UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MESTRADO PROFISSIONAL

ILDÁLIO AGUIAR DE SOUZA SANTOS

O ENSINO E APLICAÇÕES DE MATRIZES

CAMPO GRANDE - MS

AGOSTO DE 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

ILDÁLIO AGUIAR DE SOUZA SANTOS

O ENSINO E APLICAÇÕES DE MATRIZES

ORIENTADORA: Prof.ª Dra. RÚBIA MARA DE OLIVEIRA SANTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática - INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

CAMPO GRANDE - MS
AGOSTO DE 2013

O ENSINO E APLICAÇÕES DE MATRIZES

ILDÁLIO AGUIAR DE SOUZA SANTOS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Profa. Dra. Rúbia Mara de Oliveira Santos - UFMS
Prof. Dr. Roberto Quirino do Nascimento - UFPB
Prof. Dr. Jair da Silva - UFMS

CAMPO GRANDE - MS

AGOSTO DE 2013

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me concedido força e sabedoria para lidar com os problemas nesta jornada, e por tornar esta vitória uma realidade.

Agradeço a minha esposa Claudia Steffany e ao meu filho Renan, por sempre estarem ao meu lado em todos os momentos me apoiando e brigando quando necessário e por terem compreendido a minha ausência durante este período.

Gostaria de agradecer aos meus pais por sempre me apoiarem em qualquer decisão e nunca terem deixado de confiar em mim.

Agradeço a Deus pela minha orientadora Prof.ª Dra. Rubia Mara de Oliveira Santos pela paciência quanto a minha não habilidade com a escrita, pelos ensinamentos, por toda força que me deu e pelos conselhos dados que foram muito bem utilizados.

Resumo

Este trabalho fala sobre as matrizes, sua história, seu ensino, e suas aplicações. Quanto ao ensino das matrizes, verificou-se um sistema de aprendizagem totalmente algébrico e com poucos exemplos de aplicações. Neste sentido, orientações ao ensino foram estabelecidas visando subsidiar o trabalho docente na introdução a matrizes com uma abordagem diferenciada em sala de aula. Para tal, foi apresentado o conteúdo de matrizes por meio de suas definições e propriedades. O trabalho apresenta uma introdução à Otimização Linear e estabelece seus principais conceitos. O Problema de Empacotamento de DAG's (Directed Acyclic Graphs) é apresentado, seguido de um estudo de técnicas para sua resolução.

Palavras Chaves: Matrizes - Ensino - Aplicações

Abstract

This paper is about matrices, their history, teaching, and applications. Concerning to Matrices teaching, it was verified a totally algebraic learning system and with a few examples of applications. In this sense, orientations about teaching were set up aiming subsidize instructor work on matrices introduction as a differentiated approach at classroom. For this, it was presented the matrices subject by means of definitions and properties. This work presents an introduction to Linear Optimization and set up their mainly concepts. DAG's Packing Problems (Directed Acyclic Graphs) is presented, following an study of techniques for its resolution.

Key Words: Matrices - Teaching - Applications.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

A idéia de matriz começou a aparecer no tempo da china antiga e sua origem está intimamenente ligada ao estudo de sistemas lineares.

O surgimento das matrizes se deu a partir da necessidade de se desenvolver métodos para a resolução de sistemas lineares, os quais começaram a serem representados por tabelas numéricas formadas pelos coeficientes das equações que compunham esses sistemas, essas tabelas deram origem ao que chamamos hoje de matrizes.

Hoje em dia as matrizes são muito utilizadas para representar dados, permitindo uma visualização prática e com maior clareza das informações expostas, além de facilitar a resolução de alguns cálculos complexos, o que podemos considerar ser sua importância em várias àreas, como na matemática, engenharia, física, administração e computação. Elas também permitem o acúmulo de informações em um pequeno espaço, geralmente estão presentes em jornais, revistas, livros e internet.

1.1 História das matrizes

Os primeiros indícios de matrizes surgiram no século II a.c., apesar de existir alguns indícios no século VI a.c., porém foi no final do século XVII que as ideias foram estudadas e desenvolvidas até os dias atuais.

Os babilônios estudaram problemas e buscaram técnicas para a resolução de um sistema linear de duas variáveis e duas equações por volta de 300 a.c. e preservaram esses problemas em tabletas de argila.

Por volta de 200 a.c. e 100 a.c., os chineses conseguiram chegar bem mais perto das matrizes. O texto *Nove Capítulos da Arte Matemática* que foi escrito durante a dinastia Han contém o primeiro exemplo conhecido de métodos de matriz.

Em 1545, Girolano Cardano encontra uma regra para a solução de um sistema de duas equações lineares, a regra de Cramer, para a resolução de um sistema linear 2x2 e desde então muitos resultados começaram a surgir.

No Japão e na europa a ideia de um determinante foi quase simultânea, em 1683 o matemático Seki kowa (1637-1708) publicou suas ideias e escreveu *Método de resolver os problemas dissimulados que contém métodos matriciais* com tabelas da mesma forma com que foram costruidos os métodos chineses.

E logo depois Gottfried Leibniz (1646-1716), em 1683 que gerou a primeira aparição na Europa em uma carta enviada ao marquês de L'hôpital, porém dava o nome de *resultante* .

Durante o século XVIII, diversos matemáticos desenvolveram estudos relacionados aos métodos matriciais e sobre os determinantes, como por exemplo, em 1730 Mclaurin publicou um resultado provando a regra de cramer para calcular determinantes de matrizes 2x2 e 3x3. Em 1764 com Bézout surgiram os determinantes de Vandermonde, e Laplace em 1772 que discutiu a solução de um sistema de equações lineares usando determinante.

Já no século XIX Carl Friedrich Gauss utilizou pela primeira vez o termo *determinante* no seu trabalho *Disquisitiones Arithmeticae*, em 1801 e no mesmo trabalho descreve a multiplicação de matrizes, que para ele era como uma composição, pois não tinha alcançado o conceito de matriz algébrica. No mesmo século Augustin Louis Cauchy prova o teorema da multiplicação de determinantes e da novos resultados sobre o assunto, vale ressaltar que foi ele quem introduziu a ideia de matrizes semelhantes e mostrou que elas possuem o mesmo polinômio caracteristico.

A partir de Cauchy outros matemáticos como Jacobi, Arthur Cayley, James J. Sylvester desenvolveram e sistematizaram definições e propriedades que são até hoje utilizadas, como por exemplo: Sylvester foi o primeiro a usar o termo *matriz* e a definiu como um arranjo retangular de termos; Cayley apresentou a inversa de uma matriz.

1.2 Objetivo do Trabalho

Este trabalho tem por objetivo analisar o conteúdo de matrizes no Ensino Médio, sua abordagem, seu ensino e suas aplicações. O trabalho encontra-se dividido da seguinte maneira:

Capítulo 2: Ensino de Matrizes

Neste capítulo tem-se uma conjuntura do ensino das matrizes no Ensino Médio. Apresentam-se os Parâmetros e Diretrizes Curriculares Nacionais para o ensino médio, além de análises de livros didáticos do Ensino Médio no que tange o ensino de matrizes. Encontram-se também orientações que podem ser utilizadas em sala de aula como uma proposta didática para o Ensino das matrizes.

Capítulo 3: Fundamentação teórica das matrizes

Neste capítulo é apresentada uma fundamentação teórica às matrizes, com suas definições, teoremas e propriedades, seguidos de suas eventuais demonstrações.

Capítulo 4: Aplicações de Matriz em Otimização Linear

Neste capítulo é apresentada uma introdução à Otimização Linear e o estudo de seus principais conceitos. Em seguida é explicitado o Método Simplex com sua fundamentação teórica, por fim é apresentado o Problema de Empacotamento de DAGs (PED) e são aplicadas técnicas para a solução do problema.

Capítulo 5: As conclusões

Neste capítulo se encontram as conclusões deste trabalho e as indicações para desenvolvimento de trabalhos futuros.

CAPÍTULO

2

ENSINO DAS MATRIZES

A educação no ensino médio tem o compromisso de desenvolver os processos formativos do educando seja na vida familiar, no mundo do trabalho, práticas sociais, dentre outros, segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB (9394/96) a qual determina os marcos legais para o ensino médio. Na LDB tem-se como maiores destaques para o ensino médio suas finalidades; a organização curricular; e algumas diretrizes.

Quanto a suas finalidades, o ensino médio tem que permitir ao educando a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos provenientes do ensino fundamental; a preparação para o mundo do trabalho e o exercício da cidadania, o desenvolvimento do pensamento crítico e sua formação ética. O que deve repercurtir no crescimento do educando como pessoa humana e o desenvolvimento de competências para continuar seu aprendizado.

No que diz respeito a organização curricular tem-se uma proposta nacional que leva em consideração as diferentes realidades do brasil. O que deve ajudar o educando a tornar-se capaz de se adaptar as mais diferentes propostas pedagógicas na nossa unidade federativa sem perder o seu foco, ou seja, sem deixar que as competências fundamentais exigidas nos alunos do ensino médio deixem de ser alcançadas, além de permitir uma grande margem de flexibilidade no que diz respeito aos conteúdos e métodos de ensino que melhor potencializem esses resultados.

Olhando para as diretrizes, temos as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) que propõem uma formação segundo os princípios da contextualização e da interdisciplinaridade além de indicar as competências e habilidades que se espera serem adquiridas pelos alunos fazendo com que a escola não se limite apenas ao ensino disciplinar, mas sim que a escola desenvolva um trabalho que contribua para o desenvolvimento dessas competências e habilidades.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM (Brasil, 2002) o ensino da matemática deverá proporcionar aos alunos habilidades relacionadas a representação, compreensão, comunicação, investigação, contextualização sociocultural. Visando estes parâmetros apresentados pelos DCNEM (2000) e PCNEM (2002) a matemática de hoje tem um aprendizado que se estende além do conteúdo fazendo com que o individuo a associe com o seu cotidiano, não querendo formar matemáticos e muito menos estudantes que tenham em sua formação apenas competências ligadas a este componente curricular.

O professor de matemática no que diz respeito a forma de trabalhar os conteúdos, deve procurar o desenvolvimento do pensamento matemático realizado pelo aluno por meio de processos que gerem uma aprendizagem valorizando sempre o raciocínio matemático, raciocínio esse que em uma sala de aula deve ser aproveitado ao máximo pelo professor, que o pode gerar de várias formas tornando estes processos de ensino valiosos e muito bem aproveitados.

Alguns exemplos de processos que podem favorecer a compreensão dos alunos são: perguntas durantes as aulas, situações problemas que permitam aos alunos formular questionamentos, reflexões, a elaboração de hipóteses e assim permitindo-os retirar conclusões; apresentação exemplos e contra-exemplos; situações que levem os alunos a abstrair regularidades, criação de modelos e generalizações; apresentação de propriedades matemáticas seguidas de explicação; apresentação de fórmula seguidas de sua respectiva dedução.

Diante disso espera-se que o professor de matemática ao administrar os conteúdos durante o ensino médio possibilite ao seu aluno utilizar conteúdos da matemática para: resolver problemas práticos na sua vida, que a interprete a matemática como uma ciência que possui características próprias, e que se organiza por meio de teoremas e demonstrações. O aluno deve percebê-la como um conhecimento social e historicamente construído pelo homem e notar a sua relevância no desenvolvimento cientifico e tecnológico.

Os conteúdos básicos do ensino médio na matemática se dividem em quatro blocos: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade. No trabalho com esses quatro blocos deve-se sempre buscar a articulação entre eles, apesar da divisão.

Nosso objetivo no momento é olhar para o conteúdo específico de ”matrizes” que no caso encontra-se dentro do bloco de *Números e Operações* , a qual é geralmente ensinada no segundo ano do ensino médio. Temos como objetivo realizar uma análise crítica sobre o processo de ensino e aprendizagem de matrizes, para tais informações será utilizado o livro didático.

Atualmente, o livro didático é a principal ferramenta utilizada no Brasil, já que sua distribuição acontece de forma gratuita em todo o âmbito nacional nas escolas públicas, é visto como um instrumento didático-pedagógico muito forte para o professor, pois o auxilia no trabalho educativo contribuindo para o seu planejamento e execução das aulas, servindo também como um texto de referência de saberes profissionais pertinentes ao professor.

Já para o aluno o livro didático tem por objetivo consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos. Auxiliando o aluno para desenvolver habilidades e ajuda-lo na sua formação social e cultural.

Na seção 2.1 encontram-se três analises de livros didáticos do ensino médio referente apenas ao processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de matrizes logo após será proposta uma nova forma de abordagem para o ensino de matrizes no ensino médio.

2.1 Análise de livro Didádico I

O livro didático ainda hoje é o único recurso mais utilizado pelos professores, além de ser um componente da estrutura escolar. Porém, para o livro didático ser utilizado o professor e/ou pesquisador deve analisar o livro, e esta análise deve ser feita tanto metodológica como conceitual.

Analisar um livro didático não é algo tão fácil e rápido, os professores devem ter em mente o que querem observar, ou seja, qual o objetivo desta análise. A análise dos livros didáticos utilizados nas escolas pode ser um importante indicativo de como está o ensino nas escolas, e como pode está sendo trabalhados os conteúdos.

Neste trabalho a análise do livro didático foi feita com intuito de verificar os processos metodológicos utilizados por autores ao trabalharem com matrizes, tendo em vista uma possível atividade didática com os alunos para que os mesmos possam ter uma melhor compreensão do conteúdo trabalhado.

Nesta seção serão feitas análises referente ao processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de matrizes dos seguintes livros:

- Livro 1: Matemática de Paiva, M.(2010)
- Livro 2: Matemática Ciência e Aplicações (2010) de I. Iezzi, Gelson. II. Dolce, Osvaldo. III. Degenszajn, David. IV. Périgo, Roberto. V. Almeida, Nilze de.

- Livro 3: Matemática: Contexto e Aplicações (2010) de Dante, Luiz Roberto.

2.1.1 Livro 1

O livro é objetivo no que diz respeito ao ensino de matrizes. Sua abordagem começa por meio de tabelas numéricas retangulares e a partir disto faz uma analogia com as matrizes. Em seguida mostra: sua definição, suas formas de representações e evidencia as matrizes especiais. A cada tópico faz uso de exemplos e um traz um exercício resolvido ao final destes tópicos e logo após exercícios, o livro segue este procedimento ao longo do texto.

O conteúdo é introduzido por explanação de uma forma bem pontual, o autor se preocupa muito com a linguagem presente no texto e deixa-o bem refinado quanto à linguagem matemática que por sua vez é bem rigorosa. O texto possui clareza, tornando de fácil interpretação para o aluno. No todo não possui erros conceituais e também não faz indução ao erro.

Os conteúdos contidos no livro sãoo bem hierarquizados e muito bem evidenciados pelos recursos gráficos, o livro possui algumas leituras complementares, principalmente sobre fatos históricos relacionados ao conteúdo estudado. O livro tem carências quanto a utilização de outros recursos didáticos, como por exemplo, aplicações com tecnologias, não fazendo muitas referências ao conteúdo de matrizes.

Na explicação, a quantidade de exemplos utilizados pelo autor é mínima, apesar de estarem em sintonia com o seu respectivo tópico. A cada tópico o autor faz o uso de exercícios resolvidos, tornando mais visível a utilidade do processo evidenciado no tópico, geralmente o livro traz apenas um exercício resolvido para exemplificar.

Os exercícios são voltados para a fixação das definições e propriedades ressaltadas durante os tópicos, a maioria destes exercícios não é contextualizado no que diz respeito às outras áreas e com o cotidiano, além de não privilegiarem o uso da imaginação e da criatividade dos alunos.

Apesar de o texto ter uma boa articulação entre as diferentes representações matemáticas como, por exemplo, a língua materna, a linguagem simbólica, os desenhos, as tabelas e etc. O autor não permite ao aluno estabelecer as relações sobre o conteúdo e efetuar generalizações, sempre mostra as propriedades de formas expositivas e sem a participação do aluno.

2.1.2 Livro 2

O autor inicia sua abordagem com um breve contexto histórico sobre a origem das matrizes evidenciando sua ligação com os sistemas de primeiro grau, logo depois apresenta uma tabela e comenta a praticidade, simplicidade e utilidade de uma tabela para a representação de dados, usando esta tabela o autor começa a expor o que são matrizes e suas representações, logo mostra os tipos de matrizes especiais que existem e a relação de igualdade e então apresenta as operações com matrizes, porém as propriedades das operações não são evidenciadas durante seus respectivos tópicos.

A cada definição ou exposição de conceitos tem-se o uso constante de exemplos e exercícios resolvidos, por fim propõe uma seção de exercícios para validar a aprendizagem do aluno e um roteiro de trabalho, que possui questões a serem trabalhadas em grupo.

Quanto a linguagem utilizada pelo autor, nota-se uma preocupação com relação a leitura por parte do aluno, na sua grande maioria usa-se a linguagem materna para mostrar as definições, conceitos e procedimentos deixando de dar ênfase na linguagem matemática simbólica, que por sua vez é exposta apenas nas resoluções de exemplos e exercícios resolvidos.

O texto em geral é bem objetivo e claro, não possui erros conceituais e também não faz menção ao erro, mas o autor ao definir algumas características aproveita-se de palavras cujo significado matemático não é explicitado no texto podendo gerar no aluno a não compreensão da definição.

A quantidade de exemplos utilizada pelo autor para cada definição ou conceitos é mínima, fato que também ocorre nos exercícios resolvidos, em ambos os casos tem-se um aluno limitado, pois o autor não proporciona a interação do aluno durante sua sistematização.

Nos exercícios propostos a maioria é aplicação do que é exposto, mas encontra-se algumas questões que são contextualizadas, o autor faz uso dos exercícios para fazer com que o aluno perceba algumas propriedades das operações e não as colocam em evidência deixando para o professor efetuar com os alunos estas conjecturas em relação às propriedades fato que pode passar despercebido dependendo do professor em questão.

2.1.3 Livro 3

O autor inicia com um texto que mostra uma grande utilidade de matriz no dia a dia, feito isso utiliza uma tabela e a partir dela mostra o que é matriz e a defini, tudo de uma forma bem direta, aproveitando os exemplos da definição para identificar a ordem das matrizes.

Quanto a representação genérica de uma matriz, é introduzida por meio de um exemplo seguida da definição convencional logo após propõe alguns exercícios. De maneira bem objetiva expõe os de tipos de matrizes especiais e fala sobre a igualdade de matrizes de uma forma teórica seguindo então para exercícios.

Ao trabalhar com igualdade de matrizes, o autor inicia com três exemplos e logo após introduz alguns exercícios referentes aos exemplos dados. Em seguida traz algumas operações com matrizes, na operação de adição cita duas matrizes e mostra como funciona o algoritmo seguido de sua definição, não comenta as propriedades, as cita como um trabalho a ser desenvolvido, porém não dando muita importância.

Na operação de multiplicação o autor cria um tópico para o algoritmo, porém tenta explicitar o algoritmo de uma maneira mais compreensível, sem muitas explicações o autor volta ao algoritmo e passa o processo usual, neste caso o autor deixa a critério do professor tentar uma abordagem diferente para introduzir a multiplicação de matrizes, pois o autor deixa claro que este não é um tópico de fácil compreensão.

Este autor aponta um diferencial em seu livro, pois, diferentemente dos outros livros analisados, percebe-se que neste o autor traz um tópico que trata de equações matriciais e outro sobre aplicações de matrizes, mas se retém apenas a computação gráfica, mostrando possíveis casos de aplicações diretas como, rotação, escala, translação, dentre outros.

Quanto ao aspecto gráfico o livro é muito estruturado e bem colorido. A linguagem utilizada pelo autor é clara e objetiva não deixando margem a duvidas ou indução para o aluno ao erro, também não foram constatados erros matemáticos durante a análise.

Observou-se que o autor tem a preocupação de articular conhecimentos novos com conhecimentos prévios dos alunos, um fato ruim é que grande parte das atividades são seguidas por teoria gerando um desinteresse ou podendo deixar o conteúdo difícil, nota-se uma ausência quanto ao uso de exercícios resolvidos e a quantidade de exemplos no texto é muito baixa. Assim como também existe a necessidade de o professor estar atento às termologias utilizadas, pois o autor trabalha neste livro com muito o rigor matemático, o que exige do professor uma análise visando priorizar as termologias que considerar indispensáveis a formação dos alunos.

2.2 Análise de livro didático II

Nesta seção será feita uma análise dos livros didáticos buscando verificar se os mesmos contemplam alguns dos objetivos propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, os quais estão bem definidos nas competências e habilidades que um aluno deve obter com o Ensino Médio.

O conjunto de Competências e habilidades deve ser produzido no trabalho com a Matemática em comum com as outras áreas de conhecimento durante esta etapa de ensino. Este conjunto traz como objetivo da matemática no ensino médio a investigação, expressão e raciocínio, como também tornar possível à elaboração e compreensão de idéias matemáticas.

A metodologia do professor e/ou do livro é importante, pois se as mesmas estiverem restritas as definições, exemplos e exercícios de fixação, pouco se garante de que o aluno tenha compreendido o significado das ideias pertinentes ao ensino deste conteúdo. Visando sanar esta dificuldade no ensino da matemática devemos contemplar práticas que ajude a diminuir as dificuldades na aprendizagem, práticas que ajudem o aluno a perceber as ideias e as articulações entre os conteúdos propostos, e que antes eram apresentados sem articulações.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN o ensino da matemática, como um todo é um processo lento e árduo, onde se deve trabalhar a resolução de problemas proporcionando aos alunos uma diversidade de situações. Situações onde se busca fazer com que os alunos criem conjecturas, percebam as regularidades existentes, compreendam a generalização de padrões, compreendam as estruturas dos algoritmos, aprimorem as habilidades de organização e representação dos dados, tenham a capacidade de argumentação, saibam lidar com os elementos fundamentais na formalização do conhecimento matemático seja para efetuar uma leitura ou para interpretar uma situação em sala de aula ou na vida real.

Levando-se em conta todas estas considerações sobre a importância da matemática no Ensino Médio, os PCN estabelecem alguns objetivos para que o ensino da matemática possa ter significado para o aluno e que resulte em uma aprendizagem real, são eles:

- Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;

- Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- Expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- Promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Deve-se dar uma grande importâcia ao desenvolvimento de valores, habilidades e atitudes desses alunos, pois são os objetivos centrais da educação e podem possibilitar ou não a aprendizagem do aluno.

Ao se olhar para o ensino e aprendizagem do conteúdo de matrizes, também se tem alguns objetivos no que diz respeito às competências e as habilidades a serem adquiridas pelos alunos. Pode-se destacadar as seguintes competências e habilidades:

- Construir, classificar e operar matrizes.
- Selecionar conjunto de informações sobre fatos reais ou imaginários na resolução de situações problemas;
- Ler e interpretar matematicamente textos que envolvam matrizes aplicando estratégias na resolução de situações-problemas;
- Resolver problemas e equações que envolvam matrizes.

- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica e vice-versa;

Diante destes objetivos, propõe a análise dos livros didáticos aplicando-lhes uma nota de 0 ou 1 (0 será quando não contempla o critério e 1 quando o critério é contemplado). Segundo os critérios citados a seguir, os quais são retirados dos objetivos propostos pelos PCN. Os **critérios** observados para a análise serão:

1. O livro proporciona situações favoráveis para a construção de matrizes.

2. O livro apresenta situações problemas nas quais seja necessário compreender as operações com matrizes para resolvê-las.

3. O livro apresenta situações problemas nas quais são necessárias a leitura e a interpretação de textos que envolvem matrizes

4. O livro apresenta problemas nos quais é necessária a mudança da linguagem corrente para a linguagem simbólica, ou vice-versa, para resolvê-los, possibilitando a elaboração de estratégias para resolução do mesmo.

Para tal análise foram utilizados os seguintes livros:

- Livro 1: Matemática de Paiva, M.(2010).

- Livro 2: Matemática Ciência e Aplicações (2010) de I. Iezzi, Gelson. II. Dolce, Osvaldo. III. Degenszajn, David. IV. Périgo, Roberto. V. Almeida, Nilze de.

- Livro 3: Matemática: Contexto e Aplicações (2010) de Dante, Luiz Roberto.

- Livro 4: Matemática: Ensino Médio (2010) de I. Diniz, Maria Ignez de Souza Vieira. II. Smole, Kátia Stocco.

- Livro 5: Matemática: Ciência, Linuagem e Tecnologia (2010) de Ribeiro, Jackson.

A tabela a seguir mostra o resultados obtidos após a análise dos livros didáticos seguindo os critérios para análise definidos anteriormente.

Análise dos Livros				
	Critério 1	**Critério 2**	**Critério 3**	**Critério 4**
Livro 1	1	1	1	1
Livro 2	1	1	1	0
Livro 3	1	1	1	0
Livro 4	1	1	1	0
Livro 5	1	1	1	1

Está tabela construida é um exemplo de uma matriz do tipo 5×4 onde as colunas são os critérios analizados e as linhas fazem referência a um dos livros que foram análizados.

2.3 Situação didática

Nesta seção serão apresentadas propostas didáticas para serem utilizadas em sala de aula, visando fornecer ao professor do Ensino Médio um caminho para o Ensino de Matrizes. Busca-se a todo o momento tornar o aluno um ser ativo, fato que com o qual torna a aprendizagem para o aluno mais signicativa e prazerosa.

Matematicamente a definição de matriz é: sejam m e n dois números inteiros maiores ou iguais a 1, denomina-se matriz $m \times n$ (lê-se m por n) uma tabela retangular formada por m.n números reais, dispostos em m linhas e n colunas. Em outras palavras temos um agrupamento ordenado de números que se apresentam dispostos em linha e colunas numa tabela retangular, fato que justifica a grande maioria dos livros do ensino médio, inclusive os presentes neste trabalho, iniciar o assunto de matriz com alguma situação problema ou análise de dados que envolva tabelas, para somente então começar com a definição do que é uma matriz.

A ideia de matriz pode ser iniciada com situações do cotidiano do aluno, situações estas que tenham necessidade de representação e que contenham muitos dados. Estas situações podem ser encontradas em artigo de jornal, revista. Também podem ser dados de empresa, de uma escola, entre outros. Neste sentido, para iniciarmos a discussão do estudo de matriz neste trabalho, será utilizado uma situação problema comum do dia a dia de uma empresa.

Exemplo: Buscando saber como andava o movimento de sua padaria, o senhor José em um final de semana, decidiu registrar o número de fregueses que fizeram compras e também os separou por períodos (manhã, tarde ou noite). Obtendo os seguintes resultados:

Número de Fregueses			
	Manhã	**Tarde**	**Noite**
Sábado	57	110	35
Domingo	77	81	24

Com a tabela criada o senhor José pode obter vários tipos de dados, como por exemplo:

- quantos fregueses foram atendidos no sábado à noite, basta olhar o número que se encontra na primeira linha e na treceira coluna;
- quantos fregueses foram atendidos no domingo pela manhã, basta olhar o número que se encontra na segunda linha e na primeira coluna;

O professor pode comentar que uma tabela deste tipo, em que os números se encontram dispostos em linhas e colunas, neste caso, duas linhas e três colunas formam uma matriz e que é representada da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 57 & 110 & 35 \\ 77 & 81 & 24 \end{pmatrix}$$

Feito isso, outros itens podem ser observados na representação de uma matriz, como sua nomenclatura e a notação de seus elementos de uma maneira clara e sucinta, já que ainda não foi formalizada a definição de matriz. Para complementar a situação, seria muito bom o professor ressaltar por meio de exemplos todos os tipos de matrizes que existem, porém sem comentar suas peculiaridades. Com isso temos a necessidade de uma sistematização sobre a representação de uma matriz, no que tange esta representação, a matriz geralmente é indicada por uma letra maiúscula e cada um dos seus números são chamados de elementos ou termos de uma matriz, estes elementos ou termos são representados pela mesma letra utilizada para representar a matriz, porém minúscula, acompanhada de dois índices que indicam, respectivamente, a linha e a coluna em que o elemento está localizado, observe a representação da matriz A do tipo $m \times n$:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A lista ordenada $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \cdots, a_{in})$ chama-se a i-ésima linha da matriz, enquanto que $(a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \cdots, a_{mj})$ chama-se a j-ésima coluna da matriz. Esta representação pode ser abreviada da seguinte forma: A=$(a_{ij})_{mxn}$, com $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \; e \; i, j \in \mathbb{N}$.

Por certas características algumas matrizes recebem nomes especiais, como: matriz quadrada, matriz triangular, matriz diagonal, matriz identidade, matriz nula, matriz linha e matriz coluna. Neste caso é comum as matrizes linha e matrizes colunas serem citadas apenas como casos particulares, porém seria interessante o professor aproveitar a oportunidade e comentar sobre vetores de uma forma bem compacta, pois para os alunos as matrizes são ensinadas sem muitas aplicações, ou seja, de forma fechada, como se só existisse aplicação para a construção de tabelas e com esta ferramenta o professor além de expandir o universo de pensamento do aluno ganha exemplos valiosos para a consolidação do assunto pelo aluno, já que o conteúdo de vetores é algo imprescindível no ensino superior principalmente no campo computacional.

A adição de matrizes ao invés de ser tratada como um tópico com a apresentação da definição e em sequência a resolução de exercícios, poderia surgir com um problema que tenha da necessidade de se relacionar dados através da soma e a partir desta relação começar a exposição do algoritmo (conjunto de processos para efetuar um cálculo) da soma de matrizes.

Exemplo: Uma indústria automobilística produz dois carros de modelos I e II, nas cores azul, verde e branco, nos meses de janeiro e fevereiro de um mesmo ano. As tabelas a seguir representam a quantidade de produção nestes meses:

Produção de Janeiro		
	Modelo I	**Modelo II**
Azul	200	190
Verde	180	150
Branco	120	100

Produção de Fevereiro		
	Modelo I	**Modelo II**
Azul	220	205
Verde	210	170
Branco	130	110

De que maneira podemos determinar a produção do bimestre janeiro-fevereiro desse ano?

Intuitivamente, temos que para determinar a produção do bimestre deve-se somar os elementos de mesma posição das duas tabelas, obtendo-se uma nova tabela:

Produção de Janeiro-Fevereiro		
	Modelo I	**Modelo II**
Azul	420	395
Verde	390	320
Branco	250	210

Após a resolução do problema, cabe ao professor expor a definição da soma de matrizes. Com o algoritmo compreendido pelo aluno, por que não fazer com que os alunos percebam as propriedades relacionadas a esta soma ou até mesmo como o algoritmo surgiu? Neste caso pode-se usar o software winmat. Este software permite cálculos com matrizes, a edição de matrizes e resolução de problemas de álgebra linear;

nele pode-se trabalhar em modo real, complexo e inteiro; tem-se a possibilidade de trabalhar com matrizes de ordens maiores e um outro fator que contribui é o fato dele ser um software livre. Pode-se utilizar o software winmat de várias formas, procura-se fazer com que os alunos percebam o algoritmo da adição e sua existência. Segue uma possível atividade a ser desenvolvida:

Na primeira parte da atividade tem-se por objetivo levar os alunos a construção do pensamento sobre o algoritmo da soma de duas matrizes, para tal tarefa pede-se que os alunos construam duas matrizes de ordem 2 e nomeiem-nas, respectivamente, de A e B. (Figura 2.1)

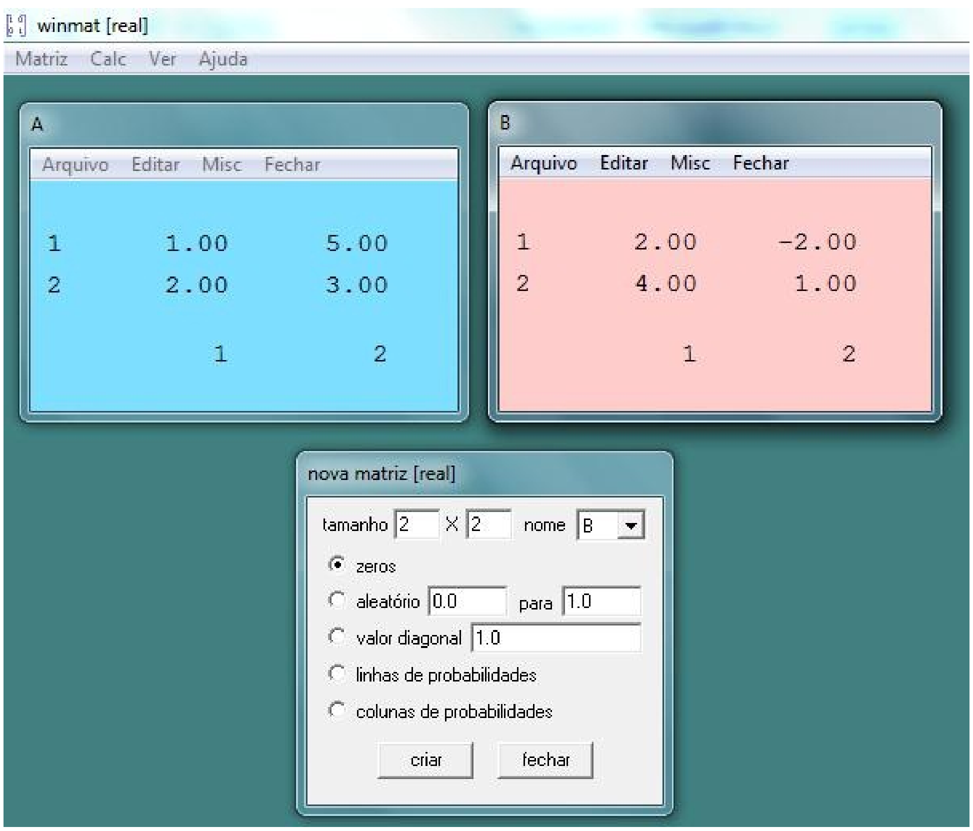


Figura 2.1: Matrizes A e B

Em seguida, solicitar que os alunos calculem a soma das duas matrizes acima e a nomeie de C com as matrizes na tela (Figuras 2.2) questiona-se o aluno perguntando o que conseguiram observar quanto à soma dos elementos das matrizes A e B.

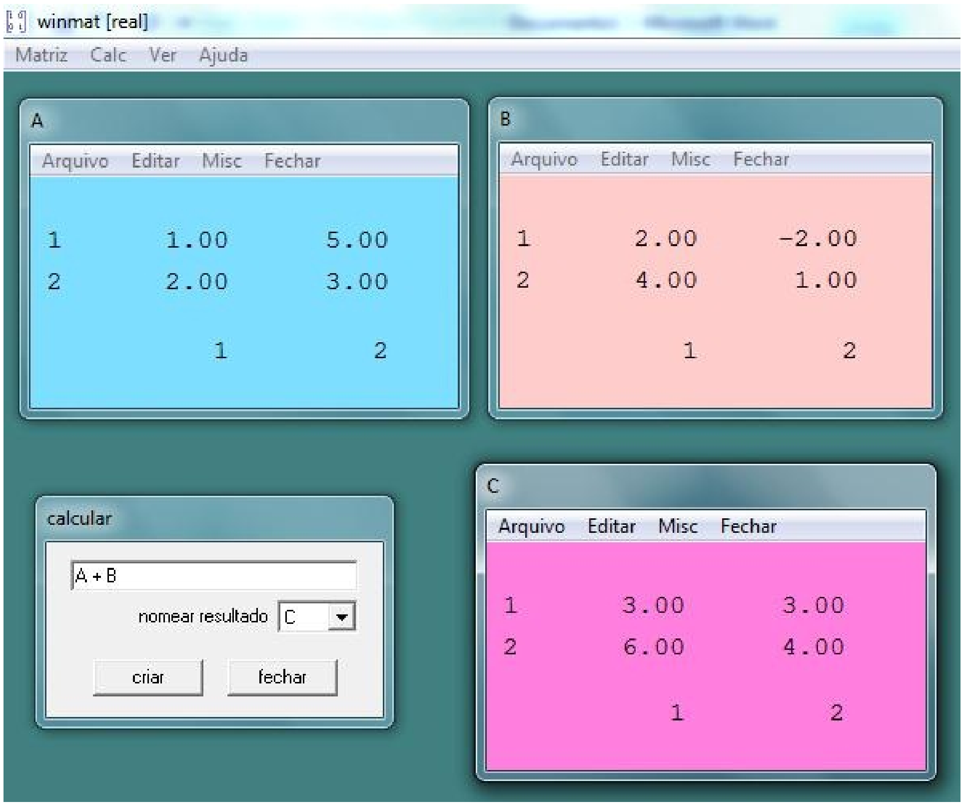


Figura 2.2: Matriz C soma das marizes A e B

Continua-se com este processo com exemplos de matrizes de ordem iguais até que seja nítida a captação do algoritmo pelos alunos e agora cabe ao professor efetuar a sistematização do que foi percebido pelos alunos.

A segunda parte da atividade tem por objetivo levar os alunos a perceber quando é possível somar duas matrizes. Pede-se para que construam duas matrizes quaisquer com o número de linhas diferente uma da outra, em seguida realize a soma (Figura 2.3), com o resultado da soma das matrizes na tela questiona-se o aluno perguntando o que conseguiram observar quanto à soma dos elementos das matrizes, fato que não vai ocorrer já que possuem as matrizes ordens diferentes fazendo com que o programa apresente uma mensagem de incompatibilidade.

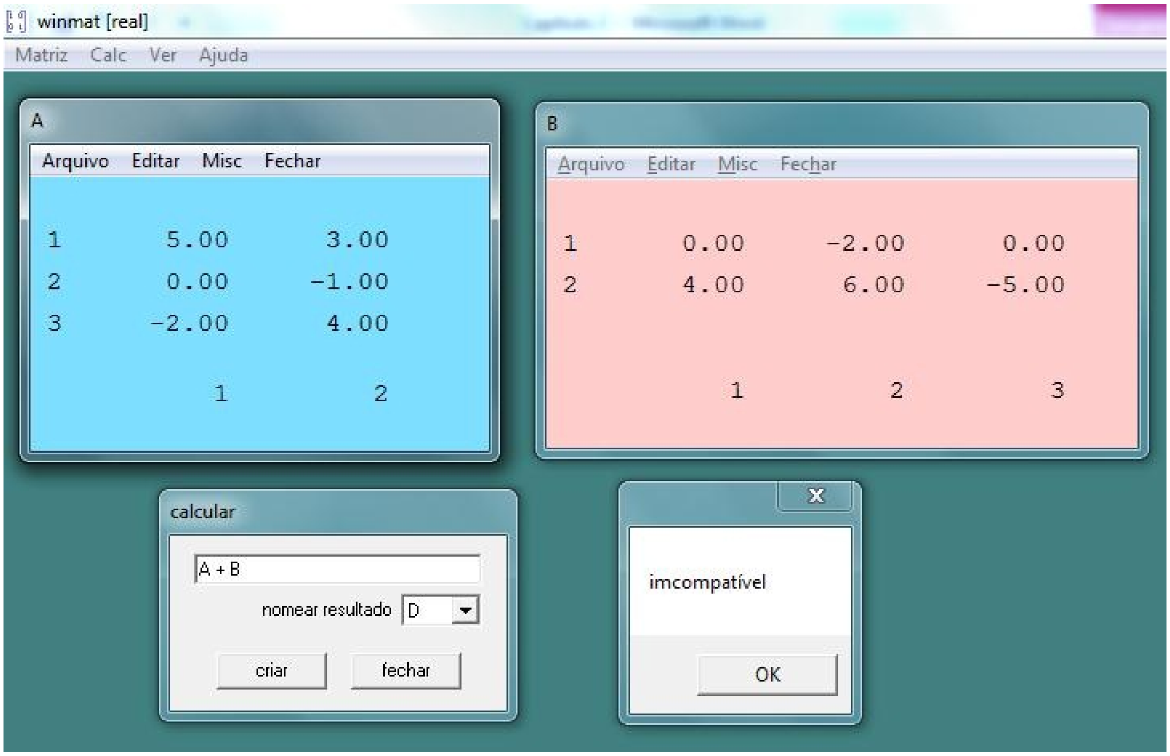


Figura 2.3: Soma de matrizes com ordens diferentes

Pede-se que tente novamente efetuar esta operação com matrizes de ordens diferentes fato que os levarão a uma outra incompatibilidade, e a partir disto pergunta-se por que esta soma não ocorreu? O que mudou em relação à atividade anterior quando se teve o resultado da soma? Uma possível conclusão apresentada pelos alunos é que se as matrizes forem de ordens diferentes, algum elemento de alguma das matrizes, não teria outro elemento correspondente da outra matriz para se somar, por isso sempre que se soma matrizes de ordens diferentes não se tem o resultado. Novamente cabe ao professor efetuar a sistematização do que foi percebido pelos alunos.

Este processo de ensino-aprendizagem facilita muito, pois é um meio alternativo para se sair do ambiente de sala de aula com quadro negro e giz, e ao mesmo tempo torna o aluno um ser ativo, fazendo com que o mesmo gere suas conclusões. Pode utilizar o mesmo procedimento para que os alunos consigam perceber as propriedades que estão envolvidas quando se soma duas ou mais matrizes, como a comutatividade, a associatividade, a existência do elemento neutro e a existência do oposto (simétrico). O mesmo procedimento pode ser utilizado quando estamos ensinando subtração de matrizes.

Geralmente, as operações de adição e subtração de matrizes são bem aceitas pelos alunos, porém percebe-se que a maioria dos casos ou exercícios que são propostos aos alunos são casos válidos, ou seja, casos onde estas operações conseguem ser executadas. Seria ótimo trabalhar com os alunos casos onde estas operações não ocorrem, pois com isso o professor faz com que o aluno reflita se é possível ou não executar estes algoritmos, permitindo ao aluno saber quando aplicar, fato que não ocorre com frequência proporcionando ao aluno uma má formulação de conhecimento, já que quando se deparar com uma situação onde não seja possível executar a soma ou a diferença de matrizes o mesmo aplicará e consequentemente estará errando. Fato que torna esta interação com as tecnologias um fator ainda mais importante, já com elas, como mostrado na atividade sugerida acima podemos gerar o conhecimento sem este possível equivoco.

Na multiplicação de um número real por uma matriz, como se trata de um algoritmo semelhante à multiplicação de números reais os livros não dão muita importância e nota-se que geralmente abordam de forma bem sucinta e os exercícios são apenas aplicações. Com o auxilio das tecnologias ganha-se um aliado muito forte, principalmente porque essas tecnologias estimulam o aluno a sair da sua posição de equilíbrio, já que se trata de um ambiente onde o mesmo possui muita destreza. Como já mostrado anteriormente com a ajuda do software winmat conseguimos retirar uma aprendizagem gerada por meio de repetição que na maioria das vezes é executada sem o real sentido da operação, retirando também a autonomia do aluno, tornando-o um ser passivo no processo de aprendizagem que geralmente o desmotiva. Utilizando-se do software o professor consegue lidar com a multiplicação de um número real por uma matriz de um modo estimulante para o aluno. A seguir se encontra uma possível situação didática: o professor cria uma matriz qualquer e efetua a multiplicação por um número sem que haja uma precipitação por parte do professor falando o que está fazendo (Figura 2.4), logo após isto questiona o aluno, pedindo para que o mesmo compare as duas matrizes e repasse o que conseguiu notar.

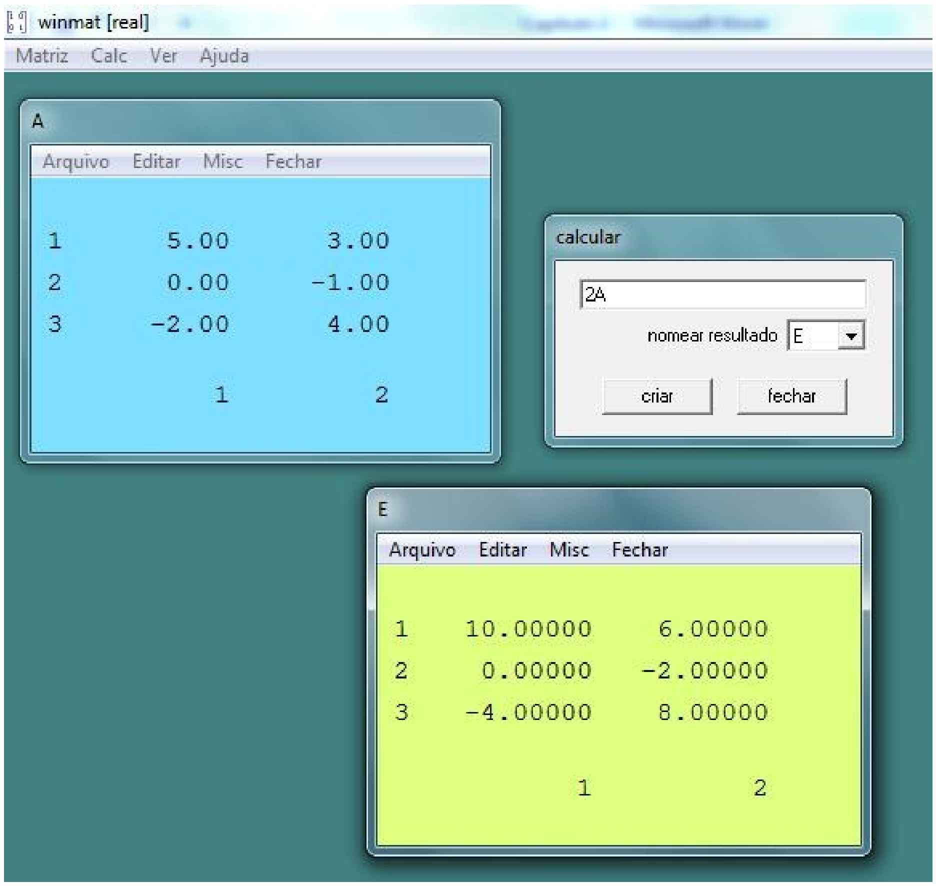


Figura 2.4: Multiplicação de um número real por uma matriz

Espera-se que com este fato o aluno perceba que o comando que o professor deu faz com que cada elemento da matriz obtida seja o resultado do produto entre numero real utilizado e o elemento da primeira matriz, caso o aluno não perceba, pode-se utilizar novamente o mesmo processo até que o aluno perceba, vale ressaltar que o tempo ganho com o auxilio do software é muito grande por isto este processo de percepção pelo aluno se torna muito rápido já que a quantidades de exemplos se torna abundante fato que difere do quadro negro, com o resultado obtido o professor faz então a sistematização e a formalização deste procedimento com a turma.

Com estes exemplos na multiplicação de um número real por uma matriz o professor pode questionar a turma perguntando: ”Se isso acontece com um número, se multiplicar uma matriz pela outra, o que vai acontecer?”Com esta pergunta o professor consegue relacionar a multiplicações de matrizes obtendo um retorno por parte do aluno, que ao se deparar com esta situação em um primeiro momento irá construir duas matrizes e a partir delas efetuar o produto buscando encontrar algum fato que o faça enxergar uma semelhança entre os elementos como já feito anteriormente na multiplicação de um numero real, porém não irá encontrar esta resposta de forma tão rápida. Com esta situação-problema cabe ao professor trazer a nova ferramenta, que neste caso é o algoritmo da multiplicação de matrizes, mostrando como é o algoritmo e de que forma deve ser feito por meio de exemplos e assim trabalhar com situações que levem o aluno a utilizar este algoritmo. Pode utilizar o mesmo procedimento para que os alunos consigam perceber as propriedades que estão envolvidas quando se multiplica duas ou mais matrizes.

É comum os livros mostrarem uma situação para exemplificar e logo em seguida passar a definição e suas propriedades.

A multiplicação de matrizes não é de fácil compreensão para os alunos por se tratar de um algoritmo extenso, deste modo o professor tem que trabalhar com muito mais exemplos que envolvam multiplicações de matrizes para assim expor aos seus alunos a definição de multiplicação de matrizes, feito isso se trabalham exemplos, porém volta-se a afirmar que é bom a utilização de exemplos onde o algoritmo não possa ocorrer, permitindo ao aluno uma reflexão sobre a definição que foi exposta anteriormente.

Ao utilizamos o software winmat para tal assunto a definição foi dada antes dos exemplos, mas possui um sentido diferente, já que no livro cria-se uma recorrência de exemplos para encontrar o algoritmo e na utilização do software não gera esta prioridade.

Vale ressaltar que após ser definido pelo professor o mesmo fará usos de exemplos para que os alunos possam assimilar a definição. Já as propriedades da multiplicação de matrizes ao invés de serem colocadas como uma lista, porque não fazer com que os alunos percebam-nas criando situações para que os alunos possam conjecturar estas propriedades por meio do software? É claro que ao término destas conjecturas o professor deve então fazer um fechamento a respeito, com rigor e utilizando se da linguagem matemática.

2.4 Considerações Finais

Este capítulo mostrou um modo diferente de abordar o conteúdo de matrizes e suas operações, mostrando que a tecnologia pode favorecer o processo de aprendizagem dos alunos em relação ao conceito de matrizes.

Em um ambiente informatizado tem-se a possibilidade de fazer vários experimentos em pouco tempo, o que dificilmente ocorreria em uma manipulação concreta, favorecendo o processo de investigação do aluno, podendo melhorar sua construção de conceitos.

Normalmente as aulas de matemática têm caráter estático, são ministradas em salas de aulas, com aulas tradicionais e com uso de livros. Muitas vezes esses tipos de aulas fazem com que os alunos não façam a assimilação do que é dito pelo professor tornando a aula um conjunto de símbolos, palavras e desenhos sem quaisquer significados.

O uso do computador possibilita também a interatividade, a qual concretiza a ação mental do aluno, mostrando-as na tela do computador, possibilitando que ele manipule os objetos pensados. Assim, os alunos podem fazer diversas representações, as quais representam diferentes ideias, o que possibilita uma melhor exploração dos conceitos matemáticos.

CAPÍTULO

3

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DE MATRIZ

Este capítulo destina-se a apresentar os conceitos relativos as matrizes, a definição de matriz, teoremas e suas respectivas demonstrações. Conceitos estes que contribuíram para a compreensão do objeto de estudo desta pesquisa.

3.1 Definição e Representação de Matriz

Definição 3.1. *Uma matriz $m \times n$ é um conjunto A de mn números $a_{ij} \in \mathbb{N}$, onde $i = 1, \cdots, m,$ e $j = 1, \cdots, n.$ Neste caso os números a_{ij}, são chamados de entradas ou, elementos da matriz A e dizemos que A têm m linhas e n colunas ou, que ela é uma matriz $m \times n$ (leia "m por n").*

Uma matriz A com entradas a_{ij} é denotada pelas seguintes formas:

$$A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} = \{a_{ij} \mid i = 1, \cdots, m, e\ j = 1, \cdots, n\}$$

ou,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Denotaremos por $M_{m\times n}$ o conjunto das matrizes com m linhas e n colunas.

3.2 Tipos de Matrizes

Definição 3.2. *Considere uma matriz $m \times n$, quando $n = 1$ a matriz é chamada de matriz coluna.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

Definição 3.3. *Considere uma matriz $m \times n$, quando $m = 1$ a matriz é chamada de matriz linha.*

$$[a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \cdots\ a_{1n}]_{1\times n}$$

Definição 3.4. *Considere uma matriz (a_{ij}) de ordem $m \times n$, quando $m = n$ a matriz é chamada de matriz quadrada. E será denotada por* $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$*, neste caso diz-se que a matriz é quadrada do tipo $n \times n$ ou, de ordem n.*

Note que ao denotar $M_{m\times n}$ o conjunto das matrizes $m \times n$, podemos também considerar que:

- *Quando $n = 1$, dizemos que $M_{m\times 1}$ é o conjunto das matrizes colunas.*
- *Quando $m = 1$, dizemos que $M_{1\times n}$ é o conjunto das matrizes linhas.*
- *Quando $m = n$, usa-se o símbolo M_n para denotar o conjunto das matrizes $n \times n$. E, nesse caso dizemos que as matrizes são quadradas ou, M_n é o conjunto das matrizes quadradas.*

Definição 3.5. *Uma matriz (a_{ij}) de M_n é denominada matriz identidade quando todos os seus elementos $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$. E será denotada por I_n ou simplesmente por I quando a referencia a respeito de n é bem clara.*

Definição 3.6. *Uma matriz (a_{ij}) de $M_{m\times n}$ é denominada matriz nula se todos os seus elementos $a_{ij} = 0$, ou seja, forem nulos. E será denotada por $O_{m\times n}$ ou simplesmente por O quando a referencia a respeito de m e n for bem clara.*

Definição 3.7. *Uma matriz quadrada não nula $A = (a_{ij})$ é triangular superior (respectivamente triangular inferior) se $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$ (respectivamente $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$).*

Definição 3.8. *Uma matriz não nula (a_{ij}) de M_n é denominada matriz diagonal, quando todos os seus elementos $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. E os elementos a_{ij}, com $i = j$ são chamados elementos diagonais.*

3.3 Igualdade e Desigualdade de Matrizes

Definição 3.9. *Considere duas matrizes A = (a_{ij}) e B = (b_{ij}) matrizes de $M_{m\times n}$. As matrizes A e B são ditas iguais se e somente se todos os elementos correspondentes são iguais, ou seja:*

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \text{ para todo } i = 1, \cdots, m, e\ j = 1, \cdots, n$$

A negação de A = B é representada por A $\neq$ B, que significa que A e B são de tipos diferentes ou que A e B são do mesmo tipo, mas pelo menos um elemento de A difere do elemento de mesma posição de B.

3.4 Operações com Matrizes

3.4.1 Adição de Matrizes

Definição 3.10. *Considere duas matrizes A = (aij) e B = (b_{ij}) matrizes de $M_{m\times n}$. A soma de A com B, denotada por A+B, é a matriz C = (c_{ij}) pertencente a $M_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$; neste caso dizemos que C = A + B ou A + B = C.*

Definição 3.11. *Considere a matriz $A = (a_{ij})$ de $M_{m\times n}$. Dizemos que a matriz oposta da matriz A (representada por -A) é a matriz que somada com a matriz A tem como resultado a matriz nula. Note que ao pegar uma matriz $A \in M_{mn}\ e\ \alpha = -1, tem - se\ (-1)A = -A.$*

Teorema 3.1. *Sejam as matrizes A,B,C $\in M_{m\times n}$ e sendo O a matriz nula pertencente a $M_{m\times n}$. Então:*
(I) A + B = B + A
(II) (A + B) + C = A + (B + C)
(III) A + O = O + A = A
(IV) A + (-A) = (-A) + A = O

Demonstração:

(I) $A+B=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(b_{ij}+a_{ij})_{m\times n}=(b_{ij})_{m\times n}+(a_{ij})_{m\times n}=B+A$

(II) $(A+B)+C=((a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n})+(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}+(c_{ij})_{m\times n}=$

$=(a_{ij}+b_{ij}+c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij}+c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}+((b_{ij})_{m\times n}+(c_{ij})_{m\times n})=A+(B+C)$

(III) $A+O=(a_{ij})_{m\times n}+(o_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+o_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=A$

$O+A=(o_{ij})_{m\times n}+(a_{ij})_{m\times n}=(o_{ij}+a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=A$

(IV) $A+(-A)=(a_{ij})_{m\times n}+(-a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-a_{ij})_{m\times n}=(o_{ij})_{m\times n}=O$

$(-A)+A=(-a_{ij})_{m\times n}+(a_{ij})_{m\times n}=(-a_{ij}+a_{ij})_{m\times n}=(o_{ij})_{m\times n}=O$

3.4.2 Subtração de Matrizes

Definição 3.12. *Considere duas matrizes $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$ matrizes de $M_{m\times n}$. A subtração ou, diferença de A e B, denotada por A - B, é a matriz $C=(c_{ij})$ pertencente a $M_{m\times n}$ tal que $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$, com $1\leq m$ e $1\leq j\leq n$; neste caso dizemos que C = A - B ou C = A + (-B).*

3.4.3 Multiplicação de Número Real por Matriz

Definição 3.13. *Seja A = $(a_{ij})\in M_{m\times n}$ e α número real. O produto da matriz A pelo número α , denotado por αA, é a matriz obtida multiplicando-se cada elemento de A por α. Isto é:*

$$\alpha A=\begin{bmatrix}\alpha.a_{11} & \alpha.a_{12} & \alpha.a_{13} & \cdots & \alpha.a_{1n}\\ \alpha.a_{21} & \alpha.a_{22} & \alpha.a_{23} & \cdots & \alpha.a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha.a_{m1} & \alpha.a_{m2} & \alpha.a_{m3} & \cdots & \alpha.a_{mn}\end{bmatrix}=(\alpha.a_{ij})_{m\times n}$$

Teorema 3.2. *Sejam as matrizes $A,B\in M_{m\times n}$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Então:*

(I) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

(II) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

(III) $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$

(IV) $1.A = A$

Demonstração:

(I) $\alpha(A+B) = \alpha((a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n}) = \alpha(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n} = (\alpha(a_{ij}+b_{ij}))_{m\times n} = (\alpha.a_{ij})_{m\times n} + (\alpha.b_{ij})_{m\times n} = \alpha(a_{ij})_{m\times n} + \alpha(b_{ij})_{m\times n} = \alpha A + \alpha B$

(II) $(\alpha+\beta)A = (\alpha+\beta)(a_{ij})_{m\times n} = ((\alpha+\beta)a_{ij})_{m\times n} = (\alpha a_{ij} + \beta a_{ij})_{m\times n} = (\alpha a_{ij})_{m\times n} + (\beta a_{ij})_{m\times n} = \alpha(a_{ij})_{m\times n} + \beta(a_{ij})_{m\times n} = \alpha A + \beta A$

(III) $(\alpha\beta)A = (\alpha\beta)(a_{ij})_{m\times n} = ((\alpha\beta)a_{ij})_{m\times n} = (\alpha(\beta\alpha_{ij}))_{m\times n} = \alpha(\beta a_{ij})_{m\times n} = \alpha(\beta(a_{ij})_{m\times n}) = \alpha(\beta A)$

(IV) $1A = 1(a_{ij})_{m\times n} = (1a_{ij})_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} = A$

No conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes reais m por n, onde m e n são números naturais dados maiores que zero. Quando definimos a operação de adição verificamos que são validas as igualdades:

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + O = O + A = A$$

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$

E ao multiplicar uma matriz de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ por um número real verificamos que também são válidas as igualdades:

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$1.A = A$$

Estas igualdades da soma de matrizes e da multiplicação de uma matriz por um número real juntas, formam um par importante de operações que caracteriza um Espaço Vetorial e portanto podemos dizer que o conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{R}$. Os Espaços Vetoriais são muito importantes, pois são os objetos de estudo da Álgebra Linear.

3.4.4 Multiplicação de Matrizes

Definição 3.14. *Considere duas matrizes $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$ e $B = (b_{ij}) \in M_{k\times l}$. Para multiplicar A com B e determinar o produto AB é necessário que $n = k$ quando isso ocorre AB está bem definida e ela é uma matriz de $M_{m\times l}$. Será denotado por$[AB]_{ij}$ a (i, j) -ésima entrada de AB, ela é dada pela seguinte fórmula:*

$$AB = [AB]_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}$$

Teorema 3.3. *Sejam A,B e C matrizes e α um número real. Então, sempre que os produtos e somas forem definidos:*

(I) (AB)C = A(BC)

(II) A(B + C) = AB + AC

(III) (A + B) C = AC + BC

(IV) α(AB) = (αA) B = A(αB)

Demonstração:

(I) Aplicando a definição 3.12, temos:

$$[(AB)C]_{ih} = \sum_{j=1}^{l} \left(\textstyle\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}\right) c_{jh} = \sum_{j=1}^{l}\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}c_{jh} =$$

$$= \sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} a_{it}(b_{tj}c_{jh}) = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \left(\textstyle\sum_{j=1}^{l}(b_{tj}c_{jh})\right) = [A(BC)]_{ih}$$

(II) Aplicando a definição 3.12 e 3.9, temos:

$$A(B+C) = \Big[(a_{it})(b_{tj} + c_{tj}\Big]_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}(b_{tj} + c_{tj})$$

$$AB + AC = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj} + \sum_{t=1}^{n} a_{it}c_{tj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj} + a_{it}c_{tj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}(b_{tj} + c_{tj})$$

(III) Aplicando a definição 3.12 e 3.9, temos:

$$(A+B)C = [(a_{it} + b_{it})c_{tj}]_{ij} = \sum_{t=1}^{n}(a_{it} + b_{it})c_{tj}$$

$$AC + BC = \sum_{t=1}^{n} a_{it}c_{tj} + \sum_{t=1}^{n} b_{it}c_{tj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}c_{tj} + b_{it}c_{tj} = \sum_{t=1}^{n}(a_{it} + b_{it})c_{tj}$$

(IV) Aplicando a definição 3.12

$$\alpha(AB) = \alpha[AB]_{ij} = \alpha\left(\textstyle\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}\right) = \sum_{t=1}^{n} \alpha a_{it}b_{tj} = \sum_{t=1}^{n}(\alpha a_{it})b_{tj} = [(\alpha A)B]_{ij}$$

$$= (\alpha A)B$$

$$\alpha(AB) = \alpha[AB]_{ij} = \alpha\left(\textstyle\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}\right) = \sum_{t=1}^{n} \alpha a_{it}b_{tj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}\alpha b_{tj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}(\alpha b_{tj})$$

$$= [A(\alpha B)]_{ij} = A(\alpha B)$$

Logo α(AB) = (αA)B e α(AB) = A(αB), portanto α(AB) = (αA)B = A(αB).

3.4.5 Matriz Transposta

Definição 3.15. *A transposta de uma matriz A = (a_{ij}) $\in M_{m\times n}$ é a matriz $A^t = (a_{ji})$ obtida através de troca i-ésima linha de A pela i-ésima coluna de A. O resultado é uma matriz $n \times m$ a ser chamada a matriz transposta, e denotada por A^t.*

Teorema 3.4. *Sejam A e B matrizes e α um número real. Então, sempre que os produtos e somas forem definidos:*

(I) $(A + B)^t = A^t + B^t$

(II) $(A^t)^t = A$

(III) $(\alpha A)^t = A^t$

(IV) $(AB)^t = B^tA^t$

Demonstração:

(I) $(A + B)^t = \left((a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}\right)^t = (a_{ji} + b_{ji})_{nxm} = (a_{ji})_{nxm} + (b_{ji})_{nxm} = A^t + B^t$

(II) $(A^t)^t = \left(\left((a_{ij})_{m\times n}\right)^t\right)^t = \left((a_{ji})_{nxm}\right)^t = (a_{ij})_{m\times n} = A$

(III) $(\alpha A)^t = \left((\alpha a_{ij})_{m\times n}\right)^t = (\alpha a_{ji})_{nxm} = \alpha(a_{ji})_{nxm} = \alpha A^t$

(IV) Seja A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times k$, queremos provar que os (i,j)-ésima elemento de $(AB)^t$ é igual a (i,j)-ésima elemento de B^tA^t. Então:

$$[AB]_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj} \Rightarrow [(AB)^t]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{t=1}^{n} a_{jt}b_{ti} = \sum_{t=1}^{n} b_{ti}a_{jt}$$

Por outro lado $[B^tA^t]_{ij} = \sum_{t=1}^{n} b_{ti}a_{jt}$. Comparando isso com a última igualdade teremos o resultado desejado.

Definição 3.16. *Se A é uma matriz quadrada o k-ésima potência de A é a matriz A^k obtida pela multiplicação de A com si k vezes.*

Definição 3.17. *Uma matriz quadrada não nula A é simétrica quando ela é igual a sua transposta, ou seja, A é simétrica se, e somente se, $A^t = A$. Assim A é anti-simétrica quando $A^t = -A$.*

3.4.6 Traço de uma Matriz

Definição 3.18. *O traço de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ é a soma dos elementos diagonais. Denotaremos o traço de matriz A por $tr(A)$. Então se $A \in M_n$, temos que:*

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Teorema 3.5. *Sejam $A, B \in M_n$ duas matrizes. Então:*

(I) $tr(O) = 0$

(II) $tr(I_m) = m$

(III) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$

(IV) $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$, *para todo escalar* $\alpha \in N$ *(V)* $tr(A^t) = tr(A)$

(VI) $tr(AB) = tr(BA)$

Demonstração:

(I) $tr(O) = \sum_{i=1}^{n} 0_{ii} = 0_{11} + 0_{22} + \cdots + 0_{nn} = 0$, *pois* $0_{ii} = 0 \; \forall \; i = 1, 2, \cdots, n$

(II) $tr(I_m) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mm} = m$, *pois* $a_{ii} = 1 \; \forall \; i = 1, 2, \cdots, m$

(III) $tr(A + B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = tr(A) + tr(B)$

(IV) $tr(\alpha A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} = \alpha(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}) = \alpha tr(A)$

(V) $tr(A^t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = tr(A)$*, note que os elementos da diagonal da matriz transposta de A e os elementos da diagonal da matriz A continuam os mesmos.*

(VI) $tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_{ji} = tr(BA)$

Observação: A multiplicação das matrizes quadradas não é uma operação comutativa, ou seja, AB≠BA. Porém os traços de AB e BA são iguais.

3.4.7 Matriz Inversa

Definição 3.19. *Uma matriz quadrada* $A = (a_{ij})$ *é chamada de inversível se existe uma matriz* $B = (b_{ij})$ *tal que AB = BA = I, onde I é a matriz identidade. Tal matriz B é única, a chamamos de inversa de A e a denotamos por* A^{-1}*.*

3.5 Considerações Finais

Este capítulo apresentou a Álgebra das matrizes, fazendo uma exposição do conteúdo de matrizes de forma gradativa dando ênfase a alguns conceitos básicos de suas principais definições, teoremas e propriedades de forma bem objetiva, com o intuito de subsidiar o professor em seu trabalho, além de uma referência para o ensino dos conceitos aqui expostos.

CAPÍTULO

4

APLICAÇÕES DE MATRIZ EM OTIMIZAÇÃO LINEAR

As matrizes são muito utilizadas para representar dados gerando uma visualização clara e prática das informações, permitindo um grande acumulo de informações em um pequeno espaço, facilitando a resolução de cálculos complexos, dai a sua importância em várias áreas. O uso de matrizes vem sendo explorado para a resolução de problemas do mundo real e a utilização destes problemas em sala de aula favorece o ensino da matemática e mostra a necessidade de se aprender matemática tornando a aprendizagem mais significativa para o aluno já que estes problemas são exemplos de aplicações práticas dos conceitos abordados durante o ensino médio e que por sua vez estimulam o estudo e aprofundamento dos conhecimentos por parte do aluno.

Um ramo da matemática onde se tem grande aplicação de matrizes é na área da Pesquisa Operacional (PO), que consiste no desenvolvimento de métodos científicos de sistemas complexos para a tomada de decisões visando tornar estas decisões mais efetivas e os sistemas mais produtivos, baseados em dados completos, consideração todas as alternativas possíveis, previsões de resultados e estimativas de risco utilizando as mais modernas ferramentas e técnicas de decisão.

Os métodos de Pesquisa Operacional têm sido largamente aplicados com intuito de obter soluções para problemas ligados a tomada de decisões em diversas áreas do conhecimento. Exemplos dessas áreas são: Computação, Matemática, Engenharia, Medicina, Administração e Finanças (Arenales et.al., 2007). Nessas áreas, há aplicações que possuem diversas variáveis e, com isso, o entendimento do problema e o processo de tomada de decisão tornam-se extremamente complexos se realizados manualmente. Por outro lado, a representação do problema através de modelos matemáticos e, por conseguinte, a resolução através de técnicas de Pesquisa Operacional pode reduzir essa complexidade e tornar o processo de resolução bem mais eficiente (Santos, et.al, 2007).

O começo da atividade chamada Pesquisa Operacional tem sido atribuído as iniciativas militares da Segunda Guerra Mundial. Por causa do esforço da guerra, existia uma necessidade urgente de alocar recursos escassos às várias operações militares e às atividades dentro de cada operação de uma maneira efetiva. Um grande grupo de cientistas foi reunido para aplicar uma abordagem científica a problemas estratégicos e táticos. Esses cientistas foram chamados a realizar pesquisas (sobre atividades) operacionais militares, daí o nome de sua atividade. A observação inicial e a formulação do problema estão entre os mais importantes passos da solução de um problema por Pesquisa Operacional.

O problema de corte, por exemplo, muitas indústrias têm que cortar objetos maiores em objetos menores de tamanhos variados, em geral não padronizados, tudo depende da solicitação dos clientes. Esse processo de cortar material em geral tem um grande desperdício de material indesejável, surge então um problema de otimização (problema de corte) onde se cortam objetos para produção de outros em quantidades e tamanhos desejados, de modo que o desperdício de material seja mínimo.

Com um olhar mais técnico o problema de corte, no que tange sua formulação matemática pode ser discriminado e generalizado como o Problema de Corte unidimensional, onde se desejam cortar barras disponíveis de um tamanho padronizado L para a produção de m tipos de itens com tamanhos $l_1, l_2, \cdots, l_m$ em quantidades variadas, $b_1, b_2, \cdots, b_m$, respectivamente. Uma maneira particular de se cortar uma barra define o que se chama de padrão de corte e, a cada padrão de corte $j, j = 1, 2, ...,$ associa um vetor m-dimensional a_j = ($a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}$), em que a_{ij} fornece o número de itens do tipo i no padrão de corte j. Veja (Arenales et.al., 2007).

Um vetor $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)^T$ representa um padrão de corte se e somente se o seguinte sistema é satisfeito: $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m \leq L,$ onde $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \cdots, \alpha_m \geq 0$ e inteiros.

Suponha que exista n padrões de corte possíveis para esse sistema. Uma vez definida o padrão de corte o problema consiste em determinar quantas barras devem ser cortadas de acordo com cada padrão, de modo que a demanda de cada item seja atendida, utilizando o menor número possível de barras. Define-se a variável x_j como o número de barras cortadas conforme o padrão j. O Problema de Corte pode ser formulado por:

$$Minimizar \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ am1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$$

Muitas vezes a integridade pode ser relaxada. Suponha que a demanda é dada em tonelada, isto é, b_i é a quantidade em toneladas demandada para o item de largura l_i. Suponha que cada bobina em estoque mede L cm de largura e seu peso é T toneladas, de modo que cada centímetro cortado pesa $\rho = \frac{T}{L}$ tonelada/cm (ρ é chamado de peso especifico linear). Assim, um item de largura l_i cm cortado da bobina pesa ρl_i toneladas.

Segue que a quantidade em toneladas do item do tipo i produzida pelo padrão de corte j é $\rho l_i\, a_{ij}$ toneladas e o modelo acima deve ser alterado para:

$$Minimizar\ \ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\begin{bmatrix} \rho l_1 a_{11} \\ \rho l_2 a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ \rho l_m a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} \rho l_1 a_{12} \\ \rho l_2 a_{22} \\ . \\ . \\ . \\ \rho l_m a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} \rho l_1 a_{1n} \\ \rho l_2 a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ \rho l_m a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \cdots, n$$

Substituindo $\rho = \frac{T}{L}$ e deixando T multiplicar cada coluna do modelo, obtem-se:

$$Minimizar\ \ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\begin{bmatrix} \frac{l_1}{L} a_{11} \\ \frac{l_2}{L} a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{l_m}{L} a_{m1} \end{bmatrix} (Tx_1) + \begin{bmatrix} \frac{l_1}{L} a_{12} \\ \frac{l_2}{L} a_{22} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{l_m}{L} a_{m2} \end{bmatrix} (Tx_2) + \cdots + \begin{bmatrix} \frac{l_1}{L} a_{1n} \\ \frac{l_2}{L} a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{l_m}{L} a_{mn} \end{bmatrix} (Tx_n) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \cdots, n$$

Fazendo uma mudança de variável, $y_i = Tx_j$ toneladas cortadas conforme o padrão de corte j. Então temos um modelo equivalente:

$$Minimizar\ \ g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

$$\begin{bmatrix} \frac{l_1}{L}a_{11} \\ \frac{l_2}{L}a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{l_m}{L}a_{m1} \end{bmatrix} y_1 + \begin{bmatrix} \frac{l_1}{L}a_{12} \\ \frac{l_2}{L}a_{22} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{l_m}{L}a_{m2} \end{bmatrix} y_2 + \cdots + \begin{bmatrix} \frac{l_1}{L}a_{1n} \\ \frac{l_2}{L}a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{l_m}{L}a_{mn} \end{bmatrix} y_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

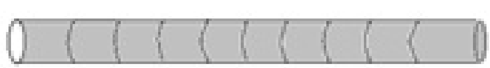
$$y_j \geq 0, j = 1, \cdots, n$$

Exemplo: Uma indústria de papel produz bobinas-jumbo de L=400 cm de largura e cada uma pesa T=1 tonelada. Os jumbos devem ser cortados em bobinas menores nas larguras e quantidades representadas na tabela abaixo, conforme solicitações de diversos clientes:

Dados da Demanda	
Larguras (l)$_i$	Quantidades (b)$_i$
40 cm	5 ton
45 cm	3,5 ton
55 cm	4 ton
60 cm	5 ton

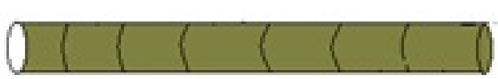
Possíveis padrões de corte:

a_1 = $(10000)^T$

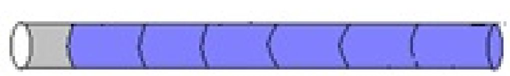


a_2 = $(1800)^T$

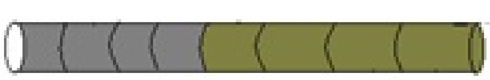
a_3 = $(0070)^T$



a_4 = $(1006)^T$



a_5 = $(0440)^T$



a_6 = $(0043)^T$

Utilizando os padrões de corte dado acima, e $\frac{l_1}{L} = 0,1$; $\frac{l_2}{L} = 0,1125$; $\frac{l_3}{L} = 0,1375$;$\frac{l_4}{L} = 0,15$, têm-se o seguinte modelo:

$$Minimizar\ g(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, \cdots) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 10\ x\ 0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_1 + \begin{bmatrix} 1\ x\ 0,1 \\ 8\ x\ 0,1125 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7\ x\ 0,1375 \\ 0 \end{bmatrix} y_a + \begin{bmatrix} 1\ x\ 0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 6\ x\ 0,15 \end{bmatrix} y_4 +$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4\ x\ 0,1125 \\ 4\ x\ 0,1375 \\ 0 \end{bmatrix} y_5 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\ x\ 0,1375 \\ 3\ x\ 0,15 \end{bmatrix} y_6 + \cdots = \begin{bmatrix} 5 \\ 3,5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, \cdots \geq 0$$

4.1 Conceitos Básicos de Otimização Linear

Definição 4.1. *O problema de otimização linear está na forma padrão, quando o mesmo se encontra da seguinte forma:*

$$Minimizar\ \ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{gathered} \tag{4.2}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0. \tag{4.3}$$

A função linear f em (4.1), a ser minimizada, é chamada função objetivo, o sistema de equações lineares em (4.2) define as restrições do problema, juntamente com as condições de não negatividade das variáveis em (4.3). Assim, o problema pode ser escrito equivalentemente em notação matricial como:

$$Minimizar \;\; f(x) = c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

em que:

- A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ É uma matriz $m \times n$, chamada matriz dos coeficientes.

- $C^T = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ é o vetor de custos ,

- $x^T = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ é o vetor das variáveis ou incógnitas,

- $b^T = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ é o vetor dos termos independentes ou de recursos,

- $0^T = (0, 0, \cdots, 0)$ é o vetor cujos elementos são todos iguais a 0.

Neste trabalho denota-se por x^T o transposto do vetor x. Outras formas ainda podem ser utilizadas, tais como:

$$Minimizar \;\; f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b : x_j \geq 0, j = 1, \cdots, n,$$

em que: $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$: j-ésima coluna da matriz A, que são os coeficientes que multiplicam x_j.

Definição 4.2. *Uma solução $(x_1, x_2 \cdots, x_n)$ é uma solução factível se satisfazer todas as restrições e as condições de não negatividade, o conjunto de todas essas regiões factíveis é chamado região factível.*

Exemplo: Considere o seguinte problema de otimização linear

$$Minimizar \;\; f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 - 1x_2 - 1x_3$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

$$2x_1 + x_2 = 13$$

$$2x_1 + x_3 = 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Tem-se: $m = 3$ (três restrições) e $n = 3$ (três variáveis) e $C = (4, -1, -1)^T$ é o vetor dos custos; A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz dos coeficientes e $b = (10, 13, 9)^T$ é o vetor de recursos; As variáveis deste problema $x = (x_1, x_2, x_3)^T$correspondem a um vetor de três coordenadas e, portanto, o espaço de possíveis soluções está contido no R^3. A solução $x_1 = 3, x_2 = 7, x_3 = 3$ é factível, pois satisfaz todas as restrições do problema e possui o seguinte valor na função objetivo: $f(3, 7, 3) = 2$. Porém, não se pode afirmar se essa é a melhor solução, pois apenas foi encontrado um dos possíveis valores que as variáveis podem assumir.

Definição 4.3. *Se uma solução factível tem o menor valor de função objetivo, dentre todas as outras, está solução é chamada solução ótima e é denotada por $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$.*

Ou seja, tem-se que encontrar uma solução factível que satisfaça $f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) \leq f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$*, para qualquer solução factível* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Existem problemas de otimização linear que buscam a maximização, ou seja, procura-se encontrar uma solução factível $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ tal que $f(x^*) \geq f(x)$, para toda solução x factível e quando se depara com eles pode transformá-los para uma forma equivalente: $-f(x^*) \leq -f(x)$, que é obtida através da multiplicação da desigualdade acima por -1, e logo encontra-se uma solução factível x^* que minimize $-f(x)$, para toda solução x factível.

Em alguns problemas de otimização as restrições estão na forma de inequações, ao invés de estarem todas na forma de equações. Quando se depara com estes casos o problema muda para a forma padrão através de novas variáveis. O que leva a duas vertentes:

Se a restrição i for dada por $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ para atingir a igualdade entre os membros, basta somar do lado esquerdo a uma variável $x_k \geq 0$, que representa a diferença existente na inequação original, e obtemos $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_k = b_i$ ou, se a restrição i for dada por $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ para atingir a igualdade entre os membros, basta subtrair uma variável $x_j \geq 0$, que representa a diferença existente na inequação original, e obtemos $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_j = b_i$.

Estas variáveis são chamadas de variáveis de folga, as quais permitem deixar as restrições em forma de igualdade, mantendo as condições de não-negatividade.

Exemplo: Considere o problema de otimização linear, transformando-o na forma padrão:

$$Minimizar \;\; f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + 1x_2 - 5x_3$$

$$1x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 4$$

$$2x_1 - 4x_2 + x_3 \leq -1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Introduzindo as variáveis de folga:

$$Minimizar \;\; f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -x_1 + 1x_2 - 5x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 4$$

$$2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_5 = -1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Além desses casos, ainda existe a possibilidade de haver alguma variável x_i irrestrita de sinal no problema quando se depara com a transformação do problema na forma padrão, a esta variável dá-se o nome de variável livre. Quando este fato ocorre pode substituir esta variável pela diferença entre duas variáveis não-negativas e obter um problema equivalente na forma padrão, ou seja, pode escrever a variável livre como $x_i = x_i^+ - x_i^-$, com $x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0$, obtem-se assim um problema com todas as variáveis não-negativas.

Resolução Gráfica: Ao representar graficamente os problemas de otimização linear percebe-se muitas propriedade teóricas além de projetar um método para a resolução, resolver um problema de otimização linear consiste em encontrar uma solução ótima. Desenha-se o espaço de todas as soluções factíveis, e logo se identifica qual solução factível produz o menor valor à função objetivo. Considere um problema de otimização linear na forma genérica:

$$Minimizar \;\; f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

ou em notação matricial,

$$Minimizar f(x) = c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0, \text{ com } x \in R^2$$

Indica-se o espaço de todas as soluções por S, isto é, $S = \{x \in R^2 \mid Ax = b, x \geq 0\}$, utilizando a notação matricial, a restrição é $(a^i)^T x \leq b_i$, em que $(a^i)^T = (a_{i1}, a_{i2})$ é a linha i da matriz A e a equação da reta é $(a^i)^T x = b_i$:

- $x \in R^2$ tal que $(a^i)^T x = b_i$
- $x \in R^2$ tal que $(a^i)^T x < b_i$
- $x \in R^2$ tal que $(a^i)^T x > b_i$

O gradiente a^i (coeficientes da equação da reta), que é perpendicular à reta $(a^i)^T x = b_i$, aponta para pontos tais que $(a^i)^T x > b_i$ (Figura 4.1)

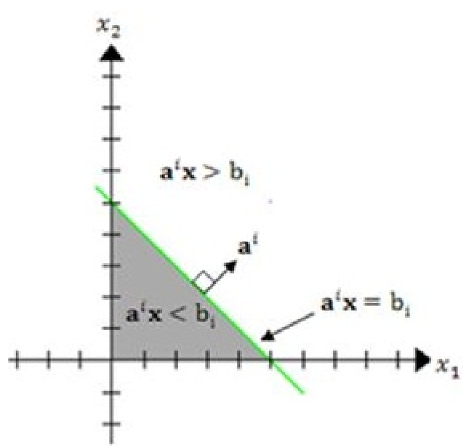


Figura 4.1: O gradiente

A região factível, que é a intersecção de todas as regiões do tipo $a^i x \leq b_i$, com o primeiro quadrante, pode ser facilmente desenhada (Figura 4.2).

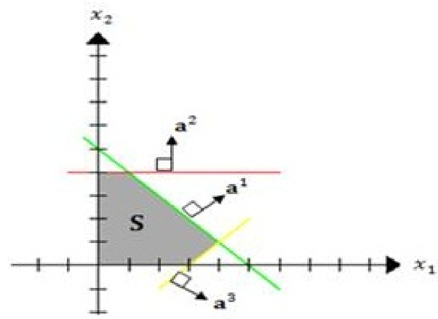


Figura 4.2: Região Factível

Logo é suficiente encontrar na região factível a solução x^* que minimize a função objetivo $f(x)$. Observando a curva de nível $c^T x = f^*$ da função f em que $f^* = f(x^*)$, observa-se que todo o conjunto S está do lado para onde o gradiente aponta, ou seja, para todo $x \in S$, se tem $f(x) \geq f(x^*)$, que é a definição de uma solução ótima para um problema de minimização. A Figura 4.3 ilustra várias curvas de nível da função f.

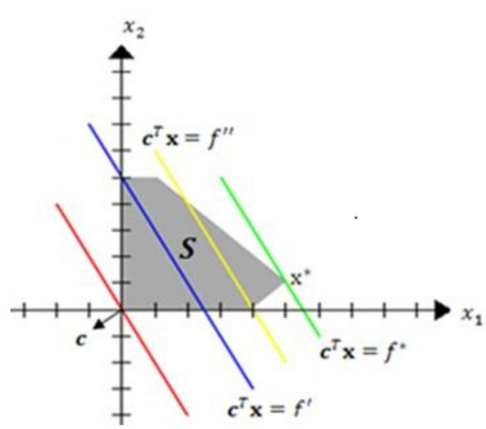


Figura 4.3: Curvas de nível da função

A solução ótima x^* na Figura 4.3 é uma solução factível muito especial chamada vértice ou ponto extremo. Nas figuras que ilustram a região factível, é possível notar que os vértices são determinados pela intersecção de (pelo menos) duas retas que definem a fronteira da região factível (observe que $x_i = 0$ é uma equação de reta). Logo se pode intuir que os vértices são soluções de sistemas de equações lineares.

Exemplo: Considere o seguinte problema de otimização linear

$$Maximinizar \;\; f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 6 \tag{4.4}$$

$$x_1 - x_2 \leq 4 \tag{4.5}$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4 \tag{4.6}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \tag{4.7}$$

Na forma padrão

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 - x_2 + x_4 = 4$$

$$-x_1 + x_2 + x_5 = 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Plotando as restrições temos:

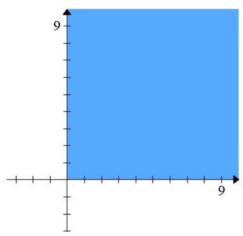


Figura 4.4: Restrição (4.7)

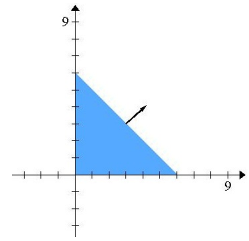


Figura 4.5: Restrições (4.4) e (4.7)

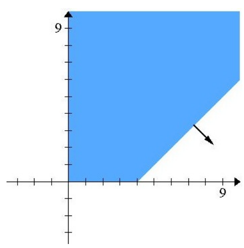


Figura 4.6: Restrições (4.5) e (4.7)

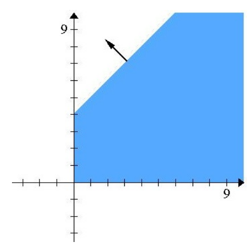


Figura 4.7: Restrições (4.6) e (4.7)

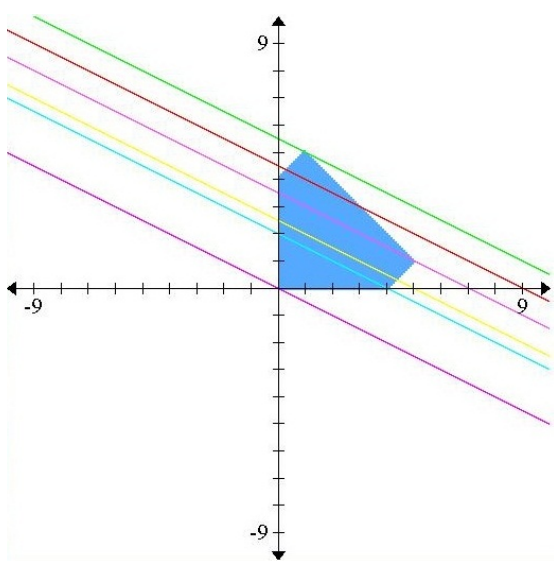


Figura 4.8: Região Factível

4.2 Teoria do Método Simplex

Por conveniência, a teoria será desenvolvida para o problema na forma padrão.

$$Minimizar \;\; f(x) = C^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

A idéia de reorganizar as colunas do sistema para encontrar uma solução qualquer é importante para a descrição do método simplex.

Definição 4.4. *Reorganização nas colunas da matriz:* $A = [BN]$ *, onde:*

$B_{m \times m}$*: matriz básica é formada por* m *colunas da matriz* A *e é invertível,* $B = [a_{B_1} a_{B_2} \cdots a_{B_m}]$*;* $B_1, B_2, \cdots, B_m$ *são os índices básicos das colunas da matriz* A *que pertencem a* B*.*

$N_{m \times (n-m)}$*: matriz não básica é formada pelas* $n - m$ *colunas restantes de* A*,* $N = [a_{N_1} a_{N_2} \cdots a_{N_{n-m}}]$*;* $N_1, N_2 \cdots N_{n-m}$ *são os índices das colunas da matriz* A *que pertencem a* N*.*

A partição nas colunas da matriz A é chamada partição básica, em que:
$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$

$x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ . \\ . \\ . \\ x_{B_m} \end{bmatrix}$*, variáveis básicas e* $x_N = \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \\ . \\ . \\ . \\ x_{N_{N-M}} \end{bmatrix}$*, váriáveis não básicas.*

Logo, $Ax = b \Leftrightarrow [BN].\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = b$ *ou* $Bx_B + Nx_N = b$*, obtém a solução geral:*

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Definição 4.5. *Considere uma partição básica A = [B N].*

$$\begin{cases} \hat{x}_B = B^{-1}b \\ \hat{x}_N = 0 \end{cases}$$

A solução $\hat{x}$ assim obtida é chamada solução básica. Se $\hat{x}_B = B^{-1}b \geq 0, \hat{x}$ é uma solução básica factível. Se $x_B = B^{-1}b > 0,$ a solução básica factível é não-degenerada.

Propriedade 4.1: Considere a região factível $S = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$. Um ponto $x \in S$ é um vértice de S se e somente se, x for uma solução básica factível.

Propriedade 4.2: Se existe uma solução ótima, existe uma solução básica factível ótima. Como conseqüência, basta que se procure o ótimo entre todas as soluções básicas factíveis. Assim: Determine todas k soluções básicas factíveis: $x_1, x_2, \cdots, x_K$. Determine a solução ótima x_j tal que $f(x_j)$ = mínimo $\{f(x_k), k = 1, 2, \cdots, K\}$.

O *Método Simplex* encontra um vértice ótimo, pesquisando apenas um sub-conjunto dos K vértices de S.

Considere uma solução básica factível $\hat{x} = \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$ em que $\begin{cases} \hat{x}_B = B^{-1}b \geq 0 \\ \hat{x}_N = 0 \end{cases}$

A função objetivo $f(x)$ pode ser expressa considerando a partição básica:

$$f(x) = C^T x = \begin{bmatrix} C_B^T C_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = C_B^T x_B + C_N^T x_N = C_B^T(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + C_N^T x_N$$

$$= C_B^T B^{-1}b - C_B^T B^{-1}Nx_N + C_N^T x_N.$$

C_B^T : são os coeficientes das variáveis básicas na função objetivo.

C_N^T : são os coeficientes das variáveis não básicas na função objetivo.

$f(\hat{x}) = C_B^T B^{-1}b - C_B^T B^{-1}N\hat{x}_N + C_N^T \hat{x}_N = C_B^T B^{-1}b - C_B^T B^{-1}N(0) + C_N^T(0) = C_B^T B^{-1}b$

Definição 4.6. *(vetor multiplicador simplex) $\lambda^T = C_B^T B^{-1}$, utilizando o vetor multiplicador simplex na expressão de $f(x)$, temos:*

$$f(x) = f(\hat{x}) - C_B^T B^{-1}Nx_N + C_N^T x_N = f(\hat{x}) - \lambda^T Nx_N + C_N^T x_N = f(\hat{x}) + (C_N^T - \lambda^T N)x_N \quad (4.8)$$

Definição 4.7. *(Custos relativos) Os coeficientes* $\hat{C}_{N_j} = c_{N_j} - \lambda^T a_{N_j}$ *das variáveis não básicas na função objetivo (4.8) são chamados custos relativos.*

Propriedade 4.3: *(Condição de otimalidade) Considere uma partição básica A em que a solução básica associada* $\hat{x}_B$ *, e seja* λ^T *o vetor multiplicador simplex. Se* $c_{N_j} - \lambda^T a_{N_j} \geq 0, j = 1, 2, \cdots, n - m$*, então a solução básica é ótima.*

Definição 4.8. *(Estratégia simplex) Chama-se de estratégia simplex a perturbação de uma solução básica factível que consiste em alterar as variáveis não básicas por:*

$$\begin{cases} x_{N_K} = \varepsilon \geq 0 \\ x_{Nj} = 0 \end{cases} j = 1, 2, \cdots, n - m$$

Definição 4.9. *(Direção Simplex) Chama-se de direção simplex o vetor* $y = B^{-1} a_{N_K}$*, o qual fornece os coeficientes de como as variáveis básicas são alteradas pela estratégia simplex. Considerando a não negatividade das variáveis básicas se tem:*

$$x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i \varepsilon \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m.$$

Assim: Se $y_i \leq 0,\ então\ x_{B_i} \geq 0$. Se $y_i > 0$, como $x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i \varepsilon \geq 0$ então $\varepsilon \leq \frac{\hat{b}_i}{y_i}$.
Logo $\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_1}}{y_1} = mínimo \left\{ \frac{\hat{x}_{B_1}}{y_i}\ tal\ que\ y_i > 0 \right\}$.

Temos i-ésima variável básica e k-ésima variável não básica. O que nos resulta em uma nova partição, a variavel x_{N_k} torna-se básica e a variavel x_{B_1} não básica.

$$B = [a_{B_1}, \cdots, a_{B_l}, \cdots a_{B_m}] \longrightarrow B' = [a_{B_1}, \cdots, a_{N_K}, \cdots, a_{B_m}]$$

$$N = [a_{N_1}, \cdots, a_{N_K}, \cdots, a_{N_{n-m}}] \longrightarrow N' = [a_{N_1}, \cdots, a_{B_l}, \cdots, a_{N_{n-m}}]$$

Pode-se então encontrar outra solução básica melhor a partir daquela em mãos, enquanto a condição de otimalidade não for verificada.

ALGORITMO SIMPLEX

Fase I: Determine uma partição básica factível A = [B,N]. A rigor, precisa-se de dois vetores de índices básicos e não-básicos: $(B_1, B_2, \cdots, B_m)$ e $(N_1, N_2, \cdots, N_{n-m})$. Os vetores das variáveis básicas e não-básicas são, respectivamente $x_B^T = (x_{B_1} x_{B_2} \cdots x_{B_m})$ e $x_N^T = (x_{N_1} x_{N_2} \cdots x_{N_m})$

Faça iteração = 1.

Fase II: início da iteração simplex

Passo 1: cálculo da solução básica: $\begin{cases} \hat{x}_B = B^{-1}b \\ \hat{x}_N = 0 \end{cases}$

Passo 2: cálculo dos custos relativos

2.1) vetor multiplicador simplex: $\lambda^T = C_B^T B^{-1}$

2.2) custos relativos: $\hat{C}_{N_j} = c_{N_j} - \lambda^T a_{N_j} \quad j = 1, 2, \cdots, n-m$

2.3) determinação da variável a entrar na base: $\hat{c}_{N_K} = \ mínimo\{\hat{c}_{N_j}, j = 1, \cdots, n-m\}$

Passo 3: (teste de otimalidade) Se $\hat{c}_{N_K} \geq 0$, então : PARE, pois a solução na iteração atual é ótima.

Passo 4: (cálculo da direção simplex) $y = B^{-1} a_{N_K}$

Passo 5: (determinação do passo e variável a sair da base) Se $y \leq 0$, então: PARE, problema não tem solução ótima finita, $f(x) \longrightarrow -\infty$. Caso contrário, determine a variável a sair da base pela razão mínima: $\hat{\varepsilon} = \frac{x_{B_l}}{y_l}$ = mínimo $\left\{\frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i} \ talque \ y_i > 0, i = 1, \cdots, m\right\}$ (a variável x_{B_l} sai da base)

Passo 6: troque a L-ésima coluna de B pela k-ésima coluna de N.

A matriz básica nova: $B = [a_{B_1} \ \cdots \ a_{B_{l-1}} \ a_{N_K} \ a_{B_{l+1}} \ \cdots \ a_{B_m}]$;

Matriz não- básica nova: $N = [a_{N_1} \ \cdots \ a_{N_{K-1}} \ a_{B_l} \ a_{N_{K+1}} \ \cdots \ a_{N_{n-m}}]$

Faça uma nova iteração retornando ao **Passo 1**

Exemplo: Uma fábrica de papel toalha manufatura três tipos de produtos 1, 2 e 3. A fábrica recebe o papel em grandes rolos. O papel é cortado, dobrado e empacotado. Dada a pequena escala da fábrica, o mercado absorverá qualquer produção a um preço constante. O lucro unitário de cada produto é respectivamente R$ 1,00, R$ 1,50, e R$ 2,00. O quadro abaixo identifica o tempo requerido para operação (em horas) em cada seção da fábrica, bem como a quantidade de máquinas disponíveis, que trabalham 40 horas por semana. Planeje a produção semanal da fábrica.

Produção da Fabrica				
Seção	Produto 1	Produto 2	Produto 3	Q^{de}. Máquina
Corte	8	5	2	3
Dobra	5	10	4	10
Empacotamento	0,7	1	2	2

$$Maximinizar \quad f(x_1, x_2, x_3) = 1x_1 + 1,5x_2 + 2x_3$$

$$8x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 120$$

$$5x_1 + 10x_2 + 4x_3 \leq 400$$

$$0,7x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 80$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$Minimizar \quad -f(x_1, x_2, x_3) = -1x_1 - 1,5x_2 - 2x_3$$

$$8x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 120$$

$$5x_1 + 10x_2 + 4x_3 \leq 400$$

$$0,7x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 80$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Forma padrão:

$$Minimizar \quad -f(x_1, x_2, x_3) = -1x_1 - 1,5x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$8x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 120$$

$$5x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 = 400$$

$$0,7x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 = 80$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$$

Fase 1: Básicas: (B_1, B_2, B_3)= (4, 5, 6); Não básicas: (N_1, N_2, N_3) = (1, 2, 3)

1º Iteração

Passo 1: (Cálculo da solução básica) $\begin{cases} \hat{x}_B = B^{-1} \\ \hat{x}_N = 0 \end{cases}, \hat{x}_B = \begin{bmatrix} 120 \\ 400 \\ 80 \end{bmatrix}$

Passo 2: 2.1) vetor multiplicativo simplex, $C_B = (C_4, C_5, C_6) = (0, 0, 0), \lambda^T = [0\ 0\ 0]$

2.2) custos relativos $(N_1 = 1, N_2 = 2, N_3 = 3), \hat{C}_1 = -1, \hat{C}_2 = -1,5; \hat{C}_3 = -2$.

2.3) $\hat{c}_{N_K}$ = mínimo $\{\hat{c}_{N_j}, j = 1, \cdots, n-m\}$ (a variável x_{N_K} entra na base) $\hat{C}_{N_K} = -2, K = 3$.

A variável $x_{N_3} = x_3$ entra na base

Passo 3: (Teste de otimalidade), $\hat{C}_3 < 0$

Passo 4: (Cálculo da direção simplex) $y = B^{-1}a_{N_K},\ y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Passo 5: $\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_l}}{y_l}$ = mínimo $\left\{\frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}\ tal\ que\ y_i > 0\right\}$ (a variável x_{B_l} sai da base)

$\hat{\varepsilon}$ = minímo $\left\{\frac{\hat{x}_{B_1}}{y_1} = \frac{120}{2}, \frac{\hat{x}_{B_2}}{y_2} = \frac{400}{4}, \frac{\hat{x}_{B_3}}{y_3} = \frac{80}{2}\right\}$ A variavel $x_{B_3} = x_6$ sai da base.

Passo 6: (Atualização) nova partição básica, troque a L-ésima coluna de B pela k-ésima coluna de N. Básicas: $(B_1, B_2, B_3) = (4, 5, 3)$;Não básicas: $(N_1, N_2, N_3) = (1, 2, 6)$

2° Iteração

Passo 1: $\hat{x}_B = \begin{bmatrix} 40 \\ 240 \\ 40 \end{bmatrix}$

Passo 2:

2.1) $C_B = (0, 0, -2); \lambda^T = [0\ 0\ -1]$

2.2) $(N_1 = 1, N_2 = 2, N_3 = 6)\hat{C}_1 = -0,3; \hat{C}_2 = -0,5; \hat{C}_6 = 1$.

2.3) $\hat{C}_{N_K} = -0,5, K = 2$. A variável $x_{N_2} = x_2$ entra na base

Passo 3: $\hat{C}_2 < 0$

Passo 4: $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Passo 5: $\hat{\varepsilon}$ = mínimo $\left\{\frac{\hat{x}_{B_1}}{y_1} = \frac{40}{4}, \frac{\hat{x}_{B_2}}{y_2} = \frac{240}{8}, \frac{\hat{x}_{B_3}}{y_3} = \frac{40}{\frac{1}{2}}\right\}$. A variável $x_{B_1} = x_4$ sai da base

Passo 6: Básicas: $(B_1, B_2, B_3) = (2, 5, 3)$; Não básicas: $(N_1, N_2, N_3) = (1, 4, 6)$

3° Iteração

Passo 1: $\hat{x}_B = \begin{bmatrix} 10 \\ 160 \\ 35 \end{bmatrix}$

Passo 2:

2.1) $C_B = (-1,5, 0, -2); \lambda^T = [\frac{-47}{10}\ 0\ \frac{-7}{8}]$

2.2) $(N_1 = 1, N_2 = 4, N_3 = 6)\hat{C}_1 = 35,98; \hat{C}_4 = \frac{47}{10}; \hat{C}_6 = \frac{7}{8}$.

2.3) Como $C_{N_K} = \frac{7}{8} \geq 0$, segue a solução atual,

$$\hat{x}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 160 \\ 35 \end{pmatrix} \text{ e } \hat{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 35 \\ 0 \\ 160 \\ 0 \end{pmatrix},$$

é ótima.

A função objetivo, escrita em termos das variaveis não-básicas, é $-f(x) = f(\hat{x}) + \hat{C}_{N_1}x_{N_1} + \hat{C}_{N_4}x_{N_4} + \hat{C}_{N_6}x_{N_6} = -85 - 1x_1 + 0x_4 + 0x_6 \geq -85$, para todo $x_1 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ e $x_6 \geq 0$. Como os custos relativos das variáveis não-básicas são positivos, segue que: $-f(x) > -85$ para toda solução factível diferente da solução básica e portanto, a solução ótima obtida é única.

4.3 Problema de Empacotamento de DAGs - PED

Para que seja possível o estudo de tal problema, primeiramente, é viável considerar os conceitos básicos da Teoria dos Grafos. Um grafo G(V,A) é definido por um conjunto de vértices e arestas, onde V é um conjunto não vazio formado pelos vértices e A é o conjunto formado pelas arestas que são as conexões entre os vértices. Quando estas arestas possuem uma orientação dizemos que temos um Grafo Dirigido (ou Digrafo). Já um Grafo Acíclico Dirigido (DAG) é um grafo dirigido que não possui um ciclo.

O Problema de Empacotamento de DAGs (Directed Acyclic Graphs) é apresentado como uma variação do Problema de Empacotamento por Faixas (Strip Packing), onde os elementos a serem empacotados são considerados retângulos. Os Grafos Acíclicos Dirigidos são os itens a serem empacotados sobre um conjunto de elementos de processamento denominado Unidades Funcionais (UFs). Ao conjunto de Unidades Funcionais denomina-se Matriz de UFs (uma matriz quadrada de ordem 4) onde cada elemento da matriz é uma unidade funcional, representados como um grafo base (conjunto de vértices e arestas onde um vértice não possui conexão e todos os outros vértices são interligados por conexões que partem dele). Sobre o grafo base é possível empacotar diferentes tipos de DAGs. Podem-se combinar os conjuntos de unidades funcionais para formar um novo conjunto maior para empacotar os DAGs. A altura deste novo conjunto de unidades funcionais representa o tempo de execução e a largura representa a quantidade de recursos disponíveis que podem ser executados simultaneamente. O objetivo do PED é então a determinação do número mínimo de elementos de processamento para executarem um conjunto de operações agrupadas através do DAG.

Dependendo da configuração do hardware (processador) adotado, o grafo base pode ter uma topologia de interconexão de nós bastante complexa. Por exemplo, na arquitetura 2D-VLIW utilizada nos experimentos de (Santos, et.al, 2007), o grafo base representa uma matriz de UFs. Na Figura 4.9 tem-se um modelo de empacotamento de DAGs, à esquerda existem três DAGs a serem empacotados e à direita tem-se a matriz de UFs já com esses DAGs empacotados.

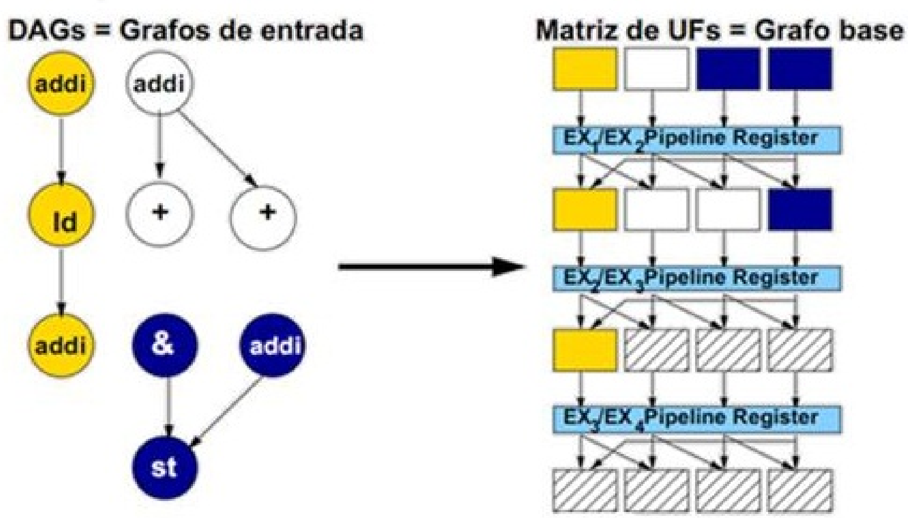


Figura 4.9: Exemplo de Empacotamento de DAGs

Note que ao empacotar foi utilizada apenas uma Matriz de UFs, este fato ocorreu devido às seguintes características.

A quantidade de arcos contidos nos vértices desses DAGs é menor do que os arcos disponíveis em cada nó da Matriz de UFs; o número de vértices desses três DAGs é inferior ao número de nós da Matriz de UFs; esses DAGs não têm mais que quatro nós, que é o número de unidades funcionais em cada coluna da matriz.

Existem várias maneiras de como empacotar itens dentro de strips, por isso os métodos que conseguem resolver esse problema de forma mais eficientes são estudados, dentre eles temos o método heurístico. O método heurístico é um método formado por um conjunto de regras ou instruçoes que resultam na solução de um problema de forma uma rápida e simples com o menor gasto de energia e esforço.

Serão utilizados dois métodos heurísticos, o algoritmo First Fit Decreasing Height (FFDH) e o algoritmo Best Fit Decreasing Height (BFDH), e um modelo matemático para encontrar uma solução para o problema de Empacotamento de DAGs.

4.3.1 First Fit Decreasing Height (FFDH)

A heurística First Fit Decreasing Height (FFDH) é um método que organiza os retângulos por ordem de altura e inserindo-os dentro de um strip com largura finita e altura infinita, sem ultrapassar essa largura e sem os retângulos se sobreporem. Vale ressaltar que o retângulo citado tem a mesma altura e largura que o DAG que está sendo representado por ele.

São inseridos n retângulos informando respectivamente suas alturas e larguras. Logo estes retângulos são ordenados em ordem não-crescente de altura, e depois são inseridos no strip começando do retângulo de maior altura ao retângulo de menor altura, o método tenta encaixar um retângulo por vez em níveis já existentes, o nível é a altura do primeiro retângulo a ter sido inserido na linha horizontal do strip se encontrando disposto da esquerda para a direita; ao tentar encaixar o retângulo no primeiro nível, se a altura do retângulo for menor ou igual à altura do nível e a largura do retângulo junto com os outros que se encontrarem inseridos for menor ou igual a largura do strip o retângulo é inserido naquele nível, caso falhe uma das observações acima o retângulo não é inserido naquele nível e passará para o próximo nível, e isto ocorre de formas sucessivas até encontrar o espaço livre para a inserção do retângulo, caso não encontre será criado um novo nível para a inserção do retângulo em questão. Por fim, quando todos os retângulos forem inseridos o método nos informa o tamanho da altura do strip e a disposição dos retângulos ordenados por níveis.

ALGORITMO: First Fit Decreasing Height (FFDH)

Entrada: Um conjunto de itens I.

Saída: Um conjunto de níveis.

1) Ordene os itens de I em ordem não-crescente de altura;
2) Crie um novo nível vazio. Seja N o conjunto de níveis;
3) **para cada** $i \in I$ **faça**
4) Seja $n \in N$, na ordem em que foi criado, tal que i caiba em n;
5) **se** encontrou n **então**
6) Coloque i em n alinhado a esquerda;
7) **senão**
8) Crie um novo nível vazio;
9) Coloque i no novo nível alinhado a esquerda;
10) **fim**
11) **fim**
12) **devolva N**.

4.3.2 Best Fit Decreasing Height (FFDH)

A heurística Best Fit Decreasing Height (BFDH) é um método que têm quase a mesma forma de funcionamento do método FFDH, ou seja, ordena os retângulos por ordem de altura e inserindo-os dentro de um strip com largura finita e altura infinita, sem ultrapassar essa largura e sem os retângulos se sobreporem, a diferença é que quando um retângulo vai ser empacotado, ele procura por um nível cujo espaço restante após o empacotamento do retângulo é o menor possível, considerando além da altura, a largura restante do nível, ou seja, procura empacotar o retângulo onde melhor couber.

ALGORITMO: Best Fit Decreasing Height (BFDH)

Entrada: Um conjunto de itens I.

Saída: Um conjunto de níveis.

1) Ordene os itens de I em ordem não-crescente de altura;

2) Seja N o conjunto de níveis. Denote por SN o espaço restante para empacotamento (em largura) do nível N;

3) **para cada** $i \in I$ **faça**

4) Seja $N \in N$ tal que $SN-$ largura $(i) \geq 0$ é mínimo;

5) **se** encontrou N **então**

6) Coloque i em N alinhado a esquerda;

7) **senão**

8) Crie um novo nível;

9) Coloque i neste nível alinhado a esquerda;

10) **fim**

11) **fim**

12) **devolva** N.

Para Aplicar estas heurísticas, considere o conjunto de DAGs na Figura 4.10.

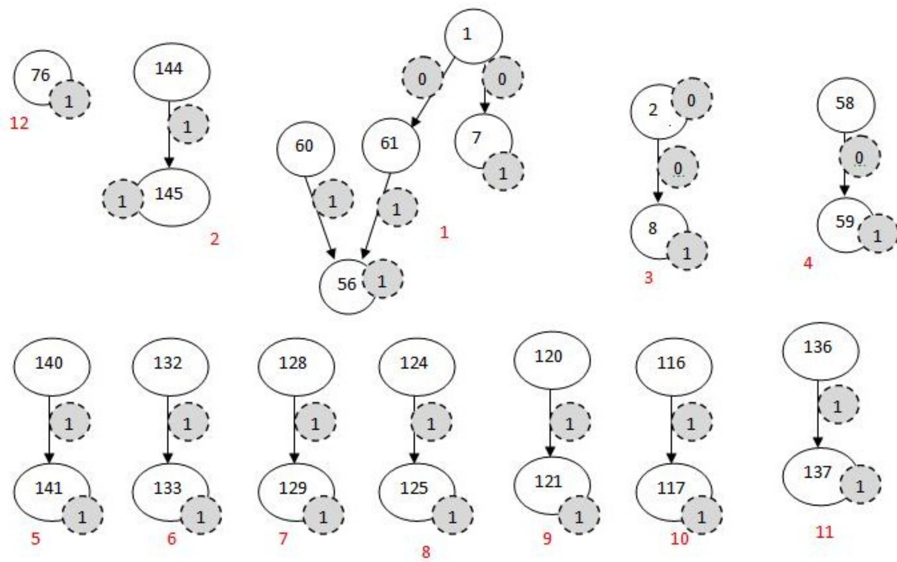


Figura 4.10: Conjunto de DAGs

Ao efetuar o cálculo das alturas e larguras dos DAGs da Figura 4.10, têm-se a seguinte lista:

Conjunto de DAGs
i: índice do retângulo
H: altura do retângulo
W: largura do retângulo

i	H	W
1	3	3
2	2	1
3	2	1
4	2	1
5	2	1
6	2	1
7	2	1
8	2	1
9	2	1
10	2	1
11	2	1
12	1	1

Considerando uma faixa(strip) de altura infinita e largura 4 (devido a matriz de unidade funcional ser de ordem 4), ao aplicar as heurísticas obtêm-se os seguintes resultados:

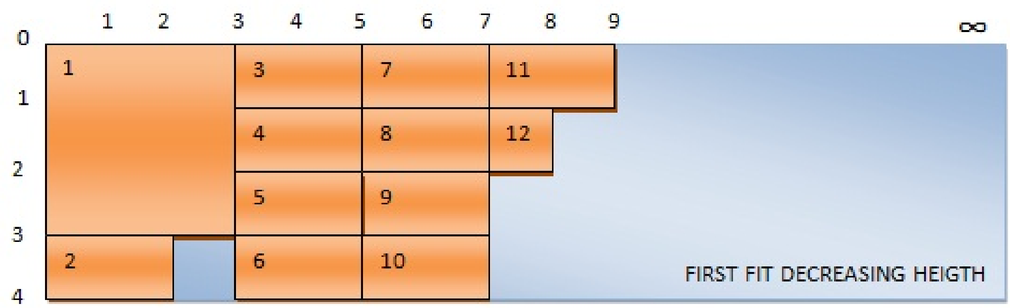


Figura 4.11: Empacotamento pela heurística FFDH

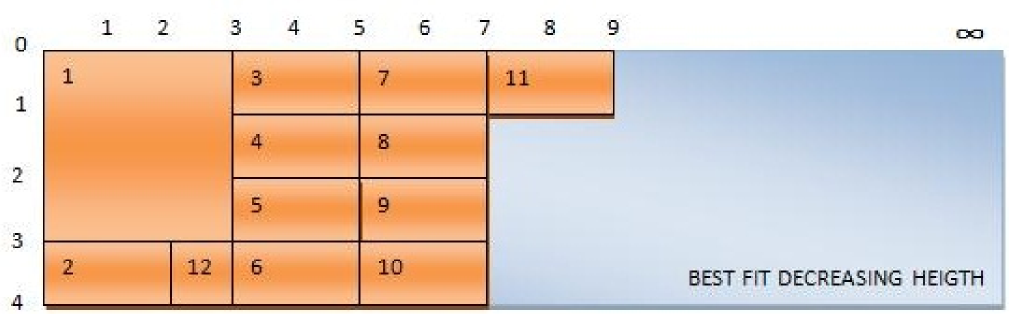


Figura 4.12: Empacotamento pela heurística BFDH

Ao comparar as heurísticas aplicadas nota-se que apesar de não possuirem o mesmo modo de agrupamento, a faixa gerada pela heurística FFDH e a faixa gerada pela heurística BFDH possuem a mesma altura, que no caso é 9.

4.3.3 Modelo Matemático para o Problema do Empacotamento de DAGs

Tendo como estudo o modelo matemático proposto em (Lee e Sewell, 1999), o qual aborda o problema de minimizar a quantidade de espaço desperdiçado quando se corta um conjunto de peças retangulares de uma única folha retangular e propõe uma formulação matemática para o problema. Segue as seguintes definições, as quais serão usadas no modelo.

$I = 1, \cdots, n$ são os índices dos retângulos.

L_{min} = Altura da faixa a ser minimizada

W_0 = largura da faixa,

$x_L^i = x$ coordenada esquerda inferior do retângulo R_i,

$y_L^i = y$ coordenada esquerda inferior do retângulo R_i,

$x_u^i = x$ coordenada direita superior do retângulo R_i,

$y_u^i = y$ coordenada direita superior do retângulo R_i,

$l_{ij=1}$ se R_i esta a esquerda do R_j, caso contrário 0,

$b_{ij} = 1$ se R_i esta a cima do R_j, caso contrário 0,

$\overline{L}$ = A altura máxima da faixa

Formulação do modelo matemático:

$$Minimizar L_{min}$$

$$x_u^i \leq W_0 i \in I, \tag{1}$$

$$y_u^i \leq L_{min} i \in I, \tag{2}$$

$$x_u^i = x_L^i + W_i i \in I, \tag{3}$$

$$y_u^i = y_L^i + L_i i \in I, \tag{4}$$

$$x_u^i \leq x_L^j + W_0(1 - l_{ij}) i \neq j \in I, \tag{5}$$

$$y_u^i \leq y_L^j + \overline{L}(1 - b_{ij}) i \neq j \in I, \tag{6}$$

$$l_{ij} + l_{ji} + b_{ij} + b_{ji} \geq 1 i, j \in I, i < j, \tag{7}$$

$$L_{min}, x_u^i, y_u^i, x_L^i, y_L^i \geq 0, \tag{8}$$

A restrição (1) assegura que R_i não se sobreponha à margem direita da faixa. A restrição (2) força L_{min} para ser tão grande como a borda superior de cada retângulo. As restrições (3) e (4) correspondem à execução de uma adequada relação entre as coordenadas do canto inferior esquerdo (x_L^i, y_L^i) e as coordenadas do canto superior direito (x_u^i, y_u^i). A restrição (5) assegura que a margem direita do R_i esteja localizado à esquerda do R_j, se l_{ij} for igual a um. A restrição (6) assegura que R_i esteja localizado abaixo de R_j, se b_{ij} for igual a um. A restrição (7) evita que R_i sobreponha R_j, exigindo que R_i esteja localizado à esquerda do R_j, ou R_j esteja localizado à esquerda de R_i, ou R_i esteja localizado abaixo R_j, ou R_j esteja localizado abaixo R_i. A restrição (5) pode ser excluída e a (7) pode ser substituída pela restrição

$$b_{ij} + b_{ji} = 1 \; \forall \; i \neq j \in I : W_i + W_j > W_0(10)$$

A não negatividade de $x_L^i e y_L^i \cdot$ pode ser substituída pelas restrições

$$x_L^j \geq l_{ij} W_i \forall \; i \neq j \in I, (11)$$

$$y_L^i \geq b_{ij} L_i \forall \; i \neq j \in I.(12)$$

As restrições (1) e (2) podem ser substituídas por

$$x_u^i \leq W_0 - l_{ij} W_j \forall \; i \neq j \in I, (13)$$

$$y_u^i \leq L_{min} - b_{ij} L_j \forall \; i \neq j \in I.(14)$$

As restrições (11) e (13) podem ser melhoradas, seja R_i um retângulo tal que $W_i + W_{max} > W_0$, onde W_{max} é a largura do maior retângulo. Suponha que para o momento em que os retângulos forem ordenados estejam de tal forma que $W_1 \leq W_2 \leq \cdots \leq W_n$. Seja j o menor dos índices de tal forma que $W_j + W_{j+1} > W_0$ e $W_i + W_j > W_0$. Desde que $J_i = \{j, j+1, \cdots, n\} \setminus \{i\}$. Então,

$$y_L^j \sum_{i \in J_i} b_{ij} L_i \forall \; j \in I : W_j + W_{max} > W_0, \qquad (15)$$
$$y_u^j \leq L_{min} - \sum_{j \in J_i} b_{ij} L_j \forall \; i \in I : W_i + W_{max} > W_0 \qquad (16).$$

As desigualdades são válidas desde que nenhum dos retângulos em J_i esteja localizado lado a lado. Assim o modelo final fica sendo:

$$MinimizarL_{min}$$

$$b_{ij} + b_{ji} = 1 \forall\ i \neq j \in I : W_i + W_j > W_0, \qquad (1)$$

$$x_L^j \geq l_{ij} W_i \forall i \neq j \in I, \qquad (2)$$

$$x_u^i \leq W_0 - l_{ij} W_j \forall i \neq j \in I, \qquad (3)$$

$$y_L^j \geq \sum_{i \in J_i} b_{ij} L_i \forall\ j \in I : W_j + W_{max} > W_0, \qquad (4)$$

$$y_u^j \leq L_{min} - \sum_{j \in J_i} b_{ij} L_j \forall\ i \in I : W_i + W_{max} > W_0 \qquad (5)$$

Utilizando o modelo final para modelagem matemática para o Problema de Empacotamento de DAGs, tem-se a seguinte aplicação:

Considere a largura da faixa igual a 4 (devido a matriz de unidade funcional ser de ordem 4) e altura infinita, e o conjunto de DAGs na Figura 4.10 na forma de retângulos. O objetivo é, usando o modelo matemático proposto, determinar a menor altura da faixa a ser utilizada.

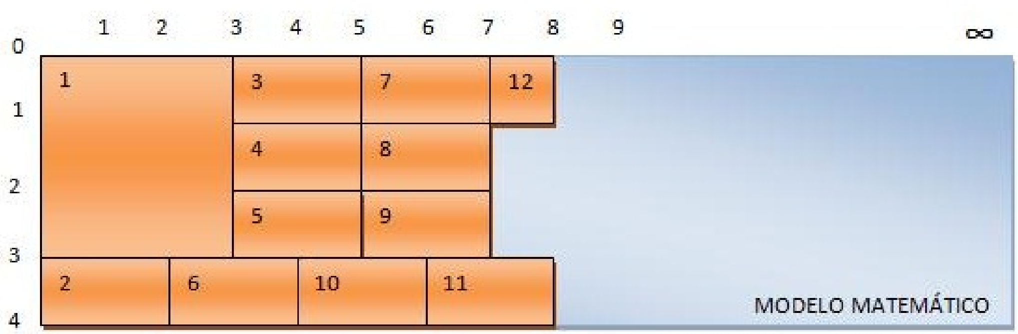


Figura 4.13: Empacotamento pelo modelo matemático

Comparando R_1 com outros R_i, tem-se que ele encaixa no começo da faixa. Comparando o R_2 com outros R_i, temos que ele encaixa ao lado direito do R_1, completando a largura da faixa, o R_3 foi comparado com os R_i e encaixou perfeitamente logo acima do R_1 no canto esquerdo da faixa, o mesmo ocorreu com os R_4 e R_5, os quais foram empacotados lado a lado, acima do R_1, já o R_6 foi encaixado ao lado direito do

R_5 acima do R_2, completando a largura da faixa, os retângulos R_7, R_8 e R_9, foram comparados com os R_i e empacotados acima dos retângulos R_3, R_4 e R_5, respectivamente. O retângulo R_{10} foi empacotado exatamente em acima do R_6, completando a largura da faixa, o R_{11} foi comparado com os R_i e o melhor local para encaixá-lo foi exatamente acima do R_{10} completando a largura da faixa já o retângulo R_{12} voltou para o inicio da faixa sendo empacotado acima do R_7.

Encontrando assim as seguintes coordenadas de cada retângulo:

$$R_1 : (x_L^1, y_L^1) = (0,0); (x_u^1, y_u^1) = (3,3);$$

$$R_2 : (x_L^2, y_L^2) = (3,0); (x_u^2, y_u^2) = (4,2);$$

$$R_3 : (x_L^3, y_L^3) = (0,3); (x_u^3, y_u^3) = (1,5);$$

$$R_4 : (x_L^4, y_L^4) = (1,3); (x_u^4, y_u^4) = (2,5);$$

$$R_5 : (x_L^5, y_L^5) = (2,3); (x_u^5, y_u^5) = (3,5);$$

$$R_6 : (x_L^6, y_L^6) = (3,2); (x_u^6, y_u^6) = (4,4);$$

$$R_7 : (x_L^7, y_L^7) = (0,5); (x_u^7, y_u^7) = (1,7);$$

$$R_8 : (x_L^8, y_L^8) = (1,5); (x_u^8, y_u^8) = (2,7);$$

$$R_9 : (x_L^9, y_L^9) = (2,5); (x_u^9, y_u^9) = (3,7);$$

$$R_{10} : (x_L^{10}, y_L^{10}) = (3,4); (x_u^{10}, y_u^{10}) = (4,6);$$

$$R_{11} : (x_L^{11}, y_L^{11}) = (3,6); (x_u^{11}, y_u^{11}) = (4,8);$$

$$R_{12} : (x_L^{12}, y_L^{12}) = (0,7); (x_u^{12}, y_u^{12}) = (1,8)$$

Nota-se que a altura necessária para empacotar o conjunto de DAGs pelo modelo mátemático foi 8. Assim comparando as duas heurísticas e o modelo matemático pode-se afirmar que a menor altura necessária para empacotar este conjunto de DAGs será 8. Conforme a Figura 4.13 .

4.4 Coniderações Finais

Este capítulo apresentou uma introdução à Otimização Linear e foram estudados seus principais conceitos básicos. Também foi feita uma descrição do Método Simplex e sua fundamentação teórica. Constata-se a grande importância das matrizes na Otimização Linear onde se tem uma imensa variedade de operações de matrizes até que se obtenha uma solução considerada ótima, utiliza-se de maneira constante os conceitos básicos de matrizes em seus eventuais cálculos.

O Problema de Empacotamento de DAGs foi apresentado e assim realizado um estudo de duas heurísticas, First Fit Decreasing Height (FFDH) e Best Fit Decreasing Height (BFDH), juntamente com um modelo matemático para buscar uma solução para o problema.

CAPÍTULO 5

AS CONCLUSÕES

O presente trabalho abordou um contexto histórico sobre o surgimento do conceito de matrizes, e como suas definições e propriedades foram surgindo com o passar do tempo e seus descobridores.

No capítulo 2 foram analisados livros didáticos do Ensino Médio, voltados para o ensino de matrizes. Ao final, foi proposta uma sequência didática a fim de favorecer o processo de aprendizagem do aluno em relação ao conteúdo de Matrizes, nesta proposta é utilizado um software matemático que permite ao professor criar situações em que o aluno tenha que realizar investigações e levantar conjecturas, possibilitando uma melhor compreensão e exploração dos conceitos trabalhados.

O capítulo 3 é voltado para referenciais teóricos para o estudo de Matrizes, nele formulou-se uma síntese de definições, teoremas e proposições, com suas respectivas demonstrações quando cabíveis. Este capítulo teve por objetivo caracterizar uma construção teórica sobre matrizes dando assim um subsídio para os professores. Obtendo uma compreensão sobre o objeto de estudo e possíveis situações de operações durante o trabalho.

No capítulo 4 faz-se um estudo sobre situações onde se pode utilizar matrizes, tanto na sua formulação, quanto em sua resolução, tornando clara a importância deste conteúdo para o desenvolvimento da ciência. Para tal verificação, fez-se uma abordagem à Otimização Linear estudando seus principais conceitos, por fim um estudo do Problema de Empacotamento de DAGs buscando uma solução.

Como trabalhos futuros pode-se realizar um estudo mais profundo da otimização linear analisando outros métodos de solução, como também efetuar um estudo aprofundado de técnicas para resolver o Problema de Empacotamento de DAGs.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Arenales, M., Armentano, V., Morabito, R., Yanasse, H. (2007). Pesquisa Operacional. Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda.

[2] BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996.

[3] BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: MEC/Semtec, 2000.

[4] BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

[5] BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). PCN + Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

[6] BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB), Departamento de Políticas de Ensino Médio. Orientações Curriculares do Ensino Médio. Brasília: MEC /SEB, 2006.

[7] Dante, L. R. (2010). Matemática: Contexto e Aplicações. são Paulo: Ática.

[8] Dantzig, G. B. (1963). Linear Programming and Extesions. Princeton University Press.

[9] Diniz, M. I. S. V., Smole, K. S. (2010). Matemática: Ensino Médio. São Paulo: Saraiva.

[10] Educação, S. d. (2011). Guia de Livros Didáticos : PNLD 2012. Brasília: Ministério da Educação.

[11] Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., Almeida, N. d. (2010). Matemática: ciência e aplicações. São Paulo: Saraiva.

[12] Lachtermacher, G. (2009). Pesquisa Operacional na tomada de decisões. São Paulo: Pearson Prentice Hall.

[13] Lee, H. F., Sewell, E. C. (1999). The strip-packing problem for a boat manufacturing firm. . Transactions 31,639-651 .

[14] Lipschutz, S., Lipson, M. L. (2006). Teoria e Problemas de álgebra linear. Porto Alegre: Brokman.

[15] Moreira, D. A. (2007). Pesquisa Operacional: curso introdutório. São Paulo: Thomson Learning.

[16] Paiva, M. (2010). Matemática. São Paulo: Moderna.

[17] Ribeiro, J. (2011) Matemática: Ciência, Linuagem e Tecnologia. São Paulo: Scipione.

[18] Santos, R., Azevedo, R., Oliveira, R. (2007). A DAGs-Packing Heuristic for a High Performance Processor Architecture. Proceedings of the 39 Brazilian Symposium of Operational Reserch. Fortaleza- Brasil.

[19] Sérgio, P. P. (9 de outubro de 2011). fatos matemáticos. Acesso em 28 de janeiro de 2013, disponível em http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/:http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2011/10/uma-breve-historia-das-matrizes-e.html

[20] Shokranian, S. (2009). Uma introdução à álgebra linear. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda.

[21] Taha, H. A. (2008). Pesquisa Operacional. São Paulo: Pearson Prentice Hall.