



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL.

RAPHAEL ZAHLUTH DE LIMA

**ENSINO DA GEOMETRIA SOB UMA VISÃO DE DOBRADURAS NO
ORIGAMI: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA A EDUCAÇÃO
BÁSICA**

BELÉM – PARÁ

2021

RAPHAEL ZAHLUTH DE LIMA

**ENSINO DA GEOMETRIA SOB UMA VISÃO DE DOBRADURAS NO
ORIGAMI: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA A EDUCAÇÃO
BÁSICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em matemática em rede nacional da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva

BELÉM – PARÁ

2021

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

RAPHAEL ZAHLUTH DE LIMA

ENSINO DA GEOMETRIA SOB UMA VISÃO DE DOBRADURAS NO ORIGAMI: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentado a Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, sob orientação da Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva.

Banca Examinadora



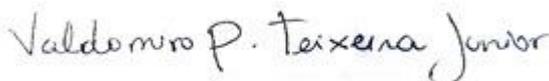
Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva

Faculdade de Ciências Exatas e Naturais / ICEN / UFPA – Orientador



Profa. Dra. Cristina Lucia Dias Vaz

Faculdade de Ciências Exatas e Naturais / ICEN / UFPA – Membro



Prof. Dr. Valdomiro Pinheiro Teixeira Júnior
UNIFESSPA – Membro

Data da Apresentação: 26 de março de 2021.

Conceito: APROVADO

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)
autor(a)

Z19e Z AHLUTH, RAPHAEL DE LIMA.
ENSINO DA GEOMETRIA SOB UMA VISÃO DE
DOBRADURAS NO ORIGAMI: : UMA PROPOSTA DE
ATIVIDADES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA / RAPHAEL DE
LIMA Z AHLUTH. — 2021.
81 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,
Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-
Graduação em Matemática em Rede Nacional, Belém, 2021.

1. Origami. 2. Dobraduras. 3. Akira Yoshizawa. 4.
Geometria Plana. I. Título.

CDD 510.78

À minha mãe, com todo amor e carinho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por me proporcionar a maior dádiva do mundo, a vida;

À Minha mãe Mônica Zahluth, por ter me ensinado a ser uma pessoa decente, educada e de bom caráter e por seu esforço para me proporcionar tudo que eu precisei para conclusão do mestrado.

Ao meu pai Cesar Lima, por ter participado e ajudado para que eu pudesse concluir minha formação no mestrado profissional;

Meu irmão Cesar Filho, por ter me dado forças e me aconselhado em diversas situações da minha trajetória até o presente momento;

Aos meus familiares em geral por fazerem parte da minha educação e formação como pessoa;

Ao meu orientador Prof. Dr. Paulo Vilhena, por confiar em mim, me ensinar e me orientar de forma atenciosa e simplificada;

Aos meus amigos de sala, por me proporcionarem dois anos de muitos ensinamentos, descontrações, amizade e acolhimento;

Aos meus professores do mestrado, por me formarem um educador mais bem preparado para a grande missão que fui designado;

À Universidade Federal do Pará, por me proporcionar participar do Programa de Mestrado Profissional – PROFMAT.

Aos meus alunos, por me ensinarem e me motivarem a buscar essa formação.

Raphael Zahluth

Acima de tudo quero que vocês descubram a alegria da criação a partir das vossas próprias mãos. A possibilidade de criação a partir do papel é infinita.

Akira Yoshizawa

(1911 - 2005)

RESUMO

Este trabalho visa mostrar os benefícios do uso do Origami em sala de aula como meio amenizar as dificuldades encontradas no ensino dos conceitos básicos de geometria plana, pautados no referencial teórico de livros, revistas científicas e dissertações de outros egressos do PROFMAT, que discutiram sobre o tema, buscamos entender como essa prática auxilia o aluno a enxergar, de forma mais lúdica tais conceitos e, deste modo, assimilar as teorias de forma mais eficaz. Também mostramos um estudo acerca da origem do Origami, enfatizando as contribuições de Akira Yoshizawa para a construção dessa teoria, bem como as aplicações dos conceitos de dobraduras nos mais sofisticados avanços da tecnologia. Relacionando as práticas do Origami com os conceitos básicos da geometria plana, propomos, como metodologia auxiliar de ensino, uma oficina de dobraduras para os alunos do 8º e 9º ano do ensino fundamental que, com base em nosso referencial teórico, acreditamos ter grande eficácia em amenizar as dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem da geometria.

Palavras-Chave: Origami, Dobraduras, Akira Yoshizawa, Geometria Plana.

ABSTRACT

This work aims to show the benefits of using Origami in the classroom as a means to alleviate the difficulties found in teaching the basic concepts of flat geometry, based on the theoretical framework of books, scientific journals and dissertations of other PROFMAT graduates, who spoke about the theme, we seek to understand how this practice helps the student to see, in a more playful way, these concepts and, in this way, assimilate theories more effectively. We also show a study about the origins of Origami, emphasizing Akira Yoshizawa's contributions to the construction of this theory, as well as the applications of folding concepts in the most sophisticated advances in technology. Relating the origami practices to the basic concepts of flat geometry, we propose, as an auxiliary teaching methodology, a folding workshop for students in the 8th and 9th grade of elementary school, which, based on our theoretical framework, we believe to be highly effective in mitigate the difficulties encountered in the teaching-learning process of geometry.

Keywords: Origami, Folding, Akira Yoshizawa, Plane Geometry.

Lista de Figuras

Figura 1: Tsuru	13
Figura 2: Folha e fibras konzo, mitsumata e gampi	14
Figura 3: Akira Yoshizawa (1911-2005)	14
Figura 4: Códigos dos diagramas de Origami	15
Figura 5: Origami tradicional	16
Figura 6: Origami Modular	17
Figura 7: Kusudama	17
Figura 8: Block folding	18
Figura 9: Origami Tessellation	18
Figura 10: Painéis solares dobráveis	20
Figura 11: Protótipo do Eyeglass em testes no Laboratório Nacional Lawrence Livermore, Livermore, California	21
Figura 12: O telescópio espacial Eyeglass, criado por Robert J. Lang.	21
Figura 13: Desenhos de simulação de um airbag inflado de sua posição dobrada...	22
Figura 14: Modelo da fachada do Greenland Dawangjing, em Pequim, China	23
Figura 15: Micro robôs dobráveis	23
Figura 16: Reta r e os pontos A, B, P, R, S e M	35
Figura 17: Reta r determinada pelos pontos A e B	35
Figura 18: Plano α determinado pelos pontos A, B e C	35
Figura 19: Reta r contém no plano α	36
Figura 20: Retas concorrentes r e s	36
Figura 21: Segmento AB	36
Figura 22: Semirreta AB	37
Figura 23: Ângulo AOB	37
Figura 24: Bissetriz de um ângulo	38
Figura 25: Reta mediatriz	38
Figura 26: Triângulo ABC	39
Figura 27: Altura de um triângulo	39
Figura 28: Bissetriz interna de um triângulo	40
Figura 29: Mediana de um triângulo	40
Figura 30: Axioma I	41
Figura 31: Axioma II	42
Figura 32: Axioma III	42
Figura 33: Axioma IV	43
Figura 34: Axioma V	44
Figura 35: Axioma VI	44
Figura 36: Axioma VII	45
Figura 37: Construção do ponto - Passo 01	46
Figura 38: Construção do ponto - Passo 02	47
Figura 39: Construção do ponto - Passo 03	47
Figura 40: Construção do ponto médio - Passo 01	48
Figura 41: Construção do ponto médio - Passo 02	48
Figura 42: Construção do ponto médio - Passo 03	49
Figura 43: Construção do ponto médio - Passo 04	49
Figura 44: Construção de retas perpendiculares - Passo 01	50
Figura 45: Construção de retas perpendiculares - Passo 02	50

Figura 46: Construção de retas perpendiculares - Passo 03.....	51
Figura 47: Construção de retas perpendiculares - Passo 04.....	51
Figura 48: Construção de retas paralelas - Passo 01	52
Figura 49: Construção de retas paralelas - Passo 02	52
Figura 50: Construção de retas paralelas - Passo 03	53
Figura 51: Construção de retas paralelas - Passo 04	53
Figura 52: Construção da mediatriz - Passo 01	54
Figura 53: Construção da mediatriz - Passo 02	54
Figura 54: Construção da mediatriz - Passo 03	55
Figura 55: Construção do ângulo - Passo 01	55
Figura 56: Construção do ângulo - Passo 02	56
Figura 57: Construção do ângulo - Passo 03	56
Figura 58: Construção do ângulo - Passo 04	57
Figura 59: Construção do triângulo - Passo 01	57
Figura 60: Construção do triângulo - Passo 02	58
Figura 61: Construção do triângulo - Passo 03	58
Figura 62: Construção do triângulo - Passo 04	58
Figura 63: Construção do triângulo - Passo 05	59
Figura 64: Construção da bissetriz - Passo 01	59
Figura 65: Construção da bissetriz - Passo 02.....	60
Figura 66: Construção da bissetriz - Passo 03.....	60
Figura 67: Construção da bissetriz - Passo 04.....	61
Figura 68: Construção da altura - Passo 01	61
Figura 69: Construção da altura - Passo 02.....	62
Figura 70: Construção da altura - Passo 03.....	62
Figura 71: Construção da mediana - Passo 01	63
Figura 72: Construção da mediana - Passo 02	63
Figura 73: Construção da mediana - Passo 03	64
Figura 74: Construção da mediana - Passo 04	64
Figura 75: Construção da mediatriz - Passo 01	65
Figura 76: Construção da mediatriz - Passo 02	65
Figura 77: Construção da mediatriz - Passo 03	66
Figura 78: Construção da mediatriz - Passo 04	66
Figura 79: Divisão em segmentos proporcionais - Passo 01	67
Figura 80: Divisão em segmentos proporcionais - Passo 02	68
Figura 81: Divisão em segmentos proporcionais - Passo 03	68
Figura 82: Divisão em segmentos proporcionais - Passo 04	68
Figura 83: Divisão em segmentos proporcionais - Passo 05	69
Figura 84: Divisão em segmentos proporcionais - Passo 06	69
Figura 85: Divisão em segmentos proporcionais - Passo 07	69
Figura 86: Demonstração da divisão do segmento em três partes congruentes.....	70
Figura 87: Demonstração do Teorema de Pitágoras - Passo 01.....	71
Figura 88: Demonstração do Teorema de Pitágoras - Passo 02.....	72
Figura 89: Demonstração do Teorema de Pitágoras - Passo 03.....	72
Figura 90: Demonstração do Teorema de Pitágoras - Passo 04.....	72
Figura 91: Demonstração do Teorema de Pitágoras - Passo 05.....	73
Figura 92: Demonstração do Teorema de Pitágoras - Passo 06.....	73

Figura 93: Demonstração do Teorema de Pitágoras - Passo 07.....	73
---	----

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	10
1 UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE A ORIGEM DO ORIGAMI	13
2 ALÉM DA ARTE DE DOBRAR PAPEL	16
2.1 Tipos de Origamis	16
2.2 O uso do Origami nos avanços tecnológicos	19
2.2.1 Origami gigante para captar raios solares:	19
2.2.2 Telescópio Eyeglass.....	20
2.2.3 Air bags	22
2.2.4 Origami na arquitetura:	22
2.2.5 Nano robôs	23
3 O ORIGAMI NA EDUCAÇÃO	25
3.1 Uma ferramenta pedagógica.....	29
4 O ORIGAMI E A MATEMÁTICA	34
4.1 Noções Básicas de Geometria	34
4.1.1 Postulados da Geometria Euclidiana.....	34
4.1.2 Definições importantes	36
4.2 Os Axiomas do Origami.....	41
4.2.1 Os axiomas de Huzita-Hatori.....	41
5 O ENSINO DA GEOMETRIA POR MEIO DE DOBRADURAS.....	46
5.1 Uma demonstração do Teorema de Pitágoras por meio do Origami	67
5.1.1 Divisão de um segmento em três partes congruentes.....	67
5.1.2 Uma demonstração	71
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	75
REFERÊNCIAS.....	77

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A presente pesquisa busca mostrar, com base numa catalogação bibliográfica, a eficácia das técnicas de dobraduras de papel como recurso didático para o ensino da geometria e de como esse procedimento pode contribuir de forma significativa para amenizar as dificuldades encontradas nesse processo.

Assim, impedidos de realizar uma pesquisa de campo a respeito do tema, a presente pesquisa tem por abordagem qualitativa de natureza bibliográfica, dos quais, podemos destacar os textos da professora da Universidade do Estado de São Paulo Dra Silvia Mitiko Nishida, na qual buscaremos analisar a relevância do uso do origami e sua eficiência no ensino da geometria em livros, revistas e dissertações.

Nas dissertações de autores como Grazielle Rancan (2011), Daniel Menezes (2014), Dayane Oliveira (2010) e a nossa experiência como professor de matemática há quase dez anos em sala de aula, identificamos que uma das principais dificuldades encontradas por alguns alunos em manusearem as figuras geométricas, ocorre, muitas vezes, devido ao uso das ferramentas, muitos alunos não conseguem visualizar conceitos geométricos apenas com o uso da lousa, ou seja, pelo dito ensino tradicional.

Considerando as pesquisas citadas e a nossa própria experiência entendemos que a maior dificuldade dos alunos advém do fato de alguns conceitos da geometria serem muito abstratos e defendemos que o uso de dobraduras para mostrar esses elementos aos alunos pode amenizar essas dificuldades, pois tornará a aprendizagem mais concreta e lúdica, nas palavras de Rancan (2011) as dobraduras de papel prometem ser um ambiente rico e desafiador para o trabalho com alunos e ressaltam a importância de se desenvolver de forma lúdica e concreta determinados conceitos geométricos.

Sendo assim, a presente pesquisa foi feita com o intuito de buscar entender como o Origami pode ser utilizado como recurso auxiliar para o ensino de geometria plana, visando analisar como a implementação dessa nova didática, por outros professores outrora citados nesse trabalho, contribuiu para amenizar as dificuldades encontradas no processo de ensino aprendizagem e, acreditamos que tal didática, por ser diferente da tradicional, poderia estimular, ainda mais, a busca pelo conhecimento

por parte do aluno e retome/desperte o interesse pela matemática por parte do mesmo.

Pesquisando sobre o assunto, encontramos nas palavras de Carneiro e Spira (2015) que o uso das dobraduras contribui como instrumento para o ensino da geometria em dois principais aspectos: os alunos sentem-se mais desafiados a descobrir novas coisas e com o caráter lúdico dessa ferramenta de ensino.

Deste modo, defendemos que o uso do Origami pode auxiliar no processo de ensino-aprendizagem pois, instigar os alunos a terem contato com tal arte, pode fazer com que muitos retomem o interesse em participar das aulas e, salientamos, que as dobraduras podem ser uma das formas utilizadas pelo professor para tal, uma vez que tal recurso tornará as aulas mais atraentes e, assim, despertará o protagonismo dos alunos, logo é um recurso que pode ser usado pelo professor com esta finalidade.

A fim de enfatizar essa relevância, apresentaremos o Origami e sua importância na aprendizagem, ressaltando essa arte como expressão cultural, identificando e reconhecendo as figuras e formas utilizadas na construção do Origami e, também, verificaremos o processo de conhecimento da construção do origami e sua relação com a geometria.

Também buscaremos as aplicações dos conceitos de dobraduras em outras funções do dia-a-dia como, por exemplo, os airbags dos carros, equipamentos tão essenciais para a segurança dos passageiros em caso de acidente ou, até mesmo, a complexa forma de mandar um satélite para o espaço, o qual vai todo “dobrado” e, ao entrar em órbita, abre-se, assumindo a forma desejada pelos cientistas.

Contudo, acreditamos que, além de ter o interesse pelo estudo, os alunos precisam conhecer os conceitos básicos de geometria desde os princípios básicos como ângulos e áreas, até ideias complexas, como a demonstração do Teorema de Pitágoras, desse modo, baseados nos escritos dos fundamentos de matemática elementar, faremos uma construção axiomática dos conceitos iniciais de geometria plana e associaremos esses conceitos a uma oficina de dobraduras que proporemos para ser utilizada como material de referência para que professores possam amenizar as dificuldades no ensino da geometria.

Assim, este trabalho está organizado da seguinte forma:

No primeiro capítulo faremos um breve resumo da história do Origami, buscando entender onde essa arte surgiu e discorreremos sobre o grande mestre Akira

Yoshizawa, considerado por muitos como o pai do Origami moderno, responsável por difundir a prática dessa arte para o mundo, produzindo cerca de 20 livros e mais de 50 mil modelos de Origami.

No capítulo subsequente buscaremos as aplicações à tecnologia do uso do Origami, como essa arte auxilia a construção de sofisticadas estruturas como, por exemplo, os painéis solares.

No terceiro capítulo iremos relacionar o Origami e a Educação, buscando entender como o fato de o aluno, encantado com as dobraduras do papel torna-se o ser ativo no processo de ensino-aprendizagem.

Devido a impossibilidade de realizarmos uma pesquisa de campo por conta das restrições impostas pelas autoridades, visando combater a Pandemia de Covid-19, faremos uma reflexão do protagonismo do aluno com base no estudo de outros pesquisadores que investigaram como o uso do Origami pode melhorar os níveis de proficiência dos alunos do ensino básico, uma vez que os mesmos constaram que a prática dessa arte permite a obtenção de conhecimentos de forma eficiente e prazerosa.

No quarto capítulo fazemos a organização das noções e construções geométricas básicas, bem como mostraremos os Axiomas de Huzita-Hatori, que nos respaldarão a propor uma oficina de dobraduras no ensino da geometria plana.

No último capítulo propomos nossa oficina de dobraduras, a qual desejamos que venha a ser utilizada por professores no 8º e 9º ano do ensino fundamental para o ensino dos conceitos básicos de geometria plana, pois fazemos a relação entre esses conceitos e as dobraduras no papel.

E, por fim, apresentaremos nossas considerações finais a respeito do conhecimento adquirido durante a elaboração desta dissertação.

1 UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE A ORIGEM DO ORIGAMI

O origami é a arte famosa no Japão de construir figuras geométricas por meio de dobraduras. De acordo com Hayasaka e Nishida (2009), a palavra origami é oriunda do verbo oru (オル), que do japonês significa dobra, e a palavra kami (カミ), que significa papel. Porém, antigamente a palavra origami era chamado de origata que do japonês significa forma dobrada. Há dúvidas acerca da origem do origami. Acredita-se que surgiu na China, com a invenção do papel por T'sai Lun em 105 d. C e introduzido por monges budistas coreanos no Japão no ano 610.

Segundo Ueno e Nascimento (2002, *apud* Honda, 1969) afirmam que mesmo com a difusão do papel pelo Japão, seu preço não era tão acessível para que as pessoas pudessem utilizá-lo como passatempo, sendo, assim, cuidadosamente empregado em ocasiões cerimoniais.

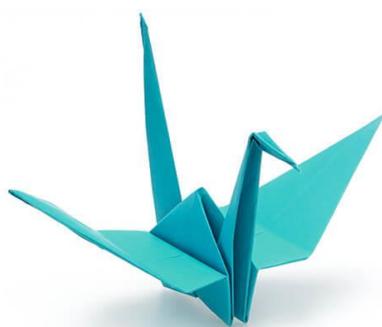
Com isso o origami tinha um valor alto para ser utilizado como passatempo, então o origami ficou limitado a cerimônia religiosas e festas. As técnicas para aprendizagem do origami eram ensinadas apenas por especialistas, chamados de Origamistas.

Segundo Silva e Massaranduba (2018),

No período Muromachi com o papel mais acessível o Origami tornou-se popular e a partir daí foram criados aproximadamente 70 tipos de dobraduras. A dobradura mais famosa, esteticamente perfeita e antiga que se tem registro é a Tsuru, uma garça, ave sagrada do Japão, em que para sua construção é necessário apenas de uma folha de papel geralmente quadrada. (SILVA; MASSARANDUBA, 2018, p. 2)

A maioria dos origamis são feitos a partir de folhas de papel no formato de um quadrado. Na Figura 1, temos um dos símbolos mais famosos do Japão, o Tsuru:

Figura 1: Tsuru



Os japoneses desenvolveram sua própria tecnologia para o papel, usando fibras vegetais, extraída de plantas nativas. Algumas fibras eram utilizadas como o *kozo*, para papel com maior resistência, o *gampi*, para os papeis nobres e o *mitsumata* para os papeis mais delicados.

O papel criado pelos japoneses ficou conhecido como *washi* que sobre ele poderia ser escrito ou usá-lo para outra finalidade, incluído o origami. Na Figura 2, podemos ver as fibras e o papel mencionados:

Figura 2: Folha e fibras kozo, mitsumata e gampi

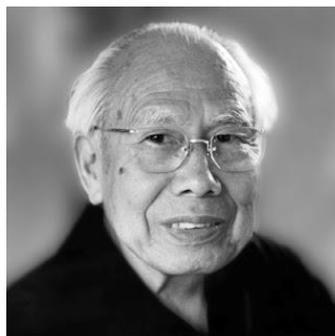


Fonte: worldpaper.com.br. Acesso em: 10 dez. 2020.

O tipo de papel usado para a confecção de uma figura a partir das técnicas origami é muito importante. Além dos já mencionados, existem também os de dobradura, Sulfite, Laminado, Camurça, Kraft, vegetal e os papeis reaproveitados de jornais e revistas.

No século XIX, Akira Yoshizawa, Figura 3, é considerado por alguns como o pai do Origami, foi creditado a levar essa técnica a um estado artístico, Hayasaka e Nishida (2009) destacam que ele criou mais de 50.000 modelos de origami, porém algumas centenas foram apresentados em seus mais de 18 livros.

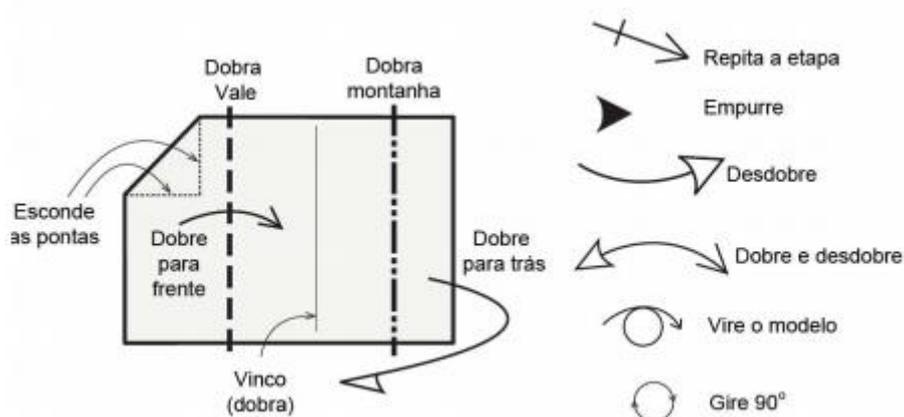
Figura 3: Akira Yoshizawa (1911-2005)



Fonte: <https://pt.wikipedia.org>. Acesso em: 10 dez. 2020.

Também de acordo com Hayasaka e Nishida (2009), Akira notabilizou-se por padronizar os códigos, mostrados na Figura 4, que devem ser seguidos para conseguir montar o Origami e, por meio deles, o mestre das dobraduras permitiu que as dobraduras se tornassem universais.

Figura 4: Códigos dos diagramas de Origami



Fonte: www2.ibb.unesp.br. Acesso em: 12 fev. 2021.

Para os autores,

Até 1950-60, a técnica do origami era imutável e os modelos foram reproduzidos de uma geração para outra, anonimamente. Uchiyama Koko foi o primeiro a patentear as suas criações. É fato que a evolução ou a transformação da cultura faz parte da essência natural da condição humana. As inquietações criativas e inovadoras do mestre de origami, Akira Yoshizawa eram incessantes: ele padronizou regras para representação gráfica das dobras do origami, sistematizou um conjunto de dobras que servem de base para vários origamis e quebrou paradigmas tradicionais introduzindo a técnica do wet folding, ou seja, dobrar com o papel molhado. (HAYASAKA e NISHIDA, 2009, p.4).

Para De Oliveira (2004, p.16) Akira Yoshizawa é considerado o Michelangelo do papel, o patriarca do origami moderno criou o sistema Yoshizawa-Randlett de regras para representação gráfica das dobras.

Em 1958, Lillian Oppenheimer, funda a *The Origami Center of América* e gradualmente, nos anos 50 e 60, Lillian se envolveu cada vez mais com o origami e reuniu ao seu redor um pequeno grupo de pessoas igualmente dedicadas e talentosas (ORIGAMIUSA, S/D, p.1).

Inicialmente o Origami era pautado por uma série de regras, contudo, por muito tempo essa arte foi se renovando e ganhando novas técnicas e formas de dobrar o papel, assim, no capítulo a seguir veremos alguns tipos de origamis e a aplicação desse conceito à tecnologia.

2 ALÉM DA ARTE DE DOBRAR PAPEL

Os japoneses foram pioneiros na arte de dobrar papel, o Origami é praticado pelos povos orientais há mais de 5 séculos e, desse modo, eles conseguiram aplicar as técnicas de dobraduras em diversas tecnologias. Por volta de 1950, Akira Yoshizawa, o pioneiro dessa arte, mostrou que era possível fazer complexas estruturas por meio de dobraduras, com base nos conhecimentos matemáticos.

Desde peças microscópicas até enormes painéis solares, os engenheiros apoderam-se dos conceitos do Origami para construir estruturas cada vez mais sofisticadas e, neste capítulo, discorreremos brevemente sobre algumas delas.

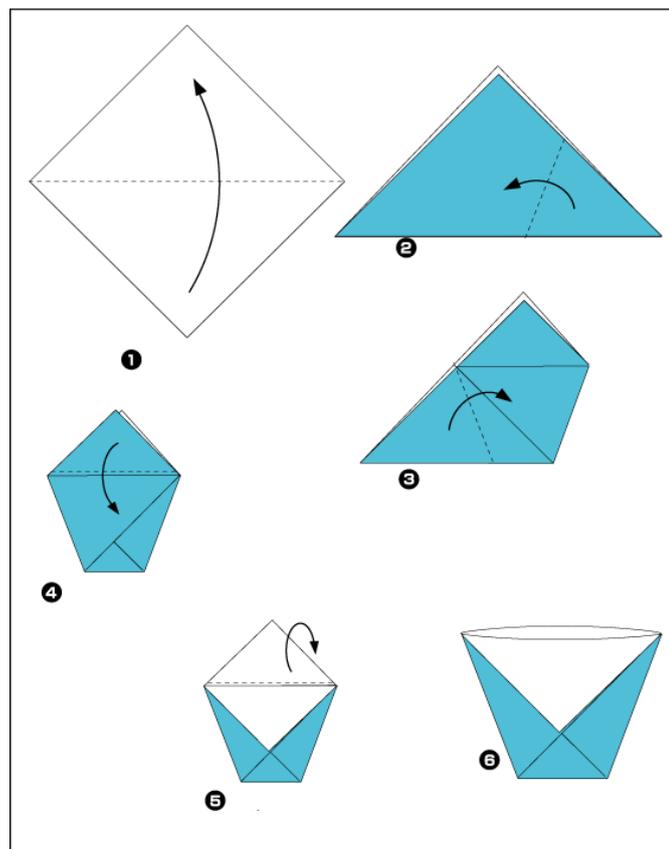
Contudo, antes de vermos quais as aplicações do conceito do Origami à tecnologia, veremos quais os principais tipos de dobraduras que são feitas.

2.1 Tipos de Origamis

Dentre essas técnicas podemos destacar os seguintes tipos:

Tradicional: O origami tradicional utiliza uma folha de papel, sem cortes e sem o uso de cola, conforme ilustrado na Figura 5:

Figura 5: Origami tradicional



Fonte: <https://desdobraorigami.wordpress.com/cup-6/>. Acesso em: 10 abr. 2021.

Modular: Quando o origamista utiliza-se de vários origamis menores e vai os encaixando, a fim de formar uma peça maior, ele está fazendo o uso da técnica Modular do Origami, conforme ilustra a Figura 6.

Figura 6: Origami Modular



Fonte: <http://terapiadopapel.blogspot.com/>. Acesso em: 10 abr. 2020.

Reforçamos que essa técnica pode ser de grande valia no estudo da Geometria Espacial, no que tange ao ensino dos Poliedros de Plantão, como podemos observar no trabalho da professora Dayane Paulino, com a dissertação *Origamis modulares e os poliedros de Platão*, contudo, essa técnica foge a idealização de nossa dissertação.

Kusudama: Essa técnica consiste em, basicamente, dobrar o papel em formato de bola, que, pendurados por um fio, servem para enfeitar os ambientes. Conforme ilustra a Figura 7, percebemos que o Kusudama também faz uso da técnica Modular.

Figura 7: Kusudama



Fonte: <http://oficinadoorigami.blogspot.com/>. Acesso em: 18 dez. 2020.

Esse tipo de dobradura possui esse nome pois, estava associado a cura e ervas medicinais, a partir da morfologia da palavra, temos que “kuso” significa remédio e “dama”, significa bola.

Block folding: Outra arte de dobrar voltada a decoração, conforme ilustra a Figura 8, o Block Folding, consiste em utilizar vários módulos em forma de triângulo e a partir dai ir encaixando uns nos outros, sendo os mais populares o pavão e o cisne.

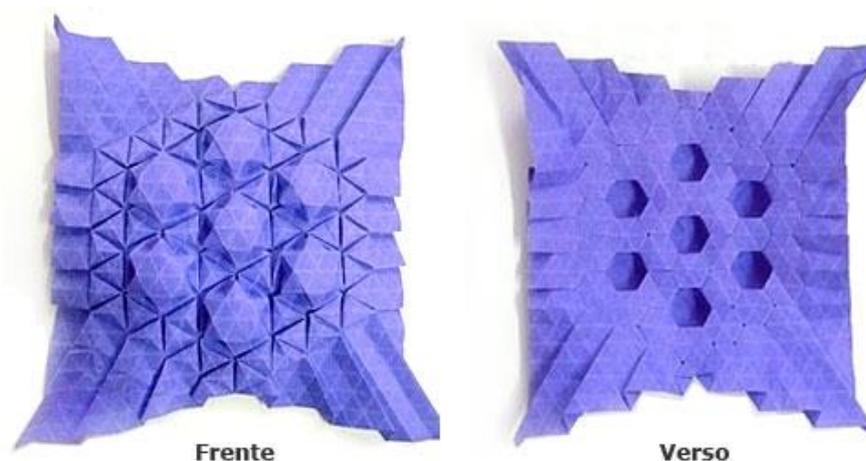
Figura 8: Block folding



Fonte: <http://oficinadoorigami.blogspot.com/>. Acesso em: 18 dez. 2020.

Origami Tessellation: Na Figura 9, temos um exemplo de Origami Tessellation, onde são utilizados linhas de base, formando figuras geométricas como hexágonos, quadrados e triângulos.

Figura 9: Origami Tessellation



Fonte: <http://oficinadoorigami.blogspot.com/>. Acesso em: 18 dez. 2020.

Assim, percebemos que há vários tipos de Origamis que podem ser utilizados para despertar o interesse dos alunos para o estudo da matemática, contudo, focaremos o estudo baseando-nos nas dobraduras do Origami tradicional para auxiliar os alunos no ensino da geometria plana e, no tópico a seguir, veremos como essas técnicas podem ser aplicadas no uso de tecnologia.

2.2 O uso do Origami nos avanços tecnológicos

2.2.1 Origami gigante para captar raios solares:

Transportar objetos enormes para o espaço sempre foi uma grande dificuldade para os engenheiros, porém, um grupo de pesquisadores americanos, inspirados nas técnicas do Origami, resolveu este problema aplicando os conceitos relacionados as dobraduras em seus satélites, conforme destaca Cordeiro (2019):

Inspirados pela ideia de dobrar os painéis como se fossem uma folha de papel, pesquisadores da Universidade Brigham Young (BYU), nos EUA, projetaram o Hanaflex (*hana* significa “flor” em japonês). Trata-se de um sistema de placas solares compacto o suficiente para caber dentro de um foguete e capaz de aumentar mais de 80 vezes de tamanho ao se desdobrar no espaço.

O protótipo mais recente do Hanaflex, fechado, tem 2,7 m de diâmetro (23 m²). Quando ele se abre em pétalas, o diâmetro vai para 25 m, ocupando mais de 1 960 m² (o equivalente a 12 quadras de vôlei). Parece grande o suficiente? Em teoria, os origamis espaciais podem até ser maiores. “É possível incorporar novas camadas a uma estrutura dobrável sem perder as maiores qualidades do sistema: ser compacto, resistente e dobrável”, afirma o engenheiro mecânico Larry Howell, da BYU. (CORDEIRO, 2019, ONLINE)

Ao aplicar esses conceitos, os pesquisadores conquistaram enorme credibilidade do campo da astrofísica e agora são financiados pela National Aeronautics and Space Administration (NASA), que busca, por meio das dobraduras, reduzir ainda mais os custos de enviar satélites para o espaço.

Na Figura 10 podemos observar com o Hanaflex “desdobra-se” para atingir um tamanho cerca de 90 vezes maior, cobrindo uma área de quase 2 mil metros quadrados.

Figura 10: Painéis solares dobráveis



Fonte: <https://super.abril.com.br/>. Acesso em: 10 dez. 2020.

2.2.2 Telescópio Eyeglass

Outra tecnologia utilizada por agências aeroespaciais, o telescópio Eyeglass tem capacidade de observação 40 vezes maior que o telescópio Hubble, ele foi desenvolvido no laboratório Lawrence Livermore, Califórnia, Estados Unidos, fazendo uso da arte de dobrar papel, o professor Robert Lang (representado na Figura 11), um dos maiores especialistas em origami da atualidade, e sua a equipe construíram um protótipo de 5 metros de altura capaz de dobrar-se e expandir-se consideravelmente (LANGORIGAMI, 2015, online).

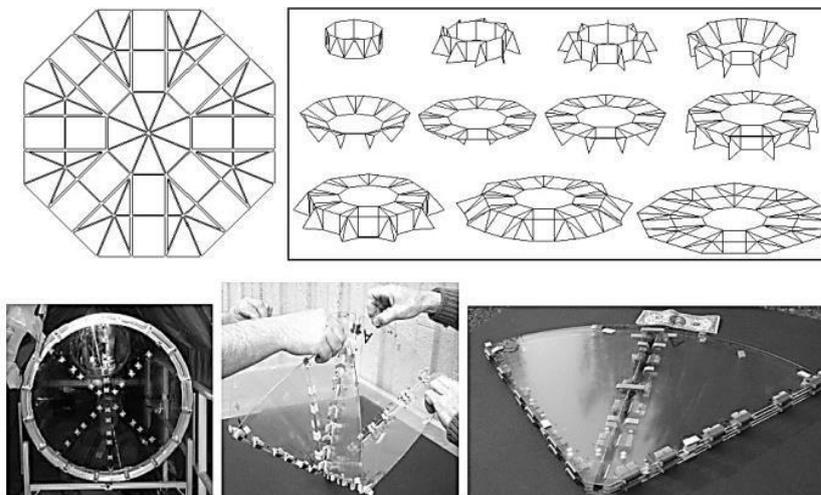
Figura 11: Protótipo do Eyeglass em testes no Laboratório Nacional Lawrence Livermore, Livermore, California



Fonte: <https://www.thebigquestions.com/>. Acesso em: 10 dez. 2020.

Na Figura 12 temos um esboço do modelo de Lang, que se dobra e pode ser colocado dentro de um pequeno foguete para ser colocado em órbita, munido de seus conhecimentos sobre Origami, o professor está criando estruturas que se dobras de forma segura nas configurações desejadas por ele.

Figura 12: O telescópio espacial Eyeglass, criado por Robert J. Lang.

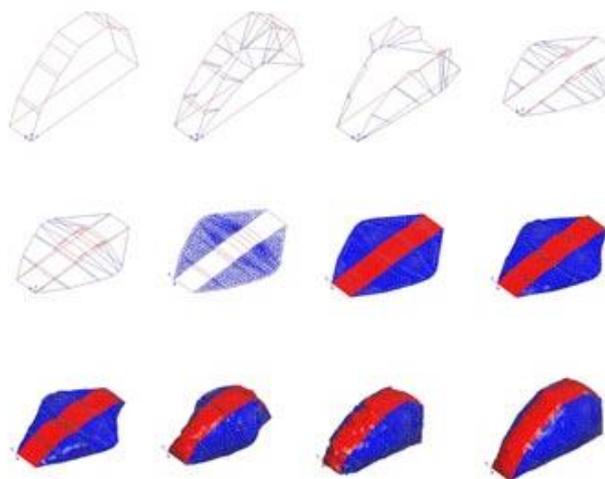


Fonte: A evolução artística e científica do origami: Um estudo teórico e prático sobre a prática e técnicas das dobraduras. p. 153 . Acesso em: 10 dez. 2020.

2.2.3 Air bags

Fundamentais para garantir a segurança dos passageiros em caso de acidentes de carro, os air bags também são inspirados em origamis, Ferreira (2005, destaca que são baseados em algoritmos que utilizam os conceitos de polígonos de Origami, que levam em consideração dados computacionais de geometria, física, engenharia e termodinâmica. A Figura 13 ilustra o modelo de um air bag.

Figura 13: Desenhos de simulação de um airbag inflado de sua posição dobrada.



Fonte: <http://gamma.fnphoto.com/>. Acesso em: 10 dez. 2020.

2.2.4 Origami na arquitetura:

Na Figura 14 temos a fachada do edifício Greenland Dawangjing, em Pequim, ao invés de usarem uma fachada lisa, os arquitetos inspiraram-se nas dobraduras do Origami para construir uma frente que conta com um conjunto de painéis de vidro inclinados para dentro e para fora, aumentando a iluminação dentro do edifício e contribuindo no sistema de ventilação.

Figura 14: Modelo da fachada do Greenland Dawangjing, em Pequim, China

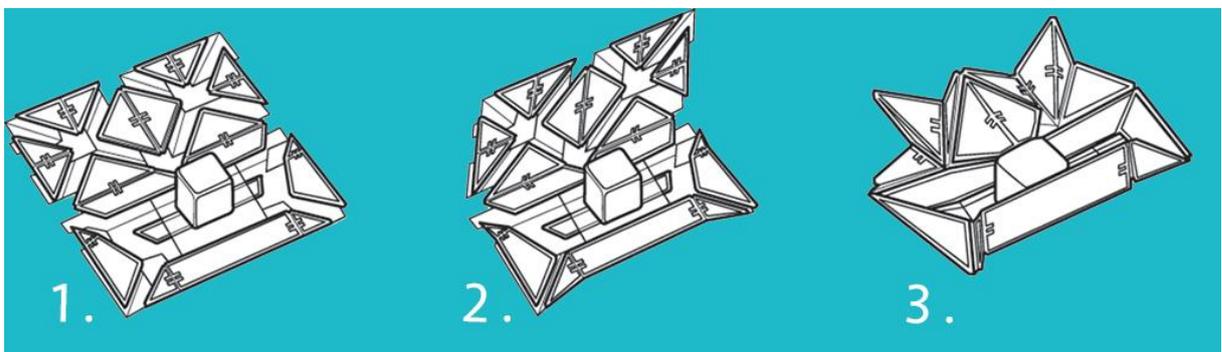


Fonte: <https://www.som.com/>. Acesso em: 10 dez. 2020.

2.2.5 Nano robôs

Baseados na tradicional arte japonesa do Origami, Castelli (2015) enfatiza que os nano robôs são um dos grandes avanços da humanidade, capazes de chegar onde os outros não conseguem chegar e possuem aplicação principalmente na medicina, sendo utilizados para exames dentro do organismo humano. Na Figura 15 temos um exemplo desse tipo de robô.

Figura 15: Micro robôs dobráveis



Fonte: <https://super.abril.com.br/>. Acesso em: 10 dez. 2020.

Assim, percebemos que os conceitos relacionados as dobraduras de papel têm uma importância fundamental no que tange a avanços tecnológicos, assim como, a arte do Origami pode ser um enorme catalisador no processo de ensino aprendizagem

uma vez que suas aplicações podem despertar o fascínio dos estudantes para a matemática.

Deste modo, no próximo capítulo, veremos quais os impactos do uso do Origami para o ensino de matemática.

3 O ORIGAMI NA EDUCAÇÃO

O Origami é uma arte milenar, sua origem é por volta do século I, contudo, suas aplicações na educação só foram registradas a partir do século XVII, creditando-se o uso dessa técnica ao alemão Friedrich Froebel, De Oliveira (2004) enfatiza que o alemão dividia o uso de dobraduras em três estágios:

- Dobras de verdade: • geometria elementar (princípios da geometria Euclidiana)
- Dobras da vida: • noções básicas de dobradura, • dobras tradicionais de pássaros e animais.
- Dobras da beleza: • levar à criatividade e à arte. (DE OLIVEIRA, 2004, p.9)

Hayasaka e Nishida (2009) salientam que

Ele [Froebel] teria sido o primeiro a utilizar a papiroflexia como ferramenta educacional. Para Froebel, a criança deve começar dobrando o papel e reconhecendo os princípios da geometria euclidiana. Depois descobrir a vida, fazendo as dobraduras de animais e plantas. Finalmente, é estimular o senso estético, através da contemplação das dobraduras através de uma exposição. (HAYASAKA e NISHIDA, 2009, p.1).

Assim, no ensino e aprendizagem com utilização do origami são visíveis as contribuições adquiridas ao longo do tempo, são perceptíveis como, por exemplo, o aumento da capacidade de concentração que o aluno precisará para fazer as dobraduras mais perfeitas, a criatividade, o que pode ser utilizado, por exemplo, para criar novas formas de resoluções de exercícios, e auxilia no entendimento de conceitos abstratos, conforme reforça Rancan (2011):

Ao longo da sua trajetória como estudante de Matemática de Ensino Fundamental, o aluno é levado a fazer um grau de abstração na Geometria Plana bastante elevado para sua faixa etária. Tendo em vista essa preocupação, a proposta desta pesquisa visou partir de conceitos tridimensionais para alcançar conhecimentos de Geometria Plana. (RANCAN, 2011, p.12)

Desta forma, o mesmo passa a deixar a forma tradicional de aprendizagem, ingressando para uma forma mais lúdica, tendo, assim, uma alta percepção dos conceitos matemáticos geométricos.

Para De Oliveira (2004) as dobraduras colaboram na formação do aluno, pois

O trabalho manual das dobraduras estimula também as habilidades motoras com uma ênfase no desenvolvimento da organização, na elaboração de sequências de atividades, na memorização de passos e coordenação motora fina do aluno. Atividades em grupo favorecem a cooperação, bem como a paciência e a socialização. O resultado das dobraduras, além de um incentivo à realização pessoal e à auto-estima, é um motivo especial para presentear pais, amigos criando uma saudável conexão escola/casa. (DE OLIVEIRA, 2004, p.6)

Fleischmann (2019) salienta ainda que

Com isso, tornar o ensino da Matemática mais dinâmico, unindo a prática a conteúdos aparentemente abstratos foi a motivação do uso do origami como instrumento para incentivar os estudantes a assimilar conteúdos matemáticos. Trabalhar com o origami, possibilita enriquecer o ensino da Geometria, além de colaborar também com o ensino da Álgebra. Assim apresentamos, no decorrer do trabalho, sugestões para contribuir com a aprendizagem, pretendendo-se que sejam apenas incentivos para despertar em outros professores, maneiras de se ensinar na disciplina de Matemática. (FLEISCHMANN, 2019, p.12).

Dias (2015) cita também que

Por intermédio do uso das dobraduras de papel, o ensino da geometria passa a favorecer associações entre conteúdos abstratos e problemáticas cotidianas, isto porque na confecção de cada dobradura tornam-se extremamente necessárias articulações de estratégias geométricas para efetuar tais construções. Além disso, constituem-se em material didático que transforma o ensino-aprendizagem em uma atividade atraente e motivadora onde os alunos podem desenvolver sua experimentação geométrica e a visão espacial. (DIAS, 2015, p. 11)

Assim, os benefícios que o Origami traz não só se restringem a quem estuda matemática, mas também outras áreas do conhecimento, contribuindo ainda mais para o ensino e aprendizado de professores e alunos, bem como, o estimulam o trabalho em grupo e o desenvolvimento do aluno enquanto cidadão.

Segundo Rego e Gaudêncio (2003) *apud* Racan e Giraffa (2012),

O Origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objetos e formas que os cercam. Com uma atividade manual que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e Arte. (RACAN e GIRAFFA, 2012, p.6)

Racan e Giraffa (2012, p.7) também destacam que os estudantes se organizaram, basicamente por grupos de afinidade, uma apresentação oral foi feita pela ministrante da oficina, abordando tópicos da história do Origami e da arte da dobradura em papel.

Deste modo, o ensino da matemática por meio do uso de dobraduras favorece os conhecimentos dos alunos, contudo, é necessário que o aluno tenha o entendimento dos conceitos e definições da geometria, não estamos defendendo que o Origami substituirá o método tradicional do ensino da Geometria, por axiomas, definições e teoremas, mas que essa metodologia de ensino pode ser auxiliada e, conjecturamos, potencializada, pelo uso dos recursos do Origami.

Nesse sentido, Leroy (2010) salienta que

As oficinas desenvolvidas nessa monografia têm como intuito subsidiar o ensino de Geometria no Ensino Fundamental e Médio, facilitando a

compreensão de conceitos abstratos e complementando a teoria ministrada nas salas de aula. Com a oficina de Dobraduras Básicas pode-se explorar os conceitos mais básicos da Geometria, permitindo um maior entendimento das várias propriedades envolvidas em cada um dos conceitos abordados. (LEROY, 2010, p.77)

Assim, o uso de dobraduras auxilia o aluno na compreensão dos conceitos uma vez que relaciona as ideias axiomáticas de ponto e reta com o concreto do papel dobrado, acreditamos que o aluno consegue ver de forma mais lúdica os conceitos de ponto, retas paralelas, ângulos, dentre outros e, nesse sentido, Dias (2015) reforça que

A proposta do uso do Origami nas aulas, tem por finalidade oportunizar o professor métodos práticos que possam contribuir na prática docente, além de oportunizar também, aos alunos uma formação de conceitos e conhecimentos de forma lúcida. Também ajuda a diminuir a resistência que muitos apresentam para determinados conteúdos matemáticos. (DIAS, 2015, p. 57)

Deste modo, Susuki *et al* (2006, p.13) salientam que o Origami é um poderoso instrumento para o ensino da matemática, é uma das raras oportunidades no ensino da matemática onde se pode pôr a “mão” no objeto de estudo.

Apesar de o Origami ser uma arte milenar, assim como já fora exposto neste trabalho, o mesmo tem diversas aplicações à tecnologia, fato que pode atrair ainda mais o interesse dos jovens, nesse sentido, Lang e Hull (2005) *apud* Teixeira e Nakata (2017) salientam que

O origami moderno, no sentido do que encontramos quando olhamos para um típico livro de instruções de origami, surgiu apenas entre 1940 e 1950. Foi quando milhares de indivíduos como o mágico Robert Harbin, na Inglaterra, Lilian Oppenheimer (a vovó do origami nos EUA), em Nova Iorque, e o mestre do origami Akira Yoshizawa, no Japão, se encarregaram em comunicar e popularizar esta arte para o resto do mundo. (TEIXEIRA E NAKATA, 2017, p. 282).

De Oliveira (2004) também defende a pluralidade cultural que os alunos passam a desenvolver com o estudo da matemática por meio do Origami, assim, ela destaca que

O conhecimento de novas culturas por inspirar a curiosidade dos alunos pela rica cultura oriental, sua música, língua, história e tradições. Pode, se devidamente estimulado, promover o intercâmbio cultural com estudantes de outras nações por exemplo, trocando-se técnicas e dobraduras entre eles. (DE OLIVEIRA, 2004, p.5)

Cavacami e Furuya (2009) enfatizam ainda que

No decorrer do desenvolvimento do trabalho foi observado que muitas pessoas associam Origami com dobraduras de animais, flores e outras formas, mas nunca à Geometria. Talvez este seja um dos motivos do pouco uso no ensino. Mas o fato deste tipo de atividade atrair a atenção tanto de crianças como de jovens e adultos, faz pensar no método como uma importante opção para o ensino. (CAVACAMI E FURUYA, 2009, p. 74)

Dito isto, enfatizamos que o uso do Origami despertará o interesse dos alunos pois ele não relaciona as dobraduras de papel com os conceitos matemáticos, o que fará do mesmo um aluno ativo no processo de aprendizagem, pois a arte de dobrar papel o fará buscar despertará ainda mais sua curiosidade para o mundo da matemática.

Desta forma, Queiroz (2019) salienta ainda que

Todavia, de modo geral, as técnicas do origami são usadas não apenas para desenvolver habilidades cognitivas e criativas das crianças, mas também para ensinar geometria na educação básica e até mesmo na educação superior e além. Vários trabalhos de pesquisa têm sido feitos na área da educação e confirmam a eficiência do origami como ferramenta educacional, principalmente no ensino da geometria em Matemática. (QUEIROZ, 2019, p.20)

Ou seja, o uso do Origami nas aulas pode contribuir de forma significativa com o desenvolvimento do aluno e, quanto a espontaneidade na criação Piaget (1954) diz que

A educação artística deve ser, antes de tudo, a educação da espontaneidade estética e da capacidade de criação que a criança pequena já manifesta. Ela não pode, menos ainda que qualquer outra forma de educação, contentar-se com a transmissão e a aceitação passiva de um ideal completamente elaborado: a beleza, como a verdade, não vale senão quando recriada pela pessoa que a conquista. (PIAGET, 1954, p.34)

Outro ponto a se destacar na arte de dobrar papel é que a mesma desenvolve a memorização do aluno, uma vez que o mesmo precisa lembrar da sequência de passos lógicos para a construção dos origamis, assim, ainda que o aluno não perceba, pois, para ela, aquela atividade tem caráter mais recreativo do que conteudista, essa característica cognitiva também é desenvolvida durante as aulas e, nesse sentido, Lira (2010) nos diz que

Através da brincadeira, a criança aprende a atuar numa esfera cognitiva e consegue dar pistas a seus educadores de elementos ausente à sua realidade, como no caso de brincadeiras de faz de conta, criando situações do seu imaginário. Isto pode ser alcançado no trabalho com dobraduras. (LIRA, 2010, p. 22).

Menezes (2014) enfatiza ainda que

O trabalho desenvolvido mostra evidências de possuir elementos que podem contribuir para um real aprimoramento do professor em sala, demonstrando com isso, sua eficácia na aprendizagem da geometria plana uma vez que deve ser bem aceito pela classe docente como um instrumento de pesquisas e trabalhos futuros. (MENEZES, 2014. p.65)

Deste modo, reforçamos que o ensino da geometria plana por meio das dobraduras de papel é um catalisador significativo para o processo de aprendizagem uma vez que o aluno, tomado pelo sentimento da curiosidade irá dedicar-se ainda mais para adquirir conhecimento.

Salientamos ainda que a proposta metodológica dessa dissertação está voltada para a prática em sala, contudo, fomos impedidos e aplicar nossa oficina de dobraduras devido todos os acontecimentos do ano de 2020, porém, acreditamos que o Origami pode atuar em parceria com a didática dos professores em todos os níveis do ensino básico.

Isto posto, no próximo tópico exporemos alguns resultados obtidos por outras dissertações que trataram sobre o tema e que conseguiram obter resultados de campo a respeito da prática do Origami como metodologia de ensino.

3.1 Uma ferramenta pedagógica

Desde que estamos impedidos de aplicar nossa metodologia em sala de aula, buscamos algumas dissertações que trataram a respeito do Origami, com o intuito de reforçar a nossa proposta metodológica.

Nesse sentido, Rancan (2011) salienta que

Na segunda etapa, ocorrida no 1º semestre de 2011, foram realizadas atividades envolvendo técnicas de dobraduras manuais associadas e apoiadas pelo Blog para auxiliar o processo de aprendizagem de conceitos de Geometria Plana e Geometria Espacial. A análise relacionada às formas geométricas existente na concepção do projeto desta obra de arte foi novamente realizada com esta turma, a fim de que pudesse comparar os resultados da turma que não usou a metodologia proposta (Origamis e Blog) com aquela tradicionalmente utilizada pela pesquisadora. Importante destacar que se decidiu realizar a investigação usando a comparação entre duas turmas em anos diferentes e não a opção de fazer a investigação com grupos de mesma série em turmas diferentes e no mesmo ano. (RANCAN, 2011, p.24).

Deste modo, a partir da leitura da pesquisa da autora, percebemos que ela conclui que, o ensino por meio das dobraduras, torna-se mais eficaz uma vez que os alunos se sentem mais dispostos a aprender, uma vez que as atividades são mais divertidas e o resultado final do trabalho é atrativo e muito bonito.

Rancan (2011, p.55) também destaca que o uso de Origamis para construir sólidos tridimensionais permitiu um olhar diversificado ao entendimento destes poliedros, uma vez que a sua planificação lhes permitiu fazer a reflexão e torno da Geometria Plana.

Assim, a pesquisa da autora fundamenta a nossa afirmação que a prática de ensino com o uso de dobraduras ameniza as dificuldades no ensino de geometria uma vez que os alunos conseguem visualizar de forma mais lúdica os conceitos de geometria.

Cavacami e Furuya (2009) destacam também que

No decorrer do desenvolvimento do trabalho foi observado que muitas pessoas associam Origami com dobraduras de animais, flores e outras formas, mas nunca à Geometria. Talvez este seja um dos motivos do pouco uso no ensino. Mas o fato deste tipo de atividade atrair a atenção tanto de crianças como de jovens e adultos, faz pensar no método como uma importante opção para o ensino. Outra contribuição dessa metodologia pode ser na educação de pessoas com problemas de visão, pois com a manipulação envolvida no Origami, os elementos geométricos podem ser melhor compreendidos. (CAVACAMI; FURUYA, 2009, p.74)

Assim, percebemos que os autores constataram o fato de alguns professores não utilizarem o Origami como metodologia de ensino por falta de conhecimento e também salientam o fato de os mesmos enfatizarem que as técnicas de dobraduras despertam o interesse nos alunos, reforçando nossas concepções sobre instigar o aluno a ter o protagonismo no processo de aprendizagem, contudo, é necessário que os mesmos queiram tal responsabilidade.

A partir dessas pesquisas, destacamos que os autores fizeram uma pesquisa bibliográfica a respeito das construções tridimensionais com o Origami, não houve a aplicação de uma metodologia de pesquisa, ou o levantamento de algum problema, contudo os mesmos defendem que seu trabalho pode ser utilizado como metodologia de ensino da geometria plana elementar por meio de problemas clássicos da Geometria Euclidiana.

Lira (2010) salienta que

O trabalho com Origami em sala de aula mostrou ser um excelente recurso didático de interesse dos alunos e principalmente uma ferramenta que propicia o desenvolvimento do espírito criativo, colaborando para o ensino-aprendizagem de inúmeras disciplinas curriculares. Através desta pesquisa, pode-se observar também que os alunos desenvolveram autonomia no fazer e no pensar. Ao surgimento de cada nova peça, era trabalhando nas crianças a autoconfiança, e a ousadia em aprimorar e superar a feitura de dobras precisas. (LIRA, 2010, p.29).

Percebemos que Lira (2010), além de instigar os alunos a participarem ativamente do processo de ensino-aprendizagem notou que eles desenvolveram características fundamentais para a construção do seu conhecimento como, por exemplo, a autonomia para pensar e fazer.

Em seu trabalho, a autora defende o uso do Origami para alunos nas séries iniciais do Ensino Fundamental, salientando a importância dessa prática na formação da cultura dos alunos e, destacando que a prática das dobraduras de papel desenvolve aspectos cognitivos, afetivos e psicomotores, como, por exemplo, o desenvolvimento da coordenação motora fina.

A professora busca mostrar aos professores interessados no uso do Origami em sala de aula que eles podem utilizar atividades com o papel para desenvolver em seus alunos a atenção, concentração, memória, raciocínio lógico, dentre outras habilidades cognitivas.

Nas palavras de Da Silva (2018),

Vejo como ponto positivo no decorrer da oficina a troca de informações e diálogos sobre a importância de se ter ferramentas que possam ser utilizadas em sala de aula para se alcançar uma didática capaz de transmitir o conhecimento para o educando de maneira efetiva. (DA SILVA, 2018, p.41)

Este autor defende a prática do ensino por meio de dobraduras além do ensino de matemática, com a aplicação de oficinas em salas de aula, o mesmo propõe o uso do Origami para o ensino de artes na educação básica, em particular, crianças de cinco a dez anos, corroborando com o fato de que essa prática auxilia em mais do que um componente curricular dos alunos.

No mesmo ano, o autor aplicou sua metodologia para alunos na faixa etária de 14 e 15 anos e, constatou que, nessa idade, houveram alguns bloqueios pois os mesmos não estavam acostumados com esse tipo de trabalho, contudo, eles também demonstraram interesse em participar, mas o autor percebeu que é necessária uma adaptação para estabelecer um trabalho eficaz.

Isto posto, percebemos que além de todos os benefícios pedagógicos que o trabalho com Origami pode trazer, a prática do ensino por meio de dobraduras auxilia nos alunos o convívio em equipe e o trabalho em grupo, auxiliando assim o processo de aprendizagem.

Em seu trabalho, Freitas (2016, p.36) destaca que

O Objetivo deste capítulo é apresentar roteiros que auxiliem a diversificação de estratégias no ensino de matemática. O enfoque será dado à geometria, no entanto, atividades que abrangem outras áreas da matemática podem ser abordadas por meio das dobraduras e tais procedimentos podem ser encontrados em Lang (2010). (FREITAS, 2016, p.36).

A autora também salienta que,

O uso de dobraduras pode ser muito útil no ensino da matemática. A utilização de materiais concretos em sala torna a aula dinâmica e a aprendizagem mais significativa. O trabalho desenvolvido em campo alcançou a receptividade dos alunos. Percebe-se, contudo, que a utilização sequenciada do mesmo instrumento também o torna cansativo. Alguns alunos relataram em suas avaliações que as atividades finais se tornaram repetitivas (FREITAS, 2016, p.58).

Novamente temos uma autora destacando que o uso de dobraduras contribui para amenizar as dificuldades no ensino da geometria pelo fato de os alunos enxergarem de forma lúdica os conceitos básicos de geometria, contribuindo assim, para uma aprendizagem significativa.

Ressaltamos que a pesquisa de Freitas se baseou na aplicação de uma oficina de dobraduras para alunos do 7º ano de uma escola em Presidente Prudente, no estado de São Paulo, seu projeto foi apresentado a professores e alunos da escola que aceitaram participar de forma voluntária da pesquisa.

A autora fez um levantamento com esses alunos aplicando um questionário fazendo perguntas sobre conceitos básicos de geometria plana como *ângulos*, *retas*, *segmentos* e *triângulos* e comparou os resultados de antes e depois dos mesmos participarem do curso com dobradura de papel, observando um aumento significativo nos acertos.

Para Fleischmann (2019),

O origami com o auxílio da régua e do compasso possibilitou trabalharmos conteúdos de Matemática associando a Geometria com a Álgebra na construção do retângulo áureo, de frações, oportunizando os alunos aprenderem os conceitos descobrindo, visualizando, analisando e também criando conjecturas em um processo em que a aprendizagem passa a ser mais significativa. Verificamos que tudo isso é possível de maneira natural com a compreensão dos conceitos e conseqüentemente, a memorização. (FLEISCHMANN, 2019, p.96).

Percebemos que a autora constata outro benefício da prática do Origami, a memorização, uma vez que os alunos precisam lembrar das sequências de dobras para construir os elementos geométricos, desenvolvendo assim, técnicas mais

apuradas de memorização, característica fundamental para o aprendizado e, nesse sentido, Pinheiro (2020) salienta que,

Aprender é algo natural para cérebro e fatores como emoção, motivação e memorização são imprescindíveis no processo de ensino-aprendizagem, quando nosso sistema límbico, responsável pelas emoções, é estimulado por um acontecimento ou fato, produzimos mais neurotransmissores, fazendo com que o cérebro grave fortemente as memórias. (PINHEIRO, 2020, p.16)

Deste modo, pautados nesses autores, no capítulo a seguir, propomos a aplicação de uma oficina de dobraduras para auxiliar o ensino de conceitos básicos de Geometria Plana, trazendo alguns desafios que podem ser utilizados pelo professor para o ensino dos conceitos básicos de geometria plana e defendendo que o uso do papel fará com o aluno associar conceitos abstratos com lúcidos, facilitando, assim, o aprendizado.

4 O ORIGAMI E A MATEMÁTICA

Neste capítulo, proporemos uma oficina de dobraduras, contudo sentimos a necessidade de antes fazermos uma construção a respeito das noções básicas da geometria plana, como o conceito de ponto, reta, planos, dentre outros elementos.

4.1 Noções Básicas de Geometria

Dos elementos de Euclides, temos que ponto, reta e plano não possuem definição, sendo conhecidos por conceitos axiomáticos, dessa forma, tomaremos esses três elementos como ponto de partida de nosso estudo.

Podemos entender que o ponto não possui forma nem dimensão, ou seja, o ponto é um objeto adimensional, ele é apenas um elemento do espaço tridimensional.

A reta, por sua vez, são conjuntos de pontos do plano e são infinitas para as duas direções.

E o plano é um conjunto de retas alinhadas e, portanto, também é um conjunto de pontos.

4.1.1 Postulados da Geometria Euclidiana

1) Postulados de existência

a) Numa reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.

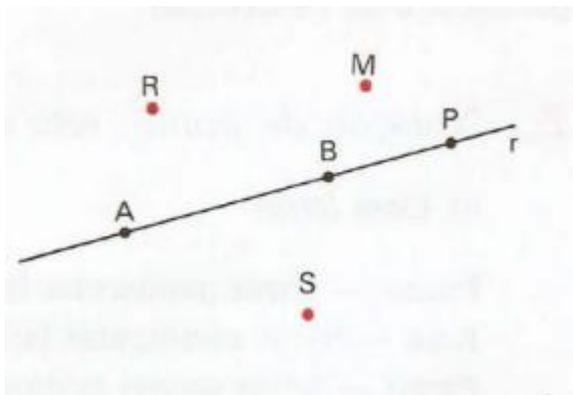
b) Num plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.

Na Figura 16 temos a representação da reta r e os pontos A, B, P, R, S e M, tais que

$$A, B \text{ e } P \text{ estão em } r, \text{ ou seja, } A \in r; B \in r \text{ e } P \in r.$$

e, também,

$$A, B \text{ e } P \text{ estão em } r, \text{ ou seja, } R \notin r; S \notin r \text{ e } M \notin r.$$

Figura 16: Reta r e os pontos A, B, P, R, S e M

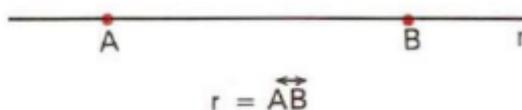
Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar. Vol 9. Pág 2. Acesso em: 05 jan. 2021.

Observação: Quando três ou mais pontos estão numa mesma reta, dizemos que esses pontos são colineares. Caso contrário, serão ditos não-colineares.

2) Postulados da determinação

a) Da reta: Dois pontos distintos determinam uma, e somente uma, reta que passa por eles.

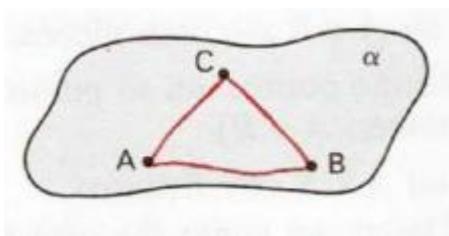
Na Figura 17 temos os pontos A e B determinando a reta r .

Figura 17: Reta r determinada pelos pontos A e B

Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar. Vol 9. Pág 3. Acesso em: 05 jan. 2021.

b) Do plano: Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

Na Figura 18, temos o plano α determinado pelos pontos A, B e C.

Figura 18: Plano α determinado pelos pontos A, B e C

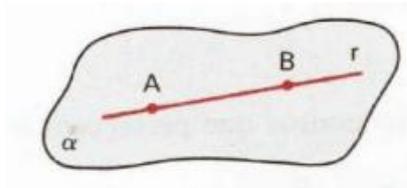
Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar. Vol 9. Pág 3. Acesso em: 05 jan. 2021.

3) Postulado da Inclusão

a) Se uma reta tem dois pontos distintos de um plano então ela está contida nesse plano.

Na Figura 19 temos a representação da reta r contida no plano α .

Figura 19: Reta r contida no plano α



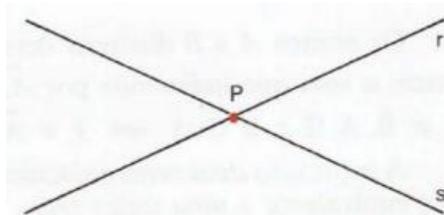
Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar. Vol 9. Pág 4. Acesso em: 05 jan. 2021.

4.1.2 Definições importantes

1) Retas concorrentes: Duas retas são concorrentes se, e somente se, possuem um ponto em comum.

Na Figura 20 temos as retas concorrentes r e s , cujo único ponto de intersecção é o ponto P .

Figura 20: Retas concorrentes r e s

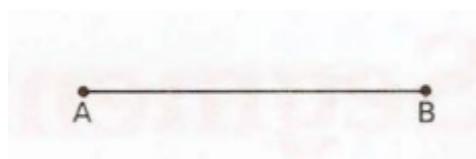


Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar. Vol 9. Pág 4. Acesso em: 05 jan. 2021.

2) Segmento de reta: Dados os pontos A e B sobre a reta r , chamamos de segmento AB ou \overline{AB} o conjunto constituído por todos os pontos de r que se encontram entre A e B . Os pontos A e B são denominados extremos ou extremidades do segmento.

Na Figura 21 temos o segmento de reta com extremos A e B .

Figura 21: Segmento AB

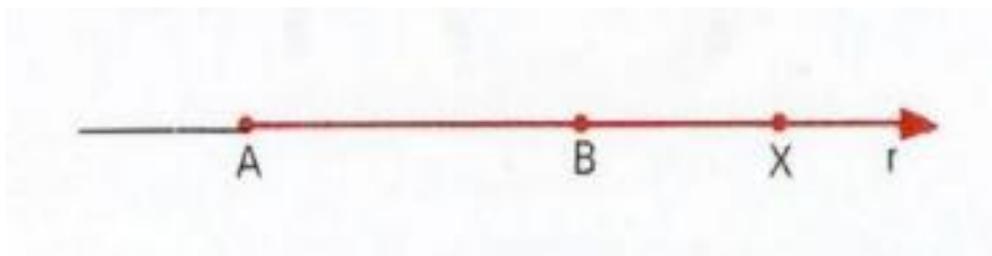


Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar. Vol 9. Pág 8. Acesso em: 05 jan. 2021.

3) Semirreta: Dados dois pontos distintos A e B sobre uma reta r, a reunião do segmento de reta AB com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta AB ou \overrightarrow{AB} ; neste caso A é chamado de origem da semirreta AB.

Na Figura 22 temos a semirreta AB

Figura 22: Semirreta AB

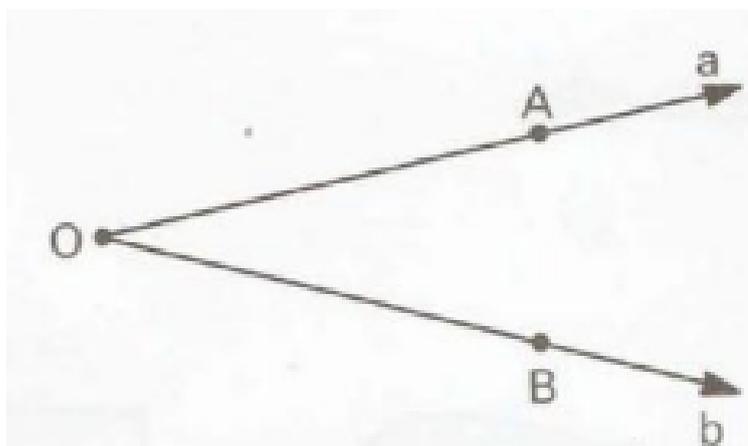


Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar. Vol 9. Pág 8. Acesso em: 05 jan. 2021.

4) Ângulo: Chama-se ângulo a reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta.

Na Figura 23 temos o ângulo definido pelas semirretas AO e OB.

Figura 23: Ângulo AOB



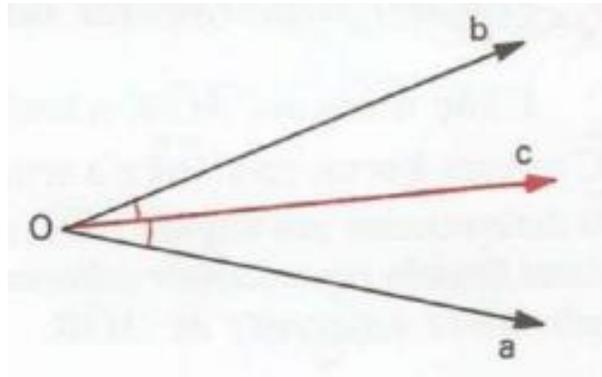
Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar. Vol 9. Pág 20. Acesso em: 05 jan. 2021.

5) Congruência: Em geometria, duas figuras são congruentes se elas possuem a mesma forma e tamanho. Mais formalmente, dois conjuntos de pontos geométricos são ditos “congruentes” se, e somente se, um pode ser transformado no outro por isometria, ou seja, uma combinação de translações, rotações e reflexões.

6) Bissetriz de um ângulo: A bissetriz de um ângulo é a semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do mesmo e que o divide em ângulos congruentes.

Na Figura 24 temos a bissetriz interna c do ângulo formado pelas retas a e b .

Figura 24: Bissetriz de um ângulo

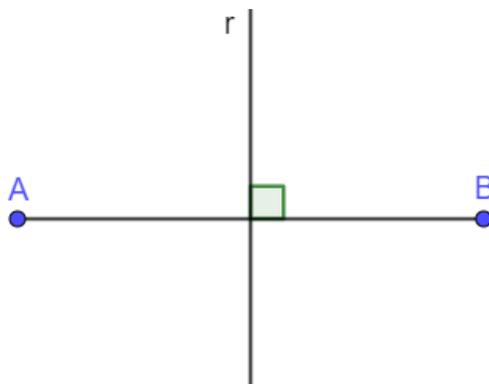


Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar. Vol 9. Pág 25. Acesso em: 05 jan. 2021.

7) Mediatriz de um segmento: Sejam dois pontos distintos A e B , o conjunto de todos os pontos do plano equidistantes a esses pontos é chamado de reta mediatriz.

Na Figura 25 temos a reta mediatriz do segmento AB .

Figura 25: Reta mediatriz

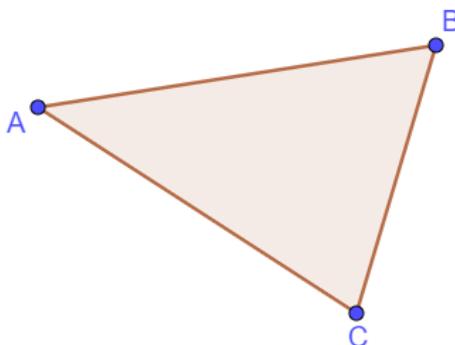


Fonte: Próprio autor.

8) Triângulo: Sejam três pontos não colineares A , B e C , chama-se triângulo a união dos segmentos AB , AC e BC .

Na Figura 26 temos o triângulo ABC ou $\triangle ABC$.

Figura 26: Triângulo ABC

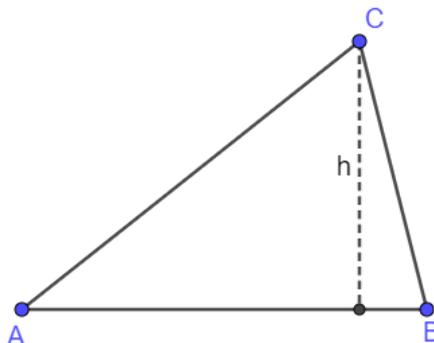


Fonte: Próprio autor.

9) Altura de um triângulo: A altura de um triângulo é um segmento de reta com origem em um dos vértices e perpendicular a reta suporte ao lado oposto a esse vértice.

Na Figura 27, temos a altura h em relação ao lado AB.

Figura 27: Altura de um triângulo

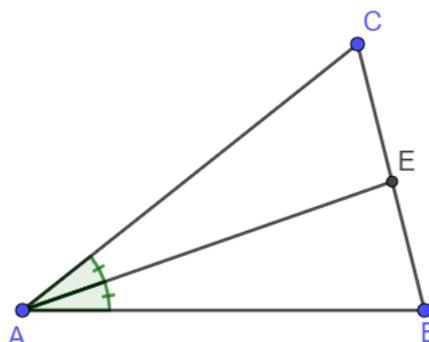


Fonte: Próprio autor.

10) Bissetriz de um triângulo: É um segmento de reta com origem em um dos vértices do triângulo com a outra extremidade no lado oposto a esse vértice. Sendo que ela divide ao meio o ângulo correspondente ao vértice.

Na Figura 28, temos a bissetriz do ângulo A.

Figura 28: Bissetriz interna de um triângulo

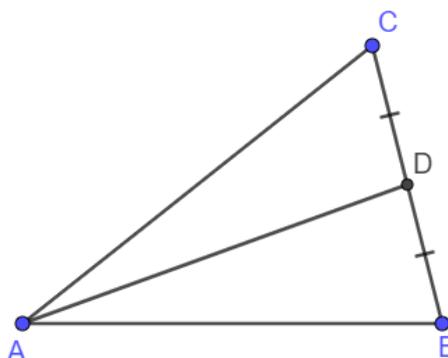


Fonte: Próprio autor.

11) Mediana de um triângulo: É um segmento que divide as bases do triângulo em duas partes iguais. Dessa forma temos que mediana é um segmento de reta com origem em um dos vértices do triângulo e extremidade no ponto médio do lado oposto ao vértice.

Na Figura 29, temos uma mediana do triângulo ABC.

Figura 29: Mediana de um triângulo



Fonte: Próprio autor.

14) Área: Em matemática, podemos entender com área de uma figura plana a porção do plano ocupada por essa figura, para isso comparamos essa região ocupada com a unidade de área.

Isto posto, revistos alguns conceitos básicos da geometria de Euclides, antes iniciarmos nossa oficina de dobraduras, iremos ver de forma breve alguns axiomas dos origamis.

4.2 Os Axiomas do Origami

Assim como a geometria euclidiana, as construções geométricas feitas no Origami são regidas por um conjunto de axiomas. Neste tópico, utilizando a organização feita por Cavacami (2009), veremos alguns axiomas que dão suporte a diversas teorias construídas baseadas nas dobraduras, essas descrições formais foram propostas pelo matemático ítalo-japonês Humaiki Huzita, que formulara seis axiomas que regeriam as construções geométricas feitas com dobraduras.

Acreditamos que esses conceitos só devem ser mostrados aos alunos caso haja uma curiosidade dos mesmos em saber que as dobraduras se, assim como a geometria plana, também são regidas por conceitos axiomáticos.

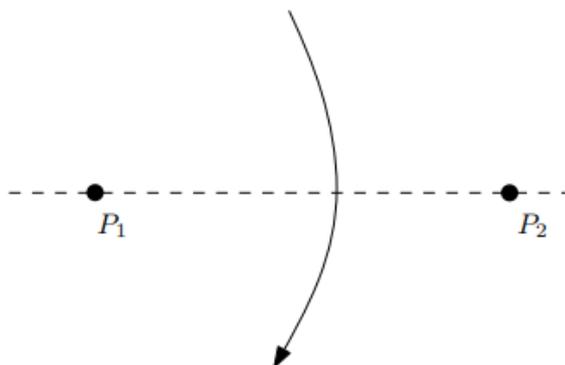
Em 2001, Koshiro Hatori mostrou uma dobragem diferente dos axiomas existentes, surgindo, então, o sétimo axioma.

4.2.1 Os axiomas de Huzita-Hatori

Axioma I: Dados dois pontos P_1 e P_2 , existe uma única dobra que passa por esses dois pontos.

Na Figura 30 temos a ilustração do Axioma I.

Figura 30: Axioma I



Fonte: O uso do Origami como recurso didático-metodológico para o ensino de Geometria. p.20. Acesso em: 05 jan. 2021.

Esse Axioma está relacionado ao Axioma de Euclides, o axioma da incidência 1, *dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém*, com ele, o aluno pode visualizar melhor essa ideia. Contudo, reforçamos que o professor deve expor que o conceito de reta relaciona-se a algo infinito, enquanto que a dobradura é algo finito.

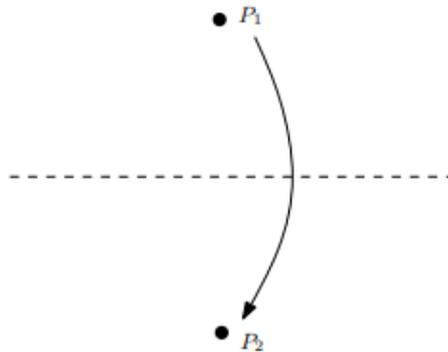
Note que, o axioma é escrito matematicamente na forma:

- 1) $\forall A, B \in E, A \neq B, \exists r$ tal que $A \in r$ e $B \in r$ (existência)
- 2) Se $\exists s$ tal que $A \in s$ e $B \in s$ então $s = r$ (unicidade)

Axioma II: Dados dois pontos P_1 e P_2 , existe uma única dobra que coloca P_1 sobre P_2 .

Na Figura 31 temos a ilustração do Axioma II.

Figura 31: Axioma II



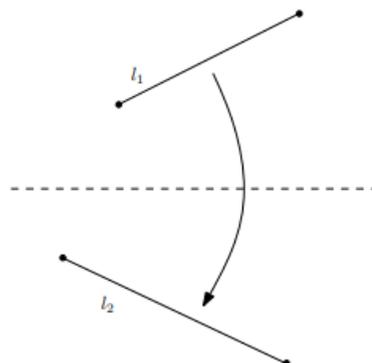
Fonte: O uso do Origami como recurso didático-metodológico para o ensino de Geometria. p.21. Acesso em: 05 jan. 2021.

O Axioma II está relacionado com a existência da mediatriz, mostrando sua unicidade, e dando suporte para construções do ponto médio e da reta perpendicular a uma reta dada. Novamente, atentamos que professor deve expor a diferença entre os conceitos de “finito” e “infinito” aos alunos.

Axioma III: Dadas duas retas l_1 e l_2 , existe uma dobra que colocam l_1 sobre l_2 . Para esse axioma, também se faz necessária a diferenciação entre reta = infinito e dobradura = finito.

Na Figura 32 temos a ilustração do Axioma III.

Figura 32: Axioma III



Fonte: O uso do Origami como recurso didático-metodológico para o ensino de Geometria.
p.21. Acesso em: 05 jan. 2021.

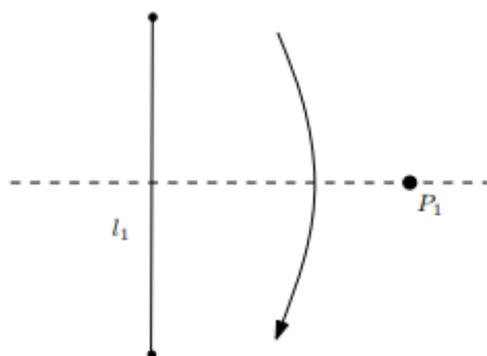
Esse axioma pode ser utilizado para explicar o conceito de bissetriz, as retas l_1 e l_2 só coincidem pelo fato de as dobras conterem a bissetriz entre elas. Pin e Urube (2016) destacam que:

Há três soluções diferentes: Existirem duas dobras, se elas se concorrem; existir uma somente, que é mediatriz de todos os segmentos formados de medida igual à distância entre essas retas, tomando um ponto de l_1 e outro de l_2 como extremos e $l_1 // l_2$; ou infinitas, levando em consideração $l_1 = l_2$, e qualquer perpendicular a elas leva uma até a outra. (PIN e URUBE, p. 41, 2016).

Axioma IV: Dados um ponto P_1 e uma reta l_1 , existe uma única dobra, perpendicular à l_1 , que passa por P_1 .

Na Figura 33 temos a ilustração do Axioma IV.

Figura 33: Axioma IV



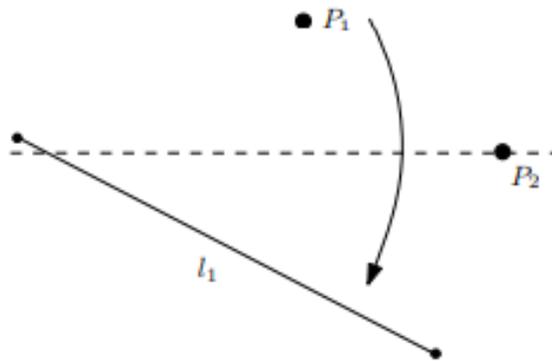
Fonte: O uso do Origami como recurso didático-metodológico para o ensino de Geometria.
p.21. Acesso em: 05 jan. 2021.

O Axioma IV, pode ser utilizado para mostrar o seguinte teorema: *Por um ponto dado, fora de uma reta, existe uma única reta perpendicular à reta dada.*

Axioma V: Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma reta l_1 , desde que a distância de P_1 à P_2 seja superior ou igual à distância de P_2 à l_1 , existe uma dobra que leva P_1 até l_1 e passa por P_2 .

Na Figura 34 temos a ilustração do Axioma V.

Figura 34: Axioma V



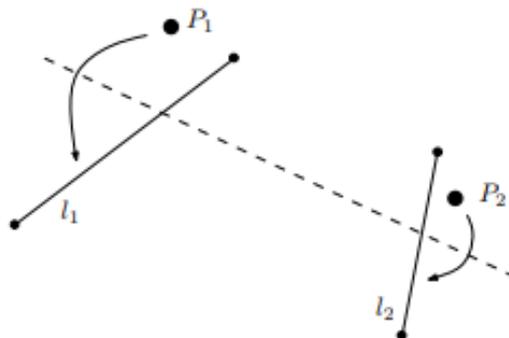
Fonte: O uso do Origami como recurso didático-metodológico para o ensino de Geometria.
p.22. Acesso em: 05 jan. 2021.

De acordo com Furuya (2009) *apud* Pin e Urube (2016), a quantidade de soluções do Axioma 5 pode ser 0, 1 ou 2, dependendo da posição dos pontos e da reta, pois o problema é equivalente a encontrar a intersecção da reta l_1 com a circunferência de centro P_2 passando por P_1 .

Axioma VI: Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas retas l_1 e l_2 , desde que l_1 e l_2 não forem paralelas, existem dobras que levam P_1 até l_1 e P_2 até l_2 .

Na Figura 35 temos a ilustração do Axioma VI.

Figura 35: Axioma VI



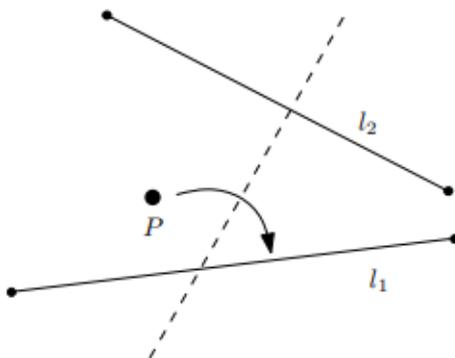
Fonte: O uso do Origami como recurso didático-metodológico para o ensino de Geometria.
p.23. Acesso em: 05 jan. 2021.

Esse axioma permite que o professor explique o conceito de medianas, pois as marcações dos pontos P_1 e P_2 , sobre as retas l_1 e l_2 , respectivamente, os pontos P'_1 e P'_2 podem ser utilizados para construir a mediana de um triângulo P_1AB e P_2CD , onde A e B são pontos sobre l_1 e C e D pontos sobre l_2 . Importante salientar que essa construção não é possível ser feita com régua e compasso.

Axioma VII: Dados um ponto P e duas retas l_1 e l_2 , existe uma dobra, perpendicular à l_2 , que leva P até l_1 .

Na Figura 36 temos a ilustração do Axioma VII.

Figura 36: Axioma VII



Fonte: O uso do Origami como recurso didático-metodológico para o ensino de Geometria. p.23. Acesso em: 05 jan. 2021.

Para Pin e Urube (2016), o Axioma VII é questionável uma vez que pode ser construído a partir de alguns resultados obtidos com o Axioma IV. Os autores também salientam que

Uma vez exploradas essas relações, a proposta é realizar uma atividade de revezamento entre os alunos, propondo problemas de construção geométrica e a construção de polígonos, regulares ou não, utilizando somente dobraduras ou utilizando régua e compasso para verificação dos axiomas. (PIN e URUBE, 2016, p.43).

Assim, pautados nos postulados e definições da Geometria Euclidiana e nos Axiomas de Huzita-Hatori faremos agora a construção de alguns elementos básicos da geometria plana por meio do Origami.

5 O ENSINO DA GEOMETRIA POR MEIO DE DOBRADURAS

Neste capítulo, faremos a construção, por meio de dobraduras, de alguns conceitos básicos de geometria plana e ressaltamos que essa proposta metodológica pode ser aplicada por professores do ensino básico como forma de trazer mais ludicidade á suas aulas sobre geometria.

Salientamos que nossa proposta original era trabalhar essa oficina com os alunos do oitavo e do nono ano do ensino fundamental de uma escola pública da região metropolitana de Belém e verificar, em relação a alunos das mesmas turmas de outra escola, como o Origami pode auxiliar no processo de ensino-aprendizagem desses alunos.

Destacamos que nosso referencial teórico foram dissertações e, principalmente, a Oficina de Dobraduras, produzida por Mario Carneiro e Michel Spira, em parceria com o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e que serve, dentre outros fatores, para a preparação de alunos para as Olimpíadas de Matemática.

Reforçamos que todas as imagens a seguir foram elaboradas pelo autor desta dissertação.

1) Ilustração da construção do ponto por meio do Origami

I. Faça uma dobra qualquer no papel, conforme Figura 37:

Figura 37: Construção do ponto - Passo 01



Fonte: Próprio autor

II. Faça uma dobra sobre a dobra anterior, conforme Figura 38:

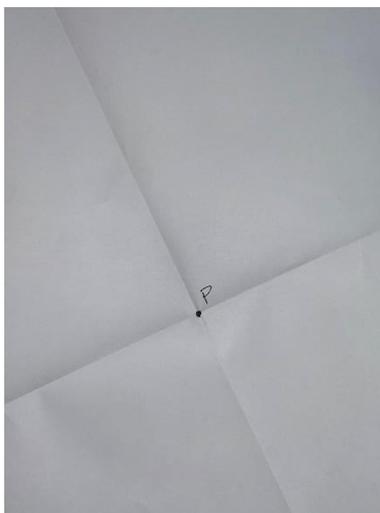
Figura 38: Construção do ponto - Passo 02



Fonte: Próprio autor

III. Desdobre, conforme Figura 39:

Figura 39: Construção do ponto - Passo 03



Fonte: Próprio autor

A intersecção entre as dobraduras é o ponto P. Reforçamos novamente que a reta é algo infinito, entretanto, estamos associando as dobraduras, que são finitas, as retas.

Deste modo, podemos agora mostrar para o aluno que o conceito axiomático do ponto realmente “existe”, mostrando ao aluno que o ponto determina uma posição no espaço, assim, a partir deste momento, ele poderá entender a geometria de forma mais lúdica, o que pode auxiliar no seu processo de aprendizagem.

2) Ilustração do ponto médio por meio do origami

I. Marque dos pontos A e B, conforme Figura 40:

Figura 40: Construção do ponto médio - Passo 01



Fonte: Próprio autor

II. Faça uma dobra que passa por A e B, conforme Figura 41:

Figura 41: Construção do ponto médio - Passo 02



Fonte: Próprio autor

III. Faça uma dobra de modo que o ponto A coincida com o ponto B, conforme Figura 42:

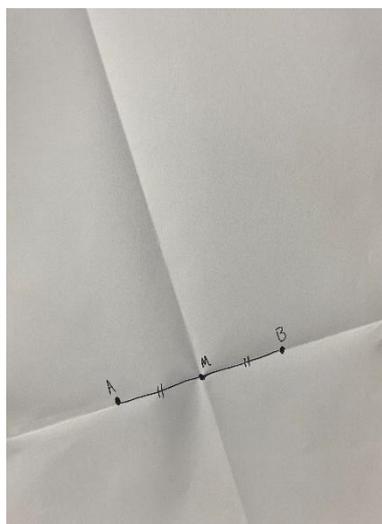
Figura 42: Construção do ponto médio - Passo 03



Fonte: Próprio autor

V. Desdobre, conforme Figura 43:

Figura 43: Construção do ponto médio - Passo 04



Fonte: Próprio autor

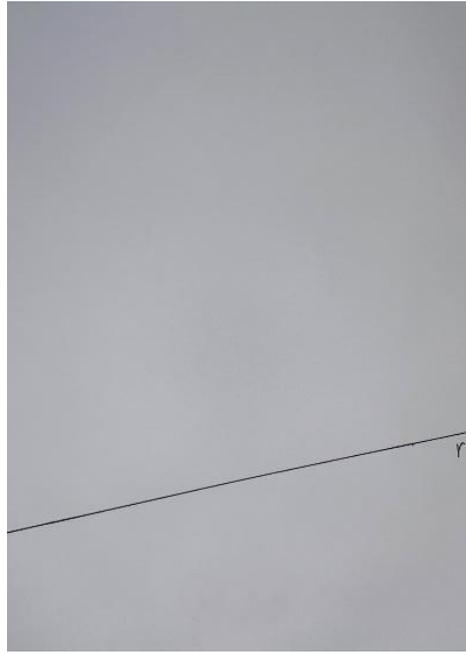
O ponto de intersecção entre as dobras é o ponto médio do segmento AB.

Talvez o aluno consiga mensurar de forma mais significativa o conceito de ponto médio, ele consegue visualizar de maneira mais lúdica a distância entre os pontos. O professor pode até solicitar que o aluno utilize uma régua numerada para comprovar que o ponto M realmente é o ponto médio entre os pontos A e B.

3) Ilustração de retas perpendiculares por meio do origami

I. Construa a reta r , conforme Figura 44:

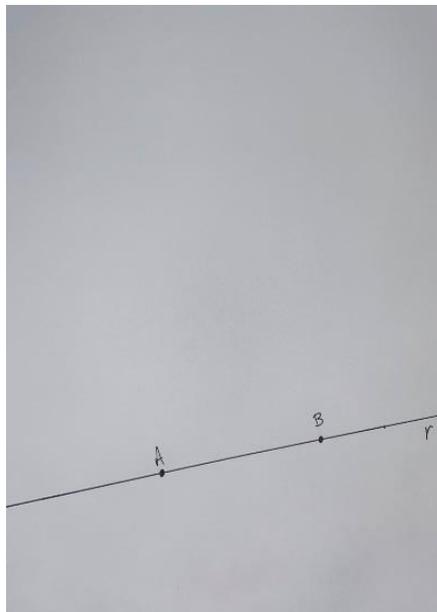
Figura 44: Construção de retas perpendiculares - Passo 01



Fonte: Próprio autor

II. Marque dois pontos distintos A e B sobre essa reta, conforme Figura 45:

Figura 45: Construção de retas perpendiculares - Passo 02



Fonte: Próprio autor

III. Faça uma dobra de modo que o ponto A coincida com o ponto B, conforme Figura 46:

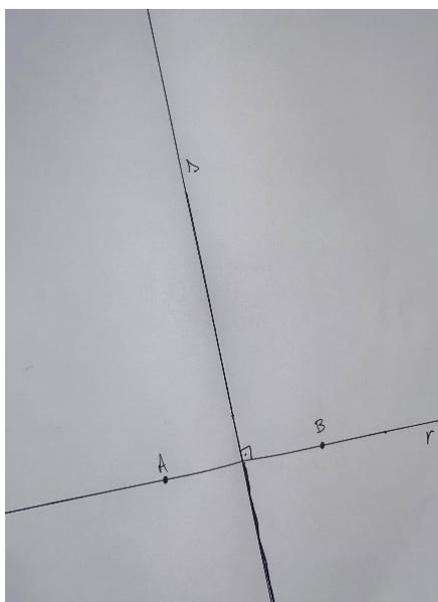
Figura 46: Construção de retas perpendiculares - Passo 03



Fonte: Próprio autor

IV. Desdobre, conforme Figura 47:

Figura 47: Construção de retas perpendiculares - Passo 04



Fonte: Próprio autor

As retas r e s são perpendiculares.

Novamente, o aluno consegue visualizar conceitos básicos de geometria e, caso o professor já tenha ensinado aos alunos a utilizar o transferidor, os mesmos podem utiliza-lo para medir e confirmar que as retas são perpendiculares.

4) Ilustração de retas paralelas por meio do Origami

I. Construa a reta r , conforme Figura 48:

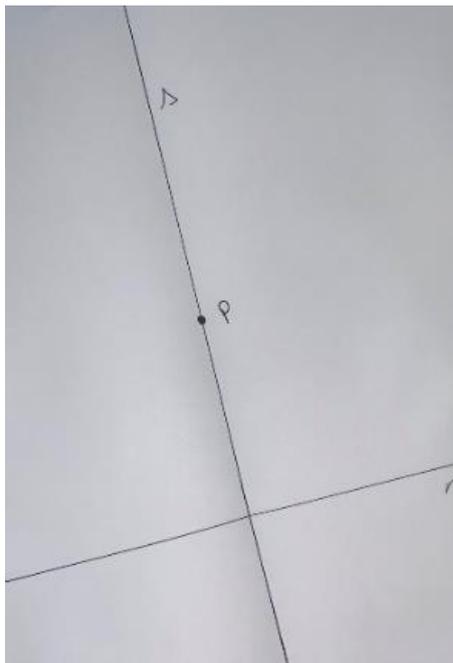
Figura 48: Construção de retas paralelas - Passo 01



Fonte: Próprio autor

II. Construa a reta s perpendicular r e, sobre ela, marque o ponto P , conforme Figura 49:

Figura 49: Construção de retas paralelas - Passo 02



Fonte: Próprio autor

III. Faça uma dobra de modo que a reta r passe por P , conforme Figura 50:

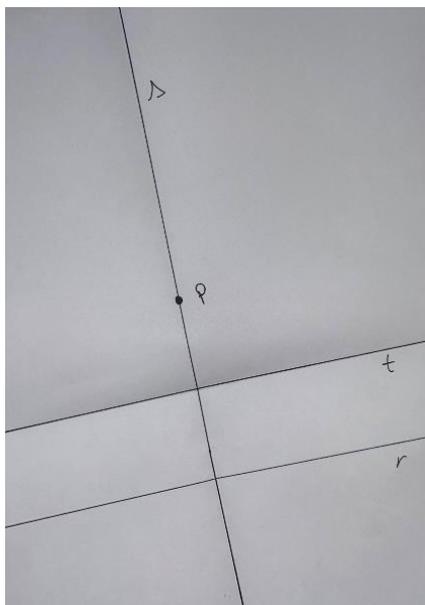
Figura 50: Construção de retas paralelas - Passo 03



Fonte: Próprio autor

IV. Desdobre, conforme Figura 51:

Figura 51: Construção de retas paralelas - Passo 04



Fonte: Próprio autor

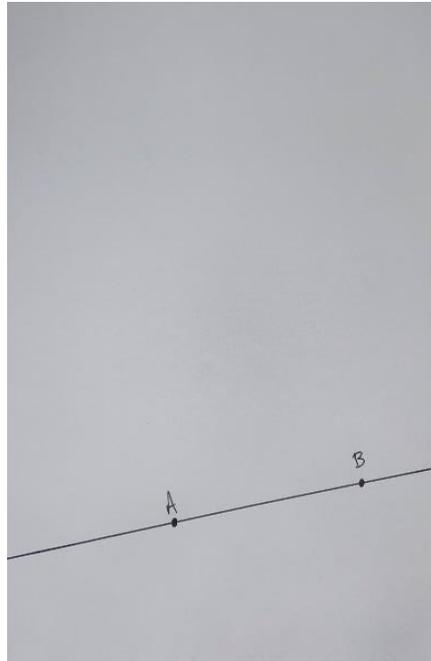
A reta t é paralela à reta r .

Para esta construção, o professor pode pedir para o aluno, utilizando uma régua numerada, constatar que a distância entre as retas sempre será constante e, deste modo, conjecturar que essa distância sempre será a mesma, ou seja, as retas nunca terão pontos em comum.

5) Ilustração da mediatriz de um segmento por meio do Origami

I. Construa a reta que passa pelos extremos A e B do segmento, conforme Figura 52:

Figura 52: Construção da mediatriz - Passo 01



Fonte: Próprio autor

II. Faça uma dobra de modo que os pontos A e B coincidam, conforme Figura 53:

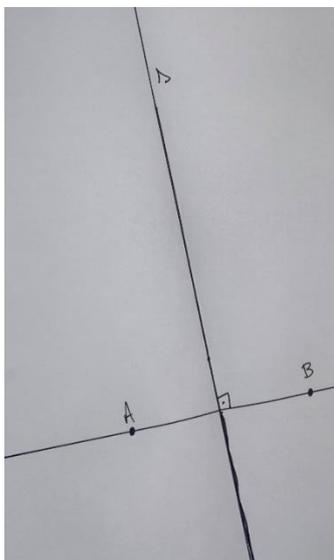
Figura 53: Construção da mediatriz - Passo 02



Fonte: Próprio autor

III. Desdobre, conforme Figura 54:

Figura 54: Construção da mediatriz - Passo 03



Fonte: Próprio autor

A reta s é a reta mediatriz do segmento AB .

Após finalizar essa construção o aluno poderá utilizar tanto a régua, quanto o transferidor, para calcular a distância entre os pontos e medir o ângulo entre as retas e , deste modo, entender melhor o conceito de mediatriz.

6) Ilustração de um ângulo por meio do Origami

I. Marque três pontos não colineares A , B e C no plano, conforme Figura 55:

Figura 55: Construção do ângulo - Passo 01



Fonte: Próprio autor

II. Faça a dobra que passa por A e C, conforme Figura 56:

Figura 56: Construção do ângulo - Passo 02



Fonte: Próprio autor

III. Desdobre e faça a dobra que passa por A e B, conforme Figura 57:

Figura 57: Construção do ângulo - Passo 03



Fonte: Próprio autor

IV. Desdobre, conforme Figura 58:

Figura 58: Construção do ângulo - Passo 04



Fonte: Próprio autor

Na figura, temos o ângulo BAC.

Caso os alunos tenham, eles podem utilizar lápis de cor para associar o Origami a definição de ângulo: figura delimitada por duas retas que partem do mesmo ponto ou por dois planos que partem da mesma reta.

7) Ilustração de um triângulo por meio do Origami

I. Marque três pontos não colineares A, B e C, conforme Figura 59:

Figura 59: Construção do triângulo - Passo 01



Fonte: Próprio autor

II. Faça a dobra que passa por A e C, conforme Figura 60:

Figura 60: Construção do triângulo - Passo 02



Fonte: Próprio autor

III. Desdobre e faça a dobra que passa por A e B, conforme Figura 61:

Figura 61: Construção do triângulo - Passo 03



Fonte: Próprio autor

IV. Desdobre e faça a dobra que passa por B e C, conforme Figura 62:

Figura 62: Construção do triângulo - Passo 04



Fonte: Próprio autor

V. Desdobre, conforme Figura 63:

Figura 63: Construção do triângulo - Passo 05



Fonte: Próprio autor

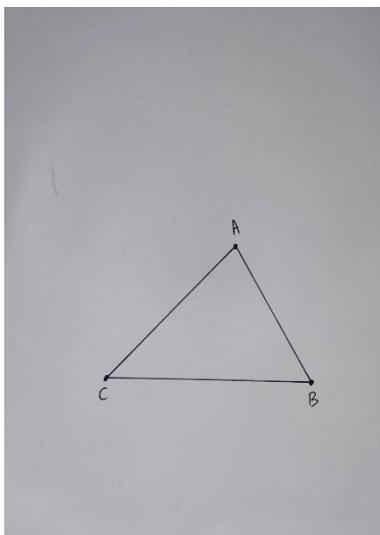
Na figura, temos o triângulo ABC, que podemos, também, relacionar a ideia básica do axioma I e das retas concorrentes.

Por meio dessa construção, o professor pode explicar conceitos como ângulos, vértices e lados de um triângulo, bem como será fundamental para explicar os conceitos de bissetriz, mediana e altura.

8) Ilustração de uma bissetriz interna por meio do Origami

I. Considere o triângulo de vértices A, B e C no plano, conforme Figura 64:

Figura 64: Construção da bissetriz - Passo 01



Fonte: Próprio autor

II. Faça uma dobra sobre um dos lados do triângulo, sem perda de generalidade, faremos sobre o lado AC, conforme Figura 65:

Figura 65: Construção da bissetriz - Passo 02



Fonte: Próprio autor

III. Faça uma dobra de modo que os segmentos AB e AC coincidam, conforme Figura 66:

Figura 66: Construção da bissetriz - Passo 03



Fonte: Próprio autor

IV. Desdobre, conforme Figura 67:

Figura 67: Construção da bissetriz - Passo 04



Fonte: Próprio autor

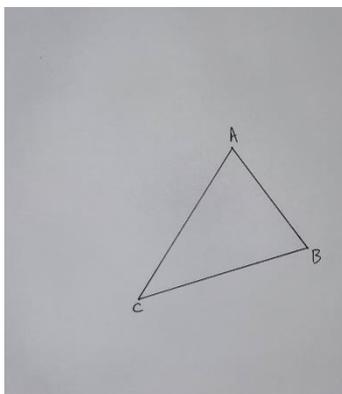
A dobra que passa pelo vértice A e é interna aos lados AB e AC é a bissetriz interna do triângulo ABC em relação ao vértice A.

Novamente o professor pode pedir aos alunos para utilizarem o transferidor e constatarem que os ângulos possuem a mesma medida, ou seja, são congruentes, resgatando mais de um conceito básico da geometria.

9) Ilustração da altura de um triângulo por meio do Origami

I. Considere o triângulo de vértices A, B e C, conforme Figura 68:

Figura 68: Construção da altura - Passo 01



Fonte: Próprio autor

II. Sem perda de generalidade, construa a perpendicular a ao lado BC que passa pelo vértice A, conforme Figura 69:

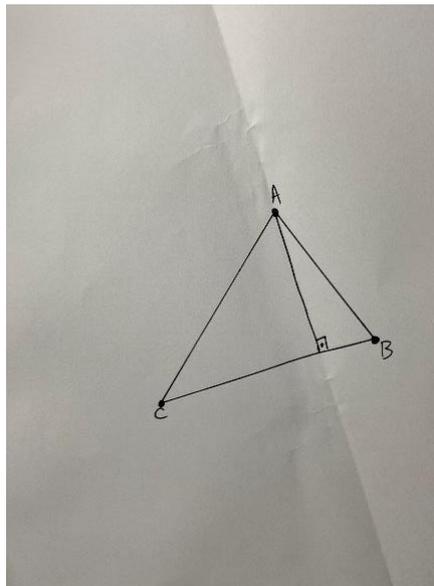
Figura 69: Construção da altura - Passo 02



Fonte: Próprio autor

III. Desdobre, conforme Figura 70:

Figura 70: Construção da altura - Passo 03



Fonte: Próprio autor

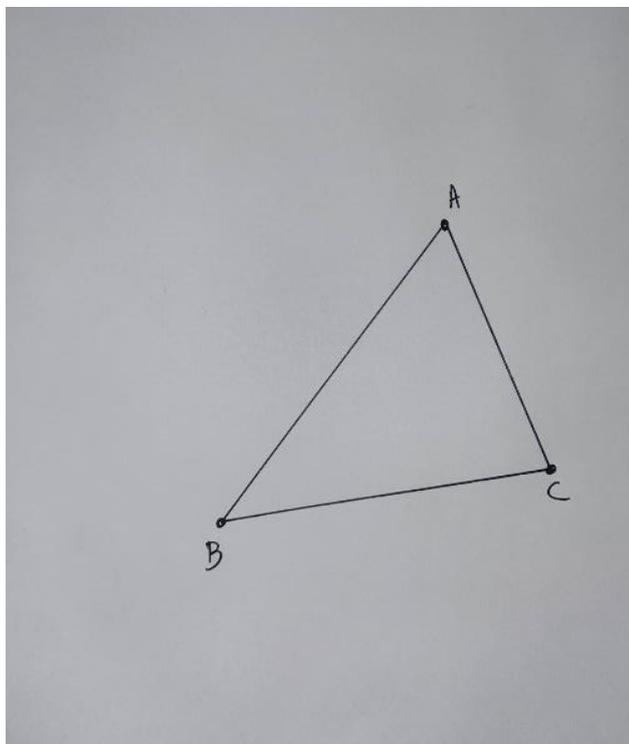
Na figura, temos a altura do triângulo ABC em relação ao vértice A.

O professor pode solicitar aos alunos que construam os mesmos triângulos, contudo, solicitar que os mesmos construam altura diferentes e mostrar aos alunos que um triângulo possui alturas diferentes. Bem como, o mesmo poderia fazer a construção de triângulos acutângulos, obtusângulos e retângulos (construção que já é possível pois o aluno sabe construir uma reta perpendicular) e verificar como os vértices das alturas variam de acordo com o tipo do triângulo estudado.

10) Ilustração da mediana de um triângulo por meio do Origami

I. Considere o triângulo de vértices A e B, conforme Figura 71:

Figura 71: Construção da mediana - Passo 01



Fonte: Próprio autor

II. Sem perda de generalidade, faça a dobra que contém o lado BC, conforme Figura 72:

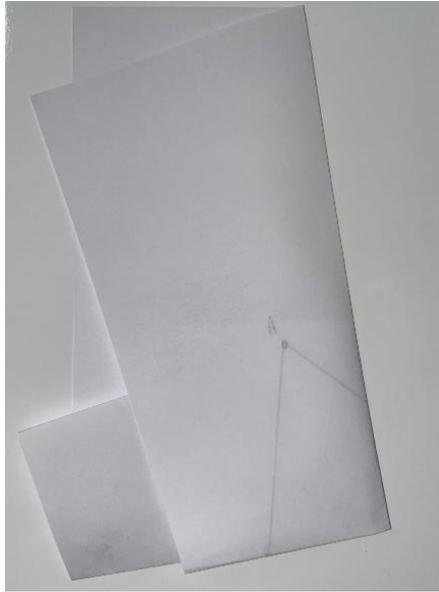
Figura 72: Construção da mediana - Passo 02



Fonte: Próprio autor

III. Faça a dobra de modo que os pontos B e C coincidam, conforme Figura 73:

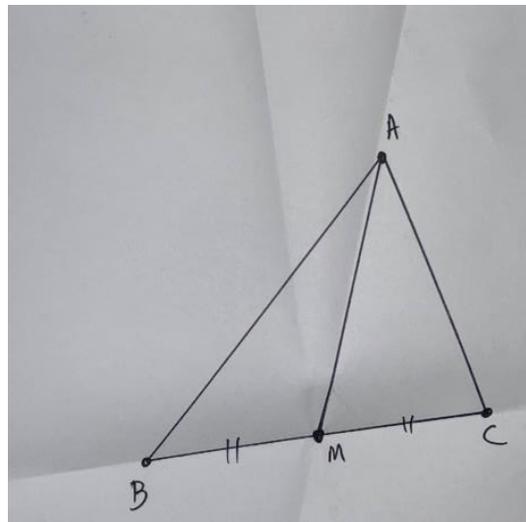
Figura 73: Construção da mediana - Passo 03



Fonte: Próprio autor

IV. Desdobre, conforme Figura 74:

Figura 74: Construção da mediana - Passo 04



Fonte: Próprio autor

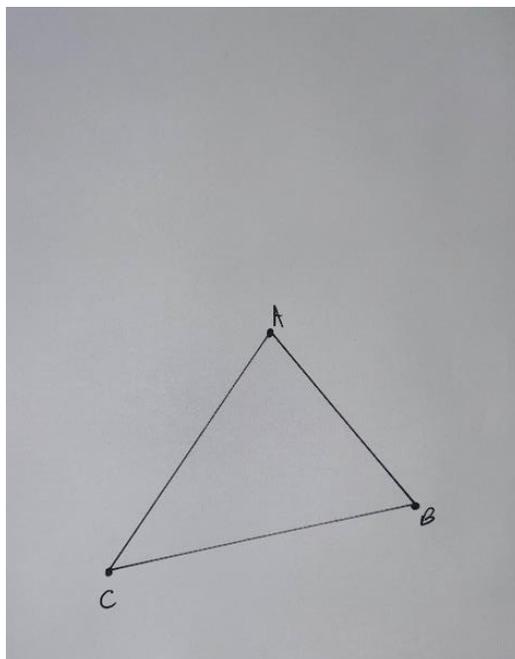
Na figura, temos a mediana, em relação ao vértice A, do triângulo ABC.

O professor também pode fazer essa construção para um triângulo retângulo e pedir para os alunos verificarem que o ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo é equidistante aos seus vértices, conceito relacionado a circunferência circunscrita.

11) Ilustração da mediatriz do lado de um triângulo por meio do Origami

I. Considere o triângulo de vértices A, B e C, conforme Figura 75:

Figura 75: Construção da mediatriz - Passo 01



Fonte: Próprio autor

II. Sem perda de generalidade, faça a dobra que passa pelo lado BC, conforme Figura 76:

Figura 76: Construção da mediatriz - Passo 02



Fonte: Próprio autor

III. Faça uma dobra de modo que os pontos B e C coincidam, conforme Figura 77:

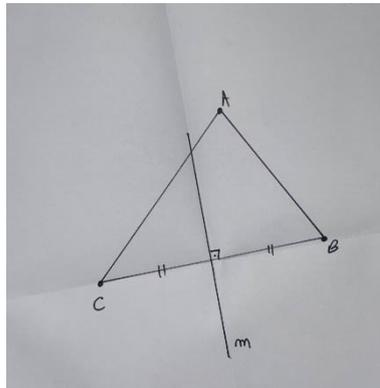
Figura 77: Construção da mediatriz - Passo 03



Fonte: Próprio autor

IV. Desdobre, conforme Figura 78:

Figura 78: Construção da mediatriz - Passo 04



Fonte: Próprio autor

A reta m é a mediatriz do lado BC .

O professor pode solicitar a construção da mesma para diferentes tipos de triângulos e observar que a mesma só passará pelo vértice oposto em triângulos isósceles, assim, essa construção permite que o aluno verifique que a mediatriz não é uma ceviana, uma vez que a reta não necessariamente passa pelo vértice A .

No tópico a seguir, proporemos uma demonstração do teorema de Pitágoras com o auxílio de dobraduras.

5.1 Ilustração de Uma demonstração do Teorema de Pitágoras por meio do Origami

Um dos mais belos teoremas da matemática, o Teorema de Pitágoras, garante que: *Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.*

Acreditamos que demonstrar algum resultado matemático pode ilustrar para o aluno que o Origami não se limita aos conceitos básicos da geometria plana, então, para isso, decidimos demonstrar um dos teoremas mais conhecidos da matemática.

Diversas demonstrações deste Teorema são conhecidas e, ainda assim, continuam aparecendo ainda mais. O matemático alemão E. S. Loomis elaborou mais de 300 demonstrações do Teorema de Pitágoras.

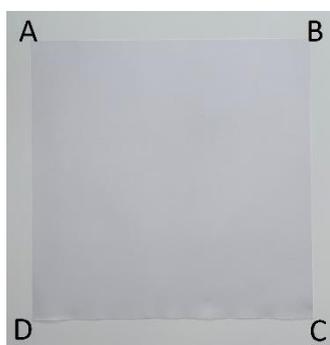
Deste modo, destinaremos este tópico para relacionar uma demonstração deste teorema utilizando conceitos de equivalência de áreas e de dobraduras, contudo, antes veremos como dividir um segmento em partes proporcionais, que será fundamental para demonstração.

5.1.1 Divisão de um segmento em três partes congruentes

Para que possamos associar o Origami com a demonstração do Teorema de Pitágoras, inicialmente aprenderemos a dividir um segmento em três partes congruentes.

I. Considere uma folha quadrada ABCD, conforme Figura 79:

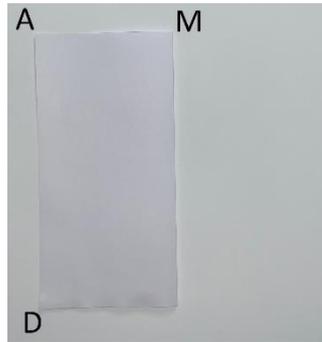
Figura 79: Divisão em segmentos proporcionais - Passo 01



Fonte: Próprio autor

II. Dobre a folha de modo que os lados AD e BC coincidam e marque o ponto M, de intersecção entre a dobra e o lado AB, conforme Figura 80:

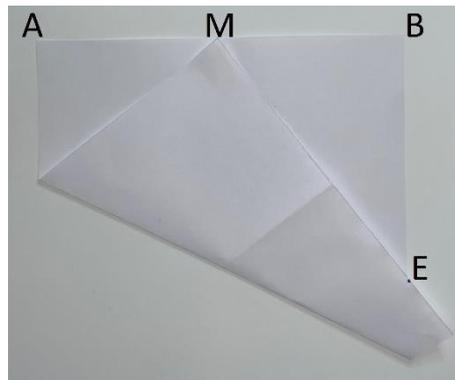
Figura 80: Divisão em segmentos proporcionais - Passo 02



Fonte: Próprio autor

III. Faça a dobra de modo que o vértice D coincida com o vértice M e marque o ponto E, conforme Figura 81:

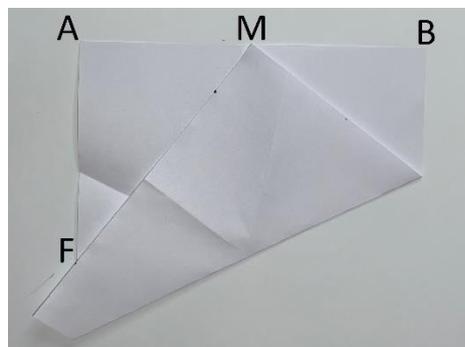
Figura 81: Divisão em segmentos proporcionais - Passo 03



Fonte: Próprio autor

IV. Desdobre e faça a dobra de modo que o vértice C coincida com o vértice M e marque o ponto F, conforme Figura 82:

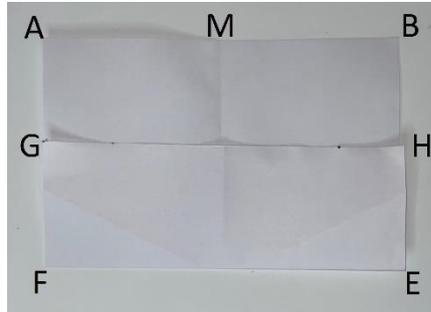
Figura 82: Divisão em segmentos proporcionais - Passo 04



Fonte: Próprio autor

V. Desdobre e Faça a dobra que passa por E e F e marque os pontos G e H, conforme Figura 83:

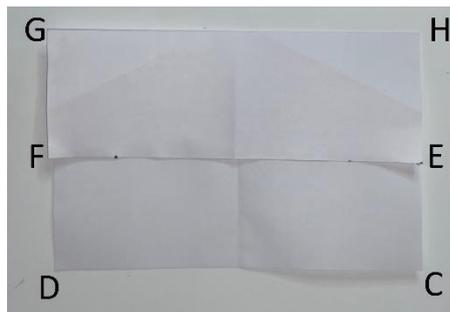
Figura 83: Divisão em segmentos proporcionais - Passo 05



Fonte: Próprio autor

VI. Faça a dobra que passa por G e H, conforme Figura 84:

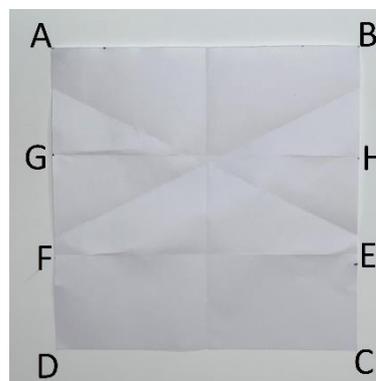
Figura 84: Divisão em segmentos proporcionais - Passo 06



Fonte: Próprio autor

V. Desdobre, conforme Figura 85:

Figura 85: Divisão em segmentos proporcionais - Passo 07



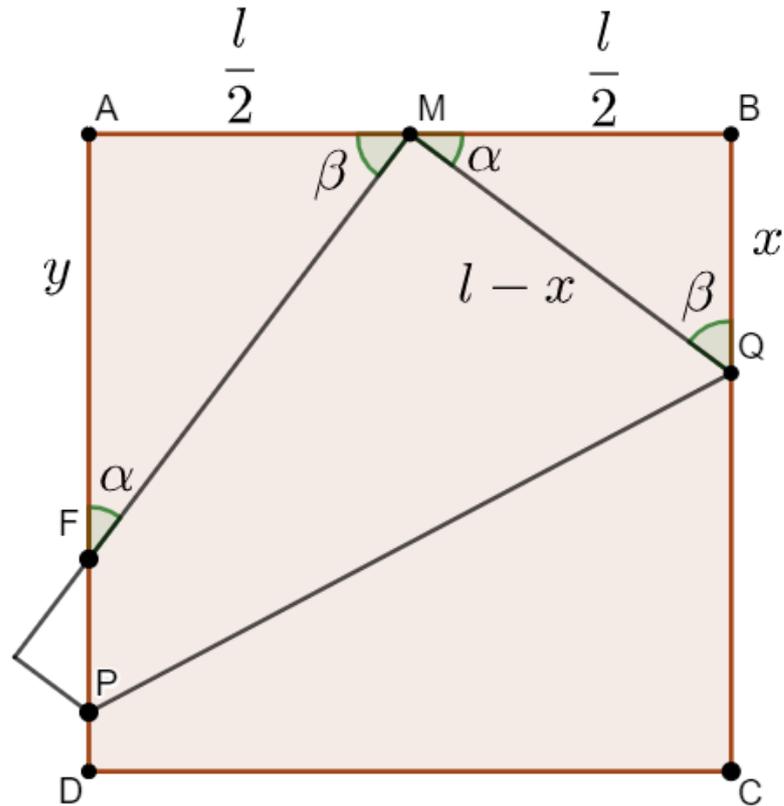
Fonte: Próprio autor

Mostraremos agora que a construção realmente divide o lado AD em três segmentos congruentes.

Note que, pelo Passo VI, os segmentos AG e GF são congruentes. Assim, basta mostrar que $AF = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}\ell$.

De fato, observe a Figura 86:

Figura 86: Demonstração da divisão do segmento em três partes congruentes



Fonte: Próprio autor

i) Pelo fato de PQ ser uma dobradura, se chamarmos BQ de x , temos que MQ será $l - x$ e, como o triângulo BQM é retângulo, temos

$$\begin{aligned} (l - x)^2 &= x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ l^2 - 2lx + x^2 &= x^2 + \frac{l^2}{4} \\ 2lx &= l^2 - \frac{l^2}{4} \\ x &= \frac{3l}{8} \end{aligned}$$

ii) Também, desde que ABCD é um quadrado, os triângulos AMF e BMQ são semelhantes pelo critério AAA.

$$\frac{x}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\frac{\ell}{2}}{y}$$

$$xy = \frac{\ell^2}{4}$$

Por i) e ii) segue que

$$y \frac{3\ell}{8} = \frac{\ell^2}{4}$$

$$y = \frac{8\ell}{3 \cdot 4}$$

$$y = \frac{2\ell}{3}$$

Logo, $AF = \frac{2}{3} AD$.

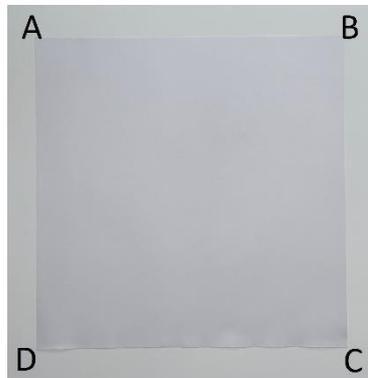
Assim, os lados da folha quadrada estão divididos em três segmentos congruentes, $AG = GF = FD$.

Partindo desse conceito, faremos agora a demonstração do Teorema de Pitágoras utilizando conceitos de dobraduras e de equivalência entre áreas.

5.1.2 Uma demonstração

I. Considere uma folha quadrada de vértices ABCD, conforme Figura 87:

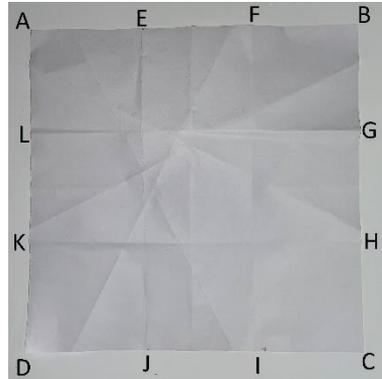
Figura 87: Demonstração do Teorema de Pitágoras - Passo 01



Fonte: Próprio autor

II. Faça a divisão dos lados AB, BC, CD e DA em três segmentos congruentes, de modo a marcar os pontos E, F, G, H, I, J, K e L, conforme Figura 88.

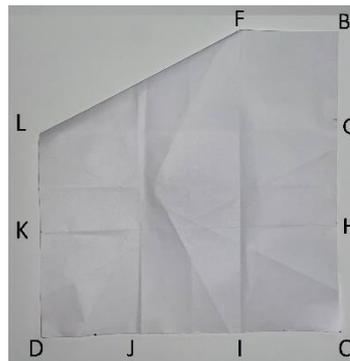
Figura 88: Demonstração do Teorema de Pitágoras - Passo 02



Fonte: Próprio autor

III. Faça a dobra que passa por L e F, conforme Figura 89:

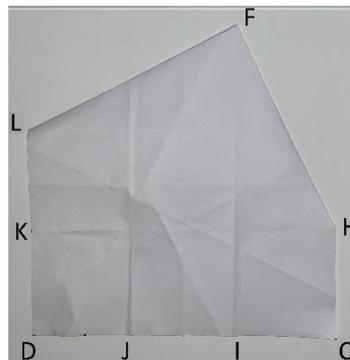
Figura 89: Demonstração do Teorema de Pitágoras - Passo 03



Fonte: Próprio autor

IV. Faça a dobra que passa por F e H, conforme Figura 90:

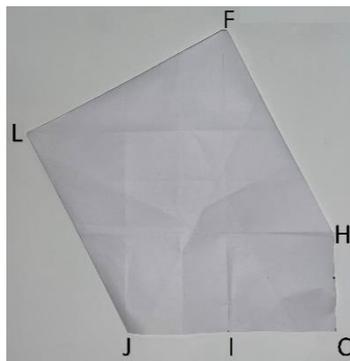
Figura 90: Demonstração do Teorema de Pitágoras - Passo 04



Fonte: Próprio autor

V. Faça a dobra que passa por L e J, conforme Figura 91:

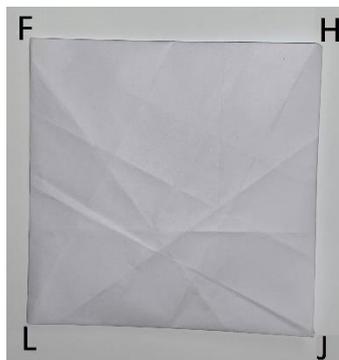
Figura 91: Demonstração do Teorema de Pitágoras - Passo 05



Fonte: Próprio autor

VI. Desdobre e faça a dobra que passa por J e H, conforme Figura 92:

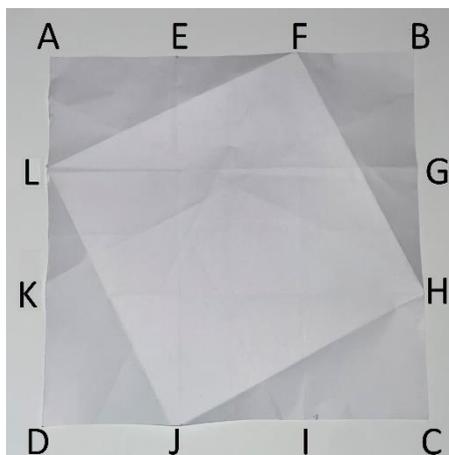
Figura 92: Demonstração do Teorema de Pitágoras - Passo 06



Fonte: Próprio autor

V. Desdobre, conforme Figura 93:

Figura 93: Demonstração do Teorema de Pitágoras - Passo 07



Fonte: Próprio autor

Note que os triângulos LAF, FBH, HCJ e JDL são congruentes pelo critério LAL, deste modo, os ângulos DJL, ALF, BFH e CHJ são congruentes e, também, os ângulos, DLJ, AFL, BHF e CJH são congruentes.

Concluimos assim que o quadrilátero JLFH é um quadrado.

Da equivalência entre áreas temos

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= c^2 + 4\frac{ab}{2} \\ a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab \\ c^2 &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

O que demonstra o Teorema de Pitágoras.

Deste modo, podemos observar que alguns conceitos um pouco mais complexos também podem ser trabalhados por meio de dobraduras e, a seguir, faremos as considerações finais desta dissertação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O origami é o principal componente de referência para diversos tipos de projetos em pesquisa no mundo todo, apesar de ser uma arte milenar, com o passar dos anos foi adaptando-se as mais diversas situações até o ponto de ser utilizado, por exemplo, para o envio de um satélite para a órbita terrestre.

Durante a construção deste trabalho, notamos que boa parte dos pesquisadores que já haviam escrito a respeito deste tema dedicou-se quase que exclusivamente a desenvolver as oficinas deixando, por vezes, os comentários destinados as práticas pedagógicas tão somente às suas considerações finais.

Conforme defendido por Trindade (2014) a educação está passando por mudanças, assim, o professor também precisa se adequar para ensinar diferentes tipos de alunos e, a prática de Origami pode contribuir significativamente na prática docente, muitas vezes atuando como um catalisador do processo de aprendizagem.

Destacamos ainda que as dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem são os mais diversos em nosso país, contudo, essa dissertação busca contribuir na prática do docente, ainda que o mesmo não utilize na íntegra nosso material, reforçamos que os conhecimentos adquiridos por meio das dobraduras japonesas podem ser de grande valia para o desenvolver dos conteúdos de geometria plana ministrados em sala.

A partir da leitura de dissertações como a dos egressos do PROFMAT tais como Queiroz (2019), Freitas (2016), Dias (2015) e Rancan (2011), notamos que os alunos expandiam sua visão de mundo, uma vez que eles passavam a tomar o controle no processo de ensino, fato este que contribui de forma significativa para o processo de aprendizagem.

Nas palavras de Rancan (2011), ensinar geometria sem adotar os tradicionais métodos que abordam o conteúdo pode ser um grande entrave, contudo, com a aplicação das técnicas do Origami, os alunos passam a ter mais disposição para estudar o conteúdo.

Ainda que os alunos não mostrem interesse pela oficina de Origami, o que não fora constatado em nenhum dos materiais utilizados como referência na construção deste trabalho, destacamos que o professor pode utilizar-se das ideias do capítulo 2,

onde expomos as diversas aplicações dos conceitos de dobraduras, mostrando que tecnologias altamente avançadas se baseiam numa arte milenar.

Deste modo, percebemos que o uso do Origami possui diversas aplicações em sala de aula e, também, nosso referencial teórico nos permite concluir que a prática de ensino com o uso dessa metodologia desenvolve nos alunos a capacidade de pensarem e fazerem suas tarefas de maneira mais autônoma.

Salientamos que o objetivo inicial desta dissertação era aplicar os conceitos de Origami para aluno do 9º ano do ensino fundamental II de uma escola pública da região metropolitana de Belém, contudo, devidos aos acontecimentos deste ano tão atípico, fomos impedidos, entretanto, deixamos este trabalho para que possa ser aplicado futuramente como tentativa de amenizar as dificuldades encontradas no ensino da geometria.

Deste modo, ainda que impedidos de aplicarmos em sala nossa metodologia, acreditamos que a mesma tem uma grande capacidade de potencializar o processo de ensino aprendizagem, concluimos este trabalho deixando essa que, em nossa humilde opinião, é uma ferramenta fácil de ser aplicada em sala, além de ter um baixo custo de material e ser aceita por grande parte dos professores e alunos.

REFERÊNCIAS

- CASTELLI, I. **Veja esses pequenos robôs dobráveis de só 4 gramas inspirados em origamis**. Fonte: <https://www.tecmundo.com.br/robotica/87142-veja-pequenos-robos-dobraveis-so-4-gramas-inspirados-origamis.htm>. 2015. Acesso em: 10 dez. 2020.
- CAVACAMI, E; FURUYA, Y. K. S. **Explorando geometria com origami**. Universidade Federal de São Carlos. 2009.
- CARNEIRO, M. J. D; SPIRA, M. **Oficina de dobraduras**. 2015. Fonte: <http://server09.obmep.org.br/docs/apostila9.pdf> . Acesso em: 10 dez. 2020.
- CORDEIRO, T. **Como o origami está moldando as tecnologias do futuro**. Fonte: <https://super.abril.com.br>. Acesso em: 10 dez. 2020.
- DE OLIVEIRA, F. F. **Origami: Matemática e Sentimento**. 2004.
- DIAS, M. C. O. **O Uso do Origami como Recurso Didático-metodológico para o Ensino de Geometria**. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciência Exatas. PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Juiz de Fora, Minas Gerais 2015.
- DOLCE, O. POMPEO, J, N. **Fundamentos de matemática elementar. Geometria plana**, v. 9, p. 252, 1995.
- FERREIRA, T. **Estas 5 invenções mostram a importância do origami na tecnologia**. Fonte: <https://www.vix.com/pt/bbr/676/estas-5-invencoes-mostram-a-importancia-do-origami-na-tecnologia>. 2005. Acesso em: 10 dez. 2020.
- FLEISCHMANN, S. O. **O origami e suas dobras no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, Paraná. 2019
- FREITAS, A, C. de. **Origami: o uso como instrumento alternativo no ensino da geometria**. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, São José do Rio Preto, São Paulo, 2016.
- HAYASAKA, E. Y. NISHIDA, S. M. **Ensinando ciências através do Origami: Orientação de outra natureza**. Universidade Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP, 2009. Fonte: http://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm.
- LANGORIGAMI. **EYEGGLASS TELESCOPE**. R. LANG. 2015. Fonte: <https://langorigami.com/article/eyeglass-telescope/>. Acesso em: 10 dez. 2020.
- LEROY, L. **Aprendendo geometria com origami**. Belo Horizonte: UFMG, 2010.
- LIMA, J. T. de. **Origami - Além da Arte de Dobrar Papel**. OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE NA PERSPECTIVA DO PROFESSOR. PDE - Produções Didático-Pedagógicas. Governo do Estado do Pará. 2014.
- LIRA, K. P. A. **Origami como ferramenta pedagógica no ensino fundamental**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2010.
- MENEZES, D. B. **O Uso de dobraduras como recurso para o ensino da geometria plana**: histórias, teoremas e problemas. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade do Estado do Ceará. PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Fortaleza, Ceará. 2014.
- ORIGAMIUSA. **History**. Fonte: <https://origamiusa.org/history>. Acesso em: 12 fev. 2021.

PAULINO, D. de A. O. **Origamis Modulares e os Poliedros de Platão**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2020.

PIAGET, J. **Le langage et la pensée du point de vue génétique**. Acta psychologica, v. 10, p. 51-60, 1954.

PIN, O. J.; URIBE, E. B. O. **Os axiomas de Huzita-Hatori e o ensino da geometria euclidiana plana através da construção de polígonos**. Colloquium Exactarum, vol. 8, n. Especial, Jul-Dez, 2016, p. 39-44.

PINHEIRO, H. M. **O Xadrez nas estratégias de resoluções de problemas matemáticos: Um olhar a partir da Neurociência**. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Pará. PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Belém, Pará. 2020.

QUEIROZ, G. T. **ENSINO DA GEOMETRIA: UMA ABORDAGEM A PARTIR DO USO DO ORIGAMI**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas. Manaus, Amazonas. 2019.

RANCAN, G. **ORIGAMI E TECNOLOGIA: INVESTIGANDO POSSIBILIDADES PARA ENSINAR GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - PUCRS. Porto Alegre, Rio Grande do Sul. 2011 .

RANCAN, G. GIRAFFA, L. M. M. **GEOMETRIA COM ORIGAMI: INCENTIVANDO FUTUROS PROFESSORES**. IX ANPESUL: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL. 2012.

SILVA, D. P. da. **O origami como ferramenta didática na arte educação**. Trabalho de Conclusão de Curso. Centro Universitário UNIFAAT. Atibaia, São Paulo. 2019.

SILVA, J; MASSARAMDUBA, D. **Origami: A geometria das dobraduras**. 2018. Fonte: http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV117_MD1_SA13_ID7800_10092018133325.pdf. Acesso em: 19 novembro de 2019

SUZUKI, S. DE S. et at. **A GEOMETRIA DO ORIGAMI**. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. 2006.

TEIXEIRA, S. A.; NAKATA, M. K. **A EVOLUÇÃO ARTÍSTICA E CIENTÍFICA DO ORIGAMI: Um estudo teórico e prático sobre a prática e técnicas das dobraduras**. Palíndromo, v. 9, n. 18, p. 142-163, 2017.

UENO, T.; NASCIMENTO, R. **Origami: Trajetória histórica, técnica e aplicações no design**. 2009. Fonte: <<http://www.books.scielo.org/id/mw22b/pdf/menezes-9788579830426-02.pdf/>>. Acesso em: 19 de nov. de 2019.