Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Discriminantes de Equações com uma Variável †

por

Alberis Lins de Souza

sob a orientação do

Prof. Dr. Wallace Mangueira de Sousa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN/ UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Maio/2021
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S729d Souza, Alberis Lins de.
Discriminantes de equações com uma variável / Alberis Lins de Souza. - João Pessoa, 2021.
129 f. : il.

Orientação: Wallace Mangueira de Sousa.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática - Equações. 2. Equação - Discriminante - Variável. 3. Resultantes polinomiais. 4. Matriz de Sylvester. I. Sousa, Wallace Mangueira de. II. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por WALQUELINE DA SILVA ARAUJO - CRB-15/514

Discriminantes de Equações com uma Variável

por

Alberis Lins de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Pro ssional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Wallace Mangueira de Sousa

Prof. Dr. Wallace Mangueira de Sousa - UFPB (Orientador)

Prof(a). Dr(a). Gabriela Albuquerque Wanderley - UFPB

Ricardo Burity C. Macedo

Prof(a). Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo - UFPB

Maio/2021

Agradecimentos

A Deus, por dar-me a alegria de realizar mais um projeto de vida, mais um sonho. Nos momentos mais difíceis, deu-me tranquilidade, perseverança e ousadia. Agradeço por seu cuidado e seu infinito amor.

Aos meus familiares e, em especial, a meus pais (in memorian) pela educação, pelo incentivo, pelos ensinamentos, por tanto amor, dedicação e por acreditarem sempre em mim.

Ao meu orientador Prof. Dr. Wallace Mangueira de Sousa, por todos os conhecimentos compartilhados, por estar sempre à disposição e orientar-me de maneira exemplar.

A todos os professores e Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), pelo profissionalismo e dedicação demonstrados. Aos ricos ensinamentos transmitidos por todos os professores e pela organização e a atenção de toda a coordenação.

Aos membros da banca de qualificação e defesa, que, carinhosamente, aceitaram o convite de participação e dedicaram parte de seu precioso tempo para examinarem nosso trabalho.

Aos meus colegas de curso, pela oportunidade de compartilharmos experiências de conhecimentos, pelo companheirismo e pelo ambiente descontraído, amigável e de respeito no qual convivemos.

Dedico esta dissertação, primeiramente, a Deus, por estar sempre presente na minha vida com seu imenso e incondicional amor. Estendo a minha família e amigos, que foram fontes de estímulo e me fizeram acreditar em que posso dar mais passos importantes em busca do crescimento e da vitória. A todos os meus professores, desde os primeiros anos escolar, com sua arte de ensinar, transmitindo conhecimento e sabedoria.

Resumo

Desde a antiguidade, com descobertas de papiros e tabuletas de argila, o estudo da álgebra e, principalmente, a ciência das equações tornaram-se grandes desafios para os extraordinários estudiosos matemáticos. Ao longo da história, vários conceitos e nomenclaturas algébricas foram surgindo. Nas equações de 2º e 3º graus, por exemplo, deparamo-nos com o chamado discriminante de equações e o calculamos, este é o objeto de estudo desta pesquisa. A presente dissertação consiste, então, em verificar a natureza das raízes de equações de acordo com valores assumidos por seu discriminante, iniciando com casos particulares. Analisa-se quando um número inteiro pode ser valor de um discriminante de equações quadráticas com todos os seus coeficientes inteiros; representa-se o discriminante em função das raízes de equações de 2º e 3º graus, especificamente, e de maneira geral, relaciona-se o discriminante com raízes de equações de grau. Também relaciona-se o discriminante em função dos coeficientes de equações, fazendo uma conexão com resultantes polinomiais e Matriz de Sylvester, onde seus conceitos são explorados.

Palavras-chaves: Equações, Discriminantes de Equações com uma Variável, Resultantes Polinomiais e Matriz de Sylvester.

Abstract

Since ancient times, with the discoveries of papyrus and clay tablets, the study of algebra and, above all, the science of equations, have become great challenges for extraordinary mathematical scholars. Throughout history, several algebraic concepts and nomenclatures emerged. In the 2nd and 3rd degree equations, for example, we come across the so-called discriminant of equations and we calculate it, this is the object of study of this research. The present dissertation consists, then, in verifying the nature of the roots of equations according to values assumed by their discriminant, starting with particular cases. It is analyzed when an integer can be the value of a quadratic equation discriminant with all its integer coefficients; the discriminant is represented as a function of the roots of 2nd and 3rd degree equations, specifically, and in general, the discriminant is related to the roots of degree equations. The discriminant is also related as a function of the equations coefficients, making a connection with polynomial results and Sylvester Matrix, where its concepts are explored.

Keywords: Equations, Discriminat of Equations in one Variable, Polynomial Resultants and Sylvester Matrix.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O objetivo desta dissertação é provar que o discriminante de equações pode ser estudado e analisado de diversas formas, não somente por meio de equações de 2º grau, como é visto no ensino básico. Pode-se recorrer também a equações de 3º e 4º graus, especificamente; principalmente para equações $a_n x^n + ... + a_0 = 0$, de grau n e $a_n \neq 0$. Foram representados e demonstrados os discriminantes em função dos coeficientes das equações e em função das suas raízes.

Ao se estudar equações de 2º grau, uma possível indagação pode ocorrer por parte dos alunos e também dos professores, estes últimos poderão, inclusive, lançar como desafio para seus discentes o seguinte questionamento: Qualquer número inteiro pode ser resultado de um discriminante de equações de 2º grau, cujos coeficientes são todos inteiros? Tal fato é bastante curioso. Buscou-se demonstrar a resposta para essa pergunta.

De acordo com o sinal do discriminante - positivo, negativo ou nulo – verificou-se a natureza das raízes. As raízes, como visto neste estudo, podem pertencer ao conjunto dos números reais e complexos, cujos valores assumidos são diferentes, múltiplos ou conjugados. Particularmente, para representar a multiplicidade e diferença das raízes de equações de 3º grau de maneira gráfica, utilizamos o Software Geogebra.

Para o intento acima descrito, apresenta-se a história de vida de proeminentes matemáticos presentes em vários momentos ao longo da história, leva-se em considerações a época vivida, os locais por onde passaram e as obras escritas por eles. Com isso, tem-se uma visão das dificuldades e desafios enfrentados por esses estudiosos. A pesquisa também promove uma reflexão quanto às possibilidades e aos limites que cada um carregava em seu tempo e do quanto foram importantes para todo universo matemático.

O Capítulo 1 desta dissertação traz relatos históricos da descoberta de equações do 1º ao 4º grau, partindo dos papiros de Rhind e de Moscou e passando pela Plaqueta de Argila Babilônica. Houve disputas de estudiosos de várias civilizações, como, por exemplo, babilônica e egípcia, para alcançar resultados perfeitos de que hoje desfrutamos. Com base na pesquisa desse percurso histórico, são apresentados os métodos de resolução de equações de 2º grau de Viète, de Horner e de Euler e, para a resolução de equações de $3^{\underline{o}}$ grau, o método de Cardano.

O Capítulo 2 apresenta as equações do ponto de vista geométrico. Cita-se um problema do livro de Nathan Daboll, cuja solução foi analisada tanto de forma algébrica como geométrica, por meio de uma reta. Nas equações de $2^{\underline{o}}$ grau, destacam-se quatro métodos: os dois primeiros são das proporções e da aplicação de áreas, desenvolvidos pelos gregos antes de Cristo; o método de René Descartes e o método geométrico desenvolvido pelo matemático brasileiro Nelson Tunala, com referência ao método de Euclides. Com as cúbicas, tratou-se da resolução geométrica de Omar Khayyam.

O Capítulo 3 retoma as equações de $3^{\underline{o}}$ grau, começando com a utilização de fórmulas trigonométricas, deduzidas por Viète, nas resoluções das equações cúbicas. Em seguida, evidenciam-se os dois métodos de Newton: o algébrico, no qual se explora também o teorema de Bernhard Bolzano, este imprescindível para o entendimento do método algébrico. Em seguida, tratou-se do método não algébrico. O capítulo 3 termina com uma aplicação do teorema de Briot-Ruffini na resolução de uma equação de $3^{\underline{o}}$ grau.

O Capítulo 4 aborda a álgebra dos polinômios, com ênfase às raízes, dada a importância e o fato de este aspecto da álgebra ser tema explorado como pré-requisito para assuntos tratados em outros capítulos desta dissertação. Definições, proposições e teoremas fundamentais são também explanados.

O último Capítulo, o $5^{\underline{o}}$, aborda o tema central deste trabalho de pesquisa: discriminantes de equações com uma variável. Analisa-se o discriminante quanto a diversos aspectos importantes, incluindo fórmulas para calcular seu valor numérico em função dos coeficientes numéricos e das raízes das equações. Também se verificou a natureza das raízes conforme valores negativo, positivo e nulo, assumidos pelo discriminante.

Capítulo 1

Equações Algébricas: Contando História.

1.1 Equações de 1º e 2º Graus (Relatos Históricos).

A primeira origem da palavra "equação" vem do termo árabe *adala*, que significa "ser igual a". Do latim, a palavra "equação"veio de *equatione*, que significa "equacionar, igualar".

Os primeiros indícios do uso de equações estavam em dois valiosos papiros: Papiro Egípcio de Ahmes ou de Rhind, escrito cerca de 1650 a.C e Papiro de Moscou, escrito cerca de 1850 a.C.

O Papiro de Moscou (Figura 1.1), também chamado de Papiro de Golenischev em homenagem ao colecionador russo Abraão V. S. Golenischev, que o comprou no Egito em 1893. Em 1917, pertenceu ao Museu de Belas Artes de Moscou, daí passou a ser conhecido como Papiro de Moscou. Até hoje é desconhecido o escriba que o escreveu. Possui 25 problemas matemáticos envolvendo áreas, volume, medições, equações e outros. Seu comprimento aproxima-se ao do Papiro de Rhind e um quarto da largura (Boyer, 1996, p. 13).

O Papiro de Rhind ou, menos frequentemente chamado, Papiro de Ahmes (Figura 1.2) é o mais extenso encontrado no universo da matemática. Descoberto nas ruínas de um antigo edifício de Tebas, mede cerca de 0,30 metros de altura e 5 metros de comprimento. Foi copiado pelo escriba egípcio Ahmes e comprado em 1858, na cidade de Luxor, pelo arqueólogo, advogado e antiquário escocês Alexander Henry Rhind. Menciona que os registros provêm de um protótipo do Reino do Meio, cerca de 2000 a 1800 a.C.. Rhind morreu em 1863, seu papiro foi adquirido pelo British Museum, Museu Britânico de Londres. Além de equações lineares, nele há problemas matemáticos envolvendo aritmética, frações e trigonometria. De acordo com a publicação “Papiro de Rhind” no site do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, um exemplo que aparece no papiro, que trata de equação é: "De uma quantidade de milho equivalente a vinte e uma medidas, um camponês deve dar ao Faraó uma parte igual à quinta parte da sua. Quanto lhe restará"?

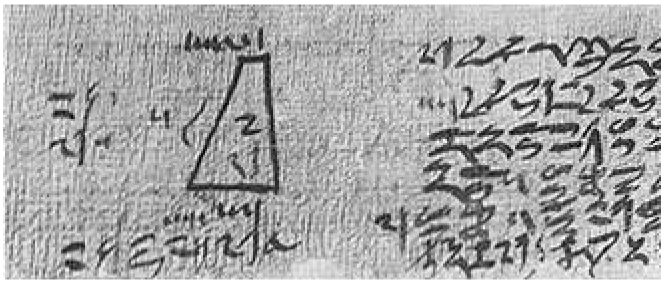


Figura 1.1: Trecho do Papiro de Moscou, 1850 a.C
Fonte: <https://www.egyptforever.hu/en/articles/about-ancient-egypt/the-moscow-papyrus.html>.

Figura 1.2: Trecho do Papiro de Ahmes, 1650 a.C
Fonte: <http://mundomatematicodocaldas.blogspot.com/2013/10/papiro-de-rhind.html>.

Os símbolos, praticamente, não eram presentes naquela época; os papiros eram compostos, quase na sua totalidade, de descrições verbais, como por exemplo, um dos problemas de Ahmes: "Uma quantidade, somada a seus 2/3 mais sua metade e mais sua sétima parte perfaz 33. Qual é esta quantidade"?

Os egípcios usavam um artifício chamado de "Regra da Falsa Posição" para resolver problemas de equações, sem usar a simbologia e a forma como aplicamos hoje. Por exemplo: qual o número que, somado à sua quarta parte, dá 20? Pela Regra da Falsa Posição, usava-se um número como hipótese, por exemplo, neste caso, o número 8. Em seguida, somava-o com sua quarta parte ($8+2=10$). Exatamente a metade dos 20 que deveria dar. Assim, o número procurado é o dobro de 8.

Os Babilônicos, no mesmo período, desenvolveram mais, pois já trabalhavam com equações de 2º grau e resolviam-nas por um método utilizado pelos hindus quase 3 milênios depois, o chamado "completamento do quadrado". Os problemas algébricos eram colocados e solucionados em um mesmo enunciado, com representações um tanto abstratas, utilizando comprimento, largura ou lado de um quadrado e áreas retangulares.

A Plaqueta de Argila Babilônica (Figura 1.3), escrita cerca de 2000 e 1600 a.C., contém 24 problemas algébricos incluindo as formas simples de equações de segundo grau. Descoberta no sul da Mesopotâmia, encontra-se no Museu Britânico sob a denominação BM13901. Vejamos o descrito abaixo, retirado da Plaqueta de Argila Babilônica.

1. A superfície e meu confronto eu acumulei: $45'$, é ele. 1, a projeção.
2. Você propõe. A metade de 1 você quebra $30'$ e $30'$ você mantém.
3. $15'$ para $45'$ você acrescenta: por 1, 1 é igual. $30'$ que você manteve.
4. Dentro de 1, você rasga fora: $30'$ o confronto.

Figura 1.3: Plaqueta de Argila Babilônica.
Fonte: <https://hist1039.omeka.fas.harvard.edu/items/show/165>.

Esta questão encontrada na plaqueta de argila trata com equações quadráticas utilizando figuras geométricas. A palavra confronto, citada na 1ª e 4ª linhas, refere-se à medida do lado de um quadrado que será encontrado e o acúmulo, uma operação de soma, que pode ser também a junção de magnitudes de diferentes tipos, como, por exemplo: comprimentos e áreas, áreas e volumes. Sendo assim, a soma do lado de um quadrado com sua área é igual a $45'$. Na linguagem moderna, essa soma entre a área do quadrado com o seu lado vale efetivamente $45/60$, ou de maneira simplificada, $3/4$. Interpretando na linguagem atual, formamos a equação de 2º grau $x^2 + 1 \cdot x = \dfrac{3}{4}$.

Para fazer esta soma concretamente significativa, o lado é fornecido com uma projeção - nos termos babilônicos a projeção representa algo que se quer destacar. Assim, o lado é transformado em um retângulo de comprimento igual a 1, que pode ser significativamente fixado na área (Figura 1.4 - A).

Na segunda linha do enunciado, observamos que o retângulo é dividido ao meio, de modo que $30'$ é retirado e $30'$ é mantido. A representação $30'$ corresponde à fração $30/60$, e a divisão do comprimento do retângulo ao meio resulta em dois retângulos com comprimentos de medidas iguais a $30/60$, ou escrevendo de maneira simplificada, $1/2$ (Figura 1.4 - B).

Como o retângulo cinza foi descartado no processo anterior, um quadrado suplementar é anexado com a projeção do quadrado branco no lado adjacente do quadrado (Figura 1.4 - C).

Na terceira linha, houve o acréscimo de uma área $15'$, quadrado em azul, à área $45'$ (Figura 1.4 - D).

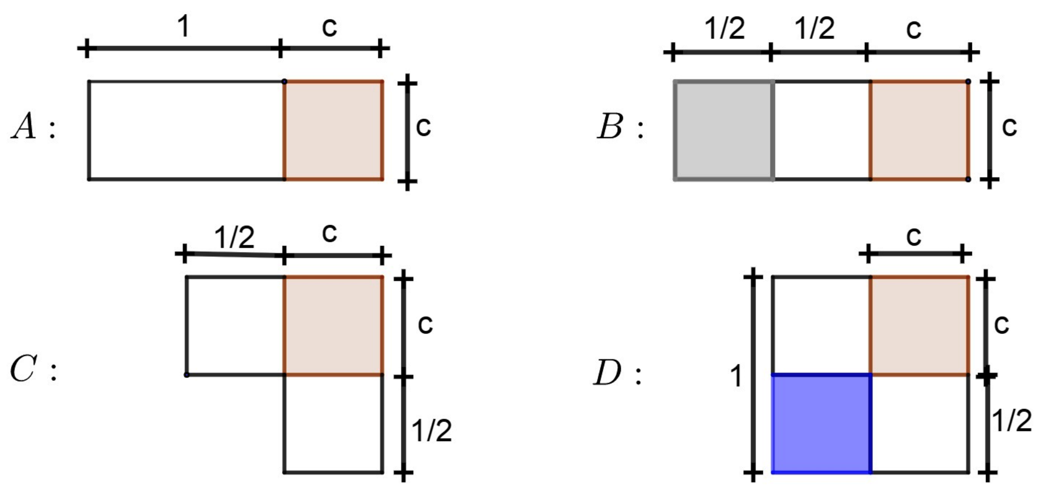


Figura 1.4: Interpretação Geométrica Retirada do Descrito da Plaqueta de Argila.

Como não havia representação fracionária entre os babilônios, a escrita $15'$, por exemplo, representa a fração $15/60$, ou simplificando, $1/4$ e $45'$, representa a fração $45/60$, ou simplificando, $3/4$.

Com o acréscimo do quadrado azul, a área resultante é 1, ou seja: $15/60+45/60 = 60/60$.

Na quarta linha, afirma-se que, desta área, "rasga-se fora $30'$", que é o confronto ou lado do quadrado que está sendo procurado. Rasgar significa subtrair, diminuir, retirar. No caso, retirar $30'$ da área total que pode ser representado de forma fracionária $30/60$ ou, simplificadamente, $1/2$ que é o valor do confronto, ou seja, $c = 1/2$.

Desconsiderando os números negativos, podemos comparar este procedimento utilizado pelo babilônicos com a equação moderna:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + 1 \cdot x = \frac{3}{4} \\
& \Leftrightarrow x^2 + 1 \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
& \Leftrightarrow x^2 + 1 \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \\
& \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \\
& \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \sqrt{1} = 1 \\
& \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

A Álgebra antiga resumia-se ao estudo das equações e métodos de resoluções. A notação algébrica passou por três fases: linguagem retórica (ou verbal), sincopada e simbólica.

Na linguagem retórica, nessa fase, foram utilizadas descrições em linguagem comum para resolver problemas e, para suprimir a falta de símbolos ou sinais especiais para representar o desconhecido, foi utilizada a incógnita. Na linguagem sincopada, eram usadas abreviações de palavras, simplificando a escrita. É uma fase intermediária entre a linguagem retórica e a escrita simbólica moderna. No terceiro e último estágio, o simbólico, o uso da letra é para significar o que era dado, como também para uma quantidade desconhecida, o que chamamos de incógnita. Neste estágio, há apenas símbolos, que passaram por várias modificações.

Na Universidade de Alexandria, por volta de 300 a.C., surgiu o talentoso gênio da Matemática, Euclides. Ele formou alguns conceitos que se tornaram extremamente importantes na solução de equações, como, por exemplo, as expressões abaixo, que como são conhecidas como "noções comuns"de Euclides.

1. Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
2. Se iguais forem subtraídos de iguais, os resultados serão iguais.
3. Se iguais forem somados a iguais, os resultados serão iguais.
4. Coisas coincidentes são iguais entre si.
5. O todo é maior do que a parte.

Com o surgimento das noções de Euclides, foi encontrado um método geral de resolução das equações de 1º grau, sem precisar utilizar mais a Regra da Falsa Posição.

Nos primeiros séculos depois de Cristo, apareceram grandes matemáticos, dentre eles o famoso astrônomo Abu-Abdullah Muhammed ibn-Musa Al-Khwarizmi (783-850), nascido na província Persa de Khwarezm, onde é atualmente o Uzbequistão. Viveu em Bagdá, subordinado ao califa Al-Mamum, onde trabalhou na "casa da Sabedoria", fundada no início do século IX. Ali reuniram manuscritos eruditos em grego e sânscrito. Escreveu o livro em árabe com o título *Al-Kitab Al-jabr Wa'l Muqabalah* com tradução parecida com o *"livro da restauração e do balanceamento"* ou "livro da restauração e compensação". O início do livro vem com uma discussão de equações quadráticas, depois, a geometria prática e equações lineares. Conhecido como o pai da álgebra e graças ao seu livro, que foi traduzido para o latim trezentos anos depois, foi considerado o melhor matemático de sua época. Na tradução para o latim, *Al-jabr* passou a ser *Liber Algebrae.* Foi daí que surgiu a palavra álgebra.

As equações relatadas no livro de Al-Khwarizmi são lineares ou de 2º grau, utilizou expressões como unidades, raízes e quadrados, reduzindo-as a uma das seis fórmulas padrão:

1. Quadrados são iguais às raízes.
2. Quadrados são iguais aos números.
3. Raízes são iguais aos números.
4. Quadrados e raízes são iguais aos números.
5. Quadrados e números são iguais às raízes.
6. Raízes e números são iguais aos quadrados.

Vejamos um problema específico do livro de Al-Khwarizmi:

"Um quadrado e dez raízes dele são iguais a trinta e nove dirhems". Quer dizer, quando deve ser o quadrado, o qual, quando aumentado por dez de suas próprias raízes, é igual a trinta e nove"?

Interpretando com a simbologia algébrica que, na época, não tinha sido inventada: Sendo a incógnita x, podemos dizer "o quadrado" de x^2; agora, uma "raiz desse quadrado" é x, de maneira que dez raízes do quadrado é $10x$. Usando essa notação, o problema se traduz em resolver a equação $x^2 + 10x = 39$. Para a solução desse problema, a tradução próxima escrita em palavras é:

> "A solução é a seguinte: você divide o número de raízes por dois, o que, no caso presente, fornece cinco. Isso você multiplica por si mesmo; o produto é vinte e cinco. Some isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso, que é oito, e subtraia disso a metade do número de raízes, que é cinco; o resto é três. Essa é a raiz do quadrado que você procurava; o próprio quadrado é nove". (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p. 131).

De acordo com a simbologia que hoje aplicamos, a interpretação algébrica deste resultado é:

$$x = \sqrt{5^2 + 39} - 5 = \sqrt{25 + 39} - 5$$
$$x = \sqrt{64} - 5 = 8 - 5 = 3.$$

Percebemos que o método utilizado por Al-Khwarizmi é basicamente a fórmula quadrática que conhecemos atualmente: Para resolver a equação $x^2 + bx = c$, aplica-se a regra:

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}.$$

Na época os matemáticos não acreditavam nos números negativos, portanto as raízes negativas e imaginárias não eram admitidas. Al-Khwarizmi ainda verificou que a equação com um único quadrado (expressão que hoje representamos como x^2) poderia ser resolvida de forma geométrica, ou seja, representando os termos da equação desenhando quadrados e retângulos, semelhantes aos gregos.

Para exemplificar, vejamos como justifica geométrica a solução positiva da equação:

$$x^2 + 4x = 5.$$

Desenhemos, inicialmente, um quadrado de lado x para representar o termo x^2 e quatro retângulos de comprimento x e largura 1, para representar o termo $4x$, conforme a Figura 1.5.

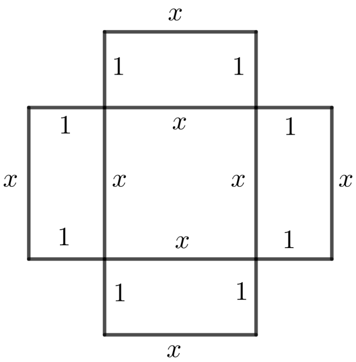


Figura 1.5: Solução Geométrica da Equação $x^2 + 4x = 5$ (Parte 1).

Dessa maneira, obtemos uma figura com área igual a 5, ja que $x^2 + 4x = 5$. Completemos o quadrado adicionando mais quatro quadrados de lado 1, conforme a Figura 1.6.

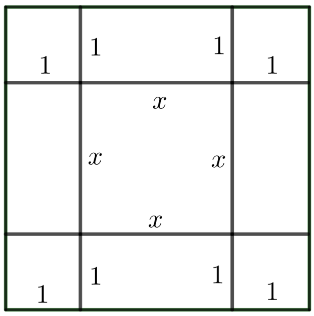


Figura 1.6: Solução Geométrica da Equação $x^2 + 4x = 5$ (Parte 2).

Dessa forma, obtemos um quadrado de área 9.

Como o lado do quadrado maior tem medida igual a 3, temos, $3 = x + 1 + 1$. Portanto, $x = 1$.

Na Índia, na cidade de Vijayapura, nasceu o mais importante matemático do século XII e astrônomo Bhaskara Akaria, aproximadamente (1114 - 1185). A fórmula que recebeu seu nome, ele mesmo relatou, que fora encontrada pelo matemático hindu Sridhara (870 - 930), um século antes.

Bhaskara escreveu *Bijaganita*, um livro de Álgebra, onde se dedicou às resoluções de equações lineares e quadráticas, utilizando métodos já apresentados por outros matemáticos.

Seu livro mais famoso é o *Lilavati*. É um nome próprio de mulher, cuja tradução é "Graciosa", "Bela", onde explorou problemas de aritmética, geometria plana e combinatória.

Além do método da "falsa posição" aplicado nas resoluções de equações, outra forma de resolução preferida era o de "inversão", na qual os cálculos eram realizados para trás, a partir dos dados. Consideremos, por exemplo, o seguinte problema que faz parte do texto do livro Lilavati:

> "Linda donzela de olhos resplandecentes, uma vez que entendeis o método de inversão correto, dizei-me qual é o número que multiplicado por 3, depois acrescido de 3/4 do produto, depois dividido por 7, diminuído de 1/3 do quociente, multiplicado por si mesmo, diminuído de 52, pela extração da raiz quadrada, adição de 8 e divisão por 10, resulta no número 2"? (EVES, 2004, p. 255).

Pelo método de inversão, inicia-se com o número 2 e calcula-se voltando às operações; onde se determina que se divida por 10, multiplica-se por 10; onde determina somar 8, subtrai-se 8; onde determina que se extraia a raiz quadrada, eleve-se ao quadrado, e assim por diante. Então,

$$[(2)(10) - 8]^2 + 52 = \sqrt{196} = 14$$

$$(14)(3/2)(7)(4/7)/3 = 28.$$

O método de inversão é basicamente a substituição de cada operação por sua inversa. É exatamente o que se faz nas resoluções de problemas por métodos modernos. Dessa forma, representando por x o número procurado, temos que o problema se resume a encontrar o valor de x da seguinte equação:

$$\frac{8 + \sqrt{\left(\frac{(2/3)(7/4)(3x)}{7}\right)^2 - 52}}{10} = 2.$$

Para resolvermos essa equação, multiplicamos, inicialmente, ambos os membros por 10, em seguida, subtraímos 8 de cada membro, depois elevamos ao quadrado cada membro, depois adicionamos 52 aos dois membros, extrai-se a raiz quadrada a ambos os membros da equação, em seguida, multiplica cada membro pelos números 7, 3/2 e 4/7 e finaliza dividindo por 3 os dois membros, achando, assim, o valor procurado.

No ano de 1175, nasceu em Pisa, Itália, o matemático Leonardo Fibonacci ("Leonardo filho de Bonaccio"), conhecido como Leonardo de Pisa (ou Leonardo Pisano). Em 1202 publicou o livro *Liber Abaci* (Livro do Ábaco ou Livro de Cálculo), onde descreveu e introduziu na Europa o sistema numérico dos árabes, esclarecendo como funciona esta numeração e o zero. Além de esclarecer a escrita e a leitura dos novos numerais, os quinze capítulos da obra explicam métodos de cálculo com inteiros e frações, o cálculo de raízes quadradas e cúbicas e a resolução de equações lineares e quadráticas, cujas raízes negativas e imaginárias não são admitidas. Todos os assuntos do livro estão relacionados a aritmética e a álgebra da época. Fibonacci faleceu na mesma cidade em que nasceu, em 1250.

Como as equações eram formadas só por palavras, ou seja, os símbolos não existiam, inclusive um que representasse o que chamamos hoje de incógnita, Fibonacci introduziu algumas palavras, como: *res*, que em latim significa "coisa"; *radix* (raiz), para representar a incógnita; *census* representava "seu quadrado", *cubus*, significava "seu cubo"; *aequalis*, representava "igualdade". Leonardo escreveu outro livro: *Liber Quadratorum*, o "livro dos quadrados", com resoluções de vários tipos de equações utilizando quadrados, e essas soluções sendo inteiras.

Depois de Leonardo Fibonacci (1180 - 1250), aproximadamente, surgiu o grande matemático italiano franciscano Luca Paciolo, também conhecido como Pacioli. Sua primeira obra foi *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* publicada em 1494 em Veneza. Introduziu mais alguns símbolos, simplificando os de Fibonacci: o desconhecido (a incógnita) foi chamdado de *cosa* ("coisa"em italiano) e abreviada como *co*; *censo*, representava *"seu quadrado"* e abreviado por *ce*; *cubo*, representava "seu cubo" e abreviado por *cu*.

1.1.1 Resolução de Equações de 2º Grau - Método de Viète.

O matemático francês François Viète (1540 - 1603) determinou um método para encontrar a solução de equações quadráticas. Ele utilizou uma mudança de variável para determinar a solução das equações quadráticas.

Considere a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde $a \neq 0$. Agora suponha que $x = u + v$ e substitua na equação acima:

$$a(u + v)^2 + b(u + v) + c = 0,$$

ou seja,

$$a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u + v) + c = 0.$$

Desenvolva e reescreva a última equação na incógnita v:

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0. \tag{1.1}$$

Nesse momento, encontra-se os valores de u para que a Equação 1.1 não tenha o termo de primeiro grau, ou seja, resolva a seguinte equação:

$$2au + b = 0.$$

Logo,

$$u = -\frac{b}{2a}. \tag{1.2}$$

Em seguida, substituiu o valor de u na Equação 1.2:

$$av^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0.$$

Multiplique a equação anterior por $4a$:

$$4a^2v^2 = b^2 - 4ac.$$

Isole o v:

$$v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

ou seja,

$$v = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}. \tag{1.3}$$

Agora, substitua os valores encontrados na Equação 1.2 e Equação 1.3 em $x = u + v$:

$$x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

ou seja,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esta é a fórmula que atualmente no Brasil chamamos de Fórmula de Bhaskara, onde a expressão $b^2 - 4ac$ é conhecida como discriminante da equação e é representada pelo símbolo Δ.

Exemplo 1.1 *Use o método de Viète para resolver a equação* $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Considere $x = u + v$.

Assim,

$$\begin{gathered} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ (u+v)^2 - 5(u+v) + 6 = 0 \\ v^2 + (2u-5)v + (u^2 - 5u + 6) = 0. \end{gathered}$$

Logo,

$$u = \frac{5}{2}.$$

Assim,

$$v^2 + \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad v = \pm\frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

1.1.2 Resolução de Equações de 2º Grau - Método de Horner.

O talentoso matemático chinês Chu Shih-chieh, pouco sabemos sobre ele, até mesmo não há relatos do dia de seu nascimento e morte. Escreveu dois tratados. O primeiro deles foi o *Suan-hsueh ch'i-meng (introdução aos estudos matemáticos)*, escrito em 1299. O segundo, de maior interesse matemático, escrito em 1303, foi o *Ssu-yüan yü-chien (precioso espelho dos quatro elementos)*. Os quatro elementos: céu, terra, homem e matéria representam quatro incógnitas na mesma equação. Este livro, que reapareceu no século XIX, após ter desaparecido na China no século XVIII, trata de equações simultâneas e de equações de grau até quatorze. Nele é apresentado um método de transformação denominado *fan-fan (fazer até aparecer)*, uma técnica especial para a resolução de equações quadráticas, baseada em aproximações sucessivas e de grande precisão, chegando como resultado uma única raiz real positiva.

O matemático William George Horner nasceu em Bristol, Inglaterra, no dia 9 de junho de 1786. Mais conhecido por sua técnica de resolução de equações algébricas. Em 1819, Horner reivindica o método *fan-fan*, apresenta à Royal Society e publica no mesmo ano no "Philosophical Transactions of the Royal Society"e renomeia-o de método de Horner. Horner morre em 22 de setembro de 1837, na cidade de Bath, Inglaterra.

O método de Horner utilizado para encontrar a solução, por exemplo, da equação

$$x^2 + 145x - 2452 = 0,$$

compreende no seguinte:

Verifica-se, por tentativa, que uma das raízes encontra-se no intervalo

$$15 < x < 16$$

.

Faz-se a transformação: $y = x - 15$.

Obtém-se a equação em y:

$$(y+15)^2 + 145(y+15) - 2452 = 0$$

$$y^2 + 175y - 52 = 0.$$

A solução da equação em y está no intervalo:

$$0 < y < 1$$

Assim, pode-se supor que y^2 se aproxima de y.
Desta forma, obtém-se uma solução aproximada para y:

$$y = \frac{52}{1+175}.$$

Portanto, tem-se uma aproximação para x:

$$x_1 = y + 15 \;\Rightarrow\; x_1 = 15 + \frac{52}{176} \;\Rightarrow\; x_1 = 15,29.$$

Continua-se o processo de aproximações:

Substitui-se $x = y_1 + 15,29$ na equação original.

$$(y_1 + 15,29)^2 + 145(y_1 + 15,29) - 2452 = 0$$

$$y_1^2 + 175,58y - 1,17 = 0.$$

O valor aproximado para y_1 é portanto:

$$y = \frac{1,17}{176,58} = 0,0066.$$

Assim, tem-se uma nova aproximação para x:

$$x_2 = 15,29 + 0,0066 \;\Rightarrow\; x_2 = 15,2966.$$

Para se chegar numa aproximação mais precisa que esta última, repete-se o processo.

1.1.3 Resolução de Equações de 2º Grau - Método de Euler.

Em Basiléia, Suíça, em 1707, nasceu um dos maiores gênios de todos os tempos, Leonhard Euler. Sua lista bibliográfica de obras, incluindo livros e artigos, contém 886 trabalhos, catalogados e editados pela Sociedade Suíça de Ciências Naturais, iniciado em 1909. Escreveu obras em todos os níveis e de diversas áreas da matemática e da física. Com apenas 13 anos, ingressou na Universidade de Basileia, concluindo Filosofia após três anos. Em 1735, Euler perdeu a visão do olho direito, ao que se diz, por excesso de trabalho. Em 1766, estava perdendo a visão do outro olho devido à catarata. Preparando-se para a cegueira total, começou a escrever com giz numa grande lousa e ditava para seus filhos. Mesmo cego, continuou com suas pesquisas e publicações. Aos setenta e seis anos, em 1783, Euler teve morte súbita enquanto tomava chá com um de seus netos.

Considere a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde, $a \neq 0$. Seja $x - (m+n) = 0$ ou $x = m + n$.

Pode-se dizer que:

$$x^2 = (m+n)^2$$
$$x^2 - (m+n)^2 = 0$$
$$x^2 - (m+n)(m+n) = 0$$
$$x^2 - (m+n)x = 0.$$

Daí, obtém-se o sistema de três equações:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ x - (m+n) = 0 \\ x^2 - (m+n)x = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Multiplique todas as equações do Sistema 1.4 por x:

$$\begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx = 0 \\ x^2 - (m+n)x = 0 \\ x^3 - (m+n)x^2 = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Observemos que o Sistema 1.5 possui solução trivial, por ser um sistema homogêneo. As soluções não triviais são encontradas se o determinante da Matriz dos Coeficientes 1.6 for igual a zero.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & -(m+n) \\ 1 & -(m+n) & 0 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Calcule o determinante desta matriz e iguale a zero:

$$a[-(m+n)^2] - b(m+n) + c(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$-am^2 - 2amn - an^2 - bm - bn - c = 0 \Leftrightarrow$$
$$am^2 + 2amn + an^2 + bm + bn + c = 0.$$

Assim, tem-se a equação na variável m:

$$am^2 + (2an + b)m + an^2 + bn + c = 0.$$

Escreva $n = -\dfrac{b}{2a}$ e obtém:

$$am^2 + \left[2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b\right]m + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$am^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad am^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$am^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad am^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad \Leftrightarrow$$

$$m^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \Leftrightarrow \quad m = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \Leftrightarrow \quad m = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Como $x = n + m$,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Portanto,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

1.2 Equações de 3º Grau (Relatos Históricos).

O primeiro registro de equações cúbicas aconteceu com a antiga civilização babilônica, por volta de 1800 a 1600 a.C. Foram encontradas tabelas de cubos e de raízes cúbicas.

No período grego, os volumes de sólidos geométricos, levavam a problemas que, nos tempos modernos, envolvem equações cúbicas. Por exemplo, a duplicação do cubo consiste em resolver a equação $x^3 = 2$. Esse problema foi resolvido pelo matemático, filósofo e astrônomo grego Arquitas de Tarento (428 - 347 a.C.), usando a interseção de um cone, um cilindro e um toro degenerado (obtido ao se girar um círculo em torno de sua tangente).

Ressaltemos, inicialmente, as tentativas frustradas em encontrar uma fórmula ou um método eficaz de resolução de equações de 3º grau.

O matemático árabe Umar Al-Khayammi (1050 - 1123), conhecido como Omar Khayyam, nasceu em Naishápúr (Nishapur), cidade do Nordeste da Pérsia, no Khorassán. Em seu livro, dava para as equações de 2º grau tanto soluções aritméticas quanto geométricas. Para as equações cúbicas, solucionou-as numa abordagem geométrica, não conseguindo encontrar soluções aritméticas, que, por sinal, acreditava que eram impossíveis. Omar Khayyam generalizou o método de resolução de todas as equações de 3º grau (que tinha raízes positivas) usando cônicas. Numa obra, ao encontrar uma equação cúbica, ele expressou: "Isso não pode ser resolvido por geometria plana - isto é, usando apenas régua e compasso - pois contém um cubo. Para a solução, precisamos de secções cônicas".

Em 1225, Leonardo Fibonacci foi desafiado pelo Imperador Frederico II, que promoveu uma competição, para testar sua habilidade. Uma das questões colocadas foi resolver, pelo método de Euclides, ou seja, usando régua e compasso, a equação:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Fibonacci provou que a equação não poderia ser resolvida pelo método euclidiano, mas chegou a uma solução numérica aproximada com nove casas decimais: 1,3688081075. Foi um resultado estupendo, mas não há relatos de como conseguiu encontrar.

Luca Pacioli cometeu o erro: declarou que era impossível solucionar as equações de 3º grau. Esta afirmação caiu depois de algumas décadas, na própria Itália, por dois importantíssimos matemáticos da história: Tartaglia e Cardano.

Antes, falemos de Scipione del Ferro (1465 - 1526). Professor de Matemática em Bolonha, em uma das universidades medievais. Há registros de que foi o primeiro que descobriu as resoluções das cúbicas. Não se sabe como ou quando fez a descoberta, e o mais interessante é que não publicou sua solução, como também nunca publicou uma obra. Antes da sua morte, revelou a solução dos problemas do tipo "cubo e coisas igual a número" ($x^3 + px = q$) e "cubo igual a coisas e número" ($x^3 = px + q$) a seus discípulos Annibale Della Nave (seu sucessor na cadeira de Matemática em Bolonha) e Antonio Maria Fiore. Fiore recebeu de Ferro a regra e não a prova. Como era algo frequente na época, em 1535 Fiore propõe desafiar Tartaglia (que iremos falar mais adiante) para uma disputa matemática. As disputas aconteciam porque alguns contratos de professores universitários eram temporários e a permanência dependia do bom desempenho nas competições. Fiore propôs 30 problemas, todos envolvendo equações cúbicas, e Tartaglia também preparou seus problemas. Iniciada a disputa, Tartaglia, inteligentemente, conseguiu resolver todas as 30 questões propostas por Fiore e ainda foi mais além: achou a fórmula geral para as equações do tipo ($x^3 + px + q = 0$), vencendo assim a competição. A única arma de Fiore era a fórmula de Ferro e não foi o suficiente para resolver todos problemas propostos.

Nicolo Fontana, apelidado de Tartaglia, talentoso matemático de nacionalidade italiana, nasceu em Bréscia, em 1501. Em 1512, Bréscia foi invadida por tropas francesas. Parte da população escondeu-se na igreja. Cavalarianos, sem mesmo respeitar o local sagrado, invadiram a igreja chacinando e ferindo quem encontravam.

O menino Nicolo foi gravemente ferido por golpes de sabre atingindo seu rosto, o que provocou permanentemente defeito na fala, por esse motivo, o apelido de Tartaglia, que significa gago. Triste declaração ele faz em um de seus livros: "Se minha barba não escondesse minhas cicatrizes, eu pareceria um mostro". Mediante todas as dificuldades encontradas na sua amarga infância, Tartaglia demonstrou grande interesse pelos estudos. Sua mãe, sem poder pagar uma escola, fez Nicolo começar a estudar por si mesmo. As barreiras encontradas não foram motivos para que desistisse. Em 1535, tornou-se professor em Verona, Vicenza, Bréscia e Veneza. As disputas ocorridas com Fiore e, logo depois, com Cardano, tornaram-se alvo de grandes admirações.

Girolamo Cardano, nascido em Pavia em 1501 e falecido em Roma em 1576, era médico, astrônomo, astrólogo, matemático e filósofo. Considerado o maior algebrista da Europa e seguidor de Al-Khwarizmi, utilizava as equações com coeficientes numéricos específicos como representantes de situações gerais. Por exemplo, quando escrevia "seja o cubo e sete vezes o lado igual a 25" (ou, $x^3 + 7x = 25$), raciocinava esta equação como típica de todas as que têm "um cubo e coisa igual a um número" (ou, $x^3 + px = q$). Naquela época, não era costume deixar os termos da equação no primeiro membro e somente o zero no segundo membro.

A notícia da disputa entre Tartaglia e Fiore chegou até Milão, onde vivia Cardano, que despertou o interesse em saber o que Luca Pacioli julgara impossível, uma solução geral para as equações de 3º grau. Cardano usou de todos os meios para atrair Tartaglia a sua casa - pois sabia que achara a solução das equações cúbicas - pedindo que revelasse para que fosse publicada. Tartaglia não aceitou o pedido e alegou que sua intenção era publicá-la ele mesmo em um livro a ser escrito no futuro. Cardano implorou, sob juramento, de guardar o segredo caso houvesse a revelação. Mediante tantas pressões e confiando tais juramentos, Tartaglia, inicialmente, revela as cobiçadas fórmulas em um poema, de maneira cifrada e misteriosa. Depois de mais juras de Cardano, consegue a demonstração sem os enigmas.

Em 1545, Cardano quebrou seu juramento feito a Tartaglia, publicando o maior artigo algébrico existente: a *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis*, mais conhecida como *Ars Magna* (A Grande Arte), publicada em Nurenberg, na Alemanha. Ele contém uma descrição completa de como resolver qualquer equação cúbica de maneira algébrica, com justificativas geométricas, afirmando a eficácia dos métodos aplicados. Foi divulgado também no *Ars Magna* o método de Ferrari, de redução de uma equação de 4º grau a uma de 3º grau através de uma expressão radical.

A fórmula para a resolução das equações de 3º grau é conhecida, de maneira generalizada e injusta, como fórmula de Cardano. O mesmo que ocorreu com a fórmula de Bhaskara.

As soluções encontradas foram para as equações cúbicas especiais: $x^3+px+q = 0$

e $x^3 + px^2 + q = 0$. Assim, não podem ser aplicadas, diretamente, na equação geral: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Mas qualquer equação geral pode ser transformada em uma do tipo especial, como veremos a seguir:

Seja a equação:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

onde $a \neq 0$. Considerando o coeficiente de x^3 igual a 1, basta dividir a equação por a.

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Sendo $a = 1$, temos:

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Ou simplesmente,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Substituindo $x = y - \frac{a}{3}$, temos,

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0.$$

Após o desenvolvimento de todos os produtos, alguns termos serão anulados, restando a equação:

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0.$$

Pode-se observar, portanto, que a equação é privada do termo de 2º grau, desta forma, temos a equação cúbica reduzida:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Agora, com a equação reduzida de 3º grau, vejamos a demonstração da fórmula de Cardano. Salientamos que a simbologia da época era totalmente diferente da simbologia de hoje. Por exemplo, uma equação que hoje escreveríamos $5x^3+4x = 16$, foi escrita por Cardano como

$$5cub'p : 4reb'ae\overline{q}lis16.$$

Continuando a demonstração, façamos a substituição: $x = u + v$.

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0. \tag{1.7}$$

Se conseguirmos achar números u e v tais que

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{e} \quad uv = -\frac{p}{3},$$

então $x = u + v$ é raiz de $x^3 + px + q = 0$.

De fato, substituindo $u^3 + v^3 = -q$ e $uv = -\dfrac{p}{3}$ na Equação 1.7, temos:

$$-q + (u + v)\left(3 \cdot (-\frac{p}{3}) + p\right) + q = 0$$

$$-q + q = 0.$$

Escrevendo:

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{e} \quad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Podemos dizer que, como temos uma soma e produto, u^3 e v^3 são raízes da equação de 2º grau:

$$s^2 + qs - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{1.8}$$

Ora, como foi dito que u^3 é raiz da Equação 1.8 e através da fórmula de Bhaskara, então podemos afirmar que:

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \dfrac{4p^3}{27}}}{2},$$

ou seja,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Como, $u^3 + v^3 = -q$,
então

$$v^3 = -q - \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right),$$

ou seja,

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Portanto, a fórmula de Cardano, escrita nos termos modernos:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Após o surgimento da fórmula de Cardano, várias perguntas foram lançadas. o primeiro questionamento foi em relação à resolução de equação de 2º grau por determinar duas raízes, através da fórmula de Bhaskara, e a fórmula de Cardano somente uma. O segundo são as raízes quadradas de números negativos, os quais, já tinham se apresentado nas equações de 2º grau. O terceiro é a extração de raízes cúbicas de números de natureza desconhecida. Foram desafios para os matemáticos da época.

Nas equações de 2º grau, a fórmula de Bhaskara chegava a raízes quadradas de números negativos, o que afirmava da inexistência de soluções. Entretanto, estavam diante de equações cúbicas com soluções que passavam pela extração de raízes quadradas de números negativos.

No *Ars Magna*, de Cardano, ele traz um problema de achar dois números, cuja soma é 10 e o seu produto seja 40. Conclui que tais números não existem. Então, verifica que a fórmula quadrática chega aos números $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ e que seu produto é de fato $25 - (-15)$. Percebe o problema, mas não sabe o que fazer a respeito. De maneira corajosa, disse: "Não obstante operaremos". Cardano se referia a essas raízes quadradas de números negativos como "sofísticas"e concluía que o resultado nesse caso era "tão sutil quanto inútil".

Na resolução da equação $x^3 = 30x + 36$, aplicando a fórmula de Cardano, temos que

$$x = \sqrt[3]{18 + \sqrt{-676}} + \sqrt[3]{18 - \sqrt{-676}},$$

ao passo que se sabe, por substituição direta, que $x = 6$ é a única raiz positiva da equação. Observe que, neste exemplo, aparece uma raiz quadrada de um número negativo.

Talvez a mais antiga referência a uma raiz quadrada de um número negativo é a expressão $\sqrt{81 - 144}$, que aparece na Estereometria, de Heron de Alexandria (cerca de 50 d.C.); o próximo registro é a tentativa de Diofanto em resolver a equação $33x^2 + 24 = 172x$, cuja solução aparece o número $\sqrt{1849 - 2016}$.

A frase "Como na natureza das coisas, um negativo não é um quadrado, não admite raiz quadrada", dita pelo indiano Mahavira (cerca de 850 a.C.) é a primeira que expressa dificuldades com a raiz quadrada de número negativo.

O algebrista italiano e engenheiro hidráulico, Rafael Bombelli, que nasceu em 1526 em Bologna e morreu em 1572 em Roma, em 1560, foi o primeiro que argumentou ser possível simplesmente operar com essa "nova espécie de radical". Ele teve o que chamou "ideia louca", pois toda a questão "parecia apoiar-se em sofismas". Rafael Bombelli deu seguimento ao trabalho de Cardano e talvez tenha sido o matemático mais importante da Itália, sendo pioneiro no estudo sobre os números imaginários. Escreveu a sua *Álgebra* por volta de 1560, mas só foi impressa em 1572 com o título *L'Algebra parte Maggiore dell'Arithmetica*, cerca de um ano antes de sua morte, e somente parte dela. Na *Álgebra*, trouxe a resolução algébrica de equações cúbicas acompanhada de demonstrações geométricas em termos de subdivisão do cubo.

A pesquisa de Bombelli iniciou com a tentativa de conciliar a raiz $x = 4$ da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, encontrada por simples observação, com a fórmula de Cardano, chega ao resultado:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Observou que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ deveria ser da forma $a + \sqrt{-b}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, da forma $a - \sqrt{-b}$.

Assim, escreveu

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}. \tag{1.9}$$

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}. \tag{1.10}$$

Chegou à conclusão de que $a = 2$ e $b = 1$ e substituindo-os nas Equações 1.9 e 1.10, temos:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad 2 + \sqrt{-121} = (2 + \sqrt{-1})^3.$$

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad 2 - \sqrt{-121} = (2 - \sqrt{-1})^3.$$

Assim, $x = 2 + \sqrt{-121} + 2 - \sqrt{-121} = 4$.

Bombelli criou as seguintes regras para trabalhar com $\sqrt{-1}$:

$$(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1 \tag{1.11}$$

$$(-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = 1. \tag{1.12}$$

$$(-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = -1. \tag{1.13}$$

$$(\pm 1)(\sqrt{-1}) = (\pm\sqrt{-1}).$$

$$(\pm 1)(-\sqrt{-1}) = (\mp\sqrt{-1}).$$

Ele usava uma expressão bem diferente para escrever essas regras com os radicais, como, por exemplo, as Regras 1.11, 1.12 e 1.13:
Regra 1.11: "mais de menos vezes mais de menos faz menos".
Regra 1.12: "menos de menos vezes mais de menos faz mais".
Regra 1.13: "menos de menos vezes menos de menos faz menos".

Criou também a regra para a soma de dois números do tipo $r + s\sqrt{-1}$:

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}.$$

Mesmo com a abertura para o desenvolvimento de um importantíssimo ramo da matemática, a teoria dos números complexos, a resistência em aceitar as raízes negativas ainda persistiu por um período longo. Meio século depois, em 1629, o matemático, engenheiro e músico francês Albert Girard (1595 - 1632) escreveu a obra *Invention Nouvelle en l'algèbre*, demonstrando que as equações podiam ter raízes negativas e imaginárias. Girard enunciou também as relações entre raízes e coeficientes de uma equação polinomial e disse que as raízes imaginárias são úteis para essas relações gerais.

Tratando ainda de raízes de equações, também deixou sua contribuição o matemático, filósofo e físico francês René Descartes (1596 - 1650). Descartes mencionou que uma equação de coeficientes reais de grau n tem n raízes, desde que pudessem ser raízes reais positivas, raízes reais negativas e raízes imaginárias (complexas). Ele chamou as raízes positivas de "verdadeiras", enquanto as negativas, chamou-as de "falsas". Um pouco adiante, no capítulo 2, falaremos um pouco mais sobre Descartes com seu método geométrico.

No dia 15 de abril de 1707, nasceu em Basiléia, ao norte da Suíça, o matemático que mais produziu e publicou em todos os tempos, Leonhard Euler. Em 1720, estudou Teologia na Universidade da Basiléia. Posteriormente, estudou Matemática, tendo como tutor Johannes Bernoulli, um matemático suíço bastante conhecido membro de uma família de matemáticos, os Bernoulli, quem mais o influenciou para seguir a carreira como matemático. Realizou vários trabalhos notáveis em todos os ramos da matemática conhecidos à época. Embora trabalhasse bastante com números complexos, não resolveu algumas situações, como por exemplo,

$$\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{(-2) \cdot (-2)} = \sqrt{4} = 2.$$

Euler faleceu na cidade de São Petersburgo, Rússia, em setembro de 1783.

Em seu livro *Elements of Algebra*, disse:

> "Como todos os números que são possíveis de conceber são maior que zero, menor que zero ou o próprio zero, é evidente que não podemos classificar a raiz quadrada de um número negativo entre os números possíveis e precisamos, portanto, dizer que isto é uma quantidade impossível. Dessa maneira, somos levados à ideia de números os quais por sua natureza são impossíveis; e, portanto, eles são usualmente chamados de *quantidades imaginárias*, porque elas existem apenas na imaginação. Todas as expressões tais como $\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt{-3}, \sqrt{-4}$ etc. São consequentemente impossíveis ou números imaginários, [...] e de tais números podemos verdadeiramente afirmar que eles não são nem nada, nem maior do que nada, nem menor de que nada; o que necessariamente os torna imaginários ou impossíveis.
> Mas, apesar disso, esses números se apresentam à mente; eles existem em nossa imaginação e nós ainda temos uma ideia suficiente deles..."(BERLINGHOFF, GOUVÊA, 2010, P. 185).

Vários outros matemáticos, em seguida, contribuíram significamente para a compreensão dos números complexos através de representações gráficas, como, por exemplo: John Wallis (1616 - 1703), Caspar Wessel (1745 - 1818), Jean Robert Argand (1768 - 1822) e Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). Gauss provou em 1799 que toda equação algébrica de grau n sobre o corpo dos números reais admite uma raiz e, portanto, n raízes nos complexos.

Mais algumas informações importantes: Em 1659, Johann Hudde usou uma letra numa fórmula para indicar qualquer número real positivo ou negativo. René Descartes (1637) criou os termos "real" e "imaginário". Descartes, ainda, em seu famoso livro *La Géométrie*, propôs o uso de letras minúsculas do fim do alfabeto (como x, y e z) para quantidades desconhecidas e, minúsculas do começo do alfabeto (como a, b, c) para quantidades conhecidas e também idealizou o uso de expoentes sobre uma variável para indicar potências. Euler, em 1777, introduziu a letra i para $\sqrt{-1}$. Augustin Louis Cauchy (1821) contribuiu com os termos "conjugado"e "módulo". Gauss (1831) introduziu o termo "complexo".

1.3 Equações de 4º grau (Relatos Históricos).

Em 1540, o professor e matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi, interessado em resolver problemas matemáticos, propôs a Cardano que resolvesse o seguinte problema, que recaía numa equação de 4º grau: "Dividir 10 em 3 partes que formem uma proporção contínua, sendo o produto das duas primeiras igual a 6". Após várias tentativas sem solução, Cardano desafiou seu aluno Ferrari a resolvê-lo e este, inteligentemente, encontrou a solução. Além de resolver o problema, encontrou um método geral para a solução das equações de 4º grau. Ferrari não foi reconhecido por encontrar a solução. Tal método foi publicado por Cardano, em 1545, na *Ars Magna*, onde publicou também a solução dada por Tartaglia às equações de 3º grau, como foi mencionado anteriormente. Cardano foi sincero e confessou, sobre o processo de resolução das equações quárticas: "é devido ao italiano, nascido em Milão, Ludovico (Luigi) Ferrari (1522-1565), que o inventou a meu pedido". Ferrari, dedicado ao estudo da álgebra, foi colaborador e discípulo de Cardano, auxiliando-o também na descoberta da solução de equações cúbicas.

Utilizando a linguagem moderna, interpretemos o problema proposto a Cardano:

"Dividir 10 em 3 partes...": Denotemos as três partes por a, b, c, determinando a equação:

$$a + b + c = 10. \tag{1.14}$$

"...que forme uma proporção contínua":

$$ac = b^2 \quad (a : b = b : c).$$

"...sendo o produto das duas primeiras iguais a 6":

$$ab = 6.$$

Ora, como $a = \dfrac{6}{b}$ e $c = \dfrac{b^3}{6}$ e substituindo-os na Equação 1.14, temos portanto:

$$b^4 + 6b^2 + 36 = 60b.$$

A resolução do problema envolve uma equação de 4º grau, cujos passos descritos por Cardano são:

(1) Adicionar a ambos os membros da equação $6b^2$, formando o 1º membro em um quadrado perfeito.

$$(b^2 + 6)^2 = 60b + 6b^2.$$

(2) Somar a ambos os membros da equação termos envolvendo uma nova incógnita x de maneira que o primeiro membro permaneça um quadrado perfeito, como $(b^2 + 6 + x)^2$.

$$(b^2 + 6 + x)^2 = 60b + 6b^2 + x^2 + 2b^2x + 12x$$

$$(b^2 + 6 + x)^2 = b^2(2x + 6) + 60b + (x^2 + 12x).$$

Observemos que o 2º membro, desta última equação, é um trinômio de 2º grau na incógnita b.

(3) Escolher x de modo que o trinômio de 2º grau formado no 2º membro se torne um quadrado perfeito. Isso é feito, igualando a zero o discriminante.

$$60^2 - 4(2x+6)(x^2+12x) = 0$$

$$\begin{aligned} 4[30^2 - (2x+6)(x^2+12x)] &= 0 \\ 30^2 - 2(x^3+15x^2+36x) &= 0 \\ x^3+15x^2+36x &= 450. \end{aligned} \tag{1.15}$$

(4) Aplicar a fórmula de Cardano para resolver a equação cúbica $x^3+15x^2+36x = 450$.

Inicialmente, substituir $x = y - \dfrac{15}{3} = y - 5$.

$$(y-5)^3 + 15(y-5)^2 + 36(y-5) = 450.$$

Simplificando, resultamos em uma equação sem existir o termo de 2º grau:

$$y^3 - 39y - 380 = 0.$$

Substituir $y = u + v$.

$$(u+v)^3 - 39(u+v) - 380 = 0$$

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv - 39) - 380 = 0.$$

Ora, se acharmos u e v tais $u^3 + v^3 = 380$ e $uv = 13$, então $y = u + v$ é raiz da equação $y^3 - 39y - 380 = 0$.

Escrevendo, $u^3 + v^3 = 380$ e $u^3v^3 = 2197$. Assim, u^3 e v^3 são raízes da equação:

$$s^2 - 380s + 2197 = 0.$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara e sendo u^3 raiz, temos que

$$u^3 = \frac{380 + \sqrt{135612}}{2},$$

ou seja,

$$u = \sqrt[3]{190 + \sqrt{33903}}.$$

Como $u^3 + v^3 = 380$, então:

$$v^3 = 190 - \sqrt{33903} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt[3]{190 - \sqrt{33903}}.$$

Portanto, $y = \sqrt[3]{190 + \sqrt{33903}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{33903}}$.

Como $x = y - 5$, a raiz procurada da Equação 1.15 é:

$$x = \sqrt[3]{190 + \sqrt{33903}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{33903}} - 5.$$

Aproximemos o valor de x com seis casas decimais.

$$x = 4,009791.$$

(5) Substituir o valor de x na equação do passo (2).

$$(b^2 + 6 + 4,009791)^2 = b^2(2 \times 4,009791 + 6) + 60b + (4,009791^2 + 12 \times 4,009791)$$

$$(b^2 + 10,009791)^2 = 14,019582b^2 + 60b + 64,195915$$

$$(b^2 + 10,009791)^2 = (3,744273\ b + 8,012235)^2$$

$$|b^2 + 10,009791| = |3,744273\ b + 8,012235|.$$

Daí,

$$b^2 + 10,009791 = 3,744273\ b + 8,012235$$

ou

$$b^2 + 10,009791 = -(3,744273\ b + 8,012235).$$

Ou seja,

$$b^2 - 3,744273\ b + 1,997556 = 0 \quad \text{ou} \quad b^2 + 3,744273\ b + 18,022026 = 0.$$

(6) Resolver as equações quadráticas do passo (5), pela fórmula de Bhaskara, a fim de que se achem os quatro valores desejados de b da equação $b^4 + 6b^2 + 36 = 60b$.

$$b = \frac{3,744273 \pm \sqrt{6,029356}}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3,744273 \pm 2,455474}{2}.$$

$$b_1 \approx 3,0998735.$$

$$b_2 \approx 0,6443995.$$

$$b = \frac{-3,744273 \pm \sqrt{-58,068523}}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{-3,744273 \pm 7,620270i}{2}.$$

$$b_3 \approx -1,872136 + 3,810135i.$$

$$b_4 \approx -1,872136 - 3,810135i.$$

Vejamos agora, de modo geral, a resolução de uma equação quártica aplicando o método de Ferrari.

Seja a equação de 4º grau $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Inicialmente, Vamos substituir x, desta equação original, por $w - \dfrac{a}{4}$.

$$\left(w - \frac{a}{4}\right)^4 + a\left(w - \frac{a}{4}\right)^3 + b\left(w - \frac{a}{4}\right)^2 + c\left(w - \frac{a}{4}\right) + d = 0.$$

Ordenando os termos, temos:

$$w^4 + \left(b - \frac{3a^2}{8}\right)w^2 + \left(c + \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2}\right)w + d - \frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} = 0.$$

Desta forma, eliminamos o termo de 3º grau e podemos escrever esta equação da seguinte maneira:

$$w^4 + pw^2 + qw + r = 0 \quad \Rightarrow \quad w^4 + pw^2 = -qw - r.$$

Adicionaremos a ambos os membros da equação $pw^2 + p^2$, tornando o 1º membro em um trinômio quadrado perfeito.

$$w^4 + 2pw^2 + p^2 = pw^2 - qw - r + p^2 \quad \Rightarrow \quad (w^2 + p)^2 = pw^2 - qw + p^2 - r.$$

Vamos somar a ambos os membros da equação a expressão $y^2 + 2w^2y + 2py$, a fim que possamos ter um quadrado de uma soma de três termos no 1º membro.

Ficando da seguinte maneira:

$$(w^2 + p + y)^2 = (p + 2y)w^2 - qw + (p^2 - r + 2py + y^2). \tag{1.16}$$

Agora, transformar o 2º membro da equação num quadrado perfeito, tomando valores convenientes de y, os quais podem ser obtidos igualando a zero o discriminante do trinômio à direita.

$$\Delta = q^2 - 4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y^2) = 0$$
$$\Delta = -8y^3 - 20py^2 + (8r - 16p^2)y + q^2 - 4p^3 + 4pr = 0. \tag{1.17}$$

Essa é, portanto, uma equação de 3º grau, em cuja resolução aplica-se o método de Cardano já apresentada.

Em seguida, volta à Equação 1.16 substituindo y pelo seu valor encontrado na Equação 1.17; ela se reduz a equações quadráticas. Assim, tomando valores α e β convenientes, a equação se tornará

$$(w^2 + p + y)^2 = (\alpha w + \beta)^2.$$

Por fim, a equação é resolvida mediante a resolução das duas equações de 2º grau:

$$w^2 + p + y = (\alpha w + \beta) \quad \text{ou} \quad w^2 + p + y = -(\alpha w + \beta).$$

Exemplo 1.2 *Resolver a equação:* $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 3 = 0.$

Inicialmente, como vimos, eliminaremos o termo de 3º grau substituindo todos coeficientes na equação:

$$w^4 + \left(b - \frac{3a^2}{8}\right)w^2 + \left(c + \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2}\right)w + d - \frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} = 0,$$

onde $a = -4, b = -2, c = 12$ e $d = -3$. Portanto,

$$w^4 + \left(-2 - \frac{3 \cdot 16}{8}\right)w^2 + \left(12 + \frac{-64}{8} - \frac{(-4)(-2)}{2}\right)w - 3 - \frac{3 \cdot 256}{256} + \frac{16.(-2)}{16} - \frac{(-4).12}{4} = 0$$

$$w^4 + (-2-6)w^2 + (12-8-4)w + (-3-3-2+12) = 0,$$

ou seja,

$$w^4 - 8w^2 + 4 = 0.$$

Iremos transformar o 1º membro em um quadrado perfeito, adicionando 12 a ambos os membros da equação:

$$w^4 - 8w^2 + 16 = 12 \quad \Rightarrow \quad (w^2 - 4)^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad w^2 - 4 = \pm\sqrt{12}.$$

Daí, temos que

$$w^2 = 4 \pm \sqrt{12} \quad \Rightarrow \quad w^2 = 4 + \sqrt{12} \text{ ou } w^2 = 4 - \sqrt{12}.$$

Segue que

$$w = \pm\sqrt{4 + \sqrt{12}} \quad \text{ou} \quad w = \pm\sqrt{4 - \sqrt{12}}.$$

Voltando para a variável x, faremos a substituição: $x = w - \dfrac{a}{4}$, onde teremos as quatro raízes. Como $a = -4$, teremos:

$$x_1 = \sqrt{4 + \sqrt{12}} + 1.$$

$$x_2 = -\sqrt{4 + \sqrt{12}} + 1.$$

$$x_3 = \sqrt{4 - \sqrt{12}} + 1.$$

$$x_4 = -\sqrt{4 - \sqrt{12}} + 1.$$

1.3.1 Uma Solução das Equações Quárticas.

Apresentemos agora uma solução para as equações de 4º grau publicada por Moreira, Carlos, G.T.A. [18].

Consideremos a equação de 3º grau $x^3 - Sx^2 + S_d x - P = 0$, de raízes x_1, x_2 e x_3, que satisfazem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = S, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = S_d \quad e \quad x_1x_2x_3 = P.$$

Seja $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$. Elevando ao quadrado ambos os membros da equação, temos:

$$y^2 = x_1 + x_2 + x_3 + 2(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}) \Rightarrow$$
$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = (\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3})^2 \Rightarrow$$
$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2\sqrt{x_1x_2x_3}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}).$$

Ou seja,

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = S_d + 2\sqrt{P}y.$$

Ou simplesmente,

$$y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P}y + S^2 - 4S_d = 0. \tag{1.18}$$

Dada a equação de 4º grau $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, fazemos a substituição $x = y + t$.

$$(y+t)^4 + a(y+t)^3 + b(y+t)^2 + c(y+t) + d = 0.$$

Desenvolvendo toda a equação e tomando $t = -\frac{a}{4}$, temos:

$$y^4 - ay^3 + ay^3 - \frac{3a^2}{8}y^2 + by^2 + \frac{a^3}{8}y - \frac{ab}{2}y + cy - \frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d = 0$$

Observemos que os termos em y^3 são simétricos. Assim, obtemos uma equação sem o termo de grau 3 do tipo:

$$y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0.$$

Comparando esta última equação com a Equação 1.18 e tomemos S, P, e S_d tais que:

$$-2S = k_1, \quad -8\sqrt{P} = k_2 \quad \text{e} \quad S^2 - 4S_d = k_3,$$

ou seja,

$$S = -\frac{k_1}{2}, \quad P = \left(\frac{k_2}{8}\right)^2 \quad \text{e} \quad S_d = \frac{S^2 - k_3}{4} = \frac{k_1^2 - 4k_3}{16}.$$

Voltemos à equação inicial $x^3 - Sx^2 + S_d x - P = 0$ e façamos as substituições:

$$x^3 + \frac{k_1}{2}x^2 + \left(\frac{k_1^2 - 4k_3}{16}\right)x - \left(\frac{k_2}{8}\right)^2 = 0.$$

Resolvendo esta equação, obtemos as raízes x_1, x_2 *e* x_3, tais que:

$$y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} \quad \Rightarrow \quad y^4 + k_1 y^2 + k_2 y + k_3 = 0.$$

Para obter as raízes de $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, basta diminuir $\frac{a}{4}$ das raízes de $y^4 + k_1 y^2 + k_2 y + k_3 = 0$.

Observemos que cada raiz quadrada pode assumir dois valores complexos, mas a equação $\sqrt{P} = -\frac{k_2}{8}$ diz que $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3} = -\frac{k_2}{8}$.

Assim, para cada valor de $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ há um único valor de $\sqrt{x_3}$. Desta forma, obtemos todas as quatro raízes da equação original.

Antes de vermos um exemplo, citaremos o Teorema das Raízes Racionais e o algoritmo de Briot-Ruffini, demonstrados no Capítulo 4, que serão aplicados para resolvermos uma equação cúbica.

Teorema 1.1 (Teorema das Raízes Racionais) *Seja* $\frac{p}{q}$ *uma raiz de* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *polinômio de grau* n, *onde* $p, q, a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$ *e m.d.c.*$(p, q) = 1$. *Então*

- $p|a_0$ *(isto é, "*p *divide* a_0*" ou "*p *é divisor de* a_0*").*
- $q|a_n$.
- $(p - mq)|f(m), \forall m \in \mathbb{Z}$. *Em particular,* $(p - q)|f(l)$ *e* $(p + q)|f(-l)$.

Já no algoritmo de Briot-Ruffini, seja o polinômio de grau n $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$. Se $q = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$ e $r = b_n$ são respectivamente quociente e resto na divisão considerada ($f(x)$ dividido por $(x - u)$), então $b_0 = a_0$ e $b_i = ub_{i-1} + a_i$, sendo $i = 1, 2, \cdots, n$.

Na prática, o algoritmo de Briot-Ruffini pode ser efetuado da seguinte maneira:

	a_0	a_1	....	a_{n-1}	a_n
u		ua_0		ub_{n-2}	ub_{n-1}
	a_0	$ua_0 + a_1 = b_1$	....	$ub_{n-2} + a_{n-1} = b_{n-1}$	$ub_{n-1} + a_n = b_n$

A tabela consiste em três linhas e três colunas preenchida da seguinte maneira:

- 1ª linha e 2ª coluna: Colocamos os coeficientes de $f(x)$ até o termo de grau 1, completando com zero para os coeficientes dos termos ausentes.
- 1ª linha e 3ª coluna: colocamos o termo de grau zero.
- 2ª linha e 1ª coluna: colocamos a raiz do divisor.
- 2ª linha e 2ª coluna: Uma linha auxiliar. Serve para colocarmos apenas o produto da raiz do divisor pelos coeficientes do quociente que são obtidos no decorrer do processo.
- 3ª linha e 2ª, 3ª colunas: colocamos os coeficientes do quociente e o resto, respectivamente.

	coeficientes do dividendo	*termo constante do dividendo*
raiz do divisor	*	
	coeficientes do quociente	*resto*

Exemplo 1.3 *Resolver a equação* $y^4 - 10y^2 - 24y - 11 = 0$.

De acordo com o método, resolvemos a seguinte equação de 3º grau

$$x^3 + \left(\frac{k_1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{k_1^2 - 4k_3}{16}\right)x - \left(\frac{k_2}{8}\right)^2 = 0,$$

onde, $k_1 = -10,\ k_2 = -24\ e\ k_3 = -11.$

Segue que:

$$\frac{k_1}{2} = -\frac{10}{2} = -5, \qquad \frac{k_1^2 - 4k_3}{16} = \frac{144}{16} = 9 \quad \text{e} \quad \left(\frac{k_2}{8}\right)^2 = \left(\frac{576}{64}\right)^2 = 9.$$

Assim, temos a equação cúbica:

$$x^3 - 5x^2 + 9x - 9 = 0.$$

Apliquemos o Teorema de Raízes Racionais de Polinômios com Coeficientes Inteiros.

Testando os quocientes dos divisores do termo independente (9), com os divisores do termo de maior grau (1), concluímos que 3 é raiz da equação.

De fato, 3 divide 9 e $\dfrac{3}{1} = 3$ e $3^3 - 5 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 9 = 0$.

As demais raízes descobriremos utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini:

	1	-5	9	-9
3		3	-6	9
	1	-2	3	0

Logo, $x^3 - 5x^2 + 9x - 9 = (x^2 - 2x + 3)(x - 3)$.

Da equação de 2º grau $x^2 - 2x + 3 = 0$, através da fórmula de Bhaskara, temos as raízes:

$$1 + i\sqrt{2} \quad \text{e} \quad 1 - i\sqrt{2}.$$

Portanto, as três raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 9x - 9 = 0$ são:

$$x_1 = 3,\ x_2 = 1 + i\sqrt{2} \ \text{ e } \ x_3 = 1 - i\sqrt{2}.$$

Como $\sqrt{P} = -\dfrac{k_2}{8}$ e $P = x_1 x_2 x_3$, temos:

$$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{x_3} = -\frac{k_2}{8}.$$

Assim, $\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{x_3} = \dfrac{24}{8} = 3.$

As raízes da equação $y^4 - 10y^2 - 24y - 11 = 0$ serão encontradas adicionando algebricamente as raízes quadradas $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$ e $\sqrt{x_3}$ e respeitando o resultado $\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{x_3} = 3$.

Vejamos:

$$y_1 = \sqrt{3} + \sqrt{1 + i\sqrt{2}} + \sqrt{1 - i\sqrt{2}}.$$

De fato, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + i\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - i\sqrt{2}} = \sqrt{3 + (1 + 2)} = 3.$

$$y_2 = \sqrt{3} - \sqrt{1 + i + \sqrt{2}} - \sqrt{1 - i\sqrt{2}}.$$

De fato, $\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{1 + i\sqrt{2}}) \cdot (-\sqrt{1 - i\sqrt{2}}) = \sqrt{3 + (1 + 2)} = 3.$

$$y_3 = -\sqrt{3} + \sqrt{1 + i\sqrt{2}} - \sqrt{1 - i\sqrt{2}}.$$

De fato, $(-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{1 + i\sqrt{2}} \cdot (-\sqrt{1 - i\sqrt{2}}) = \sqrt{3 + (1 + 2)} = 3.$

$$y_4 = -\sqrt{3} - \sqrt{1 + i\sqrt{2}} + \sqrt{1 - i\sqrt{2}}.$$

De fato, $(-\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{1 + i\sqrt{2}}) \cdot \sqrt{1 - i\sqrt{2}} = \sqrt{3 + (1 + 2)} = 3.$

Observação 1.1 *Depois da descoberta das fórmulas, por meio de radicais, para as equações de 3º e 4º graus, no início do século XVI, passaram 300 anos, aproximadamente, até que os matemáticos se convencessem da impossibilidade de obter fórmulas para encontrar as raízes de uma equação polinomial de grau cinco ou* *maior usando apenas operações usuais (adição, multiplicação, subtração e divisão) e aplicação de radicais.*

O Teorema Fundamental da Teoria de Galois é a relação entre a estrutura dos grupos e corpos. De forma mais específica, dado um polinômio $f(x)$ e um corpo $\mathbb{K}$ onde $f(x)$ possui todas as suas raízes, ao deixar um grupo (chamado Grupo de Galois) agir sobre as raízes desse polinômio, percebemos uma simetria. Galois estudou os grupos de permutação das raízes dos polinômios chegando a conclusão se um polinômio é solúvel por radicais ou não. Com a definição apresentada para a solubilidade de um grupo, o Grupo de Galois de um polinômio $f(x)$ é solúvel se, e somente se, o polinômio é solúvel por radicais. Isso ficou conhecido como a Correspondência de Galois.

Para ter-se mais detalhes sobre a Teoria de Galois, veja o Artigo ([28]).

Capítulo 2

As Equações do Ponto de Vista Geométrico.

No período 2000 a.C. a 1600 a.C., a geometria babilônica estava presente e a sua marca principal é seu caráter algébrico. Os problemas citados em terminologia geométrica são essencialmente problemas de álgebra. Em um problema babilônico, na base sexagesimal, pede-se o lado de um quadrado em que a diferença entre a área desse quadrado e seu lado é o número 14,30: "Tome metade de 1, que é 0;30; multiplique 0;30 por 0;30, o que dá 0;15; some 0;15 a 14,30 obtendo 14,30;15. Este último é o quadrado de 29;30. A seguir some 0;30 a 29;30; o resultado é 30, que é o lado do quadrado", que equivale resolver uma equação quadrática da forma:

$$x^2 - px = q.$$

Interpretando o problema transformando os números que estão na base sexagesimal em números na base decimal, temos:

"Metade de 1": 60/2=30.

"Multiplique 0;30 por 0;30, o que dá 0;15": $(30 \cdot 60^{-1})(30 \cdot 60^{-1}) = 0,25$.

"Some 0;15 a 14,30 obtendo 14,30;15": $0,25 + 14 \cdot 60 + 30 \cdot 60^0 = (14 \cdot 60^{-1} + 30 \cdot 60^0 + 0,25) = 870,25$.

"Este último é o quadrado de 29;30": $(29 \cdot 60^0 + 0,5) = (29,5)^2 = 870,25$.

"A seguir some 0;30 a 29;30; o resultado é 30, que é o lado do quadrado": $0,5 + 29,5 = 30$.

A resolução deste problema geométrico como de outros também era simplesmente um caminho para que os babilônicos apresentassem soluções através de um questionamento algébrico. Os problemas matemáticos eram escritos em tabletes de argila cozida e utilizavam unhas compostas por caracteres específicos, que foram desenvolvidos para este tipo de escrita, conhecidas como cuneiformes. A Figura 2.1

mostra o tablete de argila cozida chamado de Plimpton 322, que era utilizado pelos babilônios para a escrita de problemas matemáticos.

Vinte e seis dos 110 problemas encontrados nos papiros de Rhind e Moscou são geométricos. No de Moscou, por exemplo, o problema 14 é o seguinte:

> "Um tronco de pirâmide de altura vertical 6 por 4 na base e por 2 no topo. Você deve quadrar esse 4, resultando 16. Você deve dobrar 4, resultando 8. Você deve quadrar 2, resultando 4. Você deve somar o 16, o 8 e o 4, resultando 28. Você deve tomar um terço de 6, resultando 2. Você deve tomar o dobro de 28, resultando 56. Veja, é 56. Você o encontrará corretamente". (EVES, 2004, p. 84).

Este problema ilustra a fórmula do volume do tronco de pirâmide quadrangular:

$$V = \left(\frac{1}{3}\right) h(a^2 + ab + b^2).$$

Figura 2.1: Tablete de Argila Cozida Plimpton 322
Fonte: <https://scientificgems.wordpress.com/2017/08/27/the-plimpton-322-tablet-re-examined/>.

2.1 A Álgebra Geométrica das Equações de 1º Grau.

A regra da falsa posição, citada no Capítulo 1, utilizada pelos egípcios, é um método tão eficaz para resolver equações de 1º grau que continuou a ser usado muito depois da invenção da simbologia algébrica. Recentemente, no século XIX, a regra foi ensinada nos livros-textos. Um exemplo está no livro do educador americano Nathan Daboll (1750 - 1818) publicado no início dos anos 1800, cujo título é; *Daboll's Schoolmaster's Assistant* (Assistente do mestre-escola de Daboll).

O problema citado no livro de Daboll é o seguinte:

> "Uma bolsa de 100 dólares deve ser dividida entre quatro homens A, B, C e D, de modo que B possa ter quatro dólares a mais que A, C possa ter oito dólares a mais que B e D possa ter duas vezes a mais que a quantia de C. Qual é a parte do dinheiro de cada um"? (BERLINGHOFF, GOUVÊA, 2010, P. 126).

Na linguagem moderna, seria tomar x como a quantia dada a A. Então, B recebe $x+4$, C recebe $(x+4)+8 = x+12$ e D recebe $2(x+12)$. Como o total corresponde a 100 dólares, então obtemos a equação:

$$x + (x + 4) + (x + 12) + 2(x + 12) = 100.$$

No método atual, chega-se ao resultado $x = 12$ sem nenhuma dificuldade.

Segundo o método de Daboll, façamos o seguinte: para uma primeira tentativa, digamos que A receba 6 dólares. Então, B recebe 10, C recebe 18 e D recebe 36 dólares. Somando as quantias, obtemos 70 dólares; estamos fora por 30 dólares. Assim, tentamos novamente. Dessa vez, começamos um pouco mais alto, digamos que A obtenha 8 dólares. Então, B recebe 12, C recebe 20 e D recebe 40, para um total de 80 dólares. Isso ainda está errado, está fora de 20 dólares. Agora vem a mágica. Desenhe as duas tentativas e os dois erros como na Figura 2.2.

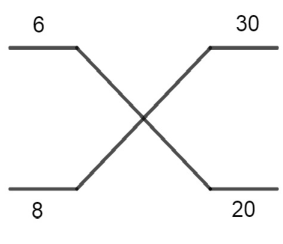


Figura 2.2: Resolução de Daboll.

Multiplique cruzado: 6×20 é 120, e 8×30 é 240. Tome a diferença, $240 - 120 = 120$, e divida pela diferença dos erros, nesse caso, 10. A escolha correta para a quantia que A recebe é $120/10 = 12$.

Verifica-se que o valor inicial suposto para A, nas duas tentativas, pode assumir qualquer número inteiro positivo. Vejamos o exemplo:

Exemplo 2.1 *Primeira tentativa: A recebe 10 dólares, B recebe 14, C recebe 22 e D recebe 44. Somando as quantias, obtemos 90 dólares.*

Segunda tentativa: A recebe 14 dólares, B recebe 18, C recebe 26 e D recebe 52. Somando as quantias, obtemos 110 dólares.

Desenhando as duas tentativas e erros na Figura 2.3, temos:

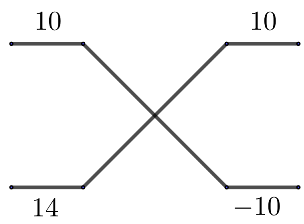


Figura 2.3: Aplicação do Exemplo de Daboll.

Multiplicando cruzado: 14×10 é 140, e $10 \times (-10)$ é (-100). Tomando a diferença, $140 - (-100) = 240$, e dividindo pela diferença dos erros, nesse caso, 20. Portanto, a escolha correta para a quantia que A recebe é $240/20 = 12$.

Como queremos focar na resolução gráfica, vejamos como aplicar o raciocínio gráfico para este problema. Independentemente do resultado da simplificação do primeiro membro da equação

$$x + (x + 4) + (x + 12) + 2(x + 12) = 100,$$

a equação será do tipo $mx + b = 100$. Analisemos da seguinte forma: há uma reta $y = mx + b$ e queríamos encontrar o valor para $y = 100$. Como, para determinarmos uma reta precisamos de dois pontos, vamos utilizar os valores fornecidos e encontrados nas duas tentativas anteriores: quando dizemos que A recebe 6 dólares, somando todas as quantias, obtemos 70 dólares, isto podemos representar pelo ponto $(6, 70)$; quando dizemos que A recebe 8 dólares, somando todas as quantias, obtêm-se 80 dólares, isto podemos representar pelo ponto (8,80); Assim, os pontos $(6, 70)$ e $(8, 80)$ estão na reta. Portanto, queremos encontrar x de maneira que o ponto $(x, 100)$ esteja na mesma reta. A inclinação da reta podemos calculá-la como "aumento sobre o tamanho do intervalo" usando o primeiro e o terceiro pontos ou usando o segundo e o terceiro pontos; os resultados serão os mesmos.

Vejamos os pontos $(6, 70)$ e $(8, 80)$ sobre a reta, na Figura 2.4:

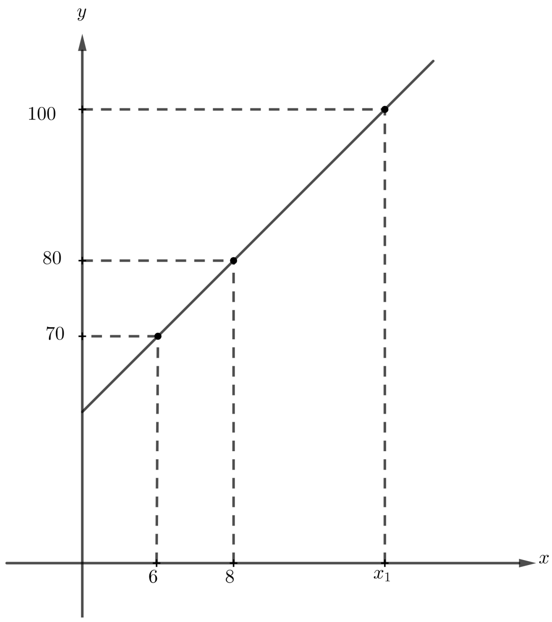


Figura 2.4: Resolução de Daboll na Reta.

Observamos, portanto, que:

$$\frac{100-70}{x-6} = \frac{100-80}{x-8},$$

ou seja,

$$\frac{30}{x-6} = \frac{20}{x-8}. \tag{2.1}$$

Observe que os numeradores são os erros que obtivemos anteriormente.

Simplificando a Equação 2.1, temos:

$$30(x-8) = 20(x-6)$$

$$30x - 240 = 20x - 120$$

$$x = \frac{120}{10} = 12.$$

Observemos que é o mesmo resultado encontrado quando aplicado o método da falsa posição.

Somente no início do século XVII, é que as equações lineares eram entendidas como retas, bem recentemente. Ao contrário do método da falsa posição que é bastante antigo.

2.2 A Álgebra Geométrica das Equações de 2º Grau.

Os gregos (entre 400 a 300 a.C.) utilizaram, em sua álgebra geométrica, de dois métodos para resolver equações simples por meio de manipulações geométricas: o método das proporções e o método da aplicação de áreas. Há rumores de que esses métodos foram aplicados pelos pitagóricos. Vale salientar que a busca pela solução estava relacionada com as equações particulares e não a métodos gerais.

2.2.1 Método das Proporções.

O tratado *Stoichia* (Elementos) é o mais antigo e completo tratado matemático e geométrico da Grécia. Composto de 13 livros ou capítulos, escrito pelo matemático grego Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C. Ficou conhecido como Euclides de Alexandria, porque foi o lugar a que ele foi chamado para dar aula de matemática. No Livro I dos *Elementos*, inicia-se o estudo da Geometria Plana, hoje conhecida Geometria Euclidiana Plana. Neste livro, a Proposição 44 resolve a seguinte construção: "Aplicar a um dado segmento de reta AB um paralelogramo de área dada e ângulos da base dados".

De acordo com a Proposição 44, pode-se considerar, particularmente, sendo o retângulo, o paralelogramo aplicado.

Assim, denote o comprimento de AB por a, a altura do retângulo aplicado por x e as dimensões de um retângulo de área igual à do retângulo aplicado por b e c. Então,

$$ax = bc \quad \text{ou} \quad x = \frac{bc}{a}.$$

O método das proporções permite a construção de um segmento de reta x, que será determinado através da proporção $a : b = c : x$ ou $a : x = x : b$, em que a, b, c são segmentos de reta dados. A interpretação geométrica, conforme as Figuras 2.5 e 2.6, fornece soluções para as equações:

$$ax = bc \quad \text{e} \quad x^2 = ab.$$

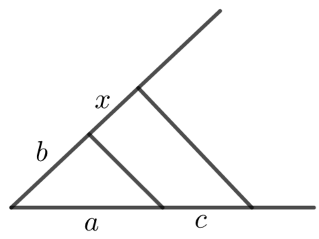


Figura 2.5: Método das Proporções.

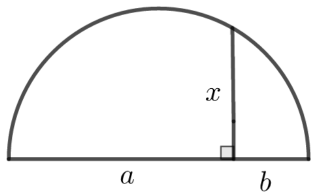


Figura 2.6: Método das Proporções.

2.2.2 Método de Aplicação de Áreas.

Para verificarmos o método de aplicações de áreas, consideremos um segmento de reta AB e um paralelogramo $AQRS$, cujo lado AQ está contido na semirreta AB.

Se o ponto Q não coincide com o ponto B, tomemos C de modo que $QBCR$ seja um paralelogramo. Quando o ponto Q está entre os pontos A e B, diz-se que o paralelogramo $AQRS$ está aplicado ao segmento AB, ficando aquém pelo paralelogramo $QBCR$; quando o ponto Q coincide com o ponto B, diz-se que o paralelogramo $AQRS$ está aplicado ao segmento AB; quando o ponto Q está no prolongamento de AB, diz-se que o paralelogramo $AQRS$ está aplicado ao segmento AB, excedendo pelo paralelogramo $QBCR$. (Figura 2.7).

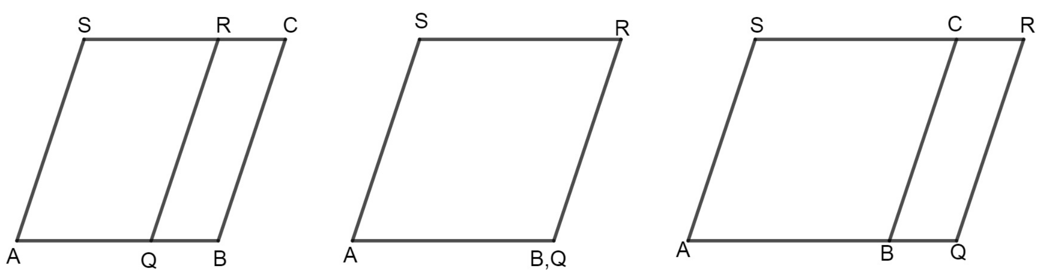


Figura 2.7: Método de Aplicação de Áreas.

No Livro VI dos *Elementos* de Euclides, a Proposição 28 resolve a seguinte construção:

> "Aplicar a um dado segmento de reta AB um paralelogramo $AQRS$ de área igual a uma dada figura retilínea F, e ficando aquém por um paralelogramo $QBCR$ semelhante a um paralelogramo dado, não excedendo a área de F a do paralelogramo descrito sobre a metade de AB e semelhante à deficiência $QBCR$". (EVES, 2004, p.110).

Consideremos em que o paralelogramo é um quadrado, particularmente.

Denotemos o comprimento de AB por a, a base AQ do paralelogramo aplicado (que é então um retângulo) por x e o lado de um quadrado F, de área igual à do retângulo aplicado, por b. (Figura 2.8).

Então,

$$x(a-x) = b^2 \quad \text{ou} \quad x^2 - ax + b^2 = 0. \tag{2.2}$$

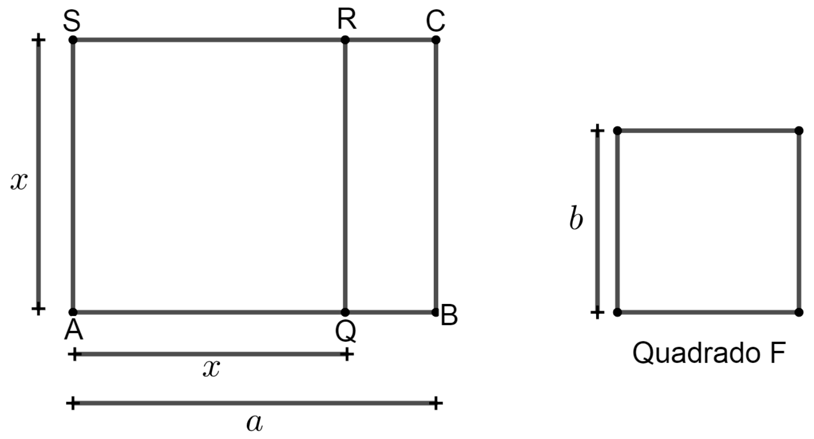


Figura 2.8: Proposição 28 do Livro VI dos *Elementos* (Caso Particular).

No Livro VI dos *Elementos* de Euclides, a Proposição 29 resolve a construção: "Aplicar a um dado segmento de reta AB um paralelogramo $AQRS$ de área igual a uma figura retilínea F, e excedendo por um paralelogramo $QBCR$ semelhante a um paralelogramo dado".

Consideremos, particularmente, que o paralelogramo dado é um quadrado.

Denotemos o comprimento de AB por a, a base AQ do paralelogramo aplicado (que é, portanto, um retângulo) por x e o lado de um quadrado F de área igual ao retângulo aplicado por b. (Figura 2.9).

Então,

$$x(x-a)=b^2 \quad \text{ou} \quad x^2-ax-b^2=0. \tag{2.3}$$

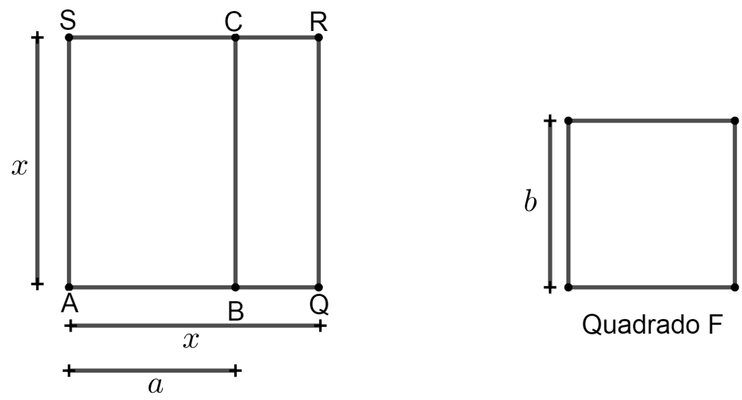


Figura 2.9: Proposição 29 de Livro VI dos *Elementos* (Caso Particular).

Vejamos agora construções para os casos particulares das Proposições 28 e 29 dos *Elementos*, de maneira mais simples do que as que foram propostas.

Primeiramente, veremos o caso particular da Proposição 28. Suponhamos, pois, aplicar a um dado segmento de reta um retângulo que fique aquém por um quadrado. Da Equação 2.2, reformulemos o problema nos seguintes termos: "Dividir um segmento de reta de modo que o retângulo contido por suas partes seja igual a um quadrado dado, não excedendo este o quadrado sobre metade do segmento de reta dado".

Para mais detalhes, façamos a seguinte construção (Figura 2.10): sejam AB e b os dois segmentos de reta, sendo b não maior que a metade de AB. Temos que dividir AB com um ponto Q de maneira que $|AQ|\cdot|QB|=b^2$, onde $|AQ|$ é o comprimento do segmento AQ. Para isto, marquemos $PE=b$ na perpendicular a AB em seu ponto médio P e, com centro E e raio PB, tracemos um arco de circunferência que corta AB no ponto procurado Q.

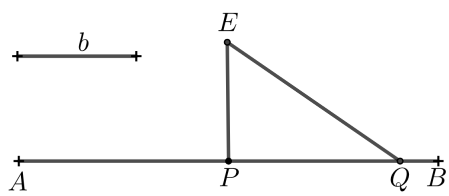


Figura 2.10: Construção - Proposição 28.

A demonstração é fornecida com sustentação nas proposições do Livro II.

Assim, da Figura 2.10, temos:

Como P é ponto médio do segmento AB, então podemos afirmar que:

$$|AQ| = |PB| + |PQ|.$$

Temos ainda,

$$|QB| = |PB| - |PQ|.$$

Assim,

$$|AQ| \cdot |QB| = (|PB| + |PQ|) \cdot (|PB| - |PQ|).$$

Logo,

$$|AQ| \cdot |QB| = |PB|^2 - |PQ|^2 = |EQ|^2 - |PQ|^2 = |EP|^2 = b^2.$$

Denotemos o comprimento de AB por a e o de AQ por x, fica, portanto, resolvida a equação quadrática $x^2 - ax + b^2 = 0$; ora, como AQ e QB são tais que sua soma é AB, ou a, e seu produto é b^2, as raízes são representadas por AQ e QB. Pois, da álgebra elementar se r e s são as raízes da equação quadrática $x^2 - ax + b^2 = 0$, então $r + s = a$ e $rs = b^2$.

As raízes da equação quadrática $x^2+ax+b^2 = 0$ são representadas pelos negativos dos comprimentos de AQ e QB.

Agora, vejamos o caso particular da Proposição 29. Suponhamos, pois, aplicar a um dado segmento de reta um retângulo que exceda por um quadrado. Da Equação 2.3, reformulemos o problema nos seguintes termos: "Prolongue um dado segmento de reta de modo que o retângulo contido pelo segmento estendido e a extensão seja igual a um quadrado dado". Para mais detalhes, façamos a seguinte construção (Figura 2.11): sejam AB e b os dois segmentos de reta, prolongando AB até um ponto Q de maneira que $(AQ).(QB) = b^2$. Para isto, marquemos $BE = b$ na perpendicular a AB em B e, com centro em P, ponto médio de AB, e raio PE, tracemos o arco de circunferência que irá cortar o prolongamento de AB, no ponto procurado Q.

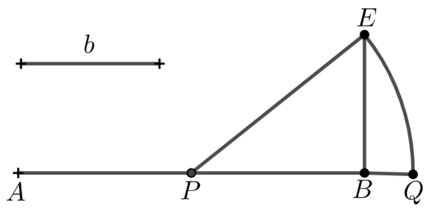


Figura 2.11: Construção - Proposição 29.

A demonstração é fornecida com sustentação nas proposições do Livro II.

Assim, da (Figura 2.11), tiramos:

Como P é ponto médio do segmento AB, então podemos afirmar que:

$$|AQ| = |PQ| + |PB|.$$

Temos ainda,

$$|BQ| = |PQ| - |PB|.$$

Assim,

$$|AQ| \cdot |BQ| = (|PQ| + |PB|) \cdot (|PQ| - |PB|).$$

Logo,

$$|AQ| \cdot |BQ| = |PQ|^2 - |PB|^2 = |PE|^2 - |PB|^2 = |BE|^2 = b^2.$$

Como antes, vemos que as raízes da equação $x^2 - ax - b^2 = 0$ são representadas pelo comprimento AQ e pelo negativo do comprimento BQ, sendo a o comprimento de AB.

As raízes de $x^2 + ax - b^2 = 0$ são as mesmas de $x^2 - ax - b^2 = 0$, apenas com os sinais trocados.

2.2.3 Método Geométrico de Descartes.

O grande matemático, filósofo e físico René Descartes, nasceu em La Haye, França no dia 31 de março de 1596. Morreu em Estocolmo, Suécia, no dia 11 de fevereiro de 1650, vítima de pneumonia, devido ao frio seco que assolava a cidade. Sua obra é com frequência descrita como aplicação da álgebra à geometria, em outras palavras, a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica. A relação da álgebra com a geometria foi, pela primeira vez, apresentada na sua obra *La Geometrie*, publicada em 1637.

Descartes, também, em *La Geometrie*, propôs utilizar as operações aritméticas nas resoluções de problemas geométricos, como está escrito: "Como os cálculos de aritmética se relacionam com operações de geometria", a segunda secção descreve "Como a multiplicação, a divisão, e a extração de raízes quadradas são efetuadas geometricamente".

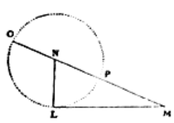
Para a manipulação algébrica, ele escreve o seguinte método geral:

> "Se, pois, queremos resolver qualquer problema, primeiro supomos a solução efetuada e damos nomes a todos os segmentos que parecem necessários à construção - aos que são desconhecidos e aos que são conhecidos. Então, sem fazer distinção entre segmentos conhecidos e desconhecidos, devemos esclarecer a dificuldade de modo que mostre mais naturalmente as relações entre esses segmentos, até conseguirmos exprimir uma mesma quantidade de dois modos. Isso constituirá uma equação (numa única incógnita), pois os termos de uma dessas expressões são juntas iguais aos termos da outra."(BOYER, 1996, p. 232).

Nas raízes reais das equações, chamava de verdadeiras as positivas e, as negativas, de falsas. Chamava de variável a quantidade desconhecida. O coeficiente da variável, quantidade conhecida. O grau da equação dizia que é a dimensão.

Ele deu também sua contribuição nas resoluções geométricas de equações de 2º grau. Em seu Livro I, há instruções detalhadas para resolver equações quadráticas, não da forma algébrica dos antigos babilônicos, mas geometricamente, como os gregos antigos.

Observemos (Figura 2.12) um trecho das páginas 302 e 303 do livro de Descartes de 1637.



Car si i'ay par exemple

$z^2 \propto az + bb$

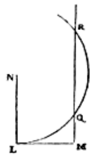
ie fais le triangle rectangle N L M, dont le costé L M est esgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui estoit multipliée par z que ie suppose estre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce tri-

LIVRE PREMIER. 303

angle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

$z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Que si iay $yy \propto -ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle N L M, & de sa baze M N i'oste N P esgale a N L, & le reste P M est y la racine cherchée. De façon que iay $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \propto -ax^2 + b^4$. P M seroit x^2. & i'aurois $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: & ainsi des autres.



Enfin si i'ay

$z^2 \propto az - bb$:

ie fais N L esgale à $\frac{1}{2}a$, & L M esgale à b côme deuãt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z est M Q, oubiẽ M R, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a sçauoir $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problesme proposé est impossible.

Figura 2.12: Trecho das página 302 e 303 do Livro de Descartes.
Fonte: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/19/2.htm>.

Vejamos como Descartes, por exemplo, procedeu para resolver a equação do tipo

$$x^2 = ax + b^2.$$

Inicialmente, tracemos um segmento LM de comprimento b (Figura 2.13) e em L tracemos um segmento LN cujo comprimento é igual a $a/2$ e perpendicular a LM.

Com centro em N, construímos um círculo de raio igual a $a/2$ e tracemos a reta que passe por M e N. Esta reta cortará o círculo em O e P.

Então, $x = |OM|$ é o segmento desejado. O módulo da outra raiz é igual a $|PM|$.

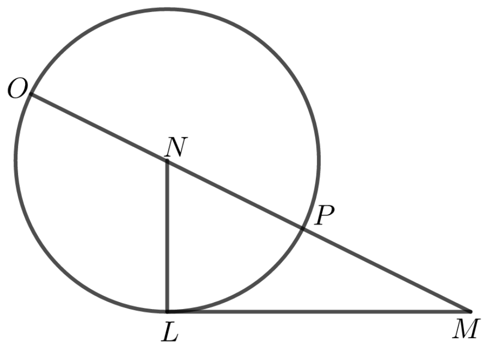


Figura 2.13: Construção - Descartes

Pelos métodos atuais, observamos que o ângulo NLM mede 90°. Portanto, o triângulo NLM é retângulo.

Assim, apliquemos o Teorema de Pitágoras:

$$(|OM| - |ON|)^2 = |LN|^2 + |LM|^2$$

$$|OM|^2 - 2 \cdot |OM| \cdot |ON| + |ON|^2 = |LN|^2 + |LM|^2.$$

Como $|ON|^2 = |LN|^2$, temos:

$$|OM|^2 = 2 \cdot |OM| \cdot |ON| + |LM|^2.$$

Como $|ON| = |LN| = \dfrac{a}{2}$, temos:

$$|OM|^2 = 2 \cdot |OM| \cdot \frac{a}{2} + |LM|^2.$$

Como $|OM| = x$ e $|LM| = b$, então

$$x^2 = ax + b,$$

ou seja, $x = |OM|$ é raiz da equação.

Analisamos ainda:

$$(|OM| - |ON|)^2 = |LN|^2 + |LM|^2$$

$$|OM| - |ON| = \pm\sqrt{|LN|^2 + |LM|^2}.$$

Como $|ON| = |LN|$, temos

$$|OM| = |LN| \pm \sqrt{|LN|^2 + |LM|^2}.$$

Como $|LN| = \dfrac{a}{2}$ e $|LM| = b$, temos

$$|OM| = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 4b^2}$$

$$|OM| = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}.$$

Nesta última expressão, visualizamos a raiz negativa que, na época, era considerada "falsa", Descartes ignorava.

Exemplo 2.2 *Resolver a equação de 2° grau* $x^2 = 6x + 16$, *através do método de construção de Descartes.*

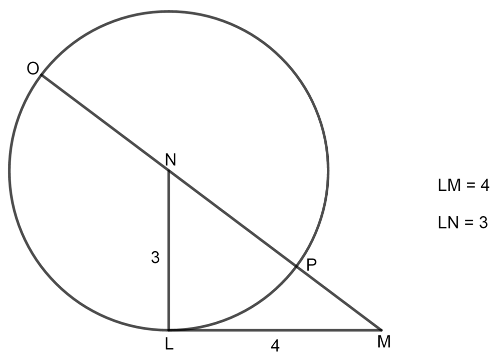


Figura 2.14: Resolução de $x^2 = 6x + 16$.

Notemos que, neste caso, $|LM| = 4$ e $|LN| = 3$. Como o comprimento de OM é 8, então $x = 8$ é a raiz da equação.

Caso a equação seja da forma

$$x^2 = -ax + b^2,$$

a construção será idêntica à anterior (Figura 2.13).

Neste caso, o segmento $|PM|$ é a raiz desejada da equação. A outra raiz negativa será ignorada.

Exemplo 2.3 *Resolver a equação:* $x^2 = -10x + 144$.

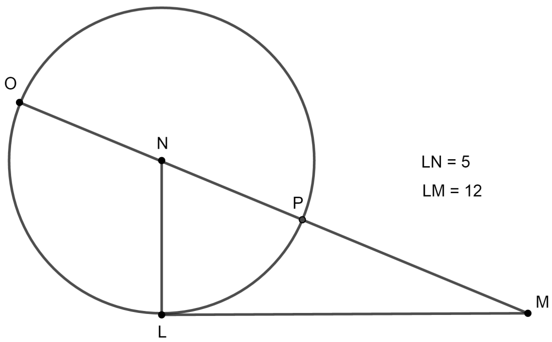


Figura 2.15: Resolução de $x^2 = -10x + 144$.

Notemos que, neste caso, $|LM| = 12$ e $|LN| = 5$. Como o comprimento de NM é 13, então $|PM| = |MN| - |LN| = 8$ é a raiz da equação.

Portanto, o segmento $|PM| = 8$ é a raiz da equação.

O terceiro tipo de equação resolvida por Descartes por meio de construção é:

$$x^2 = ax - b^2.$$

Exemplo 2.4 *Resolver a equação:* $x^2 = 10x - 9$.

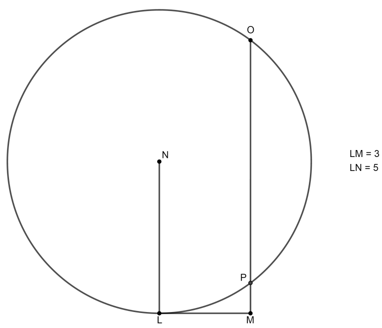


Figura 2.16: Resolução de $x^2 = 10x - 9$.

Notemos que, neste caso, $|LM| = 3$ e $|LN| = 5$. Portanto, os segmentos $|OM| = 9$ e $|PM| = 1$ são as raízes da equação. Observemos que, neste caso, as duas raízes são positivas.

2.2.4 Método Geométrico com Referência ao Método de Euclides.

O método, desenvolvido por Nelson Tunala [25], professor do Centro Tecnológico do Exército do Instituto Militar de Engenharia, no Rio de Janeiro, é para determinar com régua e compasso as raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$, supondo $c \neq 0$, pois se $c = 0$, as raízes da equação são 0 e $-b$. Portanto, verificaremos quando c assume valores maiores ou menores que zero.

1° CASO: Quando $c > 0$, as raízes x_1 e x_2 têm o mesmo sinal, logo:

$$|x_1| + |x_2| = |b|.$$

$$|x_1| \cdot |x_2| = c.$$

Sendo assim, a resolução do problema equivale a determinar dois segmentos de reta, cuja soma de suas medidas seja $|b|$ e cujo produto de suas medidas seja c.

Vejamos a construção:

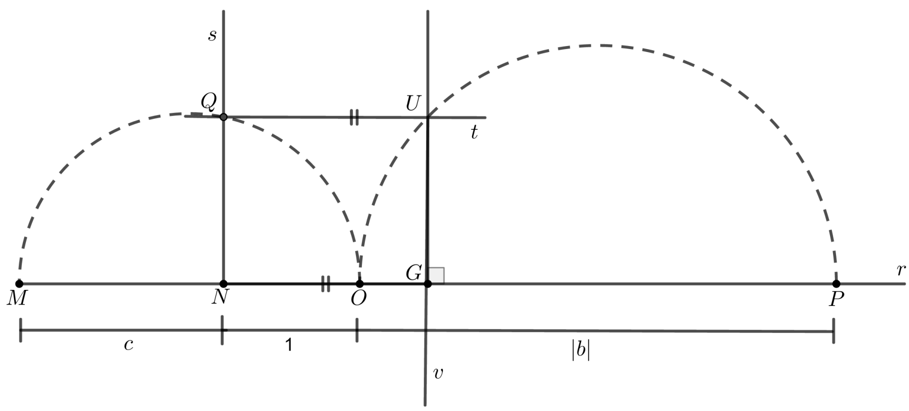


Figura 2.17: Construção com Base ao Método de Euclides 1.

Os passos para a construção são os seguintes:

1. Traçar uma reta r e, sobre ela, marcar os segmentos MN, NO e OP de comprimentos, cujas medidas são, respectivamente, c, 1 e $|b|$.

2. Traçar duas semicircunferências com diâmetros $|MO|$ e $|OP|$.

3. Por N traçar a perpendicular s à reta r, determinando Q na semicircunferência de diâmetro $|MO|$. Assim, $|NQ|$ é a altura do triangulo retângulo MQO, cuja hipotenusa é o diâmetro $|MO|$. Logo, $|NQ|^2 = |MN| \cdot |NO| = c \cdot 1 = c$. Portanto, $|NQ| = \sqrt{c}$.

4. Por Q traçar a reta t, paralela a r, determinando U na semicircunferência de diâmetro $|OP|$.

5. Por U, traçar a reta v, perpendicular a r, determinando G em r.

Os segmentos $|OG|$ e $|GP|$ representam os valores absolutos das raízes da equação.

De fato, $|GU| = |NQ| = \sqrt{c}$. Assim, $|GU|$ é a altura do triangulo retângulo OUP, cuja hipotenusa é o diâmetro $|OP|$. Logo, $|GU|^2 = |OG| \cdot |GP|$. Assim, $|OG| \cdot |GP| = c$ e temos, por construção, $|b| = |OG| + |GP|$.

Portanto, $|OG|$ e $|GP|$ são dois segmentos cuja soma é $|b|$ e cujo produto é c.

Se $b < 0$, então $x_1 = |OG|$ e $x_2 = |GP|$ são as raízes.

Se $b > 0$, então $x_2 = -|OG|$ e $x_2 = -|GP|$ são as raízes.

Observação 2.1 *Se a reta t, suporte de QU, não interceptar a semicircunferência de diâmetro $|OP|$, isto é, se $\sqrt{c} > \frac{1}{2}$, as raízes são imaginárias e a construção não permite determiná-las. O mesmo ocorre, em particular, no caso degenerado $b = 0$ (com $c > 0$).*

2° CASO: Quando $c < 0$, as raízes têm sinais contrários e, sendo x_1 a raiz de maior valor absoluto, devemos ter:

$$|x_1| - |x_2| = |b|.$$

$$|x_1| \cdot |x_2| = |c|.$$

Sendo assim, a resolução do problema equivale a determinar dois segmentos de reta, cuja diferença de suas medidas seja igual a $|b|$ e cujo produto de suas medidas seja igual a $|c|$.

Os passos para a construção são os seguintes:

1. Determinar os pontos M, N, O e P numa mesma reta r e o ponto Q, como no 1° caso. Assim, temos, como vimos anteriormente, $|NQ| = \sqrt{c}$.

2. Transladar NQ numa direção paralela a s, obtendo o segmento OU.

3. Ligar U ao centro I da circunferência, determinando o diâmetro GH.

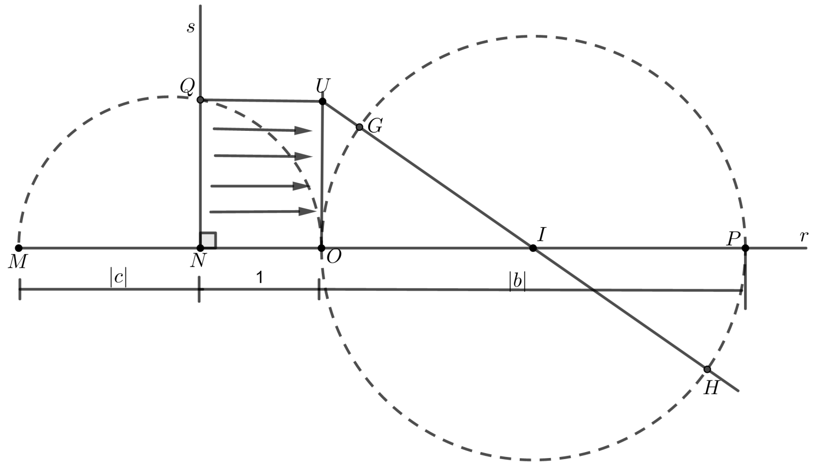


Figura 2.18: Construção com Base ao Método de Euclides 2.

Os segmentos $|UH|$ e $|UG|$ representam as raízes da equação.

De fato, $|UH| - |UG| = |GH| = |b|$ (diâmetro).

Por outro lado, da tangente OU e da secante UH ao círculo de diâmetro OP, chegamos aos triângulos UHO e UOG. Daí, o ângulo U é comum aos dois triângulos e os ângulos UHO e UOG são congruentes. Logo os triângulos UHO e UOG são congruentes. Sendo assim, podemos afirmar que:

$$\frac{|UH|}{|OU|} = \frac{|OU|}{|UG|},$$

ou seja,

$$|OU|^2 = |NQ|^2 = |c| = |UH| \cdot |UG|.$$

Portanto, $|UH|$ e $|UG|$ são dois segmentos, cuja diferença é $|b|$ e cujo produto é c.

$$\text{Se } b < 0,\ x_1 = |UH| \text{ e } x_2 = -|UG|.$$

$$\text{Se } b > 0,\ x_1 = -|UH| \text{ e } x_2 = |UG|.$$

Observação importante: Neste caso, o problema sempre tem solução. Se $b = 0$, temos o caso degenerado em que $I = O = G = H$ (o raio da circunferência de centro I é zero) e as raízes são $|UO|$ e $-|UO|$.

2.3 A Álgebra Geométrica das Equações de 3° Grau.

O matemático, astrônomo e poeta Omar Khayyam (1050 - 1122), aproximadamente, publicou uma obra intitulada "Treatise on Demonstration of Problems of Algebra", no qual consta a resolução geométrica para uma equação cúbica da forma $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$. Nascido na Pérsia, desenvolveu uma álgebra que ia além da de Al-Khwarizmi, incluindo as equações cúbicas. Nas cúbicas, de um modo geral, ele acreditava que soluções aritméticas eram impossíveis; por isso, deu apenas soluções geométricas utilizando de seções cônicas para determinar as raízes positivas das equações de 3° grau.

Em História da Matemática de Carl B. Boyer, encontramos:

> "Como seus predecessores árabes, Omar Khayyam dava para as equações de 2º grau tanto soluções aritméticas quanto soluções geométricas: para as equações cúbicas gerais, ele acreditava (erradamente, como se demonstrou mais tarde no século dezesseis) que soluções aritméticas eram impossíveis; por isso deu apenas soluções geométricas. A ideia de usar cônicas que se cortam para resolver cúbicas tinha sido usada antes por Menaecmus, Arquimedes e Alhazen, mas Omar Khayyam deu o passo importante de generalizar o método para cobrir todas as equações de terceiro grau (que tinham raízes positivas). Quando, numa obra anterior, encontrou uma equação cúbica, ele observou especificamente: 'Isso não pode ser resolvido por geometria plana – isto é, usando apenas régua e compasso – pois contém um cubo. Para a solução precisamos de secções cônicas'". (BOYER, 1996, p. 164).

De acordo com o livro de Howard Eves, *Introdução à História da Matemática* (Pág. 261, 2004), "talvez a mais profunda e original contribuição algébrica árabe tenha sido a resolução geométrica de uma equação cúbica feita por Omar Khayyam (c.1100)".

Detalhemos o esboço da resolução geométrica de Khayyam da cúbica: $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$, em que fez uso da interseção da cônica hipérbole com um semicírculo.

O problema é que, dados os segmentos de reta, cujas medidas são a, b e c, determinar o comprimento x que satisfaça a equação citada.

1. Construir $|AB| = \dfrac{a^3}{b^2}$. Para isto, precisamos encontrar um segmento z de forma

que a seja a média geométrica de b e z, ou seja, $z = \dfrac{a^2}{b}$.

Vejamos:

- Com os segmentos a e b, constrói-se o triângulo retângulo de catetos $|MN| = b$ e $|NP| = a$.

- Traça-se a mediatriz da hipotenusa $|MP|$ de forma que intercepte um dos catetos em Q.

- Do triângulo isósceles

$$MQP(|MQ| \equiv |QP|),$$

traça-se uma semicircunferência interceptando em R o prolongamento do cateto contendo Q. O segmento $|NR|$ é igual a z. Para explicar este último passo, observe na Figura 2.19 que o triângulo retângulo MPR está inscrito na semicircunferência de raio, cuja medida é igual a $|MQ|$. Então, $|NP|^2 = |MN| \cdot |NR|$. Daí, $a^2 = b \cdot z \Rightarrow z = \dfrac{a^2}{b}$.

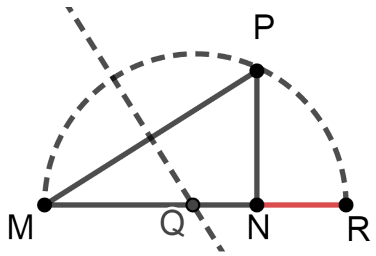


Figura 2.19: Resolução Cúbica de Khayyam (Parte 1).

Agora, determinemos o segmento $|AB|$ tal que $a \cdot z = |AB| \cdot b$.

- Numa mesma semirreta, traçamos os segmentos consecutivos $|MN| = b$ e $|NP| = a$.

- Numa outra semirreta, com origem em M, traçamos o segmento $|MS| = z$.

- Por P, passamos uma paralela ao segmento NS, interceptando a semirreta MS em T. O segmento $|ST|$ é igual a $|AB|$.

  Vejamos a construção:

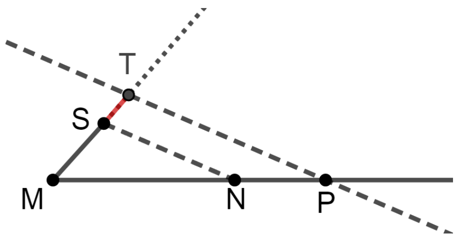


Figura 2.20: Resolução Cúbica de Khayyam (Parte 2).

Observe na Figura 2.20 que, ao aplicar o Teorema de Tales, temos:

$$\frac{|MN|}{|MS|} = \frac{|NP|}{|ST|}$$

$$\frac{b}{z} = \frac{a}{|AB|} \Rightarrow b \cdot |AB| = a \cdot z \Rightarrow b \cdot |AB| = a \cdot \frac{a^2}{b} \Rightarrow |AB| = \frac{a^3}{b^2}.$$

2. Construir o segmento BC de comprimento c. (Figura 2.21).

3. Traçar uma semicircunferência de diâmetro AC (Figura 2.21).

4. Traçar uma perpendicular em AC pelo ponto B cortando a semicircunferência no ponto D (Figura 2.21).

5. Sobre BD, marcar um ponto E tal que $|BE| = b$ (Figura 2.21).

6. Pelo ponto E, traçar EF paralela a AC (Figura 2.21).

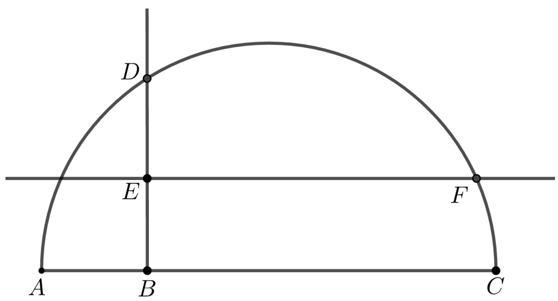


Figura 2.21: Resolução Cúbica de Khayyam (Parte 3).

7. Encontrar G em BC, de maneira que:

$$(|BG|)(|ED|) = (|BE|)(|AB|),$$

completando o retângulo $DBGH$.

- Inicialmente, construímos o segmento BA.
- Na semirreta BA, marcamos o ponto K de forma que, o segmento BK seja igual ao segmento ED.
- Construímos o segmento $|BE| = b$ por um ponto E fora do segmento BK.
- Pelo ponto A, traçamos uma paralela à EK encontrando o ponto G em BE.

De acordo com a construção (Figura 2.22) e pelo Teorema de Tales,

$$\frac{|BK|}{|BE|} = \frac{|BA|}{|BG|} \Rightarrow \frac{|ED|}{|BE|} = \frac{|AB|}{|BG|}$$

Daí, temos que:

$$(|BG|)(|ED|) = (|BE|)(|AB|).$$

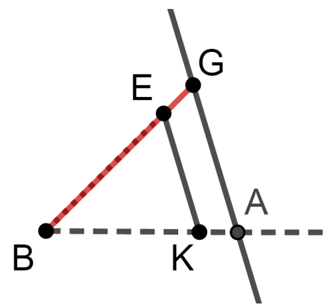


Figura 2.22: Resolução Cúbica de Khayyam (Parte 4).

8. Traçar, por H, uma hipérbole equilátera de assíntotas EF e ED, cortando a circunferência no ponto J. (Ver Figura 2.15).

9. Traçar uma paralela ao segmento DE, pelo ponto J, encontrando os pontos K e L, que são as interseções dessa paralela (que possui o ponto J), com os segmentos EF e BC, respectivamente (Figura 2.23).

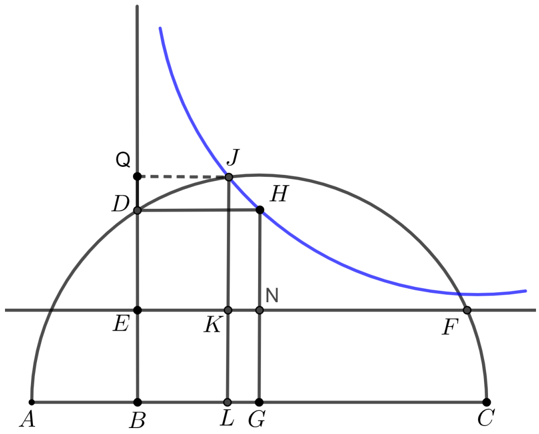


Figura 2.23: Resolução Cúbica de Khayyam.

Após a construção dada por Khayyam (Figura 2.23), analisemos a demonstração que foi tirada e adaptada de Eves (2004) e do artigo original: A Solução das Quadráticas e Cúbicas na História, Fábio Nicácio Souza.

1. Provemos, inicialmente, a relação:

$$(|EK|) \cdot (|KJ|) = (|BG|) \cdot (|ED|) = (|BE|) \cdot (|AB|).$$

   Determinamos os retângulos $ENHD$ e $EKJQ$. Os pontos J e H pertencem à hipérbole equilátera, sendo assim, o produto de suas distâncias às assíntotas é uma constante. Isto quer dizer que:

$$(|EK|) \cdot (|KJ|) = (|EN|) \cdot (|NH|).$$

   Observamos que, $|EN| = |BG|$ e $|NH| = |ED|$. Daí, segue que:

$$(|EK|) \cdot (|KJ|) = (|BG|) \cdot (|ED|).$$

   Como, por construção, vimos que $(|BG|)(|ED|) = (|BE|)(|AB|)$, podemos concluir:

$$(|EK|) \cdot (|KJ|) = (|BG|) \cdot (|ED|) = (|BE|) \cdot (|AB|).$$

2. Para provarmos a relação

$$(|BL|) \cdot (|LJ|) = (|AL|) \cdot (|BE|),$$

   façamos a construção. (Figura 2.24).

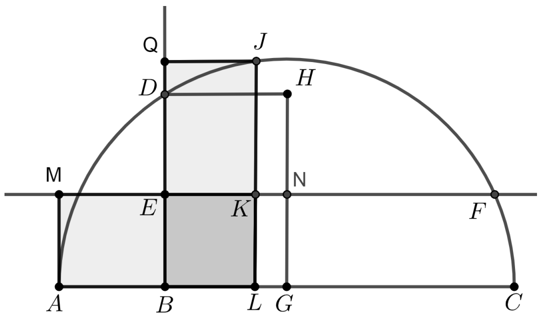


Figura 2.24: Resolução de Khayyam - Prova de $BL = x$.

(a) A área do retângulo $BLKE$ é a interseção das áreas dos retângulos $ALKM$ e $BLJQ$.

(b) Observemos que, pela igualdade demonstrada $(|EK|).(|KJ|) = (|BE|).(|AB|)$, os retângulos $ABEM$ e $EKJQ$ têm a mesma área. Daí, determinamos que:

$$(|AL|) \cdot (|BE|) = (|BL|) \cdot (|LJ|) \quad \Rightarrow \quad \frac{(|BE|)}{(|BL|)} = \frac{(|LJ|)}{(|AL|).} \tag{2.4}$$

3. Como o triângulo AJC está inscrito numa semicircunferência, então ele é retângulo. Assim, afirmamos que:

$$(|LJ|)^2 = (|AL|) \cdot (|LC|). \tag{2.5}$$

4. Elevando a igualdade 2.4 ao quadrado e nela substituindo a igualdade 2.5, obtemos:

$$\frac{(|BE|)^2}{(|BL|)^2} = \frac{(|LJ|)^2}{(|AL|)^2} = \frac{(|AL|) \cdot (|LC|)}{(|AL|)^2} = \frac{(|LC|)}{(|AL|)}.$$

5. Deste último, temos:

$$(BE)^2 \cdot (AL) = (BL)^2 \cdot (LC). \tag{2.6}$$

6. Como sabemos que:

$$|BE| = b \quad |BL| = x \quad |BC| = c \quad |AB| = \frac{a^3}{b^2}.$$

Temos então:

$$|AL| = |AB| + |BL| = \frac{a^3}{b^2} + x.$$

$$|LC| = |BC| - |BL| = c - x.$$

7. Substituindo na igualdade 2.6, obtemos:

$$b^2 \cdot \left(\frac{a^3}{b^2} + x \right) = x^2 \cdot (c - x) \quad \Rightarrow \quad a^3 + b^2 x = cx^2 - x^3$$

   Logo, temos a equação de 3º grau:

$$x^3 + b^2 x + a^3 = cx^2.$$

Sendo $|BL| = x$, portanto, $|BL|$ é uma raiz procurada da equação cúbica dada.

Capítulo 3

Falando Ainda das Cúbicas

3.1 A Trigonometria de Viète.

O matemático francês Viète nasceu no ano 1540 em Fontanay e faleceu no ano 1603, em Paris. Foi um excelente algebrista, obtendo resultados nas equações algébricas. Importantes fórmulas trigonométricas foram criadas por ele, como, por exemplo:

$$sen2\theta = 2sen\theta\cos\theta.$$

$$sen3\theta = 3sen\theta - 4sen^3\theta.$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Viète inovou a simbologia algébrica. Escreveu o livro *In Artem Analyticam Isagoge* (Introdução à Arte Analítica), em 1591. Neste livro, utilizou as letras para representar não somente as quantidades desconhecidas - as chamadas incógnitas - mas também os coeficientes das equações. Utilizava sempre letras maiúsculas, sendo as vogais para quantidades desconhecidas e as consoantes para quantidades conhecidas. A escrita algébrica da época era ainda bem diferente da escrita moderna. Por exemplo, uma equação hoje, que era representada por $3BA^2 - DA + A^3 = Z$ era escrita por Viète:

$$b3inAquad - DplanoinA + AcuboaequatorZsolido.$$

No Capítulo 1, quando relatamos a demonstração da fórmula de Cardano para a resolução de equações de 3° grau, foi feita a mudança da incógnita $x = y - \dfrac{a}{3}$ para transformar a equação geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ em outra sem o termo de 2° grau. Este mesmo método de substituição de incógnita foi aplicado por Viète, encontrando outro caminho para a solução de equações cúbicas.

Vejamos, portanto, a demonstração da fórmula, desenvolvida por Viète, para resolver equações de 3° grau:

$$x^3 + px + q = 0. \tag{3.1}$$

Introdução da incógnita auxiliar:

$$x = z - \frac{p}{3z}.$$

Substituindo, temos:

$$\left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + p\left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = 0$$

$$z^3 - 3z^2\frac{p}{3z} + 3z\frac{p^2}{9z^2} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0$$

$$z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0$$

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

$$z^6 - \frac{p^3}{27} + qz^3 = 0.$$

que é uma equação de 2° grau em z^3:

$$(z^3)^2 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Assim, pela fórmula de Bhaskara, temos

$$z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \text{ ou seja, } z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Como $x = z - \dfrac{p}{3z}$, então

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p}{3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}.$$

resultado equivalente ao obtido por Tartaglia. E ainda permanecia a dúvida sobre quantidades de raízes.

Um dos grandes desafios de Viète foi encontrar a solução para a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, sendo todas raízes reais e não podiam ser achadas pela fórmula de Cardano ou pela fórmula que ele mesmo deduziu. Ele encontrou uma solução trigonométrica para a equação.

A estratégia utilizada foi a mesma quando deduziu a fórmula de resolução das cúbicas: substituição de incógnitas. Considere $x = kcos\theta$. Substituindo na Equação 3.1, temos

$$(k\cos\theta)^3 + p(k\cos\theta) + q = 0,$$

ou seja,

$$\cos^3\theta + \frac{p}{k^2}\cos\theta + \frac{q}{k^3} = 0.$$

Como já tinha deduzido a fórmula:

$$cos3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

ou

$$cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{\cos 3\theta}{4} = 0.$$

fez as seguintes equivalências:

1. $\dfrac{p}{k^2} = -\dfrac{3}{4} \iff k = \pm 2\sqrt{\dfrac{-p}{3}}.$

2. $\dfrac{q}{k^3} = -\dfrac{\cos 3\theta}{4} \iff \cos 3\theta = -\dfrac{4q}{k^3} = \dfrac{-4q}{\pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{4p}{3}\right)} = \pm\dfrac{\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}}.$

Observemos que $\cos 3\theta$ está em função de p e q e, com isto, determina-se $\cos\theta$ através das tábuas trigonométricas. Em seguida, multiplica-se k por $\cos\theta$, encontrando a raiz procurada x, tirada da substituição feita inicialmente: $x = k\cos\theta$.

Agora, voltemos à equação abaixo para resolvê-la aplicando a fórmula trigonométrica.

$$x^3 - 15x - 4 = 0.$$

Podemos afirmar que: $p = -15$ e $q = -4$.

Assim,

$$k = \pm 2\sqrt{\frac{15}{3}} = \pm 2\sqrt{5}.$$

Descobriremos o valor da incógnita usando os dois valores de k:

1. $k = 2\sqrt{5}$.
$$cos3\theta = \left[-\frac{4(-4)}{(2\sqrt{5})^3}\right] = \frac{2\sqrt{5}}{25} \cong 0,178885438.$$
Viète deduziu que, se $cos3\theta \cong 0,178885438$, então, pelas tabelas trigonométricas, 3θ somente poderia ser $79^o41'57''$. Daí, deduziu ainda que $\theta \cong 26^o33'59''$ e $cos\theta \cong 0,894427$.
Portanto,
$$x = k\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad x \cong (2\sqrt{5}) \cdot 0,894427 \cong 3,999999.$$
Pois o valor exato é: $x = 4$.

2. $k = -2\sqrt{5}$.
$$cos3\theta = \left[-\frac{-4(-4)}{(2\sqrt{5})^3}\right] = -\frac{2\sqrt{5}}{25} \cong -0,178885438.$$
Se $\cos 3\theta \cong -0,178885438$, ignorando a multiplicidade de ângulos, então Viète deduziu que $3\theta \cong 100^o18'03''$, $\theta \cong 33^o26'01''$, $\cos\theta \cong 0,834512$.
Portanto,
$$x = k\cos\theta \quad \Rightarrow \quad x \cong (-2\sqrt{5}) \cdot 0,834512 \cong -3,732051.$$
Pois o valor exato é $x = -2 - \sqrt{3}$.

Foram encontradas duas raízes e como achar a terceira?

Levando em consideração a infinidade de arcos que satisfazem as equações trigonométricas:
$$\cos 3\theta = \frac{2\sqrt{5}}{25} \quad \text{e} \quad \cos 3\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{25}.$$
encontraremos a terceira raiz.

Seja $k = 2\sqrt{5}$.
$$\cos 3\theta \cong 0,178885438$$
$$3\theta \cong 2n\pi + 79^o41'57'' \quad (n = 0, \pm1, \pm2, ...).$$
$$\theta \cong 2n\frac{\pi}{3} + 26^o33'59''$$
$$\cos\theta \cong cos\left(\frac{2\pi}{3}n + 26^o33'59''\right).$$

Fazendo n variar, existem exatamente três valores diferentes para $cos\theta$:

$$cos(26^o33'59'') \cong 0,894427.$$

$$cos\left(\frac{2\pi}{3} + 26^o33'59''\right) \cong -0,834512.$$

$$cos\left(\frac{4\pi}{3} + 26^o33'59''\right) \cong -0,059915.$$

Portanto, as três raízes são:

$$x_1 \cong (2\sqrt{5}) \cdot 0,894427 \cong 3,999999 \text{ (O valor exato é 4)},$$

$$x_2 \cong (2\sqrt{5}) \cdot 0,834512 \cong -3,732051 \text{ (O valor exato é} -2+\sqrt{3}),$$

$$x_3 \cong (2\sqrt{5}) \cdot (-0,059915) \cong -0,267949 \text{ (O valor exato é} -2-\sqrt{3}.$$

Fazendo $k = -2\sqrt{5}$ e $\cos 3\theta \cong -0,17885438$, obtemos os mesmos resultados das três raízes encontradas anteriormente.

A solução das cúbicas, encontrada por Viète, pelo método trigonométrico, tinha alternativa de não ter que usar os números complexos, mas havia restrições para algumas equações.

Exemplo 3.1 *Seja a equação* $x^3 - 12x - 30 = 0$ *e considerando* $x = k\cos\theta$*, calculemos* $x = \cos 3\theta$

Como $p = -12$ e $q = -30$ e de acordo com a Expressão

$$\cos 3\theta = \pm\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}}$$

temos:

$$\pm\frac{\frac{-30}{2}}{\sqrt{\left(\frac{12}{3}\right)^3}} = \pm\frac{-15}{8} = \pm 1,875.$$

Observemos que o $\cos 3\theta$ não poderia assumir valores $\pm 1,875$ por não existir ângulo que satisfaça tal relação, pois os cossenos devem estar sempre no intervalo entre -1 e $+1$.

Logo, por este método, a equação $x^3 - 12x - 30 = 0$ não pode ser resolvida.

3.2 Métodos de Newton.

3.2.1 O Método Algébrico.

O matemático, astrônomo e físico inglês Isaac Newton nasceu em 1642, em Woolsthorpe e faleceu no ano 1727 em Londres, devido a problemas renais.

Dentre as diversas descobertas geniais, Newton também deu sua contribuição à teoria das equações algébricas.

Antes de abordarmos uma aplicação do procedimento algébrico adotado por Newton, falaremos, a seguir, do Teorema de Bolzano, que é imprescindível para o entendimento do método. Apesar de Bolzano ter nascido um século depois, Newton já aplicava a estratégia de substituição de valores na equação como o início do desenvolvimento.

O matemático checo Bernhard Bolzano (1781 - 1848), conhecido como o "pai da aritmetização da matemática", demonstrou o seguinte teorema, que leva seu nome:

Teorema 3.1 (Teorema de Bolzano) *Dados uma equação algébrica em sua forma canônica $P(x) = 0$ e dois números reais a e b $(a < b)$, se $P(a)$ e $P(b)$ tiverem o mesmo sinal, o número de raízes reais da equação (eventualmente repetidas) dentro do intervalo (a, b) será par; se $P(a)$ e $P(b)$ tiverem sinais opostos, o número de raízes reais da equação (eventualmente repetidas) dentro do intervalo (a, b) será ímpar.*

Intuitivamente, através da construção de gráficos, compreendamos o Teorema de Bolzano.

Nos gráficos (Figura 3.1 e Figura 3.2, como $a < b$, $P(a)$ e $P(b)$ têm sinais iguais (positivos), o número de raízes dentro do intervalo (a, b) é par. Portanto, na Figura 3.1, como a interseção do gráfico com o eixo dos x são três pontos, logo a equação possui uma raiz dupla. Já na Figura 3.2, os quatro pontos pertencentes ao gráfico e ao eixo dos x, implicam quatros raízes simples da equação.

Nos gráficos (Figura 3.3 e Figura 3.4), como $a < b$ e $P(a)$ e $P(b)$ têm sinais opostos, o número de raízes no intervalo (a, b) é ímpar. Sendo assim, na figura 3.3, o gráfico possui três raízes simples e, na Figura 3.4, os quatro pontos pertencentes ao gráfico e ao eixo dos x, implicam a existência de cinco raízes, sendo uma delas com multiplicidade dois.

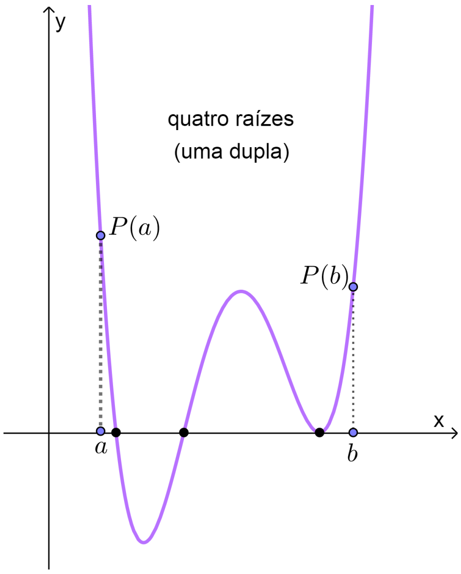


Figura 3.1: Gráfico da Função $f(x) = x^4 - 11x^3 + 42x^2 - 64x + 32$.

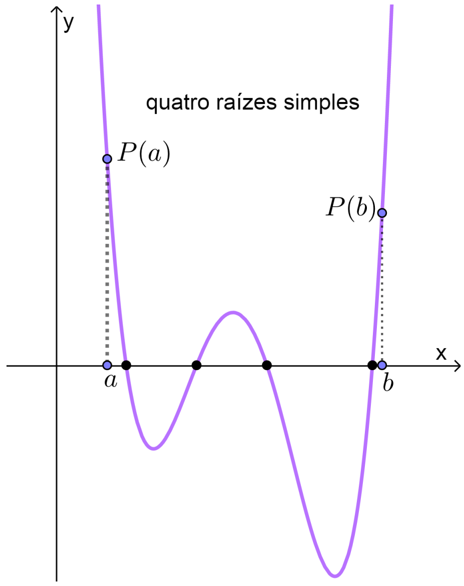


Figura 3.2: Gráfico da Função $g(x) = x^4 - 10,5x^3 + 38x^2 + 25,5x + 27$.

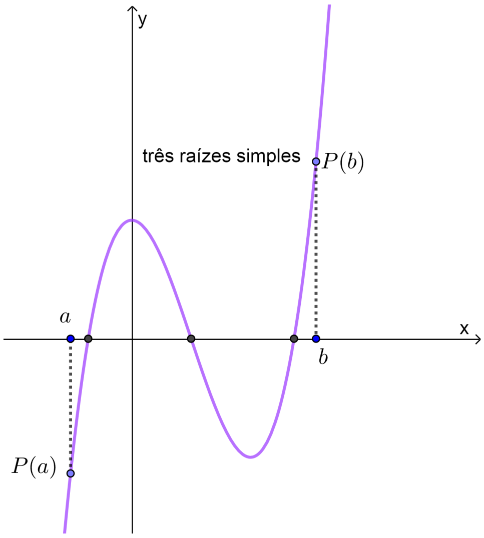


Figura 3.3: Gráfico da Função $h(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

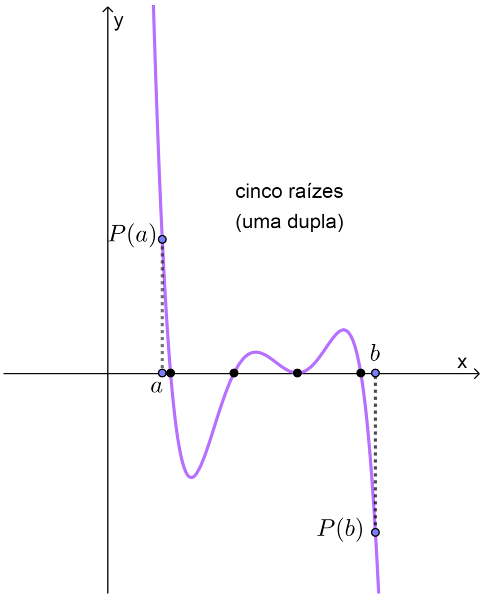


Figura 3.4: Gráfico da Função $t(x) = -x^5 + 13x^4 - 65x^3 + 155x^2 - 174x + 72$.

Vejamos, através do procedimento algébrico, a solução dada por Newton na equação:

$$x^3 - 2x - 5 = 0. \tag{3.2}$$

Inicialmente, foram escolhidos dois números, por inspeção, para serem substituídos na equação. Assim, os números foram 2 e 3. Como sabia que a equação possuiria três raízes, e os resultados da substituição foram os números -1 e 16, respectivamente, os sinais opostos confirmam que a equação possui quantidade ímpar de raízes, no caso, três (oficializado um século depois por Bolzano). Viu também que no intervalo $(2,3)$ possuía uma das raízes.

Desta forma, considerou a raiz x como:

$$x = 2 + x_1, \quad com \;\; 0 < x_1 < 1.$$

Substituindo na equação 3.2, temos:

$$(2 + x_1)^3 - 2(2 + x_1) - 5 = 0$$

$$8 + 12x_1 + 6x_1^2 + x_1^3 - 4 - 2x_1 - 5 = 0$$
$$x_1^3 + 6x_1^2 + 10x_1 - 1 = 0.$$

Como $x_1 < 1$ as parcelas x_1^3 e $6x_1^2$ são pequenas em relação a $10x_1$, de modo que podemos dizer que, aproximadamente, $10x_1 - 1$ é igual a zero, ou seja, que x_1 é aproximadamente 0,1. Portanto,

$$x_1 = 0,1 + x_2.$$

Como $x = 2 + x_1$, então, o valor de x é portanto:

$$x = 2 + 0,1 + x_2$$

$$x = 2,1 + x_2.$$

Sendo x_2 uma valor pequeno, quando comparado com $0,1$. Agora, substituiremos $2,1 + x_2$ na Equação 3.2:

$$(2,1 + x_2)^3 - 2(2,1 + x_2) - 5 = 0$$

$$9,261 + 13,23x_2 + 6,3x_2^2 + x_2^3 - 4,2 - 2x_2 - 5 = 0$$
$$x_2^3 + 6,3x_2^2 + 11,23x_2 + 0,061 = 0.$$

Da mesma forma, como no caso anterior, podemos dizer que, aproximadamente, $11,23x_2 + 0,061$ é igual a zero, ou seja, x_2 é aproximadamente:

$$x_2 \cong -\frac{0,061}{11,23} = -0,0054.$$

Usando a mesma estratégia,

$$x = 2 + 0,1 - 0,0054 + x_3 = 2,0946 + x_3.$$

Substituindo $2,0946 + x_3$ na equação original:

$$x^3 - 2x - 5 = 0;$$

$$(2,0946 + x_3)^3 - 2(2,0946 + x_3) - 5 = 0$$
$$9,189741551 + 13,16204748x_3 + 6,2838x_3^2 + x_3^3 - 4,1892 - 2x_3 - 5 = 0$$
$$x_3^3 + 6,2838x_3^2 + 11,16204748x_3 + 0,000541551 = 0.$$

Podemos dizer que, aproximadamente, $11,16204748x_3 + 0,000541551$ é igual a zero, ou seja, que x_3 é, aproximadamente,

$$x_3 \cong -0,000048517.$$

Assim,
$$x = 2,0946 - 0,000048517 + x_4 = 2,09411483 + x_4.$$

Observemos que $x = 2,09411483$ já é uma boa aproximação para o valor da raiz.

3.2.2 O Método Não Algébrico.

Este método é aplicado para certos tipos de equações polinomiais. Aqui, aplicaremos, especificamente, para a resolução de equação de 3° grau.

Encontrar as raízes da equação $F(x) = 0$ é achar os pontos onde o gráfico da função $y = f(x)$ intersecta o eixo dos x.

Suponhamos r_1 a raiz procurada. Conforme a Figura 3.5, a reta s tangente à curva, encontra-se o ponto $P_0(x_0, y_0)$. O ponto x_1, que é interseção da reta s com o eixo dos x, é uma aproximação da raiz r_1. A reta t tangente a curva, encontra-se o ponto $P_1(x_1, y_1)$. O ponto x_2, que é interseção da reta t com o eixo dos x, é uma melhor aproximação da raiz r_1. Repetidamente, traçando indefinidamente outras tangentes à curva, encontramos pontos mais próximo de r_1.

Encontremos a equação da reta s (Figura 3.5) pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = tan\theta.$$

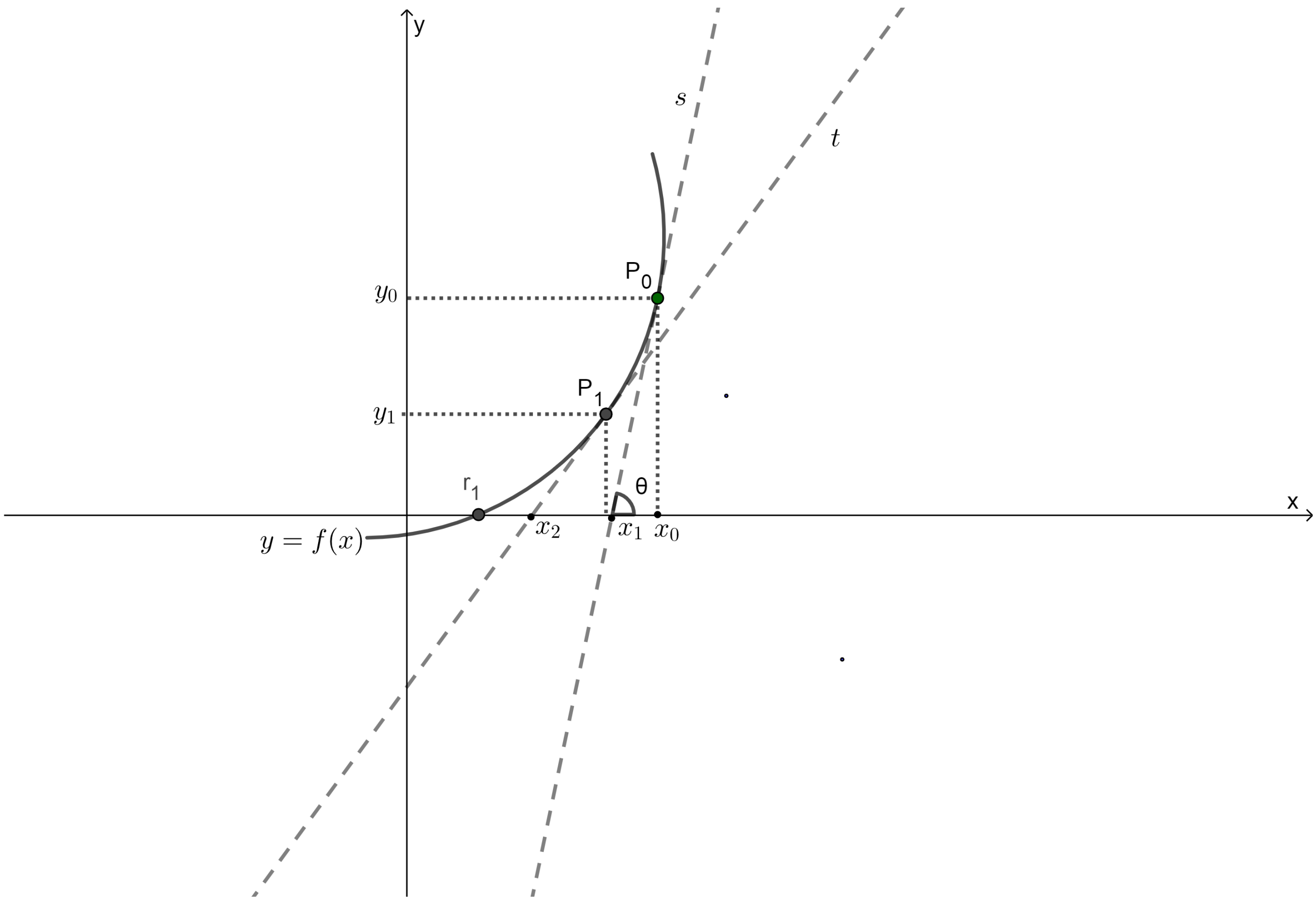


Figura 3.5: Método Não Algébrico de Newton

Como a reta s intersecta o eixo dos x no ponto $(x_1, 0)$, temos:

$$\frac{0 - y_0}{(x_1 - x_0)} = tan\theta$$

$$-y_0 = x_1 tan\theta - x_0 tan\theta$$

$$x_1 = x_0 - \frac{y_0}{tan\theta}.$$

Mas $tan\theta = f'(x_0)$ e $y_0 = f(x_0)$. Portanto,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Observe que, para encontrar x_1 dada a função f, calcula-se sua derivada f' e toma-se x_0 como valor inicial. Agora, partindo de x_1 e usando a mesma fórmula, calcula-se x_2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Para o cálculo de x_3, usemos o mesmo procedimento do anterior;

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}.$$

Assim, temos a fórmula da recorrência:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

A sequência terminará quando obtivermos uma melhor aproximação.

Como dito, este método pode ser aplicado na resolução de equações com graus variados. Mas, para exemplificar, tomemos a equação cúbica resolvida, de forma aproximada, por Leonardo Fibonacci: $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.

Tomemos o valor inicial $x = 1$. Substituindo na expressão $x^3 + 2x^2 + 10x$, temos 13 como resultado. Valor menor que 20. Se $x = 2$, substituindo na mesma expressão, temos a soma igual a 36. Valor maior que 20. Assim, temos uma das raízes entre 1 e 2 e podemos começar com $x_0 = 1,5$.

Seja a função

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

e sua derivada,

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10.$$

Aplicando a fórmula:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Temos,

$$x_1 = 1,5 - \frac{2,875}{22,75} = 1,3736263736;$$

$$x_2 = 1,3736263736 - \frac{0,1017886829}{21,155053737} = 1,36881481963;$$

$$x_3 = 1,36881481963 - \frac{0,00014159349}{21,09622130981} = 1,36880107.$$

Chegamos ao resultado, para o valor de x, numa aproximação até a 8ª casa decimal.

Este método foi aperfeiçoado pelo matemático Joseph Raphson (1648 - 1715) e publicado na obra *Analysis aequationum universalis*, em 1690.

3.3 Aplicação do Teorema das Raízes Racionais e do Algoritmo de Briot-Ruffini.

Aplicando o Teorema das Raízes Racionais e o algoritmo de Briot-Ruffini, citados no Capítulo 1, encontremos as raízes da equação polinomial:

$$2x^3 + x^2 + 11x + 34 = 0.$$

Começaremos descobrindo o conjunto dos divisores do termo independente e do coeficiente do termo de maior grau.

$$D(34) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 17, \pm 34\}\,,\ \text{D(34) é o conjunto dos divisores de 34.}$$

$$D(2) = \{\pm 1, \pm 2\}\,.$$

Por inspeção, verificamos que o quociente $\dfrac{-2}{1} = -2$ é raiz da equação. Agora, o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 1 & 11 & 34 \\ \hline -2 & & -4 & 6 & -34 \\ \hline & 2 & -3 & 17 & 0 \end{array}$$

Assim, temos a equação do 2° grau:

$$2x^2 - 3x + 17 = 0.$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$\Delta = 9 - 4.2.17 = -127$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-127}}{4}$$
$$x = \frac{3 \pm i\sqrt{127}}{4}.$$

Logo, as raízes da equação $2x^3 + x^2 + 11x + 34 = 0$ são:

$$x_1 = -2,\ x_2 = \frac{3 + i\sqrt{127}}{4},\ x_3 = \frac{3 - i\sqrt{127}}{4}.$$

Capítulo 4

Álgebra dos Polinômios com Ênfase nas Raízes.

4.1 Valor de um Polinômio.

Antes de verificarmos o valor de um polinômio, analisemos as definições abaixo.

Será utilizado o símbolo $\mathbb{C}[x]$ para denotar o conjunto de todos os polinômios na variável x, com coeficientes pertencentes ao conjunto dos números complexos.

Definição 4.1 (Polinômio) *Seja $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. Um polinômio na variável x com coeficientes pertencentes ao conjunto $\mathbb{C}$ é uma expressão da forma:*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$

Onde $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são elementos de $\mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Chamamos de termo do polinômio cada parcela a_jx^j. Os números $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ são chamados de coeficientes do polinômio.

Definição 4.2 (Grau) *Seja $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, com $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, um polinômio não nulo, chama-se grau de f, denotado por ∂f ou $gr(f)$, o número natural n tal que $a_n \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > n$.*

Definição 4.3 (Valor de Um Polinômio) *Sejam $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $u \in \mathbb{C}$ e o polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, chama-se valor de f em u o seguinte elemento:*

$$f(u) = a_0 + a_1u + \cdots + a_nu^n.$$

Dizemos que u é raiz, se $f(u) = 0$.

Exemplo 4.1 *Sejam* $f(x) = 2 + 2x^2 \quad e \quad u = i.$

$$f(u) = 2 + 2.i^2 = 2 - 2 = 0.$$

Portanto, i é raiz de f.

Valem as seguintes proposições:

Proposição 4.1 *Sejam $f, g \in \mathbb{C}[x]$ e $u \in \mathbb{C}$. Então, $(f+g)(u) = f(u) + g(u)$.*

Prova: Sejam $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ e $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$.

$$(f+g)(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n.$$

Por outro lado,

$$(f+g)(u) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)u + \cdots + (a_n + b_n)u^n.$$

$$(f+g)(u) = (a_0 + a_1u + \cdots + a_nu^n) + (b_0 + b_1u + \cdots + b_nu^n) = f(u) + g(u).$$

■

Proposição 4.2 *Sejam $f, g \in \mathbb{C}[x]$ e $u \in \mathbb{C}$. Então, $(fg)(u) = f(u)g(u)$.*

Prova: Sejam $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ e $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$.

$$fg = \sum_{k=0}(\sum_{i+j=k} a_ib_j)x^k \quad e \quad (fg)(u) = \sum_{k=0}^{n+m}(\sum_{i+j=k} a_ib_j)u^k.$$

Por outro lado, como

$$f(u) = \sum_{i=0}^{n} a_iu^i \quad e \quad g(u) = \sum_{j=0}^{m} b_ju^j.$$

Então,

$$f(u)g(u) = (\sum_{i=0}^{n} a_iu^i)(\sum_{j=0}^{m} b_ju^j) = \sum_{j=0}^{m}(\sum_{i=0}^{n} a_iu^i)b_ju^j =$$

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_ib_ju^{i+j} = \sum_{k=0}^{n+m}(\sum_{i+j=k} a_ib_j)u^k.$$

■

4.2 Algoritmo de Euclides.

Teorema 4.1 *Dados os polinômios* $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ *e suponhando* $g \neq 0$, *existem* $q(x), r(x) \in \mathbb{C}[x]$ *de forma que* $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, *onde* $r = 0$ *ou* $\partial(r) < \partial(g)$.

Prova:

1. Se $f = 0$, então $q = r = 0$, pois $0 = g \cdot 0 + 0$.

2. Se $f \neq 0$ e $\partial(f) < \partial(g)$, basta tomar $q = 0$ e $r = f$, pois $g \cdot 0 + f = f$.

3. Sendo $\partial(f) \geq \partial(g)$, provemos pelo Princípio de Indução:

   - Se $\partial(f) = 0$, então $\partial(g) = 0$. Daí $f(x) = a_0$ e $g(x) = b_0$. Portanto, basta tomar $q = b_0^{-1}a_0$ e $r = 0$ uma vez que $a_0 = b_0(b_0^{-1}a_0) + 0$.
   - Suponhamos agora que $f = a_n x^n + \cdots + a_0$ e $\partial(f) = n$, $g = b_m x^m + \cdots + b_0$ com $b_m \neq 0$ e $n \geq m$ e que o teorema vale para todo polinômio de grau menor que n. Consideremos o polinômio $f_1 = f - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g$.
     Se $f_1 = 0$ ou $\partial(f_1) < \partial(g)$, então $r = f_1$ e $q = a_n b_m^{-1} x^{n-m}$. Caso contrário tem-se $\partial(f_1) \leq n - 1$ e $\partial(f_1) \geq \partial(g)$. Pela hipótese de indução existem $q_1, r_1 \in \mathbb{C}$ de maneira que

     $$f_1 = gq_1 + r_1 \text{ onde } r_1 = 0 \text{ ou } \partial(r_1) < \partial(g)$$

     .

     Então,

     $$f - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g = gq_1 + r_1$$

     o que acarreta que

     $$f = g(q_1 + a_n b_m^{-1} x^{n-m}) + r_1, \text{ onde } r_1 = 0 \text{ ou } \partial(r_1) < \partial(g).$$

■

4.3 Algoritmo de Briot-Ruffini.

Briot-Ruffini, nasceu em Valentano, Papal States em 22 de setembro de 1765 e morreu no dia 10 de maio de 1822 em Modena, cidade em que iniciou sua carreira na universidade em 1783, onde estudou matemática, medicina, filosofia e literatura.

Voltando ao teorema já citado no Capítulo 1:

Teorema 4.2 *Seja o polinômio de grau n $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$. Se $q = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$ e $r = b_n$ são respectivamente quociente e resto na divisão considerada ($f(x)$ dividido por $(x-u)$), então $b_0 = a_0$ e $b_i = ub_{i-1} + a_i$, sendo $i = 1, 2, \cdots, n$.*

Prova: Calculemos $(x-u)q + r$.

$$(x-u)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + b_n =$$

$$b_0x^n + (b_1 - ub_0)x^{n-1} + \cdots + (b_{n-1} - ub_{n-2})x + (b_n - ub_{n-1}).$$

Levando em consideração que $f(x) = (x-u)q + r$, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 - ub_0 = a_1, ..., b_{n-1} - ub_{n-2} = a_{n-1} \\ b_n - ub_{n-1} = a_n \end{cases}$$

Daí, segue que:

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = ub_0 + a_1, ..., b_{n-1} = ub_{n-2} + a_{n-1} \\ b_n = ub_{n-1} + a_n \end{cases}$$

então estas últimas são as igualdades pretendidas. ■

Exemplo 4.2 *Determine o quociente ($q(x)$) e o resto ($r(x)$) da divisão do polinômio $f(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 4x - 2$ por $g(x) = x - 2$.*

Aplicando o dispositivo prático, visto no Capítulo 1, temos:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & -3 & -5 & 4 & -2 \\ \hline 2 & & 2 & -2 & -14 & -20 \\ \hline & 1 & -1 & -7 & -10 & -22 \end{array}$$

Portanto, $q(x) = x^3 - x^2 - 7x - 10$ e $r(x) = -22$.

4.4 Teorema do Resto.

Teorema 4.3 *Sejam $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, um polinômio não nulo de grau n pertencente a $\mathbb{C}[x]$ e $u \in \mathbb{Z}$. Então, o resto da divisão euclidiana de $f(x)$ por $x - u$ é igual a $f(u)$.*

Prova: Supondo $f(x) = (x-u)q(x) + r(x)$, onde $r(x) = 0$ ou $\partial r = 0$ (pois $\partial(x-u) = 1$), com $q(x)$ e $r(x)$ em $\mathbb{C}[x]$.

Achando o valor de $f(x)$ em u:

$$f(u) = (u-u)q(u) + r(u) = r.$$

Uma vez que, sendo r constante, $r(u) = r$. ■

Exemplo 4.3 *Encontre o resto da divisão de* $f = 5x^4 + 3x^2 + 11$ *por* $g = x - 3$.

De acordo com o Teorema 4.3,

$$f(3) = 5.3^4 + 3.3^2 + 11 = 405 + 27 + 11 = 443.$$

Logo, 443 é o resto da divisão de f por g.

Exemplo 4.4 *Encontre o resto da divisão* $f = (x+3)^7 + (x-2)^2$ *por* $g = x + 3$.

De acordo com o Teorema 4.3,

$$f(-3) = (-3+3)^7 + (-3-2)^2 = 0^7 + (-5)^2 = 25.$$

Logo, 25 é o resto da divisão de f por g.

4.5 Teorema de D'Alembert.

Jean-le-Rond d'Alembert (1717 - 1790) nasceu e morreu em Paris. Foi abandonado recém-nascido próximo à igreja de Saint Jean-le-Rond, onde um militar o recolheu e batizou com o nome do local. Depois, por motivos desconhecidos, adotou o d'Alembert.

Teorema 4.4 *Sejam* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ *e* $g(x) = x - a$, *com* $f(x)$ *e* $g(x)$ *em* $\mathbb{C}[x]$. *Então* f *é divisível por* g, *se e somente se,* $f(a) = 0$.

Prova: De acordo com o Teorema do Resto, temos que $r = f(a)$, então:

$$r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = 0.$$

■

Exemplo 4.5 *Verifique que*$f = x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 7x - 1$ *é divisível por* $g = x - 1$.

De acordo com o Teorema de D'Alembert, como $f(1) = 1 - 4 - 3 + 7 - 1 = 0, logo$ f é divisível por g.

4.6 Número de Raízes de Polinômios.

Proposição 4.3 *Seja $f(x)$ um polinômio não nulo em $\mathbb{C}[x]$, então o número de raízes de $f(x)$ em $\mathbb{C}$ é no máximo igual a $\partial(f)$.*

Prova: Se $\partial(f) = 0$ é imediato o que a proposição afirma. Neste caso, f não possui nenhuma raiz em $\mathbb{C}$.

Agora, suponhamos que $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ e $\partial(f) = n > 0$ e que o resultado seja verdadeiro para todo polinômio de grau $n - 1$.

Se f não tem raiz, o resultado é verdadeiro. Caso contrário, seja u raiz de f em $\mathbb{C}$. Então existe $q \in \mathbb{C}[x]$, de modo que $f = (x - u)q$. Assim, qualquer outra raiz de f (caso exista) é raiz de q. De fato: Suponha $v \neq u$ e $f(v) = 0$, então $(v-u)q(v) = 0$ e $q(v) = 0$ (pois $v \neq u$, por hipótese).

Como o número de raízes de q não ultrapassa $n - 1 = \partial(q)$, então o número de raízes de f em $\mathbb{C}$ é no máximo n. ■

Exemplo 4.6 *Para o polinômio $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \in \mathbb{R}[x]$, determinar suas raízes.*

Analisemos facilmente que $x = 1$ é uma raiz para $f(x)$: $1^3 - 3.1^2 + 3.1 - 1 = 0$.

Pela proposição 4.3, caso exista mais raízes em $\mathbb{R}$, elas são no máximo mais duas e, para determiná-las, usaremos o algoritmo de Briot-Ruffini. Basta dividir $f(x)$ por $x - 1$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & 3 & -1 \\ \hline 1 & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

Portanto, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x^2 - 2x + 1)(x - 1)$.

Por Bhaskara, descobrimos que a equação $x^2 - 2x + 1 = 0$ possui raiz $x = 1$ de multiplicidade dois (Falaremos sobre a multiplicidade de uma raiz no próximo item).

Logo, a equação, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ tem como única raiz o número $x = 1$. Deste modo, dizemos que a multiplicidade da raiz é 3.

4.7 Multiplicidade de Uma Raiz.

Definição 4.4 *Considere $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ e $a \in \mathbb{C}$. Dizemos que a multiplicidade de a em $f(x)$ é m se $(x - a)^m | f(x)$ e $(x - a)^{m+1} \nmid f(x)$ (não divide). Se $m = 1$, então a raiz é simples, se $m = 2$, a raiz é dupla e assim, segue sucessivamente. Uma raiz múltipla de f é uma raiz de f cuja multiplicidade é $m > 1$.*

Exemplo 4.7 *Encontre a multiplicidade das raízes da equação polinomial*

$$(x-3)(x-1)^2(x-4)^3 = 0.$$

A equação dada apresenta 6 raízes reais, sendo uma raiz igual a 3, duas raízes iguais a 1, três raízes iguais a 4. Senso assim, dizemos que 3 é raiz simples, 1 é raiz dupla e 4 é raiz tripla da equação dada.

Exemplo 4.8 *Encontre a multiplicidade das raízes da equação polinomial*

$$x^4(x+8)^7 = 0.$$

A equação dada admite as raízes 0, com multiplicidade 4 e -8 com multiplicidade 7.

Analisemos o teorema sobre diferenciação de funções algébricas para aplicarmos nas Proposições 4.4 e 4.5.

Teorema 4.5 *Se n é um número inteiro positivo e se $f(x) = x^n$, então:*

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Prova: De acordo com a definição formal da derivada de uma função $f(x)$, conforme consta no apêndice, temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Aplicando o teorema do binômio a $(x+\Delta x)^n$, temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n\right] - x^n}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

Dividindo o numerador e o denominador por Δx, temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x) + \cdots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right]$$

Assim, todo o termo, exceto o primeiro, tende a zero quando Δx tende a zero. Portanto,

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

■

Proposição 4.4 *Sejam $f \in \mathbb{C}[x]$ e $u \in \mathbb{C}$. Então u é raiz múltipla de f se, e somente se, u é raiz de f e de f' (derivada de f).*

Prova: ($\Longrightarrow$) Sejam $r > 1$ e u raiz múltipla de f, existe $h \in \mathbb{C}[x]$ tal que $f(x) = (x-u)^r h$. A derivada de f é dada por:

$$f'(x) = r(x-u)^{r-1}h + (x-u)^r h'.$$

Assim,

$$f'(u) = r(u-u)^{r-1}h + (u-u)^r h'.$$

Portanto, $f'(u) = 0$.

($\Longleftarrow$) Assumimos agora que $f(u) = f'(u) = 0$ e que u seja uma raiz simples de f, isto é $f = (x-u)h$ e $h(u) \neq 0$. Segue que;

$$f'(x) = (x-u)h' + h.$$

Portanto,

$$f'(u) = h(u) \neq 0$$

que é um absurdo. ■

Proposição 4.5 *Sejam $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ não nulo e $u \in \mathbb{C}$. São equivalentes:*

(i) u é raiz de multiplicidade r de $f(x)$.

(ii) $f(u) = f'(u) = f''(u) = \cdots = f^{r-1}(u) = 0$ e $f^r(u) \neq 0$.

Esta proposição generaliza a Proposição 4.4.

Prova: Usaremos o Primeiro Princípio de Indução para a prova.

- ($\Longrightarrow$)

  Suponhamos $r = 1$. Temos que $f(x) = (x-u)q(x)$ para algum $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ e $q(u) \neq 0$.
  Como $f'(x) = q(x) + (x-u)q'(x)$. Segue que $f(u) = 0$ e $f'(u) = q(u) \neq 0$.
  Logo, a proposição é válida para $r = 1$.

  Suponhamos agora que (ii) vale para r, isto é, se u é raiz de multiplicidade r de $h(x) \in \mathbb{C}[x]$, então:

  $$h(u) = h'(u) = \cdots = h^{r-1}(u) = 0 \quad e \quad h^r(u) \neq 0.$$

  Devemos provar a validade para $r+1$.

  Consideremos u sendo raiz de multiplicidade $r+1$ de $f(x)$. Assim:

  $$f(x) = (x-u)^{r+1}q(x), \quad q(x) \in \mathbb{C}[x] \quad e \quad q(u) \neq 0.$$

Chamemos $h(x) = (x-u)^r q(x)$. Como $q(u) \neq 0$, temos que r é raiz de multiplicidade r de $h(x)$.

Pela hipótese de indução, temos que:

$$h(u) = h'(u) = \cdots = h^{r-1}(u) = 0 \quad e \quad h^r(u) \neq 0.$$

Agora, $f(x) = h(x)(x-u)$ e $f(u) = 0$. Temos ainda que:

$$f'(x) = h'(x)(x-u) + h(x) \Rightarrow f'(u) = h(u) = 0;$$

$$f''(x) = h''(x)(x-u) + 2h'(x) \Rightarrow f''(u) = 2h'(u) = 0;$$

$$\vdots$$

$$f^{r-1}(x) = h^{r-1}(x)(x-u) + (r-1)h^{r-2}(x) \Rightarrow f^{r-1}(u) = (r-1)h^{r-2}(u) = 0;$$
$$f^{r}(x) = h^{r}(x)(x-u) + rh^{r-1}(x) \Rightarrow f^{r}(u) = rh^{r-1}(u) = 0;$$
$$f^{r+1}(x) = h^{r+1}(x)(x-u) + (r+1)h^{r}(x) \Rightarrow f^{r+1}(u) = (r+1)h^{r}(u) \neq 0.$$

Observe acima que $r+1 \neq 0$ e $h^r(u) \neq 0$ garantem que $(r+1)h^r(u) \neq 0$, pois $\mathbb{C}[x]$ é domínio.

- $(\Longleftarrow)$
  Suponhamos $r = 1$. Assim, a hipótese (ii) afirma que $f(u) = 0$ e $f'(u) \neq 0$.
  De $f(u) = 0$, temos que u é raiz de $f(x)$. Escrevemos então;

$$f(x) = (x-u)q(x), q(x) \in \mathbb{C}[x].$$

Derivando,

$$f'(x) = q(x) + (x-u)q'(x) \Rightarrow 0 \neq f'(u) = q(u).$$

Segue que u é raiz de multiplicidade 1 de $f(x)$.
Suponhamos que vale para r, isto é, se temos:

$$h(u) = h'(u) = \cdots = h^{r-1}(u) = 0 \quad e \quad h^r(u) \neq 0, h(x) \in \mathbb{C}[x].$$

Então u é raiz de multiplicidade r de $h(x)$.

Devemos provar a validade para $r+1$. Consideremos $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ com

$$f(u) = f'(u) = \cdots = f^r(u) = 0 \quad e \quad f^{r+1}(u) \neq 0, f(x) \in \mathbb{C}[x].$$

Sendo $f(u) = 0$, temos que u é raiz de $f(x)$. Verifiquemos que a multiplicidade de u é $r+1$.

Escrevendo $f(x) = (x - u)h(x), h(x) \in \mathbb{C}[x]$ e derivando, temos;

$$f'(x) = h(x) + (x - u)h'(x) \Rightarrow f'(u) = h(u) = 0$$

$$f''(x) = 2h'(x) + (x - u)h''(x) \Rightarrow f''(u) = 2h'(u) = 0 \Rightarrow h'(u) = 0;$$

$$\vdots$$

$$f^r(x) = rh^{r-1}(x) + (x - u)h^r(x) \Rightarrow f^r(u) = rh^{r-1}(u) = 0 \Rightarrow h^{r-1}(u) = 0;$$

$$f^{r+1}(x) = (r + 1)h^r(x) + (x - u)h^{r+1}(x) \Rightarrow$$

$$f^{r+1}(u) = (r + 1)h^r(u) \neq 0 \Rightarrow h^r(u) \neq 0.$$

Pela hipótese de indução, u é raiz de multiplicidade r de $h(x)$.

Desta forma, existe $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ tal que:

$$h(x) = (x - u)^r q(x), \quad q(u) \neq 0.$$

Substituindo em $f(x) = (x - u)h(x)$, temos:

$$f(x) = (x - u)^{r+1} q(x), \quad q(u) \neq 0.$$

Portanto, u é raiz de multiplicidade $r + 1$ de $f(x)$.

■

Exemplo 4.9 *Determine a multiplicidade da raiz -2 como raiz do polinômio* $f(x) = x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 20x + 8 = 0 \in \mathbb{Z}[x]$.

Notemos que

$$f(-2) = 0,$$

$$f'(x) = 4x^3 + 21x^2 + 36x + 20 \quad \Rightarrow \quad f'(-2) = 0,$$

$$f''(x) = 12x^2 + 42x + 36 \quad \Rightarrow \quad f''(-2) = 0,$$

$$f'''(x) = 24x + 42 \quad \Rightarrow \quad f'''(-2) \neq 0.$$

Logo, pela Proposição 4.5, -2 é raiz de multiplicidade 3 de $f(x)$.

Podemos ainda descobrir a raiz simples da função polinomial $f(x) = 0$. Basta dividirmos $f(x)$ por $q = (x + 2)^3$, que resulta em $q(x)(x + 1)$ *e* $r = 0$.

Portanto, a função polinomial $f(x) = 0$ possui raiz -2 com multiplicidade 3 e raiz simples -1.

Desta forma, podemos escrever $f(x) = x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 20x + 8 = 0$ como $f(x) = (x + 2)^3(x + 1)$.

4.8 Raízes Racionais de Polinômios com Coeficientes Inteiros.

Teorema 4.6 *Seja* $\dfrac{p}{q}$ *uma raiz de* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$*, polinômio de grau* n*, onde* $p, q, a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$ *e* $m.d.c.(p, q) = 1$*. Então vale as seguintes afirmativas:*

1. $p|a_0$ *(isto é, "*p *divide* a_0*" ou "*p *é divisor de* a_0*").*
2. $q|a_n$.
3. $(p - mq)|f(m), \forall m \in \mathbb{Z}$*. Em particular,* $(p - q)|f(1)$ *e* $(p + q)|f(-1)$*.*

Prova: Demonstremos cada afirmativa deste teorema:

1. Como $\dfrac{p}{q}$ é uma raiz de f, então:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Multiplicando esta igualdade por q^n, temos:

$$a_n p^n + a_{n-1}qp^{n-1} + \cdots + a_1 q^{n-1}p + a_0 q^n = 0.$$

Agrupando todos os termos em p, temos:

$$\underbrace{(a_n p^n + a_{n-1}qp^{n-1} + \cdots + a_1 q^{n-1}p)}_{\text{divisível por p}} + a_0 q^n = 0.$$

Como a expressão em destaque é divisível por p e, como no segundo membro $p|0$, logo:

$$p|a_0 q^n.$$

Ora, como $m.d.c(p, q) = 1$, então:

$$p|a_0.$$

2. Aproveitando a mesma equação vista na demonstração anterior:

$$a_n p^n + a_{n-1}qp^{n-1} + \cdots + a_1 q^{n-1}p + a_0 q^n = 0.$$

Agora, agrupando todos os termos em q, temos:

$$a_np^n + \underbrace{(a_{n-1}qp^{n-1} + ... + a_1q^{n-1}p + a_0q^n)}_{\text{divisível por q}} = 0.$$

Como a expressão em destaque é divisível por q e, como no segundo membro $q|0$, logo:

$$q|a_np^n.$$

Ora, como $m.d.c(p,q) = 1$, então:

$$q|a_n.$$

3. (Demonstração tirada da Revista do Professor de Matemática (RPM) N.14).

   Seja $m \in \mathbb{Z}$ qualquer. Existem inteiros α_i tais que:

$$f(x) = \alpha_n(x-m)^n + \alpha_{n-1}(x-m)^{n-1} + \cdots + \alpha_1(x-m) + \alpha_0.$$

   (Cada α_i é o quociente da divisão de $f(x)$ pelo polinômio $(x-m)^n$.

   Usando o fato de que $\frac{p}{q}$ é raiz de $f(x)$, temos:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \alpha_n\left(\frac{p}{q} - m\right)^n + \cdots + \alpha_1\left(\frac{p}{q} - m\right) + \alpha_0 = 0.$$

   que é o mesmo que:

$$\alpha_n(p-mq)^n + q\alpha_{n-1}(p-mq)^{n-1} + \cdots + q^{n-1}\alpha_1(p-mq) = -\alpha_0q^n.$$

   O primeiro membro desta última equação é um inteiro múltiplo de $(p-mq)$.

   Logo, $(-\alpha_0q^n)$ também é múltiplo de $(p-mq)$.

   Seja $d \in \mathbb{Z}$ tal que $d|q$ e $d|(p-mq)$.

   Daí, temos que $d|mq$ o que implica $d|(mq + (p-mq))$, ou seja, d|p.

   Assim, d é um divisor de p e $-q$.

   Logo, $d = 1$ ou $d = -1$.

   Portanto, $m.d.c(p-mq, q) = 1$.

   Aplicando agora "n" vezes o resultado "Se $a|bc$ e $m.d.c(a,b) = 1$, então $a|c$", temos que: $(p-mq)|(\alpha_0q^n)$ implica $(p-mq)|\alpha_0$, ou seja, $(p-mq)$ é um divisor de $f(m)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

■

Exemplo 4.10 *Verificar que a equação* $f(x) = 15x^{20} + 8x^5 + 3x^3 - 75 = 0$ *não possui raiz racional.*

Suponhamos que exite p/q racional com p e q primos entre si, raiz de f. Como $p|75$ e $q|15$, então p e q são ímpares. Por outro lado, $f(1) = -49$, resultado ímpar. Como $p - q$ é par, então $p - q$ não divide $f(1)$, o que é um absurdo pela Teorema 4.6.

Exemplo 4.11 *Provar que* $\sqrt{2}$ *é um número irracional.*

O número $\sqrt{2}$, evidentemente, é raiz do polinômio $f(x) = x^2 - 2$. Agora, se f tivesse uma raiz $s \in \mathbb{Q}$, então essa raiz seria um inteiro divisor de -2. Logo, $s = \pm 2, \pm 1$. Mas facilmente observamos que nenhum desses números é raiz de f. Assim, f não possui raiz racional e, como $\sqrt{2}$ é raiz de f, logo $\sqrt{2}$ é um número irracional.

4.9 Máximo Divisor Comum de Polinômios.

Definição 4.5 *Dados* $f,\ g \in \mathbb{C}[x]$, *um polinômio* $h \in \mathbb{C}[x]$ *se diz máximo divisor comum (mdc) de* f *e* g *se:*

1. $h|f$ *e* $h|g$.
2. $(\forall h_1 \in \mathbb{C}[x])\ (h_1|f \text{ e } h_1|g \implies h_1|h)$.

Neste caso, denotamos $h = mdc(f, g)$.

Teorema 4.7 (Teorema de Bézout) *Dados* $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$, *então existe o mdc* $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ *de* $f(x)$ *e* $g(x)$. *Mais ainda, existem polinômios* $u(x), v(x) \in \mathbb{C}[x]$ *tais que* $h(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.

Prova: Consideremos o conjunto

$$\omega = \{t_1(x)f(x) + t_2(x)g(x) \neq 0/t_1(x), t_2(x) \in \mathbb{C}[x]\},$$

como o conjunto de todas as combinações lineares de $f(x)$ e $g(x)$ que podemos fazer com coeficientes polinomiais $t_1(x)$ e $t_2(x)$ em $\mathbb{C}[x]$. Em seguida tomemos o conjunto $\psi = \{\partial p(x)/p(x) \in \omega \subset \mathbb{N}\}$ (zero está em $\mathbb{N}$). O conjunto ψ tem um menor elemento.

Seja $h(x) \in \omega$, tal que $\partial h(x)$ é o menor elemento de ψ. Vamos verificar que $h(x)$ é um mdc de $f(x)$ e $g(x)$. Como $h(x) \in \omega$, existem $u(x)$, $v(x) \in \mathbb{C}[x]$ tais que

$$h(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x). \tag{4.1}$$

Vejamos primeiro que $h(x)$ é um divisor comum. Pelo Algorítimo de Euclides, existem $q(x), r(x) \in \mathbb{C}[x]$, tais que $f(x) = h(x)q(x)+r(x)$, onde $r(x) = 0$ ou $\partial r(x) < \partial h(x)$. Queremos então que o resto $r(x)$ seja zero (polinômio nulo) para provarmos que $h(x)$ divide $f(x)$. Para provarmos isso, tomemos

$$r(x) = f(x) - q(x)h(x).$$

Substituindo nesta última equação a representação $h(x)$ da Equação 4.1, temos:

$$r(x) = f(x) - q(x)h(x) = f(x) - q(x)(u(x)f(x) + v(x)g(x))$$
$$r(x) = (1 - q(x)u(x))f(x) + (-q(x)v(x))g(x).$$

Concluímos então que $r(x) \in \omega$ se $r(x) \neq 0$. Mas $\partial h(x)$ é o menor grau de um polinômio em ω e $\partial r(x) < \partial h(x)$. Logo não é possível que $r(x) \in \omega$. Portanto $r(x) = 0$ e $h(x)|f(x)$. De maneira análoga provamos que $h(x)|g(x)$. ■

Observação 4.1 *Particularmente, Se $h = mdc(f, g)$, então existem $r, s \in \mathbb{C}[x]$ tais que*

$$r \cdot f + s \cdot g = 1.$$

Exemplo 4.12 *Dados $f(x) = 2 + 2x \in \mathbb{R}[x]$ e $g(x) = 1 - x^2 \in \mathbb{R}[x]$. Verificar que o polinômio $h(x) = 1 + x$ é máximo divisor comum de f e g.*

1. Ora, como $f(x) = 2(1 + x) = 2h$, então $h|f$ e como $g(x) = (1 + x)(1 - x) = d(1 - x)$, então $h|g$.

2. Se $h_1|f$, implica dizer que existe $q \in \mathbb{R}[x]$ tal que $f = h_1q$. Como $\partial(f) = 1$, então $\partial(h_1) = 0$ ou $\partial(h_1) = 1$.

No caso $\partial(h_1) = 0$, vale a igualdade:

$$h = 1 + x = h_1 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_1} x \right).$$

Isto nos mostra que $h_1|h$.

No caso $\partial(h_1) = 1$, como h_1 é de 1º grau, podemos representar $h_1 = a + bx$ e $q = c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Lembrando que $f = h_1q$, obtemos:

$$f = h_1q = (a + bx)c = ac + bcx = 2 + 2x \Longrightarrow ac = bc = 2.$$

Daí,

$$a = b \ \ e \ \ h_1 = a + bx = a + ax = a(1 + x).$$

Portanto,

$$h = 1 + x = \frac{1}{a} h_1.$$

Isto nos mostra que $h_1|h$.

4.9.1 Método das Divisões Sucessivas.

Consideremos $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ não nulos. Suponhamos $\partial f(x) \geq \partial g(x)$. Para determinar um máximo divisor comum de f e g, apliquemos sucessivamente o algoritmo de Euclides, seguindo os passos a seguir:

1. $f = gq + r \quad \Rightarrow \quad r = 0$ ou $\partial(r) < \partial(g)$.
2. $g = rq_1 + r_1 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 0$ ou $\partial(r_1) < \partial(r)$.
3. $r = r_1q_2 + r_2 \quad \Rightarrow \quad r_2 = 0$ ou $\partial(r_2) < \partial(r_1)$.
4. $r_1 = r_2q_3 + r_3 \quad \Rightarrow \quad r_3 = 0$ ou $\partial(r_3) < \partial(r_2)$, etc.

Como não podemos ter $r \neq 0, r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, r_3 \neq 0, \cdots$. pois isto ocasionaria: $\partial(g) > \partial(r) > \partial(r_1) > \partial(r_2) > \cdots \geq 0$ (sequência infinita - o que é impossível).

Então exite um resto r_n dessa sequência que é nulo e de maneira que os anteriores $r, r_1, \cdots, r_{n-1}$ não são nulos.

Afirmamos que r_{n-1} (g no caso $n = 0$) é um máximo divisor comum de f e g.

Como resultado, temos:

- $f = gq + r \quad \Rightarrow \quad \partial(r) < \partial(g)$.
- $g = rq_1 + r_1 \quad \Rightarrow \quad \partial(r_1) < \partial(r)$.

....

- $r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \partial(r_{n-1}) < \partial(r_{n-2})$.
- $r_{n-2} = r_{n-1}q_n$.

Devido à última e à penúltima igualdades, respectivamente, temos que $r_{n-1}|r_{n-2}$ e $r_{n-1}|r_{n-3}$.

Consequentemente, chegamos a $r_{n-1}|g$ e $r_{n-1}|f$.

Por outro lado, todo divisor de f e g divide r (por causa da primeira igualdade). Se divide g e r também divide r_1. Nessa sequência, chegaremos a que esse polinômio também divide r_{n-1}.

Exemplo 4.13 *Obter o máximo divisor comum dos polinômios:* $f(x) = x^3 + 27$ *e* $g(x) = x^2 + 6x + 9$.

$$f = g \cdot (x - 6) + 27 \cdot (x + 3).$$
$$g = 27 \cdot (x + 3) \cdot \left(\frac{x}{27} + \frac{1}{9}\right) + 0.$$

Logo, $x + 3$ é o mdc procurado.

4.10 Raízes Comuns.

Veremos alguns teoremas que permitem estabelecer relações entre raízes comuns a dois polinômios f e g, isto é, as raízes comuns a duas equações polinomiais $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$.

Teorema 4.8 *Se $u \in \mathbb{C}[x]$ é uma raiz comum aos dois polinômios f e $g \in \mathbb{C}[x]$, então u é raiz do resto r da divisão de f por g.*

Prova: Fazendo f dividido por g, temos:

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \Rightarrow r(x) = f(x) - g(x)q(x).$$

Substituindo x por u, temos:

$$r(u) = f(u) - g(u)q(u).$$

Como u é raiz de f e g, por hipótese, então, $f(u) = 0$ e $g(u) = 0$.
Assim:

$$r(u) = 0 - 0q(u) = 0.$$

■

Exemplo 4.14 *Sejam os polinômios $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ e $g(x) = x^2 - x - 6$. Notemos que 3 é raiz comum a f e a g: $f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 2.3 - 3 = 0$ e $g(3) = 3^2 - 3 - 6 = 0$. Na divisão de f por g, temos o polinômio $r(x) = 3x - 9$ como raiz, encontrado através do algoritmo da divisão (ou de Euclides):*

$$\begin{array}{c|c} x^3 - 2x^2 - 2x - 3 & \underline{x^2 - x - 6} \\ -x^3 + x^2 + 6x & x - 1 \\ \hline x^2 + 4x - 3 & \\ -x^2 - x - 6 & \\ \hline 3x - 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} x^2 - x - 6 & \underline{3x - 9} \\ -x^2 + 3x & \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ \hline 2x - 6 & \\ -2x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Observamos que $x - 3$ é o máximo divisor comum de f e g. Portanto, a única raiz comum a f e g é 3.

4.11 Raízes Complexas de um Polinômio $\mathbb{R}[x]$.

Antes de enunciar a proposição seguinte, lembremos que o conjugado de um número complexo $z = a + bi$ é o número complexo $\overline{z} = a - bi$. Lembremos ainda as seguintes propriedades:

- $z = w$ se, e somente se $\overline{z} = \overline{w}$.
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
- se z é um número real, então $\overline{z} = z$.

Proposição 4.6 *Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ um polinômio sobre $\mathbb{R}$. Se o número complexo z é raiz de f, então $\overline{z}$ também é raiz desse polinômio.*

Prova: Temos por hipótese:

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n = 0.$$

Utilizando as propriedades lembradas, temos:

$$f(\overline{z}) = a_0 + a_1\overline{z} + a_2(\overline{z})^2 + \cdots + a_n(\overline{z})^n = \overline{a_0} + \overline{a_1z} + \overline{a_2}(\overline{z^2}) + \cdots + \overline{a_n}(\overline{z^n})$$

$$= \overline{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n} = \overline{0} = 0. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 4.15 *Dado o polinômio $f(x) = -1 + 2x - x^2 + 2x^3$, determinar suas raízes.*

Verifiquemos se o polinômio possui raízes racionais. De acordo com o que vimos, analisemos de forma direta se os seguintes números são as possíveis raízes racionais:

$$-1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1.$$

Constatamos que a única raiz racional é $\frac{1}{2}$. As demais raízes serão encontradas da divisão de f por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini, temos o quociente:

$$q = 2x^2 + 2.$$

Calculando o discriminante da equação $q = 0$, temos o resultado: -16. Portanto, suas raízes são números complexos conjugados:

$$2x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow \pm i.$$

Logo, as raízes de f são: $\frac{1}{2}, \pm i$.

Uma consequência importante desta proposição é que, se um polinômio real de grau 3, por exemplo, terá uma raiz real (as outras duas serão complexas) ou três raízes reais. Nunca duas ou nenhuma. Isto significa que o gráfico de uma função polinomial de grau 3 corta necessariamente o eixo das abscissas em um ou três pontos. O gráfico do polinômio anterior f corta o eixo das abscissas apenas no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Generalizando para graus ímpares, uma equação polinomial real de grau 5 sempre corta o eixo das abscissas em um, três ou cinco pontos. E assim por diante.

Sendo par o grau de uma função polinomial, pode acontecer de o gráfico não cortar o eixo dos x. Mas, quando corta, o número de vezes é par. Por exemplo, $f(x) = x^4 - 9$ corta o eixo das abscissas nos pontos $(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$.

4.12 Relações de Girard.

O matemático francês Albert Girard (1595-1632) estabeleceu relações entre raízes e coeficientes de um polinômio. Para descobrir essas relações, ele levou em consideração as funções simétricas elementares de todas as raízes de um polinômio de grau n. Se as raízes desse polinômio são $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, então essas funções são definidas da seguinte maneira:

$$\rho_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$
$$\rho_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho_n = x_1x_2x_3 \cdots x_n.$$

Observação 4.2 *O termo funções simétricas decorre do fato de essas expressões não se alterarem quando permutam seus índices de uma maneira qualquer.*

Inicialmente, consideremos o polinômio de 2º grau $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, com f em $\mathbb{C}[x]$ cujas raízes são x_1 e x_2. Temos que:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - x_1)(x - x_2) = a_2[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$$
$$= a_2x^2 - a_2(x_1 + x_2)x + a_2(x_1x_2) = a_2x^2 - a_2\rho_1x + a_2\rho_2.$$

Pelo princípio de identidade de polinômios:

$$-a_2\rho_1 = a_1 \ \text{ e } \ a_2\rho_2 = a_0.$$

Portanto,

$$\rho_1 = -\frac{a_1}{a_2} \quad \text{e} \quad \rho_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

E daí,

$$f(x) = a_2(x^2 - \rho_1 x + \rho_2).$$

Consideremos, agora, o polinômio de grau 3 $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ com com f em $\mathbb{C}[x]$, cujas raízes são $x_1,\ x_2\ e\ x_3$. Temos que:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$= a_3[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3] =$$

$$= a_3x^3 - a_3(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - a_3(x_1x_2x_3)$$

$$= a_3x^3 - a_3\rho_1x^2 + a_3\rho_2x - a_3\rho_3.$$

Pelo princípio de identidade de polinômios:

$$-a_3\rho_1 = a_2, \quad a_3\rho_2 = a_1 \ \ e \ \ -a_3\rho_3 = a_0.$$

Portanto,

$$\rho_1 = -\frac{a_2}{a_3}, \quad \rho_2 = \frac{a_1}{a_3} \ \ e \ \ \rho_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

E daí,

$$f(x) = a_3(x^3 - \rho_1x^2 + \rho_2x - \rho_3).$$

De maneira geral e observando os casos particulares anteriores, podemos considerar um polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, de grau n, com f em $\mathbb{C}[x]$.

$$\rho_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \rho_2 = -\frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \cdots, \quad \rho_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

E, ainda, podemos escrever o polinômio $f(x)$ na seguinte forma:

$$f(x) = a_n[x^n - \rho_1x^{n-1} + \rho_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\rho_{n-1}x + (-1)^n\rho_n].$$

Exemplo 4.16 *Calcular a soma e o produto das raízes do polinômio:* $f(x) = x + 7x\breve{\ }6x + 1.$

Suponhamos que x_1, x_2 e x_3 são as raízes do polinômio dado. Pelas Relações de Girard, temos que

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{7}{1} = -7$$

e

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = (-1)^3\ \frac{a_0}{a_3} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Exemplo 4.17 *Calcular a soma e o produto das raízes do polinômio:* $g(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$.

Suponhamos que x_1, x_2, x_3 e x_4 são as raízes do polinômio dado. Pelas Relações de Girard, temos que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a_3}{a_4} = -\frac{3}{2}$$

e

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = (-1)^4 \ \frac{a_0}{a_4} = \frac{6}{2} = 3.$$

Capítulo 5

Discriminantes de Equações

O discriminante de um polinômio, muitas vezes denotado pelo símbolo Δ, dá algumas dicas importantes sobre a natureza das raízes do polinômio.

Existem equações na forma quadrática binária do tipo $P(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ em que a expressão $AC - B^2$ chama-se discriminante de P. Mas nosso objetivo é deter-nos no estudo de discriminante de equações que possuem uma única variável.

Em meados do século XVIII se tinha o conhecimento de que uma condição necessária e suficiente para que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tivesse duas raízes iguais é que $b^2 - 4ac = 0$.

Coube ao matemático inglês James Joseph Sylvester (1814 – 1897), que chamava a si mesmo de "Adão Matemático", devido ao seu hábito de dar nomes aos feitos matemáticos, a responsabilidade pelo conceito de discriminante.

Analisemos casos particulares, finalizando com situações gerais do uso e estudo de discriminantes de equações.

5.1 Discriminante de Equações de 2º Grau.

Quando apresentado, no Capítulo 1, o método de Viète para a resolução de equações de 2º grau,

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{5.1}$$

foi vista a conhecida Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A expressão $b^2 - 4ac$, da fórmula, que é representada pelo símbolo Δ, é o discriminante da equação, ou seja,

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Com o valor do discriminante Δ, três situações devem ser consideradas para sabermos a natureza das raízes, que veremos a seguir:

1. Se $\Delta = 0$, então a equação possui uma raiz com multiplicidade 2.

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

2. Se $\Delta > 0$, então a equação possui duas raízes reais e diferentes.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3. Se $\Delta < 0$, então a equação possui duas raízes complexas conjugadas.

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}.$$

Mais à frente, demonstraremos essas três situações de valores assumidos pelo discriminante Δ, através da relação do discriminante com as raízes da equação de 2º Grau.

Observação 5.1 *Notemos que das Relações de Girard para as equações de 2º grau e Fórmula de Bháskara, temos que se $ax^2 + bx + c = 0$ é a equação e x_1, x_2 são suas raízes, então*

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

e

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{c}{a}.$$

5.1.1 Coeficientes Inteiros de Equações de 2º Grau.

Veremos agora que, quando todos os coeficientes de uma equação de 2º grau $ax^2+bx+c = 0$ assumem valores exclusivamente inteiros, o valor de seu discriminante não poderá ser todo e qualquer número inteiro, como, por exemplo, o número 11 poderá ser ou não valor de discriminante de alguma equação de 2º grau com todos os coeficientes inteiros?

De acordo com o Teorema do Algoritmo da Divisão (ou de Euclides) em $\mathbb{Z}$, se a e b são números inteiros e $b \neq 0$, então existem inteiros q e r tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$. Os inteiros q e r, nessas condições, são únicos e são chamados, respectivamente, de quociente e resto da divisão euclidiana de a por b.

Sendo assim, podemos representar qualquer número inteiro nas seguintes formas:

- $2k$ ou $2k+1$, com $k \in \mathbb{Z}$ (Significa dizer que qualquer número inteiro dividido por 2 tem resto 0 ou 1).
- $3k$ ou $3k+1$ ou $3k+2$, com $k \in \mathbb{Z}$ (significa dizer que qualquer número inteiro dividido por 3 tem resto 0 ou 1 ou 2).
- $4k$ ou $4k+1$ ou $4k+2$ ou $4k+3$, com $k \in \mathbb{Z}$ (significa dizer que qualquer número inteiro dividido por 4 tem resto 0 ou 1 ou 2 ou 3).

$$\vdots$$

Utilizaremos uma dessas representações, por exemplo, a primeira, de números inteiros. Como os coeficientes a, b, c são inteiros, podemos dizer que:

$$b = 2k \quad \text{ou} \quad b = 2k+1, \quad com\ k \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo na expressão do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, obtemos:

$$\Delta = (2k)^2 - 4ac = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac).$$

ou

$$\Delta = (2k+1)^2 - 4ac = 4k^2 + 4k + 1 - 4ac = 4(k^2 + k - ac) + 1.$$

Ou seja,

$$\Delta = 4k' \quad \text{ou} \quad \Delta = 4k' + 1, com\ k' \in \mathbb{Z}.$$

Reciprocamente, para termos $\Delta = 4k'$, com $k' \in \mathbb{Z}$, basta considerarmos $a = 1,\ b = 0$ e $c = (-k')$ na equação $\Delta = b^2 - 4ac$, obtendo,

$$\Delta = 0^2 - 4(1)(-k') = 4k'.$$

Agora, para termos $\Delta = 4k' + 1$, com $k' \in \mathbb{Z}$, basta considerarmos $a = 1,\ b = 1$ e $c = (-k')$ na equação $\Delta = b^2 - 4ac$, obtendo,

$$\Delta = 1^2 - 4(1)(-k') = 4k' = 4k' + 1.$$

Logo, podemos dizer que um número inteiro Δ é discriminante de uma equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ se, e somente se, Δ é da forma $4k'$ ou $4k' + 1$, com $k' \in \mathbb{Z}$.

Portanto, respondendo à pergunta inicial, o número 11 não pode ser valor de discriminante de equações de 2º grau com coeficientes inteiros, pois não pode ser escrito na representação $4k'$ ou $4k' + 1$, com $k' \in \mathbb{Z}$.

5.1.2 Relação do Discriminante com as Raízes da Equação de 2º Grau.

Proposição 5.1 *Sejam a equação de 2º grau* $ax^2+bx+c=0$*, com* $a \neq 0$*,* $a,b,c \in \mathbb{R}$ *e* x_1, x_2 *as raízes desta equação. Então,*

$$\Delta = a^2(x_1 - x_2)^2.$$

Prova: Usaremos as relações de Girard para a prova.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$(x_1 + x_2)^2 = \frac{b^2}{a^2}$$
$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Como $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ e como $a \neq 0$, segue que

$$x_1^2 + \frac{2c}{a} + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2}$$
$$a^2x_1^2 + 2ac + a^2x_2^2 = b^2.$$

Substituindo a última equação em $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

$$\Delta = a^2x_1^2 + 2ac + a^2x_2^2 - 4ac$$
$$\Delta = a^2x_1^2 - 2ac + a^2x_2^2$$
$$\Delta = a^2\left(x_1^2 - 2\frac{c}{a} + x_2^2\right)$$
$$\Delta = a^2(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2).$$

Portanto,

$$\Delta = a^2(x_1 - x_2)^2.$$

∎

Seguindo a notação da Proposição 5.1, provemos os três casos comportamentais do discriminante Δ.

1. Se $\Delta = 0$, então a equação possui uma raiz com multiplicidade 2.

   Como $\Delta = a^2(x_1 - x_2)^2$, então $a^2(x_1 - x_2)^2 = 0$.
   Por hipótese, $a \neq 0$. Assim, $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ (raiz com multiplicidade 2).

2. Se $\Delta > 0$, então a equação possui duas raízes reais e diferentes.

   Temos $a^2(x_1 - x_2)^2 > 0$.
   Como a^2 é positivo, então $(x_1 - x_2)^2$ também é positivo. Isto ocorre se $x_1 \neq x_2$ com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (duas raízes reais e diferentes).

3. Se $\Delta < 0$, então a equação possui duas raízes complexas conjugadas.

   Temos $a^2(x_1 - x_2)^2 < 0$.
   Como a^2 é positivo, então $(x_1 - x_2)^2$ é negativo. Isto ocorre quando uma das raízes da equação for complexa. Assim, a outra raiz será o conjugado da primeira. Logo, se $\Delta < 0$, então a equação possui duas raízes complexas conjugadas.

5.2 Discriminantes de Equações de 3º Grau.

Trazemos novamente a fórmula de Cardano, demonstrada no Capítulo 1, para a resolução de equações de 3º grau

$$x^3 + px + q = 0 \tag{5.2}$$

e analisarmos seu discriminante. Pela fórmula de Cardano, temos que

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

é raiz da Equação 5.2. Destaquemos o radicando $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$ e chamemos de discriminante Δ, ou seja,

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Em relação a análise das raízes a partir do comportamento do discriminante Δ, pode-se afirmar que:

1. $\Delta > 0$, se e somente se a equação possuir uma raiz real e duas complexas conjugadas.

2. $\Delta = 0$, se e somente se a equação possuir três raízes reais, sendo uma com multiplicidade dois.

3. $\Delta < 0$, se e somente se a equação possui três raízes reais e distintas.

Consideremos, a seguir, alguns exemplos de resolução de equações.

Exemplo 5.1 *Considere* $x^3 - 8x - 32 = 0$.

Notemos que
$$\Delta = \frac{(-32)^2}{4} + \frac{(-8)^3}{27} = 256 - \frac{512}{27} = \frac{6400}{27}.$$

Como $\Delta > 0$, a equação possui uma raiz real e duas complexas.

Substituindo na fórmula de Cardano os coeficientes da equação e o valor do discriminante encontrado , temos:

$$x = \sqrt[3]{16 + \sqrt{\frac{6400}{27}}} + \sqrt[3]{16 - \sqrt{\frac{6400}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{16 + \frac{80\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{16 - \frac{80\sqrt{3}}{9}}.$$

Observemos que, testando os divisores de 32, vemos que 4 é raiz da equação. Ora, se a equação possui apenas uma raiz, concluímos que:

$$x_1 = \sqrt[3]{16 + \frac{80\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{16 - \frac{80\sqrt{3}}{9}} = 4.$$

Para encontrarmos as outras duas raízes e usando o Algoritmo de Euclides, temos

$$x^3 - 8x - 32 = (x^2 + 4x + 8)(x - 4).$$

Pela fórmula de Bhaskara, encontramos as raízes da equação $x^2 + 4x + 8 = 0$:

$$x_2 = -2 + 2i \quad e \quad x_3 = -2 - 2i.$$

Exemplo 5.2 *Considere* $x^3 - 6x - 9 = 0$. *(Exemplo do livro de Álgebra de Leonard Euler, escrito em 1770).*

Notemos que
$$\Delta = \frac{81}{4} + \frac{(-6)^3}{27} = \frac{81}{4} - 8 = \frac{49}{4}.$$

Como $\Delta > 0$, a equação possui uma raiz real e duas complexas.

Assim,
$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 3.$$

Para encontrarmos as outras duas raízes, efetuemos a divisão:

$$(x^3 - 6x - 9) \div (x - 3) = x^2 + 3x + 3.$$

Pela fórmula de Bhaskara, encontramos, portanto, as duas raízes restantes.

$$x_2 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad x_3 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo 5.3 *Considere* $x^3 - 3x - 2 = 0$.

Notemos que

$$\Delta = \frac{(-2)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27} = 1 - 1 = 0.$$

Como $\Delta = 0$, a equação possui três raízes reais e uma repetida.

Pela fórmula de Cardano,

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = 2$$

Para encontrarmos as outras duas raízes, efetuemos a divisão:

$$x^3 - 3x - 2 = (x^2 + 2x + 1)(x - 2).$$

Resolvendo a equação $x^2 + 2x + 1 = 0$ pela fórmula de Bhaskara, temos as duas raízes restantes, que são iguais:

$$x_2 = x_3 = -1.$$

Exemplo 5.4 *Considere* $x^3 - 6x - 4 = 0$. *(Exemplo do livro de Álgebra de Leonard Euler, escrito em 1770).*

Notemos que

$$\Delta = \frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27} = 4 - 8 = -4.$$

Como $\Delta < 0$, a equação possui três raízes reais e diferentes.

Aplicação da fórmula de Cardano:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}.$$

A raiz encontrada, pela fórmula de Cardano, parece ser um número complexo, mas é um número real, que verificaremos a seguir.

Ora, substituindo os divisores do termo independente da equação $x^3 - 6x - 4 = 0$, constatamos que -2 é raiz da equação e, efetuando a divisão $(x^3 - 6x - 4)(x + 2)$, temos como quociente o polinômio $x^2 - 2x - 2$.

Resolvendo a equação $x^2 - 2x - 2 = 0$, encontramos as seguintes raízes $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$.

Assim, as raízes da cúbica $x^3 - 6x - 4 = 0$ são:

$$x_1 = -2, x_2 = 1 + \sqrt{3} \text{ e } x_3 = 1 - \sqrt{3}.$$

Observemos que o valor encontrado, através da fórmula de Cardano, é uma soma de duas raízes complexas cúbicas. Calculemos cada uma dessas raízes:

- $x = \sqrt[3]{2+2i}$.

  Seja $z = 2 + 2i$.

  Módulo de z: $\rho = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

  Argumento principal de z: $cos\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $sen\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

  Assim, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

  2ª Fórmula de Moivre: $z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\dfrac{\theta}{n} + k\dfrac{2\pi}{n}\right) + isen\left(\dfrac{\theta}{n} + k\dfrac{2\pi}{n}\right)\right]$, com $k \in \mathbb{Z}$.

  Como a raiz é cúbica, k assumirá valores: 0, 1 e 2.

  $z_0 = \sqrt{2}\left(cos\dfrac{\pi}{12} + isen\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

  $z_1 = \sqrt{2}\left(cos\dfrac{3\pi}{4} + isen\dfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i$.

  $z_2 = \sqrt{2}\left(cos\dfrac{17\pi}{12} + isen\dfrac{17\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}+1}{2} + i\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}$.

- $x = \sqrt[3]{2-2i}$.

  Seja $z' = 2 - 2i$.

  Módulo de z': $\rho = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

  Argumento principal de z: $\cos\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $sen\theta = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

  Assim, $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$.

  Através da 2ª Fórmula de Moivre, descubramos os resultados da raiz cúbica de z', com k assumindo valores 0, 1 e 2.

  $z'_0 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + isen\dfrac{7\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}+1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

$z_1' = \sqrt{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12} + isen\frac{15\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i.$

$z_2' = \sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + isen\frac{23\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{-\sqrt{3}+1}{2}.$

Façamos agora a soma dos resultados das raízes cúbicas de z e z', resultando, assim, nas mesmas três raízes encontradas anteriormente.

$z_1 + z_1' = (-1+i) + (-1-i) = -2.$

$z_0 + z_2' = (\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}) + (\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{-\sqrt{3}+1}{2}) = \sqrt{3}+1.$

$z_2 + z_0' = \frac{-\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{-\sqrt{3}-1}{2} + \frac{-\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2} = -\sqrt{3}+1.$

Nas representações gráficas a seguir, os pontos que são resultados das interseções do gráfico com o eixo das abscissas correspondem às raízes reais das equações anteriores.

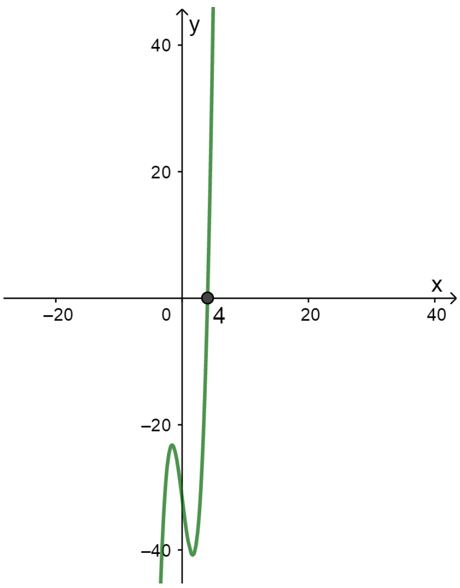


Figura 5.1: $x^3 - 8x - 32 = 0$

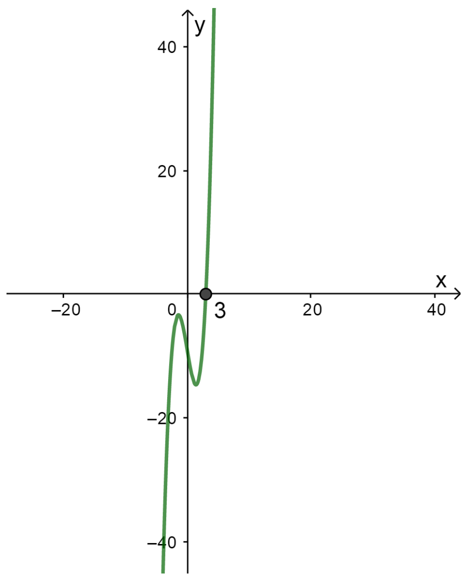


Figura 5.2: $x^3 - 6x - 9 = 0$

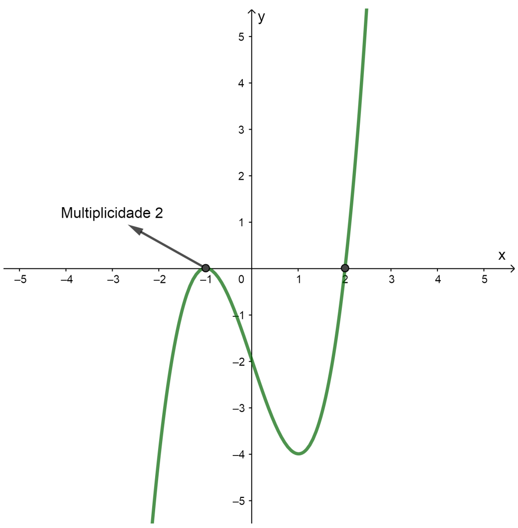


Figura 5.3: $x^3 - 3x - 2 = 0$

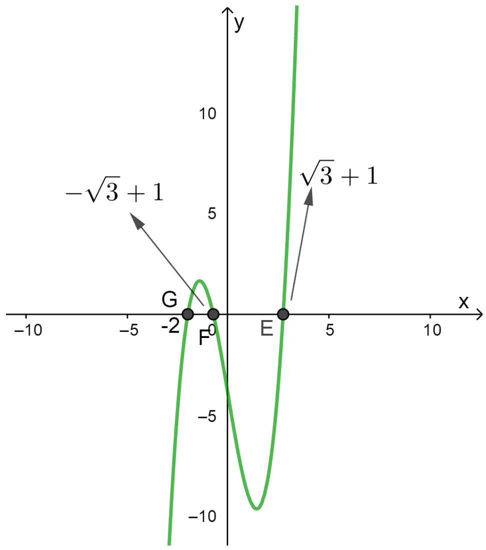


Figura 5.4: $x^3 - 6x - 4 = 0$

5.2.1 Discriminante da Equação $(x-a)(x-b)(x-c) = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, onde $c = -(a+b)$.

Seja a equação

$$(x-a)(x-b)(x-c) = 0 \tag{5.3}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $c = -(a+b)$. Desenvolvendo o produto na Equação 5.3, obtemos:

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 + [ab - (a+b)^2]x + ab(a+b) = 0.$$

Aplicando a fórmula de Cardano, temos

$$x = \sqrt[3]{-\frac{ab(a+b)}{2} + \sqrt{\left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3}}$$
$$+ \sqrt[3]{-\frac{ab(a+b)}{2} - \sqrt{\left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3}}.$$

Conhecemos as três raízes desta equação: $a, b, -(a+b)$.
Analisemos o radicando da raiz quadrada e o chamaremos de discriminante Δ.

$$\Delta = \left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3.$$

Efetuando as operações, temos:

$$\Delta = \frac{-4a^6 - 12a^5b + 3a^4b^2 + 26a^3b^3 + 3a^2b^4 - 12ab^5 - 4b^6}{108}.$$

Fatorando o numerador, obtemos:

$$\Delta = -\frac{(a-b)^2(2a+b)^2(a+2b)^2}{108}.$$

Observemos, curiosamente, que se a e b e c são números reais distintos com $c = -(a+b)$, então $\Delta < 0$.

5.2.2 Discriminante da Equação $(x-[a+bi])(x-[a-bi])(x-c) = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $c = -2a$ e $b \neq 0$.

Seja a equação

$$(x - [a+bi])(x - [a-bi])(x-c) = 0 \tag{5.4}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Como vimos anteriormente, para que retiremos o termo de 2º grau da equação inicial de 3º grau é necessário que a soma das três raízes seja igual a zero, ou seja,

$$(a+bi) + (a-bi) + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -2a.$$

Portanto, toda equação de 3º grau da forma $x^3 + px + q = 0$ que tenha duas raízes complexas pode ser assim escrita:

$$(x - [a+bi])(x - [a-bi])(x+2a) = 0.$$

Efetuando a multiplicação no 1º membro, temos:

$$(x^2 - ax + bix - ax - bix + a^2 - b^2i^2)(x+2a) = 0$$

$$(x^2 - 2ax + a^2 + b^2)(x+2a) = 0$$

$$x^3 - 2ax^2 + a^2x + b^2x + 2ax^2 - 4a^2x + 2a^3 + 2ab^2 = 0$$

$$x^3 + (b^2 - 3a^2)x + (a^2+b^2)2a = 0.$$

Determinando o discriminante Δ :

$$\Delta = \left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$\Delta = [-a(a^2+b^2)]^2 + \left(\frac{b^2 - 3a^2}{3}\right)^3$$

$$\Delta = \frac{27a^6 + 54a^4b^2 + 27a^2b^4 + b^6 - 9a^2b^4 + 27a^4b^2 - 27a^6}{27}$$
$$\Delta = \frac{81a^4b^2 + 18a^2b^4 + b^6}{27}.$$

Analisemos que todos os termos do numerador da fração são sempre positivos, a não ser que $a = b = 0$ (o que resultaria em três raízes nulas e nenhuma complexa). Isto seria mais uma prova de que nas equações de 3º grau, quando duas raízes são complexas e a terceira real, o discriminante $\Delta > 0$.

5.2.3 Discriminante da Equação $(x-a)(x-a)(x-b) = 0$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ com $b = -2a$.

Seja a equação

$$(x-a)(x-a)(x-b) = 0 \tag{5.5}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Como sabemos, para anularmos o termo de 2º grau da equação inicial de 3º grau é necessário que a soma das três raízes seja igual a zero, ou seja,

$$a + a + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -2a.$$

Portanto, toda equação de 3º grau da forma $x^3 + px + q = 0$ que tenha três raízes reais, sendo 1 repetida, pode ser assim escrita:

$$(x-a)(x-a)(x+2a) = 0$$
$$(x^2 - 2ax + a^2)(x + 2a) = 0$$
$$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0.$$

Determinando o discriminante Δ :

$$\Delta = \left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$
$$\Delta = (-a^3)^2 + (-a^2)^3$$
$$\Delta = a^6 - a^6 = 0.$$

Isto seria mais uma prova de que, nas equações de 3º grau, quando suas três raízes são reais, sendo uma com multiplicidade dois, o discriminante $\Delta = 0$.

5.3 Discriminantes em Função dos Coeficientes da Equação.

Antes de representarmos discriminantes de equações em função de seus coeficientes, definiremos resultantes polinomiais e um método prático de calculá-los, especificamente através do uso da matriz de Sylvester, cujas entradas são os coeficientes dos dois polinômios e cujo determinante fornece o resultado desses dois polinômios.

5.3.1 Resultantes de Polinômios.

Em alguns momentos, temos a necessidade de verificar se dois polinômios compartilham ou não de uma raiz ou fator comum. Uma maneira de observar isso é fatorando os polinômios e comparando suas raízes. Apesar de ser um método mais óbvio, pode tornar-se mais complicado, principalmente quando deparamos com polinômios de graus maiores. Os resultantes atendem a essas situações e são eficientes para chegar a essas soluções. O método foi desenvolvido por Euler e Bezout e sua definição tem como base a matriz de Sylvester.

Dados dois polinômios $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \in \mathbb{C}[x]$, de graus n e m, respectivamente. Analisaremos se as equações abaixo possuem raiz ou fator comum.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0;$$

$$g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x^1 + b_0 = 0.$$

A ideia é, traduzido de polinômios para números inteiros, se considerarmos os fatores polinomiais irredutíveis dos polinômios como fatores primos de números inteiros e se tivermos dois inteiros a e b que compartilham pelo menos um fator primo, podemos encontrar outros dois números inteiros c e d tais que $ac + bd$ =0. Por exemplo, os números 4 e 6 compartilham o fator primo 2 e, podemos dizer, por exemplo, que $4.(3) + 6 \cdot (-2) = 0$. Agora, com polinômios, vejamos o lema a seguir.

Lema 5.1 *Sejam $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ de graus n e m, respectivamente. Então $f(x)$ e $g(x)$ têm um fator comum não constante se, e somente se, existirem polinômios diferentes de zero $A(x), B(x) \in \mathbb{C}[x]$ tais que $\partial(A(x)) \leq m - 1$, $\quad \partial(B(x)) \leq n - 1$ e*

$$A(x) \cdot f(x) + B(x) \cdot g(x) = 0.$$

Prova: Suponha que $f(x)$ e $g(x)$ tenham um fator comum e não constante $h(x) \in \mathbb{C}[x]$. Então, para alguns $P(x), Q(x) \in \mathbb{C}[x]$,

$$f(x) = h(x).P(x) \;\text{ e }\; g(x) = h(x) \cdot Q(x).$$

Como

$$Q(x) \cdot h(x) \cdot P(x)) + (-P(x)) \cdot (h(x) \cdot Q(x)) = 0$$

então,

$$Q(x) \cdot f(x) + (-P(x)) \cdot g(x) = 0.$$

Observemos que $\partial(Q(x)) \leq m - 1$ e $\partial(P(x)) \leq n - 1$, uma vez que $h(x)$ possui pelo menos grau 1. Assim, basta considerar $A(x) = Q(x)$ e $B(x) = -P(x)$. Esses são os polinômios que procuramos.

Provaremos a volta por redução ao absurdo.

Primeiro, assumimos que os polinômios $A(x)$ e $B(x)$ que satisfazem os critérios acima. Agora, suponha, por absurdo, que $f(x)$ e $g(x)$ não tenham fatores comuns não constantes, então $mdc(f(x), g(x)) = 1$. Pela Observação 4.7, existem polinômios $r(x)$, $s(x) \in \mathbb{C}[x]$ tal que

$$r(x) \cdot f(x) + s(x) \cdot g(x) = 1.$$

Sabemos também que

$$A(x) \cdot f(x) + B(x) \cdot g(x) = 0 \Rightarrow A(x) \cdot f(x) = -B(x) \cdot g(x).$$

Então,

$$\begin{aligned} A(x) &= A(x) \cdot 1 \\ &= A(x) \cdot (r(x) \cdot f(x) + s(x) \cdot g(x)) \\ &= r(x) \cdot f(x) \cdot A(x) + s(x) \cdot g(x) \cdot A(x) \\ &= r(x) \cdot (-B(x) \cdot g(x)) + s(x) \cdot g(x) \cdot A(x) \\ &= (s(x) \cdot A(x) - r(x) \cdot B(x)) \cdot g(x). \end{aligned}$$

Como $A(x) \neq 0$, então $(s(x) \cdot A(x) - r(x) \cdot B(x)) \cdot g(x) \neq 0$. Também sabemos $\partial(g(x)) = m$, o que significa que o grau de $A(x)$ é pelo menos m, mas isso é um absurdo, pois $A(x)$ foi definido como tendo um grau estritamente menor que m.

■

Examinemos de forma mais detalhada a equação $A(x) \cdot f(x) + B(x) \cdot g(x) = 0$, do lema anterior.

Sejam os polinômios,

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0;$$

$$g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x^1 + b_0;$$
$$A(x) = c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_1 x^1 + c_0;$$
$$B(x) = d_{n-1} x^{n-1} + \cdots + d_1 x^1 + d_0.$$

Através da definição de igualdade de polinômios, a equação $A(x) \cdot f(x) + B(x) \cdot g(x) = 0$ é um sistema homogêneo de $n + m$ equações com $n + m$ variáveis, que são c_i e d_j. Vejamos o sistema abaixo.

$$a_n c_{m-1} + b_m d_{n-1} = 0 \quad (\text{coeficientes de } x^{n+m-1})$$

$$a_n c_{m-2} + a_{n-1} c_{m-1} + b_m d_{n-2} + b_{m-1} d_{n-1} = 0 \quad (\text{coeficientes de } x^{n+m-2})$$

$$a_n c_{m-3} + a_{n-1} c_{m-2} + a_{n-2} c_{m-1} + b_m d_{n-3} + b_{m-1} d_{n-2} + b_{m-2} d_{n-1} = 0 \quad (\text{coeficientes de } x^{n+m-3})$$

$$\vdots$$

$$a_0 c_0 + b_0 d_0 = 0 \quad (\text{coeficientes de } x_0).$$

A matriz de ordem $(n + m) \times (n + m)$ formada pelos coeficientes deste sistema é chamada matriz de Sylvester, que mostraremos a seguir:

$$Syl(f, g) = \begin{bmatrix} a_n & & & & b_m & & & \\ a_{n-1} & a_n & & & b_{m-1} & b_m & & \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & & b_{m-2} & b_{m-1} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & \vdots & \vdots & \ddots & b_m \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1} & \vdots & \vdots & & b_{m-1} \\ a_0 & a_1 & & & b_0 & b_1 & & \\ & a_0 & \ddots & \vdots & & b_0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_1 & & & \ddots & b_1 \\ & & & a_0 & & & & b_0 \end{bmatrix}$$

Os espaços vazios são ocupados por zeros. As primeiras m colunas de $Syl(f, g)$ são preenchidas pelos coeficientes de $f(x)$ e as últimas n colunas são preenchidas com os coeficientes de $g(x)$.

Definição 5.1 *Definimos resultante dos polinômios f e g, na variável x, denotado por $Res(f, g)$ como o determinante da matriz de Sylvester.*

$$det(Syl(f, g)) = Res(f, g).$$

Vejamos um exemplo, cujo polinômios possuem um fator comum.

Exemplo 5.5 *Sejam os polinômios* $f(x) = x^2 - 5x - 6$ *e* $g(x) = x^2 - 6x$, $\in \mathbb{C}$. *Temos o polinômio* $h(x) = x - 6$ *como fator comum de* f *e* g. *Portanto, existem polinômios* $P(x) = ax + b$ *e* $Q(x) = mx + n$, *tais que*

$$x^2 - 5x - 6 = (ax + b)(x - 6) \text{ e } x^2 - 6x = (mx + n)(x - 6).$$

Então ambas as equações satisfazem simultaneamente,

$$\frac{x^2 - 5x - 6}{ax + b} = \frac{x^2 - 6x}{mx + n} \Rightarrow (x^2 - 5x - 6)(mx + n) = (x^2 - 6x)(ax + b).$$

Dos produtos, resulta:

$$(m - a)x^3 + (-5m + n + 6a - b)x^2 + (-6m - 5n + 6b)x - 6n = 0.$$

Da igualdade de polinômios, temos o sistema:

$$\begin{cases} m - a = 0 \\ -5m + n + 6a - b = 0 \\ -6m - 5n + 6b = 0 \\ -6n = 0 \end{cases}$$

Representando esse sistema homogêneo matricialmente, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & -6 & 1 \\ -6 & -5 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \\ -a \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz principal é a matriz de Sylvester e calculando seu determinante chegamos ao resultado zero.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & -6 & 1 \\ -6 & -5 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

O que prova que o polinômio $h(x) = x - 6$ *é comum aos polinômios* f *e* g, *pois*

$$det(Syl(f, g)) = Res(f, g) = 0.$$

Apresentamos a teoria dos resultantes polinomiais e, como consequência, a matriz de Sylvester para chegarmos nos discriminantes de equações.

5.3.2 Relação dos Discriminantes com Resultantes Polinomiais.

Vamos ver agora uma conexão com o discriminante de $f \in \mathbb{C}[x]$ e a resultante de $Res(f, f')$.

Definição 5.2 *Seja um polinômio $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, onde $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, de grau n e $a_n \neq 0$, o discriminante é dado por:*

$$\Delta = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_n} Res(f, f'). \tag{5.6}$$

Como vimos, definimos o determinante em função do resultante e ainda acrescentamos, o determinante é zero se $f(x)$ e $f'(x)$ compartilham uma raiz, o que só é possível se $f(x)$ tiver uma raiz múltipla.

Exemplo 5.6 (Discriminante da Função Polinomial de 2º Grau) *Calcule o discriminante de $f(x) = ax^2 + bx + c$.*

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, então teremos $f'(x) = 2ax + b$. Como os graus das funções f e f' são, respectivamente, 2º e 1º. A matriz resultado é de ordem 3x3. Sendo a 1 coluna com coeficientes de f e as outras duas, com coeficientes de f', mantendo os zeros nos espaços vazios.

$$\begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{bmatrix}$$

Calculando seu determinante,

$$\det \begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{bmatrix} = ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c = -ab^2 + 4a^2c.$$

Logo,

$$\Delta = \frac{(-1)^{\frac{2(2-1)}{2}}}{a} (-ab^2 + 4a^2c)$$

$$\Delta = \frac{-1}{a} (-ab^2 + 4a^2c)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Exemplo 5.7 (Discriminante da Função Polinomial de 3º Grau) *Calcule o discriminante de $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.*

Seja $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, então teremos $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Como os graus das funções g e g' são, respectivamente, 3º e 2º, a matriz resultado é de ordem 5x5.

As duas primeiras colunas da matriz são constituídas com coeficientes de g e as três últimas, com coeficientes de g', mantendo os zeros nos espaços vazios.

$$\det\begin{bmatrix} a & 0 & 3a & 0 & 0 \\ b & a & 2b & 3a & 0 \\ c & b & c & 2b & 3a \\ d & c & 0 & c & 2b \\ 0 & d & 0 & 0 & c \end{bmatrix} =$$

$3a(3a(3ad^2 + c(c^2 - 2bd) - bcd) \ + b\ (-2b(c^2 - 2bd) - 3acd + bc^2) - a(c^3 - 2bcd)) +$
$a(-2b(-2b(c^2 - 2bd) - 3acd + bc^2) - 3ac(c^2 - 2bd) + ac^3) =$

$3a(9a^2d^2 + 2ac^3 - 10abcd - b^2c^2 + 4b^3d) + a(2b^2c^2 - 8b^3d + 12abcd - 2ac^3) =$

$27a^3d^2 + 6a^2c^3 - 30a^2bcd - 3ab^2c^2 + 12ab^3d - 2a^2c^3 + 12a^2bcd + 2ab^2c^2 - 8ab^3d =$

$27a^3d^2 + 4a^2c^3 - 18a^2bcd - ab^2c^2 + 4ab^3d.$

Portanto, o discriminante da função polinomial de 3º grau é:

$$\Delta = \frac{(-1)^{\frac{3(3-1)}{2}}}{a}(27a^3d^2 + 4a^2c^3 - 18a^2bcd - ab^2c^2 + 4ab^3d)$$

$$\Delta = \frac{-1}{a}(27a^3d^2 + 4a^2c^3 - 18a^2bcd - ab^2c^2 + 4ab^3d)$$

$$\Delta = -27a^2d^2 - 4ac^3 + 18abcd + b^2c^2 - 4b^3d.$$

Exemplo 5.8 (Discriminante da Função Polinomial de 4º Grau) *Calcule o discriminante de $h(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.*

Sejam os polinômios $h(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, então teremos $h'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$. Como os graus das funções h e h' são, respectivamente, 4º e 3º, a matriz resultado é de ordem 7x7, sendo as três primeiras colunas com coeficientes de h e as quatro últimas, com coeficientes de h', cobrindo com zeros os espaços vazios.

$$\det\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 4a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 3b & 4a & 0 & 0 \\ c & b & a & 2c & 3b & 4a & 0 \\ d & c & b & d & 2c & 3b & 4a \\ e & d & c & 0 & d & 2c & 3b \\ 0 & e & d & 0 & 0 & d & 2c \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} =$$

$256a^4e^3+(-192a^3bd-128a^3c^2+144a^2b^2c-27ab^4)e^2+((144a^3c-6a^2b^2)d^2+(18ab^3c-80a^2bc^2)d+16a^2c^4-4ab^2c^3)e-27a^3d^4+(18a^2bc-4ab^3)d^3+(ab^2c^2-4a^2c^3)d^2=$

$=256a^4e^3-192a^3bde^2-128a^3c^2e^2+144a^2b^2ce^2-27ab^4e^2+144a^3cd^2e-6a^2b^2d^2e+18ab^3cde-80a^2bc^2de+16a^2c^4e-4ab^2c^3e-27a^3d^4+18a^2bcd^3-4ab^3d^3+ab^2c^2d^2-4a^2c^3d^2.$

Portanto, temos o discriminante da função polinomial de 4º grau:

$\Delta=\dfrac{(-1)^{\frac{4(4-1)}{2}}}{a}(256a^4e^3-192a^3bde^2-128a^3c^2e^2+144a^2b^2ce^2-27ab^4e^2+144a^3cd^2e-6a^2b^2d^2e+18ab^3cde-80a^2bc^2de+16a^2c^4e-4ab^2c^3e-27a^3d^4+18a^2bcd^3-4ab^3d^3+ab^2c^2d^2-4a^2c^3d^2).$

$\Delta=256a^3e^3-192a^2bde^2-128a^2c^2e^2+144ab^2ce^2-27b^4e^2+144a^2cd^2e-6ab^2d^2e+18b^3cde-80abc^2de+16ac^4e-4b^2c^3e-27a^2d^4+18abcd^3-4b^3d^3+b^2c^2d^2-4ac^3d^2.$

5.4 Relação do Discriminante com as Raízes de Equações de Grau n.

Definição 5.3 *Seja $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ um polinômio de grau n com coeficientes $\mathbb{C}[x]$ e $a_n\neq 0$ então o discriminante de $f(x)$ é dado por*

$$\Delta=a_n^{2n-2}\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2 \tag{5.7}$$

onde $x_1,\cdots,x_n$ são as raízes de f em $\mathbb{C}$.

Lema 5.2 *Pode ser verificado que a Equação 5.6 e Equação 5.7 são de fato iguais. Para uma prova, veja (Prosition V-22, [9]).*

Na seção 5.1.2 estabelecemos, particularmente, a relação do discriminante com as raízes da equação de 2º grau. Agora, estamos analisando de maneira mais abrangente.

Note que a fórmula estabelecida neste momento, quando particularizamos para equações de 2º grau, será exatamente a que vimos na seção 5.1.2.

$$\Delta=a_n^{2n-2}(x_1-x_2)^2 \quad\Rightarrow\quad \Delta=a^{2.2-2}(x_1-x_2)^2 \quad\Rightarrow\quad \Delta=a^2(x_1-x_2)^2.$$

5.4.1 Relação do Discriminante com as Raízes de Equações de 3º Grau.

Tratando das cúbicas, temos a relação:

$$\Delta = a_n^{2.3-2} \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i - x_j)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta = a^4(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2.$$

Sabemos que a natureza das raízes para polinômios de grau 3 com coeficientes reais são:

1. Uma raiz real de multiplicidade 3.
2. Uma raiz real de multiplicidade 2 e outra raiz real distinta.
3. Uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.
4. Três raízes reais e diferentes.

Aplicando a definição, analisemos cada relação do sinal do discriminante com a natureza das raízes.

(1) Duas ou três raízes reais e iguais.

Como $x_i = x_j$, então

$$\Delta = a_3^4(x_i - x_j)^2 = 0.$$

(2) Uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

Sejam as duas raízes complexas $x_1 = a + bi$ e $x_2 = a - bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ e a raiz real $x_3 = \alpha$.

Para a definição do discriminante, façamos:

$$(x_1 - x_2)^2 = (a + bi - (a - bi))^2 = (2bi)^2 = -4b^2$$

$$(x_1 - x_3)^2 = (a + bi - \alpha)^2 = [(a - \alpha) + bi]^2$$
$$(x_2 - x_3)^2 = (a - bi - \alpha)^2 = [(a - \alpha) - bi]^2.$$

Voltando à fórmula,

$$\Delta = a_3^4(-4b^2)[(a - \alpha) + bi]^2[(a - \alpha) - bi]^2.$$

Segue que

$$\Delta = a_3^4(-4b^2)\{[(a - \alpha) + bi][(a - \alpha) - bi]\}^2$$
$$\Delta = a_3^4(-4b^2)[(a - \alpha)^2 - (bi)^2]^2$$
$$\Delta = a_3^4(-4b^2)[(a - \alpha)^2 + b^2]^2.$$

Observe que o fator -4 torna o discriminante negativo ($\Delta < 0$).

Esta situação é diferente quando trabalhamos com a fórmula de Cardano para resoluções de equações de 3º grau. Relembremos que, quando reduzimos a equação de 3º grau na forma $x^3 + px + q = 0$, chamamos de discriminante a fórmula $\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$. Neste caso, quando $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes complexas conjugadas e uma raiz real.

(3) Três raízes reais e distintas.

Sejam as três raízes reais e diferentes $x_1,\ x_2\ e\ x_3$.

$$\Delta = a_3^4(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2.$$

Temos, portanto, o discriminante positivo, $\Delta > 0$.

Fazendo a mesma análise do item anterior, na fórmula de Cardano, quando $\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} < 0$, a equação possui três raízes reais e diferentes.

Como exemplo, a equação cúbica $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$ possui as três raízes $-2,\ \dfrac{1}{2},\ 2$.

De acordo com a definição,

$$\Delta = 2^4\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2} + 2\right)^2(2 + 2)^2.$$

$$\Delta = 16 \cdot \left(\frac{9}{4}\right) \cdot \left(\frac{25}{4}\right) \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 16 \cdot 225 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 3600.$$

Comprovemos esse resultado utilizando a fórmula quando escrevemos o discriminante em função dos coeficientes, visto na seção 5.3.2.

$$\Delta = -27a^2d^2 - 4ac^3 + 18abcd + b^2c^2 - 4b^3d$$

$$\Delta = -27 \cdot 4 \cdot 16 + 4 \cdot 2 \cdot 512 + 18 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 4 + 64 \cdot 1 + 4 \cdot 4$$

$$\Delta = -1728 + 4096 + 1152 + 64 + 16 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 3600$$

Conclusão

Ao longo da história, conceitos algébricos foram desenvolvidos e publicados por uns matemáticos e continuados por outros, dessa forma, observa-se como se deu a ligação entre eles e de que maneira se procedeu à sequência dos conteúdos construídos.

Definições, proposições, teoremas fundamentais e demonstrações sobre a álgebra dos polinômios foram abordados para se erguer uma fundamentação, visando à construção e afirmação dos outros conteúdos inseridos. Procurou-se, enfim, tratar, especificamente, das raízes de equações.

Foram apresentadas várias formas algébricas e gráficas de resolver equações de 1º ao 4º grau, que, nos livros didáticos da escola básica, trazem, de forma prática e resumida, métodos de resolução apenas para as equações de 1º e 2º graus. Procuraram-se explorar outras situações. Buscou-se pesquisar outros conteúdos específicos; as parábolas, por exemplo, não foram mencionadas.

Almejamos, com este trabalho, auxiliar professores no estudo de equações polinomiais e discriminantes de equações para nossas práticas pedagógicas, mesmo que alguns conceitos não são comuns no ensino básico, mas poderão ser explorados na íntegra ou como complemento de conteúdos programáticos já previstos.

Apêndice

A Derivada de uma Função.

Iremos definir, inicialmente, a reta tangente ao gráfico de uma função, num ponto sobre o gráfico. Desenhemos o gráfico de uma função f.

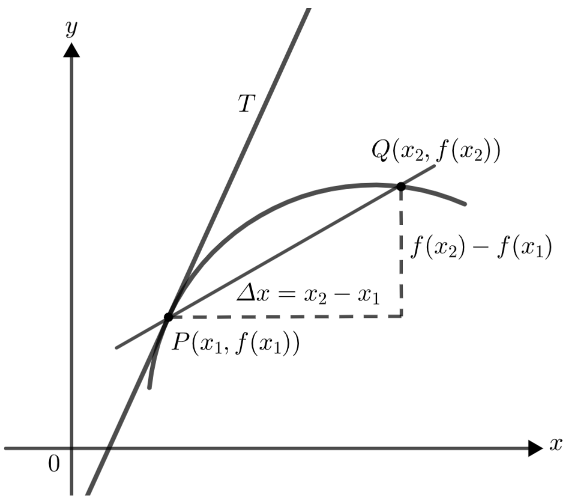


Figura 5: Reta Tangente a uma Curva.

Seja a função f contínua em x_1. Queremos definir a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $P(x_1), f(x_1))$ (Figura 5).

Seja $Q(x_2), f(x_2))$ outro ponto sobre o gráfico de f. Tracemos uma reta passando por P e Q.

Indiquemos a diferença das abscissas de Q e P por Δx, ou seja,

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

A inclinação da reta secante PQ é dada por:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$, podemos escrever a equação acima como:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Agora, imaginemos o ponto P como um ponto fixo e o ponto Q movendo-se ao longo da curva na direção de P, ou seja, Q aproximando-se de P. Isto é o mesmo que afirmarmos que Δx tende a zero. Quando isto ocorre, a reta secante gira sobre o ponto fixo P. Se a reta secante tem uma posição-limite, desejamos que esta posição-limite seja a reta tangente ao gráfico em P. Assim, queremos que a inclinação da reta tangente ao gráfico em P, seja o limite de m_{PQ} quando Δx tende a zero, caso este limite exista. Se $\lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{PQ} = \infty$ então como Δx tende a zero, a reta PQ aproxima-se da reta passando por P, que é paralela ao eixo y. Neste caso, a reta tangente ao gráfico em P é a reta $x = x_1$.

Definição 1 *Se a função f é contínua em x_1, então a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ será:*

1. *a reta que passa por P, tendo inclinação $m(x_1)$, dada por:*

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \tag{8}$$

   se este limite existir.

2. *a reta $x = x_1$ se*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \infty.$$

Definição 2 *A derivada de uma função é a função indicada por f', tal que seu valor em qualquer número x no domínio de f seja dado por:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{9}$$

se este limite existir e for finito.

Exemplo 1 *Dada a função $f(x) = 4x^2 + 15$, encontre a derivada de f.*

Se x é um número qualquer no domínio de f obtemos, com base na Equação 9:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[4(x + \Delta x)^2 + 15] - (4x^2 + 15)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 15 - 4x^2 - 15}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8x\Delta x + 4\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (8x + 4\Delta x)$$

$$f'(x) = 8x.$$

Referências Bibliográficas

[1] AMARAL, João T. *Método de Viète para Resolução de Equações do 2º Grau.* Revista do Professor de Matemática - Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, Universidade de Guarulhos, v. 13, p. 18-20, 1988.

[2] ANDRADE, Lenimar N. *Raízes Racionais de Uma Equação Algébrica de Coeficientes Inteiros.* Revista do Professor de Matemática - Sociedade Brasileira de Matemática, João Pessoa, UFPB, v. 14, p. 39-41, 1989.

[3] BAUMGART, John K. *Tópicos de História da Matemática Para Uso Em Sala de Aula.* Tradução de Hygino Hugueros Domingues. São Paulo: Atual, Vol.4, 1992.

[4] BERLINGHOFF, William P; GOUVÊA, Fernando Q. *A Matemática Através dos Tempos.* 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 2010.

[5] BOYER, Carl B. *História da Matemática.* Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1996.

[6] DIAS, David P. *O Binômio Discriminante na Fórmula Resolvente, ou o Discriminante da Fórmula de Bháskara, de uma Equação de Segundo Grau com Coeficientes Inteiros.* São Paulo: IME-USP, 2018.

[7] DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna.* 2 ed. São Paulo: Atual Editora Ltda. 1982.

[8] DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna (Reformulada).* 4 ed. São Paulo: Atual Editora Ltda. 2003.

[9] EISENBUD, D.; HARRIS, J. *The Geometry of Schemes*, Graduate texts in mathematics. Board. 197. 1991.

[10] EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Tradução de Hygino Hugueros Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

[11] GARBI, Gilberto G. *O Romance das Equações Algébricas.* 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

[12] HOYRUP, J. *Old Babylonian "Algebra", and What it Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics.* Kozhikode: ICM Satellite Conference, Mathematics in Ancient times, p. 11-14, sep. 2010.

[13] JANESCH, Oscar R. *Álgebra II.* Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM. 2008.

[14] JANSON, S. *Resultant and Discriminant of Polynomials.* Department of Mathematics, Uppsala University, aug. 2010.

[15] KNUDSEN, Carlos A. *A Teoria das Equações Algébricas.* São Paulo: Revista do Professor de Matemática - Sociedade Brasileira de Matemática, v. 7, p. 26-31. 1985.

[16] LEITHOLD, L. *O Cálculo Com Geometria Analítica.* São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil, Ltda, 1977.

[17] LIMA, Elon L. *A Equação do 3º Grau.* Rio de Janeiro: Artigos - Matemática Universitária, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, n. 5, p. 9-23, jun. 1987.

[18] MOREIRA, Carlos G. T. A. *Uma Solução das Equações do 3º e 4º Graus.* Rio de Janeiro: Revista do Professor de Matemática - Sociedade Brasileira de Matemática, IMPA, v. 25, 23-28, 1994.

[19] PASTOR, A.; LEONARDO, P. *Equações do 2º Grau: Completando Quadrados.* Brasília: Revista do Professor de Matemática - Sociedade Brasileira de Matemática, v. 6, p.36-38, 1985.

[20] PEDROSO, Hermes, A. *Uma Breve História da Equação do 2º grau.* São Paulo: Revista Eletrônica de Matemática (REMat), n. 2. 2010.

[21] SANTOS, Thiago F.; XAVIER, Sebastião M. *Fundamentos de Álgebra.* 1. ed. Ouro Preto: Produção Independente. 2018.

[22] SILVA, Isabelle C.; NASCIMENTO, Josenildo S.; PEREIRA, Ana Carolina C. *Estudando Equação do 1º Grau por Meio do Uso de Fontes Históricas: o Papiro de Rhind.* Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, v. 2, n. 6, p. 37–48. 2015.

[23] SILVA, Márcio V.; PEREIRA, Andre Gustavo C. *Equações do 2º grau e mudança de variáveis.* Santa Maria: Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas da UFSM, Ciência e Natura 35 anos, v. 37, edição especial, p. 567–577, 2015.

[24] SOUZA, Fabio N. *A Solução das Quadráticas e Cúbicas na História.* Santa Maria: Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas da UFSM, Ciência e Natura 35 anos, v. 37, edição especial, p. 555–566, 2015.

[25] TUNALA, N. *Resolução Geométrica da Equação do 2º Grau.* Rio de Janeiro: Revista do Professor de Matemática - Sociedade Brasileira de Matemática, v. 12, p. 33-35, 1988.

[26] WAGNER, E.*Um Pouco Sobre Descartes.* Rio de Janeiro: Revista do Professor de Matemática - Sociedade Brasileira de Matemática, v. 19, p. 9-14, 1991.

[27] WOODY, H.*Polynomial Resultants.* Department of Mathematics and Computer Science University of Puget Sound, 2016.

[28] ZAMPIVA, José R. B.*A Insolubilidade da Quíntica e o Teorema Fundamental de Galois.* Bauru: Revista Eletrônica Paulista de Matemática, v. 9, p. 4-31, 2017.