UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ – UFPA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS – ICEN

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

MARCO JOSÉ DA SILVA BEZERRA

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA TURMAS DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS COM FOCO NO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

BELÉM – PA

2021

MARCO JOSÉ DA SILVA BEZERRA

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA TURMAS DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS COM FOCO NO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo

BELÉM – PA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B574 Bezerra, Marco José da Silva.
O ensino de análise combinatória para as turmas da educação de jovens e adultos com foco no princípio multiplicativo / Marco José da Silva Bezerra. — 2021.
x, 62 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Belém, 2021.

1. Princípio multiplicativo. 2. Análise combinatória. 3. Educação de jovens e adultos. I. Título.

CDD 511.6

MARCO JOSÉ DA SILVA BEZERRA

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA TURMAS DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS COM FOCO NO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo

Trabalho aprovado em, 25 de fevereiro de 2021

Geraldo Mendes de Araujo

Assinado de forma digital por Geraldo Mendes de Araujo
Dados: 2021.05.17 14:54:26 -03'00'

Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo
Orientador

Prof. Dr. Augusto César do Reis Costa
Membro interno

Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato
Coord. do Curso de Matemática
Portaria 2610/2020-Reitoria

Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato
Membro interno

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Membro externo

BELÉM – PA

2021

Dedico esse trabalho ao meu grande Deus, pela vida que tem me dado, a minha querida e amada esposa, Dilma da Silva Miranda Bezerra e minha filha Ana Beatriz Miranda Bezerra.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois este Mestrado foi uma promessa dele para mim. A Ele toda honra, glória e louvor, por mais esse sonho realizado.

Agradeço a minha esposa, pelo amor, dedicação, compreensão e principalmente por ter sido a minha maior incentivadora, pois já havia tentado ingressar no Mestrado Profissional por cinco vezes e não conseguia, mas na sexta vez quando eu havia desistido, ela novamente me deu força para prosseguir e graças a Deus e a ela eu consegui ser aprovado e agora estou aqui finalizando este Mestrado.

Agradeço aos meus pais José Maria Barros Bezerra e Maria Erotildes da Silva Bezerra que investiram em mim e sempre me incentivaram a estudar.

Ao meu concunhado Raimundo José Azevedo Lobato e as minhas cunhadas Dinalva da Silva Miranda Lobato e Dulcilene da Silva Miranda que me ajudaram em oração nos momentos de mais dificuldades que passei neste Mestrado.

Aos meus colegas de classe, pelos momentos difíceis, alegres e divertidos que passamos juntos durante todo o curso.

Ao meu orientador, por todo apoio, pelas orientações preciosas e empenho para que esse trabalho fosse concluído.

Aos professores, por todo aprendizado e conhecimento que nos proporcionaram e pelo incentivo a não desistir nos momentos de dificuldade enfrentados durante o curso.

A Secretaria Municipal de Educação de Castanhal, pela licença parcial concedida durante um ano para cursar este Mestrado.

A Universidade Federal do Pará, onde me formei, me especializei e agora me proporcionou a oportunidade de cursar e concluir o Mestrado Profissional.

A coordenação e a secretaria do curso, pelo apoio e por todo trabalho prestado.

O sábio ouvirá e crescerá em conhecimento, e
o intendido adquirirá sábios conselhos.

(Provérbios 1.5)

RESUMO

Trabalhar Matemática em turmas da Educação de Jovens e Adultos (EJA) é um grande desafio, pois é uma clientela diferenciada do ensino regular, onde a maioria dos alunos estavam a alguns anos distante de uma sala de aula e outros passaram pelo processo de exclusão do ensino regular. Na Matemática, Análise combinatória é um assunto que os alunos do Ensino Médio da EJA sentem muita dificuldade em compreender, tal dificuldade se deve ao fato do ensino ser direcionado para aplicação de fórmulas sem significado para eles. O objetivo deste trabalho é estimular professores e alunos a utilizar o princípio multiplicativo, apontando esse método como uma ferramenta mais simples e prática para a compreensão e solução de muitos problemas de análise combinatória. Apresentaremos também algumas situações práticas em sala de aula para melhor compreensão de arranjos, permutações e combinações, assim proporcionando ao aluno uma aula mais atrativa. E, finalizando este trabalho, será feito um comparativo do desempenho dos alunos entre o uso de fórmulas e o uso do princípio multiplicativo na resolução de problemas em duas atividades que devem ser aplicadas em sala de aula.

Palavras-chave: Princípio Multiplicativo. Análise Combinatória. Educação de Jovens e Adultos.

ABSTRACT

Working with Mathematics in Youth and Adult Education (EJA) classes is a great challenge, as it is a differentiated clientele from regular education, where most students were some years away from a classroom and others went through the process of exclusion from teaching. regularly. In mathematics, combinatorial analysis is a subject that EJA high school students find it exceedingly difficult to understand, such difficulty is since teaching is directed towards the application of formulas without meaning to them. The aim of this work is to encourage teachers and students to use the multiplicative principle, pointing this method as a simpler and more practical tool for understanding and solving many problems of combinatorial analysis. We will also present some practical situations in the classroom for a better understanding of arrangements, permutations, and combinations, thus providing the student with a more attractive class. And, finishing this work, a comparison of the students' performance will be made between the use of formulas and the use of the multiplicative principle in problem solving in two activities that must be applied in the classroom.

Keywords: Multiplicative Principle. Combinatory Analysis. Youth and Adult Education.

Sumário

INTRODUÇÃO

Com experiência de mais de 10 anos de trabalho com turmas da EJA, constatou-se que a maioria dos alunos dessa modalidade de ensino tem dificuldade para entender algumas fórmulas matemáticas principalmente as de Análise combinatória, para alguns, elas não têm muito sentido e outros têm dificuldade em manipulá-las. Sendo assim, esse trabalho se propõe a mostrar através de algumas aplicações práticas feitas em sala de aula que é possível entender e diferenciar os conceitos básicos de Arranjos, Permutações e Combinações e que o princípio multiplicativo é um método mais simples e prático para solucionar e entender a maioria dos problemas de Análise combinatória. A vantagem desse método é que não há necessidade de o aluno trabalhar com fórmulas.

A intenção deste trabalho não é dizer que a utilização das fórmulas é algo negativo, mas que existe uma possibilidade de não as usar, havendo essa possibilidade, acreditamos que é algo relevante, pois fórmulas na maioria das vezes os alunos esquecem, até mesmo nós professores esquecemos algumas dessas fórmulas. Agora pense em um aluno que vai fazer a prova do ENEM e a quantidade de fórmulas que tem que memorizar, não só as de Matemática, mas também as das outras disciplinas de Ciências da Natureza.

Segundo Sturm (1999),

> [...] o ensino de Análise combinatória deve se dar através de situações – problemas. As fórmulas devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução de problemas, devem ser construídas e não ser o elemento de partida para o ensino de cada tema: Arranjo, Permutação e Combinação. (STURM, 1999, p.3)

Concordando com Sturm, a experiência adquirida pelo aluno na resolução dos problemas de Análise Combinatória através do princípio multiplicativo, fará com que esse aluno seja capaz de entender o porquê da utilização das fórmulas, quando o uso delas é mais viável e em algumas situações até fazer a dedução dessas fórmulas, como veremos neste trabalho.

De acordo com Conceição (2019), após realizar uma atividade de Análise combinatória em uma turma de uma escola pública de Belém percebeu que:

> [...] o alunado quase não usou as fórmulas teóricas. Isso nos mostra que, de certa forma, há nos discentes um raciocínio lógico, justamente pelo uso do princípio multiplicativo. Entretanto, como a maioria das disciplinas matemáticas são ensinadas

> pelo paradigma questão-fórmula, o desenvolvimento logico dos alunos é pouco desenvolvido, o que resulta no número pequeno de alunos que conseguiram fazer a questão. (CONCEIÇÃO, 2019, p.54)

Mostraremos aqui, que o princípio multiplicativo dispensa o uso de fórmulas e até mesmo do uso do fatorial de um número. Esse método estimulará o aluno a desenvolver a competência de raciocinar e argumentar na resolução de cada problema, como exige a BNCC.

> Assim, para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. (BRASIL. 2017, p. 529)

Com isso pretendemos melhorar e facilitar o ensino de Análise combinatória não só para turmas da EJA que é o foco deste trabalho, mas também para as turmas do Ensino Médio regular.

No primeiro capítulo, apresentaremos os aspectos históricos e sociais da EJA e de que maneira esses aspectos, principalmente os sociais, influenciam no ensino-aprendizagem de Matemática para essa modalidade de ensino.

No segundo capítulo, estudaremos a Análise Combinatória, começando com alguns conceitos básicos tais como: agrupamentos, árvore de possibilidades, princípio fundamental da contagem e fatorial de um número. Esses conceitos nos ajudarão a entender melhor as definições de Arranjos, Permutações e Combinações.

Continuando o capítulo, apresentaremos o estudo dos Arranjos simples e com elementos repetidos, e em seguida as Permutações simples, circulares e com elementos repetidos e finalizando o capítulo estudaremos as Combinações simples e com elementos repetidos, onde resolveremos problemas do capítulo com o uso das fórmulas e do princípio multiplicativo.

No terceiro capítulo, apresentaremos algumas aplicações práticas feitas em sala de aula para que os alunos tenham um melhor entendimento do Princípio multiplicativo, de Arranjos, Permutações e Combinações.

No quarto capítulo, apresentaremos as duas atividades que deveriam ter sido aplicadas em sala de aula, além de um gráfico com resultados do desempenho dos alunos em tais atividades, comparando o uso das fórmulas e o princípio multiplicativo e encerrando faremos as considerações finais.

1 A EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: ASPECTOS HISTÓRICOS, SOCIAIS E O ENSINO DE MATEMÁTICA

O ensino supletivo foi regulamentado no Brasil, pela Lei de Diretrizes e Base da Educação (LDB) nº 5.692/71, onde se estabeleceu pela primeira vez na história, um capítulo específico para a educação de jovens e adultos (EJA): o capítulo IV que versava sobre o ensino supletivo. Esta lei, apesar de reconhecer a educação de jovens e adultos como um direito à cidadania, limitou o dever do Estado à faixa etária de 7 a 14 anos (HADDAD, 2006). Para a faixa etária acima dos 14 anos o ensino era oferecido, mas não em caráter obrigatório. Exigia-se para ingressar no ensino supletivo, uma idade mínima de 18 anos para o 1º grau (que equivale ao ensino fundamental atual) e 21 anos para o 2º grau (que equivale ao ensino médio atual).

Com a aprovação da LDB nº 9.394/96 e das Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação de Jovens e adultos, Parecer nº 11/2000, a EJA torna-se uma modalidade da Educação Básica nas etapas dos ensinos fundamental e médio com características próprias, que oferece a jovens e adultos a possibilidade de iniciarem e/ou continuarem seus estudos na educação básica que, por algum motivo, não puderam concluí-lo. Esses documentos trouxeram alterações e ampliações conceituais produzidas desde a década de 1980, ao usar o termo Educação de Jovens e Adultos para assinalar as ações anteriormente conhecida como Ensino Supletivo (DE ALMEIDA, 2015).

Pela LDB/96 os alunos da EJA devem ter um estudo equiparado aos alunos que estão na escolaridade própria (artigo 38). De acordo com o Parecer 11/2000 do Conselho Nacional de Educação (CNE)/Câmara de Educação Básica (CEB), a principal finalidade da EJA é auxiliar os sujeitos jovens, adultos e idosos a desenvolver habilidades, capacidades e potencialidades (MELO, 2016).

A heterogeneidade peculiar a esta modalidade de ensino faz com que o espaço do diverso seja repleto de riqueza social e cultural. Há aspectos que fazem desses educandos sujeitos ímpares, por meio de suas histórias de vida. A escola precisa aprender a lidar com essas peculiaridades a fim de fazer a diferença na vida dessas pessoas.

O adulto, ao ser considerado como um sujeito em constante transformação, ou seja, inacabado (FURTER, 1981; SILVA, 2004; SOUSA, 2007; CORDEIRO, 2009), precisa ter assegurado o direito público subjetivo à educação, a partir de uma perspectiva que lhe possibilite a educação como uma condição que se efetive por toda a sua vida. (DE ALMEIDA, 2015).

O educador dessa modalidade de ensino deve proporcionar a promoção da autoestima de seus educandos para que acreditem que são capazes de escrever suas próprias histórias. A última atualização desse documento, segundo alguns autores (SILVA, 2010; SILVA, 2007; BRAGA, 2011; DI PIERRO; JOIA; RIBEIRO, 2001), vem provocando o processo de juvenilização da EJA, na qual ficou estabelecido 15 anos e 18 anos para os ensinos fundamental e médio, respectivamente, como as idades mínimas para o ingresso nessa modalidade de ensino (MELO, 2016).

Os professores que atuam nas turmas da EJA, enfrentam algumas dificuldades, pois não tiveram uma qualificação satisfatória para atender adultos e/ou idosos, ou seja, sujeitos diferenciados, que não concluíram seus estudos na idade adequada. O processo de juvenilização dessa modalidade de ensino tem exigido por parte dos professores o desenvolvimento de estratégias e metodologias diferenciadas, para atender diferentes gerações presentes em sala de aula (MELO, 2016).

É importante destacar que, muitos jovens que buscam essa modalidade de ensino, encontram-se desmotivados por terem passado pelo processo de exclusão do ensino regular e/ou pelo desinteresse em buscar o conhecimento. Já as pessoas de mais idade que estão retornando à escola, encontram alguns desafios a serem enfrentados, pois muitos se sentem preocupados e com medo devido o preconceito social com os idosos. (MELO, 2016).

Devido ao longo período que trabalho com os alunos dessa modalidade de ensino, vale a pena ressaltar que para algumas mulheres que são mães, voltar ao banco da escola não tem sido fácil, é um grande desafio, pois em muitos casos, faltam às aulas por não terem com quem deixar os seus filhos pequenos, algumas até desistem. Outras com muita força de vontade levam para sala de aula seus filhos, e muitas dessas crianças ainda são de colo. Há situações em que a mãe não consegue se concentrar para ouvir a explicação do professor, pois precisam estar distraindo seus filhos, devido serem ainda de pouca idade tais crianças não conseguem ficar tranquilas por muito tempo.

Portanto, como ensinar em um cenário como esse, com tantos desafios, sem ter uma formação adequada? E ensinar Matemática para turmas da EJA, principalmente para o ensino médio, é um desafio ainda maior, pois a maioria dos alunos sentem grandes dificuldades, devido a tudo que já comentamos anteriormente, alguns deles por não terem aprendido coisas básicas e essenciais no ensino fundamental e outros por terem aversão a Matemática. Assim o professor tem que ter várias estratégias e metodologias de ensino diferenciadas para fazer com que esse aluno entenda que ele é capaz de aprender Matemática.

Pelo tempo ministrando aulas para turmas da EJA, ficou evidente que os alunos da 1ª Etapa do ensino médio dessa modalidade de ensino têm apresentado maior dificuldade de aprendizado em Análise Combinatória dentre os assuntos ministrados nesta etapa. Muitos alunos têm dificuldade de aprender e entender grande parte dos problemas, alguns se queixam que são muitas fórmulas e eles se atrapalham, já outros não conseguem nem as manipular e ainda existem aqueles que confundem as fórmulas, não sabendo qual delas usar para resolução do problema.

Inicialmente este trabalho teve como ponto de partida a dissertação de Mestrado de Magalhães Júnior (2015), onde as demonstrações das fórmulas são feitas utilizando o princípio multiplicativo e os exemplos são resolvidos somente com a utilização de fórmulas, sendo que não são trabalhados Permutação circular e Combinação com repetição e há um capítulo onde são propostas algumas aplicações que são resolvidas de duas formas a primeira utilizando as fórmulas e a segunda, o princípio multiplicativo.

Neste trabalho faremos também todas as demonstrações pelo princípio multiplicativo e aqui será trabalhado Permutações circulares e Combinação com repetição. Todos os problemas que evolvem Arranjos, Permutações e Combinações serão resolvidos de duas maneiras: pelas fórmulas e pelo princípio multiplicativo. Serão feitas aplicações práticas, como introdução dos assuntos que serão muito importantes para um melhor entendimento da Análise combinatória.

Aqui mostraremos que o princípio multiplicativo é um método mais prático para solucionar e entender os problemas que envolvem contagem, tendo a vantagem de não se trabalhar com fórmulas. Usaremos este método, inclusive para resolver problemas que envolvem agrupamentos repetidos, aqui vamos denominá-lo de novo princípio multiplicativo.

Finalizando a etapa de ensino do conteúdo, serão aplicadas duas atividades aos alunos: a primeira, onde as questões só poderão ser resolvidas com o uso de fórmulas e a segunda, com questões que só poderão ser resolvidas através do princípio multiplicativo. Feito isto, será realizada uma análise para comparar o desempenho dos alunos nestas duas atividades. Com isto teremos uma resposta para saber se o princípio multiplicativo é o método mais eficaz para resolver os problemas que envolvem contagem.

2 ANÁLISE COMBINATÓRIA

2.1. Introdução

Considere um conjunto qualquer, por exemplo, o conjunto formado pelas seguintes pessoas: Maricota (M), Jubilson (J), Bugnelson (B) e Curiano (C). Podemos agrupá-las das seguintes maneiras:

Grupos de uma pessoa: $\boxed{\text{M}}$ $\boxed{\text{J}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$

Grupos de duas pessoas: $\boxed{\text{M-J}}$ $\boxed{\text{M-B}}$ $\boxed{\text{M-C}}$ $\boxed{\text{J-B}}$ $\boxed{\text{J-C}}$ $\boxed{\text{B-C}}$

Grupos de três pessoas: $\boxed{\text{M-J-B}}$ $\boxed{\text{M-J-C}}$ $\boxed{\text{M-B-C}}$

Grupos de quatro pessoas: $\boxed{\text{M-J-B-C}}$

Os grupos formados são denominados **agrupamentos** e os nomes que os compõem, **elementos**.

A análise combinatória tem por objetivo estudar as várias formas de agrupar pessoas, números, letras etc.

2.2. Agrupamentos simples

São agrupamentos cujos elementos são todos distintos.

Exemplo 3.2.1- $(1, 3)$; $(2, 4, 6)$; (a, b, c, d).

2.3. Agrupamentos com repetição

São agrupamentos com um ou mais elementos repetidos.

Exemplo 3.3.1- $(2, 2, 4)$; $(1, 1, 3, 3)$; (a, a, a, b, b, c).

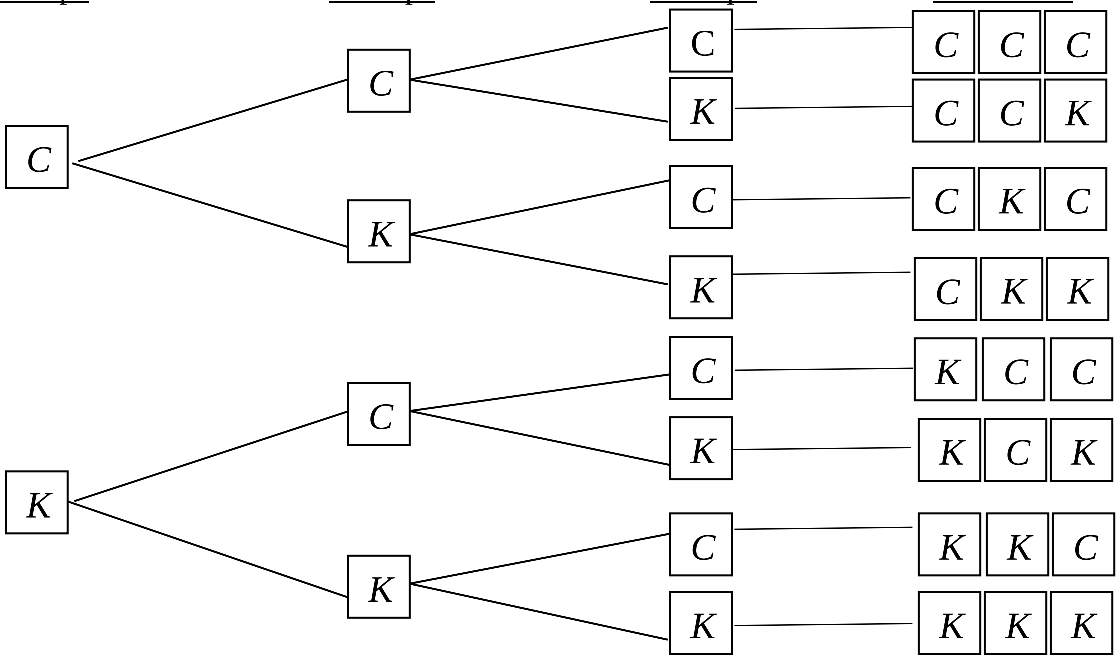
2.4. Árvore de possibilidades

Veremos um exemplo de como construir uma árvore de possibilidades.

Exemplo 3.4.1- Suponha que uma moeda é lançada sobre uma mesa, 3 vezes. Vamos indicar *C* para cara e *K* para coroa. Vamos determinar todas as possibilidades que a moeda pode cair.

Nesse exemplo teremos três etapas, pois a moeda vai ser lançada 3 vezes. Em cada etapa só poderemos ter dois resultados possíveis: cara ou coroa.

1ª Etapa 2ª Etapa 3ª Etapa Resultados



2 possibilidades 2 possibilidades 2 possibilidades 8 possibilidades

Portanto, pela árvore de possibilidades que construímos temos 8 resultados diferentes ao lançarmos uma moeda 3 vezes.

Observe que cada árvore acima nos fornece a quantidade de possibilidades e quais elas são. Na grande maioria dos problemas que envolvem contagem queremos saber quantas são as possibilidades de uma tarefa ser feita sem se preocupar em saber quais são essas possibilidades. Por esse motivo, a árvore de possibilidades é pouco utilizada para resolução de problemas de contagens, principalmente quando há um número maior, tanto de etapas ou modos de cada uma delas serem escolhidas. Por exemplo, se Maricota tivesse 25 saias e 30 blusas, ou seja, aumentando o número de escolhas ficaria inviável construir essa árvore de possibilidades, pois teríamos um total de 750 possibilidades e se se a moeda fosse jogada 20 vezes, ou seja, aumentando o número de etapas, teríamos 1.048.576 resultados, o que tornaria ainda mais inviável construir um esquema de árvore.

Contudo temos um método mais simples que veremos a seguir, o qual permite calcular o número de possibilidades dos problemas envolvendo contagens de modo que esse cálculo pode ser feito para qualquer número de etapas e possibilidades delas ocorrerem, o qual é denominado de: ***princípio multiplicativo*** ou ***princípio fundamental da contagem***. O exemplo 3.4.1 é fundamental para o entendimento desse método.

2.5. Princípio multiplicativo

Pela árvore de possibilidades que construímos no exemplo 3.4.1, podemos concluir:

Primeira etapa: escolher a saia S_1 ou S_2 ou S_3, temos 3 possibilidades.

Segunda etapa: escolher a blusa B_1 ou B_2 ou B_3 ou B_4, temos 4 possibilidades.

Para obtermos o número de maneiras diferentes que Maricota pode se vestir, basta multiplicar o número de possibilidades de escolha de cada etapa, ou seja,

$$3 \times 4 = 12.$$

Veja que acontece algo semelhante no exemplo 3.4.2.

Primeira etapa: cair cara ou coroa, temos 2 possibilidades.

Segunda etapa: cair cara ou coroa, temos 2 possibilidades.

Terceira etapa: cair cara ou coroa, temos 2 possibilidades.

O número de possibilidades diferentes de cair a moeda é dado pelo produto:

$$2 \times 2 \times 2 = 8.$$

Essa operação de multiplicar as possibilidades de ocorrência de cada etapa chama-se ***princípio fundamental da contagem***. Cujo enunciado é o seguinte:

Se determinado acontecimento ocorre em ***n*** etapas diferentes, e se cada etapa ocorre de $k_i, i = 1, \cdots, n$ formas diferentes, então, o número total de maneiras de ocorrer o acontecimento é:

$$T = k_1 \times k_2 \times k_3 \times \cdots \times k_n \, .$$

Agora vejamos alguns exemplos envolvendo o princípio fundamental da contagem.

Exemplo 3.5.1- Em um restaurante há 4 tipos de saladas, 5 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesas. Quantas possibilidades têm para fazer uma refeição com uma salada, um prato quente e uma sobremesa?

Solução:

$$\frac{4}{salda} \; \frac{5}{p.quente} \; \frac{3}{sobremesa}$$

$T = 4 \times 5 \times 3 = 60$ possibilidades.

Comentário

Primeira etapa: temos 4 possibilidades para escolher uma salada.

Segunda etapa: temos 5 possibilidades para escolher um prato quente.

Terceira etapa: temos 3 possibilidades para escolher uma sobremesa.

Pelo princípio fundamental da contagem teremos 60 possibilidades de fazer uma refeição com uma salada, um prato quente e uma sobremesa.

Exemplo 3.5.2- Com 6 homens e 6 mulheres, de quantos modos diferentes pode-se formar um casal composto por um homem e uma mulher?

Solução:

$$\frac{6}{homem}\ \frac{6}{mulher}$$

$T = 6 \times 6 = 36$ modos.

Comentário

Primeira etapa: existem 6 modos para a escolha do homem.

Segunda etapa: existem 6 modos para a escolha da mulher.

Assim, pelo princípio multiplicativo há 36 modos diferentes de formar um casal composto por um homem e uma mulher.

Exemplo 3.5.3 Entre as cidades A e B, há 6 estradas, e entre B e a cidade C, há 4. Não há estrada ligando diretamente A e C. De quantas maneiras pode se ir e voltar de A a C, sem usar uma mesma estrada mais de uma vez?

Solução:

$$\frac{6}{AB}\ \frac{4}{BC}\ \frac{3}{CB}\ \frac{5}{BA}$$

$T = 6 \times 4 \times 3 \times 5 = 360$ maneiras.

Comentário

Primeira etapa: para ir de A para B temos 6 maneiras.

Segunda etapa: para ir de *B* para *C* temos 4 maneiras.

Terceira etapa: para voltar de *C* para *B* temos 3 maneiras, pois a estrada da ida não pode ser usada para voltar.

Quarta etapa: para voltar de *B* para *A* temos uma possibilidade a menos, ou seja, 5.

Portanto, pelo princípio multiplicativo temos 360 maneiras diferentes de ir voltar da cidade *A* à cidade *C*, sem usar uma mesma estrada mais de uma vez.

2.6. Fatorial de um número

O produto de $\boldsymbol{n}$ fatores, a começar por $\boldsymbol{n}$, até o valor 1, é denominado fatorial de $\boldsymbol{n}$, indica-se por $n!$, com $n \geq 2$.

$$\boxed{n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}$$

Exemplos 3.6.1.

a) $4! = 4 \times (4-1) \times (4-2) \times (4-3) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$

b) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$

c) $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3.628.800.$

<u>Observação</u>: Podemos escrever o fatorial de um número de várias maneiras, por exemplo:

$$6! = 6 \times \underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{5!} = 6 \times 5!$$

Ou

$$6! = 6 \times 5 \times \underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{4!} = 6 \times 5 \times 4!$$

De um modo geral, para qualquer número natural n, com $n \geq 3$, podemos escrever na formar: $n! = n \times (n-1)!$. De fato, temos:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \qquad (1)$$

$$(n-1)! = (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$n! = n \times (n-1)! \qquad (3)$$

Vamos chamar para (3) de *propriedade fundamental dos fatoriais*. Com base nessa propriedade podemos definir 1! e 0!.

Para definirmos 1!, vamos supor que (3) é válida para $n = 2$, então:

$$2! = 2 \times (2-1)! = 2 \times 1!$$

Como, $2! = 2 \times 1$, concluímos que:

$$2 \times 1 = 2 \times 1! \Rightarrow 1 = 1!$$

Assim a propriedade só será válida para $n = 2$ se definirmos:

$$\boxed{1! = 1}$$

De maneira análoga, para definirmos 0!, vamos supor que (3) é válida para $n = 1$, assim:

$$1! = 1 \times (1-1)! = 1 \times 0!$$

Como, $1! = 1$, concluímos que:

$$1 = 1 \times 0! \Rightarrow 1 = 0!$$

Assim a propriedade só será válida para $n = 1$ se definirmos:

$$\boxed{0! = 1}$$

Exemplo 3.6.2- Simplifique as frações:

a) $\frac{5!}{3!}$ b) $\frac{100!}{98!}$ c) $\frac{n!}{(n-1)!}$

<u>*Solução a)*</u>: Resolveremos esse exemplo de três formas diferentes, observe:

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{120}{6} = 20.$$

Ou

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3 \times 2 \times 1}}{\cancel{3 \times 2 \times 1}} = 20.$$

Ou ainda, usando a observação anterior podemos resolver esse exemplo da seguinte forma:

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20.$$

<u>Comentário</u>

A decomposição do numerador deve ser feita até ficar igual ao fatorial do denominador, desta forma, podemos cortar esses dois números e multiplicar os números que sobraram.

<u>Solução b)</u>:

$$\frac{100!}{98!} = \frac{100 \times 99 \times \cancel{98!}}{\cancel{98!}} = 9900.$$

<u>Solução c)</u>:

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n.$$

2.7. Arranjos simples

Arranjos simples são agrupamentos simples que diferem entre si ao mudarmos a **ordem** de seus elementos.

Por exemplo, considere o agrupamento simples (2, 3) com os algarismos 2 e 3 podemos formar duas dezenas diferentes, 23 e 32, ou seja, 23 ≠ 32. Logo estamos diante de um exemplo de um arranjo simples.

Exemplo 3.7.1- Considere um conjunto ordenado formado por ***n*** elementos. De quantas maneiras podemos agrupar ***p*** elementos distintos desse conjunto, com $n \geq p$?

<u>Solução</u>: Usaremos o princípio multiplicativo para solucionar esse problema

$$\frac{n}{1^{\text{º}}\ elemento} \quad \frac{n-1}{2^{\text{ª}}\ elemento} \quad \frac{n-2}{3^{\text{º}}\ elemento} \quad \cdots \quad \frac{n-(p-1)}{p^{\text{º}}\ elemento}$$

$$T = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times \big(n-(p-1)\big).$$

<u>Comentário</u>

Primeira etapa: existem n maneiras para escolher o primeiro elemento do agrupamento.

Segunda etapa: como o elemento que foi escolhido na primeira etapa não pode ser repetido, então temos $n - 1$ maneiras de escolher o segundo elemento do agrupamento.

Terceira etapa: os 2 elementos escolhidos nas etapas anteriores não podem ser repetidos, logo temos $n - 2$ maneiras de escolher o terceiro elemento do agrupamento.

p-ésima etapa: os $p-1$ elementos escolhidos nas etapas anteriores não podem ser repetidos, temos $n-(p-1)$ maneiras de escolher o p-ésimo elemento (último).

Portanto, pelo princípio multiplicativo o número de maneiras para agrupar *p* elementos de um conjunto com *n* elementos é dado por:

$$T = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times \big(n-(p-1)\big) \qquad (4)$$

Agora vamos escrever (4) de maneira mais simples, para isso vamos multiplicá-la por

$$\frac{(n-p)!}{(n-p)!}.$$

Fazendo $T = A_{n,p}$, temos que:

$$A_{n,p} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times \big(n-(p-1)\big) \times \frac{(n-p)!}{(n-p)!}.$$

Segue que:

$$A_{n,p} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times \big((n-p)+1\big) \times (n-p)!}{(n-p)!}. \quad (5)$$

Pela propriedade fundamental dos fatoriais temos que:

$$\big((n-p)+1\big) \times (n-p)! = \big((n-p)+1\big)!. \quad (6)$$

Substituindo (6) em (5), temos:

$$A_{n,p} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times \big((n-p)+1\big)!}{(n-p)!}. \quad (7)$$

Ainda temos que:

$$\big((n-p)+1\big)! = \big((n-p)+1\big) \times (n-p) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1. \quad (8)$$

Substituindo (8) em (7), obtemos:

$$A_{n,p} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times \big((n-p)+1\big) \times (n-p) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}{(n-p)!}.$$

Daí,

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Portanto, para o cálculo de arranjos simples n elementos, tomados p a p ($n \geq p$), podemos usar a fórmula:

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Ou

$$\boxed{A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Exemplo 3.7.2- Vamos calcular $A_{5,2}$, $A_{7,3}$ e A_4^6

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20.$$

$$A_{5,2} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210.$$

$$A_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 360.$$

Exemplo 3.7.3- Em um sofá há lugares para 3 pessoas. De quantas maneiras diferentes podem se sentar 6 pessoas nesse sofá?

<u>Solução</u>: Estamos diante de um problema de arranjos simples, pois ao mudarmos a ordem das pessoas no sofá teremos uma nova formação, onde $n = 6$ e $p = 3$, assim:

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120.$$

Portanto, em um sofá de 3 lugares, 6 pessoas podem se sentar de 120 maneiras diferentes.

Exemplo 3.7.4- Quantas centenas pares podemos formar com os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e 8, sem repetição?

<u>Solução</u>: Novamente estamos diante de um problema de arranjo simples, pois ao mudarmos a ordem dos algarismos que formam a centena teremos uma nova centena diferente da anterior. Agora, temos uma restrição nesse problema, pois a centena tem que ser par, logo temos 4 possibilidades para o algarismo das unidades (2 ou 4 ou 6 ou 8). Já os algarismos da centena e da dezena podem ser pares ou ímpares. Assim temos:

$$4 \times A_{5,2} = 4 \times \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 4 \times \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 4 \times 5 \times 4 = 80.$$

Logo, podemos formar 80 centenas pares com os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e 8, sem repetição.

Exemplo 3.7.5- Quantos são os números pares de três algarismos distintos?

<u>*Solução*</u>: Pelo mesmo motivo do exemplo 3.7.4 estamos diante de um problema de arranjo simples. Agora temos duas restrições: o algarismo das centenas não pode ser zero e o algarismo das unidades tem que ser par. Resolveremos esse problema dividindo-o em três casos e como não foi especificado os algarismos que temos que usar como no exemplo 5.3, então temos que utilizar os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

1º caso: Vamos considerar o zero como sendo o algarismo das unidades, assim sobra os espaços para os algarismos das dezenas e das centenas serem preenchidos pelos 9 algarismos restantes. Daí

$$A_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7!} = 9 \times 8 = 72.$$

2º caso: Consideramos agora o zero como sendo o algarismo das dezenas, assim sobra o espaço para o algarismo das unidades que tem que ser par, ou seja, temos 4 possibilidades (2 ou 4 ou 6 ou 8) e o espaço para o algarismo das centenas, onde há 8 possibilidades, já que usamos o algarismo zero e um algarismo par. Assim:

$$4 \times 8 = 32.$$

3º caso: Como o zero não pode ser o algarismo das centenas, então estamos no caso em que o zero não faz parte do número, logo teremos três espaços a serem preenchidos, sendo que o algarismo das unidades tem que ser par, assim teremos 4 possibilidades e os outros dois espaços das dezenas e das unidades devem ser preenchidos por um dos 8 algarismos restantes, assim sendo temos:

$$4 \times A_{8,2} = 4 \times \frac{8!}{(8-2)!} = 4 \times \frac{8!}{6!} = 4 \times \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 4 \times 8 \times 7 = 224.$$

Agora somando os resultados dos três casos temos:

$$72 + 32 + 224 = 328.$$

Portanto, temos 328 números pares de três algarismos distintos.

Os três exemplos (3.7.3, 3.7.4 e 3.7.5) que vimos anteriormente envolvendo arranjos simples foram resolvidos usando a fórmula. Veremos agora que esses exemplos podem ser resolvidos pelo princípio multiplicativo.

Resolveremos agora os exemplos 3.7.2, 3.7.3 e 3.7.4 pelo princípio multiplicativo.

<u>Solução do exemplo 3.7.3 pelo princípio multiplicativo</u>

$$\frac{6}{1^{\underline{o}}\ lugar}\ \frac{5}{2^{\underline{o}}\ lugar}\ \frac{4}{3^{\underline{o}}\ lugar}$$

$T = 6 \times 5 \times 4 = 120$ maneiras.

<u>Comentário</u>

Primeira etapa: existem 6 possibilidades para o 1º lugar do sofá se ocupado por uma pessoa

Segunda etapa: existem 5 possibilidades para o 2º lugar do sofá ser ocupado por uma pessoa, pois o 1º lugar já havia sido ocupado, logo temos uma possibilidade a menos

Terceira etapa: existem 4 possibilidades para o 3º lugar do sofá ser ocupado por uma pessoa, pois os 1º e 2º lugares já haviam sido ocupados, ou seja, duas possibilidades a menos.

Portanto, usando o princípio multiplicativo, há 120 maneiras diferentes para 6 pessoas podem se sentarem em um sofá de 3 lugares.

<u>Solução do exemplo 3.7.4 pelo princípio multiplicativo</u>

Começaremos a resolução pela restrição, que no caso é o algarismo das unidades que tem que ser par.

$$\frac{5}{centena}\ \frac{4}{dezena}\ \frac{4}{\begin{matrix} unidade \\ par \end{matrix}}$$

$T = 5 \times 4 \times 4 = 80$ centenas pares.

<u>Comentário</u>

Primeira etapa: temos 4 possibilidades para escolher um algarismo par para ocupar a casa das unidades.

Segunda etapa: temos apenas 5 possibilidades para escolher um algarismo para ocupar a casa das centenas, pois um número par foi utilizado anteriormente.

Terceira etapa: temos 4 possibilidades para escolher um algarismo para ocupar a casa das dezenas, já que foram utilizados dois algarismos para preencher a casa das centenas e das unidades.

Logo, usando o princípio multiplicativo podemos formar 80 centenas pares com os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e 8, sem repetição.

Solução do exemplo 3.7.5 pelo princípio multiplicativo

Dividiremos a solução deste exemplo em dois casos:

1º caso: considere o zero como sendo o algarismo das unidades

$$\frac{9}{centena}\ \frac{8}{dezena}\ \frac{1}{\begin{matrix} unidade \\ zero \end{matrix}}$$

$$T_1 = 9 \times 8 \times 1 = 72.$$

Comentário

Primeira etapa: temos apenas 1 possibilidade para o algarismo das unidades, que é o zero.

Segunda etapa: temos 9 possibilidades para o algarismo das centenas, pois usamos o zero para as unidades.

Terceira etapa: temos 8 possibilidades para o algarismo das dezenas, pois já usamos dois algarismos para preencher a casa das centenas e das unidades.

2º caso: considere o zero não sendo o algarismo das unidades

$$\frac{8}{\begin{matrix} centena \\ \neq 0 \end{matrix}}\ \frac{8}{dezena}\ \frac{4}{\begin{matrix} unidade \\ par\ \neq 0 \end{matrix}}$$

$$T_2 = 8 \times 8 \times 4 = 256.$$

Comentário

Primeira etapa: temos 4 possibilidades de escolher um número par.

Segunda etapa: temos 8 possibilidades de escolha, pois já escolhemos um número par e não podemos escolher o zero.

Terceira etapa: temos novamente 8 possibilidades de escolha, pois o zero agora pode ser escolhido e só excluímos os dois algarismos que já escolhemos para as casas das centenas e das unidades.

Como dividimos o problema em dois casos, basta somarmos os resultados obtidos nesses casos, assim:

$$T = T_1 + T_2 = 72 + 256 = 328.$$

Portanto, usando o princípio temos 328 números pares de três algarismos distintos.

2.8. Arranjos com repetição

Nesse tipo de arranjo um ou mais elementos poderá ou poderão repetir mais de uma vez.

Exemplo 3.8.1- De quantos modos diferentes podemos escolher n elementos tomados p a p?

<u>Solução</u>: Observe agora, que no problema não temos a restrição de que os elementos não podem se repetir, ou seja, subentende-se que os elementos podem ser repetidos.

$$\frac{n}{1^{\underline{o}}\ elemento}\ \frac{n}{2^{\underline{o}}\ elemento} \cdots \frac{n}{p\ \acute{e}simo\ elemento}$$

$$T = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{p\ fatoes\ iguis\ a\ n} = n^p.$$

<u>Comentário</u>

Observe que em todas as etapas, cada elemento tem n possibilidades de ser escolhido, pois ao escolhermos o elemento seguinte o número de possibilidades de escolha não diminuirá, pois o elemento anteriormente usado poderá ser repetido até a escolha do p-ésimo elemento.

Assim temos n^pmodos diferentes de escolher n elementos tomados p a p. Em termos de fórmula para o cálculo de arranjos simples com elementos repetidos temos:

$$\boxed{AR_{n,p} = n^p} \quad (n \geq p).$$

Portanto, a partir de agora, ao resolvermos um problema que envolve arranjo, devemos verificar se estamos diante de um caso de *arranjos simple*s ou *com repetição.* Nos arranjos simples sempre teremos restrições de que os elementos não poderão ser repetidos, isso poderá aparecer de forma explícita ou implícita no problema.

Vejamos agora, mais alguns exemplos de arranjos com repetição.

Exemplo 3.8.2- Quantas centenas podemos formar com os algarismos 1, 3, 5, 8 e 9?

Solução usando a fórmula: Observe que no problema não diz que os algarismos que formarão as centenas têm que ser diferentes, ou seja, os algarismos podem ser repetidos. Nesse exemplo temos cinco algarismos para formar centenas, então $n = 5$ e $p = 3$. Assim:

$AR_{5,3} = 5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ centenas.

Solução usando o princípio multiplicativo: Como podemos ter repetição de algarismos, logo:

$$\underset{centena}{\underline{\quad 5 \quad}}\ \underset{dezena}{\underline{\quad 5 \quad}}\ \underset{unidade}{\underline{\quad 5 \quad}}$$

$T = 5 \times 5 \times 5 = 125$ centenas.

Comentário

Primeira etapa: como temos cinco algarismos à disposição, temos 5 possibilidades de escolha para o algarismo das centenas.

Segunda etapa: como o algarismo que foi escolhido para ocupar a posição das centenas pode ser usado novamente continuamos com 5 possibilidades para escolher o algarismo das dezenas.

Terceira etapa: também temos 5 possibilidades de escolha para o algarismo das unidades, já que os algarismos que foram usados nas duas etapas anteriores podem ser usados novamente.

Portanto, aplicando o princípio multiplicativo podemos formar 125 centenas com os algarismos 1, 3, 5, 8 e 9.

Exemplo 3.8.3- O professor de Matemática escreveu no quadro da sala de aula o número 98864 que correspondem aos cinco primeiros algarismos do número telefônico de seu celular e perguntou aos seus alunos: quantas são as possibilidades de vocês descobrirem os quatro últimos algarismos de meu número telefônico?

Solução usando a fórmula: Observe que no exemplo não foi colocado nenhuma restrição em relação à não repetição dos quatro últimos algarismos do número telefônico, ou seja, podemos ter repetição nesses algarismos. Assim temos à disposição os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 para preencher quatro espaços, logo temos $n = 10$ e $p = 4$. Daí,

$AR_{10,4} = 10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$ possibilidades

Solução usando o princípio multiplicativo: Como podemos ter repetição, temos que:

$$\frac{10}{6^{\underline{o}}\ algarismo}\ \frac{10}{7^{\underline{o}}\ algarismo}\ \frac{10}{8^{\underline{o}}\ algarismo}\ \frac{10}{9^{\underline{o}}\ algarismo}$$

$T = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$ possibilidades.

Comentário

Como podemos usar os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 e não há nenhuma restrição em relação a não repetição de algarismos para cada etapa, então temos 10 possibilidades para cada uma delas.

Logo, aplicando o princípio multiplicativo os alunos têm 10.000 possibilidades de descobrir o número telefônico do professor de Matemática.

Exemplo 3.8.4- No Brasil o sistema antigo de emplacamento dos veículos automotores que vigorou de 1990 até 30 de janeiro desse ano, era composto por três letras seguidos de quatro algarismos, sendo que não poderíamos ter veículos com placas terminadas em 0000 (por exemplo ABC 0000). Então quantos veículos poderiam ser emplacados no Brasil no sistema antigo?

fonte: www.arteplacas.net

Solução usando a fórmula: Dividiremos esse problema em dois casos. No primeiro caso calcularemos o total de veículos que podem ser emplacados incluindo os que terminam com 0000, já no segundo caso vamos calcular o total de veículos que poderiam ser emplacados terminando só com 0000 para excluir do primeiro caso e obtermos a resposta. Lembrando que o nosso alfabeto é composto por 26 letras e temos a disposição 10 algarismos para usar. Para formar a placa podemos repetir letras e algarismos.

1º caso: Todas as placas incluindo as terminadas em 0000.

Nesse caso podemos fazer arranjos simultâneos de 26 letras para 3 espaços e arranjos de 10 algarismos para 4 espaços e como pode haver repetição, ou seja, temos que:

$$AR_{26,3} \times AR_{10,4} = 26^3 \times 10^4 = 17.576 \times 10.000 = 175.760.000.$$

2º caso: Só placas terminadas em 0000.

Nesse caso teremos que fazer apenas arranjos entre as letras, pois usaremos apenas o zero para preencher o espaço dos algarismos, logo temos:

$$AR_{26,3} = 26^3 = 17.576.$$

Agora fazendo a subtração:

$175.760.000 - 17.576 = 175.742.424$ veículos.

<u>*Solução usando o princípio multiplicativo*</u>: Por esse método dividiremos também esse problema em dois casos:

1º caso: Total de placas.

$$\frac{26}{1^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{26}{2^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{26}{3^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{10}{1^{\underline{o}}\ algarismo}\ \frac{10}{2^{\underline{o}}\ algarismo}\ \frac{10}{3^{\underline{o}}\ algarismo}\ \frac{10}{4^{\underline{o}}\ algarismo}$$

$$T = 26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175.760.000$$

2º caso: Placas terminadas com 0000.

$$\frac{26}{1^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{26}{2^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{26}{3^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{1}{1^{\underline{o}}\ algarismo}\ \frac{1}{2^{\underline{o}}\ algarismo}\ \frac{1}{3^{\underline{o}}\ algarismo}\ \frac{1}{4^{\underline{o}}\ algarismo}$$

$$T = 26 \times 26 \times 26 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 17.576.$$

Assim temos:

$$175.760.000 - 17.576 = 175.742.424.$$

<u>Comentário</u>:

No primeiro caso podemos repetir tanto as letras quanto os algarismos, logo temos 26 possibilidades para escolher uma letra em cada uma das três primeiras etapas e 10 possibilidades de escolher um algarismo em cada uma das quatro últimas etapas. Já no segundo caso podemos repetir as letras, mas o algarismo a ser usado será somente o zero, assim temos 26 possibilidades para escolher uma letra em cada uma das três primeiras etapas e 1 possibilidade de escolher um algarismo, no caso é zero, em cada uma das quatro últimas etapas. Daí calculando o resultado das duas etapas e fazendo diferença entre elas obtemos o resultado procurado.

Assim, pelo sistema antigo poderiam ser emplacados no Brasil 175.742.424 veículos.

Exemplo 3.8.5- Passou a vigorar no Brasil no dia 31 de janeiro deste ano de 2020 o novo sistema de emplacamentos de veículos automotores. Esse novo tipo de placa chamada de placa Mercosul é composto por quatro letras e três algarismos (veja a figura abaixo). Quantos veículos podem ser emplacados no Brasil com esse novo sistema de emplacamento?

fornte:www.terra.com.br

<u>*Solução usando a fórmula*</u>: Nesse novo sistema temos agora quatro espaços para fazer arranjos com 26 letras e três espaços para fazer arranjos com 10 algarismos, como pode haver repetição, então temos que:

$AR_{26,4} \times AR_{10,3} = 26^4 \times 10^3 = 456.976 \times 1.000 = 456.976.000$ veículos.

<u>*Solução usando o princípio multiplicativo*</u>: Como é um problema de arranjos com repetição temos:

$$\frac{26}{1^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{26}{2^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{26}{3^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{10}{1^{\underline{o}}\ algarismo}\ \frac{26}{4^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{10}{2^{\underline{o}}\ algarismo}\ \frac{10}{3^{\underline{o}}\ algarismo}$$

$$T = 26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 26 \times 10 \times 10 = 456.976.000.$$

<u>Comentário</u>

Como podemos repetir tanto letras como algarismos, logo temos 26 possibilidades para escolher uma letra em cada uma das quatro etapas onde elas devem figurar e 10 possibilidades de escolher um algarismo em cada uma das três etapas onde eles devem figurar. Assim aplicando o princípio multiplicativo temos como resposta 456.976.000.

Portanto, pelo novo sistema podem ser emplacados 456.976.000 veículos no Brasil.

<u>Observação</u>: O número de veículos que podem ser emplacados no Brasil saltou de 175.742.424 para 456.976.000, ou seja, um aumento de 281.216.000 veículos que corresponde a aproximadamente 160% no número de novas placas nesse novo sistema.

2.9. Permutações simples

Permutações simples são agrupamentos simples onde participam todos os elementos do conjunto.

Por exemplo, vamos formar centenas com os algarismos do agrupamento (1, 2, 3). As centenas obtidas são: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Portanto, uma centena possui três algarismos e o agrupamento possui três algarismos. Assim os algarismos apenas permutaram, ou seja, apenas mudaram de posição.

Exemplo 3.9.1- De quantas maneiras diferentes podemos arrumar n objetos em uma fila?

<u>Solução</u>: Esses n objetos apenas mudarão de posição, ou seja, vão permutar.

$$\frac{n}{1^{\underline{o}}\ lugar}\ \frac{n-1}{2^{\underline{o}}\ lugar}\ \frac{n-2}{3^{\underline{o}}\ lugar} \cdots \frac{3}{(n-2)^{\underline{o}}\ lugar}\ \frac{2}{(n-1)^{\underline{o}}\ lugar}\ \frac{1}{n^{\underline{o}}\ lugar}$$

$$T = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

Portanto, podemos arrumar n objetos de $n!$ maneiras diferentes em uma fila.

<u>Comentário</u>

Observe que o objeto que ocupará o primeiro lugar da fila terá n possibilidades de ser escolhido, a partir daí cada elemento seguinte terá uma possibilidade a menos de ser escolhido que o anterior, isso ocorrerá até o último elemento que terá apenas 1 chance de ser escolhido. Pelo princípio multiplicativo o produto das n etapas de escolha de n elementos, nada mais é que, $n!$.

Portanto, temos $n!$ maneiras diferentes de arrumar n objetos em uma fila.

Em termos de fórmula, para calcularmos a permutação de n elementos distintos temos:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Exemplo 3.9.2- De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se num banco de 5 lugares para tirar uma foto?

<u>Solução usando a fórmula</u>: São 5 pessoas para 5 lugares, assim elas vão apenas permutar, então $n = 5$, logo temos:

$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneiras.

Solução usando o princípio multiplicativo:

$$\frac{5}{1^{\underline{a}}\ posição}\ \frac{4}{2^{\underline{a}}\ posição}\ \frac{3}{3^{\underline{a}}\ posição}\ \frac{2}{4^{\underline{a}}\ posição}\ \frac{1}{5^{\underline{a}}\ posição}$$

$T = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneiras.

Comentário

Primeira etapa: qualquer uma das 5 pessoas pode ocupar a 1ª posição do banco, ou seja, temos 5 possibilidades para escolher uma pessoa para ocupar essa posição no banco.

Segunda etapa: para ocupar a 2ª posição temos apenas 4 possibilidades de escolha, já que a 1ª posição está ocupada por uma pessoa

Terceira etapa: para a 3ª posição temos apenas 3 possibilidades, pois já ocupamos as duas primeiras posições com duas pessoas.

Quarta etapa: para a 4ª posição temos 2 possibilidades, pois já ocupamos as três primeiras posições com três pessoas.

Quinta etapa: para a 5ª posição temos apenas 1 possibilidade, pois resta apenas uma pessoa da família para ocupar essa posição no banco.

Portanto, aplicando o princípio multiplicativo temos 120 maneiras diferentes de arrumar uma família composta por 5 pessoas para tirar uma foto em um banco de 5 lugares.

Exemplo 3.9.3- Quantos números ímpares de quatro algarismos distintos podemos formar com os algarismos 0, 1, 3 e 6?

Solução usando a fórmula: Nesse problema o último algarismo do número tem que ser ímpar e o primeiro não pode ser o zero. Ou seja, esse número só pode começar por 1 ou 3 ou 6 e terminar por 1 ou 3. Então:

1º caso: Números começando com 1, tem que obrigatoriamente terminar com 3.

1 __ __ 3, temos 2 espaços para 2 algarismos $P_2 = 2! = 2$.

2º caso: Número começando com 3, tem que obrigatoriamente terminar com 1.

3 __ __ 1, temos 2 espaços para 2 algarismos $P_2 = 2! = 2$.

3º caso: Número começando com 6, tem que terminar com 1 ou com 3.

6 __ __ 1, temos 2 espaços para 2 algarismos $P_2 = 2! = 2$.

6 __ __ 3, temos 2 espaços para 2 algarismos $P_2 = 2! = 2$.

Agora somando os valores dos três casos obtemos o resultado:

$2 + 2 + 2 + 2 = 8$ números

<u>*Solução usando o princípio multiplicativo*</u>: Aqui como já observamos no problema há duas restrições, o algarismo da unidade simples tem que ser par e o algarismo da unidade de milhar tem que ser diferente de zero.

$$\underset{\substack{unid.milhar \\ \neq 0}}{\underline{\quad 2 \quad}} \;\; \underset{centena}{\underline{\quad 2 \quad}} \;\; \underset{dezena}{\underline{\quad 1 \quad}} \;\; \underset{unidade}{\underline{\quad 2 \quad}}$$

$T = 2 \times 2 \times 1 \times 2 = 8$ números.

<u>Comentário</u>

Primeira etapa: como o algarismo das unidades tem que ser ímpar temos 2 possibilidades de escolha.

Segunda etapa: agora devemos escolher o algarismo das unidades de milhar que não pode ser zero e nem o ímpar que já escolhemos para preencher o algarismo das unidades, portanto, temos 2 possibilidades de escolha.

Terceira etapa: temos 2 possibilidades de escolha para o algarismo das centenas, sendo que agora não podemos escolher os números dos dois espaços já preenchidos, porém podemos usar o zero.

Quarta etapa: temos apenas 1 possibilidade para escolher o algarismo das dezenas, pois temos apenas um algarismo a disposição.

Assim, aplicando o princípio multiplicativo temos 8 números ímpares de quatro algarismos formados com os algarismos 0, 1, 3 e 6.

Exemplo 3.9.4- Considere a palavra MARCELINO:

a) Quantos são os anagramas dessa palavra?

b) Quantos anagramas começam com MARCO nessa ordem?

c) Quantos anagramas começam MARCO em qualquer ordem?

d) Começam com vogal e terminam com consoante?

<u>Observação</u>: Anagramas são permutações entre as letras de uma palavra.

<u>*Solução de* (*a*) *usando a fórmula*</u>: A palavra MARCELINO tem 9 letras, então:

$P_9 = 9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362.880$ anagramas.

<u>*Solução de* (*a*) *usando o princípio multiplicativo*</u>: Não temos nem uma restrição

$$\frac{9}{1^{\text{a}}\ letra}\ \frac{8}{2^{\text{a}}\ letra}\ \frac{7}{3^{\text{a}}\ letra}\ \frac{6}{4^{\text{a}}\ letra}\ \frac{5}{5^{\text{a}}\ letra}\ \frac{4}{6^{\text{a}}\ letra}\ \frac{3}{7^{\text{a}}\ letra}\ \frac{2}{8^{\text{a}}\ letra}\ \frac{1}{9^{\text{a}}\ \text{letra}}$$

$T = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362.880$ anagramas.

<u>Comentário</u>

A palavra MARCELINO tem 9 letras que vão permutar entre si, logo temos 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 e 1 modos de escolher uma letra, assim pelo princípio multiplicativo temos 362.880 anagramas dessa palavra.

<u>*Solução de* (*b*) *usando a fórmula*</u>: As letras M, A, R, C e O nessa ordem ficam fixas e somente as letras E, L, I e N permutam, então temos permutação de 4 elementos, assim:

$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ anagramas.

<u>*Solução de* (*b*) *usando o princípio multiplicativo*</u>: Os anagramas têm que começar com MARCO nessa ordem

$$\frac{4}{6^{\text{a}}\ letra}\ \frac{3}{7^{\text{a}}\ letra}\ \frac{2}{8^{\text{a}}\ letra}\ \frac{1}{9^{\text{a}}\ letra}$$

$T = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ anagramas.

<u>Comentário</u>

A palavra MARCO está fixa, logo sobram 4 letras para permutarem entre si, assim temos 4, 3, 2 e 1 modos de escolher as letras restantes, então pelo princípio multiplicativo temos 24 anagramas.

<u>*Solução de* (*c*) *usando a fórmula*</u>: Agora as letras M, A, R, C e O vão permutar entre si, o que ocorrerá também com as letras E, L, I e N, assim temos:

$P_5 \times P_4 = 5! \times 4! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 2.880$ anagramas.

<u>*Solução de* (*c*) *usando o princípio multiplicativo*</u>: Os anagramas têm que começar com MARCO em qualquer ordem.

$$\underbrace{\frac{5}{1^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{4}{2^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{3}{3^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{2}{4^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{1}{5^{\underline{a}}\ letra}}_{M,A,R,C,O}\ \underbrace{\frac{4}{6^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{3}{7^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{2}{8^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{1}{9^{\underline{a}}\ letra}}_{E.L,I,N}$$

$T = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 2.880$ anagramas.

<u>Comentário</u>

Agora as letras M, A, R, C e O podem aparecer em qualquer ordem, logo essas 5 letras permutam entre si, ou seja, temos 5, 4, 3, 2 e 1 modos de escolher uma dessa letras; do mesmo modo as 4 últimas letras E, L, I e N também permutam entre si, isto é, temos 4, 3, 2 e 1 modos de escolha, assim pelo princípio multiplicativo temos como resultado 2.880 anagramas.

<u>*Solução de* (*d*) *usando a fórmula*</u>: Se fixarmos uma vogal e uma consoante, só restam 7 espaços para outras 7 letras permutarem entre si. Mas temos 4 vogais e 5 consoantes, ou seja, essas permutações ocorreram 4×5 vezes, assim:

$4 \times 5 \times P_7 = 20 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 100.800$ anagramas.

<u>*Solução de* (*d*) *usando o princípio multiplicativo*</u>: Temos duas restrições, onde a primeira letra tem que ser uma vogal e última um consoante.

$$\frac{4}{\substack{1^{\underline{a}}\ letra \\ vogal}}\ \frac{7}{2^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{6}{3^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{5}{4^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{4}{5^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{3}{6^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{2}{7^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{1}{8^{\underline{a}}\ letra}\ \frac{5}{\substack{9^{\underline{a}}\ letra \\ consoante}}$$

$T = 4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5 = 100.800$ anagramas.

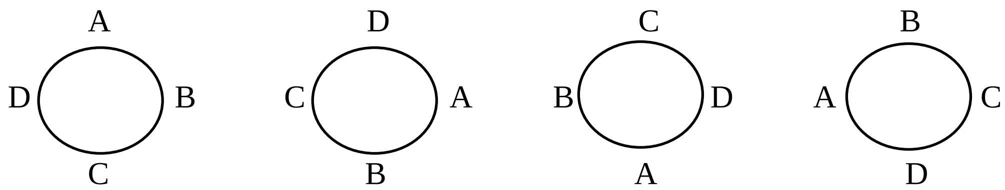
<u>Comentário</u>

Temos 4 possibilidades para escolher uma vogal e preencher o espaço ocupado pela primeira letra e 5 para escolher uma consoante e preencher o espaço ocupado pela última letra, as outras 7 letras permutam entre si, assim temos 4 modos para escolher uma vogal, 5 modos para escolher uma consoante e 7, 6, 5, 4, 3, 2 e 1 modos para escolher as outras letras restantes, então aplicando o princípio multiplicativo temos 100.800 anagramas.

2.10. Permutação circular

Uma permutação é circular quando os seus elementos estão dispostos em forma circular, onde disposições que coincidirem por rotações sejam consideradas iguais.

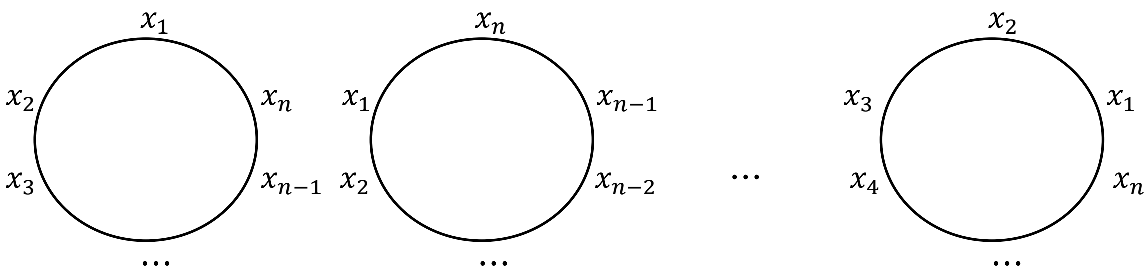
Por exemplo, se dispormos em forma circular os objetos A, B, C e D



As disposições ABCD, DABC, CDAB e BCDA são iguais, pois apesar de ter sido feita uma rotação no sentido horário, poderia ter sido no sentido anti-horário, nas quatro disposições, o objeto A está de frente para o C e o objeto B de frente para o D. Portanto, o que importa em uma formação circular é a posição relativa dos objetos entre si.

Exemplo 3.10.1- De quantos modos distintos podemos colocar n objetos em círculo?

Solução: Considere um conjunto $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ formado por n objetos distintos que estão dispostos em forma circular.



À priori parece que para formar um círculo com os n objetos basta escolher uma ordem para eles, por exemplo, $x_1x_2x_3 \cdots x_{n-1}x_n$ (1), que vamos chamar de primeira formação circular desses objetos, assim a escolha pode ser feita de $n!$ modos. Porém, observe na figura acima que fazendo rotações desses objetos teríamos as seguintes formações:

$$x_nx_1x_2 \cdots x_{n-2}x_{n-1} \quad (2)$$

$$x_{n-1}x_nx_1 \cdots x_{n-3}x_{n-2} \quad (3)$$

$$\vdots$$

$$x_2x_3x_4 \cdots x_nx_1 \quad (n).$$

Veja que as formações circulares (1), (2), (3),$\cdots$, (n) são todas iguais, pois como sabemos nesse tipo de formação o que importa é a posição relativa dos objetos entre si e a configuração (1) através de uma rotação pode ser transformada nas configurações (2), (3), $\cdots$, (n). Como cada formação circular se repete n vezes. Então precisamos eliminar essas repetições da contagem inicial, ou seja, temos que dividir a contagem por n. Logo:

$$\frac{n!}{n} = \frac{n \times (n-1)!}{n} = (n-1)!$$

Portanto, o número de permutação circular de n objetos é dado por:

$$(PC)_n = (n-1)!$$

Exemplo 3.10.1- De quantos modos 4 crianças podem formar uma roda?

Solução usando a fórmula: Como são 4 crianças e elas vão formar uma roda, o problema é de permutação circular, onde $n = 4$. Então:

$$(PC)_4 = (4-1)! = 3! = 6.$$

Solução usando o princípio multiplicativo: Primeiramente devemos escolher uma criança para ocupar um lugar da roda e depois os demais espaços devem ser preenchidos pelo número de modos que as outras crianças podem preenchê-los.

$$\frac{1}{1^{\text{a}}\ criança} \quad \frac{3}{2^{\text{a}}\ criança} \quad \frac{2}{3^{\text{a}}\ criança} \quad \frac{1}{4^{\text{a}}\ criança}$$

$$T = 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6.$$

Comentário

A primeira criança tem apenas 1 modo para escolher um lugar na roda, pois ela não tem nenhum referencial na roda, além disso os lugares não estão marcados e por mais que estivessem, não geraria uma nova configuração, ou seja, o que importa é saber quem vai ficar à esquerda ou à direita ou em frente da primeira criança. Feito isso os demais lugares ficam marcados em relação a primeira criança, assim a segunda pode escolher se vai ficar a esquerda, à direita da primeira ou de frente da primeira criança, ou seja, tem-se 3 modos de escolha, a terceira e a quarta terão, respectivamente 2 e 1 modos de escolher um lugar na roda. Portanto, aplicando o princípio multiplicativo existem 6 modos de 4 crianças formarem uma roda.

Exemplo 3.10.2- Maricota e Jubilson vão fazer uma roda de ciranda com mais 6 crianças. De quantas maneiras diferentes essa roda pode ser formada de modo que Maricota e Jubilson não fiquem um no lado do outro?

<u>Solução usando a fórmula</u>: Vamos resolver esse problema em dois casos, primeiro calcularemos o total de permutações, em seguida só as permutações em que os dois ficarão juntos, feito isso a resposta será diferença desses resultados.

1º caso: Como são 8 crianças, para calcular o total de permutações, temos:

$$(PC)_8 = (8-1)! = 7! = 5.040.$$

2º caso: Para calcularmos o número de permutações em que os dois estarão sempre juntos, então devemos considerar como se eles fossem um só elemento na roda, ou seja, devemos calcular $(PC)_7$, mas eles podem permutarem entre si, isto é, 2!. Assim temos:

$$2!\,(PC)_7 = 2!\,(7-1)! = 2!\,6! = 2 \times 720 = 1.440.$$

O resultado procurado é $5.040 - 1.440 = 3.600$.

<u>Solução usando o princípio multiplicativo</u>: Qualquer uma das 8 crianças pode ser a primeira a fazer parte da roda, porém para facilitar o entendimento da resolução dessa questão pelo princípio multiplicativo, vamos começar a formação com Jubilson e Maricota. Primeiro escolhe-se um deles para ser o primeiro a formar a roda, determinando o número de maneiras que isso pode ser feito, em seguida determina-se o número de maneiras para outro fazer parte da roda e por fim devemos determinar o número de maneiras que as outras 6 crianças podem ocupar na roda.

$$\frac{1}{Maricota}\ \frac{5}{Jubilson}\ \frac{6}{3^{a}\ criança}\ \frac{5}{4^{a}\ criança}\ \frac{4}{5^{a}\ criança}\ \frac{3}{6^{a}\ criança}\ \frac{2}{7^{a}\ criança}\ \frac{1}{8^{a}\ criança}$$

$$T = 1 \times 5 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3.600.$$

<u>Comentário</u>

Como temos uma restrição onde Maricota e Jubilson não podem estar um ao lado do outro, vamos começar por essa restrição. Suponha que Maricota seja a primeira a ocupar um lugar na roda, então ela tem apenas 1 maneira de escolher esse lugar, pois ela sendo a primeira não tem nenhum referencial na roda, feito isso os demais lugares ficarão marcados, como Jubilson não pode ficar nem do lado esquerdo nem do direito de Maricota, então ele tem 5 maneiras para fazer a escolha, agora são 6 crianças para 6 lugares restantes, ou seja, temos 6, 5, 4, 3, 2, 1 maneiras delas fazerem a escolha. Portanto, aplicando o princípio multiplicativo temos 3.600 maneiras diferentes para que essa roda seja formada.

2.11. Permutação com Repetição

Nesse tipo de permutação um ou mais elementos poderá ou poderão repetir mais de uma vez.

Exemplo 3.11.1- Quantos anagramas tem a palavra CASA?

Solução: Se todas as letras fossem diferentes teríamos como resposta $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ anagramas, porém a letra **A** se repete 2 duas vezes, com isso estamos contando o mesmo anagrama mais de uma vez. Agora vamos escrever todos os anagramas da palavra CASA, diferenciando o primeiro **A** do segundo, pela cor verde e vermelho, respectivamente.

Anagramas da palavra CASA

Começando com C	Começando com S	Começando com A	Começando com A
CASA	SCAA	ACSA	ACSA
CASA	SCAA	ACAS	ACAS
CSAA	SACA	ASCA	ASCA
CSAA	SACA	ASAC	ASAC
CAAS	SAAC	AACS	AACS
CAAS	SAAC	AASC	AASC

Observe que cada anagrama foi contado 2 vezes, ou seja, palavra casa tem apenas $24 \div 2 = 12$ anagramas.

Exemplo 3.11.2- Quantos anagramas tem a palavra ARARA?

Solução: Se não tivéssemos letras repetidas resposta seria $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ anagramas, mas letra **A** se repete 3 vezes e letra **R**, 2 vezes, da mesma forma como no exemplo 3.11.1 estamos contando o mesmo anagrama mais de uma vez. Agora vamos escrever apenas os anagramas da palavra ARARA que começam com **A**, vamos diferenciar cada letra **A** e cada letra **R** por cores, para um melhor entendimento dessas permutações.

ARARA	ARARA	ARARA
ARARA	ARARA	ARARA
ARARA	ARARA	ARARA
ARARA	ARARA	ARARA

Observe que os anagramas da palavra ARARA que começam com **A** nesta ordem, onde **A** permuta apenas com **A** e **R** permuta apenas com **R**, ou seja, um anagrama se repete 12 vezes. Se fizermos todos os anagramas dessa palavra observamos também que os demais anagramas se repetiram 12 vezes cada um. Portanto, a palavra arara tem apenas $120 \div 12 = 10$ anagramas.

É claro que fica inviável resolvermos os problemas de permutação com repetição, escrevendo todos seus elementos e verificar quantas vezes cada um deles se repete, no caso dos anagramas quanto maior a palavra mais dificuldade teremos de escrevê-los. Poderíamos ter resolvido os dois exemplos anteriores raciocinando da seguinte forma:

A palavra CASA é composta por 4 letras, onde elas permutarão nos dando um total de 4! anagramas, sendo que desse total, temos anagramas repetidos. Essa repetição ocorre quando a letra **A** permuta entre si formando o mesmo anagrama, como temos duas letras **A** essa repetição ocorre de 2! vezes. Assim para a repetição se eliminada basta ser feita a divisão:

$$\frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 12\ anagramas.$$

De forma semelhante ocorre com a palavra ARARA que tem 5 letras que permutam entre si nos dando 5! anagramas, desse total alguns anagramas estão sendo contados mais de uma vez, sendo aqueles que envolve as três letras **A** que permutam entre si e as duas letras **R** que também permutam entre si, ou seja, temos repetições de $3! \times 2!$ anagramas. Agora basta fazer a divisão para eliminar as repetições, assim:

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!} \times 2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10\ anagramas.$$

Portanto, como vimos nesses dois exemplos, não há necessidade de escrevermos os elementos de uma permutação com repetição, basta dividirmos o total de permutações pelo produto das permutações dos elementos repetidos.

De um modo geral, podemos calcular o número de permutações de um agrupamento com n elementos, entre os quais o elemento x_1 aparece $n_1$vezes no agrupamento, o elemento x_2 aparece n_2 vezes, $\cdots$, o elemento x_k aparece n_k vezes:

$$\overbrace{\underbrace{x_1,\cdots,x_1}_{\substack{n_1\ elementos\\ iguais\ a\ x_1}}\ ,\ \underbrace{x_2,\cdots,x_2}_{\substack{n_2\ elementos\\ iguais\ a\ x_2}}\ ,\cdots,\ \underbrace{x_k,\cdots,x_k}_{\substack{n_k\ elementos\\ iguais\ a\ x_k}}}^{n\ elementos}$$

Sendo $x_1, x_2, \cdots, x_k$, distintos entre si e $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Assim como esse agrupamento é formado por n elementos, temos então, $n!$ permutações desses elementos e dentre essas temos $n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!$ repetidas, daí é só dividirmos o total de permutações dos elementos pelo total de permutações dos elementos repetidos para obtermos o resultado procurado. Indicaremos a permutação desses elementos por $P_n^{(n_1,n_2\cdots,n_k)}$. Então o número de permutações de um agrupamento com elementos repetidos é dado por:

$$\boxed{P_n^{(n_1,n_2\cdots,n_k)} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}}$$

Poderíamos também ter resolvido esses dois exemplos pelo princípio multiplicativo. Na realidade, aplicaremos o princípio multiplicativo duas vezes, em seguida faremos a divisão dos resultados encontrados, o que nós chamaremos aqui nesse trabalho de ***novo princípio multiplicativo***. Como temos que fazer uma divisão para eliminarmos os agrupamentos repetidos, representaremos essa divisão por meio de uma fração. O *numerador* será formado pelo total de permutações dos elementos e o *denominador* pelo número de vezes que os agrupamentos de tais elementos se repetem.

Observação: Usaremos o novo princípio multiplicativo sempre que houver necessidade de eliminar agrupamentos repetidos.

Solução do exemplo 3.11.1 pelo novo princípio multiplicativo

Observe que na palavra CASA a letra *A* se repete 2 vezes e as letras *C* e *S* apenas 1 vez.

$$\frac{\frac{4}{1^{\underline{a}}\ letra}}{\frac{2}{1^{\underline{a}}\ letra\ A}}\ \frac{\frac{3}{2^{\underline{a}}\ letra}}{\frac{1}{2^{\underline{a}}\ letra\ A}}\ \frac{\frac{2}{3^{\underline{a}}\ letra}}{\frac{1}{letra\ C}}\ \frac{\frac{1}{4^{\underline{a}}\ letra}}{\frac{1}{letra\ S}}\ ou\ simplesmente\ \frac{4}{2}\,\frac{3}{1}\,\frac{2}{1}\,\frac{1}{1}$$

$$T = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2 \times 1}}{\cancel{2 \times 1 \times 1 \times 1}} = 12\ anagramas.$$

Comentário

Para resolvermos esse tipo de problema onde temos duas letras iguais que ao permutarem entre si vão gerar o mesmo anagrama, devemos aplicar o novo princípio multiplicativo. O numerador será formado pelas possibilidades de escolha de qualquer letra e o denominador será formado pelas possibilidades de escolha de cada letra, por conveniência começaremos pelas repetidas.

Etapas do numerador

Primeira etapa: temos 4 possibilidades para escolher a primeira letra.

Segunda etapa: como já utilizamos uma letra na primeira etapa nos restam apenas 3 possibilidades de escolha para a segunda letra.

Terceira etapa: já utilizamos duas letras nas duas etapas anteriores, então temos agora apenas 2 possibilidades de escolha.

Quarta etapa: resta apenas uma letra a ser escolhida e temos apenas 1 possibilidade de escolha.

Etapas do denominador

Primeira etapa: temos 2 possibilidades de escolher a primeira letra *A*.

Segunda etapa: temos 1 possibilidade de escolher a segunda letra *A*.

Terceira etapa: temos 1 possibilidade de escolher a letra *C*.

Quarta etapa: temos 1 possibilidade de escolher a letra *S*.

Agora aplicando o novo princípio multiplicativo a palavra CASA tem 12 anagramas.

Observação: Só para reforçar, as etapas do denominador são feitas justamente para saber quantas vezes um determinado anagrama se repete, sabendo disso podemos eliminar tais repetições na contagem final. E não necessariamente essas etapas devam começar pelas letras repetidas, mas aqui nesse trabalho, por conveniência, sempre começaremos por elas. Observe que as letras que não se repetem sempre terão apenas uma possibilidade de escolha,

Solução do exemplo 3.11.2 pelo novo princípio multiplicativo

Observe que na palavra ARARA a lera *A* se repete 3 vezes e a letra *R*, 2 vezes:

$$\frac{5}{3}\,\frac{4}{2}\,\frac{3}{1}\,\frac{2}{2}\,\frac{1}{1}$$

$$T = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3 \times 2 \times 1}}{\cancel{3 \times 2 \times 1} \times 2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10\ anagramas$$

Comentário

Nas etapas do numerador temos 5, 4, 3, 2 e 1 modos de escolher uma letra. Já nas etapas do denominador temos 3, 2 e 1 modos de escolher uma letra **A** e 2 e 1 modos de escolher uma letra **R**. Assim aplicando o novo princípio multiplicativo a palavra ARARA tem 10 anagramas.

Exemplo 3.11.3- Na escola José Marcelino de Oliveira foi feita a distribuição dos livros didáticos para as turmas 9º ano. Feita a distribuição, sobraram 3 livros de Matemática, 2 de Língua Portuguesa, 2 de Ciências, 1 de Geografia, 1 de História e 1 de Artes. De quantas maneiras diferentes esses livros podem ser arrumados lado a lado em qualquer ordem em uma prateleira da sala de leitura da escola? (Dados fictícios)

Solução usando a fórmula

Observe que temos ao todo 10 livros e temos 3 livros idênticos de Matemática, 2 idênticos de Ciências e 2 de idênticos de Geografia, então estamos diante de uma permutação com repetição, assim:

$$P_{10}^{(3,2,2,1,1,1)} = \frac{10!}{3!\,2!\,2!\,1!\,1!\,1!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4 \times 3!}}{\cancel{3! \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1}} = 151.200\ maneiras.$$

Solução usando o novo princípio multiplicativo

Observe que são 10 livros com 3, 2, 2, 1, 1 1 repetições,

$$\frac{10}{3}\ \frac{9}{2}\ \frac{8}{1}\ \frac{7}{2}\ \frac{6}{1}\ \frac{5}{2}\ \frac{4}{1}\ \frac{3}{1}\ \frac{2}{1}\ \frac{1}{1}$$

$$T = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\cancel{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1}} = 151.200\ maneiras.$$

Comentário

Nas etapas do numerador temos 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 e 1 modos de escolher um livro. Já nas etapas do denominador temos 3, 2 e 1 modos de escolher um livro de Matemática, 2 e 1 modos de escolher um livro de Língua Portuguesa, 2 e 1 modos de escolher um livro de Ciências 1 modo de escolher um livro de Geografia, 1 modo de escolher um livro de História e 1 modo de escolher um livro de Artes. Assim aplicando o novo princípio multiplicativo obtemos 151.200.

Assim, podemos arrumar esses livros de 151.200 maneiras diferentes.

2.12. Combinações simples

Combinações simples são agrupamentos sem repetição que **não diferem** entre si ao mudarmos a ordem de seus elementos.

Por exemplo, com Jubilson e Jubiraldo podemos formar apenas uma dupla, tanto faz Jubilson e Jubiraldo ou Jubiraldo e Jubilson é a mesma dupla, nesse caso a ordem não importa, logo estamos diante de um caso de *combinação simples.*

Exemplo 3.12.1- Considere um conjunto não ordenado formado por n elementos. De quantas maneiras podemos agrupar p elementos distintos desse conjunto, com $n \geq p$?

<u>*Solução*</u>: Usaremos o novo princípio multiplicativo para solucionar esse problema, pois como o conjunto é não ordenado, ou seja, a ordem dos agrupamentos não importa poderemos ter agrupamentos repetidos quando forem formados com p elementos.

$$\frac{\frac{n}{1^{\underline{o}}\ elemento}}{p} \quad \frac{\frac{n-1}{2^{\underline{a}}\ elemento}}{p-1} \quad \frac{\frac{n-2}{3^{\underline{o}}\ elemento}}{p-2} \quad \cdots \quad \frac{\frac{n-(p-2)}{(p-1)^{\underline{o}}\ elemento}}{2} \quad \frac{\frac{n-(p-1)}{p^{\underline{o}}\ elemento}}{1}$$

<u>Comentário</u>

Nas etapas do numerador temos $n, n-1, n-2, \cdots, n-(p-2)\ e\ n-(p-1)$ modos de escolher qualquer um elemento do conjunto e nas etapas do denominador temos $p, p-1, p-2, \cdots, 2\ e\ 1$ modos de escolher cada um dos p elementos. Assim aplicando o novo princípio multiplicativo temos:

$$T = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times \big(n-(p-2)\big) \times \big(n-(p-1)\big)}{p \times (p-1) \times (p-2) \times \cdots \times 2 \times 1} \quad (9)$$

Como já vimos:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(p-2)) \times (n-(p-1) = A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (10)$$

e

$$p \times (p-1) \times (p-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = p! \quad (11)$$

Agora substituindo (10) e (11) em (9) e fazendo $T = C_{n,p}$, obtemos:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

Ou

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Portanto, para o cálculo de combinações simples de n elementos, tomados p a p ($n \geq p$), podemos usar a fórmula:

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

Exemplos 3.12.2- Vamos calcular $C_{5,2}$ e $C_{6,3}$

a) $C_{5,2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2!\cancel{3!}} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$

b) $C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{3!\cancel{3!}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = \frac{120}{6} = 20$

Exemplos 3.12.3- Quantas duplas podemos formar com 4 alunos?

Solução usando a fórmula: Estamos diante de um problema de combinação simples, pois como já vimos, ao mudarmos a ordem dos elementos que formam a dupla, a dupla permanece a mesma, assim:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{2 \times 1 \times \cancel{2!}} = 6.$$

Solução usando o novo princípio multiplicativo: Como temos que formar duplas, então:

$$\frac{4}{2}\ \frac{3}{1}$$

$$T = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6.$$

Comentário

Etapa do numerador

Primeira etapa: temos 4 possibilidades para escolher uma pessoa para fazer parte da dupla.

Segunda etapa: como já utilizamos uma pessoa na primeira etapa nos restam apenas 3 possibilidades de escolha para a segunda pessoa da dupla.

Etapa do denominador

Primeira etapa: para formarmos uma dupla precisamos de duas pessoas, a escolhida pode ocupar o primeiro ou o segundo lugar da dupla, já que a ordem não importa, então temos 2 possibilidades de escolha.

Segunda etapa: a segunda pessoa da dupla tem apenas 1 possibilidade de escolha já que um dos lugares já está ocupado.

Assim, aplicando o novo princípio multiplicativo obtemos 6 como resposta.

Portanto, podemos formar 6 duplas com 4 alunos.

Exemplos 3.12.4- Quantas equipes de 3 professores podem ser formadas com 10 professores?

Solução usando a fórmula: Como temos que formar equipes e ao mudarmos a ordem dos elementos da equipe ela permanece a mesma, então estamos diante de um problema de combinação simples, logo:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{3 \times 2 \times 1 \times \cancel{7!}} = \frac{720}{6} = 120\ equipes.$$

Solução usando o novo princípio multiplicativo: Como vamos formar equipes com três professores, então:

$$\frac{10}{3}\ \frac{9}{2}\ \frac{8}{1}$$

$$T = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6} = 120\ equipes.$$

Comentário

Na etapa do numerador temos 10, 9, 8 modos de escolher um professor para fazer parte da equipe e na etapa do denominador, o primeiro professor escolhido tem 3 modos de escolher um lugar na equipe, o segundo escolhido tem 2 modos de escolha e terceiro escolhido tem apenas 1 modo de escolher um lugar na equipe.

Portanto, aplicando o novo princípio multiplicativo com 10 professores podem ser formadas 120 equipes de 3 professores.

Exemplos 3.12.5- Uma associação tem uma diretoria formada por 10 pessoas: 6 homens e 4 mulheres. De quantas maneiras podemos formar uma comissão dessa diretoria composta por 3 homens e 2 mulheres?

Solução usando a fórmula: Estamos diante de um problema de combinação simples, pois aqui não foi especificada nenhuma função para os membros que irão compor a comissão, assim todos exercerão a mesma função, ou seja, ordem dentro da comissão não importa. Então para determinarmos o total de comissões, devemos calcular o produto das combinações das comissões formadas por 3 homens pelas formadas por 2 mulheres. Assim temos:

$$C_{6,3} \times C_{4,2} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} \times \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{6!}{3!\,3!} \times \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{\cancel{6} \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3 \times 2 \times 1} \times \cancel{3!}} \times \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{2 \times 1 \times \cancel{2!}} = 120.$$

Solução usando o princípio multiplicativo: Temos comissões formadas só por homens e só por mulheres, então:

$$\underbrace{\frac{6}{3}\quad \frac{5}{2}\quad \frac{4}{1}}_{HOMENS}\quad \underbrace{\frac{4}{2}\quad \frac{3}{1}}_{MULHERES}$$

$$T = \frac{\cancel{6} \times 5 \times 4}{\cancel{3 \times 2 \times 1}} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = \frac{240}{2} = 120.$$

Comentário

Na etapa do numerador temos 6, 5, 4 modos de escolher um homem para fazer parte da comissão masculina enquanto há 4, 3 modos de escolher uma mulher para fazer parte da comissão feminina, já na etapa do denominador temos 3, 2 e 1 modos para cada homem escolhido escolher um lugar na comissão masculina e 2 e 1 modos para cada mulher escolhida escolher um lugar na comissão feminina. Então pelo novo princípio multiplicativo obtemos 120 como resultado.

Portanto, podemos formar uma comissão dessa diretoria composta por 3 homens e 2 mulheres de 120 maneiras.

2.13. Combinações com repetições

Combinações com repetições ou combinações completas são agrupamentos com repetição que **não diferem** entre si ao mudarmos a ordem de seus elementos.

Exemplos 3.13.1- Curiano deseja comprar três sorvetes de uma bola, só de sabores regionais. A sorveteria tem os seguintes sabores regionais: açaí, cupuaçu, bacuri, taperebá, muruci, tapioca e paraense. De quantos modos essa compra pode ser feita?

Solução: Observe que o problema não diz que os três sorvetes têm que ser de sabores diferentes, pode ser que dois sejam de um mesmo sabor e o outro de um sabor diferente, ou ainda podemos ter os três de mesmo sabor. Logo, podemos ter sabores repetidos, sem importar a ordem, portanto estamos diante de um problema de combinação com repetição, ou seja, temos que calcular uma combinação de 7 elementos tomados 3 a 3, que representaremos por $CR_{7,3}$. Resolver esse problema é equivalente a encontrar todas as soluções inteiras não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 3. \quad (12)$$

Onde x_1, $x_2, x_{3,}, x_4, x_5, x_6$ e x_7 representam a quantidade de vezes que os sabores açaí, cupuaçu, bacuri, taperebá, muruci, tapioca e paraense, respectivamente, podem ser usados nos 3 sorvetes. Veremos algumas possíveis soluções dessa equação.

$$1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 3 \Rightarrow (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$$

$$0 + 2 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 3 \Rightarrow (0, 2, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 3 = 3 \Rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0, 3).$$

Vamos substituir o número de vezes que cada sabor é usado por um quadradinho: ■

$$■ + ■ + ■ + + + +$$

$$■ + + + + + ■ + ■$$

$$+ ■ ■ + ■ + + + +$$

$$+ + + + + + ■ ■ ■$$

Observe que temos 9 símbolos, 3 ■ e 6 $+$ que apenas permutam entre si, ou seja, estamos diante de uma permutação com repetição, assim:

$$PR_9^{(6,3)} = \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84 = CR_{7,3}.$$

Então na equação (12) temos 7 incógnitas cuja raízes permutam 3 a 3, nos dando um total de 84 soluções.

Note que:

$$C_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!\,3!} = \frac{9!}{6!\,3!} = PR_9^{(6,3)}.$$

Assim temos:

$$CR_{7,3} = C_{9,3} = PR_9^{(6,3)}.$$

De um modo geral $C_{n,p} = PR_n^{(q,p)}$, onde $p + q = n$, de fato:

$$PR_n^{(q,p)} = \frac{n!}{q!\,p!}. \qquad (13)$$

Mas, $p + q = n \Rightarrow q = n - p$ (14), substituindo (14) em (13) temos:

$$PR_n^{(q,p)} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = C_{n,p}. \qquad (15)$$

<u>Observação</u>: Para resolvermos problemas que envolvem combinações com repetição devemos transformar tal problema em uma equação como no exemplo 3.13.1. Na equação (12) temos 7 incógnitas com 6 sinais de mais, uma unidade a menos. Se tivermos uma equação com 11 incógnitas precisaremos de 10 sinais de mais, de um modo geral se tivermos uma equação com n incógnitas precisaremos de $n - 1$ sinais de mais. Então quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = p$?

Para determinarmos o número de soluções inteiras e não negativa dessa equação devemos calcular uma combinação com repetição de n elementos tomados p a p, isto é, $CR_{n,p}$ que é equivalente ao cálculo da combinação simples $C_{n+p-1,p}$. De fato, como a equação possui n incógnitas, então possui $n - 1$ sinais de mais que permutaram com p quadradinhos, tendo um total de $p + n - 1$ elementos, assim usando o resultado obtido em (15) temos:

$$PR_{n+p-1}^{(n-1,p)} = C_{n+p-1,p}.$$

Ou seja,

$$\boxed{CR_{n,p} = C_{n+p-1,p}}$$

Vamos agora resolver a equação (12) usando a fórmula. Observe que $n = 7$ e $p = 3$, fazendo a aplicação temos:

$$CR_{7,3} = C_{7+3-1,3} = C_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!\,3!} = \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3 \times 2 \times 1 \times 6!} = 84.$$

Solução usando o novo princípio multiplicativo: Quando escrevemos a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 3.$$

O número 3 representa a quantidade de sorvetes que devem ser substituídos por 3 quadradinhos e estes devem permutar com os 6 sinais de mais, ou seja, temos 9 elementos que podem ser combinados com os 3■ ou com os 6+. Qualquer uma das duas combinações escolhidas o resultado será o mesmo. Aqui neste exemplo faremos as duas combinações, assim:

$$\frac{9}{3}\,\frac{8}{2}\,\frac{7}{1} \qquad ou \qquad \frac{9}{6}\,\frac{8}{5}\,\frac{7}{4}\,\frac{6}{3}\,\frac{5}{2}\,\frac{4}{1}$$

$$T = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84 \qquad ou \qquad T = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6 \times 5 \times 4}}{\cancel{6 \times 5 \times 4} \times 3 \times 2 \times 1} = 84.$$

Comentário 1

Na primeira situação temos uma combinação de 9 elementos tomados 3 a 3, então nas etapas do numerador temos 9, 8 e 7 modos de escolher um elemento e nas etapas do denominador para os três elementos escolhidos temos 3, 2 e 1 modos de escolher um destes elementos.

Comentário 2

Na segunda situação temos uma combinação de 9 elementos tomados 6 a 6, então nas etapas do numerador temos 9, 8, 7, 6, 5 e 4 modos de escolher um elemento e nas etapas do denominador para os seis elementos escolhidos temos 6, 5, 4, 3, 2 e 1 modos de escolher um destes elementos.

Assim nas duas situações aplicando o novo princípio multiplicativo a equação (12) possui 84 soluções inteiras e não negativas, isto é equivalente a dizer que, Curiano tem 84 modos de comprar um sorvete de uma bola, tendo à disposição 7 sabores diferentes.

Observação: O cálculo se torna mais simples quando escolhemos a situação em que é feita a combinação com a menor quantidade de elementos. Neste exemplo o cálculo mais simples foi na combinação de 9 elementos tomados 3 a 3.

Exemplos 3.13.2- De quantos modos podemos comprar um sorvete de duas bolas, sendo que a sorveteria oferece 8 sabores diferentes?

Solução usando a fórmula: Escrevendo esse problema na forma de equação temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 2.$$

Onde $x_1,\ x_2, x_{3,}, x_4, x_5, x_6, x_7\ e\ x_8$ representam a quantidade de vezes que cada um dos 8, respectivos sabores, podem ser usados no sorvete de duas bolas.

Assim temos que o valor 2 tem que ser combinado com as 8 incógnitas, daí $p = 2$ e $n = 8$. Então:

$$CR_{8,2} = C_{8+2-1,2} = C_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!\,2!} = \frac{9!}{7!\,2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{2 \times 1 \times 7!} = 36.$$

Solução usando o novo princípio multiplicativo: Quando escrevemos a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 2.$$

O número 2 representa a quantidade de bolas do sorvete que devem ser substituídas por 2 quadradinhos e estes devem permutar com os 7 sinais de mais, ou seja, temos 9 elementos, que podem ser combinados 2 a 2 ou 7 a 7, então escolhendo a primeira combinação temos:

$$\frac{9}{2}\ \frac{8}{1}$$

$$T = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36.$$

Comentário

Na etapa do numerador temos 9 e 8 modos de escolher um elemento e na etapa do denominador para os dois elementos escolhidos temos 2 e 1 modos de escolher um destes elementos. Assim, aplicando o novo princípio multiplicativo, obtemos 36.

Portanto, há 36 modos para comprar um sorvete de duas bolas tendo à disposição 8 sabores diferentes.

Exemplos 3.13.3- (ENQ – 2019.2) Determine o número de soluções inteiras não negativas da equação $x + y + z + t = 98$.

Solução usando a fórmula: Na equação temos que o valor 98 deve ser combinado com as 4 incógnitas, então temos que $p = 98$ e $n = 4$, assim:

$$CR_{4,98} = C_{98+4-1,10} = C_{101,98} = \frac{101!}{98!\,(101-98)!} = \frac{101!}{98!\,3!} = \frac{101 \times 100 \times 99 \times \cancel{98!}}{\cancel{98!} \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$= 166.650.$$

Solução usando o novo princípio multiplicativo: Na equação dada o número 98 representa a quantidade de quadradinhos que devemos permutar com os 3 sinais de $+$, ou seja, temos um total de 101 elementos, que podem ser combinados 3 a 3 ou 98 a 98, então escolhendo a primeira combinação temos:

$$\frac{101}{3} \quad \frac{100}{2} \quad \frac{99}{1}$$

$$T = \frac{101 \times 100 \times 99}{3 \times 2 \times 1} = 166.650.$$

Comentário

Na etapa do numerador temos 101, 100 e 99 modos de escolher um elemento e na etapa do denominador para os três elementos escolhidos temos 3, 2 e 1 modos de escolher um destes elementos. Assim, aplicando o novo princípio multiplicativo, obtemos 166.650.

Portanto, a equação dada tem 166.650 soluções inteiras não negativas.

Exemplos 3.13.4- Quantas são as soluções inteiras positivas da equação $A + B + C + D = 10$?

Solução usando a fórmula: Como queremos saber número de soluções positivas da equação $A + B + C + D = 10$ (I), então $A \geq 1, B \geq 1, C \geq 1$ e $D \geq 1$. Assim não podemos aplicar a fórmula diretamente em (I), pois incluiremos na resposta as soluções que contém raízes nulas. Para solucionarmos esse problema usaremos as condições: $A \geq 1, B \geq 1, C \geq 1$ e $D \geq 1$, que nos permite fazer: $A = a + 1$ (II), $B = b + 1$ (III), $C = c + 1$ (IV) e $D = d + 1$ onde a, b, c e d são números inteiros não negativos. Agora substituindo (II), (III), (IV) e (V) em (I),

temos:

$$a + 1 + b + 1 + c + 1 + d + 1 = 10 \;\Rightarrow\; a + b + c + d = 6. \;\; (VI)$$

Agora podemos aplicar a fórmula para sabermos o número de soluções inteiras e não negativas da equação (VI), que é equivalente ao número de soluções positivas da equação (I). Então temos que o valor 6 deve ser combinado com as 4 incógnitas, logo temos $p = 6$ e $n = 4$, assim:

$$CR_{4,6} = C_{4+6-1,6} = C_{9,6} = \frac{9!}{(9-6)!\,6!} = \frac{9!}{3!\,6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3 \times 2 \times 1 \times 6!} = 84.$$

Solução usando o novo princípio multiplicativo: Transformamos a equação $A + B + C + D = 10$ na equação $a + b + c + d = 6$, então temos que o número 6 representa a quantidade de quadradinhos que devemos permutar com os 3 sinais de $+$, ou seja, teremos ao todo 9 elementos, que podem ser combinados 3 a 3 ou 6 a 6, logo escolhendo a primeira combinação temos:

$$\frac{9}{3}\ \frac{8}{2}\ \frac{7}{1}$$

$$T = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84.$$

Comentário

Na etapa do numerador temos 9, 8 e 7 modos de escolher um elemento e na etapa do denominador para os três elementos escolhidos temos 3, 2 e 1 modos de um destes elementos. Assim, aplicando o novo princípio multiplicativo, obtemos 84.

Portanto, a equação dada possui 84 soluções inteiras positivas.

Os exemplos apresentados aqui neste capítulo foram escolhidos por serem comumente trabalhados no ensino médio tendo como base os autores [3], [6], e [12] e por possibilitarem soluções tanto pelo uso de fórmulas, quanto pelo princípio multiplicativo.

3 USANDO O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Neste capítulo mostraremos apenas uma aplicação feita em sala de aula com alunos do ensino médio da 1ª Etapa-EJA das turmas 101, 102, 103 e 104 da Escola Estadual José Marcelino de Oliveira, Ananindeua-PA, o que levou os mesmos a terem um melhor entendimento do princípio multiplicativo. Os demais problemas infelizmente não foram aplicados em sala, pois as aulas presenciais foram suspensas no dia 16/03/2020 devido a pandemia da COVID-19. As aplicações que mostraremos aqui neste capítulo foram propostas para que os alunos pudessem fazer uma análise e dessem uma resposta sem o uso de fórmulas para cada uma delas. Os seis primeiros problemas são rotineiramente trabalhados no ensino médio tendo como base os autores [3], [6] e [12] o sétimo é uma criação do autor deste trabalho.

Cada aplicação deve ser colocada de maneira introdutória, ou seja, antes da exposição dos respectivos conteúdos, servindo assim como problema motivador para um melhor aprendizado de Análise combinatória.

3.1. O problema da combinação de roupas

● Tendo à disposição 3 calças e 4 camisas, de quantas maneiras diferentes Jubilson pode se vestir?

Nas duas primeiras turmas onde o problema foi proposto, nenhum aluno acertou a resposta, a maioria respondeu 7, outros, 4 e alguns deram como resposta 3. Já nas outras duas últimas turmas que foi feita a aplicação, obtivemos a resposta certa. Um aluno disse que a resposta era 12 e outros concordaram, mas não souberam responder o porquê. Na última turma um aluno disse que a resposta era 12, pois $3 \times 4 = 12$. Mas grande parte dos alunos das quatro turmas somaram a quantidade de calças e camisas e deram como resposta 7 e alguns alunos disseram não ter entendido a pergunta.

Figura 1 – Alunos da turma 101

Fonte: Fotografia do autor

Quando foi tirado da sacola as 3 calças e 4 camisas, os alunos começaram a dar risadas. Mas quando começamos a fazer as combinações, puderam entender perfeitamente que cada uma das 3 calças poderia ser combinada com cada uma das 4 camisas ou vice-versa e para obter a resposta do problema bastava multiplicar o número de possibilidades de escolha de calças e camisas, ou seja, $3 \times 4 = 12$.

Portanto, Jubilson pode se vestir de 12 maneiras diferentes.

Esse problema foi proposto para que os alunos tivessem uma noção do ***princípio multiplicativo***.

Observações.

1- Como já foi exposto no início desse capítulo a única aplicação realizada em sala de aula foi a primeira (4.1) as demais não foram feitas, mas mostraremos aqui quais seriam essas aplicações, como seriam executadas, o que se esperava dos alunos na realização de cada uma delas e qual o objetivo de tais aplicações.
2- Para os próximos problemas já terá sido definido para os alunos o princípio multiplicativo bem como a resolução de alguns exemplos feitos no item 3.5. Assim eles terão condições de aplicar corretamente esse método.

3.2. O problema da ocupação das cadeiras

● De quantas maneiras diferentes 5 alunos podem sentar-se, tendo a disposição 3 cadeiras?

Feita essa pergunta aos alunos, esperava-se que a maioria respondesse: 15 maneiras, pois para eles bastava fazer $5 \times 3 = 15$, ou seja, estariam usando o princípio multiplicativo de forma errada, pois acreditavam que o problema possuía apenas duas etapas: escolhas de alunos e de cadeiras.

Para resolver o problema deveriam ser escolhidos 5 alunos da turma, colocados ao lado de 3 cadeiras e em seguida seriam feitas três perguntas à turma:

Primeira pergunta: Podemos escolher qualquer um dos 5 alunos para se sentar em uma dessas cadeiras? A resposta deveria ser sim. Então nós temos quantas possibilidades de escolha? A resposta deveria ser 5. Um dos 5 alunos ocuparia uma das cadeiras, com isso restariam 4 alunos para serem escolhidos.

Segunda pergunta: Quantas possibilidades de escolha temos para um desses alunos ocupar uma das duas cadeiras restantes? A resposta deveria ser 4. Um dos 4 alunos ocuparia uma das duas cadeiras restantes, com isso restariam 3 alunos a serem escolhidos e uma cadeira a ser ocupada.

Terceira pergunta: Quantas possibilidades há para um aluno ocupar essa última cadeira vazia? A resposta deveria ser, 3.

Assim, os alunos perceberiam que o problema teria três etapas de escolha, com isso, poderiam aplicar o princípio multiplicativo. Então:

$$T = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

Portanto, temos 60 maneiras diferentes para 5 alunos sentarem-se tendo a disposição 3 cadeiras.

Esse problema foi proposto para que os alunos tivessem uma noção de ***Arranjos simples*** aplicando o princípio multiplicativo.

3.3. O problema da fila

● Quantas filas diferentes podem ser formadas com 4 pessoas?

Feita essa pergunta, esperava-se que um pequeno grupo de alunos dessem como resposta 4, uma outra parte deles ainda não saberiam responder esta pergunta, enquanto alguns deles já conseguirão dar a resposta correta; pois com base na aplicação 4.2 os alunos entenderão que o problema possuía quatro etapas, ou seja, teriam 4, 3, 2 e 1 maneiras de escolher uma pessoa para fazer parte da fila e com isso aplicariam o princípio multiplicativo e chegariam à resposta correta.

A resolução do problema seria da seguinte forma: 4 alunos serão escolhidos e formarão uma fila, em seguida pede-se para um deles ficar fixo, por exemplo o primeiro aluno da fila ficando fixo, os demais permutam entre si formando novas filas. Após essa etapa seria solicitado para que dois alunos ficassem fixos e outros dois permutarem entre si, e por fim fixar três alunos na fila. Essas situações devem ser feitas para que os alunos percebam que quando se fixa uma ou mais pessoas na fila a possibilidade do número de escolha de um novo lugar vai diminuindo, ou seja, uma pessoa fixa, um lugar a menos para escolher, duas pessoas fixas, dois lugares a menos para escolher e assim sucessivamente. Assim o aluno não terá muita dificuldade em responder às seguintes perguntas:

Primeira pergunta: Podemos escolher qualquer um dos 4 alunos para ocupar o primeiro lugar da fila? A resposta deveria ser sim. Então nós temos quantas possibilidades de escolha? A resposta deveria ser 4. Um dos 4 alunos ocuparia o primeiro lugar da fila.

Segunda pergunta: Podemos escolher qualquer um dos 3 alunos restantes para ocupar o segundo lugar da fila? A resposta deveria ser sim, então nós temos quantas possibilidades de escolha? A resposta deveria ser 3. Um dos 3 alunos ocuparia o segundo lugar da fila.

Terceira pergunta: Podemos escolher qualquer um dos 2 alunos que sobraram para ocupar o terceiro lugar da fila? A resposta deveria ser sim. Então nós temos quantas possibilidades de escolha? A resposta deveria ser 2. Um dos 2 alunos ocuparia o terceiro lugar da fila.

Quarta pergunta: Podemos escolher este último aluno para ocupar a última vaga na fila? A resposta deveria ser sim. Então temos apenas uma possibilidade de escolha. Essa pergunta não precisaria ser feita, pois os alunos já perceberiam que só restaria uma vaga para um aluno ocupar.

Assim, os alunos aplicam o princípio multiplicativo nestas quatro etapas de escolhas, logo:

$$T = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Portanto, podem ser formadas 24 filas diferentes com 4 pessoas.

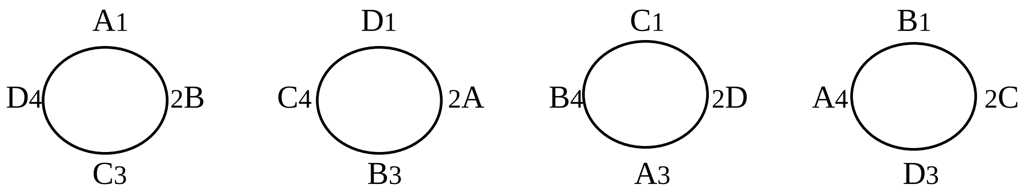
Esse problema foi proposto para que os alunos tivessem uma noção de ***permutações simples*** aplicando o princípio multiplicativo.

3.4. O problema da roda de ciranda

● Com 4 alunos, quantas rodas de ciranda diferentes podem ser formadas?

Nesse problema esperava-se que a maioria dos alunos pensassem que para obter a resposta correta bastava aplicar a multiplicação $4 \times 3 \times 2 \times 1$, ou seja, que a resposta seria 24. Aqui os alunos acertariam a quantidade de etapas, mas agiriam como se os lugares ocupados formassem uma fila, como na aplicação 4.3. Na fila, a ordem é importante, pois tem começo e fim, mas na formação circular a ordem não é importante, pois não temos como saber o começo nem o fim dela.

Para resolver o problema devem ser escolhidos 4 alunos da turma, os quais denominaremos de A, B, C e D, para aqui facilitarmos a resolução desse problema. Os alunos devem formar uma roda e em seguida deve-se marcar as quatro posições de cada um deles. Suponhamos que os alunos A, B, C e D ficaram nas posições 1, 2, 3 e 4, respectivamente, deve-se pedir para os alunos darem quatro giros, por exemplo, no sentido horário, sempre ocupando o lugar deixado pelo colega da direita. Observe a figura:



Após cada giro dado, pergunta-se: Tem-se uma nova configuração de roda? Espera-se que a resposta seja não, pois apesar dos alunos da roda terem mudado de posição a roda não se modificou.

Agora pede-se para os alunos trocarem as posições entre si, pelo menos duas vezes. Por exemplo, primeiro troca de posição o aluno A com o C e depois o B com o D. Observe a figura:

Após as duas permutações feitas temos a mesma roda? A resposta deveria ser não, pois espera-se que eles percebam que os alunos que estão de frente não mudaram, mas os vizinhos da esquerda e da direita mudaram, o que gera uma nova configuração de roda. Finalizada estas duas dinâmicas, espera-se que os alunos percebam que quando apenas se faz rotações, a roda não gera uma nova configuração e sim quando os participantes trocam as posições entre si.

Observação. Aqui não faz sentido perguntar quantas possibilidades temos para um aluno ocupar um lugar na roda, pois como vimos a escolha da posição não vai gerar uma nova configuração na roda, pois havendo um giro o aluno muda apenas de posição. Aqui o importante é saber quantas possibilidade de escolha tem o escolhido para fazer parte da roda. Faremos então as seguintes perguntas:

Primeira pergunta: Quantas possibilidades de escolha tem o primeiro aluno para fazer parte da roda? Resposta deve ser 1. Porém espera-se que os alunos respondam que seria 4, isto se explica pelo fato de a roda ser formada por 4 componentes. No entanto, deve ser esclarecido para os alunos que o lugar escolhido pelo primeiro componente não vai influenciar na configuração da roda, já que ele não tem nenhum referencial na mesma. Então, o importante para ele é fazer parte da roda, ou seja, só há uma possibilidade de escolha, a de fazer parte da roda. Agora temos um referencial na roda, isso faz com que os outros 3 lugares fiquem determinados.

Segunda pergunta: Quantas possibilidades de escolha tem o segundo aluno para fazer parte da roda? A resposta deve ser 3 possibilidades de escolha, pois pode ficar à esquerda, a direita ou de frente para o primeiro aluno, restando assim 2 lugares.

Terceira pergunta: Quantas possibilidades de escolha tem o terceiro aluno para fazer parte da roda? A resposta deve ser 2 possibilidades de escolha, com isso resta apenas 1 lugar para ser ocupado. Logo, os alunos devem perceber que o quarto e último aluno a fazer parte da roda tem apenas 1 possibilidade de escolha. Então eles devem aplicar o princípio multiplicativo nessas quatro etapas de escolha, então:

$$T = 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6.$$

Portanto, com 4 alunos podem ser formadas 24 rodas de ciranda diferentes.

Esse problema foi proposto para que os alunos tivessem uma noção de ***permutações circulares*** aplicando o princípio multiplicativo.

3.5. O problema da organização dos livros

● De quantas maneiras diferentes podemos arrumar 6 livros, um sobre o outro, em cima de uma mesa, sendo 3 exemplares iguais de Matemática, 2 iguais de Língua Portuguesa e 1 de Ciências?

A princípio espera-se que a maioria dos alunos pensem que para obter a resposta basta simplesmente fazer a permutação entre os 6 livros, ou seja, calcular $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$, essa resposta estaria correta se todos os livros fossem diferentes, mas temos livros iguais de Matemática e Língua Portuguesa, com isso, se trocássemos a posição somente entre livros de Matemática ou de Língua Portuguesa entre si teríamos a mesma configuração. Portanto, precisamos eliminar as configurações repetidas.

Para resolver o problema o professor deve colocar os 6 exemplares sobre a mesa. Em seguida será pedido para um aluno vir a frente para fazer uma nova arrumação dos livros, trocando a posição de um livro de Matemática por outro de Matemática e depois deve ser pedido para ele fazer uma nova arrumação, trocando a posição de um livro de Língua Portuguesa por outro de Língua Portuguesa. Faremos a seguinte pergunta aos alunos: As arrumações geraram uma nova configuração de livros? A resposta deve ser não, pois os alunos devem perceber que a permutação entre livros iguais não muda a configuração na arrumação, ou seja, teremos configurações repetidas. Para que possam entender como eliminar essas repetições, serão realizadas as seguintes perguntas:

Primeira pergunta: Sabendo que há 3 livros iguais de Matemática e eles irão ocupar 3 lugares distintos na arrumação. De quantos maneiras diferentes podemos escolher cada um desses livros? A resposta esperada deve ser 3, 2 e 1 maneiras.

Segunda pergunta: Sabendo que há 2 livros de Língua Portuguesa e irão ocupar 2 lugares na arrumação. De quantas maneiras podemos escolher cada um desses livro? A resposta deve ser 2 e 1 maneiras e automaticamente os alunos saberão que, para a escolha do livro de Ciências existe apenas 1 maneira. Assim devem aplicar o princípio multiplicativo, logo: $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 = 12$, ou seja, tem-se 12 agrupamentos repetidos.

Concluída essa etapa, explica-se aos alunos que cada agrupamento diferente se repete 12 vezes, por isso, o total resultou em 720 agrupamentos, quando se considerou no cálculo que todos os livros fossem diferentes. Agora pergunta-se aos alunos, o que devemos fazer para eliminarmos as repetições e encontrarmos somente agrupamentos diferentes? Espera-se que ainda alguns alunos digam, que basta apenas subtrair 12 de 720, mas que outros respondam que é preciso dividir 720 por 12, pois já entenderam que é apenas um agrupamento que se repete 12 vezes. Então uma certa quantidade de agrupamentos vezes 12 é igual a 720, assim entenderam que para obter a resposta basta usar a operação inversa da multiplicação, ou seja, dividir 720 por 12, logo tem-se:

$$720 \div 12 = 60.$$

Portanto, esses livros podem ser arrumados de 60 maneiras diferentes.

Esse problema foi proposto para que os alunos tivessem uma noção de ***Arranjos com repetição,*** sendo que é necessário nesse tipo de arranjo aplicar o princípio multiplicativo duas vezes e dividir o número total de permutações pelo número de permutações repetidas, assim eliminando tais repetições para obter o número de permutações distintas.

3.6. O problema dos bilhetes da mega sena

● A Mega sena é composta por 60 números (dezenas). Para fazer um jogo um apostador deve marcar 6 dezenas, sendo que atualmente cada jogo custa R$ 4,50. Quantos jogos são possíveis fazer? Quanto um apostador gastaria se ele tivesse condições de apostar em todos os jogos possíveis?

Para resolver esse problema cada aluno deve estar de posse de um cartão da Mega sena que foi solicitado pelo professor na aula anterior e deve ser feita a seguinte pergunta: Quantas possibilidades temos para escolher uma dezena no cartão que temos em mãos? Resposta dos alunos deve ser 60 possibilidades, pois o cartão tem 60 dezenas disponíveis. Pede-se então para os alunos marcarem em seu cartão uma dezena qualquer. Agora partiremos para próxima pergunta: Quantas possibilidades temos para escolher a segunda dezena no cartão? Resposta deve ser 59, pois só havia 59 dezenas disponíveis, com isso pede-se para os alunos marcarem uma outra dezena qualquer no cartão. Daí em diante os alunos perceberiam que nas outras etapas sempre haveria diminuição de uma possibilidade, ou seja, as próximas respostas seriam 58, 57, 56 e 55. Logo, os alunos devem aplicar o princípio multiplicativo para o obter o total de combinações, então:

$$T_1 = 60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55 = 36.045.979.200.$$

Após esta conclusão, deve ser feita as seguintes perguntas para os alunos: A ordem das dezenas escolhidas importa para se fazer um jogo? A resposta deve ser não. Já que a ordem das dezenas não importa. Se permutarmos 6 dezenas quantos jogos podem ser feitos? A resposta deve ser apenas 1 jogo, assim os alunos devem concluir que há repetições na contagem de T_1 e que tais repetições devem ser eliminadas.

Agora deve-se determinar o número de vezes que cada jogo se repete, fazendo a seguinte pergunta aos alunos: De quantas maneiras podemos permutar as 6 dezenas escolhidas para formar um jogo? Com experiência adquirida nas aplicações anteriores espera-se que os alunos respondam 6, 5, 4, 3, 2 e 1 maneiras e em seguida apliquem o princípio multiplicativo para obter o resultado, daí:

$$T_2 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$$

Com os dois resultados obtidos é esperado que os alunos façam a divisão de T_1 por T_2 para eliminar as repetições e obter a quantidade exata de jogos que podem ser feitos, isto é:

$$T = \frac{36.045.979.200}{720} = 50.063.860.$$

Agora, é esperado que alunos respondam a segunda pergunta, fazendo a multiplicação do número total de jogos pelo valor de cada jogo para obterem o total gasto, ou seja:

$$50.063.860 \times 4{,}5 = 225.287.370.$$

Portanto, são possíveis fazer 50.063.860 jogos gastando um total de R$ 225.287.370,00.

Esse problema foi proposto para que os alunos tivessem uma noção de ***Combinações simples*** aplicando o princípio multiplicativo.

3.7. O problema da pintura de quatro pedaços de papel

● De quantas maneiras podemos pintar 4 pedaços de papel de mesmo tamanho e formato, sendo cada pedaço com uma única cor, tendo à disposição 7 cores?

Para resolver esse problema a turma será dividida em quatro grupos. Para cada grupo de alunos será distribuído uma folha de papel A4 que deve ser dobrada ao meio tanto na vertical quanto na horizontal, ou seja, dividida em quatro partes iguais e 7 lápis de cores diferentes, sendo que estas cores serão as mesmas para os grupos. Será pedido para cada grupo sem o conhecimento dos outros o seguinte:

1º grupo: Pintem os quatro pedaços de papel com cores diferentes;

2º grupo: Pintem dois pedaços com a mesma cor;

3º grupo: Pintem três pedaços com a mesma cor;

4º grupo: Pintem os quatro pedaços com a mesma cor.

Finalizada a etapa de pintura será pedido para os alunos mostrarem os pedaços de papeis que foram pintados e serão feitas as seguintes perguntas aos alunos: A ordem em que os papéis foram pintados importa? Podemos usar uma cor mais de uma vez? Espera-se que a primeira resposta seja não, e a segunda, sim. Como a ordem não importa e podemos repetir as cores, então estamos diante de um problema de combinação com repetição. Agora vamos equacionar esse problema, onde $x_1,\ x_2, x_{3,}, x_4, x_5, x_6\ e\ x_7$ representam o número de vezes, que as respectivas cores 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 serão usadas, assim temos

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4.$$

Essa equação nos diz que a soma das cores deve ser igual a 4, já que temos 4 pedaços de papel. Vamos substituir o número de vezes que cada cor é usada por um ■, assim podemos ter situações como:

■ + ■ + ■ + ■ + + + as cores 1, 2, 3 e 4 foram usadas 1 vez cada e as demais cores não foram usadas.

■■ + +■ + ■ + + + a cor 1 foi usada 2 vezes, as cores 3 e 4, 1 vez cada e as demais cores não foram usadas.

+ + + + ■■■ + ■ + a cor 5 foi usada 3 vezes, a cor 6, 1 vez e as demais cores não foram usadas.

+ + + + + + ■■■■ a cor 7 foi usada 4 vezes e as demais cores não foram usadas.

Observe que em todas as situações mostradas temos 4■ e 6 +, ou seja, temos um total de 10 elementos que apenas permutam entre si ou podemos dizer que esses 10 elementos combinam 4 a 4 ou 6 a 6. Vamos utilizar as combinações com os 4 quadradinhos, mas se fizermos a combinação com os 6 sinais de + o resultado será o mesmo, deixamos para o leitor confirmara tal afirmação. Sendo assim serão feitas as seguintes perguntas aos alunos:

Primeira pergunta: Como faremos escolhas de 4 elementos, tendo à disposição 10, de quantas maneiras essas escolhas podem ser feitas? Espera-se que a resposta seja 10, 9, 8 e 7 maneiras e seguida apliquem o princípio multiplicativo e obtenham,

$$T_1 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040.$$

Segunda pergunta: Como no resultado acima temos agrupamentos repetidos, então devemos descobrir quantas vezes cada agrupamento se repete, cada um deles é formado por 4 elementos. De quantas maneiras os escolhidos podem ocupar um lugar no agrupamento? Espera-se que a resposta seja 4, 3, 2 e 1 maneiras e seguida apliquem o princípio multiplicativo e obtenham,

$$T_2 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Agora é esperado dos alunos que dividam T_1 por T_2 para eliminar as repetições e obterem a resposta correta, ou seja

$$T = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{5040}{24} = 210.$$

Portanto, temos 210 maneiras para fazer combinações com elementos repetidos tendo à disposição 10 elementos tomados 4 a 4 ou 6 a 6. Esse resultado responde à pergunta do nosso problema, ou seja, podemos pintar de 210 maneiras diferentes 4 pedaços de papel de mesmo tamanho e formato, sendo cada pedaço com uma única cor, tendo à disposição 7 cores.

Esse problema foi proposto para que os alunos tivessem uma noção de ***Combinações com repetição*** aplicando o princípio multiplicativo.

4 COMPARANDO O USO DAS FÓRMULAS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA COM O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Neste capítulo iremos apresentar duas atividades que seriam realizadas nas turmas citadas no capítulo 4. Essas atividades seriam aplicadas com o objetivo de comparar o desempenho dos alunos na resolução de problemas de Análise combinatória, a primeira utilizando apenas o uso das fórmulas e a segunda utilizando apenas o princípio multiplicativo.

Cada atividade é composta por 7 questões, sendo que as questões da primeira atividade são as mesmas da segunda, claro sem o conhecimento dos alunos. A primeira atividade seria aplicada após o conteúdo ser finalizado e ter sido feita uma revisão nas quatro turmas e a segunda, realizada na semana seguinte, cada uma delas teria duração de 1:00 h.

As questões foram distribuídas da seguinte forma: 1 de Arranjos simples, uma de Arranjos com repetição, 1 de Permutação simples, 1 de Permutação circular, 1 de Permutação com repetição, 1 de Combinação simples e 1 de Combinação com repetição, ou seja, uma questão de cada assunto estudado. Contudo os alunos não teriam essas informações antes da aplicação, somente quando começassem a resolver as atividades. As únicas informações que os alunos teriam, seriam estas: o tempo de duração, a quantidade de questões e o método para resolução que deveriam aplicar.

Após a finalização e correção das atividades seria feito um levantamento do desempenho de cada aluno e qual método teve um melhor aproveitamento. Assim teríamos um comparativo da eficiência desses métodos.

Se tais atividades tivessem sido aplicadas esperava-se que a maioria dos alunos não obtivessem um bom desempenho na primeira atividade (resolução de questões com o uso de fórmulas), provavelmente teríamos algumas questões em branco, outras resolvidas com fórmulas trocadas, visto que não seriam disponibilizadas as fórmulas, e estes teriam que memorizá-las. Sabemos também das dificuldades que muitos alunos da EJA têm em manusear fórmulas, tenho constatado esse fato em mais de 10 anos de trabalho com esse público. Já na segunda atividade (resolução de questões através do princípio multiplicativo) esperava-se que o resultado fosse bem melhor, não só no número de acertos, mas também no número de questões em branco, que possivelmente seria menor, pois nessa atividade os alunos estariam despreocupados em memorizar e manipular as fórmulas, assim sua preocupação maior seria saber quando teriam de aplicar o princípio multiplicativo mais de uma vez para eliminar as repetições.

4.1. Atividade com o uso de fórmula

A atividade a seguir deveria ter sido aplicada para os alunos das quatro turmas da 1ª Etapa-EJA. A resolução das questões dessa atividade só poderia ser realizada com o uso de fórmulas, pois como já falamos seria feito um levantamento do desempenho dos alunos na aplicação desse método. Essa atividade terá um valor simbólico de 10,0 pontos.

Escola Estadual José Marcelino de Oliveira

Professor: Marco Bezerra

Aluno(a):

Turma: **Data: ____/____/____**

1ª Atividade de Matemática (10,0 pts.)

As questões a seguir devem ser resolvidas somente com uso das fórmulas.

1) Quantas centenas pares podemos formar com os algarismos 1, 3, 4, 5, 6, 8 e 9, sem repetição? (1,25 pts.)

2) Quantas senha de quatro algarismos podemos formar com os algarismos 0, 3, 4, 7 e 8? (1,25 pts.)

3) Em um automóvel de 5 lugares viajam 5 pessoas, sendo que apenas duas sabem dirigir, de quantas maneiras essa viagem pode ser feita? (1,5 pts.)

4) Quantos são os anagramas da palavra JESUS? (1,5 pts.)

5) De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se em volta de uma mesa circular para fazer uma refeição, de modo que a mãe fique sempre sentada ao lado direito do pai? (1,5 pts.)

6) Em uma turma onde estão presentes 30 alunos, quantas equipes compostas por 5 membros são possíveis formar? (1,5 pts.)

7) Uma lanchonete dispõe de 5 tipos de sabores de sucos. Maricota vai comprar 2 sucos, de quantas maneiras essa compra pode ser feita? (1,5 pts.)

4.2. Atividade com o uso do princípio multiplicativo

Essa segunda atividade deveria ter sido aplicada para os mesmos alunos que realizaram a primeira atividade. Para essa atividade também seria feito um levantamento do desempenho dos alunos na aplicação desse método. Essa atividade terá um valor simbólico de 10,0 pontos para efeito de comparação com a primeira atividade.

Escola Estadual José Marcelino de Oliveira

Professor: Marco Bezerra

Aluno(a):

Turma: **Data: ____/____/____**

2ª Atividade de Matemática (10,0 pts.)

As questões a seguir devem ser resolvidas somente pelo princípio multiplicativo.

1) Quantas centenas ímpares podemos formar com os algarismos 1, 3, 4, 5, 6, 8 e 9, sem repetição? (1,25 pts.)

2) Quantas números de quatro algarismos podemos formar com os algarismos 0, 3, 4, 7 e 8? (1,25 pts.)

3) Em um automóvel de 5 lugares viajam 5 pessoas, sendo que apenas duas sabem dirigir, de quantas maneiras essa viagem pode ser feita? (1,5 pts.)

4) Quantos são os anagramas da palavra JESUS? (1,5 pts.)

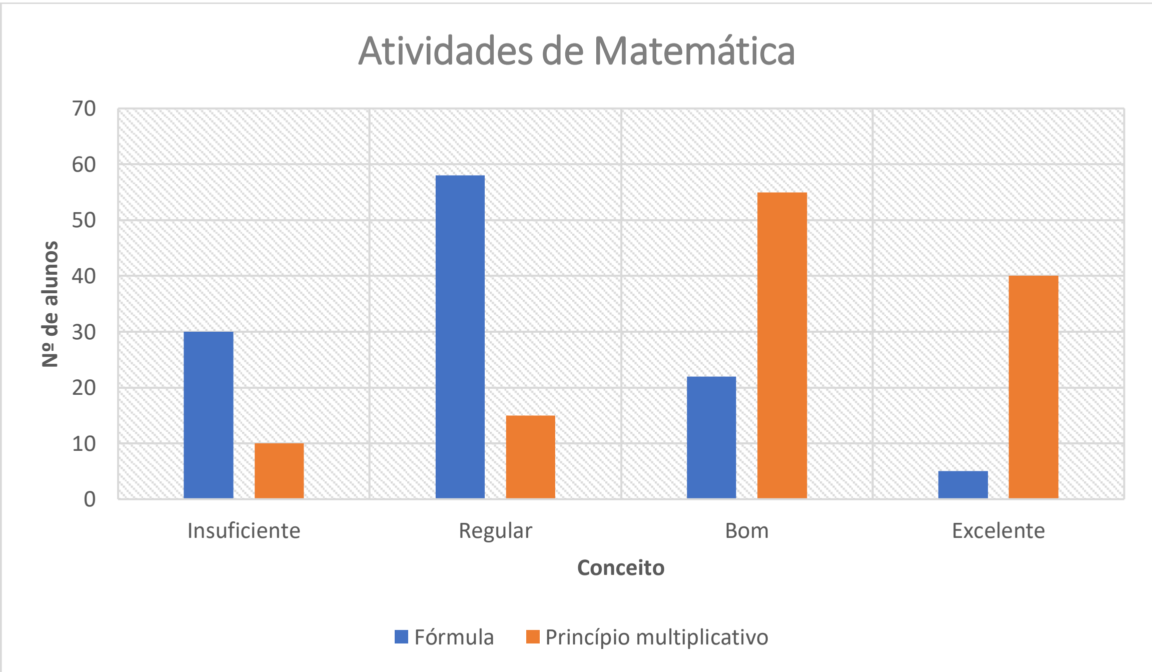
5) De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se em volta de uma mesa circular para fazer uma refeição, de modo que a mãe fique sempre sentada ao lado direito do pai? (1,5 pts.)

6) Em uma turma onde estão presentes 30 alunos, quantas equipes compostas por 5 membros são possíveis formar? (1,5 pts.)

7) Uma lanchonete dispõe de 5 tipos de sabores de sucos. Mariquinha vai comprar 2 sucos, de quantas maneiras essa compra pode ser feita? (1,5 pts.)

4.3. Análise gráfica: Fórmula X Princípio multiplicativo

De posse dos resultados das duas atividades, neste item seria construído um gráfico, onde teríamos uma comparação do desempenho dos alunos em tais atividades, ou seja, teríamos o número de alunos em função de seus respectivos conceitos. Os conceitos seriam definidos conforme as notas da seguinte forma: Insuficiente, de 0 a 4,9; Regular, de 5,0 a 6,9; Bom, de 7,0 a 8,9 e Excelente, de 9,0 a 10,0. A seguir temos um modelo meramente ilustrativo de como seria esse gráfico.



4.4. Considerações finais

Percebemos que durante esses mais de 10 anos trabalhando com turmas da EJA, que o ensino de Análise combinatória somente com aplicação de fórmulas, não traz bons resultados ao aprendizado dos alunos, pois é feito de forma mecânica. Neste sentido, buscamos novas metodologias e estratégias de ensino, isto nos motivou escrever este trabalho, pois através de situações práticas e do uso do princípio multiplicativo podemos contribuir para melhorar o aprendizado deste aluno.

Neste trabalho, estimulamos o uso do princípio multiplicativo, pois desta forma acreditamos que por esse método a resolução da maioria das questões de contagem se torna mais simples. Fazendo um paralelo com o uso das fórmulas, isto se torna mais visível. O princípio multiplicativo também proporcionará ao aluno raciocinar e entender melhor estas questões, pois terá que saber quantas são as etapas de escolha e de que forma ele pode fazer esta escolha em cada etapa.

Acreditamos também que, como introdução, as aplicações práticas para sala de aula são fundamentais para o aprendizado dos alunos, além de tornar a aula mais atrativa. Percebemos isso na única aplicação que foi possível realizar. Apesar da maioria deles errarem a resposta, quando realizamos na prática as combinações de roupas, logo puderam entender perfeitamente o problema e sua solução.

Por mais que não tenha sido possível aplicar todas as atividades em sala de aula. Através da experiência que adquirimos nestes longos anos trabalhando com esta modalidade de ensino, podemos concluir que se tais aplicações e atividades tivessem sido realizadas dentro de sala, teríamos, provavelmente, sem presunção, uma resposta positiva, quanto a aplicação do princípio multiplicativo, pois já temos aplicado e aprimorado esse método há alguns anos ao longo dessa trajetória, e o retorno por parte dos alunos tem sido bastante satisfatório. Infelizmente não tivemos como demonstrar aqui a confirmação destes resultados (já confirmados em sala de aula) de forma empírica, pois o tempo não nos permitiu, visto que estamos em uma pandemia e não sabemos quando irá terminar.

Esperamos que através desse trabalho não só alunos da EJA, mas também os demais alunos do ensino médio regular, aprendam Análise combinatória de forma mais simples, prática e atrativa. Fica aqui o desafio para os professores de Matemática que tiverem acesso a este trabalho para aplicarem com os seus alunos em sala de aula, ratificando ou não que tais propostas contribuem para o aprendizado de ensino-aprendizagem de Análise combinatória.

REFERÊNCIAS

[1] BRAGA, G. M. B. Os professores da EJA face à diversidade etária discente em sala de aula. **Revista Pandora Brasil**, nº 32, 2011.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/***pdf***/>. Acesso em: 16 nov. 2019.

[3] BUCHI, Paulo. **Matemática volume único**. 1.ed. São Paulo: Editora Moderna, 1994.

[4] CONCEIÇÃO, Dérick de Carvalho. **Uma alternativa para o ensino de análise combinatória no ensino médio: Resolução de problemas como ferramenta metodológica de ensino.** 2019. 352l. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

[5] CORDEIRO, Denise. **Juventude nas sombras: escola, trabalho e moradia em territórios de precariedades.** Rio de Janeiro: Lamparina, FAPERJ, 2009.

[6] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contextos & Aplicações**. Volume 2, 1.ed. São Paulo: Editora Ática, 2003.

[7] DE ALMEIDA, Adriana. **Educação de jovens e adultos: aspectos históricos e sociais.** Anais XII CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. PUC – PR, 2015. Disponível em: <https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/22753_10167.pdf >. Acesso em 15 fev. de 2020.

[8] DI PIERRO, M. C.; JOIA, O.; RIBEIRO, V. M. Visões da Educação de Jovens e Adultos no Brasil. **Cadernos CEDES**, nº 55, 2001.

[9] FURTER, Pierre. **Educação e reflexão**. Petrópolis: Vozes, 1981.

[10] HADDAD, Sérgio. **Relatório preliminar de pesquisa: a situação da educação de jovens e adultos no Brasil**. São Paulo: Mimeo, 2006.

[11] LIMA, Elon Lages et al. **Temas e Problemas**. 3.ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

[12] LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio.** Volume 2, 6.ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[13] MAGALHÃES JÚNIOR, José Maria. **Uma discussão intuitiva sobre o princípio multiplicativo da Análise combinatória**. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade

Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.

[14] MELO, Rayane de Jesus Santos. **Metodologias e estratégias para o ensino de matemática na eja**: **um olhar para o conflito intergeracional**. Anais I CONAPESC... Campina Grande: Realize Editora, 2016. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/18088>. Acesso em: 15 fev. de 2020.

[15] SILVA, Nilce da. "**Ser adulto": alguns elementos para a discussão deste conceito e para a 36ª Reunião Nacional da ANPEd**. In: Millenium – Revista do ISPV. Educação, Ciência e Tecnologia, nº 29, jun./2004. p. 281-290.

[16] SILVA, A. M. **A suplência no nível médio de ensino pelo desempenho acadêmico em cursos de graduação: um estudo de trajetórias escolares**. 2007. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

[17] SILVA, J A. **Um estudo sobre as especificidades dos/as educandos/as nas propostas pedagógicas de educação de jovens e adultos – EJA: tudo junto e misturado!** 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2010.

[18] SOUSA, Filomena Carvalho. **O que é "ser adulto": as práticas e representações sociais sobre o que é "ser adulto" na sociedade portuguesa**. In: Revista Eletrônica Acolhendo a Alfabetização nos Países de Língua Portuguesa. São Paulo: USP, vol. 1, nº 2, ago./2007, p. 55-69.

[19] STURM, Wilton. **As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 1999, p.3.