

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Eduardo Jupi Valerio

Modelos matemáticos para a Covid-19

MARINGÁ
2021

EDUARDO JUPI VALERIO

Modelos matemáticos para a Covid-19

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves

MARINGÁ

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

V164m Valerio, Eduardo Jupi
Modelos matemáticos para a Covid-19 / Eduardo Jupi
Valerio. -- Maringá, 2021.
56 f. : il., color.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática, 2021.

1. Modelos matemáticos. 2. Modelos epidemiológicos.
3. Sistemas de equações diferenciais. 4. Modelo SIR. 5.
Covid-19. 6. Mathematical models. 7. Epidemiological
models. 8. Systems of differential equations. 9. SIR.
I. Neves, Eduardo de Amorim, orient. II. Universidade
Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas.
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 515.35


Edilson Damasio CRB9-1.123

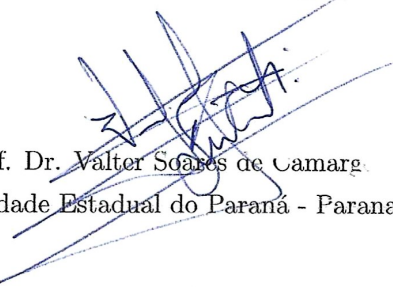
EDUARDO JUPI VALERIO


**MODELOS MATEMÁTICOS PARA A
COVID-19**

Dissertação apresentada ao programa de mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a comissão julgadora composta pelos membros

COMISSÃO JULGADORA:


Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)


Prof. Dr. Valter Soares de Camargo
Universidade Estadual do Paraná - Paranavaí


Prof. Dr. Thiago Fanelli Ferraiol
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 16 de julho de 2021.

Local de defesa: Videoconferência pelo link <https://meet.google.com/kyy-okty-wdh>

Resumo

Neste trabalho apresentamos algumas ideias de modelos matemáticos, como são formados, para que servem e quais as dificuldades em se formá-los. Após essa apresentação, colocamos um breve relato histórico dos modelos matemáticos e alguns dos principais modelos utilizados em pandemia, assim como possíveis variações para estes. Na sequência, mostramos uma comparação entre números de infectados e de óbitos de duas cidades, a capital amazonense Manaus e a cidade paranaense Maringá, pelo período de um ano, março de 2020 a março de 2021. E, para finalizarmos esse trabalho, apresentamos com algumas propostas didáticas com o intuito de serem aplicadas em sala de aula.

Palavras-chave: Modelos matemáticos, Modelos epidemiológicos, sistemas de equações diferenciais, SIR, Covid-19.

Abstract

In this work we present some ideas of mathematical models, how they are formed, what they are for and what are the difficulties in forming them. After this presentation, we present a brief historical account of mathematical models and some of the main models used in pandemics, as well as possible variations for them. Next, we show a comparison between the numbers of infected people and deaths in two cities, the Amazonian capital Manaus and the Paraná city Maringá, for a period of one year, from March 2020 to March 2021. And, to finish this work, we present with some didactic proposals with the intention of being applied in the classroom.

Keywords: Mathematical models, Epidemiological models, systems of differential equations, SIR, Covid-19.

SUMÁRIO

Agradecimentos	x
Introdução	1
1 Modelos Matemáticos	5
1.1 Concepção dos modelos matemáticos	5
1.2 Percalços e limites dos modelos matemáticos	10
2 Modelos matemáticos Epidemiológicos	13
2.1 Uma breve história sobre os modelos epidemiológicos	13
2.2 Conceitos básicos sobre modelos matemáticos epidemiológicos	15
2.3 Modelo SIS	17
2.4 Modelo SIR	21
2.5 Modelo SEIR	27
2.6 Modelos Generalizados	31
2.6.1 Variações no modelo SIR	31
2.6.2 Variações no modelo SEIR	34
3 A real evolução em um ano de covid-19 em duas cidades brasileiras	40

3.1	Comparando os dados da covid-19 em Maringá-PR com Manaus-AM	41
4	Proposta de atividade para sala de aula	48
5	Considerações Finais	55
	Bibliografia	55

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela vida, sabedoria que a cada dia me é dada e pelas alegrias e bençãos que Ele me proporciona.

À minha espoa Isabela por toda participação moral e animadora, sem ela não teria tido ânimo para chegar ao final desse trabalho.

Ao meu filho Thomas por sempre chorar e gritar nos momentos que mais eu precisava de concentração. Brincadeiras a parte, de forma indireta você meu filho, também foi um dos meus maiores motivadores nessa caminhada, obrigado.

Aos meus pais, Claudio e Mara, agradeço a educação e os ensinamentos que me deram e o exemplo que representam para mim. O carinho e amor que vocês dispensam a mim fazem diferença em cada dia da minha vida. Espero que esse título seja, de alguma forma, sua recompensa pelo esforço e dedicação que tiveram ao longo da vida.

Aos meus sogros, Eduardo e Jacqueline, que também sempre me apoiaram e fizeram de tudo para eu poder ter um tempinho de concentração, cuidando do Thomas sempre que possível. Vocês são demais. E um agradecimento especial minha sogra por toda ajuda gramatical.

A todos meus familiares que de alguma forma fizeram parte dessa minha caminhada, minha irmã Juliane, meu cunhado Fábio, minha tia Marisa e meu primo Thiago sempre torcendo muito pelo meu sucesso.

A minha vó, que infelizmente não está mais aqui, mas, está presente em minha

vida todos os dias.

Aos meus amigos que me acompanham a tanto tempo, seja no colégio ou em tempos de universidade, vocês ajudaram a me tornar parte do que sou, em especial quero agradecer ao Tiago Suguiura pelo auxílio inestimável na utilização do programa Latex.

A professora Yana Miranda Borges do IFMA pela colaboração e compartilhamento das informações e dados da Covid-19 em Manaus.

Ao meu orientador Eduardo A. Neves por toda ajuda e paciência comigo nesse período. Por muitas vezes o desânimo e o medo de não conseguir terminar tentaram falar mais alto, mas o fato de ter assumido o compromisso com o professor e sempre tê-lo à disposição tentando me ajudar a desempenhar um trabalho melhor fez com que eu conseguisse chegar ao final.

INTRODUÇÃO

A modelagem matemática está presente em nosso dia a dia muito mais do que possamos perceber. Nos últimos meses, o grande desafio vem sendo encontrar um padrão para o vírus da Covid-19, que, apesar desse trabalho fazer uma análise pelo período de um ano, março de 2020 a março de 2021, até o presente momento em que escrevo a pandemia já matou mais de 500 mil pessoas no Brasil. Não há dúvida do quão grave esse vírus é para a população e como isso é assustador. Mas o que a matemática tem a ver com isso? Não seria obrigação da medicina nos dar as respostas necessárias?

A matemática, assim como as outras ciências, tem como um dos principais objetivos evoluir mecanismos a favor da sociedade, seja ela na tecnologia, meio ambiente ou até mesmo na medicina. Todos os grandes pesquisadores da área da saúde também se apoiam em teorias e resultados que a matemática tem a oferecer, em grande parte, os modelos matemáticos. Sabemos que há muito tempo a modelagem matemática é um dos principais instrumentos no mapeamento de certas doenças que assolam a população.

No caso da pandemia causada pelo coronavírus em 2020, a medida que ocorria o aumento do número de casos pelo mundo, a cada dia cientistas divulgavam novos artigos contendo informações de como o vírus se propagava e de como combatê-lo. Assim a matemática, acompanhada com seus gráficos, modelos de previsão e estatísticas, entrou nos noticiários e com toda essa popularização que começou a

fazer parte do nosso dia a dia, termos como “achatar a curva”, média móvel, taxa de transmissibilidade da epidemia, taxa de letalidade, etc, entrou de vez em nosso vocabulário, mesmo que em muitas vezes não saibamos muito ao certo o significado.

No início da pandemia foram divulgados diversos estudos de previsão do número de contágio, previsões essas que muitas vezes beiravam situações “apocalípticas”, aqui não estou dizendo que os estudos de estimativas estavam erradas, mas a maneira com que foram expostos pelos meios de comunicação, sem tomar os devidos cuidados, ressalvas e observações, ainda mais diante de uma população com baixo nível de conhecimento científico como é a população brasileira, contribuíram por um lado em pressionar os agentes públicos para tomar medidas emergenciais no enfrentamento ao coronavírus, e estes por sua vez apoiado nesses modelos, justificavam suas ações de restrição ou relaxamento do isolamento social, mas por outro lado, quando as previsões dos modelos matemáticos não eram compatíveis com a realidade, isso levava parte da população ao descrédito da ciência, teorias conspiratórias e conseqüentemente com ações que expõem a população ao vírus.

O fato é que fazer uma modelagem matemática para um fenômeno que está ainda em curso, e que medidas políticas interferem diretamente no objeto de estudo, em outras palavras o dinamismo e o caminho de incertezas dificultou e dificulta em muito uma estratégia ou um modelo que retrate bem o comportamento dessa pandemia. A questão que se pode colocar aqui é:

Se o contágio tivesse probabilidade igual para todos, por qual razão o Brasil foi o país mais atingido? Por qual razão as classes pobres, morreram proporcionalmente mais que as classes ricas? Por qual razão cidades Bolsonaroístas tiveram proporcionalmente o maior contágio?

Essas perguntas nos levam a perceber que o coronavírus e conseqüentemente a doença covid-19 é um fenômeno não só biológico mas também social. Ao passar dos meses, a falta organização com relação as políticas públicas, os desencontros de informações e maus exemplos por parte das autoridades brasileiras, os discursos negacionistas com relação a ciência, levaram parte da população a enfraquecerem as orientações da Organização mundial da saúde (OMS), o que contribuiu para o surgimento de novas variantes, estas por sua vez mais transmissível, atingindo assim não somente os idosos ou pessoas com comorbidades mas a população em geral

começou passaram a ser vítimas desse vírus, o que naturalmente passou a expor a fragilidade de alguns modelos matemáticos, ou seja, os modelos têm que serem vistos como possíveis cenários, mas não como verdades absolutas como frequentemente meios de comunicações noticiam.

Nesse sentido, essa dissertação tenta trazer uma discussão de como devemos lidar com os modelos matemáticos, afim de conscientizar a leitor sobre os limites e cuidados que devemos ter ao fazer e analisar os modelos matemáticos. Além disso, apresentaremos os modelos epidemiológico do tipo compartimental SIR (Suscetível, Infectado e Recuperado), e generalizações deste.

Assim, o objetivo desse trabalho é, trazer ao leitor alguns dos modelos matemáticos utilizados na área da saúde. Para isso, além de uma apresentação e uma visão geral do que são esses modelos matemáticos e os principais objetivos a serem alcançados quando se pretende construir um modelo, presente no primeiro capítulo, este trabalho traz uma contextualização de situações já vivenciadas as quais a intervenção de conceitos e modelos matemáticos fizeram diferença no combate de doenças que assolaram a população.

No segundo capítulo, trazemos além dos conceitos básicos de um modelo matemático epidemiológico, o que é o modelo SIS, SIR e SEIR. Claro que, podem haver outros modelos, ou até mesmo, variações dentro desses modelos, questões também trabalhadas ao fim deste capítulo, na intenção de deixar livre a inclusão de novas variáveis em modelo, porém, apesar de aumentar a precisão da pesquisa com um número maior de variáveis, é preciso ter cuidado com essa quantidade de valores, pois, quanto mais variáveis, maior é dificuldade de concluir o modelo, o que muitas vezes pode tornar-se inviável a elaboração desse estudo.

Em seguida, no terceiro capítulo, foi feita uma análise comparativa através de gráficos, com as cidades de Maringá, no estado do Paraná, e a cidade de Manaus, no estado do Amazonas. A ideia dessa comparação é perceber que mesmo com a diferença populacional, ou até mesmo das estruturas hospitalares, o impacto da pandemia é muito parecido nas cidades em termos de pessoas contaminadas quando feita as proporções.

E, para finalizar, propomos 3 atividades para sala de aula, nem sempre com o rigor matemático como objetivo, mas, acima de tudo a conscientização da importân-

cia da ciência em nossas vidas. Assim, espera-se que o aluno possa perceber como a matemática participa ativamente de problemas, não apenas da área de engenharia ou financeira, mas, ela tem sua participação na medicina e acima de tudo, no desenvolvimento de novas tecnologias da saúde que ajudam a prevenção e combate a pandemias como estamos a viver.

“Você já pensou na semelhança que há entre os cientistas e os pescadores? O pescador está diante das águas do rio. E ele sabe que nas funduras daquela água nadam peixes que não são vistos. Mas ele quer pegar esses peixes. O que ele faz? Ele tece redes, lança-as no rio e pesca os peixes. Se as malhas forem largas, vêm peixes grandes. Se as malhas forem apertadas, vêm também peixes pequenos... O cientista está diante do mar chamado “realidade”. Ele também quer pescar peixes. Prepara então suas redes, chamadas “teorias”, lança-as no mar e pesca seus peixes. O laboratório de um cientista são as redes que ele lança no mar da realidade para pescar conhecimento.” (ALVES, 2007)

No presente capítulo vamos trazer uma breve discussão sobre o que se entende por um modelo matemático, para que serve, quais são seus limites e quais cuidados deve-se ter para fazer um bom modelo matemático. Essa discussão será de grande valia, quando analisarmos os modelos epidemiológicos da covid-19.

1.1 Concepção dos modelos matemáticos

Se fosse perguntado para uma pessoa, o que é um modelo matemático, acredito que há uma grande chance de surgir, em um primeiro momento, a ideia de uma fórmula que possui alguns parâmetros (variáveis), sendo que, ao atribuímos valores (normalmente numéricos, mas não necessariamente) para esses parâmetros, essa fórmula irá fornecer um resposta (normalmente um número ou função).

Desta forma é provável que os primeiros exemplos que surgem na mente sejam aqueles que aprendemos no ensino médio, relacionados a física newtoniana de tempo e espaço:

Um objeto está em movimento retilíneo e uniforme, com sua posição inicial s_0 e velocidade constante v . Utilizando a fórmula $s = s_0 + vt$, podemos prever qual será a posição do objeto passado um tempo t .

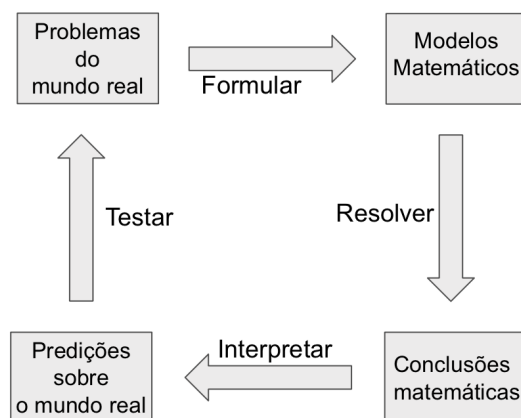
Porém, note quantas hipóteses simplificadoras foram consideradas para que essa fórmula possa descrever como esse objeto se comporta ao longo do tempo. De fato, será que existe um objeto que se mova perfeitamente em modo retilíneo, e que não tenha nenhuma força externa agindo sobre ele? Nesse caso cabe até uma provocação:

“Foi encontrado um modelo matemático para o fenômeno observado ou foi encontrado um fenômeno para o modelo matemático criado?”

Um aprofundamento sobre essa ideia, que tange um modelo matemático afim de defini-lo, é normalmente apresentado nos cursos de cálculo (salvo pequenas variações, dependendo da bibliografia utilizada), sendo, em essência é, definido por:

“um modelo matemático é uma descrição matemática (frequentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real(...) O propósito do modelo é entender o fenômeno e talvez fazer previsões sobre o comportamento futuro.” (STEWART, 2006).

Figura 1.1: Processo de modelagem matemática



Fonte: Autor

A figura 1.1 ilustra o processo de modelagem matemática. Note que, segundo Stewart, o início desse processo é motivado com um “problema do mundo real”. Todavia muitas vezes, trabalhar com modelagem de problemas do “mundo abstrato”, auxilia no entendimento da modelagem de problemas do mundo real. O próprio exemplo que mencionamos no início, referente a modelagem do movimento retilíneo uniforme é um desses casos.

A questão aqui é que o primeiro passo para realizar uma modelagem matemática é a identificação das variáveis dependentes e independentes e a realização de simplificações adequadas afim de tornar o problema matematicamente realizável.

Tendo formulado em linguagem matemática o fenômeno a ser estudado, o processo agora é aplicar a matemática disponível e conhecida para resolver esse problema que, nesse instante, é estritamente matemático, no intuito de obter conclusões numéricas, gráficas ou de outra natureza matemática. No terceiro estágio do diagrama, procedemos com as interpretações dos resultados matemáticos encontrados na linguagem adequada do objeto de estudo. A última etapa é testar as previsões do modelo à luz do que acontece no mundo real.

Para Davis e Hersh, o mérito ou validade de um modelo depende:

“(...) da racionalidade ou plausibilidade do que foi assumido na primeira etapa, (...), da praticabilidade do modelo, da possibilidade de serem efetuadas, no passo 2, operações matemáticas que conduzam a conclusões novas e pertinentes; e finalmente, no passo 3, da adequabilidade dos resultados, i.e., do grau em que os resultados teóricos concordam com os dados do mundo real.” (DAVIS; HERSH, 1988)

Neste processo estão implícitos os objetivos procurados com a construção de modelos:

1. prever, com certo grau de precisão, os fenômenos do mundo físico;
2. influenciar a experimentação ou as observações posteriores;
3. ampliar a compreensão conceitual;
4. auxiliar a axiomatização da situação física.

A citação de Davis e Hersh, ao analisar o processo de modelagem matemática de Newton para descrever o movimento planetário, realça esses objetivos na construção de modelos matemáticos.

“Sob a hipótese simplificadora de um sol e de um planeta, Newton conseguiu demonstrar matematicamente que o planeta descreverá uma órbita que obedecerá às três leis inferidas por Kepler a partir do estudo de uma quantidade considerável de observações astronômicas.” (DAVIS; HERSH, 1986).

Perceba que, tendo um bom modelo em mãos, é possível ampliar a compreensão ou fazer previsões sobre o fenômeno a ser estudado, mesmo sem realizar a experimentação ou observação *In loco*. Esse fato propicia uma ótima vantagem em várias dimensões de recursos (tempo, dinheiro, material, etc) e, em alguns casos, possibilita estudar fenômenos que por razões físicas, tecnológicas ou éticas seria impossível estudá-los.

Todavia, um modelo matemático é construído a partir de um recorte da realidade, de uma observação parcial e com métodos que procuram tratar desse recorte de forma objetiva. Isso contrasta com as soluções matemáticas dos modelos que são, dentro da própria teoria matemática, precisas e exatas. Segundo Stewart:

“Um modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física - é uma idealização. Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, uma boa precisão suficiente para conclusões apreciáveis. É importante entender as limitações do modelo. A palavra final está com a mãe natureza” (STEWART, 2006).

Assim sendo, nenhum modelo tem a vocação de adivinhar como uma “bola de cristal” a curva futura com precisão. Apesar disso, a ciência consegue, de modo geral, apontar como uma bússola, uma direção mais adequada e assertiva. Neste sentido, quando consideramos a realidade objetiva, cabe a questão:

Em que medida a solução exata encontrada para o recorte feito reflete a solução aproximada do problema original?

Esta é a tarefa da discussão epistemológica em modelagem matemática. Essa discussão, em geral, ainda é pouco realizada. Nós matemáticos, raramente afirmamos por escrito nosso ceticismo a respeito da matemática. Ao contrário dos filósofos

e dos críticos literários, os matemáticos não gostam de controvérsias. (Um exemplo famoso foi o de Gauss, quando escondeu sua descoberta da geometria não-euclidiana, porque temia despertar o clamor dos “beócios”.)

O que se propaga, majoritariamente, ainda são os ideais de pureza, exatidão e de infalibilidade da matemática, como transcendente à própria realidade.

Mesmo as discussões epistemológicas, quando realizadas, carregam uma ideia de que os modelos têm, de fato, uma capacidade intrínseca de extrair da realidade o que é essencial e de ser preciso na determinação da própria realidade. Cria-se assim uma primazia da epistemologia (da forma de conhecer) sobre a ontologia (da realidade objetiva). Singulariza-se aquilo que é universal e depois se universaliza aquilo que foi visto como singular. A matemática vista assim, sem dialética, passa a ter um alto poder de formatação.

Como superar o dilema entre o universal e o singular? Como lidar com o poder de formatação idealizada da realidade? Para Lukács ([LUKÁCS, 1978](#)), singular e universal são categorias que, para serem expressas enquanto características da realidade objetiva, necessitam sempre ser dialeticamente mediadas. Este é o papel da particularidade.

É interessante perceber que a dialética sempre esteve presente, ao longo da história, no desenvolvimento das teorias físicas, químicas, biológicas, econômicas, entre outras.

De fato, essas teorias podem mudar ou serem modificadas. Como exemplo, podemos citar a mecânica newtoniana versus a mecânica einsteiniana ou ainda versus a mecânica quântica. No campo químico-biológico, de tempos em tempos, são publicados novos estudos sobre a causa e efeito de certos medicamentos, refutando ou confirmando a teoria vigente.

Além disso, frequentemente podem haver teorias competindo umas com as outras. Isto se deve a diversos fatores: uma variável ou fenômeno não percebido, erros laboratoriais, falta de instrumentos adequados ou tecnologia, mais ainda, pode ser que a matemática disponível no presente seja insuficiente ou inadequada para tratar a teoria em seu sentido mais amplo, a saber, seria impossível desenvolver a teoria da relatividade geral, sem antes ter desenvolvido uma geometria mais geral que a euclidiana. Nesse caso específico a geometria desenvolvida foi a riemanniana.

Apesar de não considerarmos os modelos como descritores ou regentes da realidade, entendemos que eles são formas objetivas e importantes para medir nossas relações com problemas concretos.

Assim pretendemos compreender os modelos utilizados para:

1. Identificar suas limitações e propor formas de superá-las ,tratando os modelos e a realidade de forma dialética;
2. Contribuir concretamente para conhecer algumas dimensões da pandemia e propor formas de enfrentamento;
3. Desmistificar o conhecimento científico: não o compreendemos como verdade absoluta, mas não descartamos sua objetividade;
4. Identificar discursos de pessoas que se aproveitam do poder normatizador da matemática para lançar suas intenções político-ideológicas.

Finalizamos nossa discussão, expondo nossa concepção de um modelo matemático

“um modelo matemático é qualquer conjunto de equações ou estruturas matemáticas, completo e consistente, que é elaborado para responder a alguma outra entidade do seu protótipo que pode ser uma entidade física, biológica, social, psicológica ou conceitual, talvez mesmo outro modelo matemático.” (DAVIS; HERSH, 1986).

1.2 Percalços e limites dos modelos matemáticos

Como mencionamos anteriormente um modelo matemático é construído através de um recorte da realidade. Nesse sentido ele nunca será completo, infalível, exato. O estatístico britânico George Box disse certa vez:

“all models are wrong, but some are useful” (“todos modelos estão errados, mas alguns são úteis”).

Apesar de não considerarmos os modelos como descritores ou regentes da realidade, entendemos que eles são formas objetivas e importantes para medir nossas relações com o problema real.

Nosso entendimento sobre os limites dos modelos são as dimensões do problema que não são possíveis de se observar, lacuna essa que sempre ficará vazia, sem mesmo sabermos qual lacuna é. Já os percalços são problemas que ocorrem e dificultam a modelagem, mas são contornáveis, sendo possível modificá-los e assim ajustar o modelo.

Vamos listar e discorrer, em linhas gerais e de modo superficial, sobre algumas dificuldades que, de certa forma, impedem limites de precisão e viabilidade para os modelos matemáticos.

Dividimos esses itens, quanto natureza em humana, metodológica, tecnológica, ética e matemática.

1. **Humana:** Como a modelagem é ainda uma tarefa realizada por humanos, essa passível de erros, imprecisões, e suposições de premissas inverídicas, os famosos erros de “pensamento linear”, a extrapolação do caso local/particular para o global/genérico ou, ainda, alguma variável que tenha sido percebida. Esses são problemas comuns que ocorrem quando se tenta modelar um fenômeno, porém eles podem ser contornados, quando submetido ao crivo de outros pesquisadores. Entretanto, quando isso não é percebido, somente a realidade irá mostrar que o modelo não está bem ajustado.
2. **Metodológica:** Para fazer um modelo matemático, é necessário, antes de tudo, um método para observar e aferir o fenômeno de estudo. O que pode acontecer é que simplesmente não exista uma metodologia adequada e a questão que fica é como saber se a metodologia escolhida ou disponível é a ideal? Isso não é um impeditivo para a construção de um modelo, mas um limitante para ele.
3. **Tecnológica:** Quando não se dispõem ou não existe um equipamento adequado para fazer o experimento ou estudo do objeto de pesquisa, isso irá comprometer a qualidade dos dados. Sendo assim temos um problema de precisão no caso de um equipamento inadequado ou uma inviabilidade do modelo no caso da inexistência de uma possível coleta dos dados.
4. **Ética:** Quando se pretende pesquisar em algumas das subáreas biológicas ou sociais, as pesquisas normalmente tem que passar por um comitê de ética,

pois, possivelmente, envolvem estudo com animais e seres humanos. Nesse caso as restrições e permissões desse comitê irão interferir na escolha de uma boa metodologia de estudo, o que, conseqüentemente, irá interferir no modelo matemático.

5. **Matemática:** Pode acontecer de que a matemática disponível não seja suficiente para compreender a dinâmica e o padrão do objeto de pesquisa. Talvez falte uma nova álgebra ou geometria ou aquele teorema, que ainda é apenas uma conjectura.

Possivelmente há outros fatores além desses que mostram que os modelos matemáticos não são infalíveis e que devemos ter essa análise crítica quando nos forem apresentados como verdades absolutas.

Nos próximos capítulos, vamos afunilar nossa discussão para modelos matemáticos epidemiológicos e para as análises estatísticas da covid-19.

CAPÍTULO 2

MODELOS MATEMÁTICOS EPIDEMIOLÓGICOS

“A epidemiologia matemática consiste em estabelecer, a partir de observações do fenômeno epidêmico, hipóteses para quantificar os conhecimentos biológicos a respeito da dinâmica de transmissão de infecções, e analisar o modelo resultante.” (YANG, 2001).

Neste capítulo vamos apresentar três modelos matemáticos aplicados a epidemiologia, conhecido como *modelos compartimentais*. Seguiremos bem de perto os artigos (ABREU, 2020), (MARQUESONE, 2020) e (LUIZ, 2012).

2.1 Uma breve história sobre os modelos epidemiológicos

Há muito tempo a disseminação de doenças tem sido alvo de relatórios e estudos científicos. O principal objetivo é tentar encontrar um padrão no qual seja possível fazer previsões e antecipar a cura (se possível) ou simplesmente combater e tentar erradicá-las da sociedade. O precursor nesta área foi o cientista Jhon Graunt (Natural and Political Observations made upon the Bills of) que, em sua obra de 1662, baseou-se nas mortes publicadas semanalmente. Hamer, em 1906, analisou casos nos quais a taxa de transmissão da doença ocorria por meio de contato entre indivíduos suscetíveis e indivíduos infectados, conhecido como Lei de Ação das Massas. Na mesma época, Ronald Ross fez um estudo sobre a malária para mostrar que sua

transmissão se dava pela picada de um mosquito contaminado, e mais adiante, em 1908, elaborou um modelo matemático mais detalhado para o estudo de tal doença.

Dentro da Matemática, o primeiro a realizar uma modelagem para o avanço de doenças infecciosas foi Daniel Bernoulli, em 1766. Seus estudos foram para mostrar a importância de introduzir ou desenvolver uma vacina contra a varíola, gerando uma expectativa de vida maior para a população.

Essa imensa necessidade de tentar entender a proliferação de tantas doenças infecciosas, como a peste negra, no século XIV, e até a pandemia da gripe que matou cerca de 20 milhões no mundo, entre outras, que, no montante geral, nos dá números não atingidos no somatório de todas as guerras. Assim, diante de todo esse cenário, surgiu uma nova área de estudo na Matemática, chamada de Epidemiologia Matemática, a qual propõe modelos que nos ajude a criar políticas, campanhas, vacinas e o que mais for preciso para o controle e, se possível, a erradicação destas doenças.

Em 1927, foi proposto pelos matemático Kermack e Mckendrick ([KERMACK; MCKENDRICK, 1927](#)) o modelo SIR (Suscetível – Infectado – Recuperado) , que permite analisar alguns comportamentos dessas doenças e também nos mostra como o fim de uma epidemia pode ser o resultado de uma relação particular entre a densidade populacional e as taxas de transmissão da doença, de recuperação e de mortalidade. Esse tipo de modelo ficou conhecido como modelo compartimental (ou de classes), posto que cada indivíduo da população pertence a um e apenas um dos compartimentos, dependendo em qual estado esse indivíduo se encontra. Além disso, esse tipo de modelo permite adicionar outros compartimentos, conforme a doença infecciosa que está sendo estudada e de quais dimensões do problema são de interesse do pesquisador, (veremos mais adiante como generalizar o modelo SIR).

As doenças infecciosas podem ocorrer de duas formas: por transmissão indireta ou transmissão direta. A primeira é aquela que depende de um vetor transmissor infectado, como por exemplo, um mosquito. Já a transmissão direta se dá por meio do contato físico ou proximidade entre indivíduos sadios e indivíduos infectados. Essa relação é baseada na Lei da Ação das Massas, princípio estudado em cinética química que afirma que a velocidade de uma reação é diretamente proporcional às concentrações dos reagentes, ou seja, desde que uma partícula se movimente,

ela tem a mesma chance de encontrar com as demais. A aplicação dessa Lei à modelagem matemática é que, como a transmissão ocorre com o encontro entre indivíduos suscetíveis e infectados, a variação de indivíduos suscetíveis é proporcional ao número de indivíduos infectados.

Vale lembrar aqui um dos exemplos mais clássicos que ocorreu na Inglaterra em 1854, quando uma cidade passou por um forte surto de cólera, a qual acreditava-se que a disseminação acontecia através do ar. John Snow, um renomado médico inglês não se convenceu e foi atrás de melhores explicações. Fez então um mapeamento na cidade dos casos registrados da doença, e, com o auxílio do diagrama de Voronoi, conseguiu determinar o local com maior incidência de casos, que em comum, as pessoas retiravam água do mesmo poço. Constatou-se após algumas investigações que, devido a precárias condições de saneamento, uma das fossas estava perto demais deste poço, o que fez com que as fezes contaminassem a água e conseqüentemente quem usufruía dessa fosse contaminado. Claro que sempre existe a exceção a regra: nesse bairro havia uma cervejaria e nenhum de seus funcionários foi contaminado pela doença, o que, após algumas análises, concluiu-se que a cerveja, por ser uma bebida fermentada e os funcionários poderem beber à vontade, impediu que estes fossem contaminados.

2.2 Conceitos básicos sobre modelos matemáticos epidemiológicos

Antes de iniciarmos com os modelos compartimentais, precisamos introduzir algumas nomenclaturas e conceitos de epidemiologia.

A palavra epidemiologia vem do grego, “epi=*sobre*”, “demios=*população*” e “logos=*estudo*”. Desta forma, epidemiologia é entendida como o estudo das doenças infecciosas que atingem a população humana, ou ainda, de uma forma mais ampla, seres vivos em geral.

Mas afinal o que são essas doenças infecciosas? São doenças que contém um agente microbiano patogênico. Esse agente pode ser: vírus, bactérias, fungos, parasitas e outros. As doenças infecciosas possuem alguns tipos, entre eles, as contagiosas, transmitidas de indivíduo para indivíduo, seja de forma direta ou indireta.

Essas formas de contágio podem ser classificadas como horizontal (contato direto, contato indireto, vias aéreas, vetores ou também por água e alimentos contaminados) ou de forma vertical, quando a transmissão se dá através da mãe para o filho, que pode ocorrer na placenta, no nascimento ou no leite materno.

Assim, de acordo com o trabalho de Vamos listar algumas nomenclaturas que usaremos no decorrer do texto:

- **Suscetíveis:** pessoas que podem, em algum momento, ser infectada;
- **Infectados:** pessoas infectadas e capazes de transmitir a doença;
- **Recuperados:** pessoas não capazes de transmitir mais a doença, seja ela recuperada da infecção ou os casos de óbitos pela doença.

Outros termos importantes que vale destacar são:

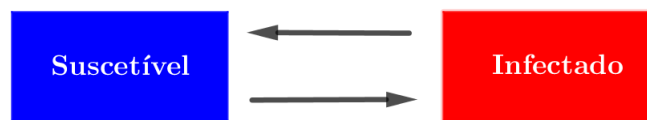
- **Período Latente:** caracteriza-se pelo período em que o indivíduo está com a doença mas não apresenta sintomas, período de evolução clínica da doença;
- **Período de Incubação:** é o tempo que o agente infeccioso leva para se reproduzir até o aparecimento dos sintomas;
- **Incidência:** é a proporção do número de indivíduos que adoecem durante um intervalo de tempo pelo total da população. Na maioria das vezes, ignora-se os casos suspeitos, o que acaba subestimando o verdadeiro valor de incidência;
- **Prevalência:** é a proporção daqueles que têm a doença por um intervalo de tempo pela população total;
- **O número básico de reprodutibilidade da doença, R_0 :** é, por definição, o número de indivíduos infectados secundários produzidos por um único infectado, introduzido em uma população totalmente suscetível.
- **Proporção dos casos fatais:** taxa de óbitos em relação àqueles que contraíram a doença;
- **Mortalidade induzida pela doença:** número de óbitos em um determinado intervalo de tempo pelo total da população;

- **Taxa de letalidade:** é a razão entre o número total de infectados pelo número total de óbitos;
- **Taxa de contato:** Medida de frequência de encontro entre indivíduos suscetíveis e infectados;
- **Transmissão:** é a passagem do agente infeccioso de um fonte para um novo hospedeiro;
- **Vacinação:** é o processo de imunização dos indivíduos suscetíveis a terem a doença.

2.3 Modelo SIS

O modelo suscetível-infectado-suscetível (SIS) é o modelo epidemiológico compartimental mais simples. Ele é composto de apenas duas classes, a classe S (Suscetíveis) e I (Infectados), e descreve epidemias causadas por doenças que não levam a óbito e nas quais os indivíduos não adquirem imunidade após se recuperar, tornando-se suscetível novamente.

Figura 2.1: Diagrama SIS



Fonte: Autor

Sendo assim, as pessoas que estão no grupo S , após contraírem a doença, passam para o grupo dos infectados I , e as pessoas que após um tempo se recuperam voltam ao grupo S , o que justifica a sigla (SIS).

A ideia desse modelo, ou de qualquer outro modelo de compartimentos, é estudar o comportamento da população de cada compartimento a partir da taxa de variação de cada um desses compartimentos. Assim a modelagem é feita a partir dos motivos que interferem na dinâmica de cada classe, gerando assim um novo parâmetro para cada fator de influência.

Para montar o sistema de equações diferenciais que irá modelar a transmissão de doenças dessa natureza, vamos fazer algumas simplificações, tais como: desconsideraremos os casos de nascimento, mortes e os casos de imigração e emigração, isto é, a população inicial será constante. Assim uma população de N pessoas, a qual podemos separá-las em dois compartimentos, os suscetíveis S e os infectados I , teremos $N = S + I$, para todo tempo t .

Agora, começando a ideia de formalizar as equações para esse modelo determinístico (SIS), considere as seguintes variáveis:

- N quantidade total da população;
- S quantidade de pessoas suscetíveis a doença;
- I quantidade de pessoas infectadas;
- α é a taxa de transmissão da doença;
- β é a taxa de recuperação.

Primeiramente, vamos analisar como funciona a taxa de variação do grupo dos suscetíveis. Essa taxa mede a velocidade na qual a população de S aumenta ou diminui ao longo do tempo. Observe que, como nesse caso, se trata de uma propagação de um doença, esta taxa deve ser negativa, posto que o indivíduo passa de suscetível para infectado, diminuindo assim a população de S .

Agora, supondo que inicialmente a epidemia tenha começado com I pessoas infectadas, isto é, então a variação da população suscetível é dada pela probabilidade das pessoas suscetíveis se contaminarem e essa probabilidade é dada pelo produto de α (Taxa de propagação) por $S \cdot I$.

$$- \alpha \cdot S \cdot I. \tag{2.1}$$

Mas a variação do grupo dos suscetíveis ainda tem uma parcela da população que estava no grupo dos infectados e se recuperou, passando assim para a classe S . Nesse caso a taxa de recuperação será positiva, pois há um aumento da população dos suscetíveis. Assim, análogo ao caso anterior, a velocidade de aumento desse grupo é dado pelo produto da taxa de recuperado β pelo número de pessoas infectadas.

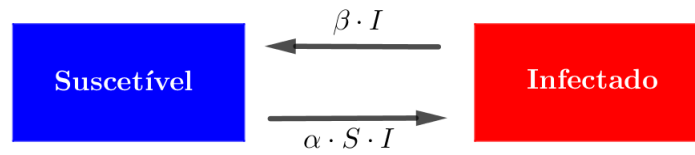
$$\beta \cdot I. \tag{2.2}$$

Assim, obtemos a equação diferencial que representa a taxa de variação do grupo dos suscetíveis.

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha \cdot S \cdot I + \beta \cdot S \cdot I. \quad (2.3)$$

Já para o caso do grupo dos infectados, o processo é semelhante, mas agora a α de transmissão da doença irá gerar um aumento de indivíduos nessa população, o que acarretará o sinal positivo do termo $\alpha \cdot S \cdot I$, enquanto a taxa de recuperados trará uma diminuição no grupo dos infectados, provocando assim um sinal negativo no fato $\beta \cdot I$.

Figura 2.2: Diagrama SIS



Fonte: Autor

Portanto, o sistema de equações para esse modelo com dinâmica cuja população é constante podem ser expressas por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \end{cases}$$

Nesse modelo é necessário uma análise de estabilidade para verificar se a infecção irá acabar ou continuar em um loop infinito, posto que, nesse caso, o indivíduo recuperado não cria uma imunidade contra a doença. Em (LUIZ, 2012) é mostrado que existem dois pontos de equilíbrio para o sistema: $P_1 = (N, 0)$, ou seja, quando inicialmente não tem pessoas infectadas e $P_2 = (\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha})$.

Como estamos considerando que a população N é constante, temos que, ao longo do tempo, os grupos de suscetíveis e dos infectados vão se modificando, porém $N = S(t) + I(t)$, para todo $t > 0$. Assim $S(t) = N - I(t)$ e calculando a taxa de

variação dos infectados ao longo do tempo temos:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \alpha S \cdot I - \beta I \\ &= \alpha(N - I) - \beta I \\ &= \alpha I \left[\left(N - \frac{\beta}{\alpha} \right) - I \right]\end{aligned}$$

Aplicando a técnica de separação de variáveis, temos:

$$I(t) = \frac{\alpha N - \beta}{\alpha + [(\alpha N - \beta) \frac{1}{I_0} - \alpha] \cdot e^{-(\alpha N - \beta)t}} \quad (2.4)$$

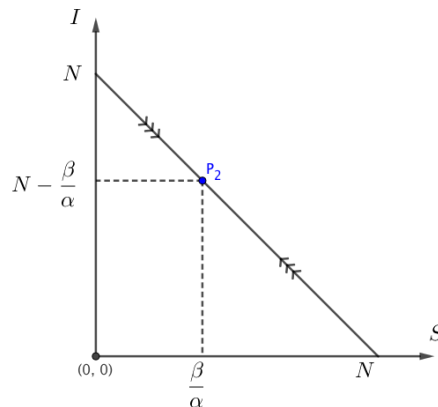
onde I_0 representa o número de pessoas infectadas no início da epidemia.

Agora vejamos que quando t tende para o infinito, o número de infectados I tende a $N - \frac{\beta}{\alpha}$, assim $S \rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$. Neste caso sistema é assintoticamente estável.

Do sistema de equações e da equação 2.4 temos as seguintes situações:

1. Se $S > \frac{\beta}{\alpha}$ e $I \neq 0$, então $\frac{dI}{dt} > 0$ e $\frac{dS}{dt} < 0$. Nesse caso a infecção tende a aumentar e os suscetíveis tende a diminuir, mas estabilizando em $(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha})$.
2. $S < \frac{\beta}{\alpha}$ e $I \neq 0$, então $\frac{dI}{dt} < 0$ e $\frac{dS}{dt} > 0$. Nesse caso a infecção diminui e os suscetíveis aumentam, mas estabilizando também, como mostra o diagrama de fase abaixo. $(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha})$.

Figura 2.3: Plano de fase do modelo *SIS*



Fonte: Autor

2.4 Modelo SIR

Tendo sido vistas algumas definições, vamos começar a descrever o que é o modelo matemático SIR, que teve sua origem com Kermack e Mckendrik em 1927, que nos seus estudos sobre doenças que se disseminam na população, propuseram uma divisão em classes disjuntas, que podemos denotar por:

- Suscetíveis, $S(t)$, classe dos indivíduos saudáveis e propícios a uma possível infecção;
- Infectados, $I(t)$, classe dos indivíduos infectados e, sendo assim, transmissores de novas doenças;
- Recuperados, $R(t)$, classe dos indivíduos já recuperados da doença ou que vieram a falecer devido infecção, porém, em ambas situações, tornam-se indivíduos imunes a uma nova infecção.

A sigla SIR é a representação dos três estágios analisados no estudo.

Figura 2.4: Diagrama do modelo SIR



Fonte: Autor

Vale ressaltar também que todos nascem suscetíveis a infecção; uma vez recuperado o indivíduo tem imunidade total da doença; o tamanho da população permanece constante e nenhuma pessoa pode pertencer a mais de uma das classes. Além disso, segundo Osnar:

“(...) este modelo possui algumas limitações e é necessário um conhecimento mais profundo da situação problema na qual se pretende utilizá-lo. Uma destas limitações é o fato do modelo trabalhar com parâmetros constantes tornando-o pouco eficaz para o estudo de longo prazo de situações dinâmicas.” (ABREU, 2020).

Sendo que $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ são funções dependentes do tempo, ou seja, as populações das funções destacadas sofrem alteração com o decorrer do tempo, e o total de indivíduos é dado por $T(t)$, onde

$$T(t) = S(t) + I(t) + R(t).$$

Podemos observar que, com o passar do tempo, o número de indivíduos suscetíveis diminui, o que automaticamente implica no aumento dos indivíduos infectados, ou seja, a medida que a classe das pessoas suscetíveis diminui a classe das pessoas infectadas aumentam. Essas novas infecções surgem com o contato dos indivíduos infectados com os suscetíveis, o que vamos chamar de taxa de transmissão, simbolizada por β , onde $\beta > 0$. Dessa forma, é possível representar essa “passagem” da classe dos suscetíveis para a classe dos infectados pela equação diferencial

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \cdot S \cdot I. \quad (2.5)$$

onde:

- S é a quantidade de pessoas suscetíveis em função do tempo;
- I é a quantidade de pessoas infectadas em função do tempo;;
- β essa constante é obtida pelo produto da taxa de contaminação entre as pessoas pela probabilidade de uma pessoa suscetível ser contaminada pelo contato com um agente infeccioso;

A taxa de variação $\frac{dS}{dt}$ calcula o quão rápido a população S aumenta ou diminui. Como o modelo é a propagação de uma doença, a ideia principal é que o valor dessa taxa seja negativo, uma vez que a população S tende a diminuir conforme o número de I de infectados aumentam. Assim, podemos tomar como ponto de partida o caso em que $I = 1$, apenas uma pessoa infectada. Daí, a variação da população S é dada pela chance dessas se infectarem, que é resultante do produto da taxa de propagação (β) pela quantidade de pessoas suscetíveis, o que justifica a equação apresentada acima.

Da mesma forma que acontece a dinâmica de “passagem” de suscetíveis para infectados, outra dinâmica que precisa ser analisada é a de indivíduos que passam da classe de infectados (I) para a classe de recuperados (R). Denotaremos essa taxa de recuperação por γ , e a equação que representa é dada por:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I. \quad (2.6)$$

Esta equação representa a taxa de variação dos recuperados, que é dada pelo produto da taxa de recuperação γ pelo número de infectados, onde γ também pode ser expresso por $\gamma = \frac{1}{t_m}$, onde t_m é o tempo médio de recuperação.

Para finalizar, vamos definir a taxa de variação da classe I (infectados). Como esta taxa depende de quantas pessoas entram neste grupo, isto é, saem de suscetíveis e passam para infectados, esta taxa deverá ser positiva, menos a quantidade de pessoas que saíram de infectados para recuperados, assim:

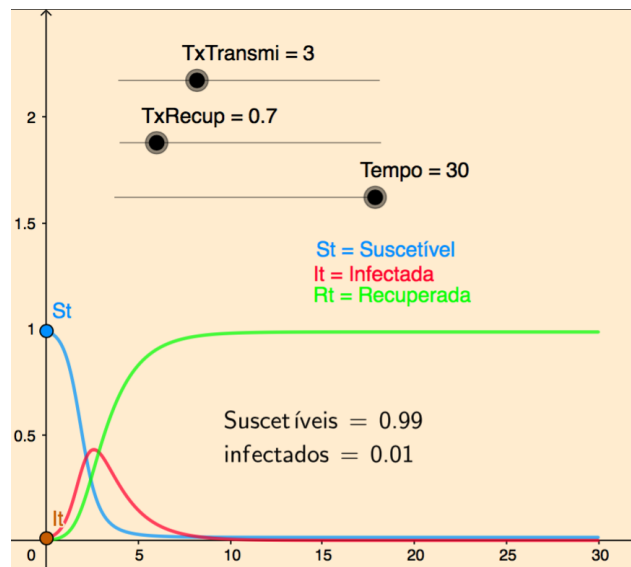
$$\frac{dI}{dt} = \beta \cdot S \cdot I - \gamma \cdot I. \quad (2.7)$$

Logo, podemos montar o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta \cdot S \cdot I \\ \frac{dI}{dt} = \beta \cdot S \cdot I - \gamma \cdot I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I. \end{cases} \quad (2.8)$$

Abaixo, apresentamos a forma dos gráficos das curvas do modelo SIR:

Figura 2.5: SIR



Utilizando um simulador do modelo SIR, podemos ver como fica o gráfico das curvas dos suscetíveis, infectados e recuperados ao longo do tempo. Utilizamos o simulador online que se encontra no site:

“<https://www.ufrgs.br/coronaviruslitoral/modelo-sir-c-comandos-e-equacao/>”

Nele é possível alterar a taxa de transmissibilidade β , a taxa de recuperação γ e o tempo de t .

No simulador os parâmetros β , γ e t estão indicadas por (“TxTransmi”, “TxRecup” e Tempo). O parâmetro “TxTransmi”. A alteração do parâmetro β pode ser pensado como o efeito do isolamento social. Quanto menor o valor, menor é o número de novas infecções por unidade de tempo. O parâmetro “TxRecup” é a taxa de recuperação da infecção. Quanto mais alta a taxa de recuperação, mais rapidamente as pessoas deixam de estar infectadas. E “Tempo” pode ser modificado para apresentar a construção “temporal” de cada curva.

A simulação começa com uma população em que 99% das pessoas são suscetíveis à infecção (curva azul) e 1% de pessoas já estão infectadas (curva vermelha). Com o passar do tempo as pessoas suscetíveis entram em contato com o vírus e passam a fazer parte do grupo de pessoas infectadas. Após um determinado período as pessoas passam de infectadas para recuperadas (curva verde).

Abaixo, apresentaremos alguns gráficos de simulações realizadas. Veja que foram modificadas os parâmetros de taxa de transmissibilidade e taxa de recuperados. Com isso temos diversos cenários de como o modelo SIR retrata a pandemia. No capítulo 3 quando trataremos de dados reais em duas cidades, ficará claro que há uma divergência entre os modelos teóricos e a realidade.

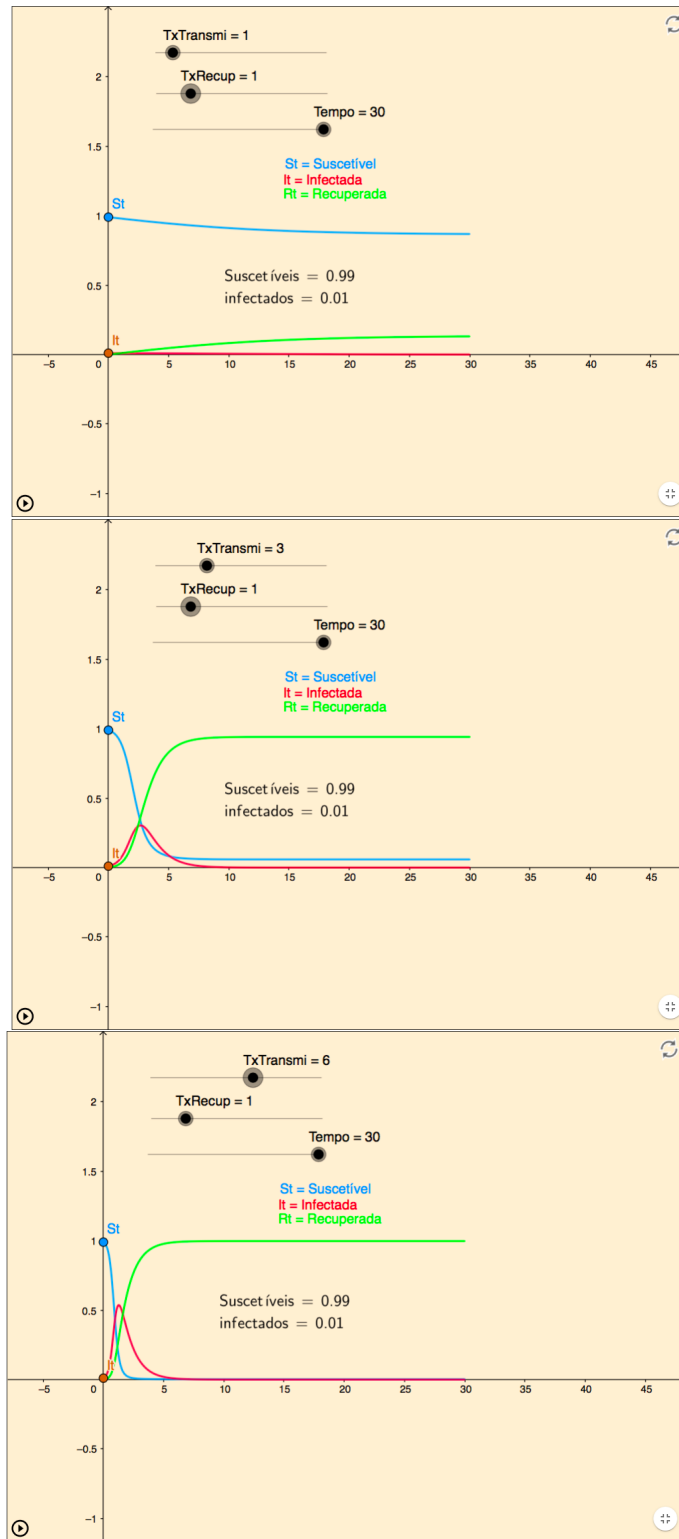


Figura 2.6: Variação da transmissibilidade

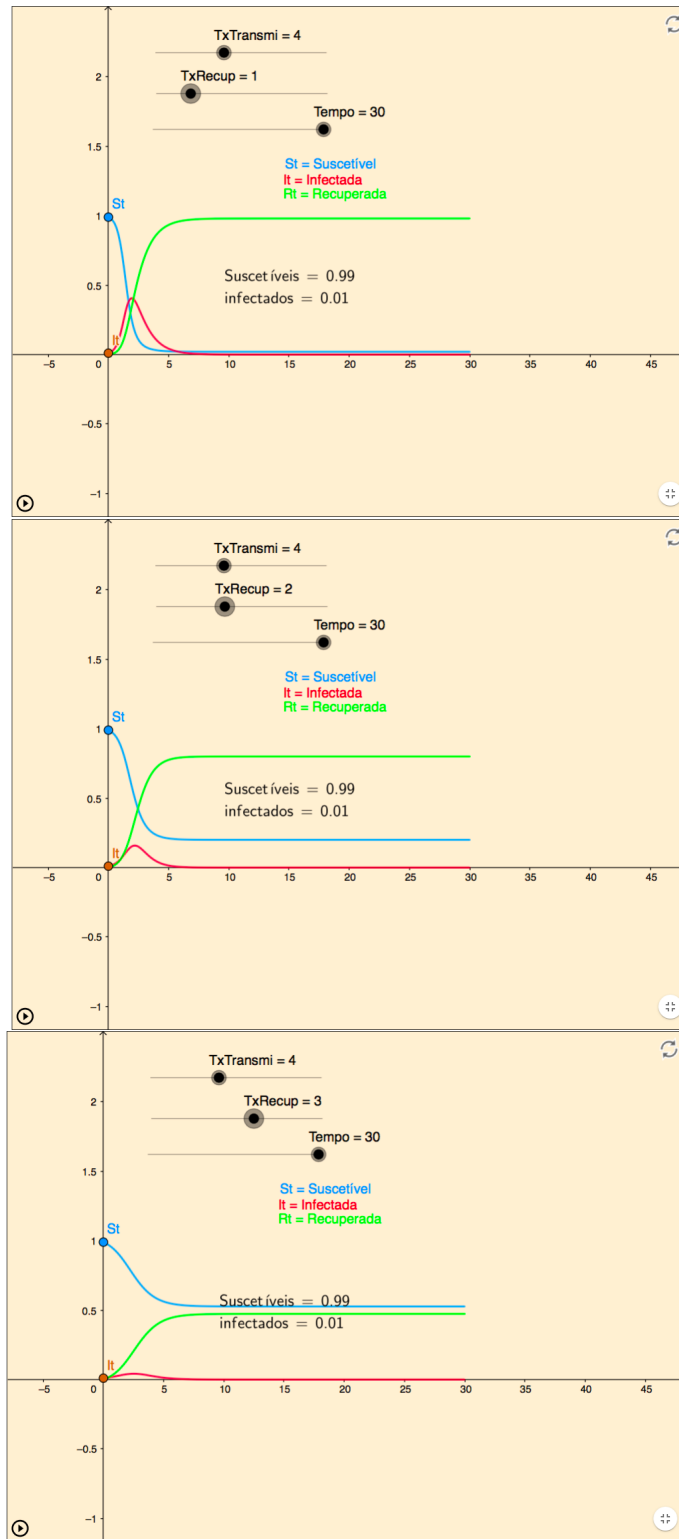


Figura 2.7: Variação da taxa de recuperação

2.5 Modelo SEIR

Nesta seção vamos apresentar o modelo epidemiológico SEIR, que trata de uma forma um pouco mais justa que o modelo anterior (SIR), por levar em consideração o estado exposto, uma vez que o modelo SIR nos deixa em dúvida de sua eficácia para doenças onde o hospedeiro permanece por longos períodos de incubação. Podemos representar o SEIR pelo esquema a seguir:

Figura 2.8: Diagrama do modelo SEIR



Fonte: Autor

- **Suscetíveis:** pessoas que podem, em algum momento, contrair o vírus;
- **Expostos:** pessoas contaminadas, porém o vírus permanece em incubação; (neste período e nos casos assintomáticos a pessoa não corre o risco de transmitir para outras o vírus);
- **Infectados:** pessoas infectadas e capazes de transmitir a doença;
- **Recuperados:** Atentando para a nomenclatura, devemos sempre lembrar que o grupo dos recuperados é formado por toda pessoa não capaz de transmitir o vírus. Isso inclui os de fato recuperados e aqueles que vieram a falecer em decorrência da doença.
- $\sigma = \frac{1}{t_e}$, onde t_e denota o período médio de incubação do vírus.

“Período de incubação significa o tempo entre a captura do vírus e o início dos sintomas da doença. A maioria das estimativas do período de incubação do COVID-19 varia de 1 a 14 dias, geralmente em torno de 5 dias. Essas estimativas serão atualizadas à medida que mais dados estiverem disponíveis” (WORLD HEALTH ORGANIZATION, 2020).

*Vale lembrar que todas as pessoas pertencentes à população de realização do estudo necessariamente está presente em um, e apenas um, dos grupos citados acima.

No modelo SIR as pessoas “passam” do grupo Suscetíveis para o grupo dos “Infectados”. Já no modelo SEIR não é possível essa situação devido ao grupo dos expostos, pois o período de incubação do COVID-19 é, em média, cinco dias. Assim, a inclusão do grupo dos Expostos torna o resultado mais fiel à realidade da pandemia.

Desta forma, devido à inclusão do novo grupo, adicionamos uma nova equação:

$$\frac{dE}{dt} = \beta IS - \sigma E$$

Também se faz necessária uma mudança na equação que descreve a taxa de variação do grupo dos infectados, já que as pessoas que ingressam nesse grupo vêm do grupo dos Expostos e não mais dos Suscetíveis.

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma I$$

Assim, na fase inicial temos: $t = t_0$; $S(t_0) = S_0$; $E(t_0) = E_0$; $I(t_0) = I_0$ e $R(t_0) = R_0$ da qual obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

MODELO SEIR

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta \cdot S \cdot I \\ \frac{dE}{dt} = \beta \cdot I \cdot S - \sigma \cdot E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma \cdot E - \gamma \cdot I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I \end{array} \right. \quad (2.9)$$

com condições iniciais $S(t_0) = S_0$; $E(t_0) = E_0$; $I(t_0) = I_0$; $R(t_0) = R_0$.

Variações dos modelos SIR e SEIR

Conforme dito e observado anteriormente, os modelos SIR e SEIR são modelos que tentam se aproximar o máximo possível, o que significa que outros fatores podem influenciar nos resultados. Essas modificações podem ocorrer se levarmos em consideração, por exemplo, os fatores demográficos, o que pode tornar os modelos ainda mais realistas. Esses fatores demográficos podem ser nascimento, morte, imigração e emigração.

Também é muito complicado a saúde pública intervir nos modelos estudados, o que ajuda a caracterizar e entender o potencial de uma intervenção específica ou até mesmo uma combinação de outras intervenções. Dentre essas intervenções, vale destacar como exemplo o uso de antivirais, vacinas, máscaras, lavagem de mãos, fechamento de escolas e espaços de lazer (shopping, estádios, cinemas, ...), distanciamento social, isolamento e quarentena.

É importante lembrar que mesmo a prática sendo muito parecida, isolamento social, distanciamento social e quarentena são situações diferentes.

Distanciamento social: Esta estratégia consiste em conter a velocidade de transmissão da doença através da diminuição da interação entre as pessoas. Nesse caso, pode haver indivíduos infectados, porém ainda no estágio assintomático, sem demonstrar sintomas, ou que até mesmo nem saibam que são portadores da doença, e por isso não estão em isolamento social. O distanciamento social pode ser ampliado por meio de fechamento de escolas, bares, restaurantes, shopping e outros espaços, sejam eles públicos ou não. Até mesmo fronteiras podem ser fechadas na intenção de evitar a aglomeração entre as pessoas, porém as pessoas com maior risco de infecção, chamados grupo de risco, ficam em isolamento social.

Isolamento: Já o isolamento social é a precaução ou a medida tomada para separar as pessoas sintomáticas, ou seja, que apresentam sinais de infecção como problemas respiratórios, casos suspeitos ou confirmados de Covid-19, das que não apresentam tais diagnósticos. Esse isolamento pode acontecer na residência do paciente ou em um ambiente com acompanhamento médico por período de 14 dias.

Quarentena: Nesse período é feita a restrição de atividades e até mesmo a separação das pessoas que estão contaminadas ou que foram supostamente expostas à doença, não sendo necessário a pessoa estar doente para que fique em quarentena. Caso as medidas de distanciamento, isolamento e até mesmo a quarentena

não bastem para a redução da taxa de contaminação, acontece o lockdown, que em português é a contenção comunitária. Esta medida é a intervenção aplicada a uma cidade ou uma região, com o objetivo de conter a aglomeração entre a população, inibindo a abertura de comércios que não sejam considerados essenciais, permanecendo em funcionamento, porém com algumas restrições e controle de prevenção, apenas serviços alimentícios e remédios, por exemplo. É importante lembrar que essas medidas devem ser aplicadas em diferentes regiões e em diferentes períodos, de acordo com nível de risco de cada local. Quando o número de confirmados não passar de 50% da capacidade instalada antes da pandemia, inicia-se o processo de distanciamento social. Para as regiões que apresentarem o coeficiente de incidência superior a 50% da estimativa nacional devem ser mantidas essas medidas até que as estruturas (leitos, EPI, respiradores e testes laboratoriais) sejam capazes de suprir a necessidade da população, além, é claro, de disponibilizar um grande contingente de profissionais da saúde capazes de promover esse atendimento ao público com a maior segurança e eficiência possível.

Atualmente, no Brasil, propõem-se as seguintes medidas para conter o risco da COVID-19:

- envolvimento de toda sociedade em medidas de higiene para redução de transmissibilidade (lavagem das mãos, uso de máscaras, limpeza de superfícies);
- suspensão de aulas em escolas e universidades, com reavaliação mensal;
- distanciamento social para pessoas acima de 60 anos, com reavaliação mensal;
- distanciamento social para pessoas abaixo de 60 anos com doenças crônicas, com reavaliação mensal;
- distanciamento social no ambiente de trabalho – reuniões virtuais, trabalho remoto, extensão do horário para diminuir densidade de equipe no espaço físico, etc, com reavaliação mensal;
- isolamento domiciliar de sintomáticos e contatos domiciliares (exceto profissionais de serviços essenciais assintomáticos);
- proibição de qualquer evento de aglomeração (shows, cultos, futebol, cinema, teatro, casa noturna etc), com reavaliação mensal;

- diminuição da capacidade instalada de bares, restaurantes e afins, com reavaliação mensal.

A fim de quantificar as medidas de contenção como o isolamento social e a quarentena, o modelo EDM (Exponencial Distribution Model) considera que está sendo imposta quarentena e isolamento para pessoas sintomáticas.

EDM

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta SI(I + (1 - \rho))H \\ \frac{dE}{dt} = \beta S(I + (1 - \rho))H - (\alpha + \sigma)E \\ \frac{dQ}{dt} = \alpha E - \delta Q \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (\delta + \gamma)I \\ \frac{dH}{dt} = \delta Q + \delta I - \gamma H \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I + \gamma H \end{array} \right.$$

com condições iniciais, $S(t_0) = S_0; E(t_0) = E_0; Q(t_0) = Q_0; I(t_0) = I_0; H(t_0) = H_0; R(t_0) = R_0$.

2.6 Modelos Generalizados

Nesta seção vamos retomar alguns modelos já apresentados em seus formatos originais e propor algumas modificações a fim de deixá-los mais detalhados e eficazes, principalmente no que diz respeito à circulação da população durante ademia.

2.6.1 Variações no modelo SIR

O modelo SIR em sua forma original, proposta por Kermack e McKendrick, em 1927, já foi mostrado anteriormente, o qual tem sua disposição como o esquema a seguir

Figura 2.9: Diagrama modelo SIR



Fonte: Autor

onde:

- S é o número de habitantes suscetíveis que podem entrar em contato com o vírus;
- I é o número de infectados;
- R é o número de recuperados;
- P é o número total de habitantes, com $P = S + I + R$;

Vale lembrar que aqui não estamos considerando os nascimentos ou mortes por outros motivos de forma a modificar a quantidade de suscetíveis.

Nesse modelo, temos apenas dois parâmetros para verificação, β (taxa de crescimento) e γ (taxa de recuperação), cujas equações que o modelam são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \frac{-\beta SI}{P} \\ I = \frac{\beta SI}{P} - \gamma I \\ R = \gamma I \end{array} \right.$$

Este parâmetro γ equivale ao inverso do tempo de infecção, ou seja, $\gamma = \frac{1}{T_{inf}}$ onde o tempo de infecção T_{inf} é considerado pelo período em que o infectado está ativo, isto é, pode transmitir a doença. Um parâmetro notório em qualquer epidemia é o índice de reprodução basal (R_0), o qual é obtido através do produto da taxa de crescimento pelo tempo de infecção: $R_0 = \beta \cdot T_{inf} = \frac{\beta}{\gamma}$.

Considerando $S = S_0 = P$ e $I = I_0$ no tempo inicial t_0 , encontramos que $I = e^{(\beta-\gamma)t}I_0$ no momento inicial da epidemia. Assim, se $\beta > \gamma \rightarrow R > 1$, temos um crescimento exponencial no início dos contágios. Se $R_0 < 1$, temos uma perda de força também exponencial, levando ao fim da epidemia. Portanto, R_0 é um parâmetro fundamental para o controle da epidemia.

Com a intenção de deixar o modelo SIR mais adaptado no que diz respeito a anteceder os valores para o novo coronavírus, propõe-se algumas modificações, de acordo com Gomes, Monteiro e Rocha (2021) da Universidade Federal do Rio Grande, que são:

- Efeito dinâmico, é quando a dinâmica epidêmica pode ser “capturada” caso algumas condições a façam entrar em uma região de aderência, a contaminação é interrompida e o número de infectados tende a zero;
- Determinação da taxa de crescimento (β em função do percentual de circulação (ρ), a qual este é definido como a parcela da população que pode circular livremente, dividida pelo total de habitantes, de forma que: $0 \leq \rho \leq 1$).
- Outro fator a ser levado em consideração é que algumas pessoas, quando detectadas como positivas para o vírus, entram em quarentena, seja em casa ou em tratamento hospitalar, deixando assim de contribuir com outras contaminações.

Dessa forma, o modelo passa a ter as seguintes equações:

$$\begin{cases} S &= -\frac{\beta(\rho)SI}{P} \\ I &= \frac{\beta(\rho)SI}{P} - (\gamma + k)I \\ R &= (\gamma + k)I \end{cases}$$

O parâmetro k representa a taxa das pessoas que estão infectadas, mesmo que sem sintomas, e que estão em quarentena, seja em casa ou em hospital. Com isso, obtemos uma nova taxa de recuperação: $\bar{\gamma} = \gamma + k$.

Assim, o índice de reprodução basal assume a seguinte forma:

$$\overline{R_0}(\rho) = \frac{\beta(\rho)}{(\gamma + k)} = \frac{\gamma R_0(\rho)}{(\gamma + k)},$$

Note que o parâmetro k ajuda a diminuir o índice de reprodução basal e, além de quarentena, também pode representar medidas preventivas à disseminação do vírus, como uso de máscara, distanciamento social em lugares públicos e utilização de álcool em gel.

2.6.2 Variações no modelo SEIR

As variações nos modelos SIR e SEIR podem ser descritas de n formas e também de maneira demográfica, como nascimento, mortes, imigração e emigração, além de subdivisões de grupos populacionais, o que acaba interferindo e dificultando ainda mais a busca por um modelo ideal.

“Esses modelos assumem que todos os indivíduos pertencem a uma grande população (bem mista) na qual todos têm a mesma probabilidade de entrar em contato. Normalmente, essa suposição não é razoável para a maioria das populações humanas, que geralmente são altamente estruturadas, com subgrupos de indivíduos com maior probabilidade de interagir entre si do que com os de outros subgrupos. Assim, os modelos epidemiológicos costumam usar populações estruturadas por idade. Tais modelos requerem equações semelhantes às equações do modelo SEIR para cada faixa etária que descreve a transmissão da doença dentro dessa faixa etária e entre outras faixas etárias. Outro método comum para incorporar a estrutura da população é incluir variáveis como família, local de trabalho, escola e grupos comunitários em um modelo” (RIDENHOUR; KOWALIK; SHAY, 2018).

Considerando o efeito que o isolamento e a quarentena podem causar em uma epidemia, estudos mostram que dentre as várias medidas preventivas, a mais eficaz é, sem dúvida, a quarentena, de preferência acompanhada com um isolamento social, caso a pessoa esteja infectada.

“Recentes surtos de várias epidemias, como pandemias de gripe, são sérias ameaças à saúde humana. As medidas de proteção contra essas epidemias são questões urgentes em estudos epidemiológicos. Prevenção e quarentena são duas abordagens principais contra a disseminação de doenças [...] a combinação das duas medidas é

mais eficaz do que uma única medida de proteção. Nossos resultados sugerem que a política de proteção contra epidemias deve ser responsável por medidas de prevenção e quarentena simultaneamente”(KATO et al., 2011).

O diagrama e as equações para essa situação podem ser escritas da seguintes forma

Figura 2.10: Variações do Modelo SEIR



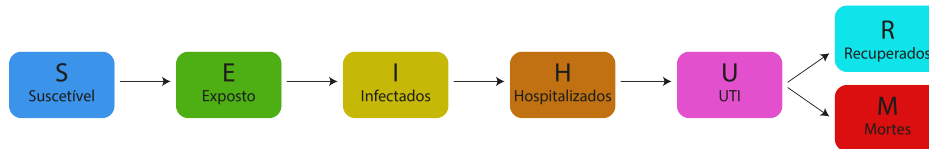
Fonte: Autor

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta S(I + (1 - \rho)H) \\ \frac{dE}{dt} = \beta S(I + (1 - \rho)H) - (\alpha + \sigma)E \\ \frac{dQ}{dt} = \alpha E - \delta Q \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (\delta + \gamma)I \\ \frac{dH}{dt} = \delta Q + \delta I - \gamma H \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I + \gamma H \end{array} \right.$$

onde $S(t_0) = S_0, E(t_0) = E_0, Q(t_0) = Q_0, I(t_0) = I_0, H(t_0) = H_0, R(t_0) = R_0$, são as condições iniciais.

Uma outra forma de tentar modelar ou de variar o modelo SEIR é acrescentar uma taxa de hospitalização, formando o novo sistema:

Figura 2.11: Variações do Modelo SEIR



Fonte: Autor

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta \cdot S \cdot I \\ \frac{dE}{dt} = \beta \cdot S \cdot I - \sigma \cdot E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma \cdot E - (\alpha + \gamma) \cdot I \\ \frac{dH}{dt} = \alpha \cdot I - (\delta + \nu) \cdot H \\ \frac{dU}{dt} = \delta \cdot H - (\mu + \varepsilon) \cdot U \\ \frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I + \nu \cdot H + \varepsilon \cdot U \\ \frac{dM}{dt} = \mu \cdot U \end{array} \right.$$

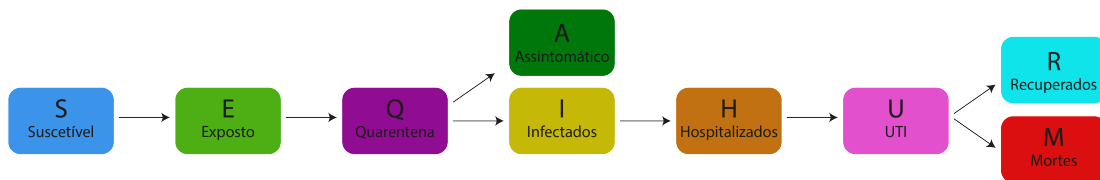
onde:

- S : São as pessoas suscetíveis à infecção;
- E : Pessoas cotaminadas ,mas com o vírus em período de incubação;

- I : Infectados;
- H : Hospitalizados;
- U : Hospitalizados na UTI;
- R : Recuperados;
- M : Mortes por Codiv-19;
- β : taxa de propagação;
- γ : taxa de recuperação dos infectados;
- α : taxa de internamento (parte dos infectados que precisam ser hospitalizados);
- δ : taxa de UTI;
- ν : taxa de recuperação dos internados;
- μ taxa de mortalidade;
- ε : taxa de recuperação da UTI.

Por fim, também podemos considerar um sistema de equações com as variáveis hospitalização, quarentena e assintomáticos.

Figura 2.12: Variações do Modelo SEIR



Fonte: Autor

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta \cdot S \cdot (I + (1 - \rho) \cdot H) \\ \frac{dE}{dt} = \beta \cdot S \cdot (I + (1 - \rho) \cdot H) - (\alpha + \sigma) \cdot E \\ \frac{dQ}{dt} = \alpha \cdot E - \delta \cdot Q \\ \frac{dA}{dt} = \alpha \cdot E - \delta \cdot Q \\ \frac{dI}{dt} = \sigma \cdot E - (\delta + \gamma) \cdot I \\ \frac{dH}{dt} = \delta \cdot Q + \delta \cdot I - \gamma \cdot H \\ \frac{dU}{dt} = \gamma \cdot I + \gamma \cdot H \\ \frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I + \gamma \cdot H \\ \frac{dM}{dt} = \gamma \cdot I + \gamma \cdot H \end{array} \right.$$

Onde:

- S : Pessoas suscetíveis à infecção;
- E : pessoas contaminadas, porém com o vírus em período de incubação;
- Q : Pessoas em quarentena que não se contaminaram;
- A : Pessoas assintomáticas, mesmo após o período de incubação do vírus, porém estas pessoas não são testadas e portanto não sabem que estão positivas para a doença;
- I : Infectados;
- H : Hospitalizadas;
- U : Hospitalizada em UTI;

- R : Recuperados;
- M : Mortes por Covid-19

CAPÍTULO 3

A REAL EVOLUÇÃO EM UM ANO DE COVID-19 EM DUAS CIDADES BRASILEIRAS

“A investigação científica não termina com seus dados; ela se inicia com eles. O produto final da ciência é uma teoria ou hipóteses de trabalho e não os chamados fatos. (G.H. Mead).

Neste capítulo, utilizamos a data base da **Brasil.io** para fazer alguns gráficos da evolução da covid-19 entre março de 2020 a março de 2021, nas cidades de Maringá, no estado do Paraná, e na cidade de Manaus no estado do Amazonas. Nessa base de dados, utilizamos as colunas dos casos confirmados e número de óbitos. Escolhemos Manaus para fazer um comparativo, pois foi amplamente divulgado nos meios de imprensa a tragédia que a covid-19 abateu sobre a capital do Amazonas, mas será que em Maringá as medidas de combate a covid-19 foi tão melhor que Manaus? Vale lembrar que, Maringá é uma cidade com aproximadamente 430 mil habitantes e a capital Manaus tem aproximadamente 2,2 milhões de habitantes, mas além da diferença populacional, as diferenças de infraestrutura urbana, referente a hospitais e meios de transporte, e claro as medidas políticas adotadas no enfrentamento da pandemia, em cada uma das cidades fez com que o curso da doença fosse distintas porém com ainda sim, havendo uma certa semelhança com a quantidade de casos e óbitos.

3.1 Comparando os dados da covid-19 em Maringá-PR com Manaus-AM

Na figura 3.1 fizemos um comparativo em relação ao número de casos confirmados ao longo desse primeiro ano de pandemia.

Observe que as curvas representadas nos gráficos são muito próximas, principalmente nos dois primeiros meses, mas a partir de Maio, percebe-se que Manaus começa a ter uma crescente no número de casos confirmados, entre os meses de Agosto a Janeiro, mesmo que aumentando os casos, pode-se considerar que uma taxa menor que no fim do período, entre janeiro e Março, que por sinal, a taxa de crescimento é de repente.

Um comportamento parecido acontece com a cidade de Maringá, nos quatro primeiros meses é quase que constante o número de casos confirmados, a partir do quinto mês, Julho, o crescimento é muito rápido, e mais acentuado que o de Manaus.

Ambas as curvas tem um comportamento muito próximo com a de uma função exponencial.

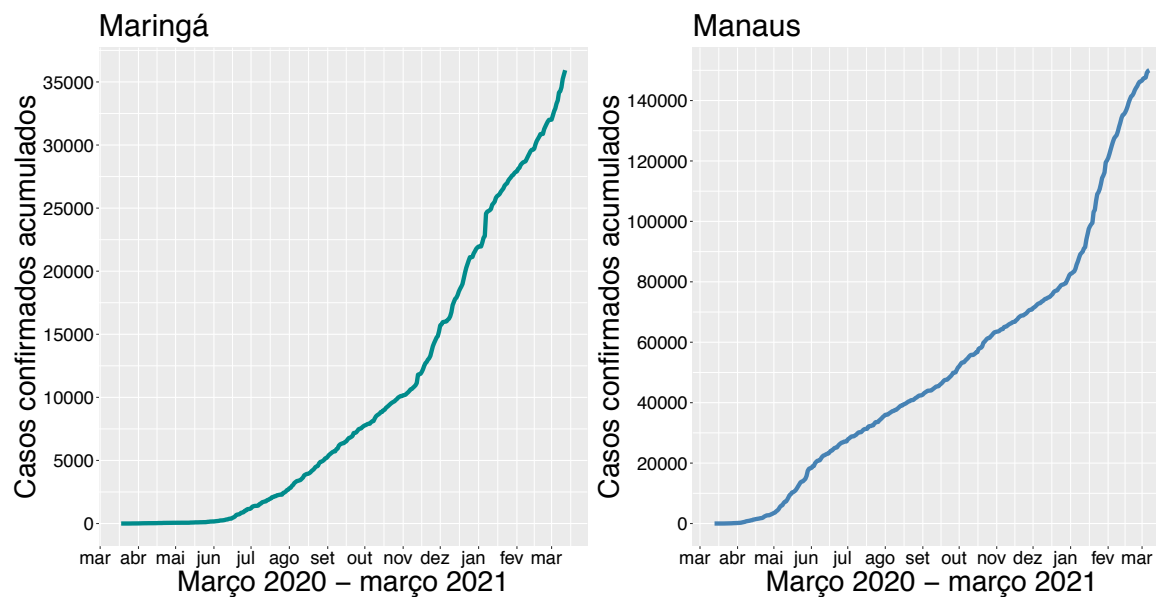


Figura 3.1: Número de casos confirmados acumulados no período de um ano

É importante lembrar que Maringá possui aproximadamente 430 mil habitantes, enquanto que, a cidade de Manaus, cerca de 2,2 milhões de habitantes. Porém, apesar de superioridade populacional de Manaus, o que de certa forma “justificaria” a supremacia de casos acumulado ao longo desse ano em relação à Maringá, observe nessa segunda figura 3.2 que, quando feita a análise por 100 mil/hab, a curva que representa Maringá tem um crescimento maior que em Manaus, ou seja, a proporção de infectados da cidade de Maringá é maior em relação a de Manaus.

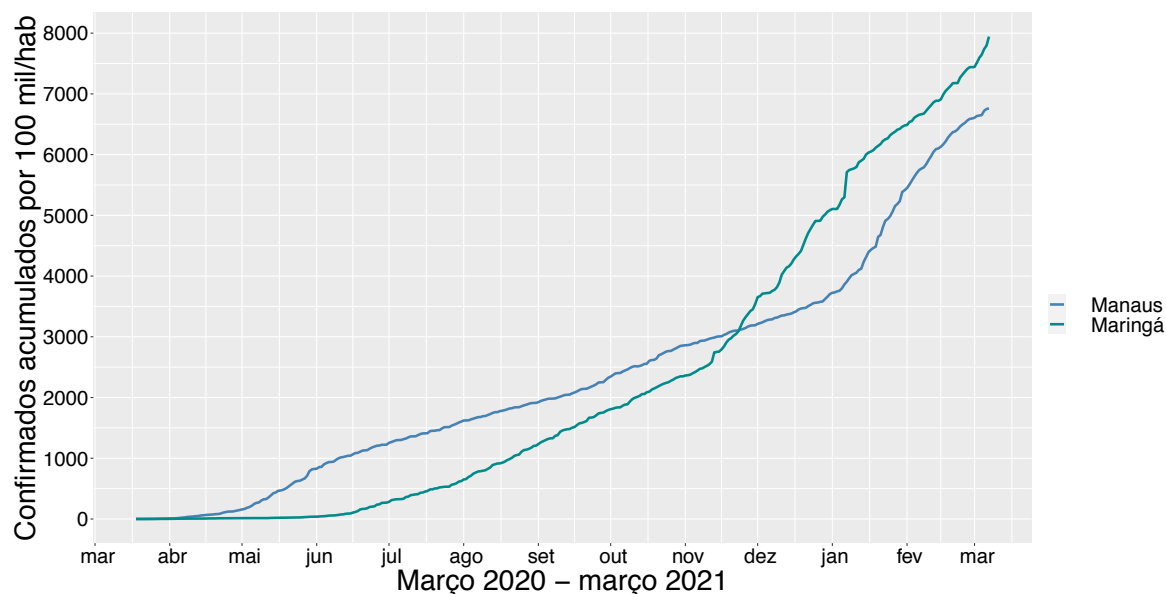


Figura 3.2: Casos confirmados por 100 mil/hab

Já em relação ao número de óbitos, mais uma vez percebe-se uma disparidade muito alta para com a cidade de Manaus, pois, além da grande população infectada, também não houve muito esforço de seus governantes, o que, infelizmente, acarretou nesse grande número de mortes em apenas um ano. A cidade de Maringá, graças à estrutura hospitalar um pouco melhor já existente, pode fazer um trabalho melhor, evitando assim um alto número de óbitos.

Em termos gráficos, o que representa a cidade de Maringá, ainda possui um comportamento muito próximo com o de uma função exponencial, com baixos números de óbitos nos primeiros meses, e de repente, esses números crescem assustadoramente. O gráfico da cidade de Manaus, um pouco mais irregular nesse quesito,

porém ainda com um número muito alto no número de óbitos, após o mês de Maio, ensaiou um possível controle, ou pelo menos, uma taxa de aumento bem inferior a partir do mês de Janeiro, que assim como o número de casos confirmados disparou, o de óbitos, infelizmente, teve o mesmo caminho.

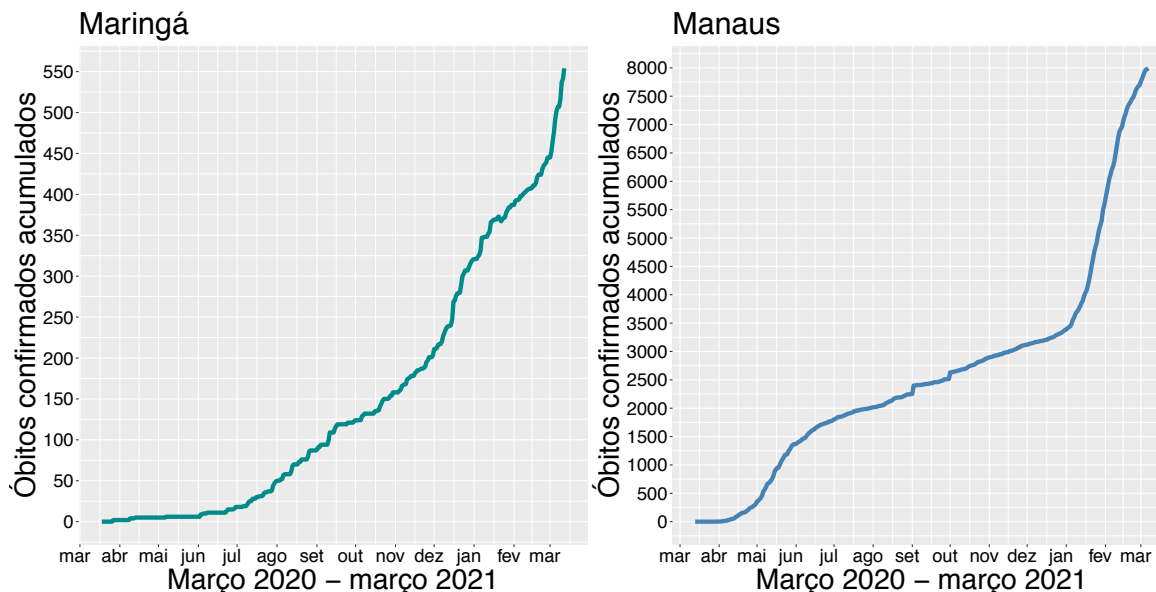


Figura 3.3: Óbitos acumulados

Na figura 3.4 fica ainda mais evidente a semelhança das duas cidades no início da pandemia, os gráficos se confundem. A partir de meio de Abril, Manaus dispara no número de óbitos, e não somente pela superioridade populacional, mas, possivelmente por conta da falta de estrutura e irresponsabilidade de políticos que negligenciaram o tamanho impacto nas vidas que essa pandemia poderia e teve sobre a população. Esse alto número de óbitos da cidade de Manaus em relação a Maringá, mesmo quando essa média é feita por 100 mil/hab. Apesar da proporção de infectados por 100 mil/hab ser próxima, uma estrutura mais adequada e disponibilidade de equipamentos essenciais (diferentemente do ocorrido em Manaus) fez muita diferença para que Maringá não elevasse ainda mais o número de óbitos.

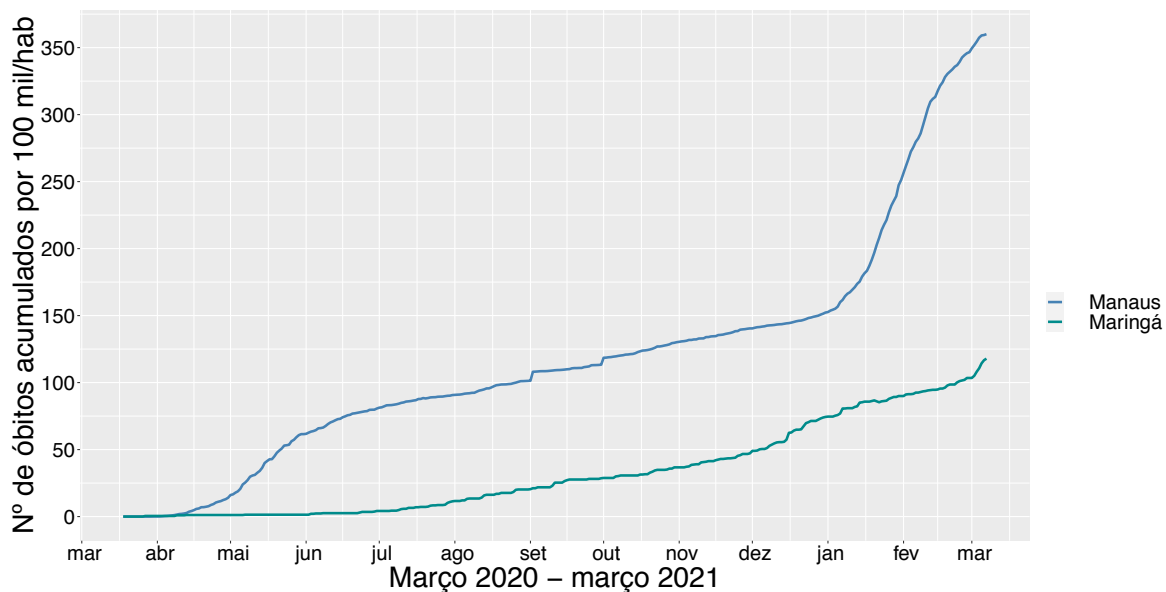


Figura 3.4: Óbitos confirmados por 100 mil/hab

Abaixo, na figura 3.5, temos a representação ,por média móvel, das quantidades de pessoas confirmadas com Covid-19 por dia. Já na figura 3.6 temos a representação do número de óbitos causados ao longo desse primeiro ano de pandemia. O gráfico de Maringá mostra que houve uma certa contenção, tanto no número de casos confirmados como, conseqüentemente, no número de óbitos no início da pandemia, provavelmente devido às restrições impostas pela prefeitura. Demonstra ainda que, após o mês de novembro, o número de casos confirmados aumentou consideravelmente e, como conseqüência, o número de mortes também.

Pode-se dizer que Manaus vem sofrendo desde o início da pandemia, como os mostram os gráficos, que a partir de maio, terceiro mês de pandemia, o número de casos confirmados por dia passou a aumentar consideravelmente, passando a oscilar durante o segundo semestre de 2020.

Observa-se ainda que, no início de 2021, provavelmente devido flexibilização dos governantes, tanto o número de casos confirmados por dia como o número de mortes excedeu todos os limites levando a cidade a um colapso.

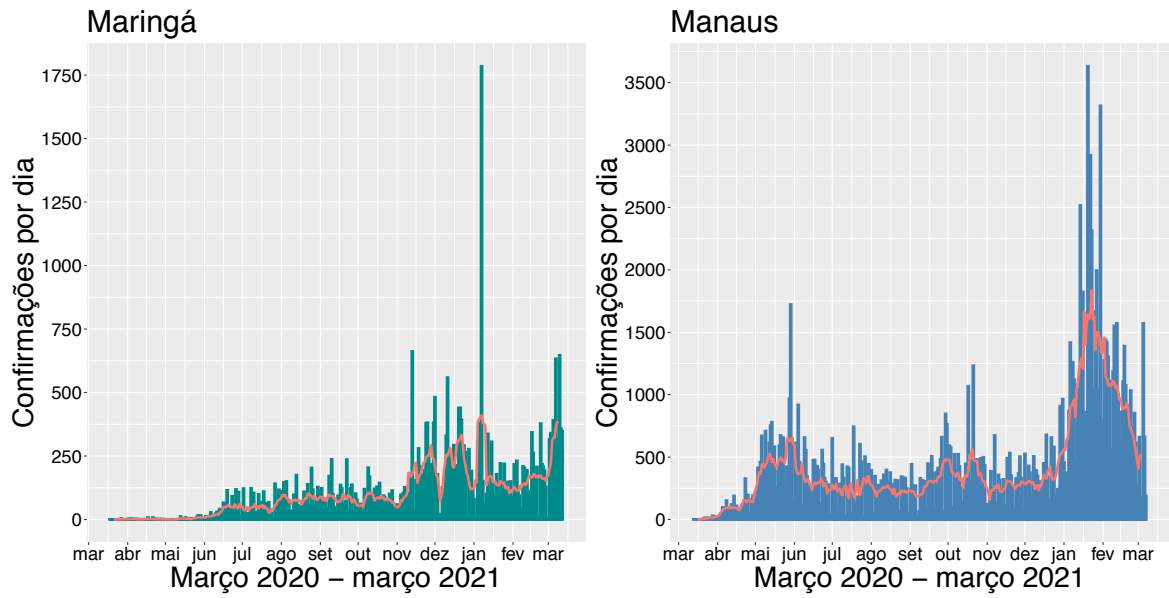


Figura 3.5: Confirmações diárias com média móvel

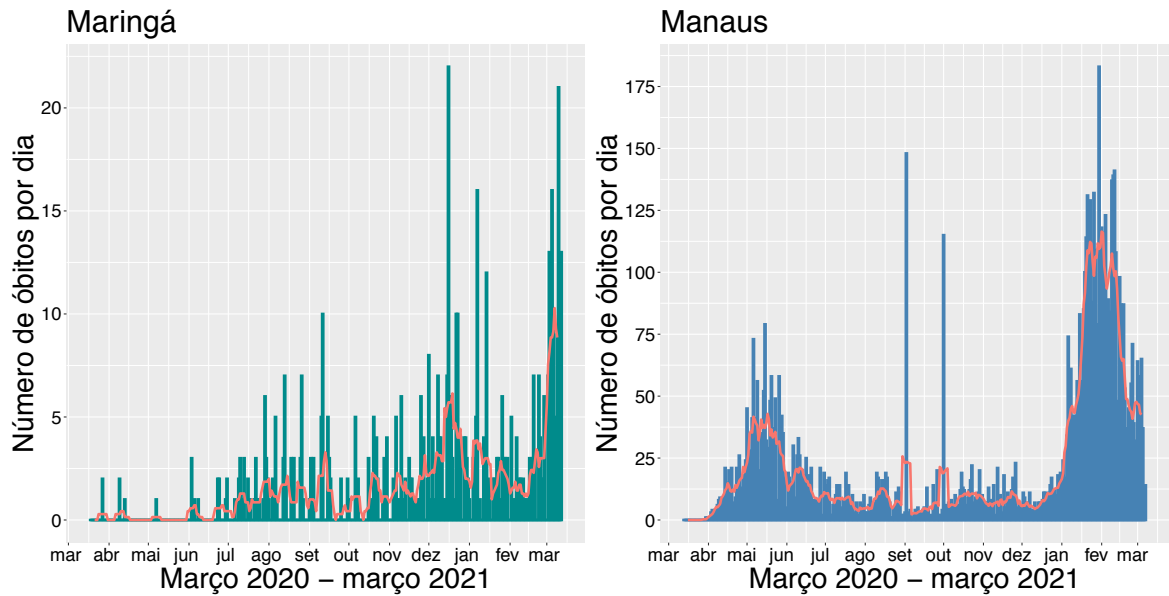


Figura 3.6: Número de óbitos ao dia causados por covid-19 no período de um ano

Finalmente, os próximos dois gráficos representados nas figuras 3.7 e 3.8 apresentam uma aparência de estabilidade, pelo menos quanto ao número de mortes, após um início de números altos.

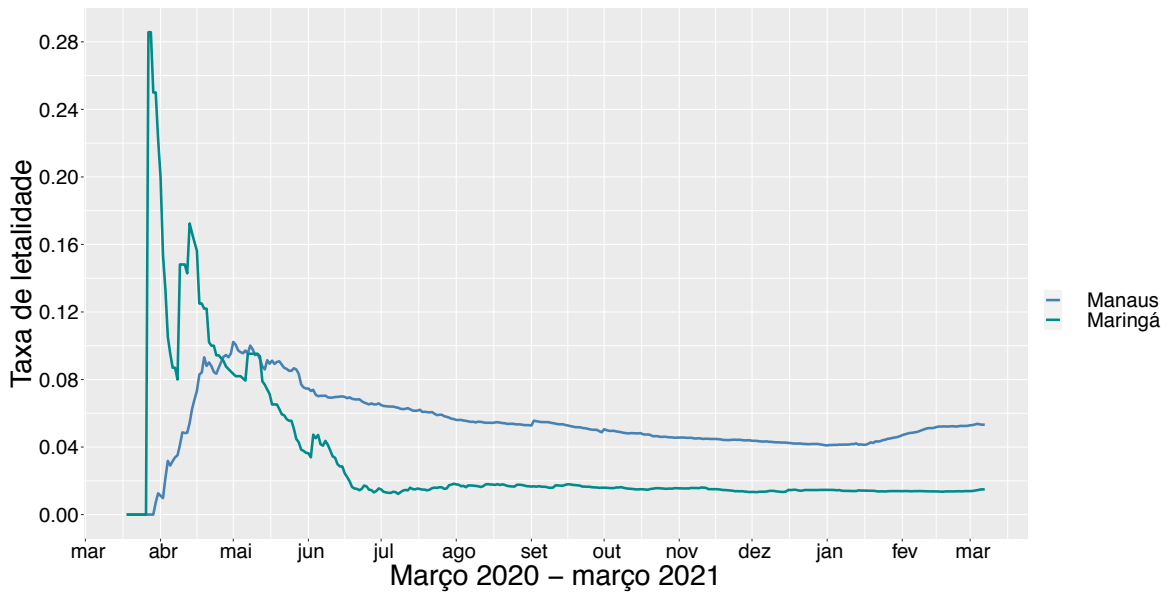


Figura 3.7: Número de óbitos ao dia causados por covid-19 no período de um ano

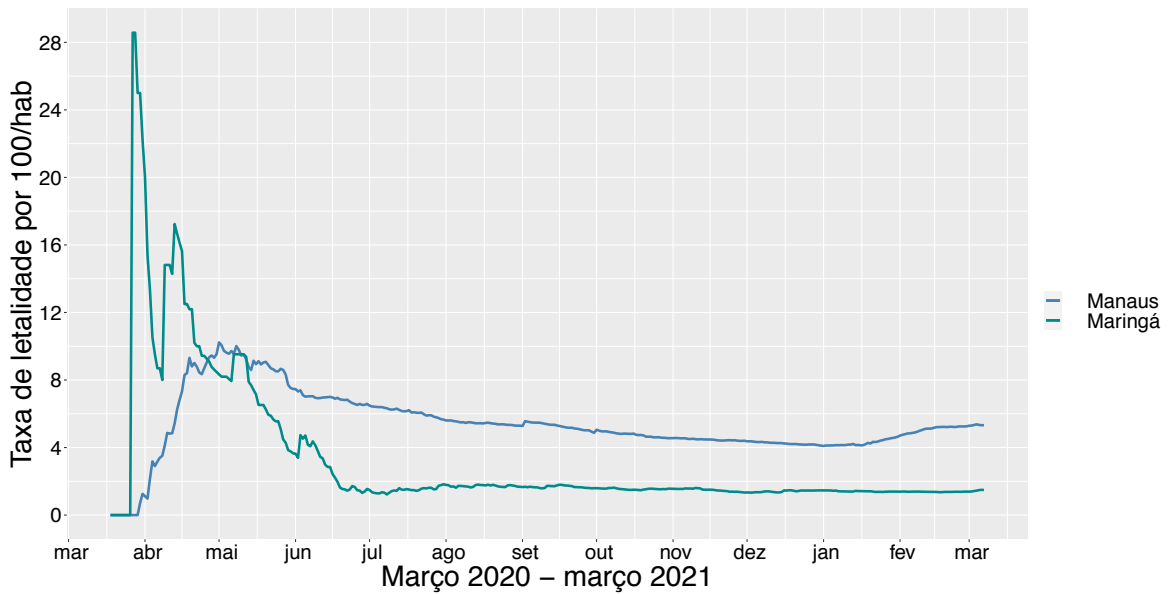


Figura 3.8: Número de óbitos ao dia causados por covid-19 no período de um ano

Concluindo este capítulo, gostaria de expressar aqui meus sentimentos a todos que perderam algum amigo ou familiar para essa doença. Claro que em uma pandemia mortes sempre vão acontecer, porém muitas vidas poderiam ter sido salvas

se nossos representantes no governo tivessem o mínimo de empatia e preocupação para com o a população brasileira.

CAPÍTULO 4

PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA SALA DE AULA

Neste capítulo vamos propor algumas atividades para sala de aula com o objetivo de discutir determinados temas como: interpretação gráfica, coleta de dados, noções básicas de estatística, entre outros assuntos básicos e necessários dentro da matemática, especificamente para realização de pesquisas diversas. Cabe ao professor adaptações, quando necessárias, como, por exemplo, qual assunto dar um enfoque maior de acordo com os diferenciais de cada turma.

A sugestão é que essas atividades sejam aplicadas, se possível, em contraturno, juntamente com professores de outras disciplinas, como Biologia, História e Geografia, em forma de oficinas extracurriculares. Assim, é possível fazer a atividade por um tempo maior, possibilitando aulas de discussões com melhor aproveitamento.

Como objetivo das atividades, espera-se que os alunos sejam capazes de :

- Entender conceitos básicos de construção gráfica e estatística;
- Realizar a interpretação gráfica;
- Relacionar a importância da Matemática na dissipação de informações pelos meios de comunicação;
- Absorver conceitos matemáticos em assuntos interdisciplinares;
- Fazer as conexões entre a Matemática e outras disciplinas envolvidas, como História, Geografia e Biologia.

Com isso, o objetivo maior é apresentar aos o alunos e fazê-los absorver eficazmente o fato de que a ciência matemática é muito mais ampla do que se imagina, abrangendo diferentes áreas de conhecimento, demonstrando assim sua importância em nossas vidas.

Preparação da atividade

A recomendação para o professor que desejar aplicar a atividade em sala é que faça um período (três ou quatro aulas) de embasamento teórico, que envolvam construção gráfica, análise de dados, noções básicas de estatística e algum assunto a mais que o professor considere significativo para a atividade. Importante destacar aqui a possibilidade de utilização de programas computacionais, caso haja disponibilidade da escola, para uma melhor apresentação e exemplificação destes conteúdos durante a aula. Mesmo durante esse período de preparação para a atividade é importante que o professor já ressalte a relação do assunto com outras matérias, a fim de despertar um maior interesse do aluno. Ainda no momento antecedente da atividade recomendo um período para que os alunos façam uma coleta de dados (10 dias), podendo esta ser feita no site da prefeitura ou no Ministério da Saúde, por exemplo.

Como motivação para o trabalho, vale ressaltar a importância do assunto nos dias em que vivemos. Nosso dia a dia está cercado de informações e muitas delas carregadas de dados numéricos, com os quais podemos trabalhar das mais diversas formas conceitos matemáticos, estatísticos ,entre outros assuntos.

Desde Março de 2020 grande parte dessas informações às quais temos tido contato referem-se ao novo Corona Vírus, que, até o momento em que escrevo já deixou mais de 500 mil mortes no Brasil. Nossa motivação aqui é trabalhar com esses dados fornecidos por inúmeros meios e analisá-los da melhor maneira possível, tentando transformar essas informações em conhecimento.

Para isso, essa atividade visa realizar uma pesquisa com os dados coletados pelos alunos referente a pandemia, que tantos danos tem causado desde o seu início.

Atividade 1

(a) Apresente uma planilha com os dados da covid-19 de uma cidade, estado ou país de sua escolha. Esta planilha deve contar, pelo menos, o número de infectados, recuperados e óbitos ao longo do tempo. Indique a fonte onde conseguiu os dados.

Um modelo de resposta/tabela possível de ser apresentada pelos alunos é dada abaixo:

Período	Casos Positivos	Mortes	Casos Ativos
Semana 1 - (26/02 a 03/04)	25	2	10
Semana 2 - (03/04 a 09/04)	44	3	23
Semana 3 - (09/04 a 16/04)	51	5	32
Semana 4 - (16/04 a 24/04)	64	5	45
Semana 5 - (30/04 a 08/05)	87	5	61
Semana 6 - (08/05 a 15/05)	110	6	89
Semana 7 - (15/05 a 22/05)	236	6	119
Semana 8 - (22/05 a 29/05)	348	6	175
Semana 9 - (29/05 a 05/06)	493	10	221
Semana 10 - (05/06 a 12/06)	741	11	343
Semana 11 - (12/06 a 19/06)	1027	12	411
Semana 12 - (19/06 a 26/06)	1349	16	464
Semana 13 - (26/06 a 03/07)	1671	18	467
Semana 14 - (03/07 a 10/07)	2117	29	572
Semana 15 - (10/07 a 17/07)	2510	35	547
Semana 16 - (17/07 a 24/07)	3059	42	669
Semana 17 - (24/07 a 31/07)	3532	54	729
Semana 18 - (31/07 a 07/08)	4053	62	666
Semana 19 - (07/08 a 14/08)	4594	71	783
Semana 20 - (14/08 a 21/08)	5215	81	843
Semana 21 - (21/08 a 28/08)	5813	96	907
Semana 22 - (28/08 a 05/09)	6440	114	601
Semana 23 - (05/09 a 12/09)	6973	124	565
Semana 24 - (12/09 a 19/09)	7366	126	442
Semana 25 - (19/09 a 26/09)	7937	132	691
Semana 26 - (27/09 a 03/10)	8476	141	1155
Semana 27 - (04/10 a 10/10)	8959	144	981
Semana 28 - (11/10 a 17/10)	9438	150	1072
Semana 29 - (18/10 a 24/10)	9945	158	1316
Semana 30 - (25/10 a 31/10)	10418	162	1548
Semana 31 - (31/10 a 07/11)	10889	171	1095
Semana 32 - (07/11 a 14/11)	11780	183	1601
Semana 33 - (14/11 a 21/11)	12978	189	2219
Semana 34 - (21/11 a 28/11)	14831	205	2956
Semana 35 - (28/11 a 05/12)	16764	219	3767
Semana 36 - (05/12 a 12/12)	18859	241	4283
Semana 37 - (12/12 a 19/12)	20677	269	4700
Semana 38 - (19/12 a 26/12)	21796	292	4313
Semana 39 - (31/12)	22548	307	2763

Tabela 4.1: FONTE: Notifica Saúde

(b) Construa gráficos de evolução da doença ao longo do tempo.

Abaixo segue um modelo de gráfico possível de ser apresentado aos alunos como modelo para eles.

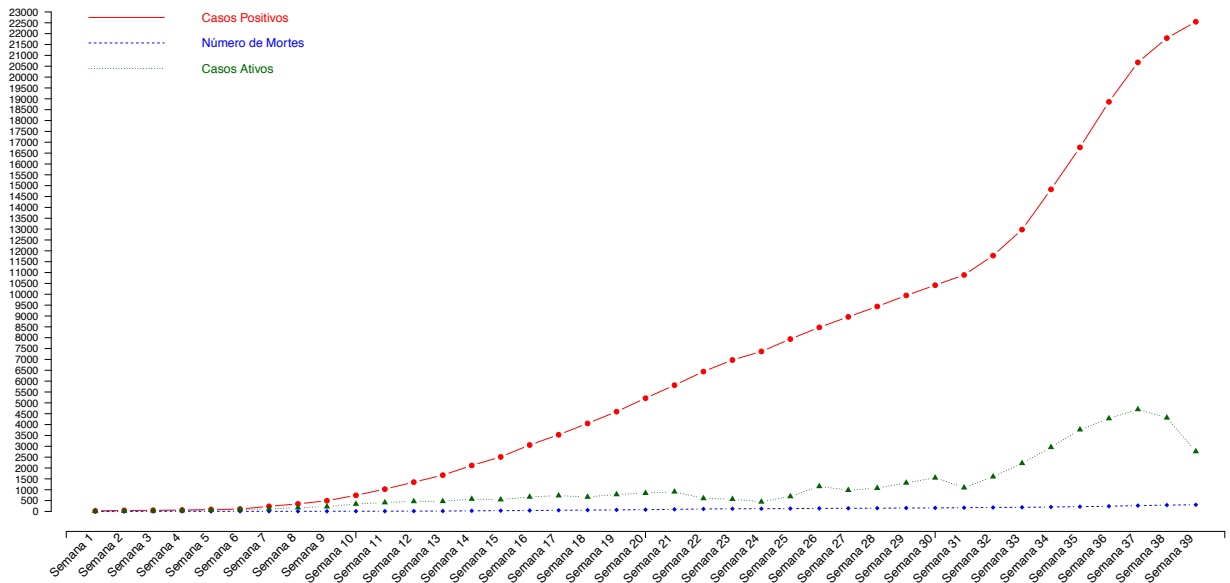


Figura 4.1: TEXTO SOBRE O GRAFICO

(c) Escreva um pequeno texto, sobre o que você faria para combater a covid-19 no Brasil, caso fosse presidente. Justifique as medidas que iria adotar.

Atividade 2

Uma outra atividade, que pode ser proposta para os alunos, uma espécie de "senso" em relação a pandemia, saindo nas ruas para realizar uma pesquisa com os moradores da cidade, entrevistando-os com perguntas como:

- (a) Você já foi infectado pelo Corona Vírus?
- (b) Conhece alguém que já foi/está infectado?
- (c) Você tem seguido os decretos da prefeitura com relação ao combate do vírus?
- (d) O que você entende por lockdown?
- (e) É a favor do fechamento do comércio?
- (f) Caso você fosse o prefeito da cidade, quais seriam as medidas mais apropriadas para o controle da disseminação do vírus?
- (g) Você faria tratamento precoce?
- (h) Qual a importância da vacina para o combate à pandemia?

Essa segunda atividade tem como ideia uma discussão sobre o momento que vivemos, com menos rigor matemático, porém, com o intuito de conscientizar os alunos e conseqüentemente as pessoas com quem convivem com argumentos que o professor, exercendo o papel de mediador, pode instruí-los e, se for o caso, tentar diminuir conceitos errôneos sobre a ciência e algumas medidas que foram ou deveriam ter sido tomadas nesse momento.

Atividade 3

Já nessa terceira atividade a ideia é propor uma comparação com épocas anteriores, nas quais a população tenha enfrentado situações similares, como peste negra e gripe espanhola. Esta atividade pode ser realizada junto com o professor de história para um melhor acompanhamento nas pesquisas, estabelecendo o contexto de cada época e fazendo uma análise de dados em cima dessas informações. Após todo esse período de pesquisa e coleta de dados, é possível fazer alguns comparativos matemáticos, através de construções gráficas por exemplo, em cima de informações como:

- (a) Qual o período de duração da pandemia? (ano inicial e ano final)
- (b) Qual a estimativa da população em cada uma das épocas? (Escolha um país de referência, por exemplo, Inglaterra)
- (c) Quantas mortes ocorreram em cada um dos períodos?
- (d) Quais medidas foram tomadas para o combate a pandemia?
- (e) Criar uma tabela/gráfico que esboce os valores obtidos nos itens (a), (b) e (c);
- (f) Calcular média de mortos por habitantes em cada uma das pandemias;
- (g) Com base nos dados coletados, em função do número de mortes, qual período foi mais catastrófico?

FECHAMENTO

O objetivo dessa atividade é explorar as ferramentas matemáticas e estatísticas diante das informações dadas em nosso dia a dia para uma melhor análise e melhor compreensão destas, usando e interpretando de maneira adequada gráficos que representem esses dados. Possivelmente haverá dúvidas sobre construção, formalização de equações, entre outras, e, para isso, cabe ao professor desenvolver atividades paralelas que façam os alunos estabelecerem conexões com os assuntos já trabalhados em sala. Também quero lembrar que, além da importância dos conceitos matemáticos, o grande diferencial dessas atividades pode ser a possibilidade de discussões de ideias e o fortalecimento do quão precioso é o trabalho que a ciência exerce sobre a sociedade, sempre respeitando a opinião de cada aluno, mas, acima de tudo, mostrando a eles por argumentos sólidos que "ditados populares" não curam pandemia.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos o conceito de modelos matemáticos, seus objetivos e dificuldades ao serem criados e sua importante utilidade para a sociedade. Também foi feita uma comparação entre duas cidades brasileiras, que, apesar de distantes e apresentando condições estruturais médicas distintas, em alguns momentos se comportaram de forma muito semelhante diante da pandemia, o que mostra que não adianta ter uma condição hospitalar melhor estruturada se não houver uma política com boas atitudes e recomendações para sua comunidade, naturalmente a população tende a resistir a algumas medidas de contenção do vírus, porém são necessárias para que vidas humanas sejam protegidas e valorizadas. Aqui foi trabalhado bastante as noções básicas de estatística, equações e principalmente a interpretação de análise gráfica. Por fim, destacamos algumas propostas de atividade que espero que sejam úteis para os professores que tiverem interesse em trabalhar sobre o Covid-19 com os alunos.

BIBLIOGRAFIA

ABREU, M. O. R. de. Modelagem matemática da covid-19 usando SIR. *Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática*, Universidade Estadual de Maringá (UEM), 2020. 13, 21

ALVES, R. *Que é científico?* 3. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2007. 5

DAVIS, P.; HERSH, R. *A experiência matemática*. 3. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986. 106–108 p. 8, 10

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *O sonho de Descartes*. 1. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988. 61–68 p. 7

KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, The Royal Society London, v. 115, n. 772, p. 700–721, 1927. 14

LUIZ, M. H. R. Modelos matemáticos em epidemiologia. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2012. 13, 19

LUKÁCS, G. *Introdução a uma estética marxista: sobre a particularidade como categoria da estética*. 2. ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978. 9

MARQUESONE, E. E. A matemática nos modelos SIR. *Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática*, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), 2020. 13

STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. 6, 8

YANG, H. M. Epidemiologia matemática: estudos dos efeitos da vacinação em doenças de transmissão direta. Unicamp, 2001. 13