

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

TEREZINHA TARDIVO

Números Quatérnios: uma proposta para aplicação no
Ensino Médio

MARINGÁ

2021

TEREZINHA TARDIVO

**Números Quatérnios: uma proposta para aplicação no
Ensino Médio**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani

MARINGÁ

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

T183n Tardivo, Terezinha
Números quatérnios : uma proposta para aplicação no
Ensino Médio / Terezinha Tardivo. -- Maringá, 2021.
ix, 72 f. : il., fotos color.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática, 2021.

1. Números complexos. 2. Hamilton. 3. Quatérnios. 4.
Movimentos rígidos. 5. Rotação. I. Castelani, Emerson
Vitor, orient. II. Universidade Estadual de Maringá.
Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.
III. Título.

CDD 22.ed. 515.55

Edilson Damasio CRB9-1.123

TEREZINHA TARDIVO

NÚMEROS QUATÉRNIOS: UMA PROPOSTA PARA APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

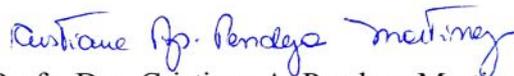
Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani

UEM - Universidade Estadual de Maringá (Orientador)



Prof. Dra. Cristiane A. Pendeza Martinez

UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná (Cornélio Procópio)



Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves
UEM - Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 25 de agosto de 2021

Local de defesa: Videoconferência pelo link [https:// meet.google.com/hhg-hpjo-feb](https://meet.google.com/hhg-hpjo-feb)

Agradecimentos

Agradeço a Deus por permitir estar aqui concretizando mais um objetivo.

A realização deste trabalho contou com importantes apoios e incentivos sem os quais não seria realidade e aos quais serie eternamente grata.

Ao Professor Doutor Emerson Vitor Castelani, pela sua orientação, disponibilidade e colaboração ao longo da realização deste trabalho.

Aos docentes do curso, sem os quais não seria possível a concretização deste sonho.

Aos colegas de curso que estiveram ao meu lado, pelo companheirismo, força e apoio nos momentos difíceis e desafiadores pelos quais passamos.

Um agradecimento especial a minha família em especial à minha Mãe, por ser modelo de coragem, pelo seu apoio incondicional, incentivo e total ajuda para superação dos obstáculos ao longo desta caminhada. A ela dedico este trabalho.

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.”
(Galileu Galilei)

Resumo

Neste trabalho vamos apresentar uma breve introdução aos Números Quatérnios bem como aplicações em movimentos rígidos. Iniciamos com a revisão de literatura, onde vemos que a junção da Álgebra com a Geometria a partir dos estudos de René Descartes possibilitou a interpretação geométrica dos Números Complexos. A relação de Complexos e rotações no plano fez com que o matemático Irlandês Willian Rowan Hamilton passasse a buscar uma relação entre estes números e as rotações no espaço. Obtendo sucesso em 1843, com a criação dos Números Quatérnios (\mathbb{H}), que possibilitaram simplificar cálculos e diminuir o trabalho computacional nas áreas de robótica, animações, segurança, aeroespacial entre outras. O presente trabalho que será apresentado ao Programa de Mestrado Profissional (Profmat), tem, no primeiro capítulo, a fundamentação teórica dos Números Complexos, Quatérnios e Quatérnios Duais. O segundo relata sobre os movimentos rígidos no plano e no espaço e apresenta a rotação e translação utilizando os Números Quatérnios e Quatérnios Duais. Já o terceiro e último capítulo, é composto por atividades para serem aplicadas em sala de aula do Ensino Médio.

Palavras-chave: Números Complexos, Hamilton, Quatérnios, Movimentos Rígidos, Rotação.

Abstract

In this study we will present a brief introduction to the Quaternion Numbers, as well as applications in rigid movements. We start with the literature review, where we see that the junction of Algebra with Geometry from the studies of René Descartes enabled the geometric interpretation of Complex Numbers. The list of Complexes and rotations in the plane caused the Irish mathematician Willian Rowan Hamilton to seek a relationship between these numbers and the rotations in space. Succeeding in 1843, with the creation of the Quaternion Numbers (H), which made it possible to simplify calculations and decrease computational work in the areas of robotics, animations, security, aerospace and others. The present study that will be presented to the Professional Master's Program in Mathematics (Profmat), has, in the first chapter, the theoretical foundation of Complex Numbers, Quaternions and Dual-Quaternion. The second chapter reports on the rigid movements in the plane and in space and presents rotation and translation using the Quaternion Numbers and Dual-Quaternion. On the other hand, the third and final chapter, on the other hand, is composed of activities to be applied in high school classrooms.

Keywords: Complex Numbers, Hamilton, Quaternions, Rotation, Rigid Movements.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | William Rowan Hamilton. Fonte:(FLAMENT, 2017) | 11 |
| 1.2 | Ponte sobre o Royal Canal, Dublin. Fonte: https://wildirishwalks.ie | 12 |
| 1.3 | Placa em Homenagem a Hamilton. Fonte: https://wildirishwalks.ie | 13 |
| 1.4 | Plano Complexo ou Plano de Argand-Gauss. Fonte: Própria autora. | 15 |
| 1.5 | Representação gráfica de $z_1 = 2 + 2i$ e seu conjugado $\bar{z}_1 = 2 - 2i$. Fonte: Própria autora. | 16 |
| 1.6 | Representação de um vetor no Plano Complexo. Fonte: Própria autora. | 17 |
| 1.7 | Regras do paralelogramo para a soma e subtração de Complexos. Fonte: Própria autora. | 17 |
| 1.8 | Multiplicação de Quatérnios. Fonte:(JAMBERSI; SILVA, 2016). | 19 |
| 2.1 | Rotação em Eixos Coordenados Móveis. Fonte: (PINHEIRO, 2006). | 32 |
| 2.2 | Rotação em Eixos Coordenados Fixos. Fonte: (PINHEIRO, 2006). | 32 |
| 2.3 | Produto de z por i . Fonte: (ARAUJO, 2019). | 35 |
| 2.4 | Translação do ponto z_1 para a origem. Fonte:(CUNHA, 2020). | 35 |
| 2.5 | Vetor OP no espaço \mathbb{R}^3 . Fonte: (ARAUJO, 2019). | 36 |
| 2.6 | Coordenadas de P' , após rotação de eixos. Fonte: (ARAUJO, 2019). | 37 |
| 2.7 | Não comutatividade da rotação de um corpo rígido para eixo não fixo. Fonte:(ZILIO; BAGNATO, 2002). | 40 |

| | | |
|-----|--|----|
| 2.8 | Rotação em torno do Eixo Z, com operador quaterniônico. Fonte: Própria autora. | 44 |
| 3.1 | Rotação de P, com operador quaterniônico. Fonte: Própria autora. . . | 58 |
| C.1 | Gimbal Lock. Fonte: (ANTUNES, 2021) | 68 |
| C.2 | Erro de Rotação, devido ao Gimbal Lock. Fonte: (ANTUNES, 2021) | 69 |
| C.3 | Esquema de uma estrutura serial 2R plana. Fonte: (MARQUES et al., 2016) | 70 |
| C.4 | Odin. Fonte: (OLIVEIRA et al., 2011) | 70 |
| C.5 | Modelo Cinemático do UVMS. Fonte: (OLIVEIRA et al., 2011) . . . | 71 |

LISTA DE TABELAS

1.1 Leis Fundamentais do Produto de Quatérnios. 19

| | |
|---|-----------|
| Introdução | 7 |
| 1 Fundamentação Teórica | 10 |
| 1.1 Fatos Históricos | 10 |
| 1.2 Os Números Complexos (\mathbb{C}) | 14 |
| 1.3 Os Números Quatérnios (\mathbb{H}) | 17 |
| 1.3.1 Operações no Conjunto dos Números Quatérnios | 19 |
| 1.3.2 Representação Vetorial dos Números Quatérnios | 24 |
| 1.3.3 Representação Trigonométrica dos Números Quatérnios | 25 |
| 1.3.4 Funções Quaterniônicas | 27 |
| 1.3.5 Números Quatérnios Duais $\tilde{\mathbb{H}}$ | 29 |
| 2 Movimentos Rígidos | 31 |
| 2.1 Movimentos Rígidos no Plano | 31 |
| 2.2 Movimentos Rígidos no Espaço | 35 |
| 2.3 Movimentos Rígidos com Números Quatérnios | 41 |
| 2.3.1 Composição de rotações no Espaço | 47 |
| 2.4 Movimentos Rígidos com Números Quatérnios Duais | 50 |
| 3 Aplicação em Sala de Aula | 53 |

| | | |
|---|--------------------------------|----|
| 4 | Considerações Finais | 59 |
| | Referências | 59 |
| A | Linha do Tempo | 62 |
| B | Igualdade de Grassmman | 66 |
| C | Exemplos do Uso dos Quatérnios | 68 |

INTRODUÇÃO

A junção da Álgebra com a Geometria a partir dos estudos de René Descartes possibilitou a interpretação geométrica dos Números Complexos, que até o Séc. *XIX*, eram apenas artifícios para a resolução de algumas equações. A partir daí foi definida a unidade imaginária $i^2 = -1$ e mais tarde, os Números Complexos passaram a ser vistos como pontos do plano, sendo criado o Plano Complexo ou Plano de Argand-Gauss, possibilitando relacionar Números Complexos com rotações no plano.

Essa relação de Complexos e rotações no plano fez com que o matemático irlandês Willian Rowan Hamilton passasse a buscar uma relação entre estes números e as rotações no espaço.

Hamilton inicia seus estudos com a junção de dois números complexos, ou seja, um número com duas unidades imaginárias, porém, esbarrou, com o problema de definir a operação multiplicativa, que para obedecer as propriedades que Hamilton julgava importante, esse produto deveria resultar em um número do mesmo tipo, com duas unidades imaginárias, o que não ocorria, a operação não estava fechada para a multiplicação.

Por anos ele continua seus estudos até que em 1843, ao caminhar por uma ponte sobre o Royal Canal em Dublin, na Irlanda, ele consegue deslumbrar um número com três unidades imaginárias, estabelecendo assim, a relação que tanto buscara $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Construindo uma Álgebra fechada, por meio da qual se poderiam fazer rotações no espaço.

Denominado de Números Quatérnios (\mathbb{H}), os números de Hamilton são da forma

$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, tais que $q_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, 3$ e formam uma Álgebra não comutativa, isomorfa ao espaço vetorial real de dimensão quatro.

Os Quatérnios possibilitaram grandes avanços matemáticos, com estudos sobre Álgebra não comutativa e espaços de dimensão superior a três. No entanto, a descoberta de Hamilton ficou esquecida por um longo período. Porém, com o advento da tecnologia e cálculos computacionais esta Álgebra voltou a ter expressão entre os estudiosos que agora, usam-na para simplificar cálculos e diminuir o trabalho computacional nas áreas de robótica, animações, segurança, aeroespacial entre outras.

O presente trabalho que será apresentado ao Programa de Mestrado Profissional (Profmat), pretende mostrar a importância dos Números Quatérnios para o desenvolvimento tecnológico na atualidade e sua aplicação no Novo Ensino Médio.

O estudo de Números Complexos se mostra importante no Ensino Médio, visto que sua aplicação faz parte do dia a dia do estudante envolto com tecnologia. Também está de acordo com a Base nacional comum curricular (BNCC) e com as orientações da Secretaria Estadual de Educação do Paraná (SEED-PR), no que tange ao estudo dos Números e da Álgebra para que sejam compreendidos de forma ampla, e se analisem e descrevam relações em vários contextos onde se situam as abordagens matemáticas, explorando os significados que possam ser produzidos a partir destes conteúdos.

No primeiro capítulo temos a fundamentação teórica com um resumo dos fatos históricos envolvendo os Números Complexos, Quatérnios e Quatérnios Duais. O segundo relata sobre os movimentos rígidos no plano e no espaço e apresenta a rotação e translação utilizando os Números Quatérnios e Quatérnios Duais. Já o terceiro e último capítulo, é composto por atividades para serem aplicadas em sala de aula do Ensino Médio.

1.1 Fatos Históricos

Dentro da matemática há várias áreas de estudo, que por muito tempo eram simples tópicos sem relação entre si, porém, com o passar do tempo, foi possível fazer relações entre essas diversas áreas de estudos. Uma dessas relações foi à junção da Álgebra com a Geometria feita por René Descartes ao criar a Geometria Analítica - o que possibilitou a interpretação geométrica dos Números Complexos, como veremos a seguir.

Antes, porém, vamos relembrar o surgimento dos Números Complexos, denotado por \mathbb{C} , que está ligado às tentativas de resolução de equações cúbicas. Conforme (BAUMGART, 1992), foi Girolamo Cardano o primeiro a usar raiz quadrada de um número negativo ao resolver o problema de dividir 10 em duas partes tais que o produto seja 40, ele encontrou $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ e mostrou que estes números de fato têm soma 10 e produto 40.

Porém, Cardano não usava os símbolos de raiz negativos como temos hoje, essa notação foi introduzida por Albert Girard (1637), René Descartes (1637) contribuiu com os termos real e imaginário, Leonhard Eules (1748) usava i para representar a $\sqrt{-1}$ e Carl Friedrich Gauss (1832) introduziu o termo Número Complexo.

Foi Bombelli que, usando o caso particular da equação $x^2 + 1 = 0$ chegou às regras de i e i^2 que temos hoje. Regras estas, usadas por matemáticos no final do Sec. XVI, porém, não consideravam os complexos como objetos matemáticos

de fato, mas simples artifício de cálculo (NEVES, 2014). Outra valiosa relação de números complexos, foi proposta por Abraham De Moivre em 1730, um dos primeiros a observar que esses números são úteis para trabalhar a divisão de arcos no círculo, onde o número complexo unitário pode ser representado por $(\cos \theta \pm i \operatorname{sen} \theta)$, obtendo $\sqrt[n]{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}$ o qual fornece n valores para a divisão do arco θ uma vez que

$$(\cos \theta \pm i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) \pm i \operatorname{sen}(n\theta), \text{ onde, } i = \sqrt{-1}$$

Em relação à interpretação geométrica dos Números Complexos, muitos foram os matemáticos que deram sua contribuição para a compreensão e legitimidade dos Complexos através de representações gráficas. (BAUMGART, 1992) destaca que em 1831 Gauss definiu Números Complexos como pares ordenados, onde associava cada Número Complexo a um único ponto do plano cartesiano, ou seja, representava $a + bi$ como o par ordenado (a, b) . Foi creditada para Wessel (1798) e Jean Robert Argand (1806) a representação geométrica dos Números Complexos. Com a criação do plano Argand-Gauss foi possível fazer relação entre multiplicação de Números Complexos e rotações no plano.

O Matemático Irlandês William Rowan Hamilton em 1833, Figura 1.1, formalizou a Álgebra dos Números Complexos. Ele considerou os números $a + bi$ como pares ordenados de números reais (a, b) e definiu as operações de soma e multiplicação como sendo

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

e

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$



Figura 1.1: William Rowan Hamilton.
Fonte:(FLAMENT, 2017)

Hamilton, foi o pioneiro nos estudos das rotações utilizando os Números Complexos, ao perceber que suas descobertas implicariam em uma Álgebra que permitiria trabalhar com vetores no plano, foi levado a desenvolver uma Álgebra de ternas de números Complexos que daria uma linguagem para trabalhar com vetores no espaço. Sua busca se estendeu por anos, até que em 1843 ao atravessar uma ponte sobre o Royal Canal, em Dublin, na Irlanda, Figura 1.2, veio a sua mente a relação matemática que tanto buscava,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$



Figura 1.2: Ponte sobre o Royal Canal, Dublin.
Fonte: <https://wildirishwalks.ie>

Na lateral da ponte, há uma placa em homenagem ao feito de Hamilton, como se pode observar na Figura 1.3 abaixo.



Figura 1.3: Placa em Homenagem a Hamilton.
Fonte: <https://wildirishwalks.ie>

Conforme (PINHEIRO, 2006), Hamilton percebeu que seriam necessários quatro números para descrever uma rotação seguida de uma mudança de escala, ou seja, um número correspondente à mudança de escala, outro número para indicar o ângulo de rotação e os dois restantes para indicar o plano de rotação. Encontrando assim, a solução para o problema. Utilizando uma estrutura não comutativa, Hamilton encontrou um fecho para a multiplicação de números da forma $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$.

Suas investigações o levaram a um sistema de vetores mais amplo, cujos elementos chamou de Quatérnios. Sua descoberta dependia de números com três unidades imaginárias para chegar a uma álgebra fechada e poder descrever rotações no espaço por meio de seus elementos. Desenvolvendo assim, a Álgebra dos Quatérnios, denotado por \mathbb{H} em homenagem ao seu criador. Esta nova Álgebra é não comutativa e tem espaço vetorial real de dimensão 4, como veremos posteriormente. Um número quatérnio tem a forma $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, onde q_0, q_1, q_2, q_3 são números reais.

As descobertas de Hamilton possibilitaram grande desenvolvimento no campo da matemática, entre eles a possibilidade de se estudar espaços com dimensões superiores a 3 e o estudo da Álgebra não comutativa. Hamilton dedicou o resto da sua vida a desenvolver aplicações dos Quatérnios à geometria, mecânica e a física. Nesse período introduziu termos como vetor, versor, tensor e escalar, que são familiares nos nossos dias.

Em 1845, Cayley mostrou que os Quatérnios podem representar orientações e em 1858 fez sua representação matricial. Foram também, utilizados para a formulação

de ondas eletromagnéticas pelo físico e matemático escocês, James Clerk Maxwell (1831 - 1879), seus estudos conduziram à construção do primeiro telégrafo, desenvolvido em 1895 por Marconi, que originou posteriormente a rádio e a televisão. Estes números também foram aplicados em trabalhos sobre eletricidade e magnetismo por Maxwell, em 1885 e, nos campos da mecânica clássica e da teoria da relatividade no início do século XX.

Com o desenvolvimento da tecnologia da informação os Quatérnios passaram a ser utilizados na computação gráfica por Ken Shoemake em 1985, com o objetivo de facilitar a animação por rotações. Shoemake demonstrou as vantagens da utilização desses números na obtenção de interpolações suaves de rotações e criou algoritmos de conversões entre matrizes, ângulos de Euler e Quatérnios.

Com o desenvolvimento tecnológico e a utilização do trabalho robótico, os Quatérnios passaram a ser utilizados para programar as rotações de robôs nas áreas aeroespacial, industrial, na medicina entre outros.

1.2 Os Números Complexos (\mathbb{C})

O conjunto dos Números Complexos, denotado por \mathbb{C} , contém o conjunto dos Números Reais e é munido das operações de adição e multiplicação. Os Números Complexos são da forma $z = a + bi$, em que a e b são números reais e i denota a unidade imaginária. Assim, podemos definir \mathbb{C} como sendo o conjunto $\mathbb{C} = \{z/z = a + bi; \text{onde } a, b \in \mathbb{R}\}$, onde z é o número complexo.

Conforme (ÁVILA, 2008) os Números Complexos ficam caracterizados pelas seguintes regras:

1. $i^2 = -1$,
2. $ai = ia$,
3. $a + bi = c + di$ significa $a = c, b = d$,
4. $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$,
5. $(a + bi)(c + di) = (ac + bd) + (ad + bc)i$,
6. Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$, seu oposto será da forma $-z = (-a) - (-b)i \in \mathbb{C}$,

7. A subtração de números complexos é definida em termos da adição e do oposto de um número, assim seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c - di$ fazendo $z_1 - z_2 = (a - b) + (b - d)i$,
8. O conjugado de um número complexo $z = a + bi$ será o número $\bar{z} = a - bi$, onde, troca-se o sinal da parte imaginário do número z . Abaixo, Figura 1.5, tem-se a representação no Plano Complexo do número complexo z_1 e seu conjugado \bar{z}_1 .

Observa-se que os Números Complexos da forma $z = a + 0i$, se comportam para a adição e a multiplicação da mesma forma que os Números Reais, quando sua parte imaginária é nula.

Estes Números podem ser representados no Plano Complexo, Figura 1.4, que é o conjunto das representações de todos $z = a + bi \in \mathbb{C}$ pelos pontos $P = (a, b)$ do plano. Dessa forma a representação geométrica no Plano Complexo é dada por um Plano Cartesiano em que, um eixo marca a parte real e o outro marca a parte imaginária de z .

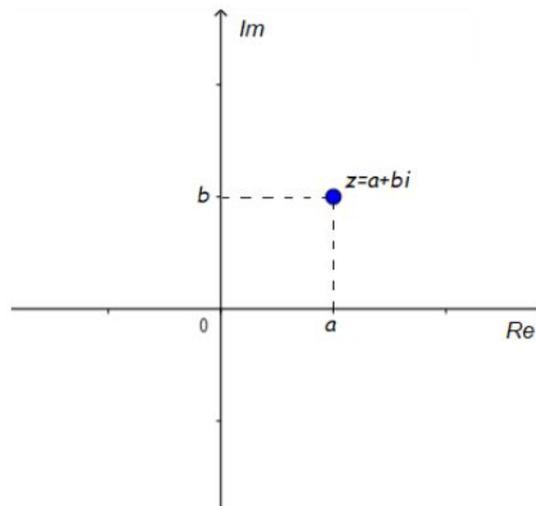


Figura 1.4: Plano Complexo ou Plano de Argand-Gauss.

Fonte: Própria autora.

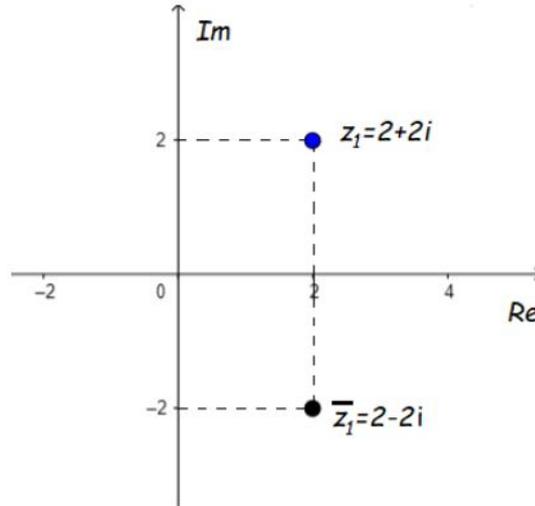


Figura 1.5: Representação gráfica de $z_1 = 2 + 2i$ e seu conjugado $\bar{z}_1 = 2 - 2i$.
 Fonte: Própria autora.

Definição 1.1 *Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$ e $P = (a, b)$ um ponto do Plano Complexo.*

- $(a, b) = (c, d)$ implica $a = c$ e $b = d$,
- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,
- $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$,

Então, é fácil ver que $a = (a, 0)$ e $i = (0, 1)$.

Ainda citando (ÁVILA, 2008), a representação dos Números Complexos por pontos do plano, Figura 1.4, é muito útil, pois, por meio dela o número complexo $z = a + bi$ é identificado com o ponto (a, b) , ou com o vetor Oz de componentes a e b , conforme a Figura 1.6. Assim, as regras do paralelogramo para a soma e subtração de vetores se aplicam no caso de soma e subtração de números complexos, como se pode observar na Figura 1.7, onde $z_3 = z_1 + z_2$.

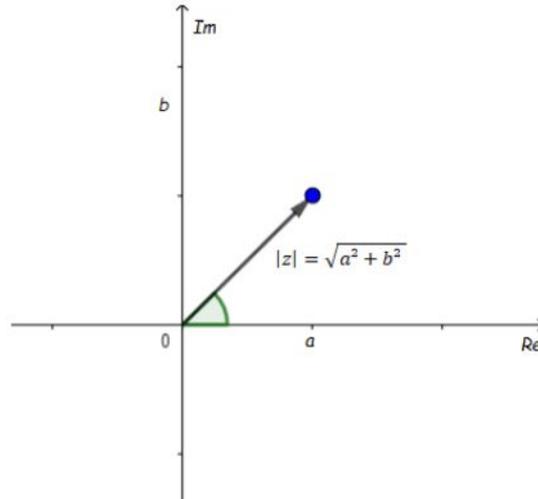


Figura 1.6: Representação de um vetor no Plano Complexo.
 Fonte: Própria autora.

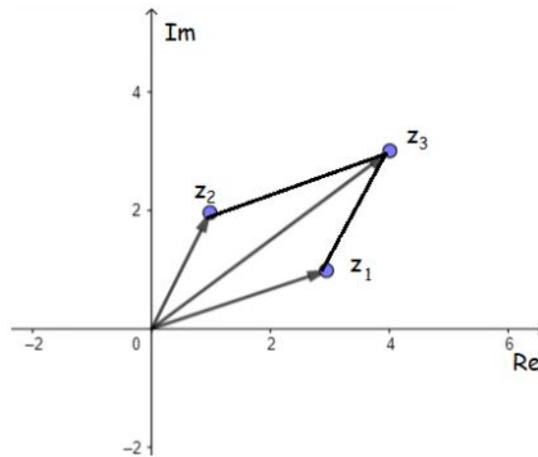


Figura 1.7: Regras do paralelogramo para a soma e subtração de Complexos.
 Fonte: Própria autora.

Já vimos que Hamilton fez uso dos Números Complexos para desenvolver a Álgebra dos Números Quatérnios, a seguir veremos de forma mais detalhada as propriedades e aplicabilidade destes números.

1.3 Os Números Quatérnios (\mathbb{H})

Como visto nos fatos históricos os Números Quatérnios, denotados por \mathbb{H} foram apresentados por Hamilton em 1843 e passaram a ser motivo de estudos de muitos matemáticos ao longo do tempo.

Antes de prosseguir com as definições e propriedades dos Quatérnios vamos definir Álgebra e Álgebra não Comutativa.

Conforme (BAUMGART, 1992), a Álgebra moderna é o estudo das estruturas matemáticas tais como grupos, anéis, corpos entre outras. Pode-se dividir a Álgebra em comutativa que estuda anéis comutativos e não comutativa que trata de anéis não comutativos.

Um anel é um conjunto $A \neq \emptyset$ no qual estão definidas duas operações, $+$ e \cdot , que combinam dois elementos de A num único elemento de A . Conforme (JANESCH, 2011), para formar um anel estas operações devem satisfazer a certos axiomas denominados de axiomas do anel.

Para ser comutativo seus elementos devem comutar, ou seja, $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a, b \in A$. Quando essa propriedade não é satisfeita diz-se que o anel é não comutativo e será objeto de estudo da Álgebra não Comutativa.

Como veremos mais adiante o conjunto dos Números Quatérnios é não comutativo, logo, objeto de estudo da Álgebra não Comutativa.

Os Quatérnios se caracterizam por sua relação com os Números Complexos, uma vez que um número quatérnio $q \in \mathbb{H}$ é uma extensão não-comutativa dos Complexos, obtida ao se acrescentar ao conjunto dos reais os elementos imaginários i, j e k . Em 1843 Hamilton descreve as Leis Fundamentais do Produto de Quatérnios:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \quad (1.1)$$

que implicam as relações:

$$ij = -ji = k,$$

$$jk = -kj = i,$$

$$ki = -ik = j.$$

Que ficam mais claras quando observamos a Tabela 1.1, abaixo.

| | | | |
|---------|------|------|------|
| \cdot | i | j | k |
| i | -1 | k | $-j$ |
| j | $-k$ | -1 | i |
| k | j | $-i$ | -1 |

Tabela 1.1: Leis Fundamentais do Produto de Quatérnios.

Essas relações também podem ser expressas graficamente conforme apresentado na Figura 1.8, em que o sentido das setas representam o produto positivo, consequentemente, a multiplicação cuja ordem das grandezas é oposta às setas, é negativa.

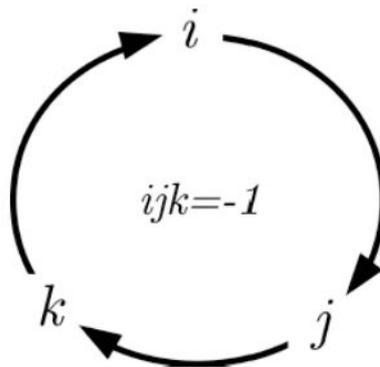


Figura 1.8: Multiplicação de Quatérnios.
Fonte:(JAMBERSI; SILVA, 2016).

1.3.1 Operações no Conjunto dos Números Quatérnios

Dado o número $q \in \mathbb{H}$ tal que, $q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ onde $q_l \in \mathbb{R}$ e $l = (0, 1, 2, 3)$, podemos dividi-lo em parte real e parte imaginária, ou seja, q_0 representa a parte real (ou escalar, na terminologia de Hamilton) de q , denotado por $Re(q)$ e \mathbf{q} , em negrito, corresponde à parte imaginária (ou parte vetorial do quatérnio), isto é, $\mathbf{q} = q_1i + q_2j + q_3k$. Ainda, q será um Quatérnio Puro se sua parte real for nula, ou seja, $Re(q) = q_0 = 0$ assim, q será denotado por $q = \mathbf{q} = q_1i + q_2j + q_3k$.

Definição 1.2 (Igualdade de Quatérnios) Dados $q, p \in \mathbb{H}$ tais que $p = q$ se e somente se $p_0 = q_0$ e $\mathbf{p} = \mathbf{q}$.

Definição 1.3 (Adição de Quatérnios) Dados $p, q \in \mathbb{H}$ tais que

$$\begin{aligned}
p + q &= (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k) + (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \\
&= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k \\
&= (p_0 + \mathbf{p}) + (q_0 + \mathbf{q}) = (p_0 + q_0) + (\mathbf{p} + \mathbf{q})
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Definição 1.4 (Multiplicação Quatérnios) A multiplicação de dois quatérnios $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ e $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ é dada pela multiplicação polinomial de seus termos, tal que:

$$\begin{aligned}
pq &= (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k)(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \\
&= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) \\
&\quad + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)i \\
&\quad + (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1)j \\
&\quad + (p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0)k.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Ressaltando que devido às propriedades dos Quatérnios essa operação não é comutativa, ou seja, $pq \neq qp$.

Definição 1.5 (Multiplicação por um escalar) Sejam $q \in \mathbb{H}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, podendo representar α como o quatérnio $\alpha = \alpha_0 + \mathbf{0}$, assim:

$$\begin{aligned}
\alpha q &= (\alpha_0 + \mathbf{0})(q_0 + \mathbf{q}) \text{ com } \alpha \in \mathbb{R} \\
\alpha q &= \alpha q_0 + \alpha q_1i + \alpha q_2j + \alpha q_3k.
\end{aligned}$$

Propriedade 1.6 (Produto de escalar por quatérnio) Sejam $p, q, q' \in \mathbb{H}$ e $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$ tem-se:

- a) $\alpha q = q\alpha$,
- b) $p(\alpha q + \beta q') = \alpha pq + \beta pq'$,
- c) $(\alpha q + \beta q')p = \alpha qp + \beta q'p$.

Portanto, o conjunto dos Números Quatérnios com as operações acima constitui um espaço vetorial $\in \mathbb{R}$.

Proposição 1.7 (Produto de quatérnio) *Sejam $p, q, q' \in \mathbb{H}$. O produto de quatérnios é definido pelas seguintes propriedades:*

a) $pq \neq qp$, (não comutativo)

b) $(pq)q' = p(qq')$,

c) $p(q + q') = pq + pq'$,

d) $(q + q')p = qp + q'p$.

Demonstração: A demonstração da proposição 1.7 pode ser vista em (ARAÚJO, 2019). □

Como o conjunto dos Números Quatérnios constitui uma álgebra não comutativa, a associatividade do produto de quatérnios torna sua álgebra associativa. Sobre a comutatividade de Quatérnios a proposição seguinte mostra que um dado número quatérnio comuta com qualquer outro.

Proposição 1.8 *Um quatérnio p é real, ou seja, $p = p_0$ se e somente se, para qualquer outro quatérnio q , verifica-se $pq = qp$.*

Demonstração: A partir da relação comutativa com um quatérnio q , se obtém que p tem de ser um número real. Suponhamos, então, por hipótese, que $pq = qp$. Se $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ e $q = i$; tem-se:

$$pq = pi = p_0i - p_1 + p_3j - p_2k.$$

$$qp = ip = p_0i - p_1 - p_3j + p_2k.$$

Assim, como $pi = ip$ tem-se que $2(p_2k - p_3j) = 0$, logo $p_2 = p_3 = 0$. Ao repetir o procedimento para o quatérnio $q = j$, verifica-se que p_1 também tem que ser nulo.

□

Definição 1.9 (Conjugado de um quatérnio) *Seja $q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, seu conjugado será denotado por \bar{q} , onde, $\bar{q} = q_0 - \mathbf{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$.*

Propriedade 1.10 *Sejam $p, q, q' \in \mathbb{H}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, tem-se:*

- a) $\overline{\overline{q}} = q$,
- b) $\overline{pq} = \overline{q}\overline{p}$,
- c) $\overline{p+q} = \overline{p} + \overline{q}$,
- d) $\overline{\alpha p} = \alpha \overline{p}$,
- e) $\overline{p}p = p\overline{p}$.

Definição 1.11 (Norma de quatérnio) Seja $p \in \mathbb{H}$. Defina-se norma (ou valor absoluto) de p , como sendo o número não negativo, tal que:

$$\|p\| = \|p_0 + p_1i + p_2j + p_3k\| = \sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}.$$

Proposição 1.12 Sejam $p, q \in \mathbb{H}$, tem-se:

- a) $\|p\| = \|\overline{q}\|$,
- b) $\|pq\| = \|p\|\|q\|$.

Demonstração:

A letra (a) pode ser vista diretamente. A letra (b) segue de:

$$\|pq\| = \sqrt{pq(\overline{pq})} = \sqrt{pq\overline{q}\overline{p}} = \sqrt{p\|q\|^2\overline{p}} = \sqrt{p\overline{p}\|q\|^2} = \sqrt{\|p\|^2\|q\|^2} = \|p\|\|q\|.$$

□

Definição 1.13 (Quatérnio unitário) Um quatérnio $p \in \mathbb{H}$ diz-se unitário se $\|p\| = 1$. Por questão de simplificação, usaremos neste texto as formas:

- \mathbb{H}_1 para denotar o conjunto dos quatérnios unitários,
- \mathbb{H}_* como o conjunto dos quatérnios não nulos.

O Inverso de um Quatérnio será dado usando sua norma e seu conjugado, conforme proposições a seguir.

Proposição 1.14 (Inverso de um Quatérnio) Seja $q \in \mathbb{H}_*$. Então existe um $q^{-1} \in \mathbb{H}_*$ tal que

$$qq^{-1} = q^{-1}q = 1.$$

Ainda, q^{-1} é único e dado pela expressão $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$.

Demonstração: Seja $q \in \mathbb{H}_*$ dado, tem-se:

Unicidade

Seja ambos $p, p_2 \in \mathbb{H}$ inversos de q . A igualdade de p_1 e p_2 segue de

$$p_1 = 1p_1 = p_1(qp_2) = (p_1q)p_2 = 1p_2 = p_2.$$

Existência

Seja $p = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$. Então

$$qp = q \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{q\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1.$$

$$pq = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} q = \frac{\bar{q}q}{\|q\|^2} = \frac{q\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1.$$

Portanto todo $q \in \mathbb{H}_*$, tem um inverso. □

Proposição 1.15 Sejam $p, q \in \mathbb{H}_*$ e $q_1, p_1 \in \mathbb{H}_1$, tem-se:

- a) $(p^{-1})^{-1} = p$,
- b) $(pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1}$,
- c) $\|q\| = \|q\|^{-1}$,
- d) $\|p_1q_1\| = 1$,
- e) $p_1^{-1} = \overline{p^{-1}}$.

Além disso, $q^{-1} = \bar{q}$ quando $q \in \mathbb{H}_1$.

Demonstração: A demonstração da Proposição (1.5) pode ser verificada em (BARREIRO, 2009). □

Definição 1.16 (*Divisão de um número quatérnio*) Sejam $p \in \mathbb{H}$ e $q \in \mathbb{H}_*$. A divisão de p por q define-se como:

- divisão à esquerda: $p \backslash q = q^{-1}p$,
- divisão à direita: $p / q = pq^{-1}$.

Assim, verifica-se que o Conjunto dos Quatérnios constitui um anel não comutativo com divisão. Segue-se que $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ é um corpo não comutativo.

1.3.2 Representação Vetorial dos Números Quatérnios

Um número quatérnio é puro, quando o quatérnio tem sua parte real nula. Noutros termos, dado $q \in \mathbb{H}$, tal que, $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, e $q_0 = 0$, dizemos que q é quatérnio puro. Conforme (CORREA et al., 2020), pode-se estabelecer uma relação entre o espaço euclidiano tridimensional e o espaço dos quatérnios puros.

Isto é, existe uma correspondência biunívoca entre os elementos do subconjunto dos quatérnios puros e os elementos do espaço euclidiano tridimensional.

Portanto, o Conjunto dos Quatérnios e puros é um isomorfismo do \mathbb{R}^3 e pode-se relacionar um número $q \in \mathbb{H}$, tal que, $q = q_1i + q_2j + q_3k$, com o vetor o vetor de \mathbb{R}^3 , (q_1, q_2, q_3) .

Consideremos $p, q \in \mathbb{H}$, $p = p_0 + \mathbf{p}$ e $q = q_0 + \mathbf{q}$, onde $p_0 = q_0 = 0$, temos os quatérnios puros $p = \mathbf{p}$ e $q = \mathbf{q}$, que podem ser relacionados com vetores de \mathbb{R}^3 . Nesse caso a multiplicação de p e q pode ser representada, conforme (CORREA et al., 2020), usando o produto interno e o produto vetorial.

Proposição 1.17 Sejam $p, q \in \mathbb{H}$, $p = p_0 + \mathbf{p} = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ e $q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, o produto de p e q será reescrito como:

$$pq = (p_0q_0 - \mathbf{p}\mathbf{q}) + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}. \quad (1.4)$$

Demonstração: Seja da multiplicação entre p e q dada por:

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + \mathbf{p})(q_0 + \mathbf{q}) \\ &= p_0q_0 - (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + (p_0q_1 + q_0p_1 + p_2q_3 - p_3q_2)i + \\ &\quad + (p_0q_2 + q_0p_2 + p_3q_1 - p_1q_3)j + (p_0q_3 + q_0p_3 + p_1q_2 - p_2q_1)k, \end{aligned}$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
 pq &= (p_0q_0 - \mathbf{pq}) + \\
 &+ p_0(q_1i + q_2j + q_3k) + q_0(p_1i + p_2j + p_3k) + \\
 &+ (p_2q_3 - p_3q_2)i + (p_3q_1 - p_1q_3)j + (p_1q_2 - p_2q_1)k \\
 &= (p_0q_0 - \mathbf{pq}) + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}.
 \end{aligned}$$

□

Como o produto vetorial não é comutativo, também não comuta a multiplicação de quatérnios. Desse modo,

$$pq = qp, \text{ se somente se, } \mathbf{p} \times \mathbf{q} = 0,$$

ainda,

$$q^2 = (q_0^2 - \mathbf{qq}) + 2q_0\mathbf{q}. \quad (1.5)$$

Proposição 1.18 *Sejam $p, q \in \mathbb{H}$, $p = p_0 + \mathbf{p} = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ e $q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ com $p_0 = q_0 = 0$ implica que p e q são quatérnios puros, então:*

- $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \text{Vec}(\mathbf{pq}) = \frac{1}{2}(\mathbf{pq} - \mathbf{qp})$,
- $\mathbf{pq} = \text{Re}(\bar{\mathbf{p}}\mathbf{q}) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{p}}\mathbf{q} + \mathbf{p}\bar{\mathbf{p}})$.

Obs. 1.19 *A notação (Vec) corresponde a parte vetorial do quatérnio e (Re) corresponde a sua parte real.*

Demonstração: A demonstração da proposição 1.18 consta em (PINHEIRO, 2006).

□

1.3.3 Representação Trigonométrica dos Números Quatérnios

Por ser semelhante aos Complexos, os Quatérnios também podem ser escritos na forma trigonométrica.

Proposição 1.20 *Seja $q = q_0 + \mathbf{q}$, onde $q \in \mathbb{H}_*$, sua forma trigonométrica será*

$$q = \|q\|(\cos \theta + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \text{sen}\theta), \quad (1.6)$$

onde, $\theta = \text{arccot}(\frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|})$.

Demonstração: Usando as igualdades trigonométricas:

$$\text{sen}^2\theta = \frac{1}{1 + \cot^2\theta} \quad \text{e} \quad \cos^2\theta = \frac{\cot^2\theta}{1 + \cot^2\theta},$$

substituindo $\cot^2\theta$, tem-se

$$\text{sen}^2\theta = \frac{1}{1 + \left(\frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|}\right)^2} \quad \text{e} \quad \cos^2\theta = \frac{\left(\frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|}\right)^2}{1 + \left(\frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|}\right)^2},$$

portanto,

$$\begin{aligned} \cos \theta + \frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|} \text{sen}\theta &= \frac{\left(\frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|}\right)^2}} + \frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|}\right)^2}} = \frac{q_0 + \|\mathbf{q}\|}{\|\mathbf{q}\| \sqrt{1 + \left(\frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|}\right)^2}} = \\ &= \frac{q}{\sqrt{q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2}} = \frac{q}{\|q\|}. \end{aligned}$$

Para $q \in \mathbb{H}_1$, isto é q pertence ao conjunto dos quatérnios unitários, tem-se:

$$q = \cos \theta + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \text{sen}\theta, \quad (1.7)$$

onde, $\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$ representa o eixo de rotação no espaço. \square

Exemplo 1.21 *Seja $q \in \mathbb{H}$ e $q = \sqrt{3} + i + 2j + 2k$, tem-se $\|q\| = 2\sqrt{3}$, $\|\mathbf{q}\| = 3$, $\theta = \text{arccot}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$.*

Assim, a forma trigonométrica de q será:

$$q = \|q\|(\cos \theta + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \text{sen}\theta) = 2\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{3} + \frac{(+i + 2j + 2k)}{3} \text{sen}\frac{\pi}{3}).$$

1.3.4 Funções Quaterniônicas

O estudo de funções de variável quaterniônica é um assunto que tem interessado muitos estudiosos nos últimos tempos, principalmente nas áreas de robótica e animação. Mostraremos aqui as funções mais frequentemente usadas. Uma lista mais detalhada de propriedades e demonstrações relativas às funções quaterniônicas que vamos introduzir podem ser vistas em (BARREIRO, 2009).

Definição 1.22 *Seja \mathbb{E}^4 contido em \mathbb{H} um espaço quadridimensional e $q \in \mathbb{E}^4$ uma variável da forma $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$, com $q_i \in \mathbb{R}$, ($i = 1, 2, 3, 4$). Assim, uma função quaterniônica $f : \mathbb{E}^4 \rightarrow \mathbb{H}$ é uma relação que faz corresponder a cada $q \in \mathbb{E}^4$ um número quaterniônico $w = f(q)$, ou seja:*

$$f : \mathbb{E}^4 \rightarrow \mathbb{H} \\ (q_0, q_1, q_2, q_3) \mapsto w = f(q_0, q_1, q_2, q_3),$$

onde $f = f_0 + if_1 + jf_2 + kf_3$ e i, j, k obedecem às relações Fundamentais de Produto de Quatérnios.

Antes de definir as funções Exponencial e Logarítmica vamos definir as funções Sinal e Argumento.

Definição 1.23 *Seja $q \in \mathbb{H}$, a função Sinal de q será dada por*

$$w(q) = \begin{cases} \frac{q}{\|q\|} & \text{se } q \neq 0 \\ 0 & \text{se } q = 0 \end{cases}$$

Designa-se por sinal de q e retorna um quatérnio unitário com a mesma direção de q .

Definição 1.24 *Seja $q \in \mathbb{H}$, a função Argumento de q será dada por*

$$\arg(q) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{q_0}{\|q\|}\right) & \text{se } q \neq 0 \\ \text{indefinido} & \text{se } q = 0 \end{cases}$$

Função Exponencial

Definição 1.25 A função exponencial e^q define-se pela série de potências. Expandindo em série de Maclaurin tem-se:

$$e^q = 1 + q + \frac{q^2}{2!} + \frac{q^3}{3!} + \dots + \frac{q^n}{n!} + \dots$$

assim,

$$e^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!}.$$

Pela expansão de seno e cosseno em série de Maclaurin pode-se escrever e^q como segue:

$$e^q = e^{q_0} \left\{ \cos \|\mathbf{q}\| + \mathbf{q} \left(\frac{\text{sen} \|\mathbf{q}\|}{\|\mathbf{q}\|} \right) \right\}.$$

Para um quatérnio puro da forma $q = w(\mathbf{q})\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, tem-se

$$e^q = \cos \theta + w(\mathbf{q}) \text{sen} \theta.$$

E, conseqüentemente, $\|e^q\| = 1$. Neste caso, obtém-se uma função de \mathbb{R}^3 em \mathbb{H}_1 . Pois, o Conjunto dos Quatérnios é um isomorfo do \mathbb{R}^3 para quatérnios puros.

Definição 1.26 Para $q \in \mathbb{H}$ a função exponencial quaterniônica verifica as seguintes propriedades:

1. $e^q \neq 0$,
2. $e^{-q}e^q = 1$,
3. $e^{w(\mathbf{q})\pi} = -1$,
4. $e^{nq} = (e^q)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) (Fórmula de Moivre),
5. $\|e^q\| = e^{q_0}$.

Função Logarítmica

Definição 1.27 *Seja $q = q_0 + \mathbf{q}$ um quatérnio tal que $q \neq 0$ ou $q = q_0 > 0$. Então a função logarítmica $\log q$ é definida por:*

$$\log q = \log \|q\| + w(\mathbf{q})\text{arg}(q).$$

Observe-se que, se $q \in \mathbb{H}_1$, isto é, se $q = \cos \theta + w(\mathbf{q}) \text{sen } \theta$ então:

$$\log q = \log(\cos \theta + w(\mathbf{q}) \text{sen } \theta) = w(\mathbf{q})\theta,$$

ou seja, obtém-se uma função definida de \mathbb{H}_1 em \mathbb{R}^3 . Ainda, se q é um quatérnio unitário, $\log q$ não é, necessariamente, um quatérnio unitário.

1.3.5 Números Quatérnios Duais $\tilde{\mathbb{H}}$

Iniciamos esta subseção conceituando Números Duais, para posteriormente falarmos de Quatérnios Duais e sua aplicação nos movimentos rígidos.

Definição 1.28 *Os números duais, denotado por \mathbb{D} , são da forma*

$$d = d_0 + d_1\epsilon,$$

em que $d_0, d_1 \in \mathbb{R}$ e ϵ é tal que $\epsilon^2 = 0$.

Propriedade 1.29 *Sejam c e $d \in \mathbb{D}$, tais que $c = c_0 + c_1\epsilon$ e $d = d_0 + d_1\epsilon$ tem-se:*

1. *Soma: $c + d = (c_0 + c_1\epsilon, d_0 + d_1\epsilon) = (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)\epsilon$,*
2. *Produto: $cd = (c_0 + c_1\epsilon, d_0 + d_1\epsilon) = c_0d_0 + (c_0d_1 + c_1d_0)\epsilon$,*
3. *Conjugado de $d = d_0 + d_1\epsilon$ será $d^* = d_0 - d_1\epsilon$.*

Já os conjunto dos Números Quatérnios Duais, denotado por $\tilde{\mathbb{H}}$, é um importante conjunto que envolve Quatérnios e Números Duais muito utilizado em movimentos Rígidos no espaço, principalmente movimentos concatenados de rotação e translação.

Definição 1.30 Define-se o conjunto dos quatérnios Duais, $\tilde{\mathbb{H}}$, conforme (KAVAN et al., 2006), como sendo

$$\tilde{\mathbb{H}} = \{\tilde{q} = q_0 + q_1\epsilon \mid q_0, q_1 \in \mathbb{H} \text{ e } \epsilon^2 = 0\}.$$

Propriedade 1.31 Sejam $\tilde{q} = q_0 + q_1\epsilon$ e $\tilde{p} = p_0 + p_1\epsilon$, as operações soma e produto em $\tilde{\mathbb{H}}$ tem as seguinte propriedades:

1. Soma: $\tilde{q} + \tilde{p} = (q_0 + q_1\epsilon) + (p_0 + p_1\epsilon) = (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)\epsilon$,
2. Produto: $\tilde{q}\tilde{p} = (q_0 + q_1\epsilon)(p_0 + p_1\epsilon) = (q_0p_0) + (q_0p_1 + p_0q_1)\epsilon$.

Os coeficientes dos Números Quatérnios Duais serão Reais. Assim, considerando $q_0 = q_{00} + q_{01}i + q_{02}j + q_{03}k$ e $q_1 = q_{10} + q_{11}i + q_{12}j + q_{13}k$, então:

$$\begin{aligned} q_0 + q_1\epsilon &= (q_{00} + q_{01}i + q_{02}j + q_{03}k) + (q_{10} + q_{11}i + q_{12}j + q_{13}k)\epsilon \\ &= q_{00} + q_{01}i + q_{02}j + q_{03}k + q_{10}\epsilon + q_{11}i\epsilon + q_{12}j\epsilon + q_{13}k\epsilon. \end{aligned}$$

Daí, tem-se $\beta = \{1, i, j, k, i\epsilon, j\epsilon, k\epsilon\}$ base para $\tilde{\mathbb{H}}$, como espaço vetorial.

Definição 1.32 (Conjugado de um quatérnio dual) Seja $\tilde{q} = q_0 + q_1\epsilon$ um quatérnio dual o conjugado de \tilde{q} será dado por:

$$\tilde{q}^* = q_0 - q_1\epsilon.$$

Proposição 1.33 (Inverso de um número dual) Seja $\tilde{q} = q_0 + q_1\epsilon$ um quatérnio dual e $\tilde{q} \neq 0$, o seu inverso será dado por:

$$\tilde{q}^{-1} = q_0^{-1}(1 - q_1q_0^{-1}\epsilon).$$

Demonstração: Tem-se

$$(q_0 + q_1\epsilon)q_0^{-1}(1 - q_1q_0^{-1}\epsilon) = (1 + q_1q_0^{-1}\epsilon)(1 - q_1q_0^{-1}\epsilon) = 1.$$

□

Iniciamos este capítulo conceituando corpo rígido, o qual se constitui de um objeto, conjunto de partículas (massas pontuais) dispostas de tal forma que as distâncias relativas entre elas são fixas.

Na Cinemática os movimentos rígidos tratam de rotações e translações de corpos rígidos, seja em ambiente físico ou digital. Esses movimentos necessitam de certo esforço computacional, visto que, são gerados a partir de cálculos complexos. Há vários métodos matemáticos para se fazer esses cálculos, entre eles podemos citar os métodos Matrizes de Rotação, Ângulos de Euler, Eixo-Ângulo e por Quatérnios.

Todos estes métodos têm suas vantagens e desvantagens conforme análises comparativas feitas por (PINHEIRO, 2006), (KENWRIGHT, 2012) e (MARQUES et al., 2016). Neste trabalho vamos detalhar o uso dos Números Quatérnios em movimentos rígidos.

2.1 Movimentos Rígidos no Plano

Iniciamos esta seção com uma revisão dos movimentos rígidos em \mathbb{R}^2 , conteúdo necessário para melhor entendimento destes movimentos quando demonstrados pelo método dos Quatérnios.

As rotações no plano podem ser analisadas por duas perspectivas distintas, rotação de ponto (vetor) ou rotação de eixos. A seguir veremos seus efeitos produzidos sobre um ponto (ou vetor) envolvido na rotação.

Na Figura 2.1, temos a rotação do plano, ou seja, o plano se move e o ponto P continua fixo.

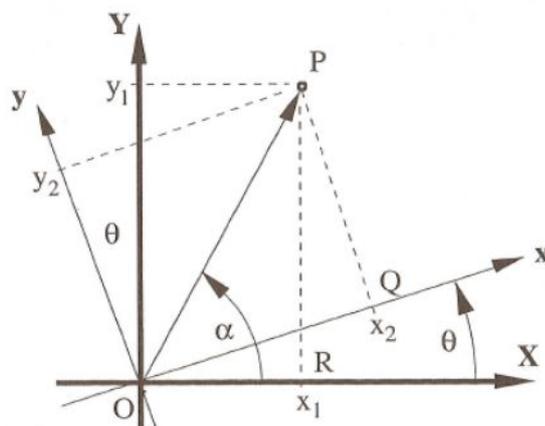


Figura 2.1: Rotação em Eixos Coordenados Móveis.
Fonte: (PINHEIRO, 2006).

Já na Figura 2.2, quem se move é o ponto P e os eixos são fixos.

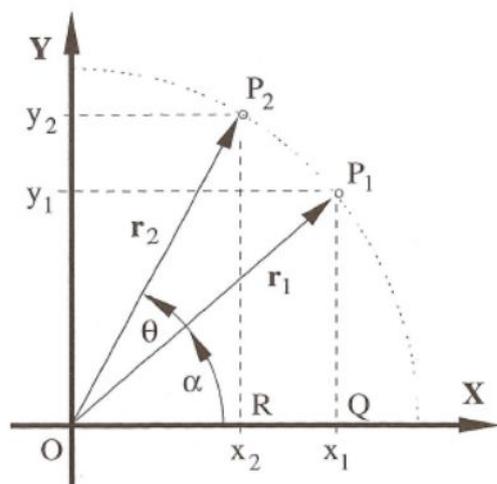


Figura 2.2: Rotação em Eixos Coordenados Fixos.
Fonte: (PINHEIRO, 2006).

Após fazer uma rotação de ângulo θ (positivo), Figura 2.1, do sistema de coordenadas XOY , em relação à origem, obtém-se um novo sistema de coordenadas xOy . Sejam (x_2, y_2) as coordenadas do ponto P no novo sistema. A relação entre as novas coordenadas do ponto P e as iniciais, são dadas pela relação:

$$x_2 = x_1 \cos \theta + y_1 \operatorname{sen} \theta,$$

$$y_2 = y_1 \cos \theta - x_1 \sin \theta.$$

Na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Já na Figura 2.2, tem-se os eixos fixos, enquanto que um ponto P_1 de coordenadas (x_1, y_1) , se desloca para um ponto P_2 de coordenadas (x_2, y_2) , como consequência de uma rotação de ângulo θ em relação à origem. Neste caso, a relação entre as coordenadas é dada por:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, \\ y_2 &= y_1 \cos \theta + x_1 \sin \theta. \end{aligned}$$

Na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que as relações entre as coordenadas nas duas perspectivas apresentadas diferem apenas nos sinais de $\sin \theta$. Note que as matrizes de rotação dadas pelas duas perspectivas acima, são uma a transposta da outra, ou seja:

Denotando por $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, a matriz de rotação quando se tem os eixos móveis, sua transposta será $A^t = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, que é precisamente a matriz de rotação quando se tem os eixos fixos.

A matriz de rotação A e a sua transposta são matrizes ortogonais com determinante igual a 1, lembrando que, matrizes ortogonais são tais que $AA^t = A^tA = I$ e $\det A = 1$ onde a recíproca é verdadeira, ou seja, toda a matriz 2×2 ortogonal e com determinante igual a 1 é uma matriz de rotação e formam o conjunto das matrizes representado por $SO(2)$ e denominado de grupo especial ortogonal de dimensão 2. Uma demonstração desse fato pode ser encontrada em (ARAÚJO, 2019).

As matrizes de rotação 2×2 são operadores ortogonais que preservam a norma e o ângulo entre os vetores, assim, a rotação resultante não depende da ordem de composição das rotações. A composição de rotações no plano é comutativa. (OLIVEIRA et al., 2011).

Conforme (ÁVILA, 2008), algebricamente, os Planos Complexo \mathbb{C} e Euclidiano \mathbb{R}^2 diferenciam-se por causa da multiplicação dos Números Complexos, pois, no Plano Euclidiano não tem tal operação com os pares ordenados (x, y) . Todavia, geometricamente podemos considerar esses dois planos como espaços vetoriais isomorfos.

Assim, fazendo a identificação da matriz de rotação A com o Número Complexo $\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, obtém-se:

$$y = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)x.$$

Isto é, o conjunto dos Números Complexos unitários pode ser identificado com o conjunto das rotações no plano, estes números pertencem, na geometria do plano, à circunferência unitária de centro na origem, esse conjunto de números será denominado de esfera S^1 .

Considerando uma região do Plano Complexo, cada ponto dessa região identifica um número complexo $z = x + yi$. Ao efetuarmos o produto de z por zi , onde $z' = 0 + i$, tem-se:

$$zz' = zi = xi + yi^2 = -y + xi.$$

Sendo θ o argumento, ou seja, a ângulo formado pelo vetor \vec{Oz} e o eixo real e θ' o argumento de zi , conforme a Figura 2.3, tem-se $\theta' + (\frac{\pi}{2} - \theta) = \pi$, ou seja $\theta - \theta' = \frac{\pi}{2}$, assim, os vetores \vec{Oz} e \vec{Ozi} são ortogonais, possuem a mesma norma, conforme (ÁVILA, 2008), $\|z\| = \|zi\|$. Porém, \vec{Ozi} , sofreu uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos. Segue por (ARAUJO, 2019), que ao multiplicarmos todos os pontos de uma região pelo número complexo i seu tamanho não será alterado e sofrerá uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos.

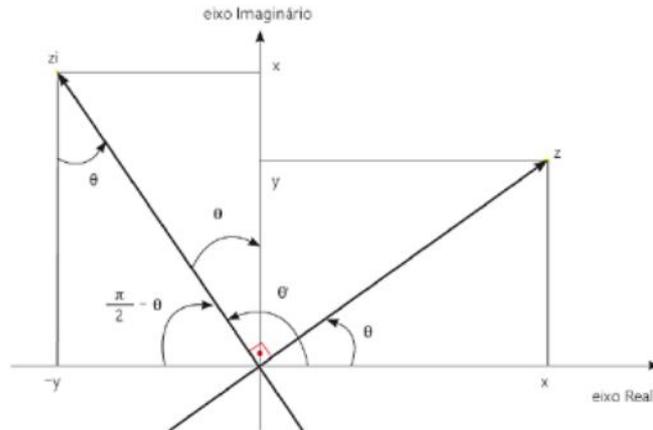


Figura 2.3: Produto de z por i .
 Fonte: (ARAUJO, 2019).

Em relação às translações no Plano Complexo, sejam z_0 e z dois números complexos então $z' = z + z_0$ será a imagem de z pela translação segundo o vetor associado a z_0 . E que as translações são isometrias que preservam as orientações dos ângulos. Como podemos observar na Figura 2.4, os pontos z_3 , z_1 e z_2 sofreram uma translação, respectivamente para os pontos z'_3 , O e z'_2 , mantendo o mesmo ângulo α , isto é, $z_3 \hat{z}_1 z_2 = z'_3 \hat{O} z'_2$.

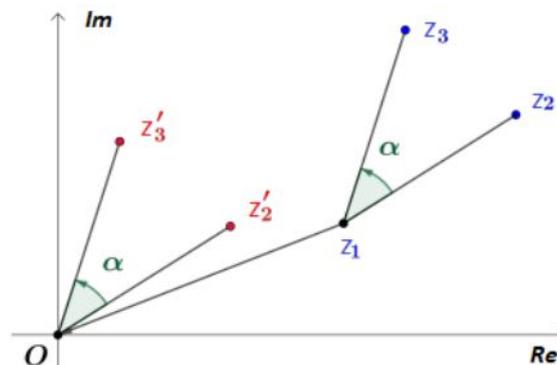


Figura 2.4: Translação do ponto z_1 para a origem.
 Fonte:(CUNHA, 2020).

2.2 Movimentos Rígidos no Espaço

Nesta seção continuaremos a mostrar as rotações com uso de matrizes, como no caso de rotações no plano, ou seja, uma extensão da seção anterior e na próxima seção

será dada ênfase no uso de Quatérnios como operadores de movimentos rígidos no espaço.

Tomemos um sistema de eixos $OXYZ$ ortogonais entre si para representar o espaço \mathbb{R}^3 , marcamos um ponto $P = (x, y, z)$, como na Figura 2.5, abaixo.

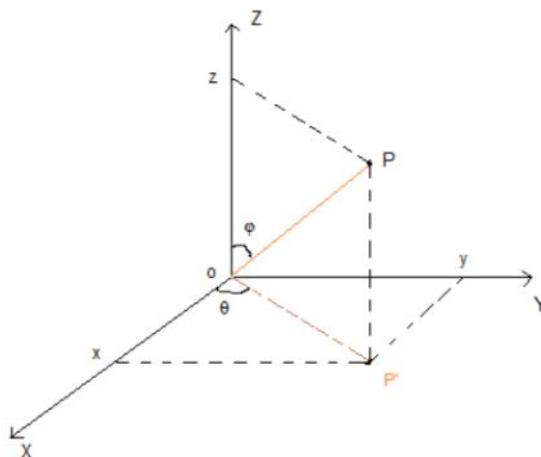


Figura 2.5: Vetor OP no espaço \mathbb{R}^3 .
Fonte: (ARAUJO, 2019).

Temos o vetor \vec{OP} , a projeção ortogonal do ponto P no plano XOY é dada por P' , assim, o vetor \vec{OP}' é a projeção do vetor \vec{OP} no plano XOY . Ao realizar uma rotação do ponto P em torno do eixo Z de 2π radianos, sua projeção P' descreve no plano XOY uma circunferência de raio igual a $|\vec{OP}'|$. Ao realizar uma rotação no plano XOY de forma que o semi-eixo OX coincida com o vetor \vec{OP}' , isto é, rotacionar o referencial no sentido anti-horário de um ângulo θ em torno do eixo Z , é o mesmo que rotacionar o vetor \vec{OP}' em sentido horário de um ângulo $-\theta$ até coincidir com o semi-eixo OX . Devido a este fato, ao escrevermos as matrizes dessas rotações, uma será a inversa da outra, como ocorre com as matrizes de rotação no plano, visto na seção anterior.

A seguir estão as matrizes necessárias para as rotações, onde os eixos se movem e o ponto P continua fixo.

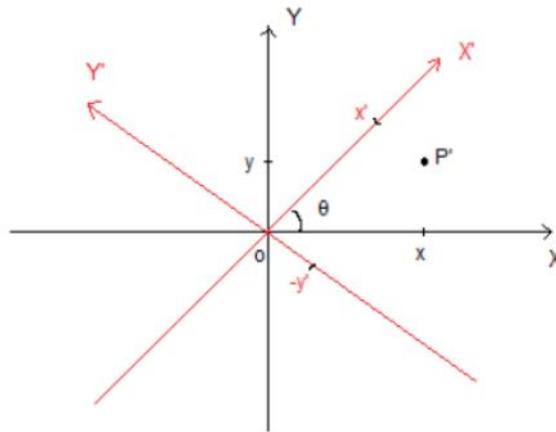


Figura 2.6: Coordenadas de P' , após rotação de eixos.
 Fonte: (ARAUJO, 2019).

Rotacionando o referencial em torno do eixo Z a coordenada z do ponto P não se altera, Figura 2.6, assim, as alterações serão no plano XOY . Após a rotação, as novas coordenadas do ponto P serão (x', y', z) . Utilizando coordenadas polares, as novas coordenadas ficam:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta + z0, \\ y' &= y \cos \theta - x \operatorname{sen} \theta + z0, \\ z &= x0 + y0 + z1. \end{aligned}$$

Na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Portanto, a rotação em torno do eixo Z é dada pela matriz $R_{z,\theta}$.

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora, a matriz que representa a rotação do ponto P em torno do eixo Z , ou seja, o referencial se mantém fixo, quem rotaciona é o ponto, será:

$$R'_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma, utilizando coordenadas polares, pode-se determinar $R_{x,\phi}$ e $R_{y,\alpha}$ que são as matrizes de rotação, respectivamente, em torno dos eixo X por um ângulo ϕ e em torno do eixo Y por um ângulo α .

$$R_{x,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

e

$$R_{y,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \text{sen } \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Agora, as matrizes que representa a rotação do ponto P em torno dos eixos X e Y , serão:

$$R'_{x,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

e

$$R'_{y,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\text{sen } \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Como vimos na seção anterior, as matrizes de rotação de eixos e do ponto são transpostas uma da outra, o mesmo vale para as matrizes de rotação no espaço, ainda, $R'_{z,\theta}$ é também a matriz inversa de $R_{z,\theta}$. Assim, podemos considerar as seguintes relações:

$$\begin{aligned} R'_{z,\theta} &= (R_{z,\theta})^t = (R_{z,\theta})^{-1}, \\ R'_{y,\alpha} &= (R_{y,\alpha})^t = (R_{y,\alpha})^{-1}, \\ R'_{x,\phi} &= (R_{x,\phi})^t = (R_{x,\phi})^{-1}. \end{aligned}$$

Do fato acima, segue que:

$$R_{z,\theta}(R_{z,\theta})^t = (R_{z,\theta})^t R_{z,\theta} = I,$$

ou seja,

$$R_{z,\theta}(R_{z,\theta})^t = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A demonstração consta em (ARAÚJO, 2019), o mesmo afirma que do fato de

$$\det R_{z,\theta} = \det R_{y,\alpha} = \det R_{x,\phi} = 1,$$

pode-se concluir que esse conjunto de matrizes de ordem 3 são ortogonais e representam o conjunto das matrizes de rotação no espaço, denotada por $SO_{(3)}$:

$$SO_{(3)} = \{R_{z,\theta}R_{y,\alpha}R_{x,\phi} \mid \theta, \alpha, \phi \in \mathbb{R}\}.$$

Assim como as matrizes de rotações no plano, as matrizes de rotação de ordem 3, nos eixos coordenados, também preservam a norma dos vetores e os ângulos, segue que o produto interno também não se altera com as rotações.

Dessa forma, pode-se fazer a composição de rotações, ou seja, dadas duas rotações de ângulos θ e α em torno do mesmo eixo, o resultado dessa composição será uma rotação com a soma desses ângulos:

$$R_{z,\theta}R_{z,\alpha} = R_{z,\theta+\alpha}.$$

Na forma matricial tem-se:

$$R_{z,\theta+\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \alpha) & \text{sen}(\theta + \alpha) & 0 \\ -\text{sen}(\theta + \alpha) & \cos(\theta + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O mesmo não vale quando se trata de composição de rotações por eixos distintos, ou seja, pelo fato de a multiplicação de matrizes não ser comutativa, as rotações podem ter resultados finais diferentes, como se pode observar na Figura 2.7.

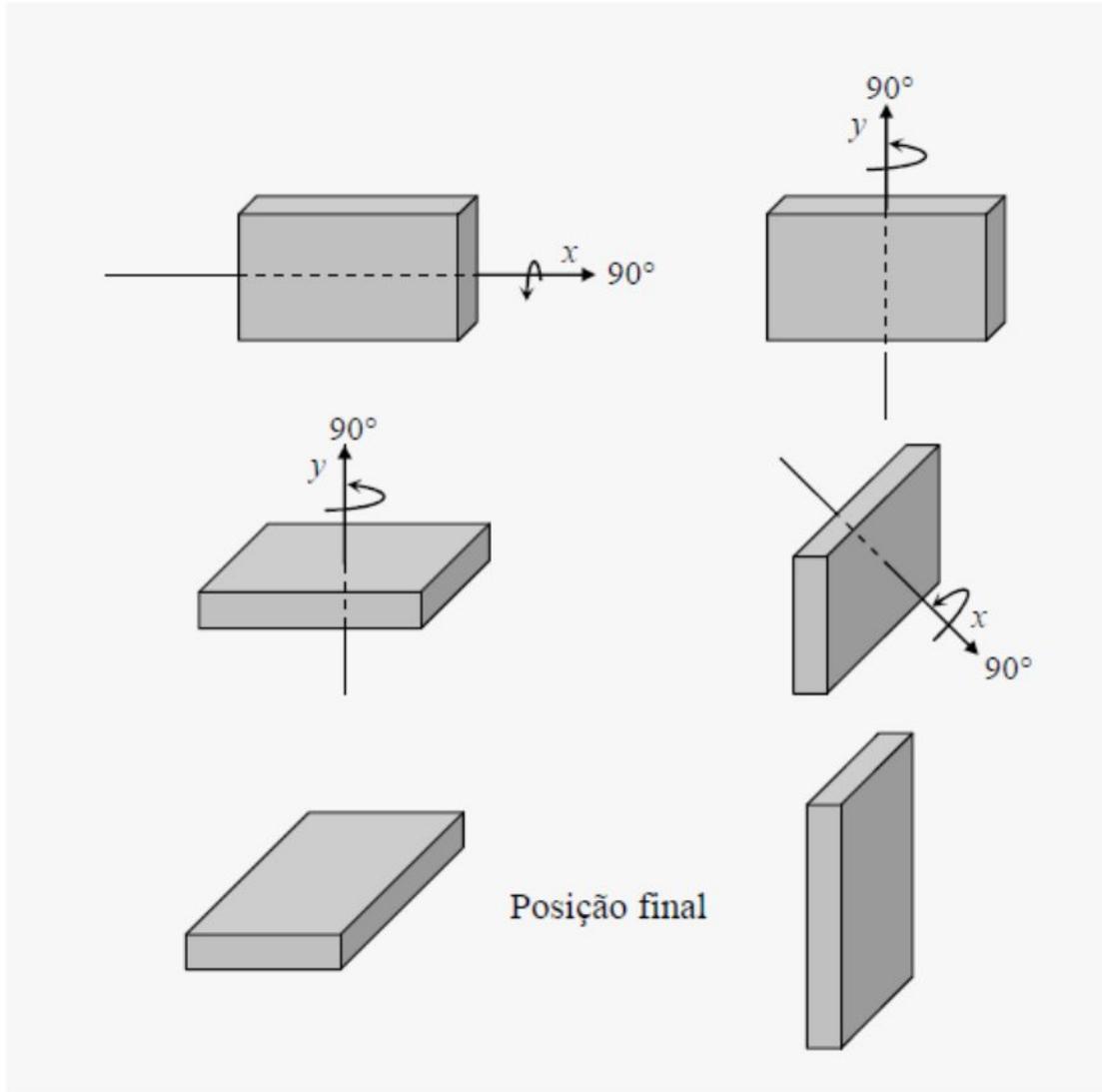


Figura 2.7: Não comutatividade da rotação de um corpo rígido para eixo não fixo.
 Fonte:(ZILIO; BAGNATO, 2002).

Vale ressaltar que no espaço, \mathbb{R}^3 , quando se tem uma sequência de duas rotações, digamos R_1 e R_2 , em que as rotações não são realizadas em um mesmo eixo de coordenadas, o resultado é uma rotação em um eixo, por certo ângulo, porém usualmente, não é um eixo de coordenadas. Neste caso, conforme (PINHEIRO, 2006), tem-se que determinar um operador de rotação para esta sequência, ou seja, um eixo de rotação e o ângulo de rotação nesse eixo.

Para (PINHEIRO, 2006) as matrizes de rotação em \mathbb{R}^3 apresentam duas novas características em relação às matrizes de rotação em \mathbb{R}^2 , são elas:

- Com exceção de alguns casos especiais as rotações em \mathbb{R}^3 não comutam, pelo

fato de que para duas matrizes de rotação R_1 e R_2 , temos $R_1R_2 \neq R_2R_1$, como observado na Figura 2.7,

- As matrizes de rotação em \mathbb{R}^3 tem um autovalor real e, conseqüentemente, todas as matrizes de rotação (e os seus produtos) podem ser escritas em termos de uma matriz de rotação final, que deixa inalterada uma determinada direção fixa. Uma vez que a matriz de rotação R não altera o eixo, esta expressa todas as possíveis rotações por um dado ângulo em uma determinada direção.

A construção desses operadores de rotação em eixos e direções determinadas, estão descritos em (PINHEIRO, 2006), não o faremos aqui, pois, este trabalho tem por objetivo a demonstração das rotações usando Números Quatérnios, o que faremos na próxima seção.

2.3 Movimentos Rígidos com Números Quatérnios

Nesta seção vamos mostrar como são realizadas as rotações utilizando os Números Quatérnios, suas vantagens e desvantagens.

Pelas propriedades dos Quatérnios, vemos que esse conjunto forma um espaço vetorial $(\mathbb{H}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ no corpo dos Reais \mathbb{R} . Além disso, o conjunto dos Quatérnios, \mathbb{H} , é isomorfo a \mathbb{R}^4 e o subconjunto dos quatérnios puros isomorfo ao \mathbb{R}^3 . Assim, é possível fazer transformações no espaço usando Quatérnios.

Assim como a multiplicação de Números Complexos, \mathbb{C} , equivale à rotações de vetores no plano \mathbb{R}^2 , a multiplicação de Quatérnios puros equivale à rotações de vetores no espaço \mathbb{R}^3 . Para tanto, é necessário definir um operador quaterniônico para a rotação no espaço, esse número não pode ser qualquer quatérnio, pois, precisa ser um quatérnio puro, ou seja, um número isomorfo de um vetor de \mathbb{R}^3 .

Para definir tal operador, tomemos três números q, r, p tais que, $q, r \in \mathbb{H}$ e p um quatérnio unitário e puro.

Sabendo que a multiplicação de quatérnios não é comutativa, temos os seguintes resultados:

$$pqr, prq, qrp, rqp, qpr \text{ e } rpq.$$

Conforme (ARAÚJO, 2019), ao fazer as multiplicações desses quatérnios, precisa-se que o resultado seja outro quatérnio puro, o que não ocorre nas quatro primeiras

operações, logo, vamos verificar as duas últimas.

Sejam $q = q_0 + \mathbf{q}$, $r = r_0 + \mathbf{r}$ e $p = 0 + \mathbf{p}$, tem-se que o produto qpr será:

$$\begin{aligned}
 qpr &= (q_0 + \mathbf{q})(0 + \mathbf{p})(r_0 + \mathbf{r}) \\
 &= (q_0\mathbf{p} + \mathbf{qp})(r_0 + \mathbf{r}) \\
 &= [q_0\mathbf{p} + (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})](r_0 + \mathbf{r}) \\
 &= -r_0(\mathbf{qp}) - q_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{q} \times \mathbf{p})\mathbf{r} + \\
 & r_0q_0\mathbf{p} + r_0(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - (\mathbf{qp})\mathbf{r} + q_0(\mathbf{p} \times \mathbf{r}) + (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{r}.
 \end{aligned}$$

Fazendo $qpr = w$, sabe-se pela multiplicação de quatérnios que $w \in \mathbb{H}$, então,

$$-r_0(\mathbf{qp}) - q_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{q} \times \mathbf{p})\mathbf{r} \text{ é parte escalar de } w,$$

e

$r_0q_0\mathbf{p} + r_0(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - (\mathbf{qp})\mathbf{r} + q_0(\mathbf{p} \times \mathbf{r}) + (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{r}$ é a parte vetorial de w .

Precisamos assegurar que w seja um quatérnio puro, $w = 0 + \mathbf{w}$, para tanto segue

$$-r_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) - q_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r} = 0.$$

Nessa condição é necessário que $r_0 = q_0$ e $\mathbf{r} = -\mathbf{q}$, assim,

$$r = r_0 + \mathbf{r} = q_0 - \mathbf{q} = \bar{q},$$

e

$$q = \bar{r}.$$

Para o produto rpq o resultado é análogo.

Logo, o produto de três quatérnios nas condições acima, determinam dois operadores de rotação

$$q\mathbf{p}\bar{q} \quad \text{e} \quad \bar{q}\mathbf{p}q,$$

que resulta em quatérnio puro w sempre que p for quatérnio e puro e $p \in \mathbb{H}_1$.

Sendo que o operador de rotação $q\mathbf{p}\bar{q}$ corresponde à perspectiva de rotação num sistema de coordenadas móvel, enquanto que o produto $\bar{q}\mathbf{p}q$, faz rotações num sistema de coordenadas fixo.

Como o operador de rotação será um Quatérnio, tal que, $q \in \mathbb{H}_1$ e $\|q\| = 1$, pode-se escrever a relação:

$$\begin{aligned} W_q(p) : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ p &\mapsto qp\bar{q}. \end{aligned}$$

Segue um exemplo de aplicação do operador dado por q .

Exemplo 2.1 *Seja o vetor $v \in \mathbb{R}^3$, onde $v = (0, 1, 1)$ e seja $q \in \mathbb{H}$, onde $q = k$. Fazer a rotação do vetor v segundo o operador de rotação dado por q .*

Solução: Sendo $q = k$, pelas propriedades de quatérnios seu conjugado será $\bar{q} = -k$ e sua norma $\|q\| = 1$.

Vamos escrever o vetor v como elemento dos quatérnios, pois, v é isomorfo aos quatérnios puros assim:

$$v = v_0 + \mathbf{v} = 0 + 0i + 1j + 1k.$$

Usando a relação acima aplicada em v , ou seja, $W_q(v)$ e as relações fundamentais da multiplicação dos quatérnios, tem-se:

$$\begin{aligned} W_q(v) &= \bar{q}\mathbf{v}q \\ &= -k(j + k)k \\ &= (-kj - k^2)k \\ &= (i + 1)k \\ &= ik + k \\ &= -j + k. \end{aligned}$$

Assim, $w = 0 + 0 - j + k$, $w \in \mathbb{H}$ é puro, portanto, isomorfo de \mathbb{R}^3 .

Podemos escrever w como um vetor no espaço \mathbb{R}^3 , ou seja, o vetor $v = (0, 1, 1)$ após sofrer a rotação do operador de rotação passa a ser o vetor $w = (0, -1, 1)$ conforme Figura 2.8.

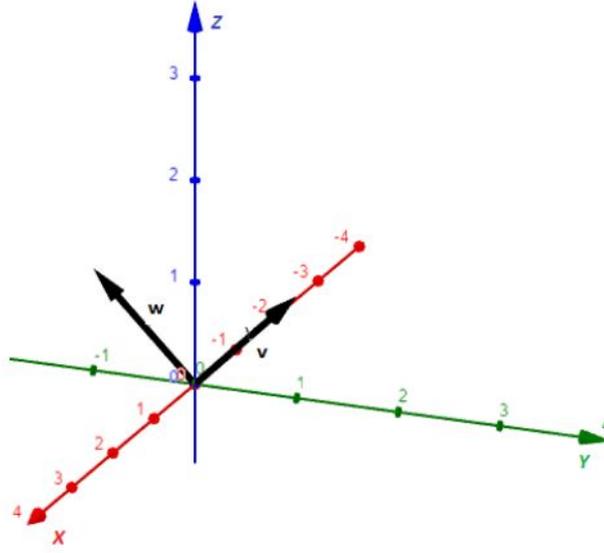


Figura 2.8: Rotação em torno do Eixo Z, com operador quaterniônico.
Fonte: Própria autora.

Assim, o operador dado por q , produz uma rotação em torno do eixo Z , com um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ e portanto, ao definir os operadores com $q = i$, $q = j$ e $q = k$, teremos rotações, respectivamente, em torno dos eixos X , Y e Z , com ângulo de rotação $\frac{\pi}{2}$.

Na sua forma algébrica temos $\mathbf{W}_q(\mathbf{v})$, onde, $q = q_0 + \mathbf{q}$ um quatérnio, tal que $\|q\| = 1$ e $v = 0 + \mathbf{v}$ é um quatérnio e puro, segue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_q(\mathbf{v}) &= qv\bar{q} \\ &= (q_0 + \mathbf{q})(0 + \mathbf{v})(q_0 - \mathbf{q}) \\ &= (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} + q_0^2\mathbf{v} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) - (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Pela igualdade de Grassmman $(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \times \mathbf{r} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p}$, tem-se:

$$\mathbf{W}_q(\mathbf{v}) = (q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2)\mathbf{v} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}). \quad (2.1)$$

A representação do operador $\bar{q}vq$ o procedimento é análogo.

Para garantir que $\mathbf{W}_q(\mathbf{v})$ seja operador linear, que preserve a norma do vetor e represente uma rotação, tem-se o Teorema 2.2.

Teorema 2.2 *Sejam $q = q_0 + \mathbf{q} = \cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta$ um quatérnio unitário com $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$ e $v \in \mathbb{R}^3$. A ação do operador $\mathbf{W}_q(\mathbf{v}) = qv\bar{q}$ em \mathbf{v} pode ser interpretada geometricamente como a rotação do vetor \mathbf{v} em torno de \mathbf{q} como eixo de rotação e segundo um ângulo 2θ .*

Em (ARAUJO, 2019) a demonstração deste teorema foi dividida nos três lemas abaixo:

Lema 2.3 *O operador $Wq(v) = qv\bar{q}$ é linear.*

Lema 2.4 *Seja q um quatérnio unitário. A norma de um vetor de \mathbb{R}^3 não se altera com a aplicação do operador $Wq(v) = qv\bar{q}$.*

Lema 2.5 *O operador $Wq(v) = qv\bar{q}$ representa uma rotação.*

Demonstração: As demonstrações dos Lemas constam em (ARAUJO, 2019). \square

Assim, dado um vetor unitário \mathbf{u} e um ângulo de rotação θ , o quatérnio unitário $q = \cos\theta + \mathbf{u}\text{sen}\theta$ produz um operador de rotação de \mathbf{v} em torno do eixo \mathbf{u} de ângulo 2θ . Como consequência deste teorema tem-se o seguinte corolário.

Corolário 2.6 *Qualquer rotação de ângulo θ em torno de um eixo u , com $\|u\| = 1$; pode ser obtida através de um quatérnio unitário.*

Demonstração: No teorema 2.2, escolhe-se q de modo que $q = \cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{u}\text{sen}\frac{\theta}{2}$. Assim, é obtida a rotação desejada. \square

Exemplo 2.7 *Consideremos uma rotação de ângulo $\frac{\pi}{2}$, em torno do vetor $u = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$. O quatérnio, $q \in \mathbb{H}$, que produzirá o operador de rotação será:*

$$q = \cos\frac{\pi}{4} + \text{sen}\frac{\pi}{4}j = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j.$$

Exemplo 2.8 *Rotacionar o ponto $P = (10, 0, 0)$ em 180 graus em torno do eixo Z .*

Solução: Seja $\overline{OP} = \mathbf{p} = (10, 0, 0) = 10i$. O vetor de rotação em torno de Z será $\mathbf{u} = (0, 0, 1) = k$, o operador de rotação dado por $q = \cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{u}\text{sen}\frac{\theta}{2}$, será $q = \cos\frac{180}{2} + k\text{sen}\frac{180}{2} = \cos 90 + k\text{sen}90 = k$ e seu conjugado $\bar{q} = -k$.

Aplicando o operador de rotação $W_q(p)$,

$$W_q(p) = q\mathbf{p}\bar{q} = k(10i)(-k) = 10ki(-k) = -10jk = -10i.$$

Tem-se o Ponto $P' = (-10, 0, 0)$, após a rotação.

Fazendo uma relação do operador $Wq(v) = qv\bar{q}$ com a álgebra de vetores pode-se definir a matriz de rotação. Conforme (PINHEIRO, 2006), a multiplicação de quatérnios pode ser representada na forma matricial, ou que, $q \in \mathbb{H}$, tal que, $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ pode ser escrito como a combinação de dois complexos $q = z + wj$, onde $z, w \in \mathbb{C}$, assim, conforme o mesmo autor, q poderá ser associado a matriz complexa

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 + q_1i & q_2 + q_3i \\ -q_2 + q_3i & q_0 - q_1i \end{bmatrix}.$$

Porém, quando se trata de multiplicação de quatérnios na sua forma matricial, tem-se que diferenciar entre o produto de p por q à direita pq e à esquerda qp , visto que a multiplicação de matrizes não comuta. De fato,

$$pq = pR(q) = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix},$$

e

$$pq = pL(q) = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}.$$

Assim, ao fazer a multiplicação de pq , conforme (PINHEIRO, 2006), teremos duas matrizes. Para diferenciá-las, usam-se as notações $R(q)$ para multiplicação à direita e $L(q)$ para multiplicação à esquerda.

$$R(q) = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad L(q) = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}.$$

Ainda, $R(\bar{q}) = R(q)^T$. “Dispondo da forma matricial da multiplicação à esquerda por q e à direita por \bar{q} , pode-se, a partir dos quatérnios, gerar uma matriz de rotação associada a uma dada rotação” (PINHEIRO, 2006). Assim, a matriz de rotação corresponde ao produto das duas matrizes, uma vez que, considerando um quatérnio puro v ,

$$W_q(v) = qv\bar{q} = q(v\bar{q}) = q(vR(q)^T) = (vR(q)^T)L(q) = v(R(q)^T L(q)),$$

onde,

$$R(q)^T L(q) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 0 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 0 & 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}.$$

Pelo fato de q ser um quatérnio unitário, logo:

$$R(q)^T L(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 0 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 0 & 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix}.$$

“Uma vez que as duas matrizes $R(q)$ e $L(q)$ são ortogonais” (PINHEIRO, 2006), implica que a matriz $R(q)TL(q)$ seja ortogonal quando q é unitário.

Assim, tem-se a expressão da matriz de rotação R em função de um quatérnio unitário q :

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix}.$$

Verifica-se que a matriz R é ortogonal e o seu determinante é 1 assim, pode-se concluir que R é **uma matriz de rotação**, estabelecendo deste modo a equivalência.

2.3.1 Composição de rotações no Espaço

Como vimos anteriormente, para fazer a composição de rotações por eixos distintos, usando matrizes de rotação, deve-se levar em consideração a ordem dessas rotações, visto que a multiplicação de matrizes não é comutativa.

Vejamos a seguir como fazer a composição de rotações usando Números Quatérnios.

Para somar duas rotações dadas por quatérnios, deve-se fazer a multiplicação entre eles, ou seja, a composição de rotações se faz pela multiplicação dos quatérnios correspondentes, conforme a Proposição a seguir.

Proposição 2.9 *Sejam p e $q \in \mathbb{H}_1$. Uma rotação definida por p e em seguida, por q é equivalente a uma rotação definida por pq .*

Demonstração: Seja $v \in \mathbb{H}$, um quatérnio puro, ou seja, $v = 0 + \mathbf{v}$, então

$$\begin{aligned}
 R_q R_p(v) &= R_q(R_p(v)) & (2.2) \\
 &= R_q(pv\bar{p}) \\
 &= q(pv\bar{p})\bar{q} \\
 &= (qp)v(\overline{qp}) \\
 &= R_{qp}(v).
 \end{aligned}$$

□

Ficando demonstrado que a composição de duas rotações é ainda uma rotação, ou seja, é a rotação correspondente definida pelo quatérnio unitário qp . Podendo generalizar esta propriedade à composição de qualquer número de rotações.

Assim como a rotação por matrizes, neste caso também a ordem das rotações deve ser levada em consideração, visto que, a multiplicação de quatérnios não comuta. $pq \neq qp$.

Exemplo 2.10 *A composição de uma rotação de um vetor v em torno do eixo Y por um ângulo ϕ , seguida de uma rotação em torno do eixo Z por um ângulo θ será dada por:*

Solução: Sejam p e $q \in \mathbb{H}_1$, onde $p = j$ e $q = k$, os quatérnios correspondentes respectivamente aos operadores das rotações em torno de Y e Z . A composição das rotações será, pela Propriedade Fundamental do Produto de Quatérnios, dada por:

$$R_q R_p = qp = kj = -i$$

Exemplo 2.11 *Dada o vetor $u = (10, 0, 0)$ será executada uma rotação de 180 graus em torno do eixo Z , seguida de uma rotação de 90 graus em torno do Y .*

Solução: Sejam $v_1 = (0, 0, 1)$ o vetor de rotação em Z e $v_2 = (0, 1, 0)$ o vetor de rotação em Y , na notação de quatérnios: $v_1 = k$ e $v_2 = j$.

Vamos determinar os operadores das rotações de 180 e 90 graus, respectivamente dados por q e p . Usando a expressão $q = \cos \frac{\theta}{2} + v \sin \frac{\theta}{2}$, temos:

$$q = \cos \frac{180}{2} + v_1 \operatorname{sen} \frac{180}{2} = \cos 90 + k \operatorname{sen} 90 = k,$$

$$p = \cos \frac{90}{2} + v_2 \operatorname{sen} \frac{90}{2} = \cos 45 + j \operatorname{sen} 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Fazendo $w = pq = (p_0q_0 - \mathbf{p}\mathbf{q}) + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}$,

$$w = pq = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}k + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}k,$$

que será o quatérnio que dará o operador para as duas rotações.

Vamos determinar o vetor u' , que será o vetor $u = (10, 0, 0)$, após sofrer as rotações pelo operador $R_w(u)$, para tanto temos:

$$w = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}k,$$

$$\bar{w} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}k,$$

$$u = 10i.$$

$$R_w(u) = wu\bar{w} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}k\right)(10i)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}k\right) = 10k.$$

Assim, o vetor u após sofrer a rotação dupla passa a ser o vetor $u' = (0, 0, 10)$.

Podem-se multiplicar quantos quatérnios forem necessário para produzir um quatérnio que represente uma composição de rotações. No entanto, conforme (PINHEIRO, 2006), algumas observações devem ser levadas em consideração em relação ao inverso e ao simétrico de um número quatérnio, vejamos:

Considere os quatérnios $q \in \mathbb{H}_1$ e $v \in \mathbb{H}$, um quatérnio puro.

- Seja q e, q_1 seu inverso, geometricamente q_1 produz um operador de rotação com o mesmo ângulo que q , porém o eixo tem sentido contrário, ou seja, q_1 realiza uma rotação contrária à de q , o que um faz o outro desfaz.

$$R_q(v) = qvp^{-1} \quad \text{e} \quad R_{q^{-1}}(v) = q^{-1}v(q^{-1})^{-1} = q^{-1}vq,$$

e ainda,

$$Rq^{-1}(Rq(v)) = q^{-1}(qvq^{-1})q = q^{-1}qvq^{-1}q = v.$$

- Seja q e, $-q$ o seu simétrico, verifica-se que:

$$R_{-q}(v) = (-q)v(-q)^{-1} = qvq^{-1} = R_q(v),$$

assim, os quatérnios q e $-q$ representam o mesmo operador de rotação, pois uma rotação de um ângulo ϕ em torno de um eixo v (pelo operador de quatérnio q) pode também ser expressa como uma rotação de um ângulo $-\phi$ em torno do eixo $-v$ (pelo operador de quatérnio $-q$).

2.4 Movimentos Rígidos com Números Quatérnios Duais

Para encerrar este capítulo, vamos mostrar como utilizar o Quatérnios Duais em Movimentos rígidos. Para tanto, tomemos os números $p_0, p_1 \in \mathbb{H}$ e os números $\tilde{q} = q_0 + q_1\epsilon$ e $\tilde{p} = p_0 + p_1\epsilon \in \tilde{\mathbb{H}}$. Conforme (KAVAN et al., 2006), Definimos o operador \tilde{W} tal que,

$$\tilde{W}_{\tilde{q}}(\tilde{p}) = \tilde{q}\tilde{p}\tilde{q}^{-1*}. \quad (2.3)$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} \tilde{q}\tilde{p}\tilde{q}^{-1*} &= (q_0 + q_1\epsilon)(p_0 + p_1\epsilon)q_0^{-1}(1 + q_1q_0^{-1}\epsilon) \\ &= (q_0p_0 + q_0p_1\epsilon + q_1p_0\epsilon)(q_0^{-1} + q_0^{-1}q_1q_0^{-1}\epsilon) \\ &= q_0p_0q_0^{-1} + q_0p_0q_0^{-1}q_1q_0^{-1}\epsilon + q_0p_1q_0^{-1}\epsilon + q_1p_0q_0^{-1}\epsilon. \end{aligned}$$

Para $s \in \tilde{\mathbb{H}}$, $s = s_0 + s_1\epsilon$, onde s_1 é um quatérnio puro. Então:

$$\begin{aligned} \tilde{q}\tilde{s}\tilde{q}^{-1*} &= q_0q_0^{-1} + q_0q_0^{-1}q_1q_0^{-1}\epsilon + q_0s_1q_0^{-1}\epsilon + q_1q_0^{-1}\epsilon \\ &= 1 + (q_0s_1q_0^{-1} + 2q_1q_0^{-1})\epsilon. \end{aligned}$$

Agora, seja o vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, e $g_0, g_1 \in \mathbb{H}$, tal que $2g_1g_0^{-1} = t$, onde t é um quatérnio puro, temos \tilde{g} dado por:

$$\tilde{g} = g_0 + \frac{1}{2}tg_0\epsilon. \quad (2.4)$$

Calculando $W_{\tilde{g}}(\tilde{s})$, teremos:

$$W_{\tilde{g}}(\tilde{s}) = 1 + (g_0s_1g_0^{-1} + t)\epsilon = 1 + T_{R,t}(s_1)\epsilon. \quad (2.5)$$

Assim, definimos o operador para concatenar rotação e translação no espaço usando Quatérnios Duais. Em que $g_0s_1g_0^{-1}$ é o operador de rotação visto na seção anterior, por isso a necessidade de que s_1 seja Quatérnio Unitário.

Portanto, dado um ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, para se calcular o deslocamento $T_{R,t}(P)$ de P por uma rotação de ângulo θ em torno do eixo definido pelo vetor $\mathbf{v} = (x_v, y_v, z_v)$, seguido de uma translação definida pelo vetor $\mathbf{t} = (x_t, y_t, z_t)$, considere os quatérnios duais

$$\tilde{s} = 1 + s\epsilon \quad e \quad \tilde{g} = g + \frac{1}{2}tg\epsilon,$$

em que $s = xi + yj + zk$, $t = x_t i + y_t j + z_t k$ e $g = \cos(\frac{\theta}{2}) + \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \text{sen}(\frac{\theta}{2})$, para calcular $W_{\tilde{g}}(\tilde{s})$.

Exemplo 2.12 Calcular o deslocamento T do Ponto $P = (1, 3, 5)$ por uma rotação de 180 graus em torno do eixo Oy , seguido de uma translação definida pelo vetor $\mathbf{t} = (8, 4, 2)$.

Solução: Como Oy é o eixo de rotação, segue que $v = j$ e $v \in \mathbb{H}$. Então, $g \in \mathbb{H}$ que é dado por: $g = \cos(\frac{\theta}{2}) + \frac{v}{\|v\|} \text{sen}(\frac{\theta}{2})$, será:

$$g = \cos(\frac{\pi}{2}) + j \text{sen}(\frac{\pi}{2}) = j,$$

e

$$g^{-1} = \frac{\bar{g}}{\|g\|} = -j.$$

Escreve-se t como quatérnio, assim $t = 8i + 4j + 2k$, e $\tilde{g} \in \tilde{\mathbb{H}}$, que é dado por:

$$\tilde{g} = g + \frac{1}{2}tg\epsilon.$$

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= j + \frac{1}{2}(8i + 4j + 2k)j\epsilon \\ &= j + (4i + 2j + k)j\epsilon \quad (\text{Propriedade } \mathbb{H}) \\ &= j + (-2 - i + 4k)\epsilon. \end{aligned}$$

O inverso de $\tilde{g} = g_0 + g_1\epsilon = j + (-2 - i + 4k)\epsilon$ será:

$$\tilde{g}^{-1} = g_0^{-1}(1 - g_1g_0^{-1}\epsilon),$$

antes porém, precisamos encontrar $g_0^{-1} = \frac{\bar{g}_0}{\|g_0\|^2}$. Seja $g_0 = j$ então $g_0^{-1} = \frac{-j}{1} = -j$, assim,

$$\begin{aligned}\tilde{g}^{-1} &= -j[1 - (-2 - i + 4k)(-j)\epsilon] \quad (\text{Propriedade } \mathbb{H}) \\ &= -j[1 - (4i + 2j + k)\epsilon] \\ &= -j + j(+4i + 2j + k)\epsilon \quad (\text{Propriedade } \mathbb{H}) \\ &= -j + (-2 + i - 4k)\epsilon.\end{aligned}$$

E o conjugado de \tilde{g}^{-1} será: $(\tilde{g}^{-1})^* = -j - (-2 + i - 4k)\epsilon$.

O vetor referente ao ponto P será $\bar{OP} = (1, 3, 5)$, em Quatérnio será $\mathbf{s} = i + 3j + 5k$, assim

$$\tilde{\mathbf{s}} = 1 + s\epsilon = 1 + (i + 3j + 5k)\epsilon.$$

Agora podemos calcular o operador de rotação e translação

$$W_{\tilde{g}}(\tilde{\mathbf{s}}) = 1 + (g_0 s_1 g_0^{-1} + t)\epsilon.$$

$$\begin{aligned}W_{\tilde{g}}(\tilde{\mathbf{s}}) &= 1 + [j(i + 3j + 5k)(-j)] + (8i + 4j + 2k)\epsilon \\ &= 1 + [(-3 + 5i - k)(-j) + (8i + 4j + 2k)]\epsilon \\ &= 1 + [(-i + 3j - 5k) + (8i + 4j + 2k)]\epsilon \\ &= 1 + (7i + 7j - 3k)\epsilon,\end{aligned}$$

logo $T_{R,t}(s_1) = (7, 7, -3)$ é a solução.

Vimos neste capítulo que é possível fazer rotações e translações no espaço usando quatérnios, pois, estes descrevem a rotação com um único movimento. Simplificando os cálculos e assim, diminuindo o esforço computacional. Conforme (ARAÚJO, 2019), a utilização de quatérnios tem ganhado força na área de computação gráfica, na robótica, rotações de objetos em três dimensões, na medicina por robôs entre outras áreas.

Com uso dos Quatérnios abriu-se um leque de conhecimento que deve ser aproveitado por professores do Ensino Médio, mostrando aos alunos a abrangência dos Números Complexos possibilitando relacionar o uso da Matemática com a vida contemporânea.

O próximo Capítulo será dedicado às atividades que podem ser trabalhadas em sala de aula com alunos dos últimos ans do Ensino Médio.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

Neste capítulo apresentamos algumas atividades em forma de oficina de estudo para serem aplicadas em sala de aula, sobre os conteúdos abordados neste trabalho. Para tanto, pautaremos as aplicações pelas orientações da Secretaria Estadual de Educação do Paraná (Seed-Pr) e pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no que tange ao aprendizado da disciplina de Matemática para o Novo Ensino Médio.

A orientação da (Seed-PR) (PARANÁ, 2008), afirma que a formação matemática do estudante do Ensino Médio deve aprofundar o estudo dos números, de modo a ampliar o conhecimento e domínio deste conteúdo para que o estudante compreenda os Números Complexos e suas operações. Salientando que os Números e a Álgebra sejam compreendidos de forma ampla, para que se analisem e descrevam relações em vários contextos onde se situam as abordagens matemáticas, explorando os significados que possam ser produzidos a partir destes conteúdos.

Em 2018 foram definidas as regras para a implantação do Novo Ensino Médio pelo Ministério da Educação. A Portaria (BRASIL PORTARIA N° 1.432, 2019), estabelece os referenciais para elaboração do Novo Ensino Médio com os eixos estruturantes (Investigação Científica, Processos Criativos, Mediação e Intervenção Sociocultural e Empreendedorismo). Tais eixos visam integrar e integralizar os diferentes arranjos disciplinares, bem como criar oportunidades para que os estudantes vivenciem experiências educativas profundamente associadas à realidade contemporânea.

As atividades abaixo se justificam a medida que a (BNCC), estabeleceu que o Novo Ensino Médio fosse uma nova proposta de ensino-aprendizagem. Seu principal

objetivo, promover um ensino mais significativo, onde o estudante fosse protagonista da própria aprendizagem e que visse na escola um meio de alcançar seus objetivos pessoais e profissionais.

O estudo dos hipercomplexos se integra a esse novo contexto de aprendizagem, visto que, o estudante é exposto à nova era tecnológica a todo instante, seu dia a dia e suas experiências estão voltados para a tecnologia e seu aprendizado não pode ser diferente. A aplicação dos Números Complexos e Quatérnios no contexto tecnológico é uma realidade principalmente em jogos eletrônicos, aminações, robótica entre outras áreas. Justificando assim, o ensino deste conteúdo em sala de aula.

As atividades foram elaboradas para serem trabalhadas com alunos a partir do segundo ano do Ensino Médio ou para estudantes do ensino profissionalizante voltados à tecnologia.

Tais atividades envolvendo Números Complexos e Quatérnios podem ser trabalhadas em sala de aula ou em laboratório de informática.

Oficina A - Números Complexo

Curso: Ensino Médio.

Disciplina: Matemática.

Tema: Números Complexos.

Tempo: 4 horas/aulas.

Conteúdo: Números Complexos e Propriedades, Plano Complexo ou Plano Argand-Gauss e representação vetorial de um Número Complexo.

Recursos: Lousa (giz ou pincel) ou laboratório de informática com uso do software GeoGebra.

Nesta atividade deve-se iniciar com uma explanação sobre os Números Complexos e suas propriedades, de forma que o aluno relembre o conteúdo já estudado. Retomar também a representação de pontos e vetores no plano cartesiano, pois neste momento, ele já estudou estes conteúdos em anos anteriores.

Inicia-se a aula com as atividades a seguir, “Dominó dos Complexos”, “Jogo da Memória” e “Bingo dos Complexos”, que estão disponíveis como sugestão para o ensino de Números Complexos no site do Ministério da Educação no endereço <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=2637>.

Após as atividades, sugerimos aplicar o roteiro que questões abaixo, para fixação

do conteúdo. O primeiro exercício proposto será para fixar as propriedades de soma, produto e conjugado de Números Complexos.

Questão 3.1 *Sejam os números z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$, tais que $z_1 = 5 + 2i$ e $z_2 = 1 + 4i$, faça: Soma: $z_3 = z_1 + z_2$, Produto: $z_4 = z_1 z_2$, os conjugados de z_1, z_2, z_3 e z_4*

Em seguida o aluno terá contato com o plano, o professor deverá explicar sobre par ordenado e representação de Complexos no plano. Nessa atividade será utilizado o plano cartesiano, onde o aluno deverá marcar os pontos referentes ao valores do exercício anterior.

Questão 3.2 *Utilizando os dados da questão anterior construa o Plano Complexo e marque os valores z_1, z_2, z_3, z_4 e seus conjugados.*

No próximo exercício o estudante terá contato com o cálculo de norma de um Número Complexo. Propriedade muito utilizada nas próximas atividades.

Questão 3.3 *Usando dos dados da questão 1 calcule a Norma de z_1 e z_2*

Nesta última questão o professor deve revisar os conceitos de representação vetorial de um Número Complexo no plano.

Questão 3.4 *Faça a representação vetorial no Plano Cartesiano dos números z_1, z_2, z_3 e z_4 .*

As resoluções das questões anteriores podem ser feitas em software matemático, sugerimos a utilização do GeoGebra online, disponível no endereço eletrônico <https://www.geogebra.org/classic>.

Com essa atividade objetivou-se relembrar as principais propriedades de Números Complexos, para que o aluno tenha mais facilidade para entender a próxima atividade.

Oficina B - Números Quatérnios

Curso: Ensino Médio.

Disciplina: Matemática.

Tema: Números Quatérnios.

Tempo: 2 horas/aula.

Conteúdo: Conjunto dos Quatérnios como uma extensão do conjunto dos Números Complexos.

Recursos: Lousa (giz ou pincel) ou laboratório de informática.

O conjunto dos Quatérnios será apresentado aos alunos como a soma de dois números complexos, ou seja, dados z e $w \in \mathbb{C}$ teremos $q = z + wj$ e $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$. Neste momento deverão também ser apresentadas as Leis Fundamentais do Produto de Quatérnios, $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, as relações fundamentais e as definições de conjugado, soma, produto e norma de um quatérnio para que os alunos entendam a atividade proposta. Como o Conjunto dos Quatérnios não é um conteúdo do Ensino Médio o objetivo aqui será de complementar e ampliar a visão do aluno sobre as possibilidades do uso dos Números Complexos e dos Quatérnios.

Questão 3.5 *Sejam os números $q = 1 + 3i + 4j + 2k$ e $p = 2 + 3i + 5j + 1k \in \mathbb{H}$, calcule a Soma de $p + q$, os Produtos pq e qp e dê os conjugados de q e de p .*

Questão 3.6 *Sejam os números $q = 1 + 3i + 4j + 2k$ e $p = 2 + 3i + 5j + 1k \in \mathbb{H}$, calcule a norma de q e de p .*

Oficina C - Rotações com Quatérnios

Curso: Ensino Médio.

Disciplina: Matemática.

Tema: Números Quatérnios.

Tempo: 4 horas/aula Conteúdo: Uso dos Quatérnios para Rotações no espaço.

Recursos: Lousa (giz ou pincel) ou laboratório de informática.

Nesta atividade inicia-se apresentando o número quatérnio como a soma dos componentes escalar e vetorial, $q = q_0 + \mathbf{q}$, onde q_0 é a parte escalar e $\mathbf{q} = q_1i + q_2j + q_3k$, é parte vetorial do número $q \in \mathbb{H}$. Concluindo que q pode ser escrito na forma vetorial $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ como um vetor de \mathbb{R}^4 . Caso q seja um quatérnio puro sua representação vetorial será um vetor do \mathbb{R}^3 $q = (q_1, q_2, q_3)$,

Questão 3.7 *Sejam os números $q = 1 + 3i + 4j + 2k$ e $p = 2 + 3i + 5j + 1k \in \mathbb{H}$. Quais os componentes escalar e vetorial destes números?*

Nesse ponto deve-se explicar para o aluno o que é um operador de rotação e como ele funciona, sem detalhar sua construção. Explicar que o operador tem a função de fazer o movimento do objeto, seja rotação, translação ou ambas. Utilizar o operador $w_p(q) = qp\bar{q}$. Explicar também que os números $q = i$, $q = j$ e $q = k$ correspondem, respectivamente, os eixos cartesianos X, Y e Z .

Questão 3.8 *Seja $p, q \in \mathbb{H}$, $p = 0 + 0i + 1j + 1k$ e $q = 0 + 0i + 0j + 1k$. Fazer a rotação do vetor $\mathbf{p} = (0, 1, 1)$ em torno de $q = k$. Ou seja, rotaciona p em torno do eixo Z*

Solução: Encontrar o conjugado e a norma de $q = k$: $\bar{q} = -k$ e sua norma $\|q\| = 1$.

Seja $p = 0 + 0i + 1j + 1k$, usando o operador $W_q(p) = qp\bar{q}$ e as relações fundamentais dos quatérnios, tem-se:

$$\begin{aligned}W_q(p) &= qp\bar{q} \\&= k(j+k)(-k) \\&= (kj+k^2)(-k) \\&= (i-1)(-k) \\&= -ik+k \\&= -j+k\end{aligned}$$

Portanto, $w \in \mathbb{H}$, onde $w = 0 + 0 - j + k$, observe que w é um quatérnio puro, pois sua parte escalar é nula. Ele dará a posição de p após sofrer a rotação em torno do eixo Z .

Questão 3.9 *Faça a representação gráfica dos pontos correspondentes aos números p e w do exercício anterior.*

Nesta questão, usa-se a forma vetorial dos números q e w , ou seja $p = (0, 1, 1)$ e $w = (0, -1, 1)$. Sugerimos utilizar o Software GeoGebra para fazer a representação dos dois vetores, conforme Figura 3.1.

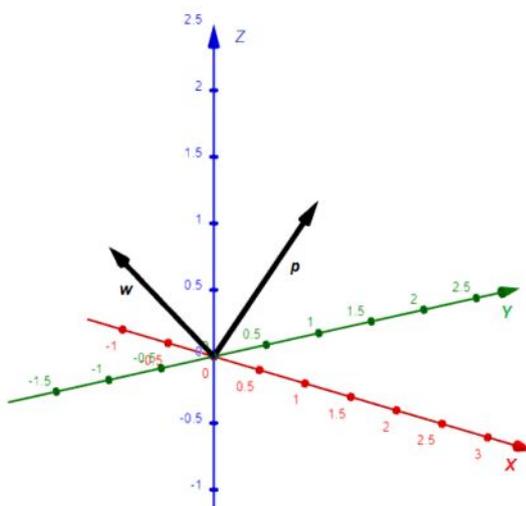


Figura 3.1: Rotação de P, com operador quaterniônico.
Fonte: Própria autora.

Neste trabalho podemos observar as relações entre os Números Complexos e Quatérnios e os movimentos rígidos no espaço, como também a importância desses números para o desenvolvimento de diversas áreas, entre elas, podemos citar os estudos de Cinemática, em movimentos de robôs, animação, monitoramento remoto, no desenvolvimento aerospacial, na medicina entre outras áreas.

Vimos que foram os estudos de Hamilton que possibilitaram a criação da Álgebra dos Quatérnios e por consequência das Álgebras não Comutativas.

Trabalhar rotações com os Quatérnios, evita singularidades nos movimentos, simplificam cálculos em diversas situações, em outros, dão mais perfeição aos movimentos como no caso de animações. Mostrar a importância desses números e onde são usados é uma forma de chamar a atenção dos alunos do Ensino Médio para o estudo dos Números Complexos. As atividades aqui desenvolvidas podem ser trabalhadas tanto no nível médio quanto no nível técnico.

REFERÊNCIAS

- ANTUNES, André. Falha de Rotação no Blender? Entenda o que é Gimbal Lock, Rotação de Euler e Quatérnio. <https://www.youtube.com/watch?v=49DIY4UrhbA&list=PLURpC-1988G6lGIDUqNRgOv5TUg-vdHF>, 2021.
- ARAUJO, Fausto Magno De. Rotações em R^3 e R^4 e a Álgebra dos Quatérnios. Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP), 2019.
- ÁVILA, Geraldo. **Variáveis complexas e aplicações**. [S.l.]: LTC, 2008.
- BARREIRO, Rodrigo Cardoso. Quatérnios, um ensaio sobre a regularidade e hiperperiodicidade de funções quaterniônicas, e o Teorema de Cauchy. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2009.
- BAUMGART, John K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: Álgebra**. [S.l.]: Atual Editora, 1992.
- BRASIL PORTARIA N° 1.432, DE 28 DE DEZEMBRO DE 2018. Estabelece os referenciais para elaboração dos itinerários formativos conforme preveem as Diretrizes Nacionais do Ensino Médio. **Diário Oficial da União, MEC, Publicado em: 05/04/2019, Edição: 66, Seção: 1, Página: 94**, 2019.
- CORREA, Leandro et al. A relação entre rotações, quatérnios e Álgebras de Clifford, 2020.
- CUNHA, Ana Isabel Teixeira da. Aplicação dos Números Complexos na Geometria Plana, 2020.
- FLAMENT, Dominique. William. www.iea.usp.br/noticias/conferencia-resgata-a-pesquisa-de-william-rowan-hamilton, 2017.
- JAMBERSI, Andreyson Bicudo; SILVA, Samuel da. A Sutileza dos Quatérnios no Movimento de Rotação de Corpos Rígidos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 38, n. 2, 2016.

- JANESCH, Oscar Ricardo. Álgebra I, 2011.
- KAVAN, Ladislav et al. Dual quaternions for rigid transformation blending. **Trinity College Dublin, Tech. Rep. TCD-CS-2006-46**, 2006.
- KENWRIGHT, Ben. A beginners guide to dual-quaternions: what they are, how they work, and how to use them for 3D character hierarchies. Citeseer, 2012.
- MARQUES, Vinícius Abrão da Silva et al. Métodos algébricos aplicados ao estudo do movimento de robôs humanoides. Universidade Federal de Uberlândia, 2016.
- NEVES, Robson Coelho. Aplicações de Números Complexos em Geometria, 2014.
- OLIVEIRA, André Schneider de et al. Análise cinemática via quatérnios duais aplicada a um sistema veículo-manipulador subaquático. Florianópolis, SC, 2011.
- PARANÁ, Diretrizes Curriculares da Educação Básica. Matemática. **Secretaria de Estado da Educação do Paraná**, 2008.
- PINHEIRO, Maria Lúcia Gonçalves. **Quatérnios: Cálculo numérico e simbólico**. 2006. Tese (Doutorado).
- SANTOS, Marcos André dos. **Dos números complexos aos quatérnios: desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica e aplicações**. 2013. Diss. (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- ZILIO, SC; BAGNATO, VS. Mecânica, calor e ondas. **São Carlos: Fotônica-IFSC-USP**, 256p, 2002.

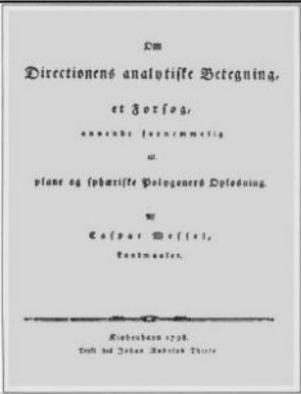
APÊNDICE A

LINHA DO TEMPO

O quadro abaixo, criado por (SANTOS, 2013), é muito interessante, pois, apresenta a linha do tempo com as principais personalidades que contribuíram no desenvolvimento e na construção da teoria dos Números Complexos e dos Quatérnios, destacando suas contribuições.

| NOME | PERSONAGEM | ANO E CONTRIBUIÇÃO |
|---|---|--|
| Nicolo Fontana - Tartáglia (1499-1557) |  | 1539: Tartaglia mostra a Cardano a técnica de resolução de equações do tipo $x^3 + ax = b$, com a e b positivos |
| Gerônimo Cardano (1501-1576) |  | 1545: Cardano publica Ars Magna, a primeira obra a conter métodos de resolução de equações de terceiro e quarto grau e onde aparece pela primeira vez manipulações com raízes quadradas de números negativos |

| | | |
|--|---|---|
| <p>Rafael Bombelli (1526-1572)</p> |  | <p>1572: publica o livro intitulado L'Algebra na qual forneceu a correta solução das equações cúbicas empregando a fórmula de Cardano que envolviam raízes quadradas de números negativos além de descrever a maneira de manipular esse tipo de números</p> |
| <p>Albert Girard. (1595-1632)</p> |  | <p>1629: Foi o primeiro a utilizar o símbolo $\sqrt{-1}$</p> |
| <p>René Descartes (1596-1650)</p> |  | <p>1637: Designa as raízes quadrada de valores negativos, como números imaginários</p> |
| <p>John Wallis (1616-1703)</p> |  | <p>1685: O primeiro matemático a procurar uma interpretação geométrica a raiz de números negativos.</p> |

| | | |
|--|---|--|
| <p>Roger Cotes (1682-1716)</p> |  | <p>1714: Apresenta fórmula $\ln(\cos(\phi) + i\text{sen}(\phi)) = i\phi$</p> |
| <p>Abraham de Moivre (1667-1754)</p> |  | <p>1722: Revela o artifício usado para obter o resultado que implicou na fórmula que leva seu nome,</p> |
| <p>Leonhard Euler (1707-1783)</p> |  | <p>1748: Apresenta a identidade $e^{ix} = \cos(x) + i\text{sen}(x)$</p> |
| <p>Caspar Wessel (1745-1818)</p> |  | <p>1797: Apresenta um método onde propõe uma representação analítica para segmentos de retas no plano e no espaço e na qual aparece pela primeira vez a representação geométrica dos números complexos</p> |

| | | |
|--|---|--|
| <p>Jean Robert Argand (1768 - 1822)</p> |  | <p>1806: Deu uma representação geométrica semelhante a que foi dada por Wessel, porém totalmente independente desse. Argand observa que pode-se representar a multiplicação i por uma rotação de 90°.</p> |
| <p>Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)</p> |  | <p>1831: Escreveu um artigo no qual associava cada número complexo a um único ponto do plano cartesiano. A partir dali a interpretação geométrica, se tornou totalmente aceita.</p> |
| <p>William Rowan Hamilton (1805 – 1865)</p> |  | <p>1833: Apresenta quase tres séculos depois do surgimento da fórmula de Cardano, um artigo no qual formaliza a álgebra dos números complexos.</p> |

APÊNDICE B

IGUALDADE DE GRASSMANN

Proposição B.1 *Dados p, q e $r \in \mathbb{H}$ e puros, tem-se:*

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \times \mathbf{r} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p}.$$

Demonstração: Sendo $\mathbf{p} = p_1i + p_2j + p_3k$, $\mathbf{q} = q_1i + q_2j + q_3k$ e $\mathbf{r} = r_1i + r_2j + r_3k$, então,

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} &= (p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3)(q_1i + q_2j + q_3k) \\ &= (p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3)q_1i + (p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3)q_2j + \\ &\quad + (p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3)q_3k \\ &= p_1r_1q_1i + p_2r_2q_1i + p_3r_3q_1i + p_1r_1q_2j + p_2r_2q_2j + p_3r_3q_2j + \\ &\quad + p_1r_1q_3k + p_2r_2q_3k + p_3r_3q_3k, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p} &= (q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3)(p_1i + p_2j + p_3k) \\ &= (q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3)p_1i + (q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3)p_2j + \\ &\quad + (q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3)p_3k \\ &= q_1r_1p_1i + q_2r_2p_1i + q_3r_3p_1i + q_1r_1p_2j + q_2r_2p_2j + q_3r_3p_2j + \\ &\quad + q_1r_1p_3k + q_2r_2p_3k + q_3r_3p_3k. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p} &= p_1r_1q_1i + p_2r_2q_1i + p_3r_3q_1i + p_1r_1q_2j + p_2r_2q_2j + p_3r_3q_2j + \\
&+ p_1r_1q_3k + p_2r_2q_3k + p_3r_3q_3k - (q_1r_1p_1i + q_2r_2p_1i + q_3r_3p_1i + \\
&+ q_1r_1p_2j + q_2r_2p_2j + q_3r_3p_2j + q_1r_1p_3k + q_2r_2p_3k + q_3r_3p_3k) \\
&= p_2r_2q_1i - q_2r_2p_1i + p_3r_3q_1i - q_3r_3p_1i + \\
&+ p_1r_1q_2j - q_1r_1p_2j + p_3r_3q_2j - q_3r_3p_2j + \\
&+ p_1r_1q_3k - q_1r_1p_3k + p_2r_2q_3k - q_2r_2p_3k \\
&= (p_2q_1 - q_2p_1)r_2i + (p_3q_1 - q_3p_1)r_3i + \\
&+ (p_1q_2 - q_1p_2)r_1j + (p_3q_2 - q_3p_2)r_3j + \\
&+ (p_1q_3 - q_1p_3)r_1k + (p_2q_3 - q_2p_3)r_2k.
\end{aligned}$$

Ajustando os sinais das parcelas, tem-se:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p} &= (p_3q_1 - q_3p_1)r_3i - (q_2p_1 - p_2q_1)r_2i + \\
&+ (p_1q_2 - q_1p_2)r_1j - (q_3p_2 - p_3q_2)r_3j + \\
&+ (p_2q_3 - q_2p_3)r_2k - (q_1p_3 - p_1q_3)r_1k.
\end{aligned}$$

Substituindo i , j e k conforme estabelecido por Hamilton, segue:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p} &= (p_2q_3 - q_2p_3)r_2i \times j + (q_3p_2 - p_3q_2)r_3i \times k + \\
&+ (q_1p_3 - p_1q_3)r_1j \times i + (p_3q_1 - q_3p_1)r_3j \times k + \\
&+ (p_1q_2 - q_1p_2)r_1k \times i + (q_2p_1 - p_2q_1)r_2k \times j \\
&= [(p_2q_3 - q_2p_3)i + (q_1p_3 - p_1q_3)j + (q_2p_1 - p_2q_1)k] \times (r_1i + r_2j + r_3k).
\end{aligned}$$

Repetindo o procedimento acima, no primeiro fator da segunda parte da igualdade obtemos $(\mathbf{p} \times \mathbf{q})$ e o segundo fator é \mathbf{r} , logo:

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p} = (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \times \mathbf{r}.$$

□

APÊNDICE C

EXEMPLOS DO USO DOS QUATÉRNIOS

Uso de Números Quatérnios em animações 3d, tem objetivo de evitar o efeito Gimbal Lock, ou seja a sobreposição dos eixos de rotação, que ocorre quando ao fazer o movimento os eixos de rotação se sobrepõem, na Figura C.1, vemos essa sobreposição, ao rotacionar o objeto em relação ao eixo Y (verde), temos a sobreposição dos eixos X (vermelho) e Z (azul), o que provoca a perda de movimento nesses dois eixos. Esse efeito ocorre também na aviação, o que leva o piloto a ficar sem referencias durante os voos e pode provocar a queda da aeronave.

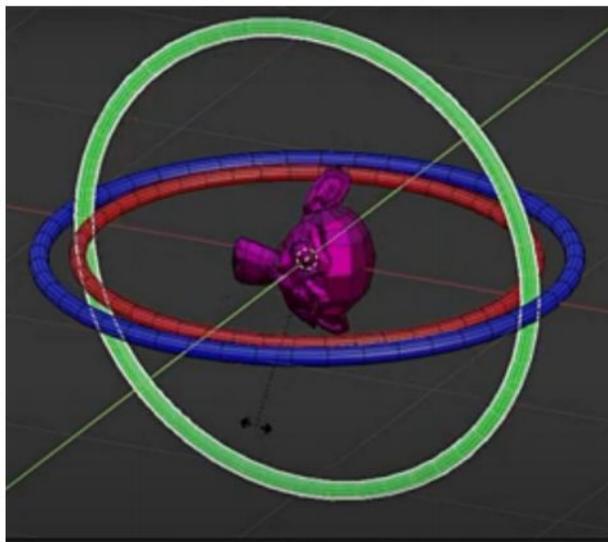


Figura C.1: Gimbal Lock.
Fonte: (ANTUNES, 2021)

O efeito Gimbal Lock provoca o movimento com erro, como no caso da sequencia

abaixo, Figura C.2, onde o braço da personagem faz o movimento para trás.



Figura C.2: Erro de Rotação, devido ao Gimbal Lock.
Fonte: (ANTUNES, 2021)

Uma das soluções encontrada foi utilizar os movimentos gerados por Quatérnios, o qual utiliza um quarto eixo para fazer as rotações, evitando assim, o problema da sobreposição de eixos. Conforme (ANTUNES, 2021), os quatérnios podem ser convertidos para a representação matricial de forma eficiente facilitando assim o processo de concatenação entre interpolações de rotações e translações para o cálculo da posição final de cada vértice do modelo do personagem.

Ainda conforme (ANTUNES, 2021), embora, os quatérnios sejam menos intuitivos que a representação por ângulos de Euler e a operação via Quatérnios, seja mais difícil de implementar e mais dispendiosa em termos de processamento do que a interpolação linear, ainda assim, suas vantagens valem os esforços e por isso a representação de rotações por Quatérnios tem se tornado mais e mais popular entre jogos 3D.

Já o uso de Quatérnios na área de robótica, visa eliminar o Gimbal Lock e principalmente, conforme (MARQUES et al., 2016), para a solução do problema de cinemática inversa de robôs através de geometria algébrica, onde é necessário a aplicação de dual quatérnios para representar o movimento.

O problema cinemático inverso consiste em calcular os valores dos ângulos u_1 e u_2 , conforme Figura C.3 quando a posição do elemento terminal, (Q, Q_0) , já é conhecida.

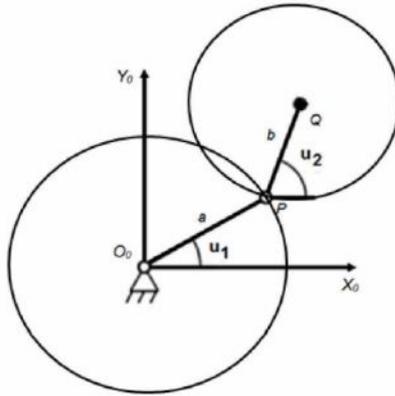


Figura C.3: Esquema de uma estrutura serial 2R plana.
 Fonte: (MARQUES et al., 2016)

Vejamos a seguir o Estudo de Caso, desenvolvido por (OLIVEIRA et al., 2011), utilizando um o veículo autônomo subaquático (AUV) ODIN (Omni Directional Intelligent INavigator), Figura C.4, que é um sistema veículo-manipulador desenvolvido pelo Laboratório de Sistema Autônomos da Universidade do Havaí.

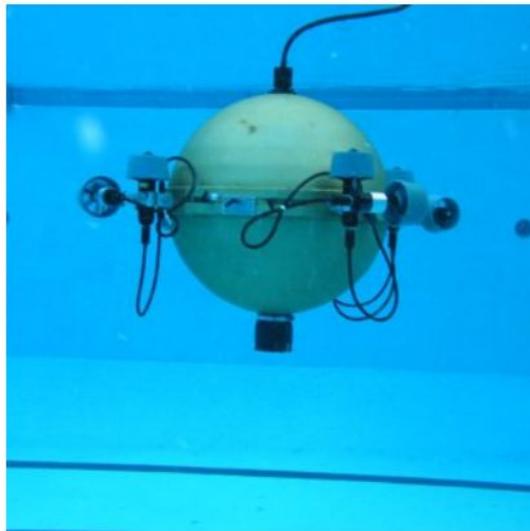


Figura C.4: Odin.
 Fonte: (OLIVEIRA et al., 2011)

O sistema veículo-manipulador ODIN foi empregado em três estudos de caso. Primeiro, foi realizada a determinação da cinemática direta através de Quatérnios Duais. Em seguida, foi avaliado no procedimento iterativo para a cinemática inversa diferencial, utilizando o método de Davies e empregando a realimentação dual-quaterniônica. Por último, foi realizada a determinação da cinemática inversa por

meio do Jacobiano dual quaterniônico, Figura C.5.

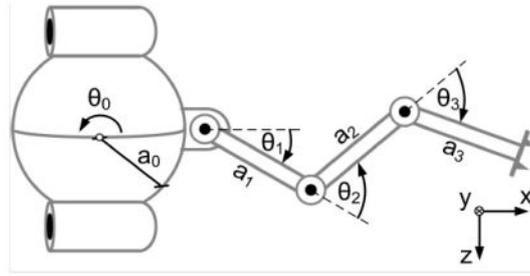


Figura C.5: Modelo Cinemático do UVMS.

Fonte: (OLIVEIRA et al., 2011)

A abordagem quaterniônica foi comparada com o método clássico. As transformações entre os sistemas de coordenadas podem ser representadas através dos quatérnios duais, evitando a ocorrência de singularidades cinemáticas.

Concluiu-se que através da sequência de estudos onde primeiramente, foi realizada a determinação da cinemática direta através de quatérnios duais. Na sequência, foi empregado um procedimento iterativo para a cinemática inversa diferencial, utilizando o método de Davies com realimentação dual-quaterniônica. Por último, foi determinada a cinemática inversa por meio do Jacobiano dual-quaterniônico.

Conforme (OLIVEIRA et al., 2011), em sistemas subaquáticos, onde um fluido envolve todo o veículo e agrega um grande amortecimento ao sistema, a imposição de largas variações de torque pode desestabilizar o sistema. O emprego dos quatérnios duais, devido ao seu comportamento numérico, induz a realização de movimentos lentos e suaves. Isso minimiza o movimento global do sistema e as forças de arrasto induzidas pelo fluido, o que facilita a estabilização do sistema no ambiente subaquático. A ocorrência de erros instantâneos de posição, devido à imposição de picos de torque para garantir o seguimento da trajetória, promove a degradação da solução. O ambiente subaquático amortecesse esses efeitos exigindo a correção adicional do controlador, o que induz grandes erros de postura ao sistema. O emprego de quatérnios duais para a representação dos movimentos diminui significativamente esses efeitos quando comparado ao método clássico via matrizes de transformação homogênea.

Em sistemas redundantes, o uso de quatérnios duais evita a perda momentânea de mobilidade, causada pela manipulação em regiões singulares e minimiza a variação de velocidade na proximidade dessas regiões. Nessa modalidade de sistema, a perda de um grau de liberdade acarreta na transformação de uma junta secundária

em primária, levando a picos na estabilização do sistema. Os quatérnios duais não sofrem essas influências, promovendo um mapeamento suave entre o espaço operacional e o espaço das juntas. Ainda, para o tratamento de sistemas redundantes esta abordagem não necessita de uma aproximação numérica como é necessário no método tradicional, isto é, a utilização da pseudo-inversão. O tratamento é idêntico ao realizado para sistemas não-redundantes.

Nesses dois exemplos fica evidente a importância dos Números Quatérnios para a tecnologia atual, visto que, melhora a qualidade os movimentos, evitando singularidades de rotação.