdot 2)$.

*No entanto, basta mostrarmos que* $(n+1) > 2$*; o que de fato ocorre, pois,* $n \geq 4$.

*Daí*

$$(n+1)! > (n+1) \cdot 2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{(n+1)}.$$

*Mostrando assim que* $P(n+1)$ *é verdadeira para todo natural* $n \geq 4$.

*Logo, pelo Princípio da Indução,* $P(n)$ *é verdadeira para todo natural* $n \geq 4$.

## 1.4 2ª Forma do Princípio da Indução

Também chamada de **Princípio da Indução Completa ou da Indução Forte.**

**Teorema 2.** *Seja* $P(n)$ *uma propriedade relativa ao número natural* $n$. *Suponhamos que:*

*i)* $P(1)$ *é válida.*

*ii) Para todo* $n \in \mathbb{N}$, *a validade de* $P(k)$, *para todo* $k \leq n$, *implica a validade de* $P(n+1)$.

*Então* $P(n)$ *é válida para todo* $n \in \mathbb{N}$.

*Demonstração.* Consideremos a sentença aberta $Q(n)$ : $P(k)$ é válida para todo natural $k \leq n$.

Como por *i)* $P(1)$ é valida, então $Q(1)$ também é.

Agora, suponhamos que $Q(n)$ é valida para algum $n \in \mathbb{N}$, isto implica dizer que $P(k)$ é válida, para todo $k \leq n$.

Mas por *ii)*, isto implica na validade de $P(n+1)$ que por sua vez implica na validade de $P(k)$ para todo $k \leq n+1$. Logo, $Q(n+1)$ também é válida.

Portanto, pela forma original do Princípio da Indução, $Q(n)$ é valida para todo $n \in \mathbb{N}$, de onde decorre a validade de $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Naturalmente, a 2ª Forma do Princípio da Indução pode ser adaptado para demonstrar propriedades que valem a partir de um número natural $n_0$. Neste caso, a hipótese de indução é a validade de $P(k)$ para todo natural $k$ tal que $n_0 \leq k \leq n$.

**Exemplo 1.6.** *Seja a sequência 1 ,1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,..., essa sequência é conhecida como sequência de Fibonacci, em homenagem a Leonard de Pisa, e é dada pela lei de formação* $F_n = F_{(n-1)} + F_{(n-2)}$*, para todo* $n \geq 3$*. Mostre que* $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

**Solução.** *Demonstraremos essa proposição utilizando o Princípio da Indução Forte, visto que não conseguimos mostrar a desigualdade utilizando a primeira forma de indução, pois é necessário admitir na condição ii) que ela seja verdadeira para todo* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $3 \leq k \leq n$.

*Seja* $P(n) : F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$*, vamos mostrar, por indução, que* $P(n)$ *é verdadeira para todo natural* $n$.

*Para isso, vamos mostrar que:*

*i)* $P(1)$, $P(2)$ *e* $P(3)$ *são verdadeiras.*
*De fato,*
$F_1 = 1$ *e* $\left(\frac{7}{4}\right)^1 = \frac{7}{4}$ *, como* $1 < \frac{7}{4}$ *,* $P(1)$ *é verdadeira.*
$F_2 = 1$ *e* $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$*, como* $1 < \frac{49}{16}$*,* $P(2)$ *é verdadeira.*
$F_3 = 2$ *e* $\left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{343}{64}$*, como* $2 < \frac{343}{64}$*,* $P(3)$ *é verdadeira.*

*ii) Para todo* $n > 3$*, se* $P(k)$ *é verdadeira para* $3 \leq k \leq n$ *então* $P(n+1)$ *é verdadeira.*
*Com efeito, pela hipótese,* $P(n-1)$ *e* $P(n)$ *são verdadeiras, ou seja,*

$$F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \quad e \quad F_{(n-1)} < \left(\frac{7}{4}\right)^{(n-1)}.$$

*Ora, como* $F_{(n+1)} = F_n + F_{(n-1)}$, *resulta que*

$$\begin{aligned}
F_{(n+1)} < \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{(n-1)} &= \left(\frac{7}{4}\right)^{(n-1)} \cdot \left(\frac{7}{4} + 1\right) \\
&= \left(\frac{7}{4}\right)^{(n-1)} \cdot \left(\frac{11}{4}\right) \\
&= \left(\frac{7}{4}\right)^{(n-1)} \cdot \left(\frac{44}{16}\right) \\
&< \left(\frac{7}{4}\right)^{(n-1)} \cdot \left(\frac{49}{16}\right) \\
&= \left(\frac{7}{4}\right)^{(n-1)} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 \\
&= \left(\frac{7}{4}\right)^{(n+1)}
\end{aligned}$$

*Mostramos assim que* $P(n+1)$ *é verdadeira para todo* $n \in \mathbb{N}$.

*Logo, pelo Princípio da Indução,* $P(n)$ *é verdadeira para todo* $n \in \mathbb{N}$.

# Capítulo 2

# DESIGUALDADES ELEMENTARES EM $\mathbb{R}$

Iniciaremos esse capítulo descrevendo de maneira axiomática o conjunto dos números reais considerando de maneira um pouco mais ampla a ordem nesse conjunto, em seguida faremos um breve estudo sobre médias, introduziremos o conceito de valor absoluto e suas propriedades continuando com o estudo das desigualdades triangular, de Cauchy-Schwarz e do Lema Poderoso cuja generalização é mais conhecida como Lema de Titu.

As principais referencias utilizadas nesse capítulo foram [6], [10], [13], [16],

## 2.1 O Conjunto dos Números Reais

Abordaremos a descrição do conjunto dos números reais, indicado por $\mathbb{R}$, usando o método axiomático.

Assim, vamos assumir que o conjunto dos números reais é um conjunto não vazio caracterizado por três grupos de axiomas.

O primeiro grupo de axiomas consiste dos denominados *axiomas de corpo*. Mais precisamente iremos supor que $\mathbb{R}$ está munido de duas operações denotadas $(+)$ e $(\cdot)$ e respectivamente denominadas *adição* e *multiplicação*, as quais satisfazem os seguintes axiomas:

### Axiomas da adição

S1. *Associatividade*: Quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$.

S2. *Comutatividade*: Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se $x + y = y + x$.

S3. *Elemento neutro*: Existe um único elemento $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = 0 + x = x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

S4. *Simétrico*: Todo elemento $x \in \mathbb{R}$ possui um único simétrico em $\mathbb{R}$, denotado por $-x$, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

### Axiomas da multiplicação

M1. *Associatividade*: Quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

M2. *Comutatividade*: Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se $x \cdot y = y \cdot x$.

M3. *Elemento neutro*: Existe um único elemento $1 \in \mathbb{R}$ tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

M4. *Inverso multiplicativo*: Todo elemento $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$ possui um único inverso multiplicativo em $\mathbb{R}$, denotado por $x^{-1}$ ou $\dfrac{1}{x}$, tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

D1. *Axioma da distributividade*: Quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, tem-se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Convencionaremos omitir o sinal "$\cdot$" da operação da multiplicação, escrevendo $xy$ para denotar $x \cdot y$.

De posse dos axiomas acima podemos definir também as operações denotadas $(-)$ e $(\div)$ e respectivamente denominadas *subtração* e *divisão* em $\mathbb{R}$, como veremos a seguir:

A1. *Subtração*: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, a subtração $y$ de $x$ é denotada por $x - y$ e definida como a soma de $x$ com o simétrico de $y$, assim, $x - y = x + (-y)$.

A2. *Divisão*: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, a divisão de $x$ por $y$ é denotada por $x \div y$ e definida como o produto de $x$ pelo inverso multiplicativo de $y$, ou seja, $x \div y = x \cdot \dfrac{1}{y}$.

O segundo grupo consiste dos axiomas de ordem, os quais serão tratados na próxima seção. Por fim, o último grupo consiste de um único axioma conhecido como axioma do supremo, sobre esse axioma o leitor interessado pode considerar a referência [13].

## 2.2 Ordem nos Números Reais

Conforme dissemos na seção anterior, nessa seção faremos uma discussão dos axiomas de ordem.

Para introduzir uma ordem no conjunto dos números reais vamos supor a existência de um conjunto $\mathbb{R}_+$, que chamaremos de conjunto dos números reais positivos, satisfazendo as seguintes condições (axiomas):

P1) Dado o número real $x$, há três possibilidades que se excluem mutuamente: ou $x$ é positivo, ou $x = 0$, ou $-x$ é positivo.

P2) A soma e o produto de números reais positivos são também números positivos.

Assim se indicarmos com $x > 0$ quando $x$ pertence ao conjunto $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}_- = \{-x : x \text{ está em } \mathbb{R}_+\}$ podemos escrever:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_-.$$

O conjunto $\mathbb{R}_-$ será chamado de conjunto dos números reais negativos e a notação $x < 0$ será usada quando $x$ pertencer a $\mathbb{R}_-$.

Podemos definir agora a relação, "$x$ é maior que $y$", denotada $x > y$, se $x - y \in \mathbb{R}_+$.

Da mesma forma, "$x$ é menor que $y$", denotada $x < y$ se $y - x \in \mathbb{R}_+$. A relação $>$ possui as seguintes propriedades essenciais:

1) **Tricotomia:** Dados $x, y \in \mathbb{R}$, vale uma, e somente uma, das alternativas seguintes: $y > x$, $x = y$ ou $x > y$.

2) **Transitividade:** Se $x > y$ e $y > z$, então, $x > z$.

3) **Monotonicidade da Adição:** Se $x > y$, então para todo $z \in \mathbb{R}$, tem-se $x + z > y + z$.

   3') Se $x > y$ e $x' > y'$, então $x + x' > y + y'$.

4) **Monotonicidade da Multiplicação:** Se $x > y$ e $z \in \mathbb{R}_+$, então $xz > yz$.

4') Sejam $x, y, x'$ e $y'$ números positivos. Se $x > y$ e $x' > y'$ então $x \cdot x' > y \cdot y'$.

5) Se $x \neq 0$ então $x^2 > 0$.

6) Se $y > x > 0$ então $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.

7) Se $y > x$ e $z < 0$, então $xz > yz$.

*Demonstração.* 1) A tricotomia resulta imediatamente de P1). Com efeito, ou a diferença $y - x$ é positiva, ou seja, $y - x > 0$ o que implica $x < y$; ou $x - y = 0$ e dai $x = y$; ou $x - y > 0$ o que implica em $x > y$.

2) Mostraremos a transitividade usando P2). Assim, se $x > y$ e $y > z$, então $x - y > 0$ e $y - z > 0$, logo a soma $(x-y)+(y-z) > 0$ o que implica $(x-z) > 0$ e portanto $x > z$.

3) Como $x > y$, então, $x - y > 0$, mas $x - y = (x+z) - (y+z) > 0$. Logo, $x + z > y + z$.

3') Se $x > y$ e $x' > y'$, então $x - y > 0$ e $x' - y' > 0$, por P2) temos $(x-y)+(x'-y') > 0$ o que implica $(x + x') - (y + y') > 0$. Logo, $(x + x') > (y + y')$.

A propriedade 3') permite somar membro a membro duas desigualdades.

4) Como $x > y$, então $x - y > 0$, por P2) temos que $(x-y) \cdot z > 0$, o que resulta em $x \cdot z - y \cdot z > 0$. Logo, $x \cdot z > y \cdot z$.

4') Como $x > y$ e $x' > y'$, então $x - y > 0$ e $x' - y' > 0$, por P2) temos $(x-y) \cdot x' > 0$ e $(x' - y') \cdot y > 0$, o que resulta em $x \cdot x' - y \cdot x' > 0$ e $x' \cdot y - y' \cdot y > 0$, agora por 3) segue que $(x \cdot x') - (y \cdot x') + (y \cdot x') - (y \cdot y') > 0$ e dai $(x \cdot x') - (y \cdot y') > 0$. Logo, $x \cdot x' > y \cdot y'$

A propriedade 4') permite multiplicar membro a membro duas desigualdades.

5) Com efeito, se $x > 0$ então por P2) $x \cdot x > 0$ e dai $x^2 > 0$.

Agora, se $-x > 0$, também por P2) $(-x) \cdot (-x) > 0$, mas $(-x) \cdot (-x) = x^2$. Logo, $x^2 > 0$ em qualquer caso.

6) Note que se $x > 0$ e $y > 0$ então $\dfrac{1}{x} > 0$ e $\dfrac{1}{y} > 0$ pois, por P2) $\dfrac{1}{x} = x \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 > 0$. Logo multiplicando ambos os membros de $x < y$ por $\dfrac{1}{xy} > 0$, obtemos $\dfrac{x}{xy} < \dfrac{y}{xy}$ que implica em $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.

7) Com efeito, $y-x>0$ e $-z>0$, por P2) $(y-x)\cdot(-z)>0$ o que implica em $xz-yz>0$. Logo, $xz>yz$.

□

Outras notações importantes são as seguintes:

- $x \geq 0$, se $x$ está em $\mathbb{R}_+$ ou $x=0$.
- $x \leq 0$, se $x$ está em $\mathbb{R}_-$ ou $x=0$.
- $x \geq y$, se $x-y$ está em $\mathbb{R}_+$ ou $x-y=0$ e diremos que $x$ é maior que ou igual a $y$.
- $x \leq y$, se $x-y$ está em $\mathbb{R}_-$ ou $x-y=0$ e diremos que $x$ é menor que ou igual a $y$.

## 2.3 Valor Absoluto

O valor absoluto (ou módulo) de um número real $x$, indicado pela notação $|x|$, é definido pondo-se:

$$|x| = \begin{cases} x, & se \quad x \geq 0 \\ -x, & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Outra maneira de se definir o valor absoluto consiste em pôr:

$$|x| = max\{x, -x\}.$$

Isto é, o valor absoluto de $x$ é o maior dos números $x$ e $-x$.

Quando $x=0$ tem-se $x=-x=|x|=0$.

### Propriedades

P1) $|x| \geq 0, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ .

P2) $|x| \geq \pm x$.

P3) $|-x| = |x|$.

P4) $|x|^2 = x^2$.

P5) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

P6) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

*Demonstração.* P1) Com efeito:

- se $x \geq 0$, então $|x| = x \geq 0$.
- se $x < 0$, então $|x| = -x > 0$.

Logo, $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

P2)
- Se $x \geq 0, |x| = x$.
- Se $x < 0, |x| = -x > 0 > x$.

  Então $|x| \geq x$.

Por outro lado

- Se $x \geq 0, |x| = x \geq 0 \geq -x$.
- Se $x < 0, |x| = -x$.

  Então $|x| \geq -x$.

  Portanto, $|x| \geq \pm x$.

P3) Com efeito, $|x| = max\{x, -x\}$. Do mesmo modo, $|-x| = max\{x, -x\}$.

Portanto, $|x| = |-x|$.

P4)
- se $x \geq 0$, então $|x| = x$ e assim $|x|^2 = x^2$.
- se $x < 0$, então $|x| = -x$ e assim $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.

Portanto, $|x|^2 = x^2$. Consequentemente $\sqrt{x^2} = |x|$.

P5)
- se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então $xy \geq 0$ e $|xy| = xy = |x||y|$.
- se $x \geq 0$ e $y < 0$, então $xy \leq 0$ e $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$.
- se $x < 0$ e $y \geq 0$, então $xy \leq 0$ e $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$.
- se $x \leq 0$ e $y \leq 0$, então $xy \geq 0$ e $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

Portanto, $|xy| = |x||y|$.

P6) • se $x \geq 0$ e $y > 0$, então $\dfrac{x}{y} \geq 0$ e $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{x}{y} = \dfrac{|x|}{|y|}$.

• se $x \geq 0$ e $y < 0$, então $\dfrac{x}{y} \leq 0$ e $\left|\dfrac{x}{y}\right| = -\dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{(-y)} = \dfrac{|x|}{|y|}$.

• se $x < 0$ e $y > 0$, então $\dfrac{x}{y} \leq 0$ e $\left|\dfrac{x}{y}\right| = -\dfrac{x}{y} = \dfrac{(-x)}{y} = \dfrac{|x|}{|y|}$.

• se $x \leq 0$ e $y > 0$, então $\dfrac{x}{y} \geq 0$ e $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{(-x)}{(-y)} = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Portanto, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

□

## 2.4 Desigualdade Triangular

A desigualdade Triangular afirma que

**Teorema 3.** *Para qualquer par de números reais $x$ e $y$,temos:*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

*Demonstração.* Como $|x| \geq \pm x$.
Se $x + y \geq 0$, então $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$.
Se $x + y < 0$, então $|x + y| = -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|$.
Portanto, $|x + y| \leq |x| + |y|$. □

A Desigualdade Triangular pode ser generalizada como

**Teorema 4.** *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$, números reais, então*

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

*Demonstração.* A demonstração será feita por indução.

Seja $P(n) : |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$, queremos mostrar que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 2$.

Para isso,vamos verificar que

i) $P(n)$ é verdadeira para $n = 2$. De fato, pelo Teorema 3, segue que para qualquer par de números reais $x_1$ e $x_2$ temos

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|.$$

Daí, $P(2)$ é verdadeira.

ii) $P(n)$ verdadeira para algum natural $n > 2$ implica $P(n+1)$ verdadeira.
De fato, admitindo que

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \tag{2.1}$$

para um certo natural $n > 2$, devemos comprovar que

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| + |x_{n+1}|.$$

Para isso vamos somar $|x_{n+1}|$ aos dois membros da desigualdade (2.1).

Assim temos

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| + |x_{n+1}|.$$

Perceba que o membro da esquerda não se tornou da forma $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}|$.

No entanto basta mostrarmos que

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}| \leq |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}|.$$

De fato, observe que pelo Teorema3

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}| &= |(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1}| \\ &\leq |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}|. \end{aligned}$$

Portanto a validade de $P(n)$ para um certo natural $n > 2$ implica na validade de $P(n+1)$.

Logo, pelo Princípio de Indução, $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 2$.

$\square$

## 2.5 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

**Teorema 5.** *Sejam $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ números reais, então*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

*Valendo a igualdade se, e somente se,* $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$.

*Demonstração.* Se $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ ou $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$ o resultado é trivial visto que ocorrendo qualquer um desses casos os dois membros da desigualdade são iguais a zero o que torna a proposição verdadeira.

Temos que mostrar que a desigualdade é verdadeira quando nem todos os $a_i$ e $b_i$ com $i = 1, 2, ..., n$ são nulos.

Para isso vamos considerar a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + \cdots + (a_nx - b_n)^2$$

Daí

$$f(x) = a_1^2x^2 - 2a_1b_1x + b_1^2 + \cdots + a_n^2x^2 - 2a_nb_nx + b_n^2.$$

Assim

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Podemos então escrever $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde

$$\begin{aligned} a &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \\ b &= -2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \\ c &= b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \end{aligned}$$

Observe que $f(x) = (a_1x - b_1)^2 + \cdots + (a_nx - b_n)^2 \geq 0$, pois, $f$ é uma soma de quadrados.

Daí, segue que $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$, ou seja, $b^2 \leq 4ac$.

Logo

$$
\begin{aligned}
[-2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)]^2 &\leq 4(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \\
4(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 &\leq 4(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \\
(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)
\end{aligned}
$$

Demonstramos assim o que queríamos.

Perceba que a igualdade ocorre se, e somente se, $\Delta = 0$, ou seja, a função possui uma única raiz, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(k) = 0$.

Assim, $f(k) = 0$ se, e somente se, $(a_1k - b_1)^2 + \cdots + (a_nk - b_n)^2 = 0$, o que implica em $a_ik - b_i = 0$, para todo $i = 1, 2, 3, ..., n$, ou seja, a igualdade ocorre se, e somente se, $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$. □

Será apresentada uma outra demonstração da desigualdade de Cauchy-Schwarz usando o Lema de Titu.

Um caso particular da Desigualdade de Cauchy-Schwarz é o Corolárioa seguir:

**Corolário 1.** *Sejam $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, então*

$$(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2).$$

*A igualdade ocorrendo se, e somente se, $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2}$.*

## 2.6 Uma Desigualdade Poderosa

Esse lema se mostra como uma ferramenta poderosíssima para resolver problemas olímpicos bem difíceis de desigualdade.

**Lema 2.1.** *(LEMA DE TITU ) Se $a_1, a_2, b_1, b_2$ são números reais e $b_1, b_2 > 0$, temos a seguinte desigualdade*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} \geq \frac{(a_1 + a_2)^2}{b_1 + b_2}$$

*com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$.*

*Demonstração.* Sejam $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2 > 0$, então

$$\begin{aligned}(a_1b_2 - a_2b_1)^2 &\geq 0\\ a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 &\geq 0\\ a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 &\geq 2a_1a_2b_1b_2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Somando $a_1^2b_1b_2 + a_2^2b_1b_2$ em ambos os membros da desigualdade (2.2), temos

$$\begin{aligned} a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_1^2b_1b_2 + a_2^2b_1b_2 &\geq 2a_1a_2b_1b_2 + a_1^2b_1b_2 + a_2^2b_1b_2\\ a_1^2b_2^2 + a_1^2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_1b_2 &\geq b_1b_2(a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2)\\ a_1^2b_2(b_1 + b_2) + a_2^2b_1(b_1 + b_2) &\geq b_1b_2(a_1 + a_2)^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade (2.3) por $b_1b_2(b_1 + b_2)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{a_1^2b_2(b_1 + b_2)}{b_1b_2(b_1 + b_2)} + \frac{a_2^2b_1(b_1 + b_2)}{b_1b_2(b_1 + b_2)} &\geq \frac{b_1b_2(a_1 + a_2)^2}{b_1b_2(b_1 + b_2)}\\ \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} &\geq \frac{(a_1 + a_2)^2}{(b_1 + b_2)}. \end{aligned}$$

Além disso a igualdade ocorre se, e somente se, $(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = 0$, o que implica em $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ e daí, $a_1b_2 = a_2b_1$, assim temos que $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$.

□

Uma consequência do Lema 2.1 é a proposição a seguir.

**Proposição 2.1.** *Para $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ reais e $b_1, b_2, b_3 > 0$, então é válida a desigualdade*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3}$$

*ocorrendo a igualdade se, e somente se,* $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$.

*Demonstração.* Aplicando o Lema de Titu duas vezes para três pares de números, temos

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} = \left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2}\right) + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1 + a_2)^2}{b_1 + b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3}.$$

□

O Lema de Titu pode ser estendido da seguinte forma

**Teorema 6.** *Para $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ reais e $b_1, b_2, ..., b_n > 0$, então é válida a desigualdade*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \tag{2.4}$$

*ocorrendo a igualdade se, e somente se,* $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

A desigualdade (2.4) também conhecida como **Desigualdade de Cauchy-Schwarz na forma de Engel** ou **Princípio de Mínima de Arthur Engel.**[1]

*Demonstração.* A demostração será feita por Indução.

Já mostramos acima pelo Lema2.1 e pela Proposição2.1 que a desigualdade é verdadeira para $n = 2$ e $n = 3$.

Supondo que a desigualdade é verdadeira para algum natural $n > 3$, isto é, que

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Temos que mostrar que a desigualdade é verdadeira para $n + 1$.

De fato, por hipótese sabemos que:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Somando $\frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}}$ a ambos os membros dessa desigualdade temos que:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} + \frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} + \frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}}.$$

Mas, pelo lema 2.1

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} + \frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}} \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1})^2}{b_1 + \cdots + b_n + b_{n+1}}.$$

Por transitividade, segue que:

$$\frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} + \frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}} \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1})^2}{b_1 + \cdots + b_n + b_{n+1}}.$$

[1] Arthur Engel (nascido em 1928) é um professor de matemática alemão , educador e autor político. Engel foi um dos primeiros a reconhecer o impacto de calculadoras eletrônicas e computadores no ensino de matemática.

Logo, pelo princípio de indução, $\dfrac{a_1^2}{b_1}+\dfrac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\dfrac{a_n^2}{b_n}\geq\dfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
Valendo a igualdade se, e somente se, $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=...=\dfrac{a_n}{b_n}$. □

Como exemplo da aplicação desse lema, apresentaremos uma outra demonstração da desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 5).

Sejam $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ números reais e $b_1, b_2, ..., b_n > 0$, então

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{a_1^2b_1^2}{b_1^2}+\frac{a_2^2b_2^2}{b_2^2}+\cdots+\frac{a_n^2b_n^2}{b_n^2}.$$

Pela generalização do Lema de Titu temos que

$$\frac{a_1^2b_1^2}{b_1^2}+\frac{a_2^2b_2^2}{b_2^2}+\cdots+\frac{a_n^2b_n^2}{b_n^2}\geq\frac{(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}.$$

Daí

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2.$$

Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=...=\dfrac{a_n}{b_n}$.

Também pode-se deduzir o Lema de Titu a partir da desigualdade de Cauchy-Schwarz, o que revela a equivalência entre essas duas desigualdades.

De fato, considerando as n-uplas $\left(\dfrac{a_1}{\sqrt{b_1}},\dfrac{a_2}{\sqrt{b_2}},\cdots,\dfrac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)$ e $(\sqrt{b_1},\sqrt{b_2},\cdots,\sqrt{b_n})$, com $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$ e $b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbb{R}_+$, por Cauchy-Schwarz, segue que

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}\sqrt{b_1}+\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}\sqrt{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\sqrt{b_n}\right)^2\leq\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

Como $b_1+b_2+\cdots+b_n>0$, temos:

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right)\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n},$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$, como queríamos demonstrar.

# Capítulo 3

# DESIGUALDADE DAS MÉDIAS E OUTRAS DESIGUALDADES

Neste capítulo faremos um estudo sobre as principais médias e as desigualdades entre elas, assunto que será de extrema importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Uma primeira leitura das seções onde apresentaremos outras desigualdades importantes como a desigualdade do Rearranjo, de Nesbitt, de Chebychev, de Jensen, das médias Ponderadas e de Potências, de Young, de Holder, de Minkowsky, pode ser omitida, pois não são o foco deste trabalho podendo o leitor seguir direto para o capítulo final.

As principais referencias utilizadas para este capítulo foram [1], [?], [6], [9], [10], [11] e [16].

## 3.1 Médias

A ideia de média é bem importante e segundo (LIMA, 2016, p.129), uma média de uma lista de números é um valor que pode substituir todos os elementos dessa lista sem alterar uma determinada característica da mesma.

### 3.1.1 Média Aritmética

Dada uma sequência de números reais $(x_1, x_2, ..., x_n)$, chamamos de média aritmética o número real $M_A$ que não altera a soma dos elementos dessa sequência, assim

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \underbrace{M_A + M_A + \cdots + M_A}_{n\ vezes} = n \cdot M_A.$$

Portanto

$$M_A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

**Exemplo 3.1.** *Calcular a média aritmética dos números* $10, 20, 30$ *e* $40$.

**Solução.** *A média aritmética da sequência de números reais* $10, 20, 30, 40$ *é calculada por*

$$M_A = \frac{10 + 20 + 30 + 40}{4} = \frac{100}{4} = 25.$$

### 3.1.2 Média Geométrica

Dada uma sequência de números reais $(x_1, x_2, ..., x_n)$, chamamos de média geométrica o número real $M_G$ que não altera o produto dos elementos dessa sequência, assim

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = \underbrace{M_G \cdot M_G \cdot ... \cdot M_G}_{n\ vezes} = M_G^n.$$

Portanto

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}.$$

**Exemplo 3.2.** *Calcular a media geométrica dos números* $2, 4$ *e* $8$.

**Solução.** *Dada a sequência de números reais* $2, 4, 8$, *calculamos a média geométrica desses números fazendo*

$$M_G = \sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 8} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

### 3.1.3 Média Quadrática

Dada uma sequência de números reais $(x_1, x_2, ..., x_n)$, chamamos de média quadrática o número real $M_Q$ que não altera a soma dos quadrados dos elementos dessa sequência, assim

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2 = \underbrace{M_Q^2 + M_Q^2 + \cdots + M_Q^2}_{n\ vezes} = n \cdot M_Q^2.$$

Portanto

$$M_Q = \sqrt{\frac{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2}{n}}.$$

**Exemplo 3.3.** *Calcular a média quadrática dos números* $1$ *e* $7$.

**Solução.** *A média quadrática dos números* $1$ *e* $7$ *é*

$$M_Q = \sqrt{\frac{1^2 + 7^2}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 49}{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5.$$

### 3.1.4 Média Harmônica

Dada uma sequência de números reais $(x_1, x_2, ..., x_n)$, chamamos de média harmônica o número real $M_H$ que não altera a soma dos inversos dos elementos dessa sequência, assim

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{M_H} + \frac{1}{M_H} + \cdots + \frac{1}{M_H}}_{n \text{ vezes}} = \frac{n}{M_H}.$$

Portanto

$$M_H = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}$$

**Exemplo 3.4.** *Calcular a média harmônica dos números* $1, 2$ *e* $3$.

**Solução.** *Para calcular a média harmônica entre os números* $1, 2$ *e* $3$ *basta fazer*

$$M_H = \frac{3}{\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}} = \frac{3}{\dfrac{6+3+2}{6}} = \frac{3}{\dfrac{11}{6}} = \frac{3 \cdot 6}{11} = 1,6.$$

## 3.2 Desigualdade entre as Médias para dois termos

**Teorema 7.** *Considere* $x, y \in \mathbb{R}_+$ *então*

$$M_Q \geq M_A \geq M_G \geq M_H$$

*onde* $M_Q = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{2}}$, $M_A = \dfrac{x + y}{2}$, $M_G = \sqrt{xy}$ *e* $M_H = \dfrac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$.

*Demonstração.* Primeiro vamos mostrar que $M_Q \geq M_A$. Sabemos que

$$(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Somando $x^2+y^2$ aos dois membros da desigualdade acima, temos

$$(x^2+y^2)+(x^2+y^2)\geq x^2+y^2+2xy \Rightarrow 2(x^2+y^2)\geq (x+y)^2.$$

Multiplicando por 1/4 os dois membros da desigualdade, temos:

$$\frac{x^2+y^2}{2}\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Daí

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\geq\frac{x+y}{2}.$$

Logo, $M_Q\geq M_A$.

Agora mostraremos que $M_A\geq M_G$. Como

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0\Rightarrow x+y-2\sqrt{x}\sqrt{y}\geq 0\Rightarrow x+y\geq 2\sqrt{xy}.$$

Multiplicando por 1/2 os dois membros da desigualdade, temos:

$$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}.$$

Logo, $M_A\geq M_G$.

Finalmente temos que mostrar que $M_G\geq M_H$. Como

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2\geq 0\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{\sqrt{xy}}\geq 0\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{2}{\sqrt{xy}}\Rightarrow\sqrt{xy}\geq\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}.$$

Logo, $M_G\geq M_H$.

Portanto, $M_Q\geq M_A\geq M_G\geq M_H$. □

## 3.3 Generalização da Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica

**Teorema 8.** *Sejam $x_1,x_2,\ldots,x_n$ números reais positivos, então temos a seguinte desigualdade*

$$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\leq\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$$

*com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1=x_2=\ldots=x_n$.*

*Demonstração.* A demonstração será feita por indução.

Para o caso em que $n = 1$ o resultado é trivial visto que $x_1 \geq (x_1)^1$. Já foi mostrado na seção acima que a desigualdade é verdadeira para $n = 2$.

Suponhamos agora que a desigualdade é verdadeira para um determinado natural $n > 2$, ou seja,

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n.$$

Temos que mostrar que a sentença é verdadeira para $n + 1$, isto é,

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Para isso, consideremos $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ reais positivos em ordem crescente e $M_A$ a Média Aritmética entre eles, assim, $x_1 \leq M_A \leq x_{n+1}$. Daí

$$(M_A - x_1)(x_{n+1} - M_A) \geq 0 \tag{3.1}$$

$$M_A(x_1 + x_{n+1} - M_A) - x_1 x_{n+1} \geq 0.$$

o que implica em

$$M_A(x_1 + x_{n+1} - M_A) \geq x_1 x_{n+1}. \tag{3.2}$$

Denotando $X_1 = x_1 + x_{n+1} - M_A$, observe que

$$\frac{X_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} - M_A}{n} = \frac{(n+1)M_A - M_A}{n} = M_A.$$

Mas por hipótese de indução, temos que:

$$M_A = \frac{X_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{X_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Elevando ambos os membros da desigualdade a enésima potência, encontramos

$$M_A^n \geq X_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

Agora, multiplicando ambos os membros da desigualdade por $M_A$, obtemos

$$M_A \cdot M_A^n \geq M_A \cdot X_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = M_A \cdot (x_1 + x_{n+1} - M_A) \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

De (3.2), segue que

$$M_A^{n+1} \geq M_A \cdot (x_1 + x_{n+1} - M_A) \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \geq x_1 \cdot x_{n+1} \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1},$$

o que implica em

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \geq x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}.$$

Logo, pelo Princípio da Indução

$$x_1 \cdot\ x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n$$

para todo $n$ natural.

□

Analisando a desigualdade (3.1) verificamos que a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = M_A$ ou $x_{n+1} = M_A$, o que implica em $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1}$.

## 3.4 Generalização da Desigualdade entre as Médias Geométrica e Harmônica

**Teorema 9.** *Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_n$ números reais positivos e $n > 1$, então, $M_G \geq M_H$, ou seja*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}$$

*com a igualdade ocorrendo se,e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.*

*Demonstração.* Para demonstrar esse teorema usaremos a desigualdade já demonstrada anteriormente entre as médias aritmética e geométrica para números reais positivos.

Sendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos, então, $\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}, \ldots, \dfrac{1}{x_n}$ também são.

Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para os números reais positivos $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}$, temos

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot ... \cdot \frac{1}{x_n}}$$
$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}}$$
$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}}$$
$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Portanto $M_G \geq M_H$.

Do teorema(8) temos que a igualdade ocorre se, e somente se $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \cdots = \frac{1}{x_n}$, o que implica em $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. □

## 3.5 Generalização da Desigualdade entre as Médias Aritmética e Quadrática

**Teorema 10.** *Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais positivos, então*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

*com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.*

*Demonstração.* Para demonstrarmos este teorema usaremos a seguinte identidade:

$$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab. \tag{3.3}$$

Seja

$$M_A^2 = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 2x_1x_2 + \cdots + 2x_{n-1}x_n}{n^2}$$

Então, pela definição acima

$$M_A^2 \leq \frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+(x_1^2+x_2^2)+\cdots+(x_{n-1}^2+x_n^2)}{n^2}$$
$$M_A^2 \leq \frac{nx_1^2+nx_2^2+\cdots+nx_n^2}{n^2}$$
$$M_A^2 \leq \frac{n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}{n^2}$$
$$M_A^2 \leq \frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n} = M_Q^2.$$

Daí

$$M_A^2 \leq M_Q^2 \Rightarrow M_A \leq M_Q.$$

Analisando a identidade (3.3), verificamos que a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$. Note assim que, $x_1^2+x_2^2 = 2x_1x_2$, $x_1^2+x_3^2 = 2x_1x_3$, $\cdots$ , $x_{n-1}^2+x_n^2 = 2x_{n-1}x_n$, o que implica em $x_1 = x_2, x_2 = x_3, \cdots, x_{n-1} = x_n$ e portanto $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

□

Demonstramos nas seções anteriores que $M_Q \geq M_A$, $M_A \geq M_G$ e $M_G \geq M_H$, por transitividade, podemos concluir finalmente que

$$M_Q \geq M_A \geq M_G \geq M_H.$$

## 3.6 Consequências da Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica

Como consequência imediata da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica temos os seguintes corolários:

**Corolário 2.** *Seja $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ todas as n-uplas de números reais tais que a soma é constante, isto é, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$, para algum $k \in \mathbb{R}_+$ fixado. Então o produto $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ será máximo quando $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.*

*Demonstração.* Sabendo que $M_A \geq M_G$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} &\geq \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n}\\ \frac{k}{n} &\geq \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n}\\ \left(\frac{k}{n}\right)^n &\geq x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n.\end{aligned}$$

Observe que o valor de $x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n$ não ultrapassa $\left(\frac{k}{n}\right)^n$, logo, o valor máximo para o produto $x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n$, será $\left(\frac{k}{n}\right)^n$, o que ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{k}{n}$. □

**Corolário 3.** *Seja $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ todas as $n$-uplas de números reais tais que o seu produto é constante, isto é, $x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n = t$, para algum $t \in \mathbb{R}_+$. Então a soma $x_1+x_2+...+x_n$ será mínima quando $x_1 = x_2 = ... = x_n$.*

*Demonstração.* Sabendo que $M_A \geq M_G$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} &\geq \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n}\\ \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} &\geq \sqrt[n]{t}\\ x_1+x_2+...+x_n &\geq n\sqrt[n]{t}.\end{aligned}$$

Observe que o menor valor para $x_1+x_2+...+x_n$ é $n\sqrt[n]{t}$.

Logo $n\sqrt[n]{t}$ é o valor mínimo para $x_1+x_2+...+x_n$ o que ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n = \sqrt[n]{t}$. □

## 3.7 Desigualdade do Rearranjo

**Teorema 11.** *Considere duas sequências de números reais positivos em ordem crescente*

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \text{ e } b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n.$$

*Para qualquer permutação $(a_1', a_2', ..., a_n')$ de $(a_1, a_2, ..., a_n)$, temos*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1'b_1 + a_2'b_2 + \cdots + a_n'b_n \geq a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n.$$

*Demonstração.* Suponha que $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$ e considere

$$S = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_rb_r + \cdots + a_sb_s + \cdots + a_nb_n.$$

Agora, escrevendo uma nova soma $S'$ trocando apenas a posição dos elementos $a_r$ e $a_s$ em $S$, temos

$$S' = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_sb_r + \cdots + a_rb_s + \cdots + a_nb_n.$$

Como $r < s$, tomando a diferença entre $S$ e $S'$, segue que

$$S - S' = a_rb_r + a_sb_s - a_sb_r - a_rb_s = a_r(b_r - b_s) + a_s(b_s - b_r)$$
$$S - S' = a_s(b_s - b_r) - a_r(b_s - b_r) = \underbrace{(a_s - a_r)}_{\geq 0}\underbrace{(b_s - b_r)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Assim, temos que $S \geq S'$, se, e somente se, $a_s \geq a_r$.

Repetindo esse processo, temos que

$$\mathbf{S} = a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_{(n-r+1)}b_r + \cdots + a_{(n-s+1)}b_s + \cdots + a_1b_n$$
$$S' = a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_{(n-s+1)}b_r + \cdots + a_{(n-r+1)}b_s + \cdots + a_1b_n.$$

A diferença entre $\mathbf{S}$ e $S'$ é

$$\mathbf{S} - S' = a_{(n-r+1)}b_r + a_{(n-s+1)}b_s - a_{(n-s+1)}b_r - a_{(n-r+1)}b_s$$
$$\mathbf{S} - S' = a_{(n-r+1)}(b_r - b_s) + a_{(n-s+1)}(b_s - b_r)$$
$$\mathbf{S} - S' = a_{(n-s+1)}(b_s - b_r) - a_{(n-r+1)}(b_s - b_r)$$
$$\mathbf{S} - S' = (a_{(n-s+1)} - a_{(n-r+1)})(b_s - b_r).$$

Como $r < s$, então $-s < -r$, o que implica $n-s+1 < n-r+1$ e assim $a_{(n-s+1)} \leq a_{(n-r+1)}$.

Então

$$\mathbf{S} - S' = \underbrace{(a_{(n-s+1)} - a_{(n-r+1)})}_{\leq 0}\underbrace{(b_s - b_r)}_{\geq 0} \leq 0$$

Assim, temos que $\mathbf{S} \leq S'$, se, e somente se, $a_s \geq a_r$, logo, por transitividade, $S \geq S' \geq \mathbf{S}$.

Portanto

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1'b_1 + a_2'b_2 + \cdots + a_n'b_n \geq a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n$$

$\square$

**Corolário 4.** *Considere a sequência de números reais positivos em ordem crescente* $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$*. Para qualquer permutação* $(a_1^{'}, a_2^{'}, ..., a_n^{'})$ *de* $(a_1, a_2, ..., a_n)$*, temos*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1a_1^{'} + a_2a_2^{'} + \cdots + a_na_n^{'}.$$

*Demonstração.* Tomando $b_1 = a_1, b_2 = a_2, ..., b_n = a_n$ e usando a desigualdade do rearranjo

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1^{'}b_1 + a_2^{'}b_2 + \cdots + a_n^{'}b_n$$

Temos

$$a_1a_1 + a_2a_2 + \cdots + a_na_n \geq a_1^{'}a_1 + a_2^{'}a_2 + \cdots + a_n^{'}a_n.$$

Assim

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1a_1^{'} + a_2a_2^{'} + \cdots + a_na_n^{'}$$

□

**Corolário 5.** *Seja* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *uma sequência de números reais positivos em ordem crescente. Para qualquer permutação* $(a_1^{'}, a_2^{'}, ..., a_n^{'})$ *de* $(a_1, a_2, ..., a_n)$*, tem-se*

$$\frac{a_1^{'}}{a_1} + \frac{a_2^{'}}{a_2} + \cdots + \frac{a_n^{'}}{a_n} \geq n.$$

*Demonstração.* Como $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$, temos que, $\dfrac{1}{a_n} \leq \dfrac{1}{a_{n-1}} \leq ... \leq \dfrac{1}{a_1}$.

Tomando $b_1 = \dfrac{1}{a_n}, b_2 = \dfrac{1}{a_{n-1}}, ..., b_n = \dfrac{1}{a_1}$ e usando a desigualdade do rearranjo

$$a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n \leq a_1^{'}b_1 + a_2^{'}b_2 + \cdots + a_n^{'}b_n$$

Temos

$$a_n \cdot \frac{1}{a_n} + a_{n-1} \cdot \frac{1}{a_{n-1}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{1}{a_1} \leq a_1^{'} \cdot \frac{1}{a_1} + a_2^{'} \cdot \frac{1}{a_2} + \cdots + a_n^{'} \cdot \frac{1}{a_n}$$

Assim

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}} \leq \frac{a_1^{'}}{a_1} + \frac{a_2^{'}}{a_2} + \cdots + \frac{a_n^{'}}{a_n}$$

Portanto

$$\frac{a_1^{'}}{a_1} + \frac{a_2^{'}}{a_2} + \cdots + \frac{a_n^{'}}{a_n} \geq n$$

□

## 3.8 Desigualdade de Nesbitt

**Teorema 12.** *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, então,* $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$.

*A igualdade ocorrendo se, e somente se, $a = b = c$.*

*Demonstração.* Inicialmente iremos mostrar que para todo $x$ real positivo, temos

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

De fato, para $x$ real positivo, temos que

$$(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x.$$

Logo, como $x > 0$, segue que

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Da desigualdade acima segue que para $a, b, c$ reais positivos, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b}\right) + \left(\frac{a+b}{a+c} + \frac{a+c}{a+b}\right) + \left(\frac{a+c}{b+c} + \frac{b+c}{a+c}\right) &\geq 2+2+2 = 6 \\
\left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{a+c}{b+c}\right) + \left(\frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{a+c}\right) + \left(\frac{a+c}{a+b} + \frac{a+c}{a+b}\right) &\geq 6 \\
\frac{2a}{b+c} + 1 + \frac{2b}{a+c} + 1 + \frac{2c}{b+c} + 1 &\geq 6 \\
2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+c}\right) &\geq 3 \\
\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+c} &\geq \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

A igualdade ocorrendo se, e somente se, $a = b = c$

□

## 3.9 Desigualdade de Chebyshev

**Teorema 13.** *Sejam $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$ duas listas de números reais positivos, então*

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) \cdot \left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right).$$

*A igualdade ocorrendo se, somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ou $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.*

*Demonstração.* Aplicando a desigualdade do rearranjo n vezes, segue que

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1 \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2 \\
&\vdots \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1
\end{aligned}$$

Adicionando todas as desigualdades, encontramos

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \geq a_1(b_1 + b_2 + ... + b_n) + \cdots + a_n(b_1 + b_2 + \cdots + b_n).$$

Daí

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n).$$

Dividindo os dois membros da desigualdade por $n^2$, obtemos

$$n\frac{(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)}{n^2} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}{n^2}.$$

Logo

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) \cdot \left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right).$$

□

Observação: Quando as duas listas de números reais positivos tiverem ordens opostas, ou seja, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ (e vice-versa),teremos

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) \cdot \left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right).$$

Podemos verificar a Desigualdade de Nesbitt (Teorema12) a partir da desigualdade de Chebyshev (Teorema13)

*Demonstração.* Sendo $a, b$ e $c$ números reais positivos e seja $s = a + b + c$, assumindo que $a \leq b \leq c$, então $-a \geq -b \geq -c$ o que implica $s - a \geq s - b \geq s - c$.

Escrevendo

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{a}{s-a}(s-a) + \frac{b}{s-b}(s-b) + \frac{c}{s-c}(s-c)$$

Aplicando a Desigualdade de Chebyshev para $\frac{a}{(s-a)} \leq \frac{b}{(s-b)} \leq \frac{c}{(s-c)}$ e $s-a \geq s-b \geq s-c$, temos

$$\frac{1}{3}\left[\frac{a}{s-a}(s-a)+\frac{b}{s-b}(s-b)+\frac{c}{s-c}(s-c)\right] \leq \frac{1}{9}\left[\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\right]\left[\underbrace{s-a+s-b+s-c}_{2s}\right]$$

$$\frac{1}{3}[\underbrace{a+b+c}_{s}] \leq \frac{1}{9}\left[\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right]2s$$

$$\frac{9s}{6s} \leq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$$

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$$

Portanto

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Pelo Teorema13, concluímos que a igualdade ocorre quando $s-a=s-b=s-c$, ou seja, quando $a=b=c$. $\square$

## 3.10 Desigualdade de Jensen

Nessa seção, apresentaremos a Desigualdade de Jensen, que é uma desigualdade relacionada as funções convexas, para isso introduziremos o conceito de função convexa e algumas proposições e propriedades.

### 3.10.1 Função Convexa

**Definição 3.1.** *Uma função $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada convexa no intervalo $I=[a,b]$, se para todo $t \in [0,1]$ e para todos os $x,y \in [a,b]$, a seguinte desigualdade ocorre:*

$$f(ty+(1-t)x) \leq tf(y)+(1-t)f(x)$$

Essa desigualdade, geometricamente nos diz que o gráfico de $f$ entre $x$ e $y$ está abaixo do segmento de reta que une os pontos $(x,f(x))$ e $(y,f(y))$

Figura 3.1: Função Convexa

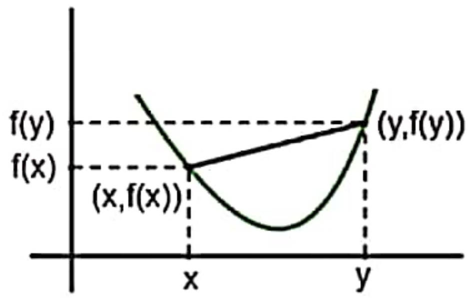



Figura 3.2: Fonte: Autor

Analiticamente, podemos constatar esse fato da seguinte forma:

A equação da reta que passa pelos pontos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ é expressa por

$$L(s) = f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \cdot (s - x). \tag{3.4}$$

Então, substituindo $s = ty + (1 - t)x$ em (3.4), obtemos

$$\begin{aligned}
L(ty + (1-t)x) &= f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \cdot (ty + (1-t)x - x) \\
&= f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \cdot (ty + x - tx - x) \\
&= f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \cdot (t(y - x)) \\
&= f(x) + \frac{t(f(y) - f(x))}{t(y - x)} \cdot (t(y - x)) \\
&= f(x) + t(f(y) - f(x)) \\
&= tf(y) + (1-t)f(x)
\end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade $f(ty+(1-tx)) \leq tf(y)+(1-t)f(x)$ é equivalente a desigualdade

$$f(ty + (1-t)x) \leq L(ty + (1-t)x).$$

É interessante observar que se a função $f$ é convexa no intervalo $[a, b]$, então $f$ é convexa em qualquer intervalo $[x, y] \subset [a, b]$.

### 3.10.2 Critérios para Verificar se uma Função é Convexa

**Critério1:** Uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se o conjunto $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y\}$ é convexo. [1]

*Demonstração*. Suponha que $f$ é convexa e sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ dois pontos do conjunto $U = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y\}$.

Para provar que $tB + (1-t)A = (tx_2 + (1-t)x_1, ty_2 + (1-t)y_1)$ pertence a $U$, qualquer que seja $t \in [0, 1]$, é suficiente demonstrar que $a \leq tx_2 + (1-t)x_1 \leq b$ e $f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq ty_2 + (1-t)y_1$.

A primeira condição segue imediatamente desde que $x_1$ e $x_2$ pertençam a $[a, b]$.

Para provar a segunda condição, usaremos o fato de que $f$ é convexa, assim:

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1).$$

Daí, se $f(x_2) \leq y_2$ e $f(x_1) \leq y_1$, temos que:

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq ty_2 + (1-t)y_1.$$

Por outro lado, $f$ é convexa se $U$ for convexo.

De fato, sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$ e tomando $A = (x_1, f(x_1))$, $B = (x_2, f(x_2)) \in U$.

Note que $A$ e $B$ pertencem a $U$, e sendo $U$ convexo, o segmento que liga $A$ e $B$ também pertence a $U$, isto é, os pontos da forma $tB + (1-t)A$ com $t \in [0, 1]$. Assim:

$$(tx_2 + (1-t)x_1, tf(x_2) + (1-t)f(x_1)) \in U.$$

Mas isso implica que

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1).$$

Daí, $f$ é convexa $\square$

[1] Um subconjunto $C$ do plano é convexo se, para qualquer par de pontos $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ em $C$, o segmento determinado por esses pontos está contido inteiramente em $C$. Uma vez que o segmento entre $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ é o conjunto de pontos da forma $t(x_2, y_2) + (1-t)(x_1, y_1)$, com $0 \leq t \leq 1$, a condição é que qualquer ponto descrito por esta expressão pertence a $C$.

**Critério2:** Uma função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, para cada $x_0 \in [a,b]$ a função $P(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ é não decrescente para $x \neq x_0$.

*Demonstração.* Suponha que $f$ é convexa. Para provar que $P(x)$ é não decrescente, tomamos $x < y$ e depois mostramos que $P(x) \leq P(y)$.

Uma das três situações a seguir pode acontecer: $x_0 < x < y$, $x < x_0 < y$ ou $x < y < x_0$.

Considerando a primeira situação, note que:

$$
\begin{aligned}
P(x) \leq P(y) &\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \\
&\Leftrightarrow (f(x) - f(x_0))(y - x_0) \leq (f(y) - f(x_0))(x - x_0) \\
&\Leftrightarrow f(x)(y - x_0) \leq f(y)(x - x_0) + f(x_0)(y - x) \\
&\Leftrightarrow f(x) \leq f(y)\frac{x - x_0}{y - y_0} + f(x_0)\frac{y - x}{y - y_0} \\
&\Leftrightarrow f\left(\frac{x - x_0}{y - x_0}y + \frac{y - x}{y - x_0}x_0\right) \leq f(y)\frac{x - x_0}{y - x_0} + f(x_0)\frac{y - x}{y - x_0}
\end{aligned}
$$

O resultado segue imediatamente □

**Critério3:** Se a função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável[2] com a primeira derivada não decrescente, então $f$ é convexa. Em particular, se $f$ é duas vezes diferenciável e $f''(x) \geq 0$, então a função é convexa.

*Demonstração.* Se $f"(x) \geq 0$, para $x \in [a,b]$, isso implica que $f'(x)$ não está diminuindo. Como $f'(x)$ não está diminuindo, a função é convexa.

Para todo $t \in [0,1]$, tomando $x = tb + (1-t)a$, um ponto em $[a,b]$, pelo Teorema do Valor Médio[3], existe $c \in (a,x)$ e $d \in (x,b)$ tal que:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(a) = (x - a)f'(c) = t(b - a)f'(c), \\
f(b) - f(x) = (b - x)f'(d) = (1 - t)(b - a)f'(d)
\end{aligned}
$$

Então, uma vez que $f'(x)$ é não decrescente, temos que:

$$(1-t)(f(x) - f(a)) = t(1-t)(b-a)f'(c) \leq t(1-t)(b-a)f'(d) = t(f(b) - f(x)).$$

[2]Uma função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em um ponto $c \in [a,b]$, se $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ existe e $f$ é diferenciável em $A \subset [a,b]$ se for diferenciável em cada ponto de $A$.

[3]**Teorema do Valor Médio:** Para uma função contínua $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que é derivável em $(a,b)$, existe um número $x \in (a,b)$ tal que $f'(x)(b-a) = f(b) - f(a)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
(1-t)(f(x)-f(a)) &\leq t(f(b)-f(x))\\
(1-t)f(x)-(1-t)f(a) &\leq tf(b)-tf(x)\\
f(x)-tf(x)-(1-t)f(a) &\leq tf(b)-tf(x)\\
f(x) &\leq tf(b)+(1-t)f(a)+tf(x)-tf(x)\\
f(x) &\leq tf(b)+(1-t)f(a)
\end{aligned}$$

□

### 3.10.3 Desigualdade de Jensen

**Teorema 14.** *Se a função $f$ é convexa em $[a,b]$, então, para qualquer $t_1,...,t_n \in [0,1]$, com $t_1+\cdots+t_n = 1$ e para $x_1,...,x_n \in [a,b]$, temos*

$$f(t_1x_1+\cdots+t_nx_n) \leq t_1f(x_1)+\cdots+t_nf(x_n). \tag{3.5}$$

*Demonstração.* A demonstração desse teorema será feita usando indução sobre n.

Se $n=1$, temos $t_1=1$, visto que, por hipótese, $t_1+t_2+\cdots+t_n=1$. Assim,

$$f(t_1x_1) = f(1\cdot x_1) = f(x_1) = 1\cdot f(x_1) = t_1\cdot f(x_1).$$

Se $n=2$, temos $t_2 = 1-t_1$, por hipótese. Agora, como $f$ é convexa em $[a,b]$, segue que:

$$f(t_1x_1+t_2x_2) = f(t_1x_1+(1-t_1)x_2) \leq t_1f(x_1)+(1-t_1)f(x_2) = t_1f(x_1)+t_2f(x_2).$$

Logo,

$$f(t_1x_1+t_2x_2) \leq t_1f(x_1)+t_2f(x_2).$$

Suponhamos, agora, que para algum $n \in \mathbb{N}$ e para números reais $t_1,t_2,\cdots,t_k \in [0,1]$ tais que $t_1+t_2+\cdots+t_k=1$, tenhamos:

$$f(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n) \leq t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n),$$

para $x_1,x_2,\cdots,x_n \in [a,b]$.

Sejam $t_1, t_2, \cdots, t_{n+1} \in [0,1]$ tais que $t_1 + t_2 + \cdots + t_{n+1} = 1$, ou equivalentemente, $1 - t_{n+1} = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$. Para $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \in [a,b]$, temos:

$$\begin{aligned} t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1} &= (t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) + t_{n+1}x_{n+1} \\ &= (1 - t_{n+1})\left(\frac{t_1}{1-t_{n+1}}x_1 + \frac{t_2}{1-t_{n+1}}x_2 + \cdots + \frac{t_n}{1-t_{n+1}}x_n\right) + t_{n+1}x_{n+1} \end{aligned}$$

Chamemos $y_{n+1} = \dfrac{t_1}{1-t_{n+1}}x_1 + \dfrac{t_2}{1-t_{n+1}}x_2 + \cdots + \dfrac{t_n}{1-t_{n+1}}x_n$.

Agora, como $a < x_i < b$, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, temos:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{t_1}{1-t_{n+1}}x_1 + \frac{t_2}{1-t_{n+1}}x_2 + \cdots + \frac{t_n}{1-t_{n+1}}x_n \\ &< \frac{t_1}{1-t_{n+1}}b + \frac{t_2}{1-t_{n+1}}b + \cdots + \frac{t_n}{1-t_{n+1}}b \\ &= \frac{b}{1-t_{n+1}}(t_1 + t_2 + \cdots + t_n) \\ &= \frac{b}{1-t_{n+1}}(1 - t_{n+1}) = b. \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos concluir que $y_{n+1} > a$. Portanto, $y_{n+1} \in [a,b]$.

Agora, como $f$ é convexa em [a, b], temos:

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_{n+1}x_{n+1}) = f((1 - t_{n+1})y_{n+1} + t_{n+1}x_{n+1})(3.15) \tag{3.6}$$

$$\leq (1 - t_{n+1})f(y_{n+1}) + t_{n+1}f(x_{n+1}).(3.16) \tag{3.7}$$

Para completar a prova de que a desigualdade 3.5é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, vamos mostrar que

$$(1 - t_{n+1})f(y_{n+1}) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n).(3.17) \tag{3.8}$$

Mas, como $1 - t_{n+1} = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$, temos:

$$\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{1 - t_{n+1}} = 1,$$

ou seja,

$$\frac{t_1}{1-t_{n+1}} + \frac{t_2}{1-t_{n+1}} + \cdots + \frac{t_n}{1-t_{n+1}} = 1.$$

Usando a hipótese de indução, obtemos:

$$f(y_{n+1}) = f\left(\frac{t_1}{1-t_{n+1}}x_1 + \frac{t_2}{1-t_{n+1}}x2 + \cdots + \frac{t_n}{1-t_{n+1}}x_n\right)(3.18) \tag{3.9}$$

$$\leq \frac{t_1}{1-t_{n+1}}f(x_1) + \frac{t_2}{1-t_{n+1}}f(x_2) + \cdots + \frac{t_n}{1-t_{n+1}}f(x_n).(3.19) \tag{3.10}$$

Por 3.6 e 3.9, verificamos a validade de 3.8 e, com isso, completamos a demonstração do teorema. $\square$

Em particular, para $x_1, ..., x_n \in [a, b]$ e $f$ convexa, podemos estabelecer que

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right)$$

De fato, fazendo $t_1 = t_2 = ... = t_n = \dfrac{1}{n}$ e substituindo na desigualdade de Jensen, obtemos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \cdots + \frac{1}{n}x_n\right) &\leq \frac{1}{n}f(x_1) + \frac{1}{n}f(x_2) + \cdots + \frac{1}{n}f(x_n) \\ f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) &\leq \frac{1}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right). \end{aligned}$$

### 3.10.4 Alguns Exemplos em que as Funções Convexas são Usadas para Estabelecer Desigualdades

**Exemplo 3.5.** *Mostre que a função $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$ é convexa em $\mathbb{R}_+$.*

*Demonstração.* Mostraremos que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = x^2$ é convexa em $\mathbb{R}$.

Para isso temos que mostrar que para qualquer $[a, b] \in \mathbb{R}$ e $t \in [0, 1]$, temos

$$f(tb + (1-t)a) \leq tf(b) + (1-t)f(a)$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(tb + (1-t)a) &= (tb + (1-t)a)^2 \\ &= (tb)^2 + [(1-t)a]^2 + 2tb(1-t)a \\ &= t^2b^2 + (1-t)(1-t)a^2 + 2tb(1-t)a \\ &= tb^2 - tb^2 + t^2b^2 + (1-t)a^2 - t(1-t)a^2 + 2tb(1-t)a \\ &= tb^2 + (1-t)a^2 - tb^2(1-t) - t(1-t)a^2 + 2tb(1-t)a \\ &= tb^2 + (1-t)a^2 - t(1-t)(b^2 + a^2 - 2ba) \\ &= tb^2 + (1-t)a^2 - t(1-t)(b-a)^2 \\ &\leq tb^2 + (1-t)a^2 \end{aligned}$$

Portanto

$$f(tb + (1-t)a) \leq tf(b) + (1-t)f(a)$$

Agora, sendo $f(x) = x^n$ com $x > 0$ e $n$ natural, como $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \geq 0$, temos que $f(x) = x^n$ é convexa em $\mathbb{R}_+$.

$\square$

Temos como aplicação disso:

i) Sejam $a$ e $b$ números reais positivos. Segue da convexidade da função $f(x) = x^n$ que $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, daí $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ que é a desigualdade entre a média aritmética e a média quadrática.

ii) A convexidade da função $x^n$ implica que $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$, daí $a^n + b^n \geq \frac{1}{2^{n-1}}$, com $a$ e $b$ positivos e tal que $a + b = 1$.

iii) Sejam $a$ e $b$ números positivos, temos que $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$.

De fato, considerando $f(x) = x^n$, segue que

$$\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n\right] = \frac{1}{2}\left[f\left(1+\frac{a}{b}\right) + f\left(1+\frac{b}{a}\right)\right] \geq f\left(\frac{\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}}{2}\right) \geq f(2) = 2^n$$

**Exemplo 3.6.** *A função exponencial $f(x) = e^x$ é convexa em $\mathbb{R}$, uma vez que $f''(x) = e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.*

## 3.11 Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica Ponderada

**Teorema 15.** *Se $x_1, ..., x_n, t_1, ..., t_n$ são números positivos e $t_1 + \cdots + t_n = 1$, então*

$$x_1^{t_1} \cdot ... \cdot x_n^{t_n} \leq t_1x_1 + \cdots + t_nx_n.$$

*Com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.*

*Demonstração.* De fato, uma vez que $x_i^{t_i} = e^{t_i \log_e x_i}$ e $e^x$ é convexa, temos que

$$\begin{aligned} x_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{t_n} &= e^{t_1 \log_e x_1} \cdot \ldots \cdot e^{t_n \log_e x_n} = e^{t_1 \log_e x_1 + \cdots + t_n \log_e x_n} \\ &\leq t_1 e^{\log_e x_1} + \cdots + t_n e^{\log_e x_n} = t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n \end{aligned}$$

□

Em particular, tomando $t_i = 1/n$, para $1 \leq i \leq n$, temos outra prova para a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para $n$ números. De fato, pelo Teorema 5,

$$\begin{aligned} x_1^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\frac{1}{n}} &\leq \frac{1}{n} x_1 + \cdots + \frac{1}{n} x_n \\ (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} &\leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

## 3.12 Desigualdade entre as Médias de Potências

**Teorema 16.** *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos e sejam $t_1, t_2, \ldots, t_n$ números reais positivos tais que $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$. Sejam $r$ e $s$ reais não nulos tais que $r \geq s$, então:*

$$(t_1 x_1^s + \cdots + t_n x_n^s)^{\frac{1}{s}} \leq (t_1 x_1^r + \cdots + t_n x_n^r)^{\frac{1}{r}}.$$

*Com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.*

*Demonstração.* Para a demonstração dessa desigualdade usaremos a convexidade da função $f(x) = x^\alpha$ para $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \geq 1$
Temos que $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} \geq 0$
*i)* Supondo que $r \geq s > 0$, temos $\dfrac{r}{s} \geq 1$. Tomando $\alpha = \dfrac{r}{s}$, segue que a função $f(x) = x^{\frac{r}{s}}$ é convexa, pois

$$f''(x) = \underbrace{\frac{r}{s}}_{>0} \underbrace{\left(\frac{r}{s} - 1\right)}_{\geq 0} \underbrace{x^{\left(\frac{r}{s}-2\right)}}_{>0} \geq 0.$$

Aplicando a desigualdade de Jensen para a função $f(x) = x^{\frac{r}{s}}$ na sequência $x_1^s, x_2^s, \ldots, x_n^s$, obtemos

$$f(t_1 x_1^s + t_2 x_2^s + \cdots + t_n x_n^s) \leq t_1 f(x_1^s) + t_2 f(x_2^s) + \cdots + t_n f(x_n^s)$$

Como $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$ e $x_1^s, x_2^s, ..., x_n^s \in \mathbb{R}_+^*$, segue que

$$(t_1x_1^s + t_2x_2^s + \cdots + t_nx_n^s)^{\frac{r}{s}} \leq t_1(x_1^s)^{\frac{r}{s}} + t_2(x_2^s)^{\frac{r}{s}} + \cdots + t_n(x_n^s)^{\frac{r}{s}}$$

$$(t_1x_1^s + t_2x_2^s + \cdots + t_nx_n^s)^{\frac{r}{s}} \leq t_1x_1^r + t_2x_2^r + \cdots + t_nx_n^r$$

Elevando ambos os membros da desigualdade a $\frac{1}{r}$, temos

$$\left((t_1x_1^s + t_2x_2^s + \cdots + t_nx_n^s)^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{1}{r}} \leq (t_1x_1^r + t_2x_2^r + \cdots + t_nx_n^r)^{\frac{1}{r}}$$

Logo,

$$(t_1x_1^s + t_2x_2^s + \cdots + t_nx_n^s)^{\frac{1}{s}} \leq (t_1x_1^r + t_2x_2^r + \cdots + t_nx_n^r)^{\frac{1}{r}}$$

*ii*) Agora, supondo que $s \leq r < 0$, temos $\dfrac{s}{r} \geq 1$. Tomando $\alpha = \dfrac{r}{s}$, segue que a função $f(x) = x^{\frac{s}{r}}$ é convexa, pois

$$f''(x) = \underbrace{\frac{s}{r}}_{>0}\underbrace{\left(\frac{s}{r} - 1\right)}_{\geq 0}\underbrace{x^{\left(\frac{s}{r}-2\right)}}_{>0} \geq 0.$$

Aplicando a desigualdade de Jensen para a função $f(x) = x^{\frac{s}{r}}$ na sequência $x_1^r, x_2^r, ..., x_n^r$, obtemos

$$f(t_1x_1^r + t_2x_2^r + \cdots + t_nx_n^r) \leq t_1f(x_1^r) + t_2f(x_2^r) + \cdots + t_nf(x_n^r)$$

Como $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$ e $x_1^r, x_2^r, ..., x_n^r \in \mathbb{R}_-^*$, segue que

$$(t_1x_1^r + t_2x_2^r + \cdots + t_nx_n^r)^{\frac{s}{r}} \leq t_1(x_1^r)^{\frac{s}{r}} + t_2(x_2^r)^{\frac{s}{r}} + \cdots + t_n(x_n^r)^{\frac{s}{r}}$$

$$(t_1x_1^r + t_2x_2^r + \cdots + t_nx_n^r)^{\frac{s}{r}} \leq t_1x_1^s + t_2x_2^s + \cdots + t_nx_n^s$$

Elevando ambos os membros da desigualdade a $\frac{1}{s} < 0$, temos

$$\left((t_1x_1^r + t_2x_2^r + \cdots + t_nx_n^r)^{\frac{s}{r}}\right)^{\frac{1}{s}} \geq (t_1x_1^s + t_2x_2^s + \cdots + t_nx_n^s)^{\frac{1}{s}}$$

Logo,

$$(t_1x_1^r + t_2x_2^r + \cdots + t_nx_n^r)^{\frac{1}{r}} \geq (t_1x_1^s + t_2x_2^s + \cdots + t_nx_n^s)^{\frac{1}{s}}$$

Portanto,

$$(t_1x_1^s + t_2x_2^s + \cdots + t_nx_n^s)^{\frac{1}{s}} \leq (t_1x_1^r + t_2x_2^r + \cdots + t_nx_n^r)^{\frac{1}{r}}$$

*iii*) Finalmente, no caso em que $r > 0 > s$, $f(x) = x^{\frac{r}{s}}$ é convexa, pois $r$ e $s$ têm sinais diferentes, e a demonstração segue como no caso *i*). □

## 3.13 Desigualdade de Young

**Teorema 17.** *Sejam $x, y$ números reais positivos. Se $a, b > 0$ tal que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, então $xy \leq \frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b}$.*

*Com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x^a = y^b$.*

*Demonstração.* Tomando $x_1 = x^a, t_1 = \frac{1}{a}$ e $x_2 = y^b, t_2 = \frac{1}{b}$,

Da desigualdade das médias aritmética e geométrica ponderada, temos

$$x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \leq t_1 x_1 + t_2 x_2$$
$$(x^a)^{\frac{1}{a}} (y^b)^{\frac{1}{b}} \leq \frac{1}{a} x^a + \frac{1}{b} y^b.$$

Assim

$$xy \leq \frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b}.$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x^a = y^b$. □

## 3.14 Desigualdade de Holder

**Teorema 18.** *Sejam $x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n$ números reais positivos e $a, b > 0$, tal que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, então*

$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \leq (x_1^a + \cdots + x_n^a)^{\frac{1}{a}} (y_1^b + \cdots + y_n^b)^{\frac{1}{b}}. \tag{3.11}$$

*A igualdade ocorrendo se, e somente se, $\frac{x_1^a}{y_1^b} = \frac{x_2^a}{y_2^b} = ... = \frac{x_n^a}{y_n^b}$.*

*Demonstração.* Suponha inicialmente que $x_1^a + \cdots + x_n^a = y_1^b + \cdots + y_n^b = 1$.

Usando a desigualdade de Young $n$ vezes, temos

$$x_1 y_1 \leq \frac{x_1^a}{a} + \frac{y_1^b}{b}$$
$$x_2 y_2 \leq \frac{x_2^a}{a} + \frac{y_2^b}{b}$$
$$\vdots$$
$$x_n y_n \leq \frac{x_n^a}{a} + \frac{x_n^b}{b}$$

Somando todas as desigualdades, membro a membro, obtemos:

$$
\begin{aligned}
x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \leq \frac{x_1^a}{a} + \frac{y_1^b}{b} + \cdots + \frac{x_n^a}{a} + \frac{y_n^b}{b} &= \frac{1}{a}(x_1^a + \cdots + x_n^a) + \frac{1}{b}(y_1^b + \cdots + y_n^b) \\
&= \frac{1}{a} \cdot 1 + \frac{1}{b} \cdot 1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1
\end{aligned}
$$

Supondo agora que $x_1^a + \cdots + x_n^a = A$ e $y_1^b + \cdots + y_n^b = B$ e tomando $x_i' = \dfrac{x_i}{A^{\frac{1}{a}}}$ e $y_i' = \dfrac{y_i}{B^{\frac{1}{b}}}$, com $1 \leq i \leq n$, segue que

$$(x_1')^a + \cdots + (x_n')^a = \left(\frac{x_1}{A^{\frac{1}{a}}}\right)^a + \cdots + \left(\frac{x_n}{A^{\frac{1}{a}}}\right)^a = \frac{x_1^a}{A} + \cdots + \frac{x_n^a}{A} = \frac{x_1^a + \cdots + x_n^a}{A} = \frac{A}{A} = 1$$

e

$$(y_1')^b + \cdots + (y_n')^b = \left(\frac{y_1}{B^{\frac{1}{b}}}\right)^b + \cdots + \left(\frac{y_n}{B^{\frac{1}{b}}}\right)^b = \frac{y_1^b}{B} + \cdots + \frac{y_n^b}{B} = \frac{y_1^b + \cdots + y_n^b}{B} = \frac{B}{B} = 1.$$

Assim

$$x_1'y_1' + \cdots + x_n'y_n' = \frac{x_1}{A^{\frac{1}{a}}}\frac{y_1}{B^{\frac{1}{b}}} + \cdots + \frac{x_n}{A^{\frac{1}{a}}}\frac{y_n}{B^{\frac{1}{b}}} = \frac{1}{A^{\frac{1}{a}}B^{\frac{1}{b}}}(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) \leq 1.$$

Logo, $x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \leq A^{\frac{1}{a}}B^{\frac{1}{b}}$ e portanto

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \leq (x_1^a + \cdots + x_n^a)^{\frac{1}{a}}(y_1^b + \cdots + y_n^b)^{\frac{1}{b}}.$$

□

**Observação 3.1.** *Tomando $a = b = 2$ em (3.11), obtemos a desigualdade de Cauchy-Schwarz.*

*Demonstração.* De fato, tomando $a = b = 2$, obtemos

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}(y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Daí

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \leq [(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, elevando ao quadrado ambos os membros da desigualdade, encontramos

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

□

### 3.14.1 Duas Extensões da Desigualdade de Holder

**Teorema 19.** *Sejam $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$, números reais positivos e $a, b, c > 0$, de modo que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, então*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)^c\right)^{\frac{1}{c}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^a\right)^{\frac{1}{a}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^b\right)^{\frac{1}{b}}.$$

*Demonstração.* Aplicando a desigualdade de Holder aos números $x_1^c, ..., x_n^c, y_1^c, ..., y_n^c$, com $a' = \frac{a}{c}$ e $b' = \frac{b}{c}$, temos

$$\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)^c = \sum_{i=1}^{n}x_i^cy_i^c \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i^c)^{a'}\right)^{\frac{1}{a'}}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i^c)^{b'}\right)^{\frac{1}{b'}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)^c \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i^c)^{\frac{a}{c}}\right)^{\frac{1}{a'}}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i^c)^{\frac{b}{c}}\right)^{\frac{1}{b'}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)^c \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i^c)^{\frac{a}{c}}\right)^{\frac{c}{a}}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i^c)^{\frac{b}{c}}\right)^{\frac{c}{b}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)^c \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\frac{ca}{c}}\right)^{\frac{1}{a}}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^{\frac{cb}{c}}\right)^{\frac{1}{b}}\right)^c$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)^c\right)^{\frac{1}{c}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^a\right)^{\frac{1}{a}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^b\right)^{\frac{1}{b}}.$$

□

**Teorema 20.** *Sejam $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n$, números reais positivos e $a, b, c > 0$ de modo que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, então*

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_iz_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i^a)\right)^{\frac{1}{a}}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i^b)\right)^{\frac{1}{b}}\left(\sum_{i=1}^{n}(z_i^c)\right)^{\frac{1}{c}}.$$

*Demonstração.* A demonstração segue análoga a demonstração da Desigualdade de Holder.

□

## 3.15 Desigualdade de Minkowski

A desigualdade de Minkowski é uma consequência da desigualdade de Holder e também uma generalização da Desigualdade Triangular.

**Teorema 21.** *Sejam $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ números reais positivos e $p > 1$, então*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

*A igualdade ocorrendo se, e somente se* $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = ... = \dfrac{x_n}{y_n}$.

*Demonstração.* Note que $(x_n+y_n)^p = (x_n+y_n)^{p-1}(x_n+y_n) = x_n(x_n+y_n)^{p-1}+y_n(x_n+y_n)^{p-1}$.

Temos então que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{p-1}. \tag{3.12}$$

Aplicando a desigualdade de Holder a cada termo da soma no lado direito da equação (3.12) com $q$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Substituindo essas desigualdades em (3.12), segue que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Colocando $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$ em evidência, temos

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.13}$$

Observando que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1 \Longleftrightarrow q(p-1)=p \Longleftrightarrow \dfrac{1}{p}=1-\dfrac{1}{q}$ e substituindo em (3.13), obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Assim

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\left(\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Daí

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $1-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}$ segue que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

# Capítulo 4

# PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Nesse último capítulo, trabalharemos com algumas aplicações das desigualdades demonstradas nos capítulos anteriores, apresentaremos uma série de problemas relacionados a álgebra, geometria e funções cujas soluções tradicionais utilizadas no ensino médio e superior são, muitas das vezes difíceis e exigindo cálculos extensos. Daremos enfase as desigualdades das médias mas utilizaremos também as desigualdades de Cauchy-Schwarz e triangular, mostrando como a aplicação das desigualdades é acessível e ao mesmo tempo fascinante na resolução de problemas de otimização.

**Problema 4.1.** *Dentre todos os números reais $x$ e $y$ de soma igual a 6, determine aqueles cuja a soma dos quadrados é mínima. Determine também a soma mínima.*

**Solução.** *Sabendo que $x$ e $y$ são dois números reais cuja soma é igual a 6, temos que $x + y = 6$, e seja $S$ a soma de seus quadrados temos $S = x^2 + y^2$.*

*Sendo $M_A = \frac{x+y}{2}$ e $M_Q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, pela desigualdade entre as média quadrática e aritmética, temos $M_Q \geq M_A$, assim:*

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$$

$$\sqrt{\frac{S}{2}} \geq \frac{6}{2}$$

$$\left(\sqrt{\frac{S}{2}}\right)^2 \geq 3^2$$

$$\frac{S}{2} \geq 9$$

$$S \geq 18.$$

*O menor valor para a soma $S$ é $S = 18$, essa igualdade ocorrendo quando $x = y = 3$.*

**Problema 4.2.** *Mostre que entre todos os retângulos de perímetro $2p$, o quadrado é o de maior área.*

**Solução.** *Sendo $x$ e $y$ as medidas dos lados do retângulo, temos que seu perímetro é $2p = 2(x+y)$ e daí $p = x+y$ e sua área é $S = xy$.*
*Sendo $M_A = \frac{x+y}{2}$ e $M_G = \sqrt{xy}$. Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos $M_A \geq M_G$, assim,*

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{p}{2} \geq \sqrt{S} \Rightarrow S \leq \frac{p^2}{4}.$$

*A área $S$ não ultrapassa o valor $\frac{p^2}{4}$, logo o maior valor que $S$ pode assumir é $\frac{p^2}{4}$.*

*Essa igualdade só ocorre quando $x = y$. Portanto, o retângulo de maior área é o quadrado cuja área é $S = \frac{p^2}{4}$.*

**Problema 4.3.** *De todos os paralelepípedos, conhecida a soma das medidas das três arestas perpendiculares entre sí, encontrar o paralelepípedo de maior volume.*

**Solução.** *Sejam $a$, $b$ e $c$ as medidas das três arestas perpendiculares entre sí, chamando de $S$ a soma dessas três medidas e de $V$ o volume do paralelepípedo, temos então que:*

$$S = a+b+c \quad e \quad V = abc.$$

*Sendo $M_A = \frac{a+b+c}{3}$ e $M_G = \sqrt[3]{abc}$. Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica nas três medidas, temos $M_A \geq M_G$, assim,*

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

*Daí,*

$$\frac{S}{3} \geq \sqrt[3]{V} \Rightarrow \frac{S^3}{27} \geq V.$$

*O volume $V$ não ultrapassa o valor $\frac{S^3}{27}$, logo o maior volume é $V = \frac{S^3}{27}$ e a igualdade ocorrendo quando $a = b = c = \frac{S}{3}$, ou seja, quando o paralelepípedo for um cubo.*

**Problema 4.4.** *Determine as dimensões do paralelepípedo de menor diagonal possível, sabendo que a soma das medidas de todas as suas arestas é 12.*

**Solução.** *Sejam $a, b$ e $c$ as dimensões do paralelepípedo de menor diagonal possível, sabendo que a soma das medidas de todas as suas arestas é 12, temos que $4a + 4b + 4c = 12$ o que implica em $a + b + c = 3$.*

*Sabendo que a diagonal $D$ desse paralelepípedo é dada por $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ e que $M_A = \frac{a+b+c}{3}$ e $M_Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$. Aplicando a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética às dimensões a,b e c, temos $M_Q \geq M_A$, daí,*

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

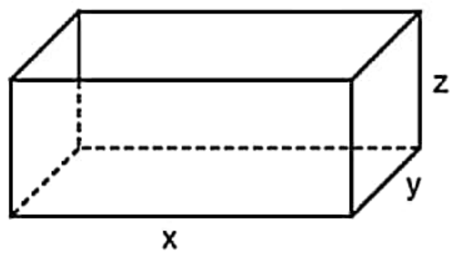
*e assim,*

$$\frac{D}{\sqrt{3}} \geq \frac{3}{3} \Rightarrow D \geq \sqrt{3}.$$

*O menor valor para a diagonal do cubo é $\sqrt{3}$, essa igualdade ocorrendo quando $a = b = c = 1$. Assim, o paralelepípedo de menor diagonal possível quando a soma das medidas de suas arestas é 12, é um cubo cuja aresta mede 1.*

**Problema 4.5.** *De todas as caixas retangulares sem tampa e tendo uma determinada área de superfície, encontre a única com volume máximo.*

Figura 4.1: Caixa sem tampa




Fonte: O autor

**Solução.** *Sejam $x, y$ e $z$ os comprimentos das dimensões da caixa da figura (4.1), seja também $S$ a sua área de superfície.*

*Então,* $S = xy + 2xz + 2zy$, *e da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica aplicada aos termos da sequência* $(xy, 2xz, 2yz)$ *temos:*

$$M_A = \frac{xy + 2xz + 2yz}{3} \quad e \quad M_G = \sqrt[3]{xy \cdot 2xz \cdot 2yz} = \sqrt[3]{(2xyz)^2}$$

*Como* $M_A \geq M_G$, *segue que:*

$$\frac{xy + 2xz + 2yz}{3} \geq \sqrt[3]{(2xyz)^2}.$$

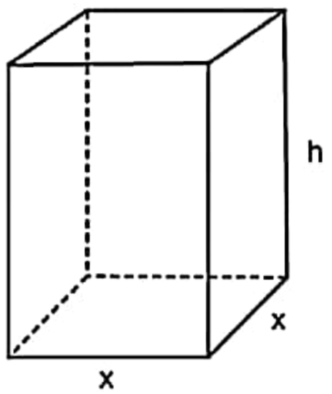
*Agora, sendo* $V$ *o volume da caixa, obtemos:*

$$\frac{S}{3} \geq \sqrt[3]{(2V)^2}$$
$$\left(\frac{S}{3}\right)^3 \geq (2V)^2$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{S}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \geq V.$$

*Observe que o volume da caixa não ultrapassa o valor de* $\frac{1}{2}\left(\frac{S}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, *logo o volume máximo da caixa é* $\frac{1}{2}\left(\frac{S}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, *a igualdade ocorrendo quando* $xy = 2xz = 2yz$, *o que implica em* $x = y = \sqrt{\frac{S}{3}}$ *e* $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}}$.

**Problema 4.6.** *Se* 1200 $cm^2$ *de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa e as dimensões da mesma para que isso ocorra.*

Figura 4.2: Caixa com base quadrada




Fonte: O autor

**Solução.** *Considere o paralelepípedo da figura. Observe que a área da base* $A_b$ *é* $x^2$, *sua área lateral* $A_l$ *é* $4xh$, *sua área total* $A_t$ *é* $x^2+4xh$ *e seu volume* $V$ *é* $x^2h$.

*Tomando a sequência* $(x^2, 4xh)$, *segue que* $M_A = \frac{x^2+4xh}{2} = \frac{1200}{2} = 600$ *e* $M_G = \sqrt{x^2 \cdot 4xh} = \sqrt{4x^3h} = 2\sqrt{x^2h}\sqrt{x} = 2\sqrt{V}\sqrt{x}$. *Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica aos valores da sequência temos* $M_A \geq M_G$, *assim,*

$$600 \geq 2\sqrt{V}\sqrt{x}$$

*o que não resolve o problema, pois não conseguimos escrever a desigualdade em função apenas de* $V$.

*Vamos então reescrever a sequência* $(x^2, 4xh)$ *como* $(x^2, 2xh, 2xh)$. *Assim, temos que:*

$$M_A = \frac{x^2+2xh+2xh}{3} = \frac{1200}{3} = 400 \text{ e}$$
$$M_G = \sqrt[3]{x^2 \cdot 2xh \cdot 2xh} = \sqrt[3]{4x^4h^2} = \sqrt[3]{4V^2}.$$

*Daí, como* $M_A \geq M_G$, *segue que:*

$$400 \geq \sqrt[3]{4V^2} \Rightarrow 400^3 \geq 4V^2$$
$$16000000 \geq V^2 \Rightarrow \sqrt{16000000} \geq V$$
$$4000 \geq V$$

*O volume não ultrapassa o valor* $4000$, *logo o volume máximo é* $V = 4000$, *essa igualdade ocorrendo quando* $x^2 = 2xh$, *o que implica em* $x = 2h$.

*Como* $x^2+2xh+2xh = 1200$, *segue que* $2xh+2xh+2xh = 1200$, *daí* $6xh = 1200$, *então* $xh = 200$, *mas como* $x = 2h$, *temos que* $2h^2 = 200 \Rightarrow h = 10$ *e* $x = 20$.

*Logo, as dimensões são* $x = 20$ *cm e* $h = 10$ *cm e o volume máximo da caixa é* $V = 4000\ cm^3$

**Problema 4.7.** *Uma lata de zinco de volume* $16\pi\ cm^3$ *deve ter a forma de um cilíndro circular reto. Determine a altura e o raio do cilíndro para que a quantidade de material usado em sua fabricação seja a menor possível.*

**Solução.** *Seja* $h$ *a altura do cilíndro e* $R$ *o raio da base. Seja também* $S$ *a área da superfície total do cilíndro e* $V$ *o seu volume, temos* $S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$ *e* $V = \pi R^2 h = 16\pi\ cm^3$ *o que implica* $R^2h = 16\ cm^3$.

*Tomando a sequência* $(2\pi R^2, 2\pi Rh)$, *segue que* $M_A = \frac{2\pi R^2 + 2\pi Rh}{2} = \frac{S}{2}$ *e* $M_G = \sqrt{2\pi R^2 \cdot 2\pi Rh} = \sqrt{4\pi^2 R^3 h} = \sqrt{4\pi R^2 h \cdot \pi R} = \sqrt{4V \cdot \pi R}$. *Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica na sequência temos* $M_A \geq M_G$, *assim,*

$$\frac{S}{2} \geq \sqrt{4V \cdot \pi R}$$

*o que não resolve nosso problema pois, não conseguimos escrever a desigualdade em função apenas de* $S$. *Para isso vamos reescrever nossa sequência* $(2\pi R^2, 2\pi Rh)$ *como* $(2\pi R^2, \pi Rh, \pi Rh)$. *Aplicando agora a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica a essa nova sequência, temos:*

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{2\pi R^2 + \pi Rh + \pi Rh}{3} = \frac{2\pi R^2 + 2\pi Rh}{3} = \frac{S}{3} \\ M_G &= \sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \pi Rh \cdot \pi Rh} = \sqrt[3]{2\pi^3 \cdot R^4 \cdot h^2} = \sqrt[3]{2\pi^3 (R^2 h)^2} \\ M_G &= \sqrt[3]{2\pi^3 \cdot 16^2} = \sqrt[3]{2\pi^3 \cdot (2^4)^2} = \sqrt[3]{2^9 \pi^3} = 8\pi. \end{aligned}$$

*Como* $M_A \geq M_G$, *temos:*

$$\frac{S}{3} \geq 8\pi \Rightarrow S \geq 24\pi.$$

*O valor mínimo da área* $S$ *é* $24\pi$ $cm^2$, *essa igualdade ocorrendo quando* $2\pi R^2 = \pi Rh$, *ou seja, quando* $2R = h$.

*Daí, como* $R^2 h = 16$ *e* $h = 2R$, *segue que* $R^2 \cdot 2R = 16 \Rightarrow 2R^3 = 16 \Rightarrow R = 2$ $cm$ *e* $h = 4$ $cm$.

**Problema 4.8.** *Qual o maior valor que a soma das coordenadas de um ponto, pertencente a circunferência* $x^2 + y^2 = 18$ *pode assumir?*

**Solução.** *Seja* $P(x, y)$ *um ponto pertencente a essa circunferência. Aplicando a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética às coordenadas desse ponto, temos:*

$$M_A = \frac{x+y}{2} \quad e \quad M_Q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

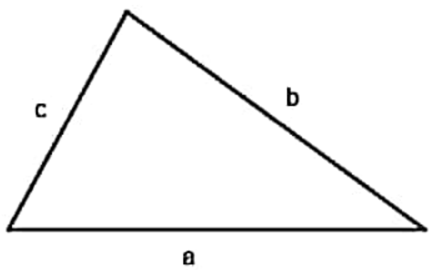
*Como, $M_Q \geq M_A$, obtemos:*

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$$
$$\sqrt{\frac{18}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$$
$$\sqrt{9} \geq \frac{x+y}{2}$$
$$3 \geq \frac{x+y}{2}$$
$$6 \geq x+y$$

*A soma das coordenadas $x$ e $y$ do ponto $P$ não ultrapassa o valor 6, logo o maior valor para essa soma é $x+y=6$, essa igualdade ocorre quando $x=y=3$.*

**Problema 4.9.** ***(Desigualdade Isoperimétrica para Triângulos)****Prove que entre todos os triângulos de perímetro constante $2p$, o equilátero é o que possui a maior área.*

Figura 4.3: Triângulo de lados a, b e c




Fonte: O autor

**Solução.** *Considere o triângulo de lados $a, b$ e $c$, conforme a figura 4.3.*

*Sendo $2p = a+b+c$ o seu perímetro. Vamos determinar a sua área $S$ através da Fórmula de Heron, assim, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.*

*Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica aos termos da sequência $(p-a, p-b, p-c)$, temos:*

$$M_A = \frac{p-a+p-b+p-c}{3} = \frac{3p-(a+b+c)}{3} = \frac{3p-2p}{3} = \frac{p}{3} \quad e$$
$$M_G = \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

*Como $M_A \geq M_G$, temos:*

$$\frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow \frac{p^3}{27} \geq (p-a)(p-b)(p-c)$$

*multiplicando ambos os membros dessa última desigualdade por $p$, obtemos:*

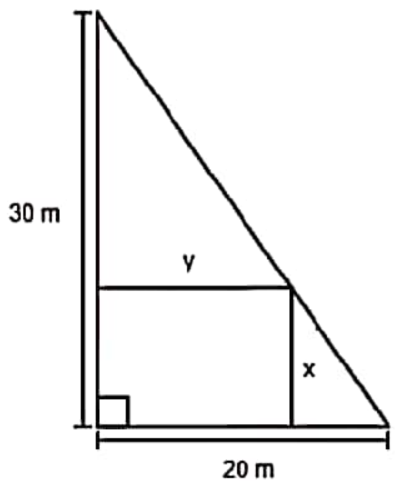
$$\frac{p^4}{27} \geq p(p-a)(p-b)(p-c) \Rightarrow \sqrt{\frac{p^4}{27}} \geq \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow \frac{p^2\sqrt{3}}{9} \geq S$$

*Observe que $S$ não ultrapassa o valor de $\frac{p^2\sqrt{3}}{9}$. Logo o valor máximo de $S$ é $\frac{p^2\sqrt{3}}{9}$, essa igualdade ocorrendo quando $p-a = p-b = p-c \Rightarrow a = b = c$.*

*Portanto, a área máxima é obtida quando o triângulo é equilátero.*

**Problema 4.10.** *Num terreno na forma de triângulo retângulo com catetos de medidas* 20 $m$ e 30 $m$, *deseja-se construir uma casa retangular de dimensões $x$ e $y$ como na figura 4.4.*

Figura 4.4: Triângulo Retângulo



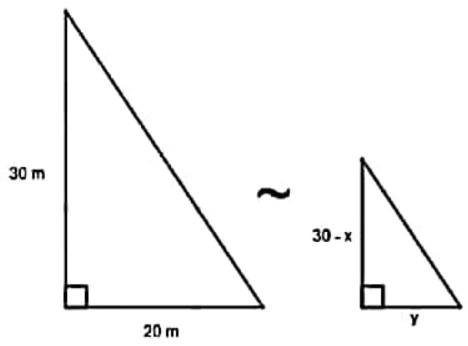

Fonte: O autor

*a) Exprima $y$ em função de $x$.*

*b) Para que valores de $x$ e $y$ a área ocupada pela casa é máxima?*

**Solução.** *a) A ideia usual é observar a semelhança entre os triângulos:*

Figura 4.5: Triângulos Semelhantes




Fonte: O autor

*e obter a relação:*

$$\frac{y}{20} = \frac{30-x}{30} \Rightarrow y = \frac{20(30-x)}{30} \Rightarrow y = \frac{2}{3}(30-x)$$

*b) Sabemos que a área do retângulo é $A = xy$. Substituindo $y = \frac{2}{3}(30-x)$ em $A = xy$, obtemos:*

$$A = \frac{2}{3} \cdot x(30-x).$$

*Tomando a sequência $(x, 30-x)$, segue que $M_A = \frac{x+30-x}{2} = 15$ e $M_G = \sqrt{x(30-x)}$. Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica aos termos dessa sequência, temos $M_A \geq M_G$, assim, $15 \geq \sqrt{x(30-x)}$*

*Mas, $A = \frac{2}{3} \cdot x(30-x)$ e $15 \geq \sqrt{x(30-x)}$. Multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por $\sqrt{\frac{2}{3}}$, obtemos:*

$$5\sqrt{6} \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{x(30-x)} \Rightarrow 5\sqrt{6} \geq \sqrt{\frac{2}{3} \cdot x(30-x)} \Rightarrow 5\sqrt{6} \geq \sqrt{A} \qquad (4.1)$$

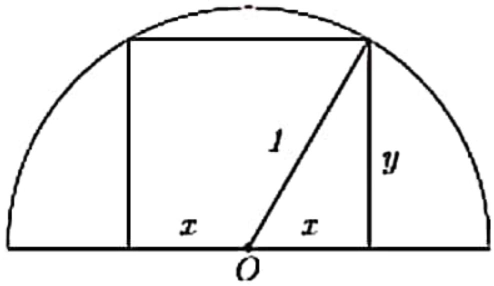
*Elevando ambos os membros da desigualdade (4.1) ao quadrado, obtemos $150 \geq A$.*

*Observe que $A$ não ultrapassa o valor de 150, logo a área máxima ocupada pela casa é $A = 150\ m^2$.*

*A igualdade ocorrendo quando $x = 30 - x$ o que implica em $x = 15\ m$ e $y = 10\ m$.*

**Problema 4.11.** *Encontrar as dimensões do retângulo de maior perímetro possível que pode ser inscrito num semicírculo de raio* 1.

Figura 4.6: Semicírculo de raio 1




Fonte: O autor

**Solução.** *Considere o retângulo de lados* $2x$ *e* $y$ *inscrito numa semicircunferência de raio 1, conforme a figura 4.6, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo formado, temos:*

$$x^2 + y^2 = 1$$

*Seja* $2p$ *o perímetro desse retângulo, temos:*

$$2p = 4x + 2y \Rightarrow p = 2x + y$$

*Assim,*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ p = 2x + y \end{cases}$$

*Considere agora as sequências* $(2, 1)$ *e* $(x, y)$. *Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que:*

$$2 \cdot x + 1 \cdot y \leq \sqrt{2^2 + 1^2}\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$2x + y \leq \sqrt{5}\sqrt{1}$$
$$p \leq \sqrt{5}$$
$$2p \leq 2\sqrt{5}$$

*Observe que o perímetro $2p$ não ultrapassa $2\sqrt{5}$, assim o maior valor para $2p$ é $2\sqrt{5}$, daí, $2p = 2\sqrt{5}$, se, e somente se, $\frac{2}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = 2y$. Substituindo $x = 2y$ em $x^2 + y^2 = 1$, obtemos:*

$$(2y)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 5y^2 = 1 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

*e como $x = 2y$ segue que $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Portanto, $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e $y = \frac{\sqrt{5}}{5}$.*

**Problema 4.12.** *Determine o ponto sobre a reta $y = 2x + 3$ que está mais próximo da origem.*

**Solução.** *Queremos encontrar a menor distância entre um ponto $P$ da reta $y = 2x + 3$ e a origem$(0, 0)$.*
*Para isso, vamos determinar a distância entre um ponto $P(x, y)$ da reta à origem $O(0, 0)$.*
*Da geometria analítica, segue que a distância entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é dado por:*

$$d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

*Assim,*

$$d_{PO} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

*Como $y = 2x + 3$, então $-2x + y = 3$.*
*Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz sabemos que se $a_1, a_2; b_1$ e $b_2$ são números reais, então $a_1b_1 + a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.*
*Assim, sendo $a_1 = -2, a_2 = 1, b_1 = x$ e $b_2 = y$, temos:*

$$-2 \cdot x + 1 \cdot y \leq \sqrt{(-2)^2 + 1^2}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

*Daí,*

$$3 \leq \sqrt{5} \cdot d_{PO} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{3\sqrt{5}}{5} \leq d_{PO}.$$

*Observe que o menor valor da distância de $P$ até a origem nunca é menor que $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, assim o menor valor de $d_{PO}$ é $d_{PO} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ e essa igualdade só ocorre se, e somente se, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, ou seja, $\frac{-2}{x} = \frac{1}{y}$, daí, $x = -2y$.*
*Como $-2x + y = 3$ e $x = -2y$, temos, substituindo $x = -2y$ em $-2x + y = 3$:*

$$-2(-2y) + y = 3 \Rightarrow 5y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{5}.$$

*Assim, $x = \frac{-6}{5}$ e $y = \frac{3}{5}$. Portanto $P(\frac{-6}{5}, \frac{3}{5})$.*

**Problema 4.13.** *Dados dois pontos $A$ e $B$ de um mesmo lado de uma reta $r$, determinar o ponto $P$ sobre $r$ de forma que a soma dos segmentos $\overline{PA} + \overline{PB}$ seja mínima.*

**Solução.** *Para resolver este problema consideramos $B'$ o ponto simétrico de $B$ em relação a $r$ e unimos $B'$ com $A$, encontrando assim o ponto $P$ que é o ponto de interseção do segmento $\overline{AB'}$ com $r$.*

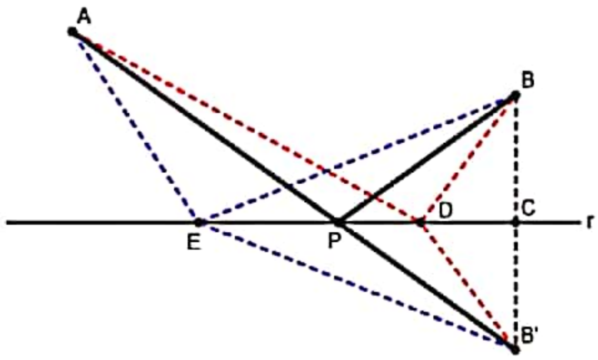



Figura 4.7

*Podemos considerar os pontos $D$ e $E$ sobre a reta $r$, conforme a figura (4.7) e verificar que para qualquer um deles o ponto $P$ é o que nos dá a soma das distâncias mínima.*

*Para esta prova, usaremos a desigualdade triangular.*

*Seja $C$ o ponto de interseção de $\overline{BB'}$ com a reta $r$, observe que:*

$$\triangle BDC \equiv B'DC \quad e \quad \triangle\, BPC \equiv \triangle B'PC.$$

*Assim,*

$$d_{DB} = d_{DB'} \quad e \quad d_{PB} = d_{PB'}.$$

*Aplicando a Desigualdade Triangular ao triângulo $\triangle ADB'$, temos:*

$$d_{AD} + d_{DB'} = d_{AD} + d_{DB} > d_{AB'} = d_{AP} + d_{PB'} = d_{AP} + d_{PB}.$$

*Portanto o ponto $D$ não torna a soma $d_{AD} + d_{DB}$ mínima.*

*Analogamente, temos que o ponto $E$ também não torna a soma $d_{AE} + d_{EB}$ mínima.*

*Logo, o ponto $P$, que é a interseção do segmento $\overline{AB'}$ com a reta $r$ é o ponto que torna a soma $d_{AP} + d_{PB}$ mínima.*

**Problema 4.14.** *Determine a hipotenusa do triângulo de menor área circunscrito a um círculo de raio 1.*

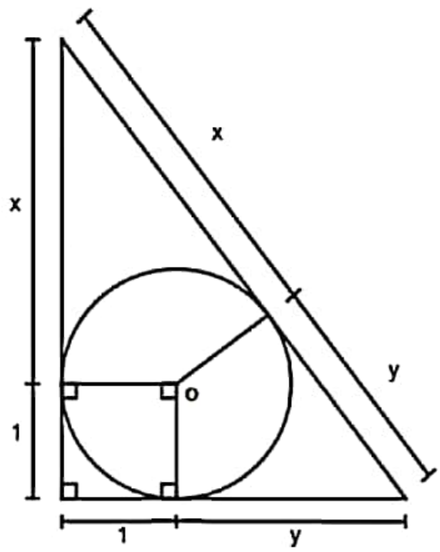



Figura 4.8

**Solução.** *Considere o triângulo da figura* (4.8). *Aplicando Pitágoras, temos:*

$$(1+x)^2 + (1+y)^2 = (x+y)^2.$$

*Daí,*

$$\begin{aligned} 1 + 2x + x^2 + 1 + 2y + y^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ 2x + 2y + 2 &= 2xy \end{aligned} \tag{4.2}$$

*Dividindo a equação* (4.2) *por* 2, *temos:*

$$x + y + 1 = xy$$

*Isolando* $y$, *obtemos:*

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

*Observe que a área do triângulo é dada por:*

$$A = \frac{1}{2}(y+1)(x+1)$$

*Substituindo* $y = \frac{x+1}{x-1}$ *em* $A$*, encontramos:*

$$A = \frac{1}{2}(x+1)\left[1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]$$

$$A = \frac{1}{2}(x+1)\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

$$A = \frac{x^2+x}{x-1} \tag{4.3}$$

*Reescrevendo a equação* (4.3)*, temos:*

$$A = \frac{(x^2-2x+1)}{x-1} + \frac{(3x-3)}{x-1} + \frac{2}{x-1}$$

$$A = (x-1) + \frac{2}{x-1} + 3$$

*Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica aos termos da sequência* $\left(x-1, \dfrac{2}{x-1}\right)$*, temos:*

$$\frac{x-1+\frac{2}{x-1}}{2} \geq \sqrt{(x-1)\cdot\frac{2}{(x-1)}} = \sqrt{2}$$

*segue que:*

$$(x-1) + \frac{2}{x-1} \geq 2\sqrt{2}$$

$$(x-1) + \frac{2}{x-1} + 3 \geq 2\sqrt{2}+3$$

$$A \geq 2\sqrt{2}+3$$

*Observe que o menor valor para a área* $A$ *é* $2\sqrt{2}+3$*. A igualdade ocorrendo quando* $x-1 = \frac{2}{x-1}$*, o que implica em* $x = \sqrt{2}+1$ *e* $y = \sqrt{2}+1$*.*
*Logo, o triângulo retângulo é isósceles e a medida da sua hipotenusa é* $2(\sqrt{2}+1)$*.*

**Problema 4.15.** *(AIME-83) Encontre o valor mínimo de* $f(x) = \frac{9x^2sen^2x+4}{x\cdot senx}$*, com* $0 < x < \pi$*.*

**Solução.** *Reescrevendo a função, temos:*

$$f(x) = \frac{9x^2sen^2x}{x\cdot senx} + \frac{4}{x\cdot senx} = 9x\cdot senx + \frac{4}{x\cdot senx}.$$

*Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica aos termos da sequência* $(9x\cdot senx, \frac{4}{x\cdot senx})$*, obtemos:*

$$\frac{9x^2sen^2x+4}{2\cdot x\cdot senx} \geq \sqrt{9x\cdot senx\cdot\frac{4}{x\cdot senx}} = 6$$

*segue que:*

$$\frac{9x^2sen^2x+4}{2\cdot x\cdot senx}\geq 6$$
$$\frac{9x^2sen^2x+4}{x\cdot senx}\geq 12$$

*Observe que o menor valor de* $\frac{9x^2sen^2x+4}{x\cdot senx}$ *é* 12. *Logo, o valor mínimo de* $f(x)=\frac{9x^2sen^2x+4}{x\cdot senx}$ *é* 12.

**Problema 4.16.** *Qual o valor máximo que a função* $f(\theta)=3sen\theta+4cos\theta$, *onde* $0\leq\theta\leq 2\pi$.

**Solução.** *Fazendo* $a_1=3, a_2=4, b_1=sen\theta$ *e* $b_2=cos\theta$ *e aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:*

$$(3^2+4^2)(sen^2\theta+cos^2\theta)\geq(3sen\theta+4cos\theta)^2$$

*Como,* $sen^2\theta+cos^2\theta=1$, *segue que:*

$$(9+16)(1)\geq(3sen\theta+4cos\theta)^2\Rightarrow$$
$$25\geq(3sen\theta+4cos\theta)^2\Rightarrow$$
$$5\geq 3sen\theta+4cos\theta$$

*Observe que o valor de* $3sen\theta+4cos\theta$ *não ultrapassa* 5.
*Logo o valor máximo de* $f(\theta)=3sen\theta+4cos\theta$ *é* 5.

**Problema 4.17.** *Qual o número positivo cujo quadrado excede seu cubo da maior quantidade possível?*

**Solução.** *Denotando o número por* $x$, *devemos máximizar* $f(x)=x^2-x^3$ *ou* $f(x)=x^2(1-x)$. *Reescrevendo a expressão, temos:*

$$f(x)=4\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot(1-x)$$

*Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica aos termos da sequência* $(\frac{x}{2},\frac{x}{2},1-x)$, *temos:*

$$\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1-x}{3}=\frac{1}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}(1-x)}$$

*segue que:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} &\geq \sqrt[3]{\frac{x^2}{4}(1-x)}\\
\frac{1}{27} &\geq \frac{x^2}{4}(1-x)\\
\frac{4}{27} &\geq x^2(1-x)\\
\frac{4}{27} &\geq f(x)
\end{aligned}$$

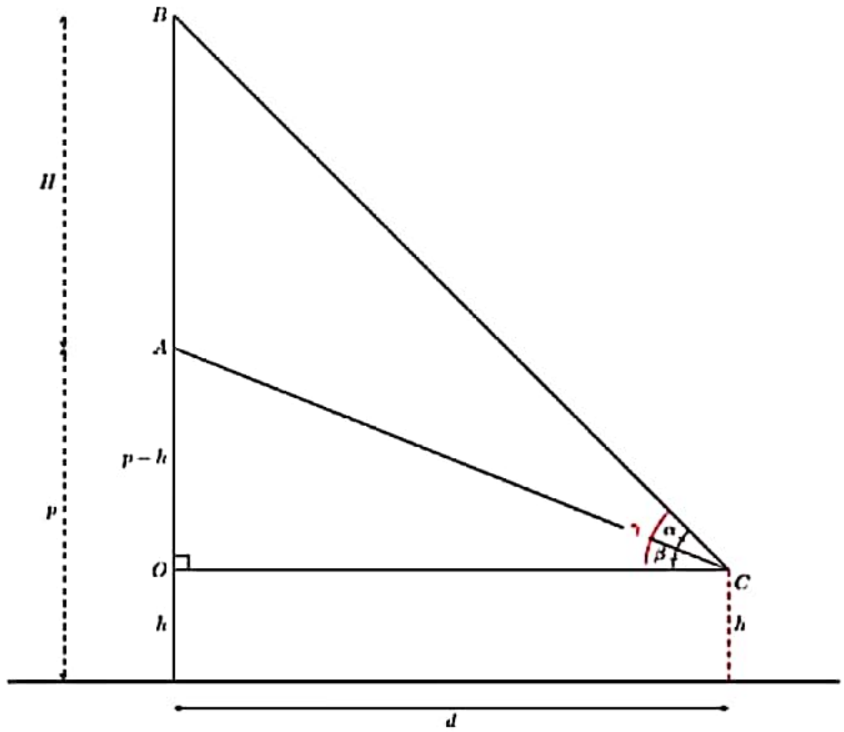
*Observe que o valor de $f(x)$ não ultrapassa $\frac{4}{27}$. Logo o valor máximo de $f(x)$ é $f(x) = \frac{4}{27}$. A igualdade ocorre quando $\frac{x}{2} = 1 - x$ o que implica em $x = \frac{2}{3}$.*

O problema a seguir foi proposto por Regiomontanus[5] em 1471 e segundo (MELO-2004) é considerado como o primeiro problema de extremos encontrado na história da Matemática desde a antiguidade.

**Problema 4.18.** *Suponha uma estátua de altura $H$ sobre um pedestal de altura $p$. Um homem de altura $h$ ($h < p$) enxerga do pé ao topo da estátua sob um ângulo $\alpha$, que varia de acordo com a distância $d$ entre o homem e a base do pedestal. Determine $d$ para que o ângulo de visão $\alpha$ seja o maior possível.*

[5] Johannes Müller von Königsberg (1436 - 1476), mais conhecido por Regiomontanus, uma latinização do nome de sua cidade natal Koningsberg cujo nome significa Montanha do Rei, foi um famoso matemático, astrônomo e cosmógrafo do século XV. Foi o inventor dos sinais (+) e (-), num manuscrito de 1456.

Figura 4.9: Ângulo Máximo



Fonte: O autor

**Solução.** *De acordo com a figura 4.9, temos que:*

$$tg\alpha = tg(\gamma - \beta) = \frac{tg\gamma - tg\beta}{1 + tg\gamma \cdot tg\beta}.$$

$$tg\gamma = \frac{H + p - h}{d} \text{ e } tg\beta = \frac{p - h}{d}$$

$$tg\alpha = \frac{\dfrac{H + p - h}{d} - \dfrac{p - h}{d}}{1 + \dfrac{(H + p - h)}{d} \cdot \dfrac{(p - h)}{d}} = \frac{H}{d + \dfrac{(H + p - h)(p - h)}{d}}$$

*A tangente de $\alpha$ é máxima quando $d + \dfrac{(H + p - h)(p - h)}{d}$ é mínimo.*

*Aplicando a desigualdade $M_A - M_G$ para $d$ e $\dfrac{(H + p - h)(p - h)}{d}$, temos:*

$$d + \frac{(H + p - h)(p - h)}{d} \geq 2\sqrt{d \cdot \frac{(H + p - h)(p - h)}{d}} = 2\sqrt{(H + p - h)(p - h)}$$

*Observe que o menor valor de $d + \dfrac{(H + p - h)(p - h)}{d}$ é $2\sqrt{(H + p - h)(p - h)}$.*

*Assim, o ângulo de visão máximo* $\alpha$*, ocorre quando a* $tg\alpha$ *é máxima, ou seja, quando* $d + \dfrac{(H+p-h)(p-h)}{d} = 2\sqrt{(H+p-h)(p-h)}$.

*A igualdade ocorrendo quando* $d = \dfrac{(H+p-h)(p-h)}{d}$.

*Logo,* $d = \sqrt{(H+p-h)(p-h)}$.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esperamos que esse trabalho sirva como material de apoio para professores do ensino médio que queiram usá-lo como ferramenta extracurricular, alcançando assim o seu objetivo principal, visto que existem poucos livros em língua portuguesa que abordam esse assunto.

Tentamos escrever esse material de maneira bem simples e didática, apresentando muitas demonstrações sem exigir um elevado grau de conhecimento matemático, mas nem por isso deixando de lado o rigor matemático importantíssimo dessas demonstrações, muitas delas simples mas não menos importantes.

Exibimos vários problemas de otimização utilizando as desigualdades de maneira a facilitar ou até mesmo tornando-as essenciais para a resolução dos mesmos.

Assim, esperamos que ao utilizar procedimentos diferentes dos habituais os estudantes do ensino médio, de turmas olímpicas ou não, consigam ampliar seus conhecimentos e habilidades já adquiridas, melhorando significativamente o seu desempenho escolar.

# Referências Bibliográficas


[1] ANDREESCU, Titu et.all. **Geometric Problems on Maxima e Minima**. Boston: Birkhäuser, 2006.

[2] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

[3] CVETKOVSKI, Z. **Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems.** Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

[4] D'AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates.** SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989.

[5] D'AMBROSIO, Ubiratan. **Uma história concisa da matemática no Brasil.** Jornal da Matemática. p.4. 20 nov. 2008.

[6] GOMES; Carlos A., José Maria. **Tópicos de Matemática: Olimpíadas-ITA-IME.** v.I.Ed Vestseller: 2010.

[7] GUÉRIOS, Ettiene; JUNIOR, José Medeiros. **Resolução de Problemas e Matemática no Ensino Fundamental: Uma Perspectiva Didática.** In: BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu, Org's. **Ensinar e Aprender Matemática: Possibilidades para a Prática Educativa.** Ponta Grossa:Ed. UEPG, 2016. p. 209-231.

[8] IEZZI, Gelson; et.al. **Matemática: Ciência e Aplicações, 1ª série : Ensino Médio, Matemática.** 2.ed. São Paulo: Atual, 2004.

[9] KOROVKIN, P.P. **Inequalities.** Moscow: Mir Publishers, 1975

[10] LIMA; Elon Lages et al. **A matemática do Ensino Médio**, v.I, 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[11] LIMA; Elon Lages et al. **A matemática do Ensino Médio**, v.II, 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[12] LIMA; Elon Lages. **Coleção PROFMAT: Números e Funções.** 1. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

[13] LIMA; Elon Lages. **Curso de Análise**, v.1. 12.Ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e aplicada, 2007.

[14] MELO; José Luiz Pastore. **Trigonometria e um Antigo Problema de Otimização.** In: HELLMEISTER, Ana Catarina; DRUCK, Suely; et.al. **Explorando o Ensino da Matemática: Artigos.** vol.1. Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2004. p 152 - 155.

[15] MORGADO; Augusto César; CARVALHO, Paulo Cézar Pinto. **Coleção PROFMAT: Matemática Discreta.** 2. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[16] RADMILA; Bulajic Manfrino; ORTEGA, José Antônio Gómez; DELGADO, Rogélio Valdez. **Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach.** Birkhäuser Basel, 2009.