UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO EM MATEMÁTICA

ELDESON INÁCIO DA COSTA DA SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: SEQUÊNCIA DIDÁTICA PAUTADA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

MOSSORÓ
2021

ELDESON INÁCIO DA COSTA DA SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: SEQUÊNCIA DIDÁTICA PAUTADA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Mestrado em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal Rural do Semiárido como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática

Orientador: Fabrício de Figueredo Oliveira, Prof. Dr.

MOSSORÓ

2021

S587e Silva, Eldeson Inácio da Costa da.
Ensino-aprendizagem de análise combinatória no ensino médio: sequência didática pautada na resolução de problemas / Eldeson Inácio da Costa da Silva. - 2021.
174 f. : il.

Orientador: Fabrício de Figueredo Oliveira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2021.

1. Ensino de análise combinatória. 2. Resolução de problemas. 3. Sequência didática. I. Oliveira, Fabrício de Figueredo, orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC´s) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

ELDESON INÁCIO DA COSTA DA SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: SEQUÊNCIA DIDÁTICA PAUTADA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Mestrado em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal Rural do Semiárido como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Educação Básica de Matemática

Defendida em: 25 / 08 / 2021.

BANCA EXAMINADORA

FABRICIO DE FIGUEREDO OLIVEIRA:64905896304

Assinado de forma digital por FABRICIO DE FIGUEREDO OLIVEIRA:64905896304
Dados: 2021.10.30 14:31:26 -03'00'

Fabricio de Figueredo Oliveira, Prof. Dr. (UFERSA)
Presidente

MARIANA DE BRITO MAIA:01411175328

Assinado de forma digital por MARIANA DE BRITO MAIA:01411175328
Dados: 2021.08.25 18:44:58 -03'00'

Mariana de Brito Maia, Prof.ª Dra. (UFERSA)
Membro Examinador

Wanderley de Oliveira Pereira

Wanderley de Oliveira Pereira , Prof. Dr. (UECE-FAFIDAM)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, pelo que todos os dias provê através do dom de sua Graça, pelo seu amparo e por se fazer sempre presente ao longo de toda essa trajetória.

Agradeço a toda a minha família, em especial à minha mãe, Maria José da Costa, ao meu pai, Gledson Marcos da Silva, e à minha tia, Darliene Rufino da Silva, por todo o apoio e o estímulo que sempre me deram ao longo dos estudos, principalmente durante a graduação e a pós-graduação.

Agradeço aos meus colegas de mestrado pelo companheirismo e pela partilha de experiências ao longo de todo o curso.

Agradeço aos meus professores por compartilharem um pouco de seus conhecimentos e, assim, me permitirem vislumbrar a Matemática por uma nova ótica.

Agradeço à minha esposa, Simone Araújo Soares de Sousa, por caminhar ao meu lado em todos os caminhos, sorrindo comigo nas experiências felizes e me dando ânimo e suporte inestimáveis em meio às dificuldades. Sem ela, este trabalho não teria chegado ao fim.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Fabrício de Figueredo Oliveira, por suas valiosas sugestões e orientações para a construção deste trabalho e por sua paciência e compreensão ao longo de seu desenvolvimento.

Agradeço à Banca Examinadora por seus apontamentos, orientações e sugestões para com este trabalho.

"*The solution of problems is the most characteristic and peculiar sort of voluntary thinking*".

William James

RESUMO

O ensino de Análise Combinatória revela-se de fundamental importância para as formações matemática e cidadã dos educandos, despertando-os para formas exemplares de organizar e estruturar seu raciocínio e os preparando para se inserir no mercado de trabalho, além de os permitir compreender melhor e lidar com uma sociedade técnico-científico-informacional cada vez mais complexa. Todavia, o que se tem percebido é que esse ensino não tem aproveitado as potencialidades do assunto, resumindo-se muitas vezes à explicitação direta de suas técnicas e procedimentos e ao uso exagerado de fórmulas sem significado. Este trabalho, então, propõe uma sequência didática para o ensino-aprendizagem de Combinatória no ensino médio, estruturada na resolução de problemas. É resultado de uma pesquisa bibliográfica, realizada a fim de aprofundar a compreensão acerca do processo de ensino-aprendizagem de Combinatória, da metodologia de resolução de problemas e da estruturação de sequências didáticas. A metodologia de resolução de problemas adotada consiste da combinação dos métodos de Onuchic et al. (2019) e Polya (1995), surgindo a sequência didática a partir de sua aplicação ao desenvolvimento dos tópicos de Combinatória contemplados no ensino médio. Os resultados são discussões e conclusões pertinentes acerca do ensino-aprendizagem de Combinatória, além da estruturação de um passo a passo alternativo e construtivo para o desenvolvimento desse processo, a partir da resolução de problemas. É um material repleto de discussões e considerações propícias a despertar reflexões quanto ao ensino de Matemática de forma geral, refletindo-se acerca de como vem sendo estruturado e de como com ele contribuir.

Palavras-chave: Ensino de Análise Combinatória. Resolução de Problemas. Sequência Didática.

ABSTRACT

The teaching of Combinatorial Analysis is of fundamental importance for the mathematical and citizen formations of the students, arousing them for exemplary forms of organizing and structuring their reasoning and preparing them to enter into the labor market, in addition to enabling better understanding dealing with an increasingly complex technical-scientific-scientific society. However, what has been perceived is that this teaching has not taken advantage of the potential of the matter, often summarizing the direct explanation of its techniques and procedures and the exaggerated use of meaningless formulas. This work then proposes a didactic sequence for teaching-learning Combinatorics in high school, structured in problem-solving. It is the result of a bibliographic research, held in order to deepen the understanding of the teaching-learning process of Combinatorics, the problem-solving methodology and the structuring of didactic sequences. The problem-solving methodology adopted consists of the combination of the methods of Onuchic et al. (2019) and Polya (1995), emerging the didactic sequence from its application to the development of Combinatorics topics contemplated in high school. The results are discussions and relevant conclusions about Combinatorics teaching-learning, in addition to the structuring of an alternative and constructive step by step for the development of this process, from the problem solving. It is a material full of discussions and considerations conducive to awaken reflections on mathematics teaching in general, reflecting on how it has been structured and how with it contributing.

Keywords: Teaching Combinatorial Analysis. Problem-Solving. Didactic Sequence.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
C	Combinações simples
GTERP	Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas
ICME	Congresso Internacional de Educação Matemática
ICMI	Comissão Internacional de Ensino de Matemática
MMM	Movimento da Matemática Moderna
MD	Matemática Discreta
NCTM	Conselho Nacional de Professores de Matemática
P	Permutações simples
PC	Permutações circulares
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PFC	Princípio Fundamental da Contagem
PR	Permutações com elementos repetidos
RP	Resolução de Problemas
TDM	Teoria Disciplinar da Mente

LISTA DE SÍMBOLOS

P_n	Permutações simples de n elementos distintos
$P_n^{a_1,a_2,\ldots,a_k}$	Permutações de n elementos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ nem todos distintos, com a_1, a_2, $\ldots, a_k$ indicando as repetições
PC_n	Permutações circulares de n elementos distintos
C_n^p	Combinações simples de n elementos em grupos com p elementos

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), além de aprofundar e consolidar os conhecimentos adquiridos no ensino fundamental e de aprimorar o educando como pessoa humana, possibilitando sua formação ética e o desenvolvimento intelectual, são finalidades do ensino médio: prepará-lo para o mundo do trabalho e o exercício de sua cidadania, sendo ele capaz de continuar aprendendo e de se adaptar com flexibilidade a novas condições; e promover a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos, de modo que consiga fazer conexões da teoria com a prática.

Dessa forma, a Matemática desempenha um papel de fundamental importância na formação do educando, de modo que, como é constatado em Brasil (2006), os conteúdos nela trabalhados devem sempre ser pensados com fins a agregar um valor formativo, valorizando sobretudo o raciocínio matemático (estabelecer hipóteses, tirar conclusões, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, etc.), a apresentação de propriedades e fórmulas matemáticas acompanhadas de explicação e dedução e o uso da Matemática como recurso para a resolução de problemas.

Assim, a Análise Combinatória, por despertar o indivíduo para uma forma particular de raciocínio e por se tratar de uma parte da Matemática possível de ser percebida tanto em situações comuns do cotidiano como em aplicações ao mercado de trabalho e ao universo científico-tecnológico, detém, portanto, grande potencial em mostrar e construir esses valores, sendo capaz de fazê-lo, na verdade, com razoável espontaneidade e, dessa forma, contribuir de modo significativo com a formação matemática dos estudantes.

Entretanto, como é apontado por Bachx, Poppe e Tavares (1975)[1], esse potencial não está sendo oportunamente explorado, de modo que, assim como ocorre com outros assuntos da Matemática, muitas vezes a Combinatória ironicamente acaba sendo, para muitos estudantes, mais um tópico da disciplina que requer pura e simplesmente a aplicação inconsciente de equações “instantâneas” e sem sentido a problemas extremamente parecidos uns com os outros.

Este trabalho, portanto, tem como objetivo principal contribuir com o processo de ensino-aprendizagem de Combinatória por meio de uma sequência didática estruturada na resolução de problemas. Mais especificamente, objetiva-se investigar mais a fundo esse processo, verificar seus resultados e as orientações deles oriundas e compreender melhor como

---

[1] Esse apontamento será discutido mais a fundo na Seção 2.2.

estruturar o processo de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.

Dessa forma, ele está estruturado ao longo de três seções principais, nas quais se pontuam recursos essenciais à estruturação da sequência a ser proposta, desde sua motivação, passando por sua metodologia, até se chegar à sua explicitação.

Nesse sentido, quanto à motivação, na Seção 2 são feitas considerações voltadas ao ensino-aprendizagem de Combinatória no ensino médio, objetivando-se delimitar o tema e entender a problemática. Primeiramente são conduzidas discussões e análises com o propósito de se compreender melhor o que é Combinatória, percebendo-se sua relação com a Matemática Discreta, comentando-se algumas das suas principais técnicas e conhecendo-se alguns dos contextos de sua aplicação.

Em seguida, passam-se a discutir mais especificamente alguns aspectos relacionados ao seu processo de ensino-aprendizagem. Para isso, são feitas observações quanto: à sua relevância no currículo de Matemática; às razões pelas quais se opta por limitar sua abrangência a algumas específicas técnicas de contagem; a alguns obstáculos, dificuldades e fragilidades que se têm constatado nesse processo; às principais recomendações e orientações apresentadas por alguns dos mais influentes documentos nacionais relativos à educação (BNCC, OCEM, PCN); e, por fim, à sua estreita relação com a resolução de problemas.

Quanto à metodologia de resolução de problemas, na Seção 3 tem-se o objetivo de compreendê-la e, com essa finalidade, são feitas considerações minuciosas a seu respeito. Inicialmente, faz-se uma breve jornada através da história de seu desenvolvimento, mostrando-se como algumas concepções sobre o ensino e, principalmente, a aprendizagem de Matemática, evoluíram até culminarem na resolução de problemas como uma metodologia a ser considerada, evidenciando-se também os diversos contextos e os principais nomes que configuram essa trajetória.

Em seguida, são feitas discussões em relação a alguns aspectos referentes a problemas, primeiramente compreendendo-se melhor o que são e, posteriormente, analisando-se as classificações apontadas por Polya (1962) e em Brasil (2006).

A partir daí, visando-se compreender melhor essa metodologia e os seus impactos na aula de Matemática, as discussões se voltam mais especificamente a observar e analisar considerações acerca das seguintes questões: as diferentes abordagens oriundas da pluralidade de interpretações a seu respeito; as alterações que provoca nos papéis desempenhados pelo professor e pelos estudantes na aula de Matemática; e os benefícios que motivam e encorajam sua implementação.

A partir dessas considerações, chega-se ao detalhamento do método aqui adotado, analisando-se como se organizam a quatro fases de Polya (1995) em meio às dez etapas de Onuchic et al. (2019), detalhando-se também as finalidades de cada uma delas no processo de construção do conhecimento matemático por meio da resolução de problemas.

Na Seção 4 é realizada a aplicação desse método ao ensino-aprendizagem de Combinatória, o que dá origem à sequência didática. Para isso, são feitas inicialmente considerações breves, porém necessárias, acerca de sequências didáticas. O propósito é compreender melhor do que se tratam e também a sua finalidade neste trabalho, percebendo-as como recursos convenientes a uma prática estruturada na resolução de problemas.

Após isso, passa-se ao seu detalhamento. Ao longo de sua estrutura, pontuam-se os tópicos que são trabalhados, os quais são compostos (cada um) por uma técnica de contagem. Dentro de cada um desses tópicos estão os problemas que servem tanto de gatilho para se construir as respectivas técnicas de contagem através de sua resolução, como também de aplicação, visando aprofundar a compreensão a respeito de cada uma delas.

Cada um desses problemas é abordado segundo o método que combina as dez etapas de Onuchic et al. (2019) e as quatro fases de Polya (1995), buscando-se fornecer uma boa quantidade de detalhes da situação que vai desde sua proposição até se chegar à formalização do assunto que aborda, apresentando-se inclusive possíveis diálogos entre o professor e seus alunos.

Isso se mantém assim ao longo do desenvolvimento de cada tópico, ressaltando-se que, no final do tópico referente às combinações simples, é apresentado ainda um complemento, mostrando-se uma maneira de motivar e abordar duas propriedades importantes relativas a esse assunto.

Nas Considerações Finais são feitos resgates acerca de aspectos importantes levantados ao longo deste trabalho, ressaltando-se principalmente aqueles que se referem ao cenário do ensino-aprendizagem de Combinatória, aos objetivos nele defendidos e aos resultados por ele encontrados, apontando-se também as expectativas que a partir dele se desprendem.

Assim, com fins a dar início ao percurso anteriormente traçado, na seção a seguir são levantas as primeiras considerações. Nela são discutidos alguns pontos relativos à Análise Combinatória para que, dessa forma, se possa perceber e compreender como está estruturado o contexto de seu processo de ensino-aprendizagem, conhecendo-se quais as expectativas que se tem sobre seus resultados e refletindo-se sobre a realidade geral em que se encontra.

2 O ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

2.1 Compreendendo a análise combinatória

A Análise Combinatória certamente não é algo simples de ser definido através de palavras tais que tal definição venha a ser tanto precisa, descrevendo exatamente o que ela é ou do que se trata, quanto global, especificando tudo o que ela contempla ou a que é aplicada. Isso porque a Combinatória trata de um extenso leque de assuntos e se aplica a situações das mais diversas naturezas, desde um simples fato do dia a dia até ao desenvolvimento de recursos tecnológicos.

Em casos como esse, um modo bastante comum de se proceder é tentar construir uma concepção generalizada do assunto, sendo ela o menos vaga possível, pois, assim, permitirá apreciar alguns de seus aspectos específicos, apesar de não remover a possibilidade de se surpreender com a existência de outros ainda não contemplados.

Nesse sentido, uma boa ideia é conhecer como é percebida por aqueles que com ela já possuem uma boa experiência e, assim, podem promover uma concepção razoável a seu respeito. Por exemplo, Morgado et al. (2016) afirmam que a Combinatória corresponde à parte da Matemática que se preocupa em analisar estruturas e relações discretas, enquanto que, de forma a incluí-la como componente de um campo da Matemática, Morris (2017) a concebe como sendo um subcampo da Matemática Discreta.

Como base nesses apontamentos, visto que ambos mencionam, direta ou indiretamente, a Matemática Discreta (MD), é oportuno nesse ponto direcionar-se primeiramente a conhecer um pouco mais a seu respeito, para que, assim, se possa perceber e compreender como se relaciona com a Combinatória.

De acordo com Onuchic e Allevato (2011), o desprendimento da MD como um campo específico de estudos da Matemática começou a se dar na década de 1960. Isso ocorreu em resposta à necessidade de se compreender melhor quais os aspectos da Matemática que estão relacionados com o desenvolvimento e o aperfeiçoamento de algoritmos computacionais, com a criação de operações envolvidas em problemas de pesquisa, com o estudo de heurísticas implícitas ao tratamento desses problemas e, além disso, com o mundo dos negócios, contemplando, esta última relação, os aspectos que configuram o que hoje se denomina Matemática Financeira.

Esse interesse em compreender tais relações evidencia como a MD se relaciona forte e intimamente com as tecnologias informacionais e com o mercado, o que consideravelmente ajuda a explicar e a entender o motivo de seu rápido e intenso crescimento ao longo dos anos que sucederam.

Para se construir uma coerente caracterização da MD, primeiro se deve entender com clareza a que se refere a palavra "discreta", a qual aparentemente qualifica esse "tipo de matemática". Com efeito, Morris (2017) faz questão de apontar que tal palavra não está, nesse caso, empregada no seu sentido mais comum (de discrição, modéstia ou comedimento), mas num sentido específico à Matemática, o qual está mais fortemente ligado à sua raiz do latim (*discretio*), relacionando-se, assim, à ideia de separação, parcelamento, segmentação[2].

Uma maneira de compreender melhor essa ideia é compará-la com a sua oposta, isto é, com a ideia de continuidade. A fim de promover esse comparativo, a seguir são analisadas duas situações bem simples, plausíveis de acontecerem no dia a dia, e que transmitem bem a essência do que difere contínuo de discreto.

Por exemplo, caso duas pessoas sejam questionadas acerca da distância de suas residências à determinada referência de sua cidade e respondam 5 km e 6,5 km, ambas as respostas são razoáveis e não causam qualquer tipo de estranhamento, pois é possível obter tais resultados.

Todavia, caso essas mesmas pessoas sejam questionadas a respeito da quantidade de indivíduos que moram em suas respectivas residências e deem como resposta 5 e 6,5, certamente, apesar de serem os mesmos números, a última resposta causará um leve desconforto a quem esteja ouvindo, afinal, um número não inteiro de pessoas não é plausível.

Isso acontece justamente porque, na primeira situação, a grandeza em tratamento é de natureza contínua, enquanto que a da segunda situação é de natureza discreta. Em outras palavras, a noção de *contínuo* está intimamente associada à tarefa de medir, o que implica algo não passível de "separação", ou seja, que não pode ser fragmentado e tratado como uma coleção de unidades.

Como considera Meeker (2015), a "matemática do contínuo" estuda e trabalha com conjuntos não enumeráveis e trata de observar as variações que são graduais ao longo do tempo. Grandezas contínuas estão bem difundidas, por exemplo, na Álgebra Linear, na Trigonometria

---

[2] Na verdade, o que esse autor levanta é a importância de não confundir os termos em inglês *discrete* e *discreet*, sendo este o termo mais comumente empregado e significando *discrição*. Como em português ambos os sentidos aqui discutidos compartilham o mesmo termo (discreto), fez-se a adaptação para o comparativo das ideias.

e no Cálculo. Como o que se obtém, de um modo geral, é resultado de uma medição, números reais positivos estão perfeitamente adequados como resultado.

Por outro lado, a noção de *discreto* está associada à tarefa de contar, o que implica, assim, algo que pode ser parcelado e visto como uma coleção de objetos. Como também considera Meeker (2015), a “matemática do discreto” é, então, aquela que lida com conjuntos enumeráveis ou grupos finitos de números e, como o que se obtém é resultante de uma contagem, o que se espera como resposta é essencialmente um número natural.

Portanto, como resume Kenney (1996), embora a MD abrace muitas áreas da Matemática, algumas que remontam aos estágios iniciais de seu desenvolvimento e outras que estão na linha de frente da ampla fronteira de suas descobertas, ela pode ser vista de forma bastante simplificada como a matemática para tomar decisões a respeito de estruturas finitas.

Posta dessa maneira, isto é, como a “matemática das estruturas finitas”, Souza (2010) e Meeker (2015) sugerem uma classificação dos problemas que são de interesse da MD. Segundo essa classificação, considerando-se aspectos razoavelmente amplos, eles podem ser subdivididos em três categorias.

A primeira delas consiste daqueles que são denominados *problemas de existência*, nos quais o interesse fundamental reside em determinar se eles possuem ou não solução, deixando em segundo plano ou até mesmo excluído o interesse em exibi-la, caso seja comprovada sua existência.

Na segunda categoria estão os chamados *problemas de contagem*, nos quais, uma vez comprovada a existência de solução, o interesse se volta a determinar quantas são, ou seja, a contar a quantidade de soluções.

Por último, na terceira categoria residem os *problemas de otimização*, que podem ser caracterizados como aqueles em que, uma vez determinada a existência de solução, o interesse está em determinar a melhor delas, ou seja, aquela que, quando comparada às outras soluções, demonstra resultados mais adequados ou eficientes.

Dentre as categorias de problemas cobertos pela MD, são os de contagem que revelam o seu elo com a Combinatória. De fato, como define Morris (2017), a Combinatória se dedica a análises relativas às combinações e aos arranjos de estruturas discretas, o que entra em acordo com o que é simplificado por Bachx, Poppe e Tavares (1975), ao exprimirem-na como o ramo da Matemática que permite lidar com e resolver problemas em que essencialmente seja necessário escolher e arrumar os objetos de um conjunto.

Esses mesmos autores atribuem a origem da Combinatória ao estudo dos chamados “jogos de azar”, como por exemplo os que envolvem o lançamento de dados ou o embaralhamento de cartas. Entretanto, enfatizam que ela tem se desenvolvido intensamente desde então, de modo que atualmente é possível encontrar a aplicação de seus métodos em diversas instâncias, como no cálculo de probabilidades, nos problemas de transporte, nos de confecção de horários e de planos de produção, nos que se referem à estatística e também nos concernentes à teoria da informação, o que em muito se entrelaça com a discussão anterior a respeito da ascensão da MD enquanto campo de estudo da Matemática.

Além disso, ela também está fortemente difundida em outras áreas do conhecimento, podendo-se citar, por exemplo, as Ciências Biológicas, nas quais os estudos sobre as leis de herança mendeliana e suas variações, como alelos múltiplos, herança quantitativa e ligada ao sexo, recombinação gênica e ligação fatorial, exigem o domínio de noções relativas à probabilidade e à Análise Combinatória, a fim de se dar significado às leis da hereditariedade (BRASIL, s.d.a).

Morris (2017) aponta que esse intenso desenvolvimento da Combinatória tem criado nela algumas facetas ao longo dos anos, sendo a da Enumeração de caráter fundamental, pois é a partir das técnicas nela desenvolvidas que muitos dos recursos concebidos e utilizados nas outras facetas são estruturados.

Como bem-humoradamente a ela se refere, para Morris (2017), enumeração é uma palavra maior e mais requintada para se usar como sinônimo de contagem e, portanto, pode-se concluir que essa é a faceta da Combinatória que se interessa mais especificamente pelos problemas de contagem, especializando-se principalmente em desenvolver estratégias para realizá-la de modo eficiente.

Dentre essas estratégias, segundo apontam conjuntamente Morgado et al. (2016) e Morris (2017), pode-se citar a Regra da Soma (também conhecida como Princípio Aditivo), a Regra do Produto (tida também como Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem), as Permutações, os Arranjos, as Combinações, o Princípio da Inclusão-Exclusão, o Princípio da Casa de Pombos (ou Princípio das Gavetas de Dirichlet), as Bijeções, a Indução, a Recursão e as Funções Geradoras, cada uma delas estruturada a fim de serem aplicadas na resolução de diversos problemas, os quais, direta ou indiretamente, requerem a realização de uma contagem.

Algumas dessas estratégias, como por exemplo as funções geradoras, são razoavelmente complexas, exigindo bom entendimento e conhecimentos mais avançados em Matemática, para que sejam compreendidas e se possa realizar e investigar suas aplicações. Outras, porém, envolvem ideias e princípios que podem ser considerados simples de serem compreendidos, como também procedimentos que não exigem o domínio de recursos muito avançados de

Matemática, a exemplo das cinco primeiras estratégias citadas e também do Princípio das Gavetas de Dirichlet.

Uma vez que a Combinatória, como subcampo da MD, tem forte relação com o cotidiano, com o mundo dos negócios e o das tecnologias da informação, além de encontrar-se aplicada a diversas outras áreas do conhecimento, não é de hoje que ela está integrada à grade dos conteúdos referentes ao ensino de Matemática, pois a sua compreensão permite tanto resolver vários tipos de problemas presentes no dia a dia de um indivíduo, como também lhe oferecer recursos fundamentais, através dos quais possa se aprofundar e se especializar, a fim de se inserir no universo técnico-científico e no mercado de trabalho.

As discussões realizadas a seguir tratam especificamente desse ensino, buscando-se evidenciar e analisar as principais recomendações e orientações à sua execução e o que dela se espera. Para isso, são observadas algumas de suas especificidades e também algumas constatações acerca de sua implementação e de seus resultados.

2.2 Considerações e reflexões acerca do processo de ensino-aprendizagem de análise combinatória

Como é considerado em Brasil (1997), o ensino de Matemática desempenha um papel decisivo para o desenvolvimento do indivíduo e sua formação como cidadão, afinal ela permite resolver problemas da vida cotidiana, tem diversas aplicações no mundo do trabalho e é fundamental para a construção de conhecimento em outras áreas curriculares, interferindo, dessa forma, de modo acentuado na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na articulação e aprimoramento do raciocínio dedutivo.

Desse modo, visando a alcançar o cumprimento desse papel, o currículo precisa ser pensado e elaborado com cautela, levando-se sempre em consideração critérios como a variedade de conexões que podem ser estabelecidas entre os diferentes blocos de conteúdo, o grau da ênfase que deve ser dada a cada item e os níveis de aprofundamento dos conteúdos, em função das possibilidades de compreensão dos estudantes.

Assim, de acordo com o que é apontado em Brasil (2006), esse currículo deve ser considerado e estruturado de tal forma que, ao final do ensino médio, os estudantes sejam capazes de usar a Matemática para: lidar com problemas presentes no dia a dia; construir modelos que representem fenômenos estudados nas diversas áreas do conhecimento; compreendê-la como uma ciência e, como tal, apresenta características particulares, sendo organizada através de axiomas, teoremas e demonstrações; percebê-la como um patrimônio histórico da humanidade, uma vez que foi (e está sendo) construída ao longo do desenvolvimento da sociedade; e identificá-la como uma ferramenta essencial ao desenvolvimento e aperfeiçoamento técnico-científico.

Considerando-se essas instâncias, mas, em particular, a última, é possível notar, sendo inclusive levantado em Brasil (1997), o aumento da necessidade de se compreender as informações veiculadas nos cada vez mais variados meios de comunicação, já que é preciso fazer leituras, interpretações, tomar decisões e fazer prognósticos, ações essas que influenciarão tanto na vida pessoal do indivíduo, como também na da sociedade como um todo.

Possuir tal compreensão, isto é, estar tecnologicamente alfabetizado (como comumente é falado), pressupõe fazer leituras e interpretações de informações fornecidas e organizadas de diversas formas, cada uma delas referente ao tipo de veículo que as transmite, para com elas ser capaz de formular resoluções para problemas, o que necessariamente requer que se recolham e se analisem dados.

Unindo-se esses apontamentos com algumas discussões anteriores, é possível perceber que essa faceta técnico-científico-informacional da sociedade contemporânea traz consigo a necessidade de que se incorporem ao currículo de Matemática conteúdos (ou objetos de conhecimento, como são atualmente referidos) que permitam ao indivíduo, no exercício de sua cidadania, saber lidar com os dados e as informações que diariamente recebe, o que implica ter noções pelo menos básicas de estatística, saber ler e interpretar esses dados quando apresentados em gráficos e tabelas, e também pensar, raciocinar e refletir segundo noções relativas ao cálculo de probabilidades e, em especial, à Combinatória.

Nesse sentido, como é discutido em Brasil (2006), o estudo e o domínio dos assuntos, das ferramentas e das estratégias referentes à Combinatória são essenciais para que os estudantes adquiram conhecimentos em relação ao levantamento de possibilidades e ao cálculo da medida da chance de cada uma delas acontecer, o que traz novamente à tona o estreito laço que desde o princípio vincula a Combinatória à Probabilidade.

Ela também tem íntima relação com certas noções referentes a experimentos compostos discretos (que são uma sucessão de experiências que necessariamente envolvem variáveis discretas), pois, ao invés de se pensar no experimento como um todo, pode-se analisar cada um de seus componentes individualmente, através de operações combinatórias.

Além disso, segundo é apontado em Brasil (s.d.b), mais do que possibilitar uma abordagem mais completa no estudo da probabilidade, a Combinatória também permite desenvolver uma forma singular de pensamento em Matemática, denominada raciocínio combinatório.

Assim, como é debatido também em Brasil (s.d.b), o que se objetiva com o ensino de Combinatória no ensino médio é fazer os estudantes perceberem e compreenderem o princípio multiplicativo, empregando-o em diversos tipos de problemas de contagem. Dessa forma, através do estudo da Combinatória, intenta-se que os estudantes desenvolvam e empreguem habilidades como:

> - Decidir sobre a forma mais adequada de organizar os números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.
> - Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.
> - Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando processos de contagem (BRASIL, s.d.b, p. 127).

Deixando mais explícitos quais são esses processos de contagem, em Brasil (1997, p. 38) é resumido que, com relação à Combinatória, o objetivo de seu ensino é levar os estudantes a lidarem "[...] com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem".

Como visto anteriormente, a Combinatória contempla diversas ferramentas que permitem resolver vários tipos de problemas que requerem uma contagem, algumas delas complexas, exigindo compreensão e domínio mais apurados do conhecimento matemático, outras mais simples, cuja assimilação e aplicação não exigem níveis tão elevados de aprofundamento.

Sendo assim, mesmo o princípio das gavetas sendo uma dessas estratégias mais razoáveis de compreensão, possibilitando ainda resolver uma variedade de problemas que outras ferramentas combinatórias não resolvem, por que o foco do ensino médio se volta principalmente ao princípio multiplicativo, às permutações, aos arranjos e às combinações, evidenciando-se ainda alguns tipos específicos de permutações?

Morgado et al. (2016) explicam que, tratando-se de um curso primário de Análise Combinatória, como é o caso do ensino médio, o privilégio dado ao estudo dessas técnicas de contagem se dá por alguns motivos.

> Em primeiro lugar, entre os vários tipos de "números para contagem" da Análise Combinatória eles são certamente os mais simples e de uso mais amplo. Além disso, eles permitem resolver uma grande quantidade de problemas de Análise Combinatória. Outra razão para seu estudo é a aplicabilidade desses números a problemas de probabilidades finitas, um campo de aplicação importante da Análise Combinatória (MORGADO et al., 2016, p. 2).

Dessa forma, como é enfatizado em Brasil (s.d.b), compreender o raciocínio combinatório e, consequentemente, dominar essas técnicas, significa o estudante, frente a um problema de contagem, ter a capacidade de fazer decisões acerca da melhor forma de organizar os dados do problema para poder, então, de modo mais eficaz, contar os casos possíveis e encontrar a sua solução. Com isso subentende-se que essas técnicas não devem ser aprendidas como "mais uma lista de fórmulas", mas como processos que exigem a construção de modelos simplificados e explicativos de cada situação em que estão envolvidas.

Entretanto, essa não é a realidade geral em que se encontra, em particular, o ensino de Combinatória. De fato, como é relatado na apresentação do livro *Prelúdio à Análise Combinatória*,

> Colocada tradicionalmente em definições e fórmulas, seu estudo habitua os estudantes a um trabalho mecânico que muitas vezes exclui a compreensão do que estão fazendo. A confusão entre arranjos e combinações é comum em classes de principiantes. E, em geral, o professor só consegue desenvolver os agrupamentos simples, pois, quando tenta abordar os agrupamentos com repetição, a situação se complica (BACHX; POPPE; TAVARES, 1975).

Essas considerações refletem o desequilíbrio e a confusão, no ensino de Combinatória, de como dosar a atenção que deve ser distribuída entre a compreensão das técnicas e o uso de suas equações características. Como defendem Morgado et al. (2016, p. 2),

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução. [...] se a aprendizagem [de seus] conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas.

Desse modo, como é esclarecido em Brasil (s.d.b, p. 126),

> As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no ensino médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril.

Nota-se, assim, que parece existir um vínculo entre a resolução de problemas e um ensino eficiente de Combinatória, isto é, o qual permita desenvolver o raciocínio combinatório e, ao mesmo tempo, enxergar as fórmulas como generalizações de sua aplicação na resolução de diferentes tipos de problemas de contagem, não como o fim e a síntese dessa parte da MD.

Essa relação fica evidente em Brasil (2017, p. 546), ao ser descrita, dentre as habilidades referentes à unidade de conhecimento *Probabilidade e Estatística*, a habilidade de "resolver e elaborar[3] problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama da árvore", a qual faz parte do conjunto de habilidades relativas à *Competência 3*, que compreende "utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente" (BRASIL, 2017, p. 535).

Na verdade, essas últimas considerações (principalmente a relativa à habilidade), além de firmarem a relação anteriormente mencionada, trazem uma visão diferente para o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, guiado e apoiado na resolução de problemas.

De fato, o foco que antes era sugerido ser dado ao princípio multiplicativo, às permutações, aos arranjos e às combinações, agora deve ser passado a evidenciar o uso de tal princípio (juntamente com o aditivo) enquanto que essas três últimas técnicas devem passar a ser enxergadas pelos estudantes não como ferramentas isoladas e independentes, mas como consequências e modelos da aplicação desse princípio à diversidade de problemas de contagem.

Como relatam Bachx, Poppe e Tavares (1975) no prefácio de seu livro *Prelúdio à Análise Combinatória*, "a Análise Combinatória era um verdadeiro tabu para os estudantes. Era mesmo considerada um dos assuntos mais difíceis de compreensão em Matemática. Todavia, com a utilização sistemática do Princípio Multiplicativo, tudo se tornou mais simples". É com essa visão que este trabalho se estrutura.

Além disso, também orientam e ajudam a organizar a estrutura deste trabalho as sugestões dadas por Morgado e Carvalho (2015). Elas visam repensar o ensino de Análise Combinatória com fins a alcançar a real compreensão e satisfação dos estudantes pela resolução de problemas de contagem, enxergando-se neles, principalmente, a aplicação do Princípio

---

[3] De acordo com o que é exposto em Brasil (2017), o uso de *Resolver e Elaborar Problemas* em lugar de *Resolver Problemas* justifica-se pelo fato de que esta opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas. No sentido de que a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvam os conceitos abordados e, ao mesmo tempo, se promova a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria caso algum de seus dados fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Fundamental da Contagem (PFC) e, simultaneamente, fazendo-os se desvencilhar do uso mecânico e exagerado de fórmulas.

> 1. Não faça fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as ideias gerais e tornam as coisas mais complicadas. Quem troca o princípio básico da contagem por fórmulas de arranjos, permutações e combinações tem dificuldade de resolver até mesmo o nosso segundo exemplo (o das bandeiras[4]).
> 2. Aprenda e faça com que os alunos aprendam com os erros. É importante, diante de uma solução errada, analisar porque ela está errada.
> 3. Você quer mostrar que é o bom ou quer que seus alunos aprendam? Se você prefere a segunda alternativa, resista à tentação de em cada problema buscar solução mais elegante. O que deve ser procurado é um método que permita resolver muitos problemas e não um truque que resolva maravilhosamente o problema. [...] Não se deve mostrar o truque antes de mostrar os métodos. A beleza de alguns truques só pode ser apreciada por quem tem domínio dos métodos. Combinatória não é difícil; impossível é aprender alguma coisa com truques em vez de métodos.
> 4. Não dê preferência a raciocínios destrutivos, raciocínios do tipo contar a mais e depois descartar o que não servia e foi contado indevidamente. Os raciocínios que resolvem a maior parte dos problemas de Combinatória são essencialmente construtivos. Embora em certos casos seja melhor usar um raciocínio destrutivo, seus alunos só se sentirão seguros quando dominarem os raciocínios construtivos. [...].
> 5. Um processo seguro de tornar as coisas complicadas é começar assim: esse é um problema de arranjos ou de combinações? [...] Aliás, para que servem arranjos (MORGADO; CARVALHO, 2015, p. 134).

Além disso, ressalta-se que a quinta e última sugestão fez com que se optasse por excluir da abordagem que aqui é desenvolvida a técnica de arranjos como um tópico isolado, passando-se a enxergá-lo somente como aplicação do PFC e que, por conseguinte, não precisa ser tomado como técnica.

As técnicas de permutações e combinações também são exploradas como consequências da aplicação desse princípio, mas, como despertam discussões relevantes de serem realizadas, destacam-se na abordagem essas nomenclaturas, para que contemplem as características dos problemas a que são aplicadas.

A seção a seguir está organizada com a intenção de mostrar a resolução de problemas como uma metodologia estruturada e bastante aprofundada, requerendo, desse modo, que seja analisada com maior riqueza de detalhes, a fim de que não seja confundida com a mera aplicação e resolução de “problemas” que corriqueiramente já acontece nas aulas de Matemática.

[4] Refere-se ao problema aqui abordado na seção 4.2.1.3.

3 O ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

3.1 A resolução de problemas: aspectos históricos

Ao longo de seu desenvolvimento, a humanidade sempre se deparou com problemas. Ao se definir uma meta, estruturar as estratégias a serem adotadas e começar a pôr em prática o plano traçado para atingi-la, os problemas, como que naturalmente, surgem impondo resistência e servindo como obstáculos, empecilhos que devem ser confrontados e superados a fim de alcançá-la.

A própria Matemática tem, em seus mais básicos fundamentos, a busca pela solução de problemas como parte essencial de sua estrutura, sendo ela desenvolvida, aprimorada e refinada à medida que as soluções para esses problemas vão sendo encontradas ou desenvolvidas.

Nos seus primórdios, problemas de caráter prático e cotidiano (envolvendo contagens e medições, por exemplo) exigiam da comunidade ou civilização em questão o desenvolvimento de métodos, algoritmos e ferramentas que viabilizassem a superação desses problemas, permitindo, assim, contorná-los em ocasiões futuras e, também, expandir seus conhecimentos.

A partir de certo ponto da História da Matemática, os problemas começaram a adquirir mais fortemente aspecto intelectual e abstrato, desafiando os matemáticos a ultrapassarem os limites da sua imaginação e, assim, ampliar suas noções e expectativas para com a realidade. Como considera Roque (2012, n.p.),

> A matemática se desenvolveu, e continua a se desenvolver, a partir de problemas. [...] Os problemas que motivaram os matemáticos podem ter sido de natureza cotidiana (contar, fazer contas); relativos à descrição dos fenômenos naturais (por que um corpo cai?; por que as estrelas se movem?); filosóficos (o que é conhecer?; como a matemática ajuda a alcançar o conhecimento verdadeiro?); ou, ainda, matemáticos (como legitimar certa técnica ou certo conceito?).

De um jeito ou de outro, fazer matemática e resolver problemas são práticas indissociáveis.

No contexto escolar, entretanto, o ensino de Matemática tem adquirido, ao longo dos anos, um teor mais técnico, operacional e conteudista. A atenção se volta mais para os conhecimentos/conteúdos matemáticos, enquanto que os meios, as personagens, os contextos e, em especial, as inquietações/problemas que motivaram a construção e o desenvolvimento desses conteúdos, ficam omitidos ou, em algumas ocasiões, são rápida e vagamente mencionados, logo retomando-se o foco para o conteúdo.

Como afirma Roque (2012, n.p.),

> Um dos fatores que contribuem para que a matemática seja considerada abstrata reside na forma como a disciplina é ensinada, fazendo-se uso, muitas vezes, da mesma ordem de exposição presente nos textos matemáticos. Ou seja, em vez de partirmos do modo como um conceito matemático foi desenvolvido, mostrando as perguntas às quais ele responde, tomamos esse conceito como algo pronto.

Do ponto de vista científico, omitir o contexto e os problemas que instigaram e motivaram o desenvolvimento de todo um conhecimento "é natural, pois o objetivo dos pesquisadores é fazer a ciência avançar e não refletir sobre seus resultados" (ROQUE, 2012, n.p.).

Todavia, quando se fala em ensino e aprendizagem de Matemática, essa prática pode ser bastante prejudicial e dificultar esses processos, pois se corre alto risco de passar a falsa ideia de que a Matemática é uma ciência de cunho essencialmente abstrato e operacional, não estando ela, assim, relacionada a qualquer contexto real, mesmo que ele não seja comum à maioria das pessoas. Em outras palavras, a Matemática não teria funcionalidade prática, ou seja, não serviria para resolver problemas reais.

Isso é corroborado por Roque (2012, n.p.), quando ela afirma que

> Fala-se muito, hoje, em inserir o ensino de um conceito matemático em um contexto. [...] Possivelmente, quando as pessoas pedem que a matemática se torne mais "concreta", elas podem não querer dizer, somente, que desejam ver esse conhecimento aplicado às necessidades práticas, mas também que almejam compreender seus conceitos em relação a algo que lhes dê sentido.

Dessa forma, não é de hoje que professores, estudiosos e pesquisadores em Educação Matemática, preocupados com o ensino, mas, principalmente, com a aprendizagem dessa disciplina, têm arduamente tentado desfazer essa falsa impressão que se tem sobre ela, buscando-se meios para que os discentes encontrem nela algum sentido, isto é, que ela seja de alguma forma para eles significante.

Nesse sentido, como resultados desses estudos e pesquisas, surgiram ao longo dos anos novas metodologias, abordagens e estratégias de como se pensar e fazer o ensino de Matemática, algumas delas conhecidas atualmente no meio como Tendências em Educação Matemática, como apontado por Dias (2016).

Dentre essas tendências, pela forte relação com o que vem sendo discutido, faz-se destaque à metodologia de *Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de*

Problemas (ou, simplesmente, *Resolução de Problemas*, que no texto será ainda abreviada para RP).

De modo bastante conciso, tal metodologia visa ao resgate, nas aulas de Matemática, do estreito laço existente entre as práticas de fazer (ensinar, aprender) matemática e de resolver problemas, o qual, como também é defendido em Brasil (1997, p. 32), vem se enfraquecendo e se confundindo ao longo do tempo, uma vez que

> [...] tradicionalmente, os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos. A prática mais frequente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas.

Como relatam Onuchic et al. (2019), a RP é um movimento metodológico para o ensino-aprendizagem de Matemática que teve início na primeira metade do século XX, nos Estados Unidos, amparado principalmente na crença de que a aprendizagem matemática na época não estava atingindo a população escolar como deveria.

Dessa forma, com a sociedade em constante e rápido crescimento e com a economia construindo fortes bases na industrialização, tornava-se cada vez mais necessário que o cidadão melhorasse sua qualificação profissional e, consequentemente, isso exigia que ele soubesse, em particular, "mais matemática".

Visando a essa melhora na efetividade do aprendizado de Matemática, teorias psicológicas foram desenvolvidas naquele momento, focadas nos processos de aprendizagem. Até esse momento, o cenário pedagógico era orientado principalmente pela teoria psicológica conhecida como Teoria Disciplinar da Mente (TDM), a qual entendia, como afirmam Onuchic et al. (2019, n.p.),

> [...] a mente humana como uma detalhada hierarquia, isto é, uma coleção de faculdades ou capacidades, a saber: percepção, memória, intuição ou razão, imaginação e compreensão. Treinando uma faculdade, [...] ocorria uma transferência geral da mente para todas as outras e, assim, o ensino se ocupava mais em desenvolver essas faculdades do que com os conteúdos que seriam ensinados.

Não convencido da legitimidade dessa teoria e discordante com o que ela pregava, no ano de 1902, o psicólogo americano Edward Lee Thorndike (1874 – 1949) e alguns colegas deram início a uma pesquisa na qual buscavam experimentalmente verificar se essa "transferência geral da mente" de fato ocorria. Tal pesquisa gerou resultados e eles contradiziam fortemente a ocorrência dessa transferência, o que deu início a uma intensa mobilização no meio.

Nesse momento, Thorndike, como base em seus resultados, passou a desenvolver uma nova teoria psicológica, a qual ficou conhecida como Conexionismo. Segundo ela, "toda aprendizagem consiste na adição, na eliminação e na organização de conexões (isso, e nada mais). Essas conexões são formadas, ou quebradas, ou organizadas entre situações e respostas[5]" (BROWNELL, 2007, p. 26, tradução nossa).

Nesse ponto de vista, o processo de ensino compreende basicamente quatro etapas, a saber:

> 1) Identificar para o estudante os estímulos (ou a situação) aos quais ele deve reagir; 2) Identificar a reação (ou a resposta) que ele deve realizar; 3) Fazer o aluno responder à situação sob condições que recompensem o sucesso e punam o fracasso; 4) Repetir o passo 3) até que a conexão tenha sido firmemente estabelecida[6] (BROWNELL, 2007, p. 26, tradução nossa).

Apoiado na própria teoria, Thorndike lançou, em 1921, o livro *Os Novos Métodos na Aritmética*[7], no qual afirma que "os velhos métodos ensinavam aritmética pela aritmética, independentemente das necessidades da vida. Os novos métodos enfatizam os processos que a vida exigirá e os problemas que ela oferecerá[8]" (THORNDIKE, 1921, p. 1, tradução nossa).

Em outras palavras, o ensino, no caso, dos conteúdos e dos procedimentos referentes à aritmética, não deveria se construir justificado nos próprios conteúdos e procedimentos, mas focados em mostrar e perceber como eles estão ligados a contextos reais e possíveis de serem vivenciados pelo aluno, permitindo a ele aprender a lidar com situações ou problemas no mínimo prováveis de estarem presentes no seu cotidiano, especialmente no que se refere ao mercado de trabalho.

Além do aprendizado efetivo, o papel da Matemática no currículo escolar também sempre gerou inquietações e questionamentos e, através da análise anterior, é possível perceber

[5] [...] *all learning consists in the addition, the elimination, and the organization of connections – this, and nothing else. These connections are formed, or broken, or organized, between situations and responses*.

[6] *1. Identify for the learner the stimuli (or the situation) to which he is to react, 2. Identify the reation (or response) which he is to make, 3. Have the learner make this response to the situation under conditions which reward success and which punish failure, 4. Repeat step (3) until the connection has been firmly established.*

[7] *The New Methods in Arithmetic*

[8] *The older methods taught arithmetic for arithmatic's sake, regardless of the needs of life*. *The new methods emphasize the processes which life will require and the problems which life will offer.*

uma mudança na direção do olhar sobre esse papel, motivada por alterações nos aspectos social e, principalmente, econômico da época.

Tal mudança consequentemente gerou alterações na abordagem e nas metodologias adotadas, as quais, pelo que se pode perceber, passaram a primar pela conexão dos conhecimentos e conteúdos com o contexto do aluno, contexto esse do qual os problemas trabalhados nas aulas não deveriam se distanciar.

Isso é evidenciado por Onuchic et al. (2019, n.p.), pois

> Verifica-se [...] uma ampliação do papel do problema matemático, se comparado à forma como era considerado nos "velhos métodos", no sentido de que, nos "novos métodos", é dada atenção ao significado dos questionamentos levantados pelo problema e à forma como as respostas a esses questionamentos se relacionam com a Aritmética da vida real.

Falando-se de problemas, mais especificamente, de sua resolução, em seu livro Thorndike ainda enuncia uma sequência de técnicas e estratégias destinadas a esse fim.

> 1) Se você tem certeza de que sabe como resolver o problema, siga em frente e resolva; 2) Se você não vê, de modo algum, uma forma de resolver o problema, considere a questão, os fatos e a sua utilização e pergunte a você mesmo: Qual pergunta é feita? O que devo descobrir? Que fatos são dados? O que eu devo fazer para encontrar? Como eu devo usar esses fatos? O que devo fazer com esses números, e com o que sei sobre eles? 3) Planeje o que você vai fazer, e por que, e organize seu trabalho de modo que você saiba o que fez; 4) Verifique a resposta obtida, para ver se ela é válida, razoável e está de acordo com o que problema diz[9] (THORNDIKE, 1921, p. 138, tradução nossa).

Isso evidencia que ele não somente atribuía cuidado e importância ao contexto sobre os quais esses problemas iriam incidir, mas, também, a alguns processos cognitivos envolvidos em sua resolução.

Todavia, esse cuidado com os processos envolvidos na resolução de problemas ainda foi muito superficial em sua teoria. Com efeito, como relata Brownell (2007, p. 29, tradução nossa),

[9] *(1) If you know surely how to solve the problem, go ahead and solve it. (2) If you do not at once see how to solve the problem, consider the question, the facts, and their use, asking yourself: What question is asked? What am I to find out? What facts are given? From what am I to find it? How shall I use these facts? What shall I do with the numbers, and with what I know about them? (3) Plan what you are going to do, and why, and arrange your work so you will know what you have done. (4) Check the answer obtained, to see if it is true and reasonable according to what the problem says.*

> [...] a visão conexionista de aprendizagem nos leva a dar à criança, já no início, a forma de resposta que queremos que ela encontre no final das contas. E somos inclinados a fazer isso praticamente sem levar em consideração seu atual estágio de pensamento quando lhes apresentamos uma nova tarefa de aprendizagem. Na melhor das hipóteses, o resultado é pseudo-aprendizagem, memorização e verbalização superficial e vazia[10].

Em outras palavras, há um condicionamento no processo de resolução de problemas, o qual limita e conduz o aluno à "forma de resposta" esperada pelo professor. Desse modo, o processo de resolução de problemas como um todo fica fragilizado, pois o foco é colocado exatamente no seu final, perdendo-se todos os demais estágios que o aluno deve alcançar e superar durante seu desenvolvimento.

Brownell (2007, p. 27, tradução nossa) ainda enumera quatro fragilidades do ensino de Matemática com as quais a teoria conexionista tem relação, mesmo que de forma indireta.

> 1) Nossa atenção como professores está direcionada para longe dos processos pelos quais as crianças aprendem, ao passo que estamos muito preocupados com os produtos da aprendizagem; 2) Nosso ritmo de ensino é muito rápido, enquanto falhamos em dar aos alunos a ajuda de que eles precisam para evitar ou superar dificuldades; 3) Nós providenciamos o tipo errado de exercício para promover aprendizagem sólida; 4) Nossa avaliação do erro e o modo como o tratamos são superficiais[11].

Naturalmente, essa visão conexionista passou a ser tratada e discutida, avaliando-se principalmente sua influência na efetividade do processo de aprendizagem. Após muito se criticar essa teoria e se repensar a influência de sua aplicação, até o final dos anos 1940, percebeu-se que mais atenção deveria ser dada ao processo, isto é, levar-se em consideração todas as etapas nele envolvidas e não somente focar nos seus resultados.

Nesse cenário de refutação da visão conexionista e de busca por uma nova teoria psicológica orientadora, o professor e psicólogo educacional William Arthur Brownell (1895 – 1977) desenvolve sua teoria de aprendizagem significativa em matemática, segundo a qual

> [...] defende o ensino de matemática baseado em conceitos e relações entre eles, e carregado de significados práticos, que conectem a teoria à prática. Desse ponto de

---

[10] [...] *the connectionistic view of learning leads us to give the child at the outset the form of response which we want him ultimately to have. And we are inclined to do this quite without regard to his attained stage of thinking when we presente the new learning task. At best, the result is pseudo-learning, memorization, and superficial, empty verbalization.*

[11] *1. Our attention as teachers is directed away from the processes by which children learn, while we are over-concerned about the product of learning, 2. Our pace of instruction is too rapid, while we fail to give learners the aids they need to forestall or surmount difficulty, 3. We provide the wrong kinds of practice to promote sound learning, 4. Our evaluation of error and our treatment of error are superficial.*

> vista, o aluno terá uma ideia da estrutura total da disciplina e não a verá como um conglomerado de elementos não relacionados[12] (LUCCA, 2011, p. 1, tradução nossa).

Essa visão de alcançar no aluno uma aprendizagem mais significativa, foi compartilhada por outros pesquisadores como Max Wertheimer (1880 – 1943), George Katona (1901 – 1981) e David Paul Ausubel (1918 – 2008). No entanto, foi com o matemático húngaro George Polya (1887 – 1985) que o movimento metodológico RP começou a se constituir com maior expressão, tendo como base a visão de Brownell de aprendizagem significativa em Matemática.

Tido como o maior nome da teoria RP, Polya, através de suas pesquisas em Educação Matemática, lançou em 1945 o famoso livro *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*[13], uma das principais referências bibliográficas quando o assunto é resolução de problemas. Nessa obra, com bastante profundidade, ele enumera, explora e exemplifica quatro fases que julga serem executadas por um solucionador de problemas no processo de resolução. Nela traz também uma lista com sugestões de questionamentos e orientações que (numa situação de sala de aula) o professor pode direcionar a seus estudantes no intuito de conduzi-los apropriadamente e guiá-los no processo de resolução de problemas, apresentando problemas com os quais exemplifica como se dá o processamento das quatro fases de resolução e a aplicação dos questionamentos e orientações da lista.

Foi a partir de seus trabalhos (dentre livros, palestras, artigos e cursos) que a RP, enquanto metodologia de ensino, começou a ganhar certo enfoque, afinal, como afirma Schoenfeld (1992),

> O matemático mais conhecido por sua conceituação da matemática como resolução de problemas e por seu trabalho em fazer com que a resolução de problemas se concentre no ensino de matemática é Polya. De fato, o edifício do trabalho de resolução de problemas erguido nas últimas duas décadas se apoia em grande parte nas fundações de sua obra[14] (SCHOENFELD, 1992, p. 339, tradução nossa).

Foi também a partir de suas contribuições que essa metodologia ganhou mais força enquanto objeto de pesquisa, ocorrendo inicialmente com mais intensidade nos Estados Unidos

---

[12] [...] *defiende la enseñanza matemática basada em conceptos y relaciones entre éstos, y cargada de significados prácticos, que conecte la teoría con la práctica. Desde este punto de vista, el alumno tendrá una idea de la estructura total de la disciplina y no la verá como un conglomerado de elementos sin relación.*

[13] *How to solve it: a new aspect of mathematical method*

[14] *The mathematician best knwon for his conceptualization of mathematics as problem solving and for his work in making problem solving the focus of mathematics instruction is Pólya. Indeed, the edifice of problem-solving work erected in the past two decades stands largely on the foundations of his work.*

e alcançando outros países do mundo nas décadas seguintes, principalmente a partir do final da década de 1960.

Com efeito, em 1972, por exemplo, foi realizado o II – ICME[15] (Segundo Congresso Internacional de Educação Matemática), organizado pela ICMI[16] (Comissão Internacional de Ensino de Matemática), tendo Polya como um dos palestrantes do evento. Em sua palestra, como relatam Onuchic et al. (2019, n.p., grifo no original),

> Sua fala foi guiada por frases de importantes filósofos como Hadamard, Poincaré, Descartes, dentre outros, incitando que a RP fosse considerada como estratégia de ensino. Nesse mesmo evento, dois outros pesquisadores, oriundos de diferentes países, falaram sobre RP – Edith Biggs, da Inglaterra, falou sobre "Investigações e resolução de problemas em Educação Matemática" e Efrain Fischbein, de Israel, que falou sobre "Intuição, estruturas e métodos heurísticos no ensino de matemática. [...] Reflexos da teoria proposta por Polya, embora assumindo novas roupagens, foram vistos também no Japão com a metodologia de ensino chamada "Abordagem de Problemas Abertos" (*open-ended approach*), proposta pelo professor Shigueru Shimada e sua equipe, na década de 1970.

Entretanto, enquanto a pesquisa em resolução de problemas ganhava destaque e se difundia mundialmente, sua implementação no currículo escolar ironicamente caminhava a passos curtos e demorados, mesmo nos Estados Unidos, onde começou a ser observada com mais atenção enquanto estratégia e metodologia de ensino a partir de Polya.

De fato, o que estava ocorrendo naquele momento, na verdade, era que, enquanto a pesquisa gerava frutos (eventos, periódicos, artigos, livros), o currículo de Matemática das escolas norte-americanas era orientado pelas concepções do *Movimento da Matemática Moderna* (MMM) e, mesmo quando deixou de ser, ainda foi orientado durante alguns anos pelo movimento de *Retorno às Bases*, antes de finalmente apresentar a RP como metodologia de ensino.

Com fim informativo e também de evidenciar esse cenário controverso, o MMM foi um movimento metodológico de impacto mundial e que prevaleceu entre os anos de 1950 e 1970, orientando os currículos de Matemática das escolas de diversos países, inclusive o Brasil na década de 1960.

De acordo com Onuchic e Allevato (2011, p. 78), "o mundo foi influenciado por recomendações de ensinar Matemática apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, enfatizando a teoria dos conjuntos". Ou seja, basicamente a recomendação era ensinar

---

[15] 2nd *International Congress on Mathematical Education*
[16] *International Commission on Mathematical Instruction*

Matemática por uma abordagem "pura", com linguagem e terminologia refinadas e centradas na teoria dos conjuntos, desvencilhando-se a Matemática de seus caracteres concreto e aplicável ao passo em que eram enfatizados seus aspectos técnicos e a formalização.

Para ilustrar a potencialidade de dano à aprendizagem ao se adotar uma proposta como essa, Roque (2012, n.p.) detalha o que se perde quando, por exemplo, fala-se sobre *função* e *variável*, segundo o modelo de abordagem recomendado. De acordo com ela,

> [...] função será definida como um determinado subconjunto do produto cartesiano [de] dois conjuntos [...]. Ou seja, a função é somente um conjunto de pares ordenados. Essa abordagem conjuntista[17] das funções elimina todas as ideias originais associadas à variação e, portanto, à noção de variável. Conjunto e função passam a ser ideias inconciliáveis. Podemos definir variável usando a noção de conjunto, mas ao preço de conceber todos os valores possíveis da variável a um só tempo. Logo, ao invés de ser entendida como uma quantidade indeterminada, que varia, a variável passa a ser um elemento de um conjunto numérico.

Reflexos desse movimento existem até os dias atuais e, na verdade, ainda é bastante comum encontrar essa abordagem do tratamento de funções em livros didáticos de ensino médio. Como efeito, a título de ilustração, no livro didático *Matemática Completa*, referente à 1ª série do ensino médio, apesar de fazerem previamente uma abordagem de função como sendo um tipo específico de relação entre grandezas variáveis, os autores, logo em seguida, definem o produto cartesiano para poderem definir uma relação para, assim, definir formalmente uma função: "Sejam A e B dois conjuntos não vazios e f uma relação entre A e B. Essa relação f é uma função de A em B quando a cada elemento x do conjunto A está associado um e apenas um elemento y do conjunto B" (GIOVANNI; BONJORNO, 2005, p. 112).

De todo modo, como se o tratamento excessivamente abstrato da disciplina não fosse suficiente, outros fatores contribuíram para o fracasso de tal movimento. Como exemplo, as expectativas relativas à sua implementação no currículo não estavam sendo alcançadas, uma vez que foi possível constatar que as crianças não estavam aprendendo as abstrações e, simultaneamente, suas habilidades básicas tinham-se perdido na malsucedida pressa de ensinar, a crianças muito jovens, coisas como a nova teoria numérica (SCHOENFELD, 1996).

---

[17] Esse é o termo utilizado pela autora para se referir à visão de que a Matemática, em suas palavras, "partia de pressupostos que os fizeram [os matemáticos do século XIX] inventar noções que participavam de uma visão conceitual e abstrata, propícia ao desenvolvimento da noção de conjunto e à sua aplicação em problemas de naturezas diferentes" (ROQUE, 2012, n.p.).

Além disso, pode-se acrescentar também "o despreparo dos professores para desempenhar o trabalho sob essa abordagem, assim como a dificuldade das famílias em auxiliar seus filhos nas tarefas escolares, uma vez que a desconheciam" (ONUCHIC et al., 2019, n.p.).

Com o insucesso do MMM como orientador do currículo de Matemática, a reação imediata do país foi repensar e reconsiderar a orientação anterior, isto é, pensar esse currículo através do conexionismo de Thorndike, um movimento que ficou conhecido como *Retorno às Bases*[18].

De fato, é bastante comum diante de um fracasso se voltar às condições a ele anteriores para reconsiderar e reavaliar as ações, mas, nesse caso, também foi uma decisão ineficaz, afinal "esse movimento não ocorreu em outros países e, mesmo nos Estados Unidos, não teve muita força" (ONUCHIC et al., 2019, n.p.).

Com esse cenário como palco, em 1980 o NCTM[19] (Conselho Nacional de Professores de Matemática) publicou o documento *Uma Agenda para Ação – Recomendações para a Matemática Escolar para a década de 1980*[20]. O documento apresenta e detalha oito recomendações para a matemática escolar dessa década e a primeira dessas recomendações é a de que "a resolução de problemas seja o foco da matemática escolar nos anos 1980[21]" (NCTM, 1980, p. 1, tradução nossa).

No detalhamento dessa recomendação, o documento ainda enumera e discorre sobre seis critérios para essa ação:

> **1.1** O currículo de matemática deve ser organizado em torno da resolução de problemas. [...] **1.2** A definição e a linguagem da resolução de problemas em matemática devem ser desenvolvidas e expandidas para incluir uma ampla gama de estratégias, processos e modos de apresentação que abrangem todo o potencial das aplicações matemáticas. [...] **1.3** Professores de matemática devem criar ambientes de sala de aula nos quais a resolução de problemas possa florescer. [...] **1.4** Materiais curriculares apropriados para ensinar a resolução de problemas devem ser desenvolvidos para todos os níveis de ensino. [...] **1.5** Os programas de matemática da década de 1980 devem envolver os alunos na resolução de problemas, apresentando aplicações em todos os níveis de escolaridade. [...] **1.6** Pesquisadores e agências de financiamento devem dar prioridade na década de 1980 às investigações sobre a natureza da resolução de problemas e a maneiras eficazes de desenvolver resolvedores de problemas[22] (NCTM, 1980, p. 2, tradução nossa).

---

[18] *Back to the basics*
[19] *National Council of Teachers of Mathematics*
[20] *An Agenda for Action – recommendations for School Mathematics of the 1980s*
[21] *problem solving be the focus of school mathematics in the 1980s.*
[22] *1.1 The mathematics curriculum should be organized around problem solving. 1.2 The definition and language of problem solving in mathematics should be developed and expanded to include a broad range of strategies, processes, and modes of presetation that encompass the full potential of mathematical applications. 1.3 Mathematics teachers should create classroom environments in which problem solving can flourish. 1.4*

A partir desse ponto, ainda como objeto de pesquisa, mas também agora como metodologia e estratégia de ensino, a RP continuou a fazer parte das investigações de pesquisadores de diferentes partes do mundo e passou a orientar os currículos de Matemática das escolas ao redor do globo. Entretanto, um aspecto que ainda gerou discussão em relação à RP foi quanto à sua abordagem e, de fato, nos mesmos critérios acima é possível perceber certa variedade quanto aos modos de como se dá o ensino do ponto de vista da RP.

Por exemplo, no critério 1.4, a expressão "para ensinar a resolução de problemas" sugere que alguém deva aprender *sobre* a RP e, de fato, esse alguém existe e é o professor, afinal ele deve aprender os processos e as estratégias que configuram uma didática orientada por tal metodologia.

Todavia, do ponto de vista do professor, este pode ensinar Matemática *para* resolver problemas ou ensiná-la *através* da resolução de problemas, sendo justamente essas preposições que caracterizam as diferentes abordagens quanto à RP. Essas abordagens, contudo, serão discutidas mais à frente no texto com maior riqueza de detalhes.

Assim, uma vez traçado e compreendido um pouco do contexto histórico da teoria RP, conhecendo-se mais a fundo os cenários, os principais nomes e as problemáticas que o compõem, é conveniente agora analisar outro ponto importante: compreender o que é um *problema*, isto é, qual a natureza e quais as características de uma situação que a configuram como um *verdadeiro problema*.

3.2 Problemas: caracterização e classificação

3.2.1 Caracterizando o que de fato são problemas

A palavra *problema* não é nenhuma novidade no vocabulário, sendo, na verdade, utilizada com frequência ainda maior nos dias de hoje. De fato, o estilo de vida contemporâneo, embora disponha de diversos recursos que trazem maior estabilidade e, em certo aspecto, mais facilidade, é intensamente alvejado por momentos, situações e fatores que são considerados

---

Appropriate curricular materials to teach problem solving should be developed for all grade levels. 1.5 Mathematics programs of the 1980s should involve students in problem solving by presenting applications at all grade levels. 1.6 Researchers and funding agencies should give priority in the 1980s to investigations into the nature of problem solving and to effective ways to develop problem solvers.

problemáticos e, assim (cada vez em maior medida), requerem do indivíduo contemporâneo a busca por soluções rápidas e viáveis.

Todavia, para ir ao encontro dos objetivos do texto, é importante que se compreenda seu significado com um pouco mais de clareza e especificidade, a fim de que este não seja tomado desnecessariamente em sua total amplitude e generalidade, mas, sim, no sentido que se pretende aqui utilizar.

Com esse fim, é oportuno apontar que Polya, num dos trechos de seu livro *A Descoberta Matemática*[23], de 1962, interessantemente utiliza a sensação natural de sentir fome, aplicada em diferentes situações, para que, através da analogia, compreenda-se melhor a natureza que constitui o que se pode chamar de um *verdadeiro problema*. Segundo ele, considerando-se a ideia geral de "problema",

> Conseguir comida geralmente não é problema na vida moderna. Se eu fico com fome em casa, eu pego alguma coisa no refrigerador, e vou a uma lanchonete ou alguma outra loja se estou na cidade. É uma questão diferente, entretanto, quando o refrigerador está vazio ou acontece de eu estar na cidade sem dinheiro; nesses casos, conseguir comida se torna um problema. Em geral, um desejo pode ou não levar a um problema. Se o desejo traz imediatamente à minha mente, sem qualquer dificuldade, alguma ação óbvia pela qual é provável alcançar o objeto desejado, não existe um problema. Se, todavia, nenhuma ação assim me ocorre, existe um problema. Assim, ter um problema significa: *procurar conscientemente por alguma ação apropriada para alcançar um alvo claramente concebido, mas não imediatamente alcançável*. Resolver um problema significa achar essa ação[24] (POLYA, 1962, p. 117, tradução nossa, grifo no original).

Nessa mesma linha de pensamento, Lambdin (2003, p. 7, tradução nossa) afirma que "um problema é, por definição, uma situação que causa desequilíbrio e perplexidade[25]", ou seja, o que está por trás de um problema propriamente dito é o natural desejo de resolvê-lo e o caráter não evidente e desafiador de um processo segundo o qual se possa chegar à uma solução. Isto é, problemas surgem mediante situações ou eventos que trazem consigo alguma inquietação e, de certa forma, algum desconforto ou insatisfação, os quais naturalmente geram no resolvedor o desejo de contorná-los. Além disso, o que se quer alcançar deve estar claro e óbvio em sua

---

[23] *Mathematical Discovery On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*

[24] *Getting food is usually no problem in modern life. If I get hungry at home, I grab something in the refrigerator, and I go to a coffeeshop or some other shop if I am in town. It is a different matter, however, when the refrigerator is empty or I happen to be in town without money; in such a case, getting food becomes a problem. In general, a desire may or may not lead to a problem. If the desire brings to my mind immediately, without any difficulty, some obvious action that is likely to attain the desired object, there is no problem. If, however, no such action occurs to me, there is a problem. Thus, to have a problem means: to search consciously for some action appropriate to attain a clearly conceived, but not immediately attainable, aim. To solve a problem means to find such action.*

[25] *A problem is, by definition, a situation that causes disequilibrium and perplexity.*

mente, não devendo isso ocorrer, todavia, com as ações e as estratégias a serem tomadas, desenvolvidas ou executadas para se atingir esse fim.

Quando se toma essa concepção aplicada no contexto de ensino-aprendizagem de Matemática, percebe-se que, na verdade, o que é normalmente chamado de "problema" nas aulas de Matemática (como as corriqueiras "listas de problemas" ou então os "problemas propostos") muitas vezes (talvez na maior parte delas) não está de acordo com o que tal concepção expõe e defende.

Na verdade, o que se nota é que a maior parte desses "problemas" não desafia o estudante nem nele gera o ímpeto e a vontade de resolução e, como se não bastasse, algumas vezes as estratégias e os caminhos a serem seguidos na busca pela solução estão tão óbvios que nele não ocorre qualquer inquietação quanto a *o que* fazer, *como* fazer ou *por que* fazer; ele simplesmente repete mecanicamente o que já viu ou fez antes.

Como pode ser constatado em Brasil (1997),

> Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução. [...] o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada (BRASIL, 1997, p. 32).

Há aqui, no entanto, a necessidade de apontar um delicado equilíbrio que deve ser encontrado e compreendido acerca dos problemas em Matemática, necessitando-se, assim, de uma discussão um pouco mais calma e orientada.

A partir das concepções anteriores, é provável que o professor (interessado em trabalhar segundo a RP) comece a repensar sua prática e a, naturalmente, observar e selecionar para suas aulas problemas, isto é, questões com caráter mais desafiador e de resolução não imediata, o que, de fato, é coerente com o que acabou de ser exposto.

Todavia, também é provável que ele possa chegar à conclusão de que o que confere o *status* de problema a uma questão ou exercício é essencialmente a sua dificuldade, o que pode ocasionar um efeito contrário ao que se pretende, caso essa noção não seja corrigida e acabe sendo levada à frente em sua prática.

Não há dúvidas de que problemas devem apresentar certo nível de dificuldade, afinal, a proposta é trazer um desafio e, com ele, gerar interesse nos estudantes. De fato, "um problema é um 'grande' problema se ele for muito difícil, é apenas um 'pequeno' problema se for um pouco difícil. No entanto, certo grau de dificuldade pertence à própria noção de problema: onde não há dificuldade, não há problema[26]" (POLYA, 1962, p. 117, tradução nossa). Contudo, é justamente essa dificuldade que deve ser observada e cuidadosamente dosada pelo professor.

De fato, cada estudante possui ritmo de aprendizagem diferente dos demais e, consequentemente, numa mesma sala de aula é possível encontrar estudantes nos mais diferentes níveis de desenvolvimento cognitivo. Desse modo, um mesmo problema pode ser encarado de formas distintas pelos estudantes e neles gerar diferentes estímulos, ou seja, "o que é problema para algum aluno pode não ser para outro, em função de seu nível de desenvolvimento intelectual e dos conhecimentos de que dispõe" (BRASIL, 1997, p. 33).

Assim, se o problema for muito difícil, o sentimento de frustração, por não conseguir desenvolver qualquer ação para resolvê-lo, acometerá os estudantes de tal modo que, ao não encontrarem qualquer traço de satisfação ao desempenhar essa tarefa, eles simplesmente irão desistir, não sendo possível desenvolver qualquer conceito ou procedimento matemático, além de ferir drasticamente a sua autoestima.

Por outro lado, se o problema não for desafiador o suficiente e, com isso, os estudantes conseguirem enxergar sem muito esforço uma estratégia de resolução, neles não surgirá o real desejo de resolver o problema, o que, na verdade, faz com que este acabe sendo apenas mais um exercício de aplicação de algum conceito ou repetição de algum procedimento.

Para evitar essas possibilidades, é muito importante, então, que o professor conheça o nível e o ritmo de sua turma e, assim, possa selecionar ou elaborar adequadamente os problemas que serão utilizados. A fim de auxiliar o docente na tarefa de escolha ou elaboração de um problema adequado, Lappan e Phillips (1998) trazem uma lista de critérios que caracterizam o que chamam de "problemas que valem a pena".

1. O problema envolve matemática útil e importante.
2. O problema exige níveis mais altos de pensamento e resolução de problemas.
3. O problema contribui para o desenvolvimento conceitual dos alunos.
4. O problema cria uma oportunidade para o professor avaliar o que seus alunos estão aprendendo e onde eles estão enfrentando dificuldades.
5. O problema pode ser abordado por estudantes de múltiplas maneiras usando diferentes estratégias de resolução.
6. O problema tem várias soluções ou permite diferentes decisões ou posições a serem tomadas e defendidas.
7. O problema encoraja o envolvimento e o discurso dos alunos.
8. O problema se liga a outras importantes ideias matemáticas.
9. O problema promove o uso habilidoso da matemática.
10. O problema proporciona uma oportunidade de praticar habilidades importantes (LAPPAN; PHILLIPS, 1998 *apud* LESTER; CAI, 2012, p. 149).

[26] *A problem is a "great" problem if it is very difficult, it is just a "little" problem if it is just a little difficult. Yet some degree of difficulty belongs to the very notion of a problem: where there is no difficulty, there is no problem.*

É claro que o professor não tem obrigação ou talvez até mesmo condições de atender a todos os dez critérios em todo e qualquer problema que for trabalhar com sua turma. Dito isso, ressalta-se que o que deve ser observado é, primeiramente, o que se quer trabalhar ou desenvolver com os estudantes e, partir daí, verificar quais os critérios que vão ao encontro desse objetivo e que o possam promover de modo eficaz e eficiente.

Ressalta-se que o cuidado com a dosagem da dificuldade de um problema é tão crucial que o professor deve ter atenção a ela mesmo após a sua escolha. Como comentam Lester e Cai (2012, p. 156), ao debaterem sobre algumas barreiras relacionadas à resolução de problemas na aula de Matemática,

> Outra barreira importante para as experiências significativas de resolução de problemas é que os professores geralmente retiram os desafios de uma tarefa matemática, assumindo o pensamento e o raciocínio, e dizendo aos alunos como resolver o problema. Há evidências consideráveis de que muitos professores de matemática nos EUA acham que eles têm a responsabilidade de retirar o desafio (e o esforço) para os seus alunos quando estes estão envolvidos na resolução de problemas.

Compreendidas as ideias que caracterizam um problema e também a importância da correta dosagem e administração de sua dificuldade, resta ainda uma discussão a respeito de outro aspecto.

3.2.2 Classificando problemas

Ao se deparar com algum problema, principalmente no cenário escolar, é bastante comum que aquele que se dispõe a resolvê-lo venha em algum momento a se perguntar "*Que tipo de problema é este?*". É comum que esse autoquestionamento ocorra, pois

> [...] pode ser vantajoso fazer essa pergunta: se ele puder classificar seu problema, reconhecer seu tipo, colocá-lo em tal e tal capítulo de seu livro didático, ele fez algum progresso: ele pode agora se lembrar do método que aprendeu para resolver esse tipo de problema[27] (POLYA, 1962, p. 118, tradução nossa).

O fato de esse questionamento existir induz a uma *classificação* dos problemas, isto é, à existência de tipos diferentes de problemas passíveis de catalogação. Pode não parecer

[27] [...] *it could be to his advantage to ask this question: if he can classify his problem, recognize its type, place it in such and such a chapter of his textbook, he has made some progress: he may now recall the method he has learned for solving this type of problem.*

relevante à primeira vista, mas existe certa utilidade em se pensar numa classificação de problemas, pois, se for bem construída, "o tipo de problema pode sugerir o tipo de solução[28]" (POLYA, 1962, p. 118, tradução nossa).

Polya (1962) distingue dois tipos de problemas: os *problemas para encontrar*[29] (ou problemas de determinação) e os *problemas para provar*[30] (ou problemas de demonstração), classificações essas que dizem respeito às informações por eles trazidas e à solução neles procurada. Segundo ele,

> O objetivo de um *problema para encontrar* é encontrar (construir, produzir, obter, identificar, ...) um certo objeto, o desconhecido do problema. O objetivo de um *problema para provar* é decidir se uma certa afirmação é verdadeira ou falsa, prová-la ou refutá-la. Por exemplo, quando você pergunta "O que ele disse?", você propõe um problema para encontrar. Agora, quando você pergunta "Ele disse isso?", você propõe um problema para provar[31] (POLYA, 1962, p. 119, tradução nossa, grifo no original).

Nos problemas de determinação, Polya (1962) identifica e descreve três diferentes elementos, os quais denomina conjuntamente de *partes principais*[32]. Tais elementos são a *incógnita*, a *condição* e os *dados*[33].

A incógnita refere-se ao que se quer encontrar/construir/obter ao final do problema e pode se apresentar de diversas maneiras, como por exemplo, uma figura em problemas de construção em Geometria, ou um número em problemas de Álgebra em que se busca a raiz de uma equação. Independentemente de sua natureza, é imprescindível que a incógnita esteja clara para o resolvedor, pois deve-se saber o que se procura antes de se começar a procurar.

A condição refere-se aos critérios que a incógnita deve atender e, sendo assim, impõe restrições e especificações sobre o que se deve procurar. Em outras palavras, "no conjunto de objetos especificado pelo problema e ao qual a incógnita deve pertencer, existe um subconjunto daqueles objetos que satisfazem à condição, e qualquer objeto pertencente a esse subconjunto é chamado de *solução*[34]" (POLYA, 1962, p. 119, tradução nossa, grifo no original).

---

[28] [...] *the type of problem may suggest the type of solution.*
[29] *Problems to find*
[30] *Problems to prove*
[31] *The aim of a problem to find is to find (construct, produce, obtain, identify, ...) a certain object, the unknown of the problem. The aim of a problem to prove is to decide whether a certain assertion is true or false, to prove it or disprove it. For instance, when you ask "What did he say?" you pose a problem to find. Yet, when you ask "Did he say that?" you pose a problem to prove.*
[32] *Principal parts*
[33] *Unknown; condition; data*
[34] *In the set of objects specified by the problem to which the unknown must belong, there is the subset of those objects that satisfy the condition, and any object belonging to this subset is called a solution.*

Aproveitando-se da alusão feita aos conjuntos, pode-se concluir que, a depender da condição, pode existir uma solução e ela ser única, caso no qual há apenas um objeto que a ela atende; pode existir uma solução e ela não ser única, ou seja, há mais de um objeto que a atende; ou pode até mesmo não existir qualquer solução, isto é, nenhum objeto atende à condição. Em boa parte dos problemas de determinação, busca-se uma solução explícita, mas, em alguns deles, é suficiente dizer se o conjunto dessas soluções é ou não vazio.

Por fim, os dados compreendem todas as informações que são fornecidas para o problema e são justamente elas que permitirão ao resolvedor relacionar a condição do problema com sua incógnita para, assim, iniciar a busca pela solução.

> Se o problema for construir um triângulo a partir de seus lados a, b e c, os dados são os três segmentos de reta a, b e c. Se o problema for resolver uma equação quadrática
>
> $$x^2 + ax + b = 0$$
>
> os dados são os dois números conhecidos a e b[35] (POLYA, 1962, p. 120, tradução nossa).

Evidentemente, os dados de um problema de determinação devem ser tais que, a partir deles, seja possível chegar a uma solução. Contudo, isso não quer dizer que seja obrigatório eles se encontrarem totalmente explícitos desde o início. Em alguns desses problemas, os dados são postos de tal forma que, a partir deles, o resolvedor, através de sua capacidade, de sua experiência e de seus conhecimentos prévios, consiga investigar, deduzir e isolar outras informações que sejam essenciais na resolução.

Convenientemente tal proposta já atende, de modo muito preciso, aos critérios 2, 4, 9 e 10 apresentados por Lappan e Phillips (1998) *apud* Lester e Cai (2012), pois ela: (2) exige níveis mais altos de pensamento; (4) cria uma excelente oportunidade de o professor avaliar o aprendizado e as dificuldades dos estudantes; (9) promove o uso habilidoso da matemática; e (10) oportuniza a prática de habilidades importantes, como por exemplo, memorização, investigação, dedução e seleção de informações.

Nos problemas de demonstração, Polya (1962) também identifica e descreve dois elementos componentes, para os quais mantém a nomenclatura *partes principais* do problema: a *hipótese* e a *tese*[36] (ou *conclusão*).

---

[35] *If the problem is to construct a triangle from its sides a, b, and c, the data are the three line-segments a, b, and c. If the problem is to solve the quadratic equation* $x^2 + ax + b = 0$ *the data are the two given numbers a and b.*
[36] *Hypothesis*; *conclusion*

Matematicamente, a hipótese é "aquilo que se toma como dados de um problema, ou como enunciado a partir do qual se precede à demonstração de um teorema" (HIPÓTESE, 2015). Ou seja, é a hipótese do problema que apresenta condições a serem obedecidas e informações a serem utilizadas na construção da argumentação. A tese é a "consequência decorrente da hipótese" (TESE, 2015), isto é, trata-se de "onde" se quer chegar a partir daquelas condições e informações, através de argumentação coerente e consistente.

É sabido que um problema de demonstração (tanto geral quanto matemático) consiste de uma proposição (afirmação ou, ainda, declaração) que deve ser provada ou refutada. Na sua forma mais usual, uma proposição é constituída por um "se" condicional, seguido da hipótese do problema, e depois um "então", que precede a tese. Uma vez construída dessa forma, a "resolução" da proposição pode seguir dois caminhos.

> Para provar a proposição [isto é, mostrar que ela é verdadeira], devemos descobrir um elo lógico obrigatório entre as partes principais, a hipótese e a conclusão; para refutar a proposição [mostrar que ela é falsa], devemos mostrar (por um contraexemplo, se possível) que uma das partes principais, a hipótese, não implica a outra, a conclusão[37] (POLYA, 1962, p. 121, tradução nossa).

Por exemplo, a proposição "Se ele é brasileiro, então é oriundo da América Latina" é verdadeira, pois a hipótese "ser brasileiro" é condição suficiente para garantir que o indivíduo seja oriundo do continente latino-americano (tese), apesar de não ser necessária. Todavia, as proposições "Se ele é chinês, então é oriundo da Europa" e "Se ele é europeu, então vem da Alemanha" são falsas, pois, na primeira, não existe qualquer relação entre ser chinês (hipótese) e ser europeu (tese) e, na segunda, a hipótese "ser europeu" não é condição suficiente para garantir a tese de o indivíduo ser alemão; indivíduos de quaisquer outros países europeus servem como contraexemplo.

É importante ainda ressaltar que, com um olhar especial para problemas matemáticos desse tipo, a prova ou demonstração (que é a resolução de um *problema para provar*) deve partir sempre das informações e condições trazidas pela hipótese, podendo-se ainda fazer uso de outras informações ou resultados preestabelecidos para, junto com aquelas, comprovar ou refutar a tese.

---

[37] *To prove the proposition we should discover a binding logical link between the principal parts, the hypothesis and the conclusion; to disprove the proposition we should show (by a counter-example, if possible) that one of the principal parts, the hypothesis, does not imply the other, the conclusion.*

> A solução do problema [de demonstração], o resultado de nossos esforços, é uma prova, ou seja, uma seqüência de operações lógicas bem coordenadas, de etapas que partem da hipótese e terminam na desejada conclusão do teorema: cada etapa infere algum novo ponto de partes da hipótese escolhidas apropriadamente, de fatos conhecidos ou de pontos previamente inferidos[38] (POLYA, 1962, p. 123, tradução nossa).

Com isso pretende-se ratificar que a informação trazida na tese em nenhum momento pode ser utilizada como recurso de argumentação, pois, para todos os efeitos, ela ainda não foi comprovada (ou refutada); se quer comprovar (ou refutar).

Por exemplo, na proposição (verdadeira) “Se dois segmentos de reta se intersectam em seus respectivos pontos médios, então os extremos desses segmentos determinam um paralelogramo”, a hipótese diz que se deve considerar dois segmentos de reta e que eles se intersectam justamente em seus pontos médios. Pode-se utilizar uma figura para representar essa situação e também outros recursos e resultados da Geometria Plana que estejam previamente estabelecidos ou demonstrados, mas, em nenhum momento, se pode presumir que a figura assim determinada seja um paralelogramo ou utilizar-se resultados exclusivos de tais figuras. Quer-se mostrar que a condição trazida pela hipótese (combinada com recursos argumentativos anteriores) é suficiente para determinar um paralelogramo.

Ainda com relação à classificação de problemas, em Brasil (2006) são apontados e discutidos três tipos, mas, diferentemente dos de Polya (1962), estes não se referem ao tipo de informação neles contido nem ao tipo de solução que se procura e, sim, ao que se propõe desenvolver com sua aplicação. São eles os *problemas fechados*, os *problemas abertos* e as *situações-problema*.

O que caracteriza um problema fechado é que “nesse tipo de problema, já de antemão o aluno identifica o conteúdo a ser utilizado, sem que haja maiores provocações quanto à construção de conhecimento e quanto à utilização de raciocínio matemático” (BRASIL, 2006, p. 83). Ou seja, comparando-se com a concepção específica adotada no texto, basicamente a palavra “problema” foi aqui utilizada de modo trivial e simplesmente como sinônimo de “questão” ou “exercício”, de modo que “problema fechado” foi a expressão utilizada em Brasil (2006) para indicar propostas que não atendem aos critérios apresentados por Lappan e Phillips

[38] *The solution of the problem, the result of our efforts, is a proof, that is, a sequence of well-coordinated logical operations, of steps which start from the hypothesis and end in the desired conclusion of the theorem: each step infers some new point from appropriately chosen parts of the hypothesis, from known facts, or from points previously inferred.*

(1998) *apud* Lester e Cai (2012), e que servem, portanto, apenas como aplicação direta de algum procedimento.

Além de caracterizar tal proposta, em Brasil (2006) também são descritos alguns prejuízos de sua rotineira utilização, sendo, na verdade, muito identificáveis atualmente.

> O uso excessivo desse tipo de problema consegue mascarar a efetiva aprendizagem, pois o aluno, ao antecipar o conteúdo que está sendo trabalhado, [...] não deve se preocupar com o enunciado do problema, basta operar com os números que estão presentes, sem que haja qualquer reflexão sobre o resultado final [...]. [...] é importante, para o exercício da cidadania, a competência de analisar um problema e tomar decisões necessárias à sua resolução, competência que fica prejudicada quando se trabalha só com problemas "fechados" (BRASIL, 2006, p. 83).

Quanto ao segundo tipo, tem-se que "o problema do tipo 'aberto' procura levar o aluno à aquisição de procedimentos para resolução de problemas" (BRASIL, 2006, p. 84). Futuramente no texto discutir-se-á mais detalhadamente sobre a abordagem "*para* resolução de problemas", mas o que se propõe com problemas abertos é algo ligeiramente diferente da proposta por problemas fechados ("pseudoproblemas").

Em tal abordagem os conteúdos e os procedimentos ainda são apresentados aos estudantes para sua posterior aplicação e utilização na resolução de problemas, mas a proposta é fazê-lo de modo que eles percebam tais conteúdos e procedimentos como recursos fundamentais e imprescindíveis à realização de tal tarefa.

Na possibilidade de não ter ficado clara a distinção entre esses dois primeiros tipos de problema, basicamente no primeiro tipo o estudante sabe o conteúdo, sabe os procedimentos, os identifica em um "problema" e os aplica, de modo que aquele não se inclui, não se apropria e não precisa compreender a situação proposta por este.

Já no segundo tipo, os estudantes não conhecem os conteúdos ou os procedimentos que se atrelam ao problema, o qual, por assim dizer, lhes é apresentado "aberto" pelo professor. Com isso, este intenta fazê-los perceber e compreender tais conteúdos e procedimentos como recursos essenciais para a resolução de problemas.

> O conhecimento passa a ser entendido como uma importante ferramenta para resolver problemas, e não mais como algo que deve ser memorizado para ser aplicado em momentos de 'provas escritas'. [...] o "problema aberto" visa a levar o aluno a certa postura em relação ao conhecimento matemático" (BRASIL, 2006, p. 84).

É essa, ainda que em menor medida, a intenção dos famosos "problemas de introdução de unidade/capítulo".

A situação-problema é, dentre esses três tipos, o que mais se diferencia e chama a atenção quanto à sua abordagem, pois, enquanto o primeiro é basicamente uma aplicação do conhecimento e, o segundo, trata-se de sua percepção e compreensão, o terceiro visa à *construção* de tal conhecimento.

Como é relatado no documento, “de maneira bastante sintética, podemos caracterizar uma situação-problema como uma situação geradora de um problema cujo conceito, necessário à sua resolução, é aquele que queremos que o aluno construa” (BRASIL, 2006, p. 84).

Acostumou-se, nas aulas de Matemática, à adoção da seguinte sequência de abordagem: o professor apresenta e discorre a respeito de um conteúdo, assunto ou procedimento; logo em seguida, aplica e resolve alguns problemas-exemplo de sua aplicação; e, por fim, aplica outros “problemas” para que os estudantes possam replicar ou, então, adaptar o que fora por ele exposto na aula.

De fato,

> Sobre o processo de ensino e aprendizagem, uma primeira corrente, historicamente a mais presente nas nossas salas de aula de Matemática, identifica ensino como transmissão de conhecimento e aprendizagem como mera recepção de conteúdos. [...] [Essa] concepção dá origem ao padrão de ensino “definição → exemplos → exercícios” [...]. (BRASIL, 2006, p. 80).

Essa é uma realidade bastante comum nas aulas de Matemática e um dos principais argumentos apresentados para justificar tal abordagem encontra-se na dúvida “*como o aluno pode resolver um problema se ele não aprendeu o conteúdo necessário à sua resolução?*” (BRASIL, 2006, p. 84, grifo no original).

De fato, pode parecer um pouco paradoxal propor uma atividade aos estudantes sem que eles tenham pelo menos uma noção do que está por trás dela, mas talvez essa sensação seja resultado justamente da normalidade alcançada por essa prática e do longo período pela qual ela vem sendo adotada nas aulas de Matemática.

Se se pensar novamente na História da Matemática, as soluções e os recursos procedimentais, na verdade, jamais vieram antes da problemática para que, assim, pudessem ser aplicados. Pelo contrário, como já abordado no texto, as soluções surgiram pelo interesse e pelo empenho de alguém ou grupo de pessoas em solucionar o problema, tendo como recursos alguns conhecimentos prévios, intuição, indução, dedução, criatividade, paciência, esforço e persistência. Como é confirmado em Brasil (2006, p. 84), “[...] a história da construção do conhecimento matemático mostra-nos que esse mesmo conhecimento foi construído a partir de problemas a serem resolvidos”.

Uma vez que a História endossa esse fato, novamente se vê que o verdadeiro paradoxo é distorcer como se dá a relação entre conhecimento matemático e resolução de problemas, reduzindo-a a uma mera aplicação de tal conhecimento e não a enxergando como um fator valioso que pode promovê-lo com mais naturalidade e, ao mesmo tempo, trabalhar diversas habilidades no processo.

Dito isso, não é que não valha a pena aplicar e repensar a aplicação de conhecimentos já estabelecidos (afinal, isso também pode gerar descobertas) ou então que se vá repetir toda a trajetória real que foi traçada na sua construção. O ponto é que, preparar a sala de aula como um ambiente propício para que os estudantes, através da discussão, de seus próprios esforços e de sua capacidade, acompanhados e orientados pelo professor, percebam, conjecturem e construam esse conhecimento, promete gerar resultados muito mais satisfatórios em termos de qualidade de aprendizagem em Matemática.

Isso será ilustrado e discutido na seção seguinte, em que se mostrará a RP como uma metodologia de ensino e, também, quais as vantagens, os impactos e os resultados de sua adequada aplicação no contexto da sala de aula de Matemática.

3.3 Compreendendo o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas

3.3.1 As diferentes concepções e abordagens da resolução de problemas

Foi a partir de 1980, com a publicação do documento *Uma Agenda para Ação*, que a RP realmente ganhou foco como orientação de currículo e metodologia de ensino. Com esse foco, as pesquisas desenvolvidas e os esforços empregados a partir dessa década começaram a gerar resultados, resultados estes bastante satisfatórios.

Como relatam Schroeder e Lester (1989, p. 31, tradução nossa),

> Durante a última década, um grande número de recursos em resolução de problemas foi desenvolvido para uso em sala de aula na forma de coleções de problemas, listas de estratégias a serem ensinadas, sugestões de atividades e diretrizes para avaliar o desempenho na resolução de problemas. Muito desse material tem sido bastante útil para ajudar os professores a tornar a resolução de problemas um foco em sua prática de ensino[39].

---

[39] *During the past decade quite a large number of problem-solving resources have been developed for classroom use in the form of collections of problems, list of strategies to be taught, suggestions for activities, and guidelines*

Todavia, apesar desses resultados e da marcante ênfase dada à RP no documento orientador, um aspecto fundamental ainda não estava totalmente esclarecido (mesmo em tal documento) e essa falta de esclarecimento gerava discussão, inquietação e certa confusão, de modo que questionamentos da natureza de "*Como se dá o ensino de Matemática segundo a abordagem da RP?*" e "*Como fazer dela o foco de tal ensino?*" permeavam esse cenário.

De fato, como aponta Mendonça (1993, p. 258, negrito no original), "[...] o termo **Resolução de Problemas**, como acontece com a maioria dos termos em assuntos educacionais, tem um valor relativo, não absoluto, pois não expressa um significado bem definido". Com relação a esse estado de incerteza, Schroeder e Lester (1989, p. 32, tradução nossa) relatam que, "sem dúvida alguma, há razões sérias para que as coisas estejam como estão, mas a confusão provavelmente decorre das vastas diferenças existentes entre as concepções de indivíduos e grupos sobre o que significa tornar a resolução de problemas o foco da matemática escolar[40]".

Tal confusão naturalmente foi responsável pelo surgimento de ramificações e pluralidades quanto à interpretação de como alcançar esse objetivo e isso pode ser constatado pela possibilidade de se distinguirem três abordagens segundo as quais se teria o modo como a RP orientaria o ensino de Matemática, sendo elas ensinar *sobre* resolução de problemas, ensinar *para* resolução de problemas e ensinar *via* resolução de problemas[41].

Tais abordagens também são percebidas por Mendonça (1993), que se refere a elas como "interpretações" ou "modos de pensar" a RP, e se entrelaçam com algumas discussões levantadas anteriormente no texto, as quais, de modo oportuno, serão gradualmente retomadas e detalhadas na sequência.

A primeira abordagem, isto é, ensinar *sobre* resolução de problemas, pode ser percebida nos próprios critérios apresentados em *Uma agenda para Ação*, descritos anteriormente e nos quais se nota o tratamento da RP como uma teoria que deve ser ensinada ao professor (ou ao interessado) para que ele possa estruturar suas aulas (ou sua prática) segundo estratégias e métodos com ela coerentes. Ou seja, ensinar *sobre* resolução de problemas significa ensinar a respeito das estratégias e métodos didáticos que estruturam a teoria RP; resumidamente, ela se trata de um tópico a ser ensinado.

---

for evaluating problem-solving performance. Much of this material has been very usefull in helping teachers make problem solving a focus of their instrution.

[40] *Undoubtedly there are several reasons for this state of affairs, but the confusion probably stems from the vast differences among individuals' and groups' conceptions of it means to make problem solving the focus of school mathematics.*

[41] Segundo Schroeder e Lester (1989) uma enumeração e descrição dessas três abordagens foi feita por Larry L. Hatfield em 1978, mas há razões para se acreditar que outros possam ter também exposto pontos de vista similares.

Essa abordagem condiz com a interpretação de Mendonça (1993) de pensar a RP como um processo, um meio de desenvolver resolvedores e também de melhorar seu desempenho e, por essa razão, é nela que se encaixam o livro *A arte de resolver problemas*, de Polya, e quaisquer outras obras cujo objetivo central seja ensinar a respeito desse processo.

A segunda abordagem (ensinar *para* resolução de problemas) está estreitamente relacionada com as ideias por trás dos problemas abertos e dos problemas fechados, ambos descritos em Brasil (2006) e já tratados no texto. Segundo essa abordagem,

> [...] o professor concentra-se nas maneiras pelas quais a matemática que está sendo ensinada pode ser aplicada na resolução de problemas tanto rotineiros como não rotineiros. Embora a aquisição de conhecimentos matemáticos seja de primordial importância, o propósito essencial para aprender matemática é ser capaz de usá-los. [...] Além disso, o professor que ensina *para* resolução de problemas está muito preocupado com a capacidade dos alunos de transferir o que aprenderam do contexto de um problema para outros[42] (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 32, tradução nossa, grifo no original).

Em outras palavras, a relação entre essa abordagem e as ideias que sustentam a utilização dos referidos problemas é a de que o ensino de Matemática deve se dar, em primeira instância, pela exposição dos métodos e procedimentos que se pretende que os estudantes dominem (devendo ser isso feito de modo que estes os vejam como essenciais e úteis) para que, posteriormente, eles possam aplicá-los em problemas de diferentes dificuldades, sendo esse o principal foco dessa abordagem: a aplicação.

Além disso, uma vez dominada sua aplicação em determinado contexto, o trabalho e a preocupação se voltam para que os estudantes consigam, então, transferir esses métodos e procedimentos para problemas de outros contextos. Basicamente, nessa abordagem a resolução de problemas é a finalidade do trabalho pedagógico, o que entra em acordo com Mendonça (1993) e sua outra interpretação sobre a RP: pensá-la como um objetivo, um fim.

A terceira abordagem, ensinar *via* resolução de problemas, relaciona-se muito bem com a ideia que sustenta a utilização das já comentadas situações-problema, descritas em Brasil (2006). Nessa abordagem,

---

[42] [...] *the teacher concentrates on ways in which the mathematics being taught can be applied in the solution of both routine and nonroutine problems. Although the acquisition of mathematical knowledge is of primary importance, the essential purpose for learning mathematics is to be able to use it.* [...] *Further, the teacher who teaches for problem solving is very concerned about students' ability to transfer what they have learned from one problem context to others.*

> [...] os problemas são vistos não apenas como um propósito para a aprendizagem de matemática, mas também como um meio primário de fazê-lo. O ensino de um tópico matemático começa com uma situação problema que incorpora aspectos-chave do tópico, e as técnicas matemáticas são desenvolvidas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. Um objetivo de aprender matemática é transformar certos problemas não rotineiros em problemas rotineiros. Dessa forma, a aprendizagem de matemática pode ser vista como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como um exemplo do conceito ou técnica matemática) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos)[43] (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 33, tradução nossa).

Através disso, é possível perceber novamente a visão aparentemente paradoxal exemplificada em Brasil (2006) de não ensinar os procedimentos e os conceitos para que, então, os estudantes os possam aplicar na resolução de problemas, mas, sim, utilizar-se de uma situação-problema construída ou pensada de tal forma para que, a partir dela, os estudantes (que não conhecem tais procedimentos e conceitos) os possam construir como recursos que possibilitem o entendimento e, claro, a resolução de tal problemática.

Isso entra em concordância com a outra interpretação de Mendonça (1993) sobre a RP, qual seja, a de pensá-la como um ponto de partida, isto é, o problema passa a ser visto como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento matemático.

Conhecidas as características de cada abordagem, é preciso, todavia, saber que existem limitações e riscos concernentes à adoção de uma prática fundamentada exclusivamente em uma delas, principalmente com relação à primeira e à segunda abordagens. Assim sendo, é perspicaz conhecer e compreender tais riscos e limitações, o que será feito logo a seguir.

3.3.2 As visões restritas da primeira e segunda abordagens

Observando-se a primeira abordagem (*sobre*), tem-se que "resolução de problemas" não é um tópico ou um assunto que componha a disciplina de Matemática e "não deve ser considerada como tal. Se o foco for ensinar *sobre* resolução de problemas, o perigo é que a 'resolução de problemas' seja considerada uma vertente a ser adicionada ao currículo[44]"

---

[43] [...] *problems are valued not only as a purpose for learning mathematics but also as a primary means of doing so. The teaching of a mathematical topic begins with a problem situation that embodies key aspects of the topic, and mathematical techniques are developed as reasonable responses to reasonable problems. A goal of learning mathematics is to transform certain nonroutine problems into routine ones. The learning of mathematics in this way can be viewed as a movement from the concrete (a real-world problem that serves as na instance of the mathematical concept or technique) to the abstract (a symbolic representation of a class of problems and techniques fot operating with these symbols).*

[44] [...] *it should not be regarded as such. If teaching about problem solving is the focus, the danger is that "problem solving" will be regarded as a strand to be added to the curriculum.*

(SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 34, tradução nossa, grifo no original). Se isso acontecer, existe a possibilidade de "em vez de a resolução de problemas servir como um contexto segundo o qual a matemática é aprendida e aplicada, ela pode se tornar apenas mais um tópico, ensinado isoladamente do conteúdo e das relações da matemática[45]" (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 34, tradução nossa).

Além desses apontamentos, Lester e Cai (2012) relatam também que pesquisas (a exemplo de Schoenfeld (1979) e Begle (1973)) sugerem que a resolução de problemas não deve ser ensinada como um tópico separado do currículo de Matemática, pois elas mostram que ensinar os alunos a usarem estratégias gerais de resolução de problemas surte pouco efeito no seu sucesso como bons resolvedores de problemas.

Com relação à adoção exclusiva da segunda abordagem como orientação da prática pedagógica (que, como já discutido, é o que ocorre com maior frequência), suas limitações e efeitos colaterais estão bastante relacionados com as discussões anteriormente realizadas sobre a utilização predominante dos problemas fechados e abertos.

> Quando essa abordagem é interpretada de forma restrita, a resolução de problemas é vista como uma atividade em que os alunos se envolvem somente *após* a introdução de um novo conceito ou em sequência ao trabalho de uma habilidade de cálculo ou algoritmo. O objetivo é dar aos alunos a oportunidade de "aplicar" conceitos e habilidades recentemente aprendidos para a resolução de problemas do mundo real[46] (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 34, tradução nossa, grifo no original).

A similaridade entre essa interpretação restrita e as discussões sobre aqueles dois tipos de problemas (principalmente os fechados) é ainda mais enfatizada quando esses mesmos autores apontam os danos da utilização frequente da estratégia dos "problemas similares".

De acordo com Schroeder e Lester (1989), isso consiste em expor a resolução de uma amostra de problemas para que ela sirva como um modelo para a resolução de outros. Desse modo, as soluções desses outros problemas podem ser facilmente obtidas ao seguir o padrão estabelecido na amostra e isso, por sua vez, acaba por gerar alguns resultados prejudiciais à aprendizagem.

---

[45] *Instead of problem solving serving as a context in which mathematics is learned and applied, it may become just another topic, taught in isolation from the content and relationships of mathematics.*

[46] *When this approach is interpreted narrowly, problem solving is viewed as an activity students engage in only after the introduction of a new concept or following work on a computational skill or algorithm. The purpose is to give students an opportunity to "apply" recently learned concepts and skills to solution of real-world problems.*

Por exemplo, se os estudantes se depararem com algum problema que não siga o padrão evidenciado na amostra, eles se sentem perdidos e perdem o interesse em sua resolução. Outra consequência é que eles se habituam a simplesmente tomar os dados do problema e a realizar os cálculos e procedimentos estabelecidos na amostra, sem se importar com o contexto da situação proposta pelo problema ou como ele se relaciona com o conteúdo. Por último, outro efeito colateral é que os estudantes começam a acreditar que todos os problemas matemáticos podem ser resolvidos rapidamente e, de certa forma, sem esforço, não havendo a necessidade de entender como a Matemática que estão usando se relaciona com situações reais.

Confirmando essas análises, de modo mais resumido, Lesh e Zawojewski (2007) também discorrem acerca dos riscos de restringir a RP tanto a um conceito explícito no currículo quanto a um meio pelo qual apenas são colocados em prática conceitos e procedimentos matemáticos previamente trabalhados. Segundo eles,

> Esclarecer estas relações pode influenciar o desenvolvimento do currículo e do ensino ao promover alternativas para o tratamento da "resolução de problemas" como um tópico isolado, separado do aprendizado de diversos conceitos matemáticos. Em outras palavras, ao se esclarecer as relações entre o desenvolvimento de conceitos e o desenvolvimento de habilidades em resolução de problemas, nossa intenção é sugerir alternativas ao ensino que seja baseado na suposição de que as habilidades em resolução de problemas se desenvolvem ao primeiramente ensinar os conceitos e procedimentos para, após isso, atribuir problemas "de enunciado" com uma etapa, que são projetados para promover a prática do conteúdo aprendido, e, então, ensinar a resolução de problemas apenas como uma coleção de estratégias como "desenhe uma figura" ou "suponha e verifique", e finalmente, se houver tempo, prover os estudantes com problemas aplicados que irão requerer a matemática aprendida na primeira etapa. Quando ensinada dessa maneira, a resolução de problemas (e suas estratégias) é retratada como processos independentes de conceito – e contexto –, isolados de ideias matemáticas importantes[47] (LESH; ZAWOJEWSKI, 2007, p. 765, tradução nossa).

Todas essas considerações são feitas baseadas nas experiências vivenciadas e nas pesquisas realizadas quanto à implementação da RP no currículo durante as últimas décadas e, de fato, é bastante provável que aqueles que possuam experiência no ensino de Matemática

---

[47] *Clarifying these relationships can inform the development of curriculum and instruction by providing alternatives to treating "problem solving" as an isolated topic, separate from the learning of substantive mathematical concepts. In other words, by clarifying relationships between concept development and the development of problem-solving abilities, our intent is to suggest alternatives to teaching that are based on the assumption that problem-solving abilities develop by first teaching the concepts and procedures, then assigning one-step "story" problems that are designed to provide practice on the content learned, then teaching problem solving as a collection of strategies such as "draw a picture" or "guess and check," and finally, if time, providing students with applied problems that will require the mathematics learned in the first step. When taught in this way, problem solving (and its strategies) is portrayed as concept – and context – independent processes, isolated from important mathematical ideas.*

venham a se identificar com o que foi apontado anteriormente. Mas, e quanto à terceira abordagem? O que se pode esperar do ensino *via* resolução de problemas?

3.3.3 Uma ampliação da terceira abordagem

Algo bastante perceptível e que é confirmado por Schroeder e Lester (1989, p. 34, tradução nossa, grifo no original) é que, "diferentemente das outras duas abordagens, o ensino *via* resolução de problemas é uma concepção que não tem sido adotada implícita ou explicitamente pelos professores, escritores de livros didáticos e desenvolvedores de currículo[48]", sendo o mais comum eles estarem baseados na abordagem *para* e, mesmo que em menor medida, também na abordagem *sobre*.

Sendo assim, torna-se complexa a tarefa de medir os impactos de sua implementação, mas certamente essa é uma abordagem que merece ser considerada e desenvolvida para o ensino de Matemática, afinal, quando comparada com as outras duas, ela "é a abordagem mais consistente com as recomendações da Comissão de Padrões[49] do NCTM[50]" (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 34, tradução nossa), uma vez que, dentre essas recomendações, estão explicitamente a de que as habilidades e os conceitos matemáticos sejam aprendidos no contexto da resolução de problemas e que o desenvolvimento de processos superiores de pensamento seja promovido através de experiências em resolução de problemas. Ou seja, os conceitos, as habilidades e os processos de pensamento devem tomar como gatilho a resolução de problemas.

Nos anos que sucederam a Comissão de Padrões, diversas foram as publicações do NCTM com orientações e recomendações acerca do ensino e do currículo de Matemática e, em boa parte delas, implícita ou explicitamente, estavam as propostas de aumentar o foco na resolução de problemas e utilizá-la como meio gerador de processos.

Entretanto, nos anos 2000, foi publicado o documento Princípios e Padrões para a Matemática Escolar[51] (conhecido como Padrões 2000[52]) e, com ele, veio uma percepção quanto à abordagem da RP que, embora seja razoavelmente sutil, culminou por apresentar essa

[48] *Unlike the others two approaches, teaching via problem solving is a conception that has not been adopted either implicitly or explicitly by many teachers, textbook writers, and curriculum developers* [...].
[49] *Curriculum and Evaluation Standards for the School Mathematics (1987)*
[50] [...] *is the approach that is most consistent with the recommendations of NCTM's Standards Commission* [...].
[51] *Principles and Standards for School Mathematics (2000)*
[52] *Standards 2000*

metodologia do modo como ela é vista hoje e como ela é tomada para desenvolver os objetivos deste trabalho.

Os Padrões 2000 apresentam e desenvolvem uma lista com seis *princípios*, que fundamentam um ensino de Matemática de qualidade (Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia), e dez *padrões*, que descrevem o que esse ensino deve possibilitar aos estudantes saber e fazer. Esses padrões são divididos igualmente em cinco *padrões de conteúdo* (Números e Operações; Álgebra; Geometria; Medidas; e Análise de Dados e Probabilidade) e cinco *padrões de processo* (Resolução de Problemas; Raciocínio e Prova; Comunicação; Conexões; e Representação).

No que se refere ao processo *Resolução de Problemas*, o documento aponta que

> Resolver problemas não é apenas um objetivo para se aprender matemática, mas também um meio importante de o fazer. É parte integrante da matemática, não uma parte isolada do programa de matemática. Os alunos precisam de oportunidades frequentes para formular, enfrentar e resolver problemas complexos que envolvem uma quantidade significativa de esforço. Eles devem ser encorajados a refletir sobre seu pensamento durante o processo de resolução de problemas, para que possam aplicar e adaptar as estratégias que desenvolveram a outros problemas e em outros contextos. Ao resolver problemas matemáticos, os alunos adquirem formas de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança em situações desconhecidas que os servem bem fora da sala de aula de matemática[53] (NCTM, 2000, p. 4, tradução nossa).

É possível perceber nessa descrição que, inicialmente, o documento reforça as críticas feitas às visões restritivas discutidas anteriormente, isto é, sobre fazer da resolução de problemas a finalidade do ensino-aprendizagem de Matemática e também sobre tomá-la como um tópico do programa de Matemática isolado dos demais, o que pode ser constatado na leitura das três primeiras linhas.

A partir desse ponto, então, o documento defende e recomenda que o processo de ensino-aprendizagem de Matemática seja promovido *via* a resolução de problemas, mas o faz de modo a não desconectar essa abordagem das outras duas, alegando que, ao passo em que se ensina e se aprende Matemática *via* resolução de problemas, as estratégias, as habilidades e os processos de pensamento serão desenvolvidos no processo (abordagem *sobre*) e que deve ser

---

[53] *Solving problems is not only a goal of learning mathematics but also a major means of doing so. It is an integral part of mathematics, not an isolated piece of the mathematics program. Students require frequent opportunities to formulate, grapple with, and solve complex problems that involve a significant amount of effort. They are to be encouraged to reflect on their thinking during the problem-solving process so that they can apply and adapt the strategies they develop to other problems and in other contexts. By solving mathematical problems, students acquire ways of thinking, habits of persistence and curiosity, and confidence in unfamiliar situations that serve them well outside the mathematics classroom.*

encorajado que eles sejam aplicados e adaptados a outros problemas e contextos (abordagem *para*).

Realmente, da maneira que são colocadas, pode parecer, à primeira vista, que há uma tricotomia entre essas três abordagens da RP, mas, "[...] na prática, elas se sobrepõem e ocorrem em várias combinações e sequências[54]" (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 33, tradução nossa).

De fato, a segunda e a terceira abordagens apresentam propostas que podem ser encaradas como contrárias, pois, enquanto naquela se parte dos conceitos e procedimentos para que eles sejam vistos como recursos para resolver problemas, nesta se parte de uma problemática para que esses mesmos conceitos e procedimentos surjam enquanto recursos que promovam a sua resolução.

Por outro lado, uma vez que esses recursos estejam construídos, é interessante e coerente aplicá-los a outros problemas e, também, verificar a possibilidade de variar essa aplicação a outros contextos, pois isso tanto possibilita intensificar sua compreensão como também aumentar o alcance de sua generalidade.

Como ressaltam Lester e Cai (2012, p. 152), "[...] não estamos dizendo que todas as tarefas com que os alunos se deparam devam ser problemáticas. Se o objetivo de uma aula é desenvolver e dominar certas habilidades, alguns exercícios são necessários". Em outras palavras, mesmo que se tenha aprendido *via* resolução de problemas, ainda existe valor em usar esse aprendizado *para* resolver problemas.

De forma análoga, seja com a finalidade de aprender para resolver problemas ou de aprender via resolução de problemas, em ambos os casos tais tarefas são auxiliadas e otimizadas quanto maior for a experiência do indivíduo e sua compreensão *sobre* resolução de problemas.

Com efeito, a tarefa de resolver uma problemática torna-se cada vez mais organizada, efetiva e bem-sucedida à medida que esse mesmo indivíduo ganha experiência e amplia seu conhecimento acerca de diferentes heurísticas, estratégias e posturas aplicáveis a essa tarefa, podendo-se citar, por exemplo, a procura por padrões, a resolução de um problema mais simples e o trabalho em sentido inverso, como enumeram Schroeder e Lester (1989).

É assim, combinada com as abordagens *sobre* e *para*, que a abordagem *via* se torna a recomendação para o ensino de Matemática e, embora não necessariamente isso venha a configurá-la como uma nova abordagem, foi essa nova forma de enxergá-la que motivou a

---

[54] [...] *in practice they overlap and occur in various combinations and sequences.*

alteração do termo *via* para o termo *através*[55], uma vez que “[...] consideramos que a expressão ‘através’ – significando ‘ao longo’, ‘no decurso’ – enfatiza o fato de que ambas, Matemática e resolução de problemas, são consideradas simultaneamente e são construídas mútua e continuamente” (ONUCHIC et al., 2019, n.p.).

Essa recomendação repercutiu no Brasil, sendo inclusive possível percebê-la nos PCN[56], ao recomendarem a RP como um “Caminho para ‘fazer matemática’ na sala de aula” e, ainda, ao enfatizarem que

> o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las (BRASIL, 1997, p. 32).

Além desse documento, também é possível percebê-la em um mais recente, na BNCC[57], descrita na Competência Específica 3 de Matemática do Ensino Médio, uma vez que, além de outras recomendações, o documento aponta que

> Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. [...] No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação. Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco (BRASIL, 2017, p. 535).

Uma vez a par dessas considerações e recomendações acerca da RP, a discussão realizada a seguir tem como finalidade expô-la como uma metodologia segundo a qual o processo de ensino-aprendizagem se dá de forma mais natural e efetiva. São apontados, incialmente, as mudanças causadas nas atitudes do professor e do estudante situados nessa

---

[55] *Through*
[56] Parâmetros Curriculares Nacionais
[57] Base Nacional Comum Curricular

metodologia e, em seguida, os benefícios de sua utilização, segundo percepções de pesquisas realizadas sobre o assunto.

3.3.4 Os papéis do aluno e do professor no contexto de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas

Como já discutido anteriormente e também foi apontado em Brasil (2006), o cenário do processo de ensino-aprendizagem de Matemática é permeado por basicamente duas visões: a primeira, de que o ensino se trata da transmissão de conhecimento (pelo professor) e, a aprendizagem, da sua recepção (pelo aluno); e a segunda, que é inversa à primeira e na qual se transfere para o aluno grande parte da responsabilidade sobre sua própria aprendizagem, sendo ele colocado como protagonista e, o professor, como mediador e auxiliador desse processo.

Historicamente, a primeira visão sempre foi predominante nas salas de aula de Matemática, estando ela, na verdade, refletida na interpretação restritiva da abordagem *para* resolução de problemas, pois nela algo deve ser ensinado para, então, ser recebido e poder ser "testado".

Entretanto, tal visão tem sido criticada e repensada ao longo dos últimos anos, uma vez que se tem constatado, de uma forma geral, que a "aprendizagem" resultante de sua aplicação apresenta diversas fragilidades ou, em outras palavras, não tem sido significativa.

De fato, "essa prática de ensino mostrou-se ineficaz, pois a reprodução correta [, considerada a evidência de que a aprendizagem realmente ocorrera,] poderia ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir, mas não aprendeu o conteúdo" (BRASIL, 1997, p. 30).

Além disso, referindo-se especificamente à resolução de problemas, "as evidências têm mostrado, ao longo dos últimos 30 anos, que tal abordagem não melhora as habilidades de resolução de problemas dos alunos, a tal ponto que hoje nenhuma pesquisa está sendo conduzida com essa abordagem como uma intervenção instrucional" (LESTER; CAI, 2012, p. 151).

De uma forma similar, a segunda visão (mais recente e menos difundida) se relaciona muito bem com a abordagem *através* da resolução de problemas e, assim como ela, surge como uma proposta de reparar os danos causados pela intensa difusão da visão anterior e se poder alcançar nos estudantes uma aprendizagem mais significativa em Matemática.

Esse modo de pensar a relação do professor e do estudante com o conhecimento matemático se conecta com as ideias socioconstrutivistas da aprendizagem, pois elas

> [...] partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele [...], ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor [...] [, cabendo] a este o papel de mediador, ou seja, de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções [...] (BRASIL, 2006, p. 81).

Entretanto, é possível perceber que aulas estruturadas segundo o ponto de vista socioconstrutivista requerem mais tempo de trabalho, tanto em sua elaboração como em sua aplicação, pois o objetivo é explorar determinado conceito ou procedimento matemático sem que ele seja (ou tenha sido) explicitado e, sim, suscitado gradativamente nos estudantes através de estímulos oriundos de uma problemática oportunamente estruturada pelo professor para esse fim.

Posto dessa forma, em concordância com Lester e Cai (2012), o professor deve, então, aceitar que as habilidades dos estudantes frequentemente se desenvolvem lentamente, exigindo uma atenção assistida e de longo prazo, desvencilhando-se, assim, do hábito estruturado de se ensinar num ritmo muito rápido e, de certa forma, indiferente às dificuldades e aos anseios dos estudantes (BROWNELL, 2007).

Essa passagem de um ensino rápido e “desinteressado” para um ensino em que o estudante não recebe, mas constrói o conhecimento com auxílio e mediação do professor, traz naturalmente a RP como uma metodologia de ensino coerente com a proposta. Consequentemente, isso traz mudanças nas posturas desses dois personagens, tanto um em relação ao outro como ambos frente ao conhecimento matemático, uma vez que “a RP [...] pressupõe aulas de Matemática com professores e alunos envolvidos em comunidades de aprendizagem, desempenhando diferentes papéis e responsabilidades, visando a promover uma aprendizagem mais significativa” (ONUCHIC et al., 2019, n.p.).

O estudante, antes visto como mero receptor e reprodutor de conceitos e procedimentos, agora passa a ser visto como o principal responsável pela sua própria aprendizagem, ao construir tais conceitos e procedimentos no contexto da RP. Em contrapartida, é muito provável que, acostumado a essa postura de receptor em sala de aula, ele venha a estranhar e, até mesmo, resistir à nova postura, mas, como reforçam Onuchic e Allevato (2011), eles devem entender e assumir essa responsabilidade.

Curiosamente, essa nova postura em sala de aula já lhes é natural fora dela e, assim sendo, tem-se aí uma oportunidade de se desenvolver suas habilidades em Matemática de um modo mais natural e significativo. Como é endossado em Brasil (1997, p. 29),

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado.

Através dessa discussão, acredita-se que, nesse ponto, seja relevante apontar que, embora a proposta de colocar o estudante como protagonista da própria aprendizagem possa, a certo tom, passar a ideia de que ele agirá individualizado dos demais, o que se tem, na verdade, é exatamente o oposto disso.

O contexto da RP pressupõe que o objetivo do trabalho pedagógico seja perseguido e atingido numa atmosfera em que os estudantes possam socializar e discutir suas ideias e concepções entre si, isto é, que o aprendizado possa ser alcançado num ambiente de coparticipação e de colaboração.

Percebe-se, então, que esse contexto também estabelece uma postura dos estudantes uns para com os outros, a qual, além de promover a aquisição do conhecimento matemático pretendido, potencializa o desenvolvimento de habilidades e aspectos relacionados ao coletivo, ao social e ao emocional, importantes para a cidadania.

De fato,

> [...] a interação entre alunos desempenha papel fundamental na formação das capacidades cognitivas e afetivas. [...] Trabalhar coletivamente, por sua vez, supõe uma série de aprendizagens, como:
>
> - perceber que além de buscar a solução para uma situação proposta devem cooperar para resolvê-la e chegar a um consenso;
> - saber explicitar o próprio pensamento e tentar compreender o pensamento do outro;
> - discutir as dúvidas, assumir que as soluções dos outros fazem sentido e persistir na tentativa de construir suas próprias ideias;
> - incorporar soluções alternativas, reestruturar e ampliar a compreensão acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, desse modo, aprender (BRASIL, 1997, p. 31).

Já o professor, como é defendido em Brasil (1997), frente ao conhecimento matemático nesse novo contexto, deve estar a par de algumas circunstâncias importantes. Primeiro (ressaltando-se o investimento na qualidade de sua formação), ele deve conhecer o contexto histórico dos conceitos matemáticos, para que possa trazer elementos que permitam mostrar aos estudantes a Matemática não como uma ciência rígida, infalível e inalterável, mas dinâmica e em busca de novas descobertas.

Além disso, ele deve conhecer os principais obstáculos concernentes à construção de tais conceitos para que, dessa forma, possa compreender aspectos importantes da aprendizagem de seus alunos e, assim, os assistir em suas eventuais dificuldades. Por último, ele deve conseguir distinguir esse conhecimento nas instâncias científica e escolar para, assim, compreender como lidar com elas de modo adequado nesse novo contexto.

Por exemplo, não é efetivo para a aprendizagem dos estudantes continuar a apresentar tal conhecimento em sua forma científica, isto é, formal e generalizada. Ao invés disso, ele deve ser primeiramente contextualizado, isto é, deve ser percebido pelos estudantes e passar por todo um processo de construção, o que implica fazer conjecturas, testar, errar, corrigir, readequar e usar aproximações, de modo a se avançar gradualmente.

Uma vez que se chegue a um resultado, passa-se, então, à mobilização desse conhecimento a situações diferentes das que o originaram, isto é, descontextualizá-lo para que, assim, possa ser generalizado a outros contextos e, por fim, formalizado.

> aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas [...]. Um conceito matemático se constrói [, então,] articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações [...] (BRASIL, 1997, p. 33).

Dessa forma, o professor, que antes detinha o conhecimento matemático e também o papel de o disseminar, agora deverá, frente aos estudantes, assumir postura e atitudes que permitam, possibilitem e potencializem o processo de sua construção por parte deles. Nesse sentido, em Brasil (1997) são apontadas e discutidas algumas das novas dimensões do seu papel, sendo elas o professor como *organizador*, como *consultor*, como *mediador*, como *controlador* e como *incentivador* da aprendizagem.

A faceta de *organizador* da aprendizagem pressupõe ações que o professor deve realizar antes da execução da atividade pedagógica, isto é, os preparativos que devem ser observados para que ela possa ser efetivamente executada. Na nova postura, essa tarefa demanda por mais tempo, profundidade e qualidade de planejamento, pois sugere que ele, primeiramente, conheça bem a realidade de seus alunos para que, assim, possa selecionar ou elaborar problemas e atividades adequados ao que se pretende com eles realizar.

Todavia, “escolher o problema ou a tarefa é apenas uma parte do ensino com resolução de problemas. Há evidências consideráveis de que, mesmo quando os professores têm bons problemas, esses podem não ser implementados como pretendidos” (LESTER; CAI, 2012, p. 153).

É nesse ponto que o professor entra em ação como *consultor* da aprendizagem, pois, ao não ser mais aquele que dá o conteúdo, a ele cabe, então, a responsabilidade de auxiliar e fornecer aos estudantes informações adequadas para superarem suas dificuldades e poderem ser conduzidos na direção do que se pretende.

Essas informações são passadas aos estudantes através do discurso do professor, na forma de explanações, sugestões e questionamentos, os quais devem ser feitos com bastante cuidado, de modo que sejam capazes de orientar e de (se necessário) dar pistas aos estudantes sem, no entanto, "dar-lhes tudo de bandeja", isto é, sem tirar toda a sua autonomia em relação ao processo e à oportunidade de aprender por descoberta.

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma *parcela razoável do trabalho* (POLYA, 1995, p. 1, grifo no original).

Dessa forma, como também defendem Lester e Cai (2012), os estudantes aprendem não somente através dos problemas propostos pelo professor, mas também pelo tipo de discurso que ele adota no processo da busca de sua solução. Para ilustrar o cuidado e a delicadeza na formulação desse discurso, Polya (1995) exemplifica e detalha o que seria uma "questão[58] má", aplicada na situação por ele descrita na resolução do problema de encontrar a medida da diagonal de um paralelepípedo reto retangular, conhecendo-se suas dimensões.

> Voltemos à situação tal como ela se apresentava [...], quando foi feita a indagação: *Conhece algum problema correlato?* Em lugar desta, com a melhor das intenções de ajudar os alunos, pode ser que se apresente a questão: *É possível aplicar o teorema de Pitágoras?*
> A intenção pode ser a melhor, mas a questão é das piores. Precisamos perceber em que situação foi ela apresentada, para em seguida ver por que há uma longa sequência de objeções contra esta espécie de "auxílio".
> (1) Se o estudante estiver próximo da solução, ele entenderá a sugestão implícita na indagação; mas se não estiver, é muito provável que de modo algum perceba aonde se quer chegar com a questão. Assim, esta deixará de auxiliar no exato momento em que o auxílio mais se fizer necessário.
> (2) Se a sugestão for compreendida, ela revelará todo o segredo, muito pouco restando para o estudante fazer.
> (3) A sugestão é de natureza muito específica. Mesmo que o estudante a aproveite na resolução do presente problema, nada aprenderá para problemas futuros. A questão não é instrutiva.

---

[58] A palavra "questão" aqui é tomada como um questionamento, uma indagação do professor direcionada a seus alunos na intenção de ajudá-los e orientá-los na observação de uma ideia ou estratégia para ser aplicada na resolução de um problema.

> (4) Mesmo que ele compreenda a sugestão, o estudante dificilmente perceberá como ocorreu ao professor apresentar tal questão. E como poderia ele, o estudante, chegar a esta questão por si próprio? Parece um passe de mágica, assim como tirar um coelho de um chapéu. A questão realmente nada tem de instrutiva (POLYA, 1995, p. 15, grifo no original).

Já foi comentado que a RP pressupõe uma atividade coletiva entre os estudantes e é justamente nesse ponto que o professor entra como *mediador* da aprendizagem. Ele desempenha essa função quando promove a comparação entre as propostas e as resoluções dos estudantes e ao solicitar e permitir que cada um externe as suas conclusões aos demais.

Com a intenção de preservar um ambiente de discussões saudáveis, é desempenhando esta função que o professor monitora e controla as intervenções e as interrupções dos outros estudantes quando um deles (ou grupo) estiver fazendo suas exposições.

É também como mediador que o professor incita e provoca a discussão, ao evidenciar procedimentos diferentes, estratégias alternativas ou etapas nas resoluções que mereçam e sejam passíveis de debate, mas que não estejam sendo percebidos pelos estudantes nas discussões. Ele também age como mediador ao atentar para execuções equivocadas, procedendo de modo que os estudantes as percebam e as possam adequar e reformular através de sua assistência.

Além disso, ele também está desempenhando essa função quando faz reflexões acerca da necessidade de se ater um pouco mais ao estudo e à construção do conhecimento em análise, ou da possibilidade de se iniciar sua síntese, a depender de como os estudantes estejam em relação às expectativas estabelecidas enquanto organizador (BRASIL, 1997).

A dimensão do papel do professor de Matemática como *controlador* da aprendizagem pode soar como um retrocesso à visão de que ele detém, controla e transfere o conhecimento matemático, mas, como é apontado em Brasil (1997), ele desempenha essa função ao determinar as condições e os prazos segundo os quais a atividade será realizada.

Nesse ponto novamente se enfatiza a importância de se oferecer tempo suficiente para que os estudantes possam realizar a atividade proposta, perdendo-se o hábito de querer respostas rápidas. Como relata Rowe (1972), algo que pôde ser observado e constatado frequente foi que, se o professor faz uma pergunta e os estudantes não a respondem, ele costuma esperar em torno de 0,9 segundo antes de comentar a resposta, fazer outra pergunta ou passar para um tópico diferente.

Com isso em mente, recomenda-se, então, não pressionar os estudantes por uma solução nem tentar encontrar para ela “atalhos”, mas permitir que seu percurso seja trilhado de forma calma e natural, sempre respeitando-se o ritmo de cada um deles. Na RP o fator tempo é de crucial importância, pois o professor deve ouvir atentamente as ideias de seus alunos e pedir que eles as esclareçam e as justifiquem, tanto oralmente como de forma escrita, e, além disso, precisa monitorar o envolvimento deles nas discussões e decidir o melhor momento e a melhor forma de encorajá-los a participar (LESTER, CAI, 2012).

Tem-se, então, a última dimensão do papel do professor. Ele age como *incentivador* da aprendizagem ao estimular a interação e a cooperação entre seus alunos no processo de resolução de problemas e ao demonstrar neles ter confiança. Dessa forma, ao encorajar que eles exponham e confrontem suas ideias, que eles defendam seus pontos de vista através da argumentação e que eles percebam que suas considerações podem não estar corretas ou que, assim como elas, as de outros também podem o estar, o professor trabalha tanto habilidades cognitivas essenciais ao que pretende construir com sua turma como também habilidades sociais e afetivas, como as que foram apontadas e descritas anteriormente no texto.

De modo a resumir essas considerações, Polya (1962) traz uma lista denominada os "Dez mandamentos para professores", na qual enumera e recomenda dez atitudes a serem adotadas pelo professor que almeja implementar e desenvolver a RP em suas aulas.

1. Esteja interessado no assunto que propõe.
2. Conheça esse assunto.
3. Conheça as maneiras pelas quais a aprendizagem se dá: A melhor maneira de aprender qualquer coisa é descobri-la por você mesmo.
4. Tente ler os rostos se seus alunos, tente ver suas expectativas e dificuldades, ponha-se você mesmo no lugar deles.
5. Dê-lhes não somente informação, mas o "saber como", as atitudes cognitivas, o hábito de trabalho metódico.
6. Deixe-os aprender tentando.
7. Deixe-os aprender pondo à prova.
8. Esteja atento às características do problema em questão que possam ser úteis na resolução de problemas futuros – tente desvendar o padrão geral que está por trás da situação concreta apresentada.
9. Não entregue o seu segredo todo de uma vez – deixe os alunos adivinharem antes de você contar – deixe-os descobrir por si mesmos, tanto quanto for viável.
10. Sugira, não force goela abaixo[59] (POLYA, 1962, p. 116, tradução nossa).

[59] *1. Be interested in your subject. 2. Know your subject. 3. Know about the ways of learning: The best way to learn anything is to discover it by yourself. 4. Try to read the faces of your students, try to see their expectations and difficulties, put yourself in their place. 5. Give them not only information, but "know-how," attitudes of mind, the habit of methodical work. 6. Let them learn guessing. 7. Let them learn proving. 8. Look out for such features of the problem at hand as may be useful in solving the problems to come – try to disclose the general pattern that lies behind the present concrete situation. 9. Do not give away your whole secret at once – let the students guess before you tell it – let them find out by themselves as much as is feasible. 10. Suggest it, do not force it down their throats.*

A partir dessas considerações, pode-se perceber que, principalmente frente à intensiva difusão da visão tradicional do ensino de Matemática, alcançar o estado em que tanto aluno quanto professor compreendam seus respectivos papéis, posturas e responsabilidades no contexto da RP é uma tarefa que requer grande medida de tempo, esforço e comprometimento, não só de ambas essas partes, mas também de todos os que estão implícita ou explicitamente envolvidos com o ensino-aprendizagem dessa disciplina.

Como afirmam Lester e Cai (2012, p. 157),

> [...] os alunos não conseguem se tornar bons solucionadores de problemas da noite para o dia. Ajudar os estudantes a se tornarem eficientes solucionadores de problemas deve ser um objetivo instrucional a ser atingido a longo prazo; portanto, devem ser feitos esforços para atingir esse objetivo em cada nível de escolaridade, em cada tópico matemático e em cada aula.

Todavia, como recomendam as orientações já mencionadas e como também enfatizam Onuchic e Allevato (2011, p. 82), existem “boas razões para se fazer esse esforço”, e essas razões serão levantadas e discutidas a seção a seguir.

3.3.5 Potencialidades do ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas: vantagens e resultados de sua implementação

A RP é uma metodologia razoavelmente recente e ainda pouco disseminada no contexto das salas de aula de Matemática, porém, sua proposta de pensar o ensino de Matemática através da resolução de problemas traz consigo, natural e historicamente, um grande potencial didático.

Todas as análises realizadas anteriormente foram feitas também com o propósito de evidenciar esse potencial e, portanto, têm a funcionalidade de corroborar a implementação dessa metodologia nas aulas de Matemática. Não obstante, diversos autores e pesquisadores têm apontado razões e vantagens que a encorajam ainda mais e, uma vez postas dessa forma, algumas delas serão apontadas e discutidas na sequência, a fim de ratificá-la.

Além da transferência do conhecimento, articulada por meio da interpretação restrita da abordagem *para* resolução de problemas, outro aspecto bastante repensado e discutido da metodologia de ensino que se pode chamar “tradicional” é o que diz respeito à efetiva compreensão do estudante em relação a esse conhecimento, isto é, se tal conhecimento de fato foi “adicionado” ao seu entendimento após a atividade didática com ele realizada.

Até algum tempo, acreditava-se que esse aspecto podia ser medido (avaliado) através da proposição de atividades e tarefas que possibilitassem a oportunidade de o estudante replicar o conhecimento ou procedimento trabalhado, mas (mesmo isso ainda ocorrendo nos dias de hoje) ser capaz de replicar não implica necessariamente o alcance do entendimento.

Quando o foco é transferido da resposta correta para o processo pelo qual a ela se chega (BRASIL, 1997), é preciso primeiramente ter-se mais clareza a respeito do que se trata essa compreensão e de como ela realmente se dá para, assim, poder-se pensar em como avaliar seu alcance pelos estudantes.

Ao se tomar em pauta a natureza da *compreensão matemática*[60], o que se tem, na verdade, é uma pergunta curiosa: “O que é compreender?”, mais especificamente, “O que é compreender em matemática?”. Essa, além de curiosa, é uma pergunta oportuna, pois, uma vez que se tem grande interesse em medir esse aspecto, é, portanto, de urgência primordial a necessidade de o entender melhor.

Com relação a isso, Schroeder e Lester (1989) apontam que um modo usual de conceber a compreensão matemática se baseia na ideia de que compreender trata-se essencialmente de fazer relações e, nessa mesma linha, Lambdin (2003) a representa como uma complexa teia de conhecimento matemático, cuja complexidade aumenta quanto maior for o número de conexões. Mais especificamente,

> O significado da atividade matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele percebe entre os diferentes temas matemáticos. Ao relacionar ideias matemáticas entre si, podem reconhecer princípios gerais [...] e perceber [...] processos [...] (BRASIL, 1997, p. 29).

Posto dessa forma, se a transferência de conhecimento e tarefas de replicar procedimentos, tão comuns no contexto escolar, não configuram metodologias adequadas para aferir o alcance da compreensão matemática, o que pode vir a configurar?

Schroeder e Lester (1989) apontam que indícios do nível de compreensão dos estudantes a respeito de conceitos específicos da Matemática surgem quando eles se engajam na resolução de problemas. Para evidenciar isso, esses autores relatam uma experiência realizada com alguns estudantes, na qual foi proposto a eles um problema e observado o modo como cada um deles procedia na busca por uma solução.

O problema consistia em separar algumas moedas em blocos, classificando-as segundo um critério. A certo ponto da resolução aparecia um impasse e, ao lidarem com ele, fora possível

---

[60] *mathematical understanding*

fazer três observações. Alguns dos estudantes não conseguiram ir além desse impasse, os quais determinaram o grupo de menor nível de compreensão. Outros deles perceberam que podiam fazer uma manipulação para superá-lo e concluir a classificação das moedas, porém não conseguiram exibir novas soluções quando foram questionados a respeito, determinando o grupo com nível intermediário de compreensão. O grupo com nível mais alto de compreensão fora determinado por aqueles estudantes que, além de conseguirem perceber a saída para o impasse, foram capazes de exibir soluções alternativas à encontrada pelo segundo grupo, ao perceberem uma propriedade que se mantinha preservada nos blocos de moedas e a utilizarem de modo engenhoso e conveniente.

Esses autores apontam que as diferentes performances dos estudantes indicam a variedade de habilidades matemáticas necessárias para entender, resolver e generalizar a solução do problema e, além disso, observam que a compreensão de alguns deles parecia se aprofundar e aumentar à medida que se debruçavam e se dedicavam ao problema, de modo que seu progresso na resolução se dava em estágios, de descoberta em descoberta, que é uma das principais características do aprendizado *através* da resolução de problemas.

Parece, então, existir uma relação entre a compreensão matemática e a RP, sendo que, como afirma Lambdin (2003), essa relação, na verdade, não só existe como é simbiótica, uma vez que cada uma delas (compreensão e resolução de problemas) é mútua e intimamente auxiliada pela outra.

De fato, conforme Lambdin (2003), um dos principais objetivos que um professor de Matemática tem para com seus alunos é o de que eles se tornem bons resolvedores de problemas, por meio do que venham a aprender nessa disciplina. Dessa forma, para que não se resumam a meros resolvedores de problemas corriqueiros, essa matemática precisa ser compreendida de modo conceitual e aprofundado e, desse modo, tem-se que a compreensão matemática age como elemento aperfeiçoador da resolução de problemas.

Lester e Cai (2012) ainda explicitam que esse aperfeiçoamento acontece de pelo menos quatro formas distintas, sendo elas: ao aumentar a riqueza dos tipos de representação adotada pelo resolvedor; ao auxiliar a seleção e a execução de processos; ao melhorar o julgamento da razoabilidade de resultados; e ao promover a transferência do conhecimento para problemas correlatos e a sua generalização a outras situações.

Por outro lado, a característica principal da metodologia RP é a de que ela se dá pela proposição de problemas através dos quais os estudantes, na busca da solução, lancem mão de tudo o que já sabem a fim de encontrar uma conexão entre esse conhecimento e a situação proposta. Assim,

> À medida que os alunos vão resolvendo os problemas, eles podem usar qualquer abordagem em que consigam pensar, extrair qualquer parte do conhecimento já aprendido e justificar suas ideias de maneira convincente. O ambiente de aprendizagem do ensino através da resolução de problemas oferece um cenário natural para os alunos apresentarem várias soluções para o seu grupo ou classe e aprenderem matemática por meio de interações sociais, ou seja, negociação, e obter a compreensão compartilhada. Tais atividades ajudam os alunos a esclarecer suas ideias e adquirir diferentes perspectivas para o conceito ou ideia que estão aprendendo. Empiricamente, o ensino da matemática através de resolução de problemas ajuda os alunos a irem além da aquisição de ideias isoladas para desenvolverem cada vez mais um complexo e conectado sistema de conhecimento (LESTER; CAI, 2012, p. 152).

Dessa forma, nota-se que a RP não só promove, mas também desenvolve a compreensão matemática dos estudantes, pois, ao forçá-los a construir conexões entre o que se tem e o que eles sabem, o sucesso no desempenho dessa tarefa consequentemente aumenta e intensifica a complexidade de sua rede de informações, a qual, então, poderá ser utilizada para fazer novas conexões com outras ideias e, assim, gerando mais compreensão.

Essa relação íntima com o desenvolvimento da compreensão matemática faz com que a implementação da RP gere, ainda, outros benefícios, sendo alguns deles apontados por Lambdin (2003) e analisados nas discussões a seguir.

Como já mencionado no texto, existe grande clamor para que as ideias matemáticas sejam postas em um contexto, mesmo que não necessariamente cotidiano, somente pelo desejo de sentir que tais ideias fazem algum sentido (ROQUE, 2012). Não compreender por que algo está sendo proposto ao aprendizado, ou seja, não conseguir relacionar um conhecimento a alguma coisa que seja familiar, é uma situação que naturalmente não é capaz construir conexões e, por conseguinte, não aflora o desejo de se apropriar desse conhecimento. Numa situação assim, o que se tem são alunos desmotivados e desencorajados a aprender.

Por outro lado,

> [...] compreender algo é um sentimento muito motivador e intelectualmente satisfatório. Quando as ideias fazem sentido para os estudantes, eles são convidados a aprender pelo seu desejo por uma compreensão ainda mais aprofundada. Eles querem aprender mais porque conseguir conectar ideias novas e antigas é uma experiência estimulante[61] (LAMBDIN, 2003, p. 8, tradução nossa).

Assim, uma vez que a RP promove e desenvolve a efetiva compreensão, ela acaba por configurar um fator que gera motivação nos estudantes e proporciona uma experiência

---

[61] [...] *to understand something is a very motivating and intellectually satisfying feeling. When ideas make sense to students, they are prompted to learn by their desire for even deeper understanding. They want to learn more because feeling successful in connecting new ideas with old is an exhilarating experience.*

satisfatória para o seu aprendizado, pois lhes permite a sensação de serem capazes de relacionar o conhecimento novo com algo que eles já saibam.

Além disso, a promoção da compreensão faz com que a RP também ajude no processo de memorização. De fato, o que com certa frequência se nota é que os estudantes tentam "aprender" por meio da memorização de conteúdos ou procedimentos matemáticos, em vez de concebê-los e compreender seu uso e aplicação.

Um exemplo disso (inclusive uma experiência do autor) é que, tratando-se do estudo de múltiplos e divisores, diversos estudantes tentam memorizar aspectos do enunciado de problemas dessa temática no intuito de distinguir quando um problema "é de mmc" de quando ele "é de mdc", memorizando também os procedimentos referentes a esses assuntos. Assim, após analisarem os aspectos e identificarem qual o assunto, eles aplicam o procedimento a ele referente e o executam, sem muito pensar ou refletir a respeito da situação proposta no enunciado ou do resultado encontrado.

Todavia, aprender por memorização é um procedimento extremamente sensível ao tempo, estando, na verdade, esse "aprendizado" fadado ao esquecimento. De fato, como relata Lambdin (2003), boa parte dos adultos lembra de memorizar listas quase intermináveis de fatos desconexos quando na escola, mas admitem que vários itens dessas listas eram rapidamente esquecidos após uma aula ou, o mais comum, uma prova. Isso acontece justamente pelo fato de o estudante não conseguir construir conexões entre as ideias, pois, ao não as formar, o conhecimento em pauta não se conecta a coisa alguma e, consequentemente, não se mantém em sua mente por um tempo muito maior que o necessário.

Entretanto, como também aponta Lambdin (2003), quando ideias fazem sentido porque estão ligadas a outras que fazem parte do campo de compreensão do estudante, pouca é a informação que precisa ser lembrada. Ou seja, o que se tem, na verdade, não é que a RP intensifique ou melhore a capacidade de o aluno memorizar mais e mais informações e, sim, que, ao promover a compreensão, a necessidade de memorizá-las diminui, sendo essa diminuição intensificada quanto maior for a compreensão, pois, à medida que a complexidade das conexões aumenta, mais "presas na teia" essas informações ficam.

Outro benefício da compreensão promovida pela RP é o aperfeiçoamento da capacidade de fazer transferências. Com efeito, uma cena bastante comum, sendo também mencionada por Lambdin (2003), é aquela na qual o estudante, frente a um problema, pede que o professor lhe diga "o que fazer" (referindo-se ao procedimento que deve ser realizado), para poder apenas aplicar, "resolver" o problema e seguir em frente na atividade ou na aula.

Outra cena também comum e, de certa forma, similar à anterior, é a de que o aluno, ao verificar a resolução do professor por algum problema que ficou por aquele em aberto, relata que o teria resolvido se soubesse que tinha de "fazer aquilo", novamente referindo-se ao procedimento utilizado na resolução.

Ambas essas cenas configuram situações em que o aluno consegue entender e realizar adequadamente certo procedimento matemático, mas que, estando este embutido numa problemática, aquele é incapaz de transferir e de enxergar tal procedimento como um recurso para o processo de sua resolução.

Isso é comum na adoção da interpretação restrita da abordagem *para* resolução de problemas, pois, ao serem alvejados com conceitos e procedimentos na forma em que se apresentam nos livros, praticarem seu uso com a resolução de problemas modelo e, somente após isso, serem impelidos a buscar enxergá-los em situações da vida real através de problemas com contexto, os estudantes são expostos mais ao método do que ao seu emprego, o que dificulta sua capacidade de transferência.

Todavia, como aponta Lambdin (2003), ideias e procedimentos que fazem sentido para os estudantes são mais facilmente estendidos e aplicados por eles na resolução de problemas. De fato, na RP o sentido é inverso ao anterior, pois se começa com a situação-problema para que dela sejam construídos e compreendidos os conceitos e procedimentos. Dessa forma, conhecendo-se de início a situação que deu origem ao método, a tarefa de identificar outras passíveis de aplicação torna-se natural, assim como a de transferi-lo a outras situações, pois, ao se trabalhar a compreensão matemática, é essencial fazer transferências e adaptações para construção de novas conexões.

Através dessas considerações, a avaliação da compreensão matemática configura-se de um modo diferente e, de certa forma, mais natural por meio da RP. A que por muito tempo foi (e, na verdade, em muitos casos ainda é) deixada para o final do processo de ensino-aprendizagem como um elemento de julgamento, ao buscar-se perceber se os estudantes são capazes de empregar os conhecimentos tratados ao longo de um mês ou bimestre, há algum tempo vem sendo objeto da pauta de discussões de pesquisadores e educadores, os quais começaram a pensar na avaliação como um procedimento que deve ocorrer simultaneamente a esses processos, integrando-se na forma de *avaliação contínua*.

É atualmente consensual a ideia de que ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente no ambiente de sala de aula, um como decorrência do outro, e, de fato, como apontam Onuchic et al. (2019), é o que se considera ideal, sendo, na verdade, bastante comum o emprego da palavra composta *ensino-aprendizagem* para transmitir essa simultaneidade, aparecendo, inclusive, diversas vezes neste texto.

Na RP, a avaliação atende à demanda de que esteja vinculada ao processo de ensino-aprendizagem, pois, quando o professor seleciona o problema que irá disparar o conteúdo que pretende trabalhar, o quarto critério apontado por Lappan e Phillips (1998) *apud* Lester e Cai (2012) e, segundo eles, um dos mais importantes, determina que tal problema crie a oportunidade de o professor avaliar o que os estudantes estão aprendendo e as dificuldades que estão sentido.

É nesse sentido que Onuchic e Allevato (2011) e os membros do GTERP[62] passaram a empregar a expressão *ensino-aprendizagem-avaliação*, isto é, para expressar que ensino, aprendizagem e avaliação devem ocorrer de forma simultânea, enquanto o aluno, acompanhado pelo professor, constrói o conhecimento através da resolução de problemas.

> Ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. [...] De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

Condensando as análises anteriores e também evidenciando alguns pontos nelas implícitos, Onuchic e Allevato (2011) reúnem e resumem os principais benefícios apontados pelas pesquisas e estudos acerca da implementação da RP como uma metodologia para o ensino-aprendizagem de Matemática, isto é, que venha a mostrá-la como realmente é e a reformular como alunos e professores se comportam um frente ao outro e ambos frente à Matemática, desfazendo concepções e paradigmas inadequados que foram construídos ao longo tempo.

> - Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o *dar sentido*.
> - Resolução de problemas desenvolve *poder matemático* nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes

[62] Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (Formado em 1992, é constituído por alunos e ex-alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e coordenado pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic. Desenvolve suas atividades no Departamento de Educação Matemática da UNESP – Rio Claro, as quais estão ligadas principalmente à RP. Disponível em: <https://igce.rc.unesp.br/#!/departamentos/educacao-matematica/gterp/> Acesso em: 11 out. 2021)

> estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
> - Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam.
> - Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.
> - Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita *tradicional*. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
> - A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

Tomando-se essas análises como encorajamento para realizar essa implementação e desenvolver a RP na sala de aula, na sequência é mostrado um modo de fazê-lo, o qual tem culminância na seção 4.2, com a construção e a descrição de uma sequência didática para o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória de acordo com a metodologia RP.

3.3.6 Promovendo a resolução de problemas na sala de aula: uma metodologia

Dadas as limitações das interpretações restritivas relativas às abordagens *sobre* e *para* e também o grande potencial da abordagem *via* resolução de problemas, a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática *através* da resolução de problemas aparece como uma proposta promissora para repensar esse processo, eliminando essas limitações ao combinar as finalidades das duas primeiras abordagens com o potencial da terceira.

Na análise anterior, foram apresentadas razões que encorajam e estimulam o uso dessa metodologia nas aulas de Matemática, mas o modo de fazê-lo, apesar de ter sido esboçado de uma forma geral, ainda não está muito claro, sendo oportuno e necessário, então, detalhá-lo.

Nesse sentido, Onuchic e Allevato (2011) e Onuchic et al. (2019) concordam que não há formas rígidas de se trabalhar por meio da RP nas aulas de Matemática, mas, a fim de auxiliar os professores nessa tarefa, alguns autores têm se dedicado a tentativas de sugerir modos de como realizá-la.

Uma das mais recentes sugestões é dada por Onuchic et al. (2019), consistindo de uma sequência de dez etapas segundo as quais todo o processo de construção, desenvolvimento, compreensão e formalização de um conceito, conteúdo ou procedimento matemático seria explorado segundo propõe a metodologia RP. Neste texto toma-se tal sugestão como principal referência, mas são realizadas algumas adaptações, julgadas cabíveis por auxiliarem no alcance de seus objetivos.

A primeira delas (que pode ser mais bem constatada na seção 4.2) consiste no fato de que os assuntos que são propostos para trabalho não são finalizados com a análise de um único problema, mas têm seu processo de construção desenvolvido ao longo da análise de alguns problemas, variando sua quantidade conforme os caracteres específicos de cada um desses assuntos. A outra adaptação consiste no detalhamento mais aprofundado de alguns pontos das etapas anteriormente mencionas, sendo que, para esse fim, será utilizada outra referência importante.

Essas etapas são discutidas e analisadas com maior riqueza de detalhes logo à frente, mas, com relação à discussão levantada, percebeu-se que algumas delas não explicitam certos aspectos e minúcias relevantes para a condução do processo, principalmente no que diz respeito a aspectos-chave da específica resolução do problema.

De fato, elas fazem uma boa descrição de como desenvolver a abordagem *através* (pois mostram como o problema desperta o assunto e como sua resolução permite desenvolvê-lo) e também um pouco a abordagem *para* (ficando ela bastante evidente na última etapa), mas não se percebem recomendações explícitas de como desenvolver a abordagem *sobre* resolução de problemas, pois não é dedicada análise específica ao processo de resolução.

Dessa forma, a fim de esclarecer e explicitar melhor esses pormenores, são combinadas a essas etapas as quatro fases de resolução de problemas propostas por Polya (1995), as quais descrevem mais detalhadamente esse processo. Também são utilizadas muitas das expressões por ele sugeridas como recurso ao discurso do professor, pois, assim, conduz-se tal processo com mais clareza e, ao mesmo tempo, gera-se a possibilidade de se trabalhar e aperfeiçoar as habilidades heurísticas dos estudantes na resolução de problemas.

Feitas essas considerações, a seguir são realizados apontamentos e discussões a respeito desse método que combina as etapas de Onuchic et al. (2019) com as fases de Polya (1995), unindo seus pontos fortes e uma complementando pontos que a outra não abrange de modo explícito.

A primeira etapa Onuchic et al. (2019) consiste na *proposição do problema*. Desempenhando o papel de organizador, o professor deve selecionar, elaborar ou editar adequadamente um problema que permita a percepção e a construção do conhecimento que intenta trabalhar com seus alunos e, como também enfatiza Polya (1995, p. 4), “o problema deve ser bem escolhido, nem muito fácil nem muito difícil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante”. Nesse ponto, os critérios apresentados por Lappan e Phillips (1998) *apud* Lester e Cai (2012) mostram-se bastante úteis como orientação para que tal tarefa seja realizada de forma a atingir seus objetivos de forma eficaz.

O problema assim proposto, como apontam Onuchic et al. (2019), é denominado *problema gerador*, pois visa à construção do novo conteúdo ou procedimento matemático que se pretende desenvolver por meio dele e, posto dessa forma, aproveita-se para novamente reiterar que os estudantes não devem já ter sido apresentados ao assunto a ser trabalhado. Quer-se construí-lo a partir do problema gerador e, para isso, este deve ser para eles, de fato, um problema, isto é, deve despertar certa inquietação e suscitar a busca por estratégias e conexões com o que já saibam.

A depender de condições como tempo e disponibilidade de recursos, por exemplo, essa proposição pode ser feita na própria lousa, embora seja interessante fazê-la pela entrega de uma folha a cada estudante com o enunciado do problema nela impresso, pois isso facilita a etapa imediatamente posterior, mas, novamente, é o professor que vai julgar e determinar a melhor forma de realizá-la.

A segunda e a terceira etapas são, respectivamente, a *leitura individual* e a *leitura em conjunto*, optando-se por citá-las e discuti-las em conjunto por elas comporem a primeira fase da resolução de problemas descrita por Polya (1995), isto é, a *compreensão do problema*.

A leitura individual sugere um momento no qual cada estudante, após a proposição do problema, faz a leitura do seu enunciado e, sozinho, começa a extrair informações, fazer conclusões e conexões e a levantar dados que julgue terem utilidade para compreender e, futuramente, resolver o problema. Uma vez realizada, entra então em jogo o aspecto social da RP, ao se reunir os estudantes em grupos para realizarem a leitura em conjunto, mantendo-se dessa forma também nas etapas seguintes.

Nessa etapa, como é sugerido, os estudantes leem novamente o enunciado do problema, mas em equipe, discutindo e compartilhando suas reflexões, interpretações, conclusões e os dados levantados por cada um na etapa anterior. Tais discussões vêm a auxiliar não somente no desempenho na tarefa proposta, já que alguns podem apontar ou sugerir algo que outros não perceberam, mas também no desenvolvimento de habilidades de expressão e comunicação.

De fato, como apontam Onuchic et al. (2019), ao exercitarem a expressão de ideias, a linguagem por eles utilizada deve ser adequada, o que muito provavelmente gerará a necessidade de aprimorá-la, já que é essencial e necessário que se expressem com clareza e coerência, ou seja, que se façam entender.

Tanto na segunda etapa, mas principalmente na terceira, é muito provável que os estudantes sintam dificuldades em compreender certos aspectos do problema, como símbolos, palavras ou ideias presentes no seu enunciado. Tais dificuldades são classificadas como *problemas secundários* por Onuchic et al. (2019), pois surgem no fluxo do tratamento do problema principal. Dessa forma, antes de prosseguir na resolução, faz-se necessário sanar essas dificuldades, resolver esses problemas secundários ou, em outras palavras, compreender, de fato, o problema.

Como alega Polya (1995, p. 3, grifo no original), "[...] temos de *compreender* o problema, temos de perceber claramente o que é necessário [, pois] acontecerá o pior se o estudante atirar-se a fazer cálculos e a traçar figuras sem ter *compreendido* o problema".

Contudo, compreender o problema vai além de descobrir o significado de certas palavras ou expressões presentes no seu enunciado ou de conseguir associar determinado símbolo à ideia que ele representa. Assumindo seu papel de consultor, o professor precisa (enquanto for necessário) auxiliar os estudantes a discriminar claramente as partes principais do problema, isto é, a incógnita, a condição e os dados, no caso dos problemas de determinação.

Desse modo, ele precisa construir adequadamente seu discurso, de modo que venha a promover o auxílio necessário, porém, como já discutido, de forma discreta, sem entregar as conclusões aos estudantes.

Com este fim, Polya (1995) sugere alguns questionamentos orientadores cabíveis ao auxílio na etapa de compreensão do problema, ajudando os estudantes a terem uma visão clara de cada uma de suas partes principais e, ao mesmo tempo, a tomar esses questionamentos como recursos para a compreensão de problemas futuros, incrementando sua experiência como resolvedores de problemas.

Para identificar a incógnita, são sugeridas orientações como "*Qual a incógnita?*", "*Considere a incógnita!*", "*O que se quer determinar?*" ou "*Qual o objetivo?*". Além disso, em problemas que envolvem figuras, expressões como "*É possível troçar uma figura?*" ou "*Desenhar uma figura ajuda?*" podem auxiliar a destacar a incógnita desses problemas.

Para discriminar a condição do problema, são sugeridas indagações como "*Qual a condicionante?*", "*O problema apresenta alguma condição? Qual?*" e "*Que restrições são impostas? O que isso acarreta?*", para que, assim, eles consigam delimitar que "tipo" de incógnita procuram.

Por fim, para isolarem os dados do problema, são sugeridas expressões como *"Quais são os dados?*" (sendo ela bastante utilizada neste trabalho) juntamente com a variação "*O que é dado?*", pois elas direcionam os estudantes diretamente às informações fornecidas pelo problema, as quais permitem construir relações entre o que se quer, isto é, a incógnita, e as condições sobre ela impostas.

Além de dirigir essas indagações aos estudantes, Polya (1995) também sugere que o professor, ao lhes auxiliar com a resolução de problemas secundários, faça a si mesmo essas mesmas perguntas ao longo do processo, dramatizando suas ideias e se imaginando no lugar deles, pois, dessa forma, “[...] o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer” (POLYA, 1995, p. 3).

Uma vez que o problema esteja plenamente compreendido pelos estudantes, ou seja, que não restem mais dúvidas quanto a aspectos secundários e que suas partes principais estejam bem esclarecidas, chega o momento de eles confrontarem diretamente a problemática principal, ou seja, passa-se à quarta etapa: a *resolução do problema*.

É essa etapa que proporciona as condições para a construção do conhecimento matemático pretendido pelo professor, pois é nesse momento que ideias, conceitos e procedimentos que antes eram “dados” aos estudantes agora serão por eles percebidos e construídos na busca por enxergar como os dados correlacionam a incógnita e as condições do problema para, assim, poderem estabelecer conexões entre essas informações e algo que já conheçam, como procedimentos já desenvolvidos, ideias relacionadas ou algoritmos de cálculo. É nessa etapa que ocorrem sequencialmente a segunda e a terceira fases de Polya (1995), respectivamente, o *estabelecimento de um plano* e a *execução do plano*.

Polya (1995) alega que, ter um plano, subentende conhecer os procedimentos (cálculos, desenhos, etc.) que devem ser executados para se determinar a incógnita. Contudo, o caminho que se percorre do momento em que se compreende o problema até se ter um plano bem estabelecido pode não ser imediato e, sim, longo e tortuoso.

De fato, existe (embora remota) a possibilidade de ocorrer aos estudantes uma ideia ou estratégia que os permita prontamente resolver o problema, porém, mesmo presumindo que tenham uma boa compreensão matemática e uma razoável experiência em resolver problemas, o desafio proposto pela problemática pode dificultar essa ocorrência, não sendo difícil imaginar essa dificuldade caso eles não as tenham.

Assim, “a melhor coisa que pode um professor fazer por seu aluno é proporcionar-lhe, discretamente, uma ideia luminosa” (POLYA, 1995, p. 5), ou seja, o professor deve continuar agindo como consultor da aprendizagem.

A recomendação geral dada por Polya (1995) reside basicamente em vasculhar a experiência dos estudantes na procura de problemas por eles conhecidos ou já resolvidos e que, de alguma forma, se relacionem com o problema gerador, os chamados *problemas correlatos*. Nesse aspecto, as principais recomendações são “*Conhece um problema correlato?*”, “*Já viu o* *mesmo problema apresentado numa forma ligeiramente diferente?*", "*Conhece um problema que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante?*", e outras similares.

Outra recomendação consiste em questionamentos que investiguem o pleno uso das informações do problema, as quais, como defende esse autor, também servem para retomar o foco para o problema principal, caso ele seja perdido pelos alunos na procura por correlatos. Alguns exemplos são "*Já usou todos os dados?*", "*Já considerou toda a condição?*", "*Já observou todas as noções essenciais do problema?*".

Neste trabalho, como os assuntos a serem desenvolvidos o são através de mais de um problema, a investigação por problemas correlatos basicamente se dá após o primeiro, que assume esse papel para com o segundo, o segundo para com o terceiro e assim por diante.

Dessa forma, questionamentos que são bastante utilizados e que não necessariamente se referem a um problema correlato são do tipo "*Como se pode determinar o que é pedido?*", "*Como se pode fazer isso?*", "*Vamos tentar visualizar dessa forma: ...*", "*Diante do que disseram, o que acontece depois?*", os quais intentam discretamente despertar alguma ideia nos estudantes, ao evidenciar e chamar a sua atenção a relações-chave entre as informações do problema e também ao modo como elas se ligam às conclusões que gradualmente vão fazendo.

Ressalta-se também que, na construção do plano, todos os membros de uma mesma equipe devem estar cientes do passo a passo que estão construindo. Dito isso, todos as conclusões e decisões acerca de procedimentos devem estar sustentadas mediante argumentação coerente e consistente, ao passo em que devem ser evitados e eliminados procedimentos sem sentido e decisões aleatórias como "Ah! Vamos somar esses números...", a qual pode ser contestada ao simplesmente se perguntar "Somar pra quê? E por quê?".

Obtendo-se sucesso no estabelecimento de um plano, o passo natural após isso é executá-lo. Diferentemente do seu estabelecimento, a execução do plano é uma tarefa bem menos árdua, pois se trata de pôr em prática os processos que foram concebidos na fase anterior. Entretanto, isso não quer dizer que a tarefa seja fácil e, na verdade, um ponto crucial dessa fase trata-se da necessidade de manter a atenção no processo e fazer verificações continuamente.

> O plano proporciona apenas um roteiro geral. Precisamos ficar convictos de que os detalhes inserem-se nesse roteiro e, para isto, temos de examiná-los, um após outro, pacientemente, até que tudo fique perfeitamente claro e que não reste nenhum recanto obscuro no qual possa ocultar-se um erro (POLYA, 1995, p. 9).

Assim, o que se recomenda nessa etapa é que seja incutido nos estudantes o hábito de se manter firme a atenção à realização de cada procedimento na execução de seu plano, avaliando-os e verificando-os a todo momento, a fim de confirmá-los ou, se for verificada necessidade, reformulá-los. Para isso, orientações como "*Por que foi tomada essa decisão?*", "*Pode-se utilizar esse argumento? Por quê?*", "*Por que podemos fazer essa operação?*" e outras similares cumprem a tarefa de trazer convicção sobre os passos do processo.

A quinta etapa corresponde a *observar e incentivar*, mas, mesmo sendo colocada como "quinta", ela ocorre simultaneamente à etapa de resolução do problema e, na verdade, permeia um pouco outras etapas do processo.

Nela o professor assume o papel de incentivador e, dessa forma, mantém-se atento às equipes para verificar sua participação e envolvimento com a atividade por ele proposta. Além disso, ele vai estimular o trabalho colaborativo, encorajando os estudantes a, dentro de suas respectivas equipes, exporem e debaterem ideias, cultivando atitudes positivas de tolerância ao erro e respeito a visões e opiniões distintas.

Também estimula os estudantes a fazerem conexões entre o que já sabem e as informações do problema, e intenta neles construir o hábito de pensar criticamente sobre suas próprias decisões, insistindo que eles continuamente as verifiquem e as ponham à prova. Já que ela ocorre simultaneamente à resolução de problemas, exemplos de orientações comuns nessa etapa foram discutidos na análise anterior, as quais estimulam os estudantes e os faz perceber que o professor acredita que eles conseguem concluir a resolução.

Uma vez concluída a resolução do problema pelas equipes, segue-se para a sexta etapa: o *registro das resoluções na lousa*. Nessa etapa todas as equipes se dirigirão uma a uma à lousa para expor suas respectivas resoluções. Nesse processo elas devem deixar claro para as outras equipes o passo a passo que realizaram na resolução, evidenciando toda a argumentação que sustenta cada decisão e procedimento.

Dessa forma, nessa etapa o professor age principalmente como controlador, oferecendo tempo adequado para cada equipe fazer sua exposição e mantendo-se atento a intervenções, buscando evitar interrupções e objeções, pois existe um momento específico para elas. Vale a pena também enfatizar que, nessa etapa, resoluções equivocadas ou respostas incorretas não devem ser apontadas nem contestadas, tanto pelos outros estudantes como também pelo próprio professor. Este deve conter a si mesmo e a turma, a fim de preservar esses enganos para serem discutidos em outro momento.

Dado que todas as equipes tenham exposto suas resoluções na lousa, a etapa seguinte é denominada *plenária*. É nessa etapa que se inicia a discussão das resoluções e, sendo assim, o professor, apesar de continuar a agir como controlador, passa a agir em maior medida como mediador e ainda um pouco como incentivador.

De fato, ao mesmo tempo que fiscaliza, ele deve incentivar e encorajar as equipes a discutirem as resoluções umas das outras, porém, se elas não se engajarem naturalmente nessa discussão, é como mediador que ele as deve provocar, trazendo à tona pontos que tenha observado na etapa de registro e julgado serem de discussão essencial.

Nessa discussão as equipes devem comparar suas resoluções, buscando encontrar características comuns e apontar pontos divergentes entre elas, ao passo que também devem observar e atentar para possíveis resoluções alternativas. Também é importante, por um lado, que elas avaliem as estratégias e os métodos utilizados nas resoluções das outras equipes, principalmente em relação à coerência da argumentação e, por outro, que sejam capazes de tanto defender a sua resolução, caso seja contestada, mas se esteja convicto de que ela está de acordo, como também de reorientá-la, caso sejam apontados aspectos que não procedem ou que mereçam reformulação.

Assim, é nessa etapa que os equívocos e os procedimentos inadequados são apontados, discutidos e corrigidos, sendo, todavia, importante se estar atento ao fato de que o professor deve permitir que isso possa ser primeiramente levantado pelos próprios estudantes, oferecendo-lhes tempo e orientações oportunas para, dessa forma, garantir que todas as análises necessárias ao desenvolvimento do conteúdo possam ser realizadas.

Não imediatamente após, mas marcando o fim da plenária, acontece a oitava etapa: a *busca pelo consenso*. De fato, ao iniciarem a exposição e a confrontação de suas resoluções, as equipes inserem-se num processo que muito provavelmente se inicia com uma grande quantidade de ideias, talvez em grande parte distintas umas das outras, e também com uma série de concepções e procedimentos que necessitarão de correção e adequação, tanto em relação à linguagem quanto à sua aplicação e execução.

Contudo, à medida que a discussão avança, conduzida, controlada e auxiliada pelo professor, o caos deve começar a dar lugar à ordem, de modo que até as ideias distintas comecem a convergir e as correções possibilitem visualizar concepções e procedimentos coerentes, dotados de uma linguagem razoavelmente clara e compreensível.

O consenso, então, é marcado pelo momento em que todos estejam convictos e concordantes acerca da solução do problema, ou seja, em que não há mais dúvidas e que, mesmo existindo soluções distintas, todas se baseiam em argumentação e procedimentos adequados e chegam à mesma solução.

Alcançado o consenso, o professor conduz a turma à nona etapa: a *formalização do conteúdo*. Nela, uma vez que toda a “parte bruta” do conteúdo foi construída por meio das ideias e das conclusões dos próprios estudantes, através da resolução do problema e, além disso, todos estão numa posição em que a compreendem e concordam acerca de seu resultado, o professor, assim, dispõe de um cenário mais do que oportuno para expor o conteúdo no seu aspecto formal, pois ele agora terá significado para os estudantes. É também nessa etapa que se pode atingir, de modo muito conveniente, a quarta e última fase de Polya (1995) para a resolução de problemas: o *retrospecto*.

Embora, como aponta esse autor, seja bastante comum os alunos fecharem os cadernos ou passarem adiante quando terminam a resolução de um problema, há significante relevância em fazer um retrospecto dessa resolução, avaliar novamente todo o passo a passo. Dessa forma, é importante que o professor consiga fazer os estudantes perceberem isso e criarem o hábito de fazer esse resgate.

Nessa fase o papel do aluno é muito similar ao que ele realizou na fase de execução, pois nessa retomada ele vai verificar novamente cada passo da resolução. Porém, o diferencial é que agora ele sabe a resposta, conhece a resolução e, portanto, observará o mesmo caminho que construiu, mas através de outras perspectivas.

De acordo com Polya (1995), ao fazer o retrospecto de toda a resolução, ao reconsiderar e reexaminar o resultado e também o percurso que levou a ele, os estudantes têm a oportunidade de consolidar seu conhecimento e, ao mesmo tempo, aprimorar sua capacidade na resolução de problemas, pois estabelecem as estratégias por eles pensadas e, ao fazer isso, adquirem valiosos recursos para a resolução de outros problemas.

Além disso, há sempre a chance de algo ter passado despercebido e, mesmo que não seja necessariamente um erro, pode ser algo que valha a pena notar e analisar com mais calma, daí as recomendações de fazer questionamentos como "*É possível verificar o resultado?*", "*É possível verificar o argumento?*" e "*Consegue entender por que isso acontece ou por que é assim?*".

O processo combinado de compreender o problema e construir um plano que possa resolvê-lo geralmente demanda considerável tempo e bastante paciência, tanto do aluno como do professor. Por isso, ao fazer um retrospecto, ao reconsiderar a resolução, aquele pode analisar se conseguiria chegar a mesma solução por vias alternativas (podendo até considerar as ideias usadas pelos seus colegas) e também avaliar se conseguiria chegar às conclusões que chegou, mas em um menor intervalo de tempo, tarefa que pode também o auxiliar na resolução de outros problemas.

Assim, também para essa fase, Polya (1995) recomenda questionamentos da natureza de "*É possível chegar a isso por um caminho diferente?*", "*É possível perceber isso num relance?*" e "*É possível utilizar esse resultado, ou esse método, em outro problema?*".

Para a formalização do conteúdo, o professor, então, conduz e participa desse retrospecto, orientando os estudantes através de questionamentos similares aos anteriores e também repetindo e reiterando, de certa forma, os mesmos questionamentos realizados nas etapas passadas, refazendo o mesmo percurso, só que de forma mais ágil, recapitulando ideias-chave para que, ao mesmo tempo em que consolida métodos e procedimentos, consiga oportunamente realizar a formalização do conhecimento, organizando as técnicas e estruturando a linguagem adotada.

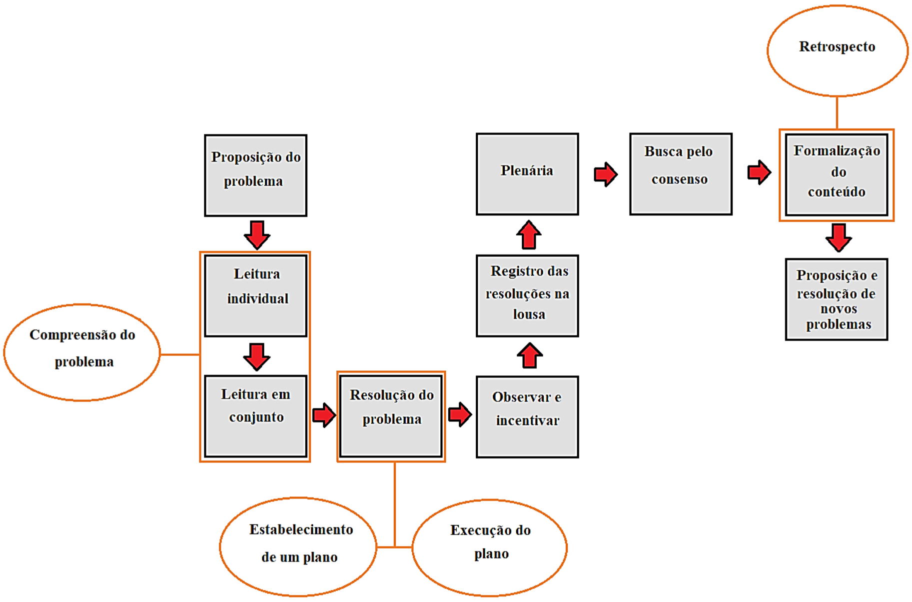
Por fim, a décima e última etapa consiste na *proposição e resolução de novos problemas*. É com base nela que se opta neste trabalho por se realizar a formalização dos assuntos nele em questão distribuída ao longo de mais de um problema, ao invés de o ser após apenas um problema gerador.

Não é exatamente dessa forma, mas é com esse mesmo objetivo que a forma original dessa etapa se estrutura. Como apontam Onuchic et al. (2019), ao se propor novos problemas para resolução, a finalidade é analisar a compreensão dos elementos essenciais do conteúdo matemático exposto, consolidar o que foi construído nas etapas precedentes e aprofundar e expandir a compreensão relativa a esse conteúdo, prolongando a avaliação (contínua) já iniciada ao se observar o procedimento dos estudantes em meio ao processo de resolução.

Ao se analisar essa etapa, é possível perceber que ela é a que mais fortemente reflete o viés da abordagem *para* a resolução de problemas, o qual também é levantado por Onuchic et al. (2019). Contudo, como já discutido no texto, isso de forma alguma vem a enfraquecer a RP ou a refletir qualquer tipo de retrocesso, mas a mostrar como ela é estruturada e a evidenciar seu potencial, afinal, "[...] quando o professor adota essa metodologia, os alunos podem aprender tanto **sobre** resolução de problemas, quanto aprendem Matemática **para** resolver novos problemas, enquanto aprendem Matemática **através** da resolução de problemas" (ALLEVATO, 2005, p. 61, negrito no original).

Vale ressaltar que, neste trabalho, além de se usar essa etapa para distribuir a formalização do conteúdo ao longo de mais de um problema, ela também é usada na sua forma original, propondo-se novos problemas também após se formalizar cada assunto, a fim de aplicá-lo e aprofundar sua compreensão. O esquema abaixo (Figura 1) resume o passo a passo descrito anteriormente.

Figura 1 - Combinação das etapas de Onuchic et al. (2019) e as fases de Polya (1995)



Fonte: Próprio autor 16 out. 2021

Na seção a seguir será desenvolvido o ponto principal deste trabalho, ao se exibir uma proposta de sequência didática para o ensino-aprendizagem dos principais tópicos relativos à Análise Combinatória vistos no ensino médio, estruturada através da aplicação do método que aqui foi descrito. Contudo, para alcançá-la, ainda é necessário realizar análises acerca de *sequências didáticas*, o que configura, assim, a próxima discussão.

4 UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

4.1 Sobre sequências didáticas

Como é relatado em Brasil (2006), para se falar de ensino e aprendizagem, é necessário compreender-se as relações entre quem ensina, quem aprende e aquilo que está sendo objeto de estudo. Presente em análises e discussões anteriores, o ensino-aprendizagem, em particular, de Matemática, tem gradualmente tentado transitar de uma visão dita *tradicional*, na qual professor e aluno possuem papéis estabelecidos de forma bastante inflexível no ambiente de ensino, para uma visão estruturada nas bases socioconstrutivistas, transferindo para o aluno o dever de construir esse conhecimento e, para o professor, a tarefa de propiciar e regular as condições para que isso possa acontecer.

A prática de ensino, qualquer que seja a visão na qual esteja inserida, requer planejamento e organização para ser executada, estabelecendo-se o que se quer alcançar, como se pretende fazê-lo e as ferramentas que permitirão verificar o alcance. De fato, Zabala (1998), ao discorrer sobre a complexidade dessa prática, evidencia algumas das variáveis que a configuram.

Defendendo que ela tem de ser reflexiva, não devendo, portanto, restringir-se a apenas o momento em que se reproduzem os processos educativos na aula, mas como tendo um antes e um depois, ele aponta o planejamento e a avaliação como processos inseparáveis da atuação do professor, visto que esta não pode ser entendida sem se analisar suas intenções, suas previsões, suas expectativas e a verificação de seus resultados.

Compondo esses processos estão o que ele denomina de *atividades* ou *tarefas*, citando, dentre outras, as exposições, os debates, as leituras, as pesquisas, as aplicações e os exercícios, ou seja, os procedimentos e os recursos que irão compor a prática.

Como base nisso, estando ela orientada segundo a primeira visão, o mais comum é que sua estrutura esteja organizada mais ou menos da seguinte forma: selecionar o conteúdo que se pretende “dar” aos estudantes; estruturar como isso será feito (geralmente definindo-o, depois mostrando propriedades e operações a ele concernentes e também problemas que ele possibilita resolver); e avaliar sua aquisição pelos estudantes (o que ocorre pela aplicação de exercícios, sendo geralmente os primeiros similares aos mostrados pelo professor e, logo depois, alguns que envolvam a aplicação do conteúdo).

Essa mobilização, embora uma das mais comuns, ainda requer esforço do professor, pois, como também comenta Zabala (1998), por menos explícitos que sejam os processos de planejamento ou de avaliação, a intervenção pedagógica não pode ser analisada sem se perceber a realidade da sala de aula, na qual se estreitam os vínculos entre o planejamento, sua aplicação e sua avaliação.

Não é, então, difícil a tarefa de pelo menos se imaginar o esforço e a dedicação que são necessários empregar no planejamento e no desenvolvimento de uma prática baseada na segunda visão. De fato, uma vez que ela se sustenta no ponto de vista socioconstrutivista, sua relação com a RP é muito estreita e, assim, de maneira resumida, em seu planejamento o professor, ao fixar o conteúdo de estudo (que os estudantes não conhecem), precisa selecionar, elaborar ou modificar um problema tal que a sua análise e resolução pelos estudantes permitam que o conteúdo pretendido seja por eles percebido e construído, à medida em que vão obtendo sucesso e avançando na resolução da problemática.

Não obstante, em meio a esse processo o professor ainda deve assumir diversos papéis para poder proporcionar aos seus alunos um ambiente e condições que favoreçam a sua realização, sem em nenhum momento ser aquele que "dá", mas aquele que possibilita.

Além disso, a avaliação não se limita ao final do processo, quando o conteúdo estiver explícito, mas, por ser contínua, o professor deve estar a todo momento verificando o sucesso de seus estudantes e também as dificuldades que estejam enfrentando.

Essa maior quantidade de esforço e atenção demanda um planejamento mais dedicado, cuidadoso, que evidencie cada atividade, sua execução, as expectativas e as intervenções. Ou seja, é dele que surge a necessidade de uma *sequência didática*.

Com efeito, uma sequência didática (ou sequência de atividades de ensino-aprendizagem) é uma das variáveis descritas por Zabala (1998) e, de acordo com ele, trata-se da maneira de configurar a sequência de atividades, isto é, o modo como se organizam e se articulam na prática.

De forma um pouco mais detalhada, elas

> [...] são uma maneira de encadear e articular as diferentes atividades ao longo de uma unidade didática. Assim, pois, poderemos analisar as diferentes formas de intervenção segundo as atividades que se realizam e, principalmente, pelo sentido que adquirem quanto a uma sequência orientada para a realização de determinados objetivos educativos. As sequências podem indicar a função que tem cada uma das atividades na construção do conhecimento ou da aprendizagem de diferentes conteúdos e, portanto, avaliar a pertinência ou não de cada uma delas, a falta de outras ou a ênfase que devemos lhes atribuir (ZABALA, 1998, p. 20).

Assim, ao intentar estruturar sua prática em acordo com a RP, o professor deve pensar cuidadosamente em todo o percurso a ser nela trilhado, desde o momento em que ele estabelecer o conteúdo até o momento de formalizá-lo. Em outras palavras, ele precisa elaborar uma sequência didática.

Como já apontado, ao se fixar o conteúdo, o próximo passo é selecionar adequadamente o(s) problema(s) que permita(m) desenvolvê-lo através de sua resolução pelos alunos, o que não é uma tarefa muito simples e, para ela, reiteram-se os critérios apresentados por Lappan e Phillips *apud* Lester e Cai (2012). Depois disso, vem a parte mais subjetiva e talvez a mais desafiadora para o professor, mas que pode em muito beneficiar a realização do processo.

Ao selecionar o problema, é positivo o professor tentar se colocar no lugar de seus alunos, tentar prever as dificuldades que irão enfrentar e manifestar, imaginar as perguntas que irão fazer e as respostas que darão aos seus questionamentos, pois, dessa forma, ele pode pensar nas orientações que dará e nas possíveis atitudes que virá a tomar em situações específicas, sendo, na verdade, algumas delas enumeradas e detalhadas na seção anterior.

Percebe-se então que, assim como a implementação da RP nas aulas de Matemática, a elaboração de uma sequência didática também não é uma tarefa simples e, assim sendo, sua implementação e adequação pelo professor muito provavelmente também não se dará de forma instantânea e simplificada.

Contudo, uma auxilia a outra e, para ajudar o professor nessa tarefa, existem alguns autoquestionamentos que ele pode fazer a fim de avaliar a organização e a orientação das atividades, bem como a função e a intenção por trás de cada uma delas.

> Na seqüência didática existem atividades:
> a) que nos permitam determinar os *conhecimentos prévios* que cada aluno tem em relação aos novos conteúdos de aprendizagem?
> b) cujos conteúdos são propostos de forma que sejam *significativos e funcionais* para os meninos e as meninas?
> c) que possamos inferir que são adequadas ao *nível de desenvolvimento* de cada aluno?
> d) que representem um desafio alcançável para o aluno, quer dizer, que levam em conta suas competências atuais e as façam avançar com a ajuda necessária; portanto, que *permitam criar zonas de desenvolvimento proximal* e intervir?
> e) que provoquem um *conflito cognitivo* e promovam a *atividade* mental do aluno, necessária para que estabeleça relações entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios?
> f) que promovam uma *atitude favorável*, quer dizer, que sejam motivadoras em relação à aprendizagem dos novos conteúdos?
> g) que estimulem a *autoestima* e o *autoconceito* em relação às aprendizagens que se propõem, quer dizer, que o aluno possa sentir que em certo grau aprendeu, que seu esforço valeu a pena?
> h) que ajudem o aluno a adquirir habilidades relacionadas com o *aprender a aprender*, que lhe permitam ser cada vez mais autônomo em suas aprendizagens? (ZABALA, 1998, p. 63, grifo no original).

Na seção a seguir é construída a sequência didática para o desenvolvimento dos principais tópicos do objeto de conhecimento Análise Combinatória, referente ao ensino médio, por meio da metodologia RP. Sua principal finalidade é fazer os estudantes perceberem o PFC, deduzindo e generalizando sua aplicação como método de contagem por tomada de decisões.

A partir disso, são desenvolvidas as estratégias de contagem por Permutações Simples (P), Permutações com Elementos Repetidos (PR), Permutações Circulares (PC) e Combinações Simples (C), percebendo-as como aplicações do PFC a tipos específicos de situações envolvendo contagem, estabelecendo as características dessas situações e deduzindo as equações referentes a cada uma dessas estratégias como modelos dessa aplicação.

A estrutura principal da sequência é constituída pela apresentação do problema (indicando sua fonte) seguida de sua abordagem. Quanto às fontes, alguns problemas foram elaborados pelo próprio autor e outros selecionados (sendo alguns deles modificados) de IMPA (2021), Ribeiro et al. (2021), Morgado et al. (2016) e Morgado e Carvalho (2015), tendo sempre em vista oferecer razoável desafio aos estudantes (aumentando gradativamente seu nível) e promover a construção e a fixação dos assuntos mencionados anteriormente através de sua resolução.

Quanto à abordagem, é dedicado considerável grau de detalhamento ao trabalho segundo o método que alia as dez etapas de Onuchic et al. (2019) e as quatro fases de Polya (1995), descrevendo-se e desenvolvendo-se possíveis diálogos entre o professor e os estudantes em meio ao desenvolvimento dessas etapas e fases. As falas dos estudantes são indicadas pela escrita em estilo normal enquanto que, as falas do professor, pela escrita em estilo *itálico*.

Vale ressaltar que as falas descritas na sequência são levantadas de uma situação hipotética, imaginando-se como se poderia desenvolver o diálogo entre o professor e sua turma. Boa parte das falas do professor estão pautadas na lista de sugestões de questionamentos e orientações descrita por Polya (1995), podendo o professor leitor adaptá-las se achar necessário.

Essa adaptação também se estende aos problemas, de modo que, mesmo sendo eles pensados e estruturados de modo a construir os conteúdos, o professor leitor, baseado em sua avaliação, experiência e no que intenta construir com suas turmas, pode suprimir, modificar e, claro, acrescentar problemas.

O tempo médio estipulado para a abordagem de cada um deles, englobando todas as etapas e fases do processo, é de 2 horas/aula, ressaltando-se que, a depender de condições específicas de cada turma, esse tempo pode sofrer alterações. Caso os alunos demonstrem boa compreensão e desenvolvam a construção do assunto de modo mais natural, o professor pode dar continuidade ao processo, aplicando e desenvolvendo outros problemas. Caso eles demonstrem um pouco mais de dificuldade, é importante fornecer um pouco mais de tempo, a fim de que eles consigam desenvolver o que se pretende sem se sentirem pressionados, pois isso pode comprometer o processo.

4.2 Estruturando a sequência didática

4.2.1 Problemas envolvendo o princípio fundamental da contagem

4.2.1.1 Problema 1

Um grupo de 10 amigos, sendo 5 homens e 5 mulheres, vai participar de um baile que terá ao final a eleição do casal formado pelo “Rei” e pela “Rainha” do baile. De quantos modos diferentes esse casal pode ser formado por membros desse grupo de amigos?

Fonte: Próprio autor 14 mar. 2021

Seguindo-se a combinação das fases propostas por Polya (1995) com as etapas de Onuchic et al. (2019) para a resolução de problemas, a primeira etapa consiste na *proposição do problema*, a qual, devida à brevidade do enunciado, pode ser feita na lousa ou então mediante entrega de versões impressas aos estudantes.

Uma vez proposto o problema, este deve ser, então, compreendido. A fase de *compreensão do problema* ocorre nas etapas de *leitura individual* e *leitura em conjunto*. O professor, no intuito de auxiliar nessa compreensão, pode prosseguir como se segue.

- *Qual a incógnita do problema, isto é, o que se quer descobrir?*
- De quantos modos diferentes o casal Rei e Rainha da festa pode ser formado pelos membros do grupo de amigos.
- *O que é dado?*
- Que o grupo de amigos é formado por 5 homens e 5 mulheres.
- *Como é a composição do casal Rei e Rainha?*
- Por um homem e uma mulher.

Uma vez que o problema esteja compreendido, é preciso *estabelecer um plano* de resolução. Com isso em mente, caso perceba necessidade, o professor pode questionar como a seguir.

- *Como se pode determinar o que é pedido?*

- Contando-se quantos casais diferentes podem ser formados apenas com os membros do grupo de amigos.

- *Como se pode fazer isso?*

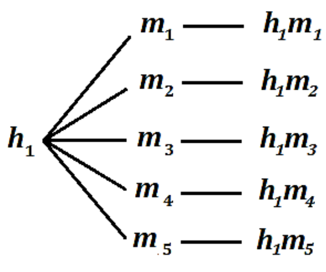
Nesse ponto podem surgir diferentes abordagens para a resolução, as quais serão discutidas pelos estudantes nas etapas de *leitura em conjunto* e de *resolução do problema*, sendo elas colocadas em prática nesta mesma etapa, na fase de *execução do plano*. Duas dessas abordagens estão desenvolvidas a seguir.

- Cada homem pode formar cinco casais diferentes, um para cada uma das mulheres do grupo (ou vice-versa, cada mulher pode formar cinco casais diferentes, um para cada homem do grupo). Como são cinco homens (ou cinco mulheres), serão formados $5 \cdot 5 = 25$ casais diferentes com os membros desse grupo de amigos para compor o casal Rei e Rainha do baile.

Ou então, a depender da notação dos estudantes,

- Podemos denotar os homens por h_1, h_2, h_3, h_4 e h_5 e, as mulheres, por m_1, m_2, m_3, m_4 e m_5. Assim, por exemplo, o esquema (Figura 2)

Figura 2 – Todos os casais com h_1 no componente masculino



Fonte: Próprio autor 25 mar. 2021

representa todos os casais que podem ser formados com h_1 na parte masculina. Como o mesmo pode ser feito para todos os outros homens, teremos $5 \cdot 5 = 25$ casais diferentes formados pelos amigos para compor o Rei e a Rainha do baile.

Nas fases de estabelecimento e execução do plano, de acordo com a quinta etapa de Onuchic et al. (2019), o professor deve *observar e incentivar* os estudantes, assistindo-os e direcionando-os através de questionamentos similares aos mostrados anteriormente, na intenção de que lhes ocorra alguma ideia.

Após isso, seguem a sexta, sétima e oitava etapas, nas quais, respectivamente, os grupos de estudantes exporão e discutirão suas resoluções, chegando-se gradualmente a um consenso, o que os conduzirá à quarta fase: o *retrospecto*.

Nessa fase eles devem verificar o resultado e os métodos utilizados para encontrá-lo, observando a validade (ou não) da argumentação utilizada, o seu grau de generalidade, os possíveis outros "caminhos" que os colegas usaram para chegar ao mesmo resultado e a possibilidade de aplicar tal método a outros problemas. Concomitantemente, o professor conduz os estudantes à nona etapa: a *formalização do conteúdo*.

É nesse momento que ele, em posse da resolução, mas principalmente dos métodos e estratégias utilizados pelos estudantes, inicia o processo de apresentação do conteúdo matemático propriamente dito, formalizando as conclusões que eles desenvolveram por si mesmos ou, no mínimo, com orientações gerais do professor. Para iniciar a formalização do PFC, o professor pode dirigir-se como a seguir.

> - *O problema consistia em contar de quantos modos diferentes se pode formar um casal com os membros de um grupo com 5 homens e 5 mulheres. Vocês notaram que, uma vez escolhido um homem (ou, equivalentemente, escolhida uma mulher), ele (ou ela) poderia formar 5 casais. Como podemos transferir esse raciocínio aos outros homens (ou às outras mulheres), teremos então, para cada um(a), 5 casais, ou seja, ao todo serão* $5 \cdot 5 = 25$ *casais formados por membros desse grupo. Notem que tudo não passa de uma tomada de decisões, no caso, para formar um casal, escolher um homem e escolher uma mulher dentre uma quantidade pré-determinada de cada um.*

Antes de concluir a formalização de tal princípio e a fim de explorar um pouco mais a sua aplicabilidade, segue-se para a décima etapa: *proposição e resolução de novos problemas*. Esses novos problemas mantêm relação com o problema gerador, mas têm gradual aumento do nível de dificuldade, exigindo dos estudantes mais compreensão, mais cuidado e o desenvolvimento de estratégias um pouco mais elaboradas.

4.2.1.2 Problema 2

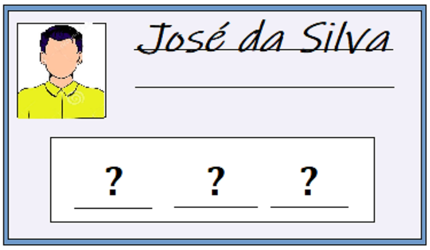
Os ciclistas têm aversão ao número zero (porque é oval) e ao número oito (porque assim ficam as rodas após os acidentes). Quantos sócios podem se inscrever num clube de ciclistas se cada um deve possuir uma identificação de três dígitos, sem usar o dígito zero nem o dígito oito?

Fonte: OBMEP (2021), prova de 2013, nível 3, questão 2, "Clube de ciclistas"

Novamente, após a *proposição do problema*, segue-se para a *leitura individual* e, logo em seguida, para a *leitura em conjunto*, de modo que ocorra a *compreensão do problema*. Em meio a esses processos, iniciam-se os questionamentos direcionadores e fomentadores.

- *O que se quer determinar?*
- Quantos sócios podem se inscrever no clube de ciclistas.
- *Quais são os dados?*
- Não há dados.
- *Quais são as condições do problema?*
- Cada sócio deve ter uma identificação de três dígitos e, dentre estes, não podem constar os dígitos 0 (zero) e 8 (oito), pois os ciclistas têm aversão a ambos.
- *Vamos visualizar uma possível identificação, digamos do "José da Silva"* (Figura 3).

Figura 3 – Modelo de identificação do clube de ciclistas



Fonte: Próprio autor 25 mar. 2021

- *Que dígitos podem constar nessa identificação?*
- Os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 9.
- *Há alguma restrição sobre eles?*
- Não, sobre esses não.
- *Podem existir dois ou mais sócios do clube com uma mesma identificação numérica?*
- Não. Cada sócio deve ter sua própria identificação numérica.

- Então, o que pode ser feito para determinarmos o número de ciclistas que podem se vincular ao clube?

- Hum, podemos contar a quantidade de identificações diferentes que podem ser feitas.

- É uma boa ideia. Como podemos fazer isso?

Nesse momento está em curso o *estabelecimento de um plano* e os questionamentos anteriores são justamente para ajudar na compreensão integral do problema pelos estudantes e já os direcionar a possíveis estratégias de resolução, começando, então, a *execução do plano* e a *resolução do problema.*

Cada estudante ou grupo de estudantes pode estabelecer planos diferentes de resolução do problema, devendo o professor *observar* cada plano e *incentivar* sua continuidade, orientando-os sem fornecer informações "gratuitas", isto é, que já digam de imediato o que eles devem fazer ou como proceder. É preciso que eles tenham o maior grau de autonomia possível.

Segue-se, então, para o *registro da resolução na lousa* e para a *plenária*, de modo que cada grupo de estudantes mostre suas resoluções e que elas sejam discutidas por eles na *busca do consenso*, avaliando-se, dentre outros critérios, a validade de cada estratégia tomada e a possibilidade de adotá-las em outros problemas de caráter similar.

A fim de caminhar na direção da *formalização do conteúdo*, após as consequentes compreensão e validação dos métodos utilizados, o professor, adequando-se às resoluções dos estudantes, pode conduzir o *retrospecto* da forma a seguir.

- Novamente, notem que, a fim de contar quantos sócios podem se vincular ao clube, a tarefa de determinar quantas identificações numéricas distintas de três dígitos podem ser feitas com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 9, não é mais do que uma questão de <u>decidir</u> quais dígitos formarão a identificação. Por exemplo: De quantas opções se dispõe para o 1º dígito, o da esquerda?

- 8 opções: qualquer um desses números.

- Tomada essa decisão, quantas são as opções para o 2º dígito, o do meio?

- Novamente, 8 opções.

- Muito bem. Finalmente, quantas são as opções para o 3º e último dígito, o da direita?

- Também 8 opções.

- Então, quantas são as diferentes identificações que podem ser feitas?

- Já que temos 8 opções para o 1º e, tomada essa decisão, temos 8 opções para o 2º e, tomada essa decisão, temos também 8 opções para o 3º, serão

$$8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$$

identificações diferentes. Ou seja, podem vincular-se ao clube 512 ciclistas, cada um deles com uma identificação distinta dos outros.

4.2.1.3 Problema 3

Uma bandeira é formada por sete listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, azul e cinza. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos se pode colorir a bandeira?
Fonte: MORGADO; CARVALHO (2015, p. 108), Exemplo 6.2

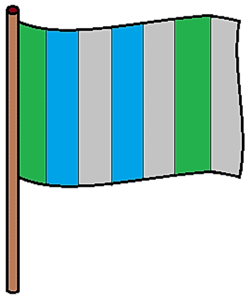
Nesse problema é interessante, além de seguir as etapas e fases de resolução, que os grupos de estudantes possam, cada um, colorir uma bandeira como a do problema, auxiliando-os na percepção de como se dará a tomada de decisões para a cor de cada listra.

Depois da *proposição do problema*, faz-se então a *leitura individual* e posterior *leitura em conjunto*, de modo a contribuir para a efetiva *compreensão do problema*. A fim de ajudar nessa compreensão, o professor pode auxiliar e conduzir como indicado a seguir.

- *O que se quer determinar?*
- De quantos modos diferentes se pode colorir uma bandeira listrada.
- *Quais são os dados?*
- Que a bandeira tem sete listras e dispomos de três cores (azul, cinza e verde) para pintá-la.
- *Quais as condições? Todos compreendem a ideia de "adjacente*[63]*"?*
- Sim. Cada listra só pode ser pintada de uma única cor e listras vizinhas não podem ter a mesma cor.
- *Ótimo. Agora observem: esta pintura* (Figura 4) *está de acordo com o problema*[64]*?*

[63] Caso os alunos não conheçam essa palavra, o professor pode ajudá-los com esse problema secundário explicando seu significado. Todavia, é provável que eles recordem esse termo da trigonometria.
[64] O professor pode tomar algumas das bandeiras coloridas pelas equipes como exemplos.

Figura 4 – Pintura da bandeira



Fonte: Próprio autor 25 mar. 2021

- Sim, está de acordo.

- *Por quê?*

- Porque cada listra está pintada com apenas uma das três cores dadas e não há listras vizinhas pintadas com a mesma cor.

Em seus grupos, durante essas etapas, os estudantes também irão colorir uma bandeira de acordo com as condições impostas pelo enunciado do problema. Como já mencionado, isso permitirá que eles percebam com mais facilidade como se dá o processo de tomada de decisões na coloração das listras, ajudando-os na *resolução do problema*.

Nesse momento, é importante o professor *observar e incentivar* os estudantes, tanto na tarefa de colorir a bandeira quanto em seu uso no processo de *estabelecimento de um plano* para posterior *execução*, insistindo que os estudantes reparem em como escolher as cores de cada listra.

Uma vez que os grupos tenham resolvido o problema, segue-se para o *registro das resoluções na lousa* e posterior *plenária*. Nessas etapas, além de expor, discutir e comparar suas resoluções às dos outros grupos, os estudantes também mostrarão e compararão suas bandeiras, observando-se a obediência às condições do problema e eventuais similaridades. É importante também observar as diferentes estratégias encontradas por cada um.

Uma vez que se tenha alcançado o *consenso* em relação à solução do problema, segue-se para o *retrospecto*, momento no qual os estudantes retomarão o passo a passo de suas resoluções, observando-se eventuais alterações a serem feitas em seus métodos e a sua validação. Ao mesmo tempo em que é feita a recapitulação, o professor conduz a *formalização do conteúdo*.

- *Como se pode contar as diferentes bandeiras?*

- Observando-se as diferenças nas cores de cada listra.

- *Ótimo. Vamos tomar esta bandeira em branco e vamos juntos* <u>*decidir*</u> *como colori-la. De quantas cores disponho para colorir, por exemplo, esta primeira listra, a 1ª da esquerda?*

- Pode pintá-la com qualquer uma das três cores: azul, cinza ou verde.

- *Ok. Então dispomos de três opções. Vamos então pintá-la, por exemplo, de azul. Feito isso, como podemos pintar a listra seguinte?*

- Já que pintamos a anterior de azul, podemos pintar essa de cinza ou verde.

- *Certo, então são duas opções. E se eu tivesse pintado a primeira de cinza?*

- Aí poderia pintar essa de azul ou verde.

- *Ok. E se eu a tivesse pintado de verde?*

- Aí poderia pintar essa de azul ou cinza.

- *Notam que, em qualquer caso, sobram-me duas opções para colorir a 2ª listra?*

- Sim.

- *Agora, uma vez que decidimos a cor da 1ª listra dentre três opções e a cor da 2ª dentre duas, de quantas opções disponho para pintar a próxima, a 3ª?*[65]

- Não. Duas. Aquela que ainda não foi escolhida e também podemos novamente usar a cor escolhida para a 1ª listra.

- *Ótimo. Então também temos duas opções para colorir a 3ª listra. Quantas opções temos para a 4ª?*

- Duas também. Só não podemos pintá-la da mesma cor escolhida para a 3ª.

- *Ok. E para a 5ª?*

- Novamente duas, pois somete não a podemos pintar da mesma cor que a 4ª!

- *Notam alguma coisa?*[66]

- Sim. A partir da 2ª listra, sempre disporemos de duas opções de cor, pois somente não podemos escolher a mesma cor da listra anterior.

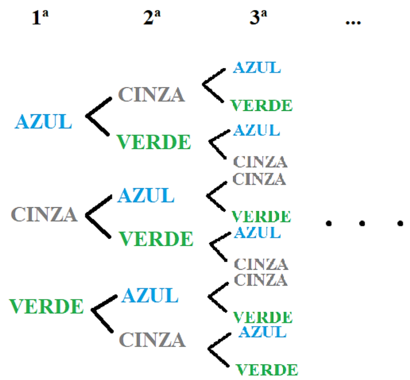
- *Isso mesmo. Para visualizarmos melhor, podemos até construir esse esquema de raiz* (Figura 5).

---

[65] Aqui há a probabilidade de alguns estudantes responderem que ela só pode ser pintada da cor que ainda não foi escolhida. Nesse caso, como o professor está utilizando uma bandeira em branco como exemplo, ele pode seguir com os estudantes a colorindo e percebendo o número de opções para cada decisão.

[66] O professor pode prolongar os questionamentos acerca do número de opções para se colorir as outras listras até que constate segurança nos alunos quanto à percepção do padrão.

Figura 5 - Esquema de raiz para as cores das listras



Fonte: Próprio autor 16 out. 2021

- *Então, de quantas maneiras diferentes podemos colorir a bandeira?*

- Como temos 3 opções para a 1ª e, escolhida essa cor, teremos 2 (duas) opções para a 2ª e, escolhida essa cor, teremos 2 (duas) opções para a 3ª e assim por diante, assim como fizemos no problema dos ciclistas, podemos pintar a bandeira de

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 192$$

maneiras diferentes.

Ao final desse problema é bastante provável que os estudantes já tenham percebido as regularidades do modo de lidar com problemas que envolvem a contagem de elementos baseada numa tomada de decisões sobre aspectos mais simples desses elementos. Segue-se então para a *formalização* (definitiva) *do conteúdo*, no caso, a formalização do PFC.

- *Através desses problemas, todos observam que as tarefas de contar os casais, as identificações e as diferentes pinturas da bandeira se resumiram a tomar decisões sobre cada um dos aspectos que compunham esses elementos?*

- Sim.

- *Como se deram essas decisões?*

- No 1º problema, decidimos cada componente do casal dentre o grupo de amigos. No 2º, decidimos dígito por dígito a numeração da identificação, seguindo as restrições impostas. Já no 3º, decidimos como colorir a bandeira listra por listra, observando como uma decisão afetava a posterior.

- Excelente. Tudo isso que acabamos de desenvolver são aplicações do Princípio Fundamental da Contagem, o PFC, também conhecido como Princípio Multiplicativo. Podemos formalizar esse princípio da seguinte maneira:

"Se uma decisão D_1 pode ser tomada de m_1 maneiras e se, uma vez tomada essa decisão, uma decisão D_2 puder ser tomada de m_2 maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões D_1 e D_2 é dado por $m_1 \cdot m_2$"

- Indutivamente, o princípio também é válido para um número de decisões superior a 2 (dois), isto é, se tivéssemos decisões D_1, D_2, D_3, ..., D_n, poderíamos tomá-las em conjunto de $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_n$ maneiras diferentes. Conseguem compreender?

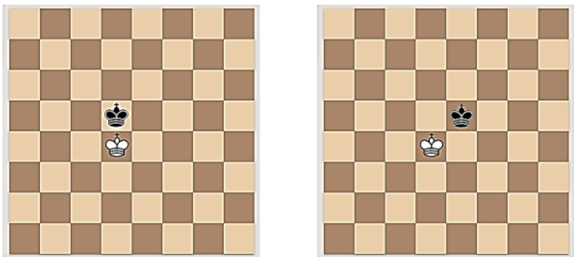
- Em outras palavras, multiplicamos sucessivamente os valores cabíveis a cada decisão envolvida no processo, é isso?

- *Exatamente!*

4.2.1.4 Problema 4

No jogo de Xadrez o objetivo de cada jogador é encurralar o "Rei" do seu adversário, ou seja, deixar essa peça numa situação que nenhuma jogada o possa livrar de ser capturado, o que configura um *xeque-mate*, o fim do jogo. O interessante é que, de acordo com as regras do jogo, os Reis não podem "se atacar", isto é, um não pode ficar numa casa adjacente à que o outro ocupa. A Figura 6 a seguir ilustra duas situações **não** permitidas pelas regras do jogo.

Figura 6 – Exemplos de situações não permitidas



Fonte: Próprio autor 25 mar. 2021

Num tabuleiro como o das imagens acima (8×8 e com apenas os dois Reis), de quantas maneiras é possível dispor essas peças, obedecendo às regras do jogo?

Fonte: MORGADO; CARVALHO (2015, p. 111), Exercício 6.5 (Adaptado)

Primeiramente efetua-se a *proposição do problema* e, logo em seguida, os estudantes realizam a *leitura individual* do seu enunciado, iniciando-se a fase de *compreensão do problema*. Divididos em grupos, segue-se então para a *leitura em grupo*, momento no qual os estudantes compartilharão entre si suas conclusões e discutirão em conjunto o problema.

Nesse momento, se houver a possibilidade, é muito positivo disponibilizar aos grupos tabuleiros de xadrez com as peças mencionadas no problema. Isso irá auxiliar bastante na visualização e na compreensão de como se dará a tomada de decisões no processo de contagem. Para ajudar na compreensão, o professor pode orientar como a seguir.

- *O que se quer determinar? Qual o objetivo?*
- Contar todas os modos possíveis de se colocar o Rei Branco e o Rei Preto no tabuleiro de modo que eles não "se ataquem".
- *O que é dado?*
- Um tabuleiro convencional (8×8) e duas peças: os reis adversários.
- *Quais as condições do problema?*
- Respeitar a regra de que os reis adversários não podem ficar em casas adjacentes.

Uma vez compreendido o problema, os grupos de estudantes precisarão *estabelecer um plano* para a sua resolução, dando-se início à fase de *resolução do problema*. Nesse momento, o professor passa a *observar e incentivar* os grupos, encorajando-os a fazer testes com o tabuleiro e os ajudando discretamente a desenvolver alguma estratégia. Quando todos houverem estabelecido algum plano, é então o momento de executá-lo.

É importante salientar que, tanto nos problemas anteriores como nos posteriores, o estabelecimento e a execução de planos não são etapas rápidas. É crucial que o professor respeite o tempo necessário para os estudantes conseguirem algum progresso e, além disso, não critique negativamente a notação e a organização utilizadas, pois elas serão aprimoradas no decorrer do processo. Deve-se lembrar que é um processo construtivo, no qual os estudantes devem deter o maior grau de autonomia que se puder oferecer.

Tendo os grupos resolvido o problema, passa-se às fases de *registro das resoluções na lousa*, em que cada um mostrará seu método de resolução e o resultado encontrado, e de *plenária*, a qual se inicia quando todos houverem ido à lousa, passando-se a observar, discutir, avaliar e comparar as resoluções e os resultados. A plenária se constrói na *busca pelo consenso*, aproveitando-se os argumentos de cada grupo e se fazendo alterações onde for necessário.

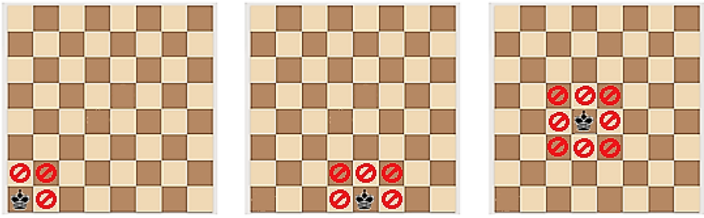
Uma vez que o conteúdo já está formalizado, é hora de se fazer o *retrospecto*, revendo-se as resoluções e buscando-se visualizá-las através do PFC.

- *Quais as decisões que devemos tomar?*
- Devemos decidir em que casa iremos colocar cada rei do jogo.
- *Vamos escolher uma peça: o Rei Preto, por exemplo. De quantas opções dispomos para colocá-lo no tabuleiro?*
- Podemos escolher qualquer uma das 64 casas.
- *Certo. Escolhida uma dessas 64 casas para o Rei Preto, quantas nos sobram para o Rei Branco? 63?*

Essa é uma pergunta fundamental e o professor deve ficar atento às respostas dos seus estudantes. Se elas por acaso não forem satisfatórias, pode-se tomar um tabuleiro e se fazer testes juntamente com os alunos, de modo a conduzi-los às conclusões a seguir.

- Não. Não podemos colocar o Rei Branco nas casas ao redor da casa do Rei Preto.
- *Ok. Então quantas casas nos sobram?*
- Depende da casa escolhida para o Rei Preto!
- *Como assim? Podem explicar isso?*
- Assim, professor: vamos tomar o tabuleiro. Se escolhermos para o Rei Preto uma das casas dos cantos, então sobrarão para o Rei Branco 60 casas. Se escolhermos uma das casas da lateral, mas entre os cantos, sobrarão para o Rei Branco 58 casas. E, se escolhermos uma casa que não seja da borda do tabuleiro, sobrarão 55 casas para posicionarmos o Rei Branco (Figura 7).

Figura 7 – Casas eliminadas ao posicionar um Rei



Fonte: Próprio autor 26 mar. 2021

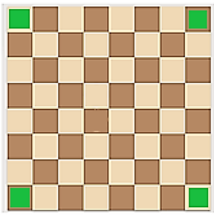
- *Ok. Então nossas escolhas para o Rei Branco dependem das escolhas tomadas para o Rei Preto. Como fazemos, então?*

- Podemos dividir e ver cada caso.

- *Ótima ideia. Então, vamos considerar primeiramente apenas os cantos. Quantas opções temos para o Rei Preto?*

- 4 opções (Figura 8).

Figura 8 – Cantos do tabuleiro



Fonte: Próprio autor 26 mar. 2021

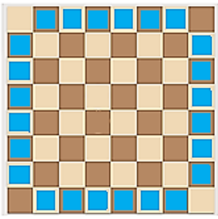
- *Para cada uma delas, nos sobram 60 casas para o Rei Branco, certo? Então, pelo PFC...*

- Pelo PFC, serão $4 \cdot 60 = 240$ posições diferentes, estando o Rei Preto em um dos cantos do tabuleiro.

- *Agora vamos considerar as casas da borda sem serem cantos. Quantas opções temos para o Rei Preto?*

- 24 opções (Figura 9).

Figura 9 – Laterais do tabuleiro sem os cantos



Fonte: Próprio autor 26 mar. 2021

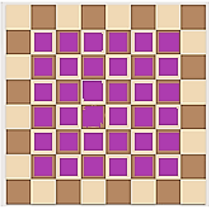
- *Para cada uma delas...*

- Para cada uma delas, temos 58 opções para decidir a posição do Rei Branco. Logo, pelo PFC, serão $24 \cdot 58 = 1.392$ posições diferentes, estando o Rei Preto numa casa da borda do tabuleiro, com exceção dos cantos, que já contamos.

- *E agora?*

- Agora, escolhendo para o Rei Preto uma casa que não seja da borda, temos, para isso, 36 opções (Figura 10).

Figura 10 – Interior do tabuleiro



Fonte: Próprio autor 26 mar. 2021

- Para cada uma delas, nos sobram 55 casas para o Rei Branco, de modo que, pelo PFC, serão $36 \cdot 55 = 1.980$ posições diferentes, estando o Rei Preto numa casa que não seja da borda.

- *Assim, serão quantas posições diferentes?*

- Serão $240 + 1.392 + 1.980 = 3.612$ posições diferentes.

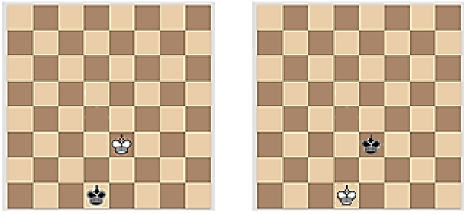
- *Excelente. Ótimo trabalho. Agora uma pergunta pra vocês: Devemos fazer o mesmo processo para o Rei Branco?*

Esse é mais um momento importante, no qual se deve observar atentamente as respostas dos estudantes. Caso eles tenham dificuldades em responder a esse questionamento ou caso eles achem que se deve fazer o mesmo processo para o Rei Branco, é importante fazê-los perceber que não é necessário fazer isso, pois todas as possibilidades já foram contadas no procedimento anterior.

De fato, basta fazê-los perceber que isso os faria contar cada posição duas vezes e, novamente, o professor pode fazer isso com os alunos utilizando um tabuleiro para visualizar o que está acontecendo.

Observando-se as imagens a seguir (Figura 11), na esquerda, tem-se o Rei Preto fixado numa casa da borda e o Rei Branco colocado numa das 58 casas permitidas. Se fosse feito processo análogo para Rei Branco (imagem da direita), tal situação é a mesma de fixar o Rei Preto numa casa fora das bordas e o Rei Branco numa das 55 casas permitidas, isto é, uma configuração que já foi contada. Como o mesmo raciocínio pode ser estendido a qualquer posição, tem-se que, de fato, são 3.612 posições diferentes e nada além disso.

Figura 11 – Troca das posições dos Reis entre si

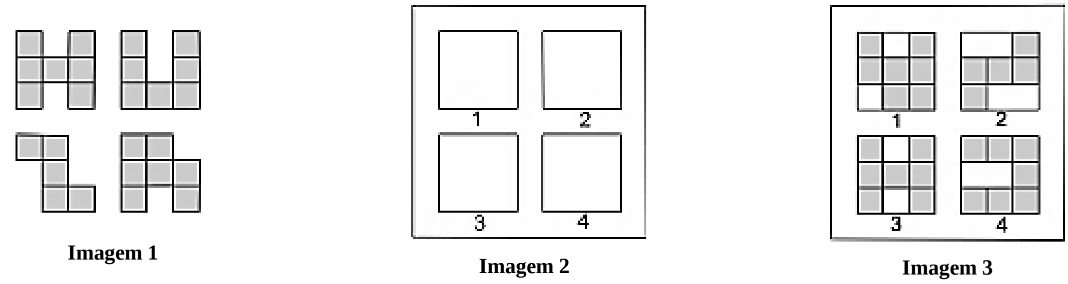


Fonte: Próprio autor 26 mar. 2021

4.2.1.5 Problema 5

As peças da Imagem 1 são feitas de quadradinhos de cartolina cinza de um lado e branca do outro. A Imagem 3 mostra uma maneira de encaixar essas peças com o lado cinza para cima nos quatro quadrados da Imagem 2.

Figura 12 – Exemplo de posicionamento das peças



Fonte: <http://147.65.23.40/banco.php>. Acesso em: 19 mar. 2021

De quantas maneiras diferentes é possível fazer isso?

Fonte: OBMEP (2021), prova de 2012, nível 2, questão 17, "Encaixando"

Naturalmente, a primeira etapa consiste na *proposição do problema*, apresentando-o na lousa ou distribuindo uma folha para cada estudante, cada um dentro de sua equipe. Após isso, parte-se para a *compreensão do problema*, iniciando-se com uma *leitura individual*, na qual cada estudante irá reunir informações acerca do problema, seguindo-se para uma *leitura em conjunto*, de modo que os estudantes, dentro de uma mesma equipe, leiam coletivamente o enunciado do problema e já iniciem a troca e a discussão de ideias a respeito dele.

Assim como em alguns dos problemas anteriores, neste é interessante que o professor traga confeccionado o material proposto pelo enunciado do problema ou, se achar mais conveniente, que solicite que cada grupo confeccione esse material, a fim de usá-lo como auxílio prático na compreensão da situação proposta pelo problema. Para auxiliar ainda mais nessa compreensão, o professor pode direcionar questionamentos como os que seguem.

- *O que se quer determinar? Qual objetivo se quer alcançar?*
- Determinar de quantas maneiras diferentes é possível dispor as quatro peças nos quatro quadrados.
- *O que é dado no problema?*
- As quatro peças e um tabuleiro com os quatro quadrados.
- *Quais as condições do problema?*
- Cada peça deve ocupar exatamente um quadrado e todos os quadrados devem conter uma peça.
- *A orientação, isto é, o modo como uma determinada peça pode ser colocada em um dos quadrados, é única?*
- Não. Uma mesma peça pode ser colocada num mesmo quadrado em orientações diferentes.
- *Seguindo a ideia do PFC, quais decisões devem ser tomadas? O que devemos decidir?*
- Devemos decidir que quadrado cada peça irá ocupar.
- *Correto. Apenas isso?*
- Ah! Também devemos decidir de que "jeito" ela irá ocupá-lo.
- *Excelente!*

Orientados e em posse do material lúdico, os grupos seguem para a *resolução do problema*. Nessa etapa, estando a situação do problema bem compreendida, cada grupo deve *estabelecer um plano* de resolução e posteriormente executá-lo. Ainda nessa etapa, durante esse desenvolvimento, fica para o professor as tarefas de *observar e incentivar* os grupos, percebendo como cada um está desenvolvendo seus métodos e incentivando-os a aplicá-los e revisá-los.

Uma vez que os grupos tenham concluído a resolução do problema, cada um deles deve então *registrar sua resolução na lousa* e, após isso, dá-se início à *plenária*, etapa muito valiosa na qual os estudantes discutirão entre si as resoluções.

Cada grupo irá apontar, justificar e defender as estratégias utilizadas, bem como seus pontos de vista. Através da discussão e da comparação, as equipes devem trabalhar na *busca pelo consenso* e, uma vez alcançado, faz-se um *retrospecto* de cada ponto das resoluções, a fim de confirmar ou, se necessário, corrigir as estratégias e os argumentos utilizados.

Nesse momento o professor deve intervir e auxiliar sempre que necessário e, em posse da compreensão e da resolução dos estudantes, estando o conteúdo já formalizado, em conjunto com eles, finaliza-se o processo.

- *Que decisões devemos tomar mesmo?*

- Devemos decidir o quadrado que cada peça irá ocupar e, além disso, de que "jeito" essa peça ficará no quadrado.

- *Vamos, então, dividir nossas "preocupações" em duas etapas: primeiro, vamos focar na distribuição das peças nos quadrados e, uma vez compreendido como isso se dá, atentamos para a orientação de cada peça. Desconsiderando a orientação, de quantas maneiras podemos preencher o 1º quadrado?*

- De 4 maneiras: qualquer uma das peças.

- *Ótimo. E os quadrados seguintes?*

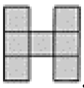
- Escolhida a peça do 1º quadrado, ficamos com 3 para o 2º e assim sucessivamente: 2 (duas) para o 3º e 1 (uma) para o 4º.

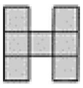
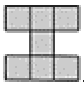
- *Muito bem. Assim, pelo PFC...*

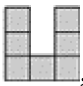
- ... podemos distribuir as peças nos quadrados de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras diferentes.

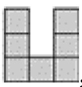
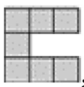
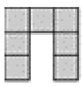
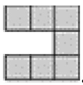
- *Isso se o "jeito" que a peça fica no quadrado não importasse, correto?*

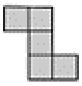
- Correto!

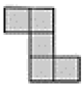
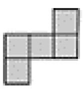
- *Então, devemos levar isso em consideração. Quais são as orientações possíveis para a peça* *, a peça 1?*

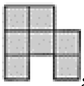
- Apenas duas:  e .

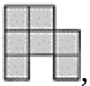
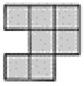
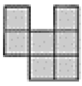
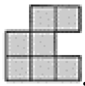
- *Quantas são as orientações para a peça* *, a peça 2?*

- Quatro: , ,  e .

- *E para a peça* *, a peça 3?*

- Também duas:  e .

- *E, finalmente, para a peça* *, a peça 4?*

- Também quatro: , ,  e .

- *Fixada uma das 24 posições que analisamos, as peças 1, 2, 3 e 4 podem ser orientadas de 2 (duas), 4, 2 (duas) e 4 maneiras, respectivamente, nessa mesma posição. Assim, concluímos que...*

- ... como são 24 opções para organização das peças e, para cada uma delas, as peças 1, 2, 3 e 4, nessa ordem, podem ser orientadas de 2 (duas), 4, 2 (duas) e 4 maneiras, pelo PFC, são $24 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 = 1.536$ modos diferentes de posicionar as peças nos quadrados.

4.2.2 Problemas envolvendo permutações simples

4.2.2.1 Problema 1

Um hospital tem os seguintes funcionários:

Sara Dores da Costa: reumatologista
Iná Lemos: pneumologista
Ester Elisa: enfermeira
Ema Thomas: traumatologista
Ana Lisa: psicanalista
Inácio Filho: obstetra

a) De quantas maneiras os funcionários podem fazer uma fila?

Fonte: OBMEP (2021), prova de 2013, nível 2, questão 3(a), “Os funcionários do hospital”

Com os estudantes divididos em equipes, primeiro faz-se a *proposição do problema*, a qual pode ser feita pela entrega do problema impresso ou então escrito na lousa. Logo após a proposição, cada estudante realiza *leitura individual* do problema, já buscando compreender a situação trazida por ele.

Uma vez que a leitura individual tenha sido realizada, em suas equipes os estudantes realizam a *leitura em conjunto*, compartilhando entre si informações que julgarem importantes, para que todos os membros da equipe possam *compreender o problema*. O professor também pode ajudar nessa compreensão, solicitando que, dentro de uma mesma equipe, os estudantes façam o papel dos funcionários e organizem-se em fila, além de os estimular com questionamentos como a seguir.

- *O que se quer determinar nesse problema?*
- De quantas maneiras os funcionários do hospital podem se organizar em uma fila.
- *Quais são os dados do problema?*
- Os funcionários, sendo um total de seis.
- *Há alguma condição?*
- Só que os funcionários devem ficar em fila.
- *Seguindo o PFC, o que se pode decidir?*
- Podemos decidir a posição de cada funcionário na fila a ser formada.
- *É uma boa ideia.*

Uma vez que o problema esteja bem compreendido, cada equipe *estabelecerá um plano* de resolução e o *executará*, dando-se início à resolução do problema propriamente dita. É essencial que o professor não pare de *observar e incentivar* as equipes, auxiliando-as sempre que necessário e com bastante discrição.

Encerrada a resolução por parte das equipes, é o momento de elas a *registrarem na lousa*, explicando e argumentando o caminho escolhido na resolução e justificando, para as outras equipes, as estratégias e os métodos utilizados.

Encerrado o registro na lousa, dá-se imediatamente início à *plenária*, momento crucial no qual as equipes discutirão as resoluções umas das outras, mediadas pelo professor. Os métodos e as estratégias devem ser discutidos, defendendo-se, comparando-se e, se necessário, corrigindo-se as ideias utilizadas, sempre *buscando o consenso*.

Alcançado esse consenso, o professor pode, então, *formalizar o procedimento*, aproveitando-se do conhecimento gerado e alcançado pelas equipes, ao mesmo tempo em que realiza o *retrospecto*.

- *A fim de determinarmos as diferentes maneiras de os funcionários do hospital formarem uma fila, todos concordam que podemos trabalhar sobre decidir a posição de cada um na fila?*
- Sim.
- *De quantas maneiras pode-se ocupar a 1ª posição da fila?*
- De 6 maneiras: com qualquer um dos 6 funcionários.

- *Isso mesmo. Feito isso, de quantas maneiras pode-se ocupar a 2ª posição?*

- De 5 maneiras, pois um dos funcionários já está no início da fila.

- *Ótimo. Como podemos prosseguir?*

- Como, a cada posição, fixamos um funcionário, as opções decrescem em 1 (um) a cada posição, de modo a restar apenas um funcionário para ocupar o final da fila. Assim, pelo PFC, os funcionários do hospital podem formar

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

filas diferentes.

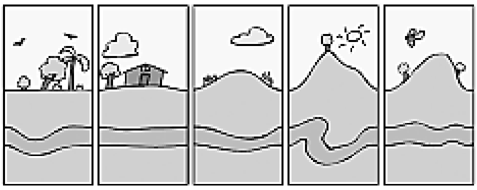
- *Isso mesmo. Excelente!*

Com isso em mãos, antes de finalizar a formalização sobre *permutações simples*, parte-se para a etapa de *proposição de novos problemas*.

4.2.2.2 Problema 2

Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura (Figura 13).

Figura 13 – Exemplo de paisagem



Fonte: <http://147.65.23.40/banco.php>. Acesso em: 19 mar. 2021

Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?

Fonte: OBMEP (2021), prova de 2012, nível 2, questão 14, “Paisagens”

Após a *proposição do problema*, cada estudante deve realizar sua *leitura individual*, iniciando, assim, a etapa de *compreensão do problema*. Para continuar construindo essa compreensão, segue-se para a *leitura em conjunto*, momento em que os estudantes, cada um em sua equipe, compartilharão e discutirão suas conclusões acerca do problema. Para somar nessa compreensão, o professor pode questioná-los como a seguir[67].

- *O que se quer determinar?*

- Trocando-se a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo é possível fazer isso sem que se repita uma mesma paisagem.

- *Hum. Como podemos determinar esse tempo?*

- Já que será apenas uma paisagem por dia, podemos determinar quantas paisagens é possível formar usando esses quadros.

- *Ah! Muito bom. E como podemos determinar isso?*

- Podemos decidir sobre a posição de cada quadro na paisagem.

Nesse momento, cada equipe deve *estabelecer um plano* para, então, *executar*, dando-se início à *resolução do problema*. Novamente, o professor deve ficar atento e *observar e incentivar* as equipes no estabelecimento e na execução de seus planos de resolução.

Uma vez que todas tenham concluído, é hora de *registrar as resoluções na lousa* e iniciar a *plenária* de discussão sobre essas resoluções na busca pelo *consenso* sobre a resolução do problema.

Alcançado o consenso acerca da resolução e do resultado, o professor dá início ao *retrospecto*.

- *Como organizar os quadros?*

- Para o primeiro quadro que forma a paisagem, podemos escolher qualquer um dos 5 de que dispomos e, a partir desse ponto, o número de escolhas decai em 1 (um) a cada quadro fixado na paisagem.

- *Ou seja...*

- Ou seja, podemos formar

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

---

[67] Ressalta-se que esses questionamentos só devem ser feitos caso os alunos estejam sentindo alguma dificuldade. A ideia é que, com o tempo, eles naturalmente comecem a se fazer esse tipo de pergunta para compreender melhor os problemas.

paisagens diferentes com esses cinco quadros.

- *Isso mesmo. Mas não nos esqueçamos do objetivo principal: o tempo*.

- Já que a posição dos quadros é trocada uma vez por dia, todo dia será uma paisagem diferente. Ou seja, pode-se fazer isso por 120 dias ou, então, 4 meses, aproximadamente.

Nesse ponto, espera-se que os estudantes já tenham percebido a ideia geral por trás da contagem por permutações simples. Sendo assim, a fim de *formalizar o conteúdo*, o professor pode continuar a conduzir como se segue.

- *Todos repararam que, nesses dois problemas, no estudo da tomada de decisões, o número de escolhas decai em 1 (um), até ficarmos com apenas uma opção de escolha?*

- Sim. Sempre que tomamos uma decisão, o número de opções para a seguinte é 1 (um) a menos que a anterior.

- *Isso. Ou seja, o que estamos fazendo nesses problemas nada mais é do que uma distribuição dos seus elementos numa "fila", isto é, permutações, pois tratam-se dos mesmos elementos, mas em ordem diferente a cada distribuição. Podemos generalizar esse tipo de contagem da seguinte maneira: o número de* ***permutações*** *de* n *elementos distintos, o qual indicaremos por* P_n, *é dado por*

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

isso, claro, para $n \geq 2$. *Usamos o símbolo* $n!$ *(e lemos "n fatorial") para indicar esse número, isto é,*

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por isso, no primeiro problema, teríamos $P_6 = 6!$ *e, no segundo,* $P_5 = 5!$.

Aqui há uma oportunidade de construir com os estudantes o resultado de $1!$, em vez de simplesmente lhes dizer esse resultado.

- *Pessoal, se* $n!$ *indica o número de maneiras de distribuir/permutar* n *elementos distintos em fila, qual o valor de* $1!$*?*

- Um único elemento forma uma única “fila”, que é apenas ele mesmo. Logo, $1! = 1$.

- *Isso mesmo. Então, temos* $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, *se* $n \geq 2$, *e* $1! = 1$.

A fim de fixar e expandir a compreensão de problemas de contagem com permutações simples, propõe-se mais um problema.

4.2.2.3 Problema 3

Um *anagrama* é uma espécie de jogo de palavras e é obtido ao se formar “palavras” a partir das letras de outra, apenas alterando a ordem dessas letras. Um exemplo clássico é que a palavra AMOR é um anagrama da palavra ROMA (ou vice-versa) e, da mesma forma, IASLP é anagrama da palavra LAPIS, mesmo que aquela não tenha significado como palavra.
Com base nisso, quantos são os anagramas da palavra CAPITULO:

a) possíveis?

b) que começam e terminam por vogal?

Fonte: MORGADO; CARVALHO (2015, p. 117), Exercício 6.21 (Adaptado)

Após a *proposição do problema*, dá-se início à sua *compreensão*. Para isso, os estudantes devem primeiramente realizar *leitura individual* do enunciado do problema, seguida da *leitura em conjunto*, discutindo com seus colegas os aspectos do problema e analisando as interpretações e as conclusões de cada um. Para auxiliar nessa compreensão, o professor pode indagar conforme a seguir.

- *O que se quer no item a) do problema?*

- Todos os anagramas possíveis de serem formados com as letras da palavra CAPITULO.

- *O que é um anagrama?*

- São palavras, mesmo sem significado, formadas pelas mesmas letras de uma palavra dada.

- *Em que essa parte do problema se assemelha aos problemas que temos estudado?*

- Os anagramas serão formados a partir das letras da palavra CAPITULO e, para isso, basta <u>permutarmos</u> essas letras “dentro” da palavra.

- *Muito bem. E, em relação ao item b) do problema, o que se quer determinar?*

- Anagramas da palavra CAPITULO, mas que comecem e terminem por vogal.

- *Então, no item b), temos condições a serem seguidas?*

- Sim. A primeira e a última letras devem ser vogais.

- *Podem ser quaisquer vogais?*

- Não. Vogais da palavra CAPITULO, ou seja, A, I, O ou U.

- *Ok. Vejo que estão com uma boa compreensão.*

Compreendido o problema, as equipes partem para a resolução propriamente dita, *estabelecendo um plano* e o *executando*. Novamente, no decorrer dessa etapa de resolução, o professor *observa*, *incentiva* e, se se fizer necessário, orienta as equipes em suas dúvidas. Quando todas as equipes tiverem concluído sua resolução, é hora de *registrá-las na lousa*, expondo as ideias e os raciocínios que tiveram, como também os caminhos que seguiram.

Feito isso, é chegada a hora de as equipes discutirem suas resoluções na *plenária*, comparando-as, defendendo as estratégias e os métodos adotados e, provavelmente, reformulando algumas ideias, sempre buscando-se chegar ao *consenso*.

Alcançado o consenso e, uma vez que o procedimento já está formalizado, o professor segue com o *retrospecto*.

- *Como contar, no item a), todos os anagramas possíveis da palavra CAPITULO?*

- Essa palavra possui 8 letras diferentes, as quais bastamos permutar para formar um anagrama, parecido com o que fizemos nos problemas anteriores. Ou seja,

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320$$

são o total de anagramas que podemos formar.

- *Muito bem. E a segunda parte do problema? Como contar quantos anagramas começam e terminam por vogal?*

- Temos 4 vogais: A, I, O e U. Devemos garantir que elas apareçam no início e no final do anagrama, por isso, não podemos escolher quaisquer letras para essas posições.

- *Muito bem. Percebam que não é uma boa ideia adiar a tomada de decisões sobre a 1ª e a última letras, pois, já que é sobre elas que residem as restrições, devemos tratar delas com antecedência*.

- Temos, assim, quatro opções para a 1ª letra e, escolhida essa vogal, restarão três opções para a última, o que garante uma vogal no início e no final do anagrama.

- *Ótimo. E o restante do anagrama? As letras entre essas vogais?*
- Basta permutarmos as seis letras que sobraram, isto é, são

$$4 \cdot 6! \cdot 3 = 4 \cdot 720 \cdot 3 = 8.640$$

anagramas da palavra CAPITULO que começam e terminam por vogal.

4.2.3 Problemas envolvendo permutações com elementos repetidos

4.2.3.1 Problema 1

Quantos são os anagramas da palavra $PALAVRA$?
Fonte: Próprio autor 26 mai. 2021

A *proposição do problema* pode ser feita rapidamente na lousa, pois seu enunciado é bastante curto. Pelo mesmo motivo, as leituras tanto *individual* como *em conjunto* podem resumir-se a apenas uma. É muito provável também que a compreensão não seja tão demorada do ponto de vista do que se “quer determinar” (pois os estudantes já terão experiência com o cálculo de anagramas), mas pode ser preciso um pouco mais de debate e auxílio no ponto de vista de “como determinar”. Para isso, o professor pode conduzir como a seguir.

- *O que se quer determinar?*
- A quantidade de anagramas que possui a palavra $PALAVRA$.
- *Como podemos determinar isso?*
- Podemos contar as permutações das letras dessa palavra.
- *É uma boa ideia. Pelo que vimos, ficaria assim, não é? A palavra $PALAVRA$ possui 7 letras, então*

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$$

são o total de anagramas, correto?

- Acredito que sim[68].

- *Vocês notaram que o problema tem a mesma natureza do anterior: contar anagramas. Notam algo de diferente quando o comparam com aquele problema?*

- PALAVRA tem três letras A e CAPITULO não tem qualquer letra repetida.

- *Isso muda alguma coisa?*

- Muda?! Não sei dizer...

- *Não podemos esquecer do que realmente está por trás do cálculo das permutações, do fatorial que calculamos. Não se esqueçam de que isso é fruto de uma tomada de decisões, ou seja, nunca deixamos de seguir o PFC, apenas formalizamos um tipo de contagem. No caso, estamos decidindo onde colocar cada letra da palavra* $PALAVRA$ *para formarmos os anagramas. Quando fazemos* $7!$*, estamos fixando, a cada posição, uma dessas letras e, independentemente de qual tenhamos escolhido, sobra sempre uma a menos do que dispúnhamos na posição anterior. Conseguem concluir alguma coisa a partir disso?*

- Ainda não está bem claro...

- *Ok. Vamos pensar assim: consideremos algum anagrama dessa palavra, por exemplo, ARVALPA, ok? Nele, as decisões foram, respectivamente, A, R, V, A, L, P e A, correto?*

- Correto.

- *Mas qual das letras A escolhemos primeiro, o A de PA, o de LA ou o de VRA? Compreendem?*

- Ah, agora está mais claro. Pelo que foi feito, estamos contando o anagrama mais de uma vez, pois não faz diferença se o 1º A é o da sílaba PA, LA ou VRA e o mesmo vale para os outros A’s!

- *Isso mesmo! Agora discutam um pouco em suas equipes.*

Uma vez que o problema tenha sido compreendido, preferencialmente não deixando claro *como* devem fazer, mas compreendendo bem *o que* se está a fazer, cada equipe irá tratar de *estabelecer um plano* de resolução para, então, *executá-lo*. Enfatiza-se novamente a importância de o professor manter diálogo com as equipes, *observando*, *incentivando* e auxiliando-as em suas dúvidas e questionamentos, mas sem lhes dar respostas ou procedimentos

---

[68] Caso os estudantes já percebam o problema em se realizar esse cálculo, o professor pode seguir a partir da compreensão deles.

"prontos". Em vez disso, oferecer aos estudantes indagações que os direcionem e permitam que eles possam desenvolver as próprias conclusões.

Uma vez que cada equipe tenha executado seu plano e chegado a alguma solução, é hora de *registrar as resoluções na lousa*, mostrando às outras equipes suas ideias, seus procedimentos e os métodos utilizados para resolver o problema.

Feito o registro, dá-se início à *plenária*, momento no qual as equipes irão discutir e comparar suas resoluções entre si, avaliando a validade das ideias e estratégias, além da utilização correta (ou não) dos procedimentos adotados.

Novamente é importante salientar que, na (provável) ocorrência de resoluções equivocadas, o professor se contenha e não intervenha de imediato com a correção, mas que, embora auxiliando no intermédio da discussão, deixe as equipes discutirem entre si, para que gradualmente cheguem a um *consenso* com o maior grau de autonomia que seja possível oferecer.

Conquistado o consenso, faz-se o *retrospecto* do que fora discutido e, ao mesmo tempo, conduz-se a *formalização do procedimento*, momento em que o professor (em conjunto com os estudantes e através de suas estratégias de resolução) tratará de "refinar" o que fora ali construído pela turma.

- *Temos aqui a tarefa de contar anagramas através da permutação das letras da palavra PALAVRA. No entanto, todos notaram que o fato de existirem letras repetidas, no caso, três letras A, dificulta essa contagem, pois, se seguirmos do mesmo modo que seria feito com letras todas distintas, estaremos contando um mesmo anagrama repetidas vezes. Como podemos superar essa dificuldade?*

- Não devemos contar um anagrama que já foi contado.

- *Isso. É isso que devemos evitar. Mas como podemos evitar? Como não contar um anagrama já contado?*

- Excluindo todas as outras vezes que ele seria contado novamente.

- *Ótimo. Então, saber quantas vezes ele foi contado repetidamente nos ajuda de algum modo?*

- Ajuda, pois daí é só tirar o excesso e ficar com apenas uma.

- *Muito bem. Então, vamos descobrir quantas vezes estamos contando um mesmo anagrama. Vamos escolher um anagrama para analisar e, a partir dele, vemos se podemos concluir alguma coisa a respeito dos demais. Que tal o mesmo que tomamos* *anteriormente como exemplo: ARVALPA? O que ocorre para que ele seja contado repetidamente?*

- As letras *A* devem trocar de posição entre si!

- *Hum, muito bom. ARVALPA será contado novamente quando as letras A trocarem de posição entre si. E quantas vezes isso ocorre? Três vezes, já que são três letras A?*

- Hum... Não. Seis vezes, pois temos três opções para o 1º *A*, duas para o 2º e sobra o 3º. Assim:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

- *Ótimo. Apenas desta vez vamos exibir essas contagens para visualizarmos o que acabaram de fazer. Como as letras A são idênticas, podemos representá-las com cores diferentes para as vermos permutando dentro do anagrama.*

$$ARVALPA$$
$$ARVALPA$$
$$ARVALPA$$
$$ARVALPA$$
$$ARVALPA$$
$$ARVALPA$$

Vemos que, de fato, o anagrama ARVALPA foi contado $3! = 6$ *vezes, correto?*

- Correto, professor.

- *Agora uma pergunta: isso só acontece para esse anagrama, ARVALPA?*

- Não. Se pegarmos outro anagrama diferente, ainda iremos contá-lo seis vezes, pois, dentro dele, as letras *A* vão permutar 6 vezes.

- *Excelente raciocínio. Cada anagrama distinto será contado seis vezes, pois essa é a quantidade de permutações da letra A dentro de um anagrama. Podemos, então, reunir esses anagramas repetidos em forma de grupo, concordam? Assim:*

$$\begin{pmatrix} ARVALPA \\ ARVALPA \\ ARVALPA \\ ARVALPA \\ ARVALPA \\ ARVALPA \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} LRAVAPA \\ LRAVAPA \\ LRAVAPA \\ LRAVAPA \\ LRAVAPA \\ LRAVAPA \end{pmatrix}, \dots$$

- Sim, podemos fazer isso.

- *Já que estamos formando grupos, como podemos contar sua quantidade?*

- Podemos dividir o total de anagramas por seis!

- *Excelente. Temos, então, um total de 5.040 anagramas (nem todos distintos) e, formando grupos de 6, obtemos*

$$\frac{5.040}{6} = 840$$

grupos. O que quer dizer esse número?

- A quantidade de grupos que são compostos pelo mesmo anagrama.

- *Ah, muito bem. Então, já que os elementos de cada grupo são o mesmo anagrama, em vez de contá-los como seis, podemos contar o grupo como apenas um anagrama, não é?*

- Isso mesmo! Então, a partir disso, temos somente 840 anagramas da palavra $PALAVRA$, todos diferentes entre si!

- *Exatamente! Vamos relembrar de onde vieram esses números? Como obtemos 5.040?*

- Da permutação das sete letras: $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$.

- *Isso mesmo. E o 6?*

- Da permutação das letras iguais A, dentro de um mesmo anagrama.

- *Muito bem. Então, a quantidade de anagramas distintos da palavra $PALAVRA$ foi obtida a partir da seguinte expressão:*

$$\frac{7!}{3!},$$

na qual 7 é quantidade de letras/elementos e 3 é a quantidade de letras/elementos iguais entre si, não é?

- Isso. Exatamente isso.

Antes de concluir a formalização desse procedimento, em acordo com a décima etapa de Onuchic et al. (2019), segue-se para a proposição de mais problemas, a fim de construir e fixar conclusões mais gerais a seu respeito.

4.2.3.2 Problema 2

Quantos anagramas possui a palavra $MATEMATICA$[69]?

Fonte: Próprio autor 26 mai. 2021

Novamente, a *proposição do problema* pode ser feita rapidamente na lousa e pode-se também partir imediatamente para a *leitura em conjunto*, já que o enunciado é bastante curto e a *leitura individual* acontecerá de forma concomitante.

Já com a realização da leitura, os estudantes entram em fase de *compreensão do problema* e, após lerem o seu enunciado, começam a discutir entre si (em suas respectivas equipes) os aspectos assimilados por cada um. Nesse momento, o professor intervém auxiliando-os a construírem uma boa compreensão através de questionamentos direcionadores.

- *O que se quer determinar nesse problema?*

- A quantidade de anagramas formados a partir das letras da palavra $MATEMATICA$.

- *Como se pode contá-los*[70]*?*

- Novamente estamos interessados em contar anagramas e, assim como antes, essa palavra também possui letras repetidas, só que, dessa vez, as repetições ocorrem com mais letras! São 3 letras A, 2 (duas) letras M e 2 (duas) letras T.

- *Muito bem. Vejo que estão com uma boa compreensão. Agora discutam entre si como se pode chegar ao que se pretende.*

Uma vez que as equipes alcancem uma boa compreensão, dá-se início à *resolução do problema*. Nessa etapa, os estudantes devem *estabelecer um plano* para a resolução do problema e, após estabelecido, *executá-lo*. Nesse momento todo conhecimento prévio é útil e deve ser utilizado pelos estudantes no estabelecimento e na execução do plano.

---

[69] A palavra "MATEMÁTICA" foi proposta sem o acento para eliminar qualquer tipo de confusão quanto à sua posição nos anagramas.

[70] Espera-se que eles percebam similaridades com o problema anterior.

O professor deve também ficar atento às equipes, *observando-as* e *incentivando-as* a discutir, a construir e a executar o plano de resolução. Novamente, de modo muito discreto e quando solicitado, o professor pode auxiliar as equipes em suas dificuldades, direcionando-as através de questionamentos oportunos e as fazendo tirar suas próprias conclusões, sempre tendo em mente a garantia da autonomia dos estudantes no processo.

Uma vez que todas as equipes tenham alcançado uma solução para o problema, chega o momento de *registar as resoluções na lousa*. Cada equipe irá mostrar sua resolução (mesmo que o professor note que esteja incorreta ou incompleta), evidenciando as estratégias e os caminhos adotados, sempre justificando e argumentando essa adoção e esclarecendo para as outras equipes o passo a passo de sua resolução. Quando todas tiverem registrado sua resolução na lousa, segue-se para a valiosa etapa da *plenária*.

As equipes começam a comparar suas resoluções entre si e a avaliar as das outras equipes, questionando (se necessário) seus procedimentos e a argumentação utilizada como base, sempre com intermédio do professor e com foco não na procura de uma ou outra resolução como a “correta”, mas na busca conjunta por um *consenso*. É um momento de extrema riqueza.

Alcançado o consenso, é hora do *retrospecto* e da *formalização do conteúdo*, que são executados concomitantemente.

- *Temos novamente a tarefa de contar os anagramas formados a partir das letras de uma dada palavra, mas, assim como no problema anterior, essa palavra possui letras repetidas, as quais, como vimos, nos fazem contar um mesmo anagrama mais de uma vez se apenas contarmos as ordenações arbitrárias de todas as letras. No entanto, todos notaram que, no caso da palavra* $MATEMATICA$*, diferentemente do problema anterior, ocorre repetição de mais uma letra.*

- Isso. São 3 letras A, 2 (duas) letras M e 2 (duas) letras T.

- *Como podemos proceder para não contarmos um mesmo anagrama mais de uma vez?*

- Como anteriormente: calculamos todas as permutações; contamos quantas vezes um mesmo anagrama é considerado; agrupamos os anagramas repetidos em grupos com essa quantidade de elementos, através de uma divisão; e, por último, consideramos cada grupo como apenas um anagrama.

- *Muito bem. Um ótimo passo-a-passo. Vamos, então, calcular primeiro todas os anagramas formados pela permutação das letras da palavra* $MATEMATICA$*, sem nos preocuparmos por enquanto com as repetições. Como ficamos?*

- Como, ao todo, são 10 letras, ficamos com

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$$

anagramas, incluindo os repetidos.

- *Ótimo. Agora vem a parte principal: eliminar as repetições. Nos convém contar quantas vezes um mesmo anagrama foi contabilizado nesse processo, não é isso?*

- Sim. Devemos contar quantas vezes um mesmo anagrama aparece.

- *Como podemos fazer isso?*

- Vamos considerar um anagrama como exemplo e ver suas repetições.

- *Isso, excelente. Então, vamos considerar como anagrama a própria palavra* $MATEMATICA$*, tudo bem?*

- Tudo bem.

- *O que ocorre para que ele seja contado mais de uma vez no processo?*

- As letras repetidas devem trocar de lugar entre si.

- *Muito bom. Quantas permutações ocorrem com cada letra repetida?*

- Com os $M's$, duas, pois $2! = 2 \cdot 1 = 2$. Com os $T's$, duas também e, com os $A's$, seis, pois $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

- *Muito bem. Assim, podemos concluir que o anagrama será contado quantas vezes? Dez, já que* $2 + 2 + 6 = 10$*?*

Essa é uma indagação importante, pois é através dela que se poderá notar a percepção dos estudantes em relação à aplicação do PFC no processo de determinar quantas vezes um mesmo anagrama foi contado. Como o consenso já foi alcançado, os estudantes darão a resposta correta, mas, na sua busca, é bastante provável que eles a respondam equivocadamente. Dito isso, o diálogo a seguir mostrará uma sugestão de como proceder nesse caso.

- *Para respondermos a esse questionamento satisfatoriamente, vamos proceder como foi feito no problema anterior: colorir as letras iguais com cores diferentes para facilitar a análise das repetições. Também não podemos esquecer que, no fundo, estamos sempre tomando decisões. Vamos observar a configuração a seguir.*

$$MATEMATICA$$

Fixado esse anagrama, vocês notaram que as letras M possuem duas permutações, correto?

- Sim. Com essas cores, pode ser a 1ª vermelha e a 2ª laranja ou vice-versa.

- *Muito bem. Agora reparem em algo importante: escolhida uma dessas duas maneiras, de quantos modos podemos ordenar as letras A?*

- De 6 modos, pois $3! = 6$.

- *Isso mesmo. Notaram algo de familiar com o que acabamos fazer? Isso lembra alguma coisa?*

- Hum...

- *Primeiro decidimos em que ordem colocar as letras M e, tomada essa decisão, em seguida decidimos em que ordem colocar as letras A.*

- Ah, é o PFC novamente.

- *Exatamente. Seguindo dessa forma, como fica para as letras T?*

- Feitas essas decisões, agora devemos decidir em que ordem colocar as letras T e, já que também são 2 (duas), assim como a letra M, isso pode ser feito de 2 (dois) modos! Dessa forma, pelo PFC, teremos que um mesmo anagrama será contado

$$2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$$

vezes.

- *Correto. E agora?*

- Dividimos os 3.628.800 anagramas anteriores em grupos de 24 anagramas (que serão justamente os 24 idênticos entre si) e, dessa forma, obteremos a quantidade total de anagramas distintos, sem que nenhum seja contado mais de uma vez. Ou seja, são na verdade

$$\frac{3.628.800}{24} = 151.200$$

anagramas, todos distintos entre si.

- *Excelente. Todos notaram por que não somamos as permutações de cada uma das letras repetidas e, sim, as multiplicamos?*

- Sim. Cada uma das permutações das letras dos grupos de letras idênticas pode ser tomada de forma independente a cada um aí então, pelo PFC, basta multiplicarmos a quantidade de escolhas que se tem para cada um deles.

- Isso mesmo. E se tivéssemos mais um grupo de letras repetidas, o que faríamos?

- A quantidade de permutações das letras desse grupo ia entrar como fator na multiplicação que fizemos para obter 24.

- Ah, muito bem. Então, com isso vocês estão dizendo que, para contarmos os anagramas repetidos, basta multiplicarmos entre si as quantidades de permutações das letras dos grupos de letras idênticas?

- Sim, pois segue o processo de tomada de decisões do PFC.

- Excelente. Vocês concordam que o resultado 151.200 foi obtido a partir da expressão

$$\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}?$$

- Sim, concordamos.

- O que representam cada uma dessas quantidades?

- O 10 é a quantidade de letras da palavra $MATEMATICA$ e os números 2, 2 e 3 são as quantidades de letras M, T e A, nessa ordem.

- E vocês acabaram de dizer que, se tivéssemos mais um grupo de letras iguais, essa quantidade "entraria" nessa expressão como um fatorial que multiplica os três já existentes, não é isso?

- Isso mesmo.

- Que tal generalizarmos isso?

- Como assim, professor?

- Assim como fizemos anteriormente, que tal resumirmos essas conclusões de modo a expressar qualquer problema envolvendo a ordenação de elementos, mas que nem todos são distintos?

- Ah, sim. Compreendemos.

- Vamos lá, então. Consideremos um conjunto de n elementos (nos nossos problemas esses elementos eram as letras das palavras), porém nem todos eles são distintos uns dos outros. Contemos, então, os elementos idênticos entre si, de modo a encontrarmos quantidades a_1, a_2, ..., a_k para cada contagem. O número de modos distintos de ordenar esses elementos, o qual indicaremos por $P_n^{a_1,a_2,\ldots,a_k}$, é dado por

$$P_n^{a_1,a_2,\dots,a_k} = \frac{n!}{a_1!\cdot a_2!\cdots a_k!}.$$

Todos compreendem essa expressão?

- Sim. O n representa a quantidade de elementos e cada um dos a_1, a_2, ..., a_k representa a quantidade de elementos iguais entre si.

- *Muito bem. E vamos notar que, mais uma vez, tudo isso é fruto de uma sequência de tomada de decisões, no caso, decisões acerca da ordem desses elementos, ou seja, mais uma aplicação do PFC.*

Finalizada a formalização do procedimento, em acordo com a décima etapa de Onuchic et al. (2019), propõe-se mais um problema a fim de estabelecer a compreensão dos estudantes a respeito desse procedimento e fazê-los perceber sua aplicação numa diversidade maior de situações-problema, além da contagem de anagramas de palavras que possuem letras repetidas.

4.2.3.3 Problema 3

Uma pulga, que está no ponto A de uma reta, pula exatamente 1 m de cada vez, sem nunca sair dessa reta.

a) Se a pulga quer chegar no ponto B localizado sobre a reta, a uma distância de 5 m à direita de A, com exatamente 7 pulos, de quantas maneiras ela pode fazer isso?
b) Se a pulga quer chegar no ponto C localizado sobre a reta, a uma distância de 5 m à direita de A, com exatamente 9 pulos, de quantas maneiras ela pode fazer isso?

Fonte: OBMEP (2021), prova de 2013, nível 2, questão 7(a)(b), “Pulga pula”

Inicialmente ocorre a *proposição do problema*. Isso pode ser feito na lousa, mas, se o professor preferir e houver disponibilidade, pode-se entregar a cada estudante uma cópia impressa de seu enunciado e de seus itens. Uma vez que o problema esteja ao alcance de todos, dá-se início à sua *compreensão*.

Inicialmente cada estudante realiza a *leitura individual* do problema, já assimilando as informações que ele traz e também tirando conclusões acerca do que é dado e do que é pedido. Concluída essa etapa, divididos em grupos, os estudantes realizam a *leitura em conjunto*, discutindo e trocando as informações e as conclusões que cada um tirou a partir da leitura individual. Para auxiliar na construção de uma compreensão satisfatória por parte dos estudantes, o professor pode auxiliá-los com os questionamentos direcionadores.

- *O que se quer determinar nesse problema?*
- De quantos modos uma pulga pode chegar num certo ponto através de uma quantidade predeterminada de pulos.
- *Ok. Quais são os dados do problema?*
- A pulga se encontra no ponto A, pula exatamente 1 m a cada vez e não sai da reta.
- *Quais são as condições?*
- No item a), o ponto B está a 5 m à direita de A e ela deve chegar lá com exatamente 7 pulos. No item b), o ponto C também está a 5 m à direita de A e ela deve chegar lá com exatamente 9 pulos.
- *Traçar alguma figura ajuda?*
- Sim. Podemos desenhar a reta e os pontos dados para verificar as possibilidades.

Compreendidas as informações e as condições, segue-se para a *resolução do problema*, começando com o *estabelecimento de um plano*. Em seus grupos os estudantes reunirão todas as informações que conseguiram assimilar e, em conjunto, devem desenvolver uma estratégia, um plano que permita resolver o problema. Em meio a esse processo o professor segue *observando* e *incentivando* as equipes, auxiliando-as discretamente em suas dúvidas e dificuldades e estimulando-as a usar o que já sabem para encarar essa situação.

Uma vez estabelecido o plano, é hora de cada equipe *executar* o seu, mantendo sempre a atenção, verificando e avaliando cada passo da resolução, de modo a não perder de vista o objetivo e a ter plena compreensão e justificativa de cada passo, eliminando cálculos ou procedimentos realizados de forma aleatória ou decididos sem argumentação ou fundamentação.

Concluída a resolução do problema, segue-se para o *registro das resoluções na lousa*. Cada equipe irá mostrar na lousa o seu plano e como o executou, evidenciando o como e o porquê de cada passo da resolução, para que as outras equipes passam ter boa compreensão. Quando todos os registros tiverem sido feitos, é hora de discuti-los na *plenária*.

Através da comparação dos planos e das estratégias de resolução, faz-se uma avaliação conjunta dos métodos utilizados por cada equipe, buscando observar se há entre eles alguma similaridade; se existem diferenças das abordagens, mas se chega ao mesmo resultado; se há resultados diferentes; se é preciso rever alguma argumentação; etc., sempre com mediação do professor e convergindo-se a um *consenso*.

Alcançado o consenso, é hora de fazer um *retrospecto* e retomar cada ponto debatido na discussão da plenária, a fim de estabelecer com maior grau de clareza a compreensão do que fora feito nesse momento.

Uma vez que o procedimento já está *formalizado*, o professor pode conduzir uma sequência de questionamentos e orientações a fim de que, caso não tenha ficado clara nesse problema a aplicação da contagem de permutações de elementos nem todos distintos[71], a partir deles os estudantes possam chegar a essa percepção e ampliar seu modo de visualizar determinados problemas.

> - *Nesse problema temos a tarefa de contar de quantos modos uma pulga pode, a partir de certo ponto de uma reta, chegar em outro, obedecendo às condições sobre o comprimento dos saltos e a sua quantidade. No item a), como ela pode chegar no ponto* B *com 7 saltos?*
>
> - Ela pode dar 5 saltos para a direita, um para a esquerda e, finalmente, outro para a direita.
>
> - *Ótimo. Podem dar outra possibilidade?*
>
> - Ela pode dar 6 saltos para a direita e um para a esquerda.
>
> - *Reparam algo em comum?*
>
> - Hum... Nos dois casos temos um total de 6 saltos para a direita e um salto para esquerda, mas realizados de formas diferentes!
>
> - *Ah, é uma boa observação. Então, um salto para a esquerda e 6 para a direita também daria certo?*
>
> - Sim, ela chega no ponto B.
>
> - *Então, o que temos de fazer é dar 6 saltos para a direita e, em algum momento, dar um salto para a esquerda, é isso?*
>
> - Sim, exatamente.

[71] Esse comentário é posto dessa forma pelo fato de ser bastante provável que os estudantes não percebam a possibilidade de modelar esse problema através do método de contagem em questão e o resolverem através de outros métodos como, por exemplo, a construção geométrica e a listagem dos modos.

- *Vamos notar algo interessante. Vamos representar por D um salto para a direita e por E um salto para a esquerda. Como ficaria o primeiro modo de a pulga chegar no ponto B que vocês falaram?*

- Ficaria $DDDDDED$.

- *Isso mesmo. E o 2º modo que vocês falaram?*

- Ficaria $DDDDDDE$.

- *Exatamente. E o que eu falei ficaria $EDDDDDD$, concordam?*

- Sim, isso mesmo.

- *Notam algo interessante com esses exemplos?*

- Temos, em todos eles, 6 letras D e uma letra E, só que de formas diferentes.

- *Interessante. Então, se permutarmos essas letras, encontraremos os modos de a pulga chegar no ponto B?*

- Sim, pois o E vai ficar em diferentes posições em relação aos D's, indicando o salto para a esquerda que em algum momento deve ser realizado.

- *Todas as letras são distintas umas das outras?*

- Não. Temos 6 letras iguais: os D's.

- *Como ficam então as permutações?*

- Ficam

$$P_7^6 = \frac{7!}{6!} = \frac{7 \cdot 6!}{6!} = 7$$

anagramas distintos, que representam os 7 modos de a pulga realizar essa tarefa.

- *Interessante, não é, como podemos utilizar a contagem de anagramas para resolver problemas que não envolvem isso diretamente?*

- É bastante interessante.

- *Agora, com base no que fizemos aqui, como ficaria o item b)?*

- Nesse item a pulga deve chegar no ponto C, a 5 m à direita de A, realizando exatamente 9 saltos. Hum, para isso, ela deve realizar 7 saltos para a direita e 2 saltos para esquerda, em qualquer ordem. Ou seja, vamos contar as ordenações distintas das letras $DDDDDDDEE$!

- *Excelente! Como fica, então?*

- São 9 letras, sendo 7 D's e 2 (dois) E's. Assim, ficamos com

$$P_9^{7,2} = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 2} = 9 \cdot 4 = 36$$

anagramas diferentes, isto é, 36 modos de a pulga alcançar o ponto C através de exatos 9 pulos.

- *Exatamente. Ótimo trabalho!*

Através dessas orientações e conclusões os estudantes poderão, assim, perceber que a contagem de permutações de elementos não todos distintos não se resume exclusivamente à contagem dos anagramas de palavras com letras repetidas, mas pode ser estendida a uma variedade bem maior de situações e problemas, com cenários e contextos que podem ou não remeter a esse tipo de contagem. Para isso, porém, fazem-se necessárias boas dosagens de autonomia, compreensão, domínio e imaginação por parte do resolvedor.

4.2.4 Problemas envolvendo permutações circulares

4.2.4.1 Problema 1

Um hospital tem os seguintes funcionários:

Sara Dores da Costa: reumatologista

Iná Lemos: pneumologista

Ester Elisa: enfermeira

Ema Thomas: traumatologista

Ana Lisa: psicanalista

Inácio Filho: obstetra

a) [...]

b) De quantas maneiras os mesmos funcionários podem sentar numa mesa redonda? Lembre-se que, numa mesa redonda, se todos se mudam para a cadeira da esquerda, a mesa continua igual!

Fonte: OBMEP (2021), prova de 2013, nível 2, questão 3(b), "Os funcionários do hospital"

O item a) desse problema foi usado para iniciar a construção e a compreensão do processo de contagem através de permutações simples. O item b) será usado para que os estudantes percebam como ocorre a contagem das diferentes ordenações de objetos dispostos não em fila, mas em formato *circular*.

Inicialmente tem-se a *proposição do problema*, a qual pode ser feita na lousa ou também mediante a disponibilização de versões impressas a cada estudante da turma. Após isso, é hora de *compreender o problema*, iniciando-se com a *leitura individual*.

Nessa etapa, como se espera, cada aluno realizará a leitura do enunciado do problema, já colhendo as informações e pensando no que se quer com ele. Após isso, em suas equipes, os estudantes realizam a *leitura em conjunto*, buscando-se coletivamente compreender ainda melhor o problema e compartilhar informações e interpretações acerca do que é proposto.

Novamente, para auxiliar ainda mais na efetividade da compreensão, o professor pode instigar e provocar os estudantes com questionamentos que os permitam ser direcionados ao que se pretende.

- *Vocês lembram desse problema?*
- Sim. Resolvemos o que foi proposto no item a).
- *Qual a diferença do que se pede no item a) para o que se pede no item b)?*
- No item a) queríamos saber quantas filas diferentes podíamos formar com os funcionários do hospital e, no item b), queremos saber de quantas maneiras eles podem sentar-se a uma mesa redonda.
- *Isso muda de alguma forma a estratégia de contagem?*
- Hum... Talvez?!
- *Como resolvemos o item a)?*
- Contando as filas através da permutação das posições ocupadas por cada funcionário.
- *Muito bem. Nesse item a contagem das permutações resolve o problema?*
- Não sei dizer...
- *Vamos notar o lembrete dado no final do item b). O que ele diz?*
- Diz que, numa mesa redonda, se todos se mudam para a cadeira da esquerda, a mesa continua igual.
- *Compreendem o que isso quer dizer?*
- Mais ou menos. Acho que um pouco...

Uma sugestão para o professor é formar na sala um círculo com alguns estudantes (não necessariamente da mesma equipe) e, logo em seguida, pedir para que cada um mude para a cadeira que está à sua esquerda (ou à sua direita) e observarem o que ocorre.

- *O que vocês notaram?*

- Quando cada um mudou para a cadeira da esquerda, o círculo continuou o mesmo, porém como se tivesse girado para a direita!

- *Ah, muito bem. Uma observação interessante. Em que isso difere da permutação dos lugares de uma fila?*

- Hum, numa fila, qualquer mudança de posição a altera!

- *Excelente! Para que isso fique bem claro para todo mundo, vamos observar mais detalhadamente essa diferença. Na ordem em que foram dados, vamos chamar os funcionários do hospital de F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 e F_6. Uma fila que eles podem formar pode ser justamente essa*[72]*, isto é,*

$$F_1 - F_2 - F_3 - F_4 - F_5 - F_6$$

Se trouxermos o último funcionário para o começo da fila, formamos uma fila diferente, concordam?

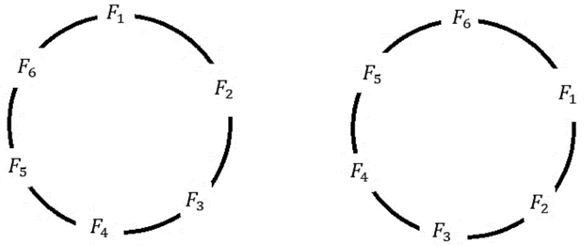
- Sim. No momento em que trocamos alguém de lugar, a fila muda.

- *Isso mesmo. E ela fica assim:*

$$F_6 - F_1 - F_2 - F_3 - F_4 - F_5$$

Agora vamos tomar essas duas filas e juntar em cada uma as duas extremidades, como se juntássemos as pontas de um barbante. Formaremos, assim, círculos (Figura 14) *e eles ficam da seguinte forma:*

Figura 14 – Círculos equivalentes



Fonte: Próprio autor 07 jun. 2021

[72] Se preferir, o professor pode realizar esse experimento abstrato também de forma concreta, com os estudantes representando os funcionários do hospital.

O que vocês observam?

- São o mesmo círculo, com a diferença de que é como se o da esquerda girasse um pouco no sentido horário para obtermos o da direita ou, então, cada funcionário da primeira figura passasse para a cadeira esquerda.

- *Isso mesmo. Então, notem que, numa fila, permutações entre os elementos alteram automaticamente a ordenação, mas, no círculo, existem permutações que formam o mesmo círculo, ou seja, círculos em que seja possível obter um a partir do outro apenas através de rotações.*

- Agora está bem mais claro.

Uma vez que esteja satisfatoriamente compreendido, os estudantes seguem para a *resolução do problema*. Nesse momento, munidas de uma boa compreensão e baseadas em conhecimentos prévios, cada equipe deve *estabelecer um plano* para a resolução do problema. Nesse plano, todos os procedimentos e métodos devem estar claros para todos os estudantes da equipe e devem ser tomados baseados em argumentação e justificativas coerentes, o que exige, estimula e desenvolve diversas habilidades.

Em meio a esse procedimento, o professor deve ficar atento, *observar e incentivar* as equipes. Durante a observação, caso o professor perceba equívocos por parte dos estudantes, ele não deve intervir imediatamente, mas aguardar e permitir primeiramente a discussão das equipes entre si, momento no qual atuará como intermediador e auxiliará na percepção e na correção desses equívocos.

Caso alguma equipe peça ajuda, o professor não só pode como deve prestar esse auxílio, tomando, porém, o cuidado de não conduzir diretamente os estudantes ao que se pretende, mas oferecer-lhes questionamentos que gradual e pacientemente os direcionem através de suas próprias conclusões. O incentivo também deve ser constante, estimulando-os a (através das dificuldades) pensar acerca do problema e a paulatinamente desenhar um plano para a sua resolução.

Assim que cada equipe desenvolver seu plano e com ele estiver satisfeita, passa-se para a sua *execução*. Quando todas alcançarem uma solução para o problema, segue-se para o *registro das resoluções na lousa*.

Nesse momento, como é sugerido, cada equipe deve mostrar na lousa sua resolução em detalhes para as outras, de modo a evidenciar as estratégias e os métodos utilizados e a expor a argumentação por trás deles. Encerrados os registros, dá-se início à *plenária*.

Agora que todos viram as resoluções uns dos outros, chega o momento de discuti-las, observando-se o que elas têm em comum e em que elas divergem e avaliando-se os métodos adotados bem como a argumentação que os sustenta. Nesse momento é importante oferecer o maior grau de protagonismo que se puder aos estudantes, permitindo que discutam e debatam sobre suas resoluções e avaliem a validade e a aplicabilidade de suas argumentações. Em meio a isso o professor age como intermediador do debate, ajudando os estudantes a não perderem o foco e a buscarem através das discussões a que *consenso* se pode chegar.

Uma vez que as resoluções das equipes convirjam para uma solução, faz-se necessário um *retrospecto* a fim de rever, resumir e compreender o que foi feito e preparar o cenário para a *formalização do procedimento*.

- *Todos compreenderam que existe uma diferença entre contar as ordenações de elementos distintos dispostos em fila de quando são dispostos em círculo, certo?*

- Sim. Como os elementos são todos diferentes, a fila é alterada por qualquer permutação de seus elementos, o que não necessariamente acontece caso estejam organizados em círculo.

- *Isso mesmo. Existem organizações diferentes entre os elementos, mas que, no final das contas, geram o mesmo círculo, como vimos num exemplo anterior. Em outras palavras, se cada pessoa da mesa olhar para os dois lados e vir as mesmas pessoas que viu em outra situação, os círculos são iguais, mesmo que não estejam na mesma cadeira. O que difere, então, um círculo do outro?*

- Se não conseguirmos obter um apenas rodando o outro, os círculos são diferentes.

- *Muito bom. Vemos, assim, que dois círculos são iguais se conseguirmos obter um simplesmente pela rotação do outro, correto?*

- Isso mesmo!

- *Se simplesmente calcularmos o fatorial dos elementos, estaremos contando um mesmo círculo mais de uma vez, concordam?*

- Sim.

- *Isso lembra alguma coisa que já trabalhamos? Algo que, se fizéssemos apenas o fatorial, teríamos uma mesma distribuição repetidas vezes?*

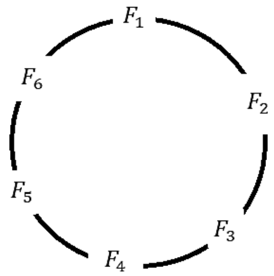
- Sim, quando contamos as permutações de elementos nem todos distintos!

- *Ah, é verdade. Qual era a ideia por trás do procedimento que vimos?*

- Determinar quantas vezes um mesmo anagrama era contado e dividir o fatorial do total de letras por essa quantidade.

- *Excelente. Será que podemos tomar emprestada essa ideia e aplicá-la aqui?*
- Acho que sim.
- *Como seria?*
- Podemos contar quantas vezes um mesmo círculo aparece e dividir o fatorial dos elementos por essa quantidade.
- *Uma ótima ideia. Vamos tomar um círculo como exemplo* (Figura 15).

Figura 15 – Exemplo de círculo



Fonte: Próprio autor 07 jun. 2021

Como vimos, para obter um círculo igual a esse, basta que cada funcionário passe para a cadeira da esquerda ou, de modo equivalente, cada um passe para a cadeira da direita. Sendo assim, quantas vezes ele será contado?
- Ele será contado 6 vezes: essa e mais cinco, girando os funcionários até chegar a essa posição novamente[73].
- *Correto. Como são 6 funcionários, cada um vai passando para a cadeira do lado até voltar a mesma posição, passando, cada um, pelas seis cadeiras. Como fica, então?*
- Fica assim:

$$\frac{6!}{6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 120$$

maneiras de os funcionários do hospital se organizarem numa mesa redonda.

[73] Caso os estudantes não cheguem a essa conclusão rapidamente ou cheguem a uma conclusão equivocada, o professor pode novamente formar um círculo com seis estudantes e utilizá-lo para chegarem a essa conclusão, fixando uma organização e contando quantas vezes ela aparece novamente com os estudantes em cadeiras diferentes.

Como tem sido feito, antes de formalizar integralmente o procedimento em análise, segue-se para a *proposição e resolução de novos problemas*, a fim de que a generalidade desse procedimento fique o mais clara possível para os estudantes.

4.2.4.2 Problema 2

De quantas formas 12 crianças podem formar uma roda?

Fonte: CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP (2021), Sala de Estudo: Permutações Circulares e os Números de Stirling do primeiro tipo, Atividade 1

Inicialmente, faz-se a *proposição do problema*. Devido à brevidade do seu enunciado, essa proposição pode ser feita na lousa e, pelo mesmo motivo, as leituras *individual* e *em conjunto* podem resumir-se em apenas uma, o que dá início à etapa de *compreensão do problema*. Para ajudar a construir nos estudantes uma boa compreensão, o professor pode orientá-los através questionamentos e provocações que os conduzam a conclusões satisfatórias.

- *O que se quer nesse problema?*

- Determinar de quantas formas 12 crianças podem formar uma roda.

- *O que é dado?*

- Apenas o número de crianças: 12.

- *Notam algo em comum com o problema dos funcionários?*

- Sim. Lá os funcionários iam sentar-se em torno de uma mesa circular e, aqui, as crianças devem formar uma roda.

- *Ótimo. Com base no que vimos no problema dos funcionários, o que difere as "formas" das rodas formadas pelas crianças?*

- Assim como os funcionários ao redor da mesa, se for possível obter uma configuração de crianças relativamente diferente de outra a partir de uma rotação, então elas na verdade são iguais, é isso?

- *Exatamente. Agora pensem em como chegar à solução do problema*.

Compreendido o problema, os estudantes partem para a sua *resolução* e, em suas equipes, trabalharão em conjunto para o *estabelecimento de um plano* que permita chegar a uma solução. Nesse plano os estudantes devem atentar para que cada passo esteja seguramente sustentado numa argumentação coerente, sendo possível compreender por que e como ele foi executado e também avaliar sua aplicação.

Assim que cada plano estiver elaborado, cada equipe parte para a *execução* do seu, aproveitando o momento para novamente avaliar a argumentação que sustenta cada passo executado na resolução e verificar cuidadosamente sua execução. Nesse meio tempo, o professor permanece atento à sala, *observando* a resolução de cada equipe e as *incentivando* durante esse processo.

Quando todas tiverem chegado a uma solução, as equipes seguem para o *registro das resoluções na lousa*. Nesse momento, cada equipe irá mostrar detalhadamente sua resolução, evidenciando as estratégias e as decisões tomadas bem como mostrando e justificando a argumentação que as permitiu. Uma vez que todas tenham registrado e explicado sua resolução, as equipes seguem para a *plenária*.

Nessa etapa, é hora de cada equipe avaliar as resoluções das outras, apontando os pontos em comum e as divergências e questionando (se necessário) a argumentação adotada. Nesse processo, o professor age como mediador, permitindo que as equipes argumentem e discutam entre si, mas intervindo sempre que for necessário, de modo a direcioná-las a um *consenso* sobre a solução do problema.

Quando esse consenso for alcançado, segue-se para o *retrospecto* e a *formalização do procedimento*.

- *Nesse problema temos a tarefa de contar as diferentes formas de 12 crianças formarem uma roda. O que difere mesmo uma forma de outra?*

- Como as crianças estarão em círculo, uma forma é diferente de outra se não for possível obter uma delas a partir da simples rotação da outra, em qualquer sentido.

- *Exatamente. Se simplesmente permutarmos as 12 crianças, algumas das configurações contadas serão equivalentes a outras através de rotações. Assim como no problema dos funcionários, isso nos leva a uma pergunta: Quantas vezes uma mesma configuração está sendo contada?*

- 12 vezes!

- *Por que, exatamente?*[74]

---

[74] As justificativas dos alunos podem variar, mas é bastante provável que elas fiquem em torno da mesma ideia central: o número de configurações equivalentes é igual ao número de elementos.

- Nesse caso, uma mesma configuração pode ser apresentada de doze formas, para isso bastando que ela gire em algum sentido até voltar à posição original ou, então, passando cada criança para a sua direita (ou esquerda), até voltarem a mesma posição relativa.

- *Excelente. Uma ótima compreensão. Então, se cada configuração será contada 12 vezes, o que fazemos para eliminarmos as repetições?*

- Dividimos o fatorial das 12 crianças por 12, ou seja,

$$\frac{12!}{12} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{12} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$= 39.916.800$$

de formas diferentes.

- *Isso mesmo. Vocês notam algo em comum entre a resolução desse problema e à do problema dos funcionários? Notam alguma similaridade nos cálculos?*

- Vemos que o número de vezes que uma mesma configuração é contada é igual ao número de elementos: 6 no caso dos funcionários e 12 no caso das crianças.

- *Ah, uma observação interessante. Será que ela é válida para qualquer quantidade de elementos?*

- Acho que sim...

- *Como podemos constatar isso?*

- Independentemente da quantidade de elementos, uma mesma configuração pode ser apresentada nessa mesma quantidade de vezes em posições relativamente diferentes, mas iguais se girarmos.

- *Certo. Então, estão me dizendo que o número de permutações circulares de uma quantidade de elementos distintos é dado pelo número de permutações simples desses elementos divido por sua quantidade?*

- Isso. Isso mesmo.

- *Se chamarmos de n essa quantidade, como ficaria esse cálculo?*

- Ficaria assim:

$$\frac{n!}{n}$$

- Exato. Basta dividirmos o fatorial do número elementos por esse número. Agora me digam: o que resulta dessa expressão?

- Como assim, professor?

- Vamos lembrar dos dois problemas envolvendo permutações circulares que resolveram. Ignorando o resultado final, ficamos com

$$\frac{6!}{6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

e

$$\frac{12!}{12} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{12} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

O que sobra depois da divisão, isto é, depois que "cancelamos" o 6 com o 6 e o 12 com o 12?

- Sobra o produto dos números seguintes.

- Descrevam melhor.

- Por exemplo, na primeira conta, sobra a multiplicação dos números que vêm antes do 6, ou seja, do 5 até o 1. Na segunda, a multiplicação é de todos os números antes do 12, isto é, do 11 até o 1.

- E essa multiplicação lembra alguma coisa?

- Não entendi.

- Multiplicar todos os naturais de 1 a 5 e, no segundo caso, de 1 a 11 é exatamente o que definimos como o quê?

- Ah, é o fatorial.

- Exatamente. Então, notem que o número de permutações circulares dos 6 funcionários é de $5!$ *e o número de permutações circulares das 12 crianças é de* $11!$*. Percebem alguma coisa?*

- Que é sempre um a menos do número de elementos no cálculo do fatorial!

- Excelente! Então, voltando ao que estávamos fazendo, o número de permutações circulares de n *elementos, o qual indicaremos por* PC_n*, é dado por*

$$PC_n = \frac{n!}{n},$$

que ainda pode ser simplificado em

$$PC_n = (n-1)!,$$

isto é, sempre 1 (um) a menos, como vocês disseram, correto?

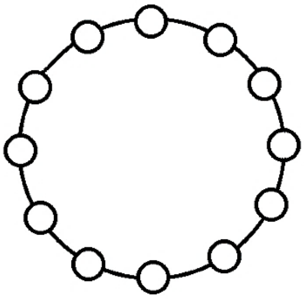
- Sim, isso mesmo.

- *Para conferir, como ficaria o número de permutações circulares de 10 elementos distintos?*

- Ficaria 9!.

- *Isso mesmo. Sempre 1 (um) a menos do número de elementos. Podemos ainda verificar essa mesma conclusão de outra maneira, utilizando de forma mais explícita o PFC. Para isso, vamos usar o problema das crianças como norteador. Pensando-se numa roda com 12 lugares* (Figura 16), *como a seguir, sobre o que devemos decidir?*

Figura 16 – Roda com doze lugares



Fonte: Próprio autor 14 jun. 2021

- Devemos decidir onde colocar cada criança!

- *Isso mesmo. Essas são as decisões que devemos tomar. Sendo assim, de quantas formas podemos decidir a posição da 1ª criança que formará a roda?*[75]

- Podemos tomar essa decisão de 12 formas.

- *Hum, realmente temos doze lugares vazios para colocar a 1ª criança, mas será que temos doze formas de distribuí-la?*

- Como assim, professor? Não são doze formas?

[75] Essa pergunta é fundamental e é muito provável que os estudantes deem inicialmente (antes do consenso) a resposta esperada: 12 formas. Todavia, caso algum estudante logo de início perceba o que está acontecendo na análise e forneça a resposta correta, isto é, 1 (uma) forma, o professor deve certificar-se de deixar claro para os demais o porquê disso. Caso isso não aconteça, o professor pode seguir como é descrito no texto.

- Vamos pensar um pouco. Pensando como um relógio, digamos que colocamos essa criança na posição 12 horas. Em que isso é diferente de colocá-la na posição de 6 horas?

- No primeiro caso ela fica no topo do círculo e, no segundo, ela fica na base.

- Ok. Mas, e se girarmos o círculo até a posição de 12 horas coincidir com a de 6 horas ou vice-versa?

- Ah, acho que entendi! Independentemente de onde colocarmos a primeira criança, podemos girar para que ela ocupe outro lugar, mas o círculo é o mesmo, é isso?

- Exatamente! Colocando-se a primeira criança numa dessas posições, podemos girar a roda alguns graus para que ela passe por todas as outras. Esse é o principal ponto que diferencia a permutação circular da permutação simples: numa fila existe uma referência para "marcar" as posições (1ª, 2ª, 3ª, etc.), o que faz com que as decisões de onde colocar cada pessoa importe, mas, num círculo, pelo menos inicialmente, todos lugares são relativamente os mesmos, pois são invariáveis por rotações. Agora, retorno à minha pergunta original: De quantas formas podemos decidir a posição da primeira criança?

- De apenas 1 (uma) forma, pois as 12 posições são equivalentes.

- Isso mesmo. Como as posições são todas equivalentes para essa criança, temos apenas 1 (um) modo de posicioná-la. Agora, tomada essa decisão, isto é, uma vez que tenhamos decidido onde posicionar a 1ª criança, de quantas formas podemos decidir onde posicionar a 2ª?

- Hum... Seria de 11 formas?

- Exatamente, mas todos compreendem isso? Uma vez posicionada a primeira criança, ela servirá como uma referência para posicionarmos as outras, algo que não acontecia no início da análise. É como se agora, assim como numa fila, os lugares estivessem "marcados". Compreendido?

- Acho que sim. O posicionamento das outras crianças é dado a partir do posicionamento da primeira.

- Isso. Embora seja irrelevante escolher uma posição ou outra para a primeira criança, onde posicionaremos a segunda e as demais não o é, pois esse posicionamento será feito em relação à primeira criança. Em outras palavras, agora que temos uma referência, as permutações passam a ser simples. Com isso em mente, como ficam as decisões para cada criança?

- Temos 1 (uma) forma de decidir a 1ª, 11 formas de decidir a 2ª, 10 formas de decidir a 3ª e assim sucessivamente, ou seja,

$$1 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 39.916.800$$

maneiras de formar um círculo com as 12 crianças.

- *Exato. Notem que, como o 1 (um) é neutro, o que temos acima se resume a* $11!$, *a mesma conclusão a que tínhamos chegado antes: o número de permutações circulares de* n *elementos distintos é dado por* $(n-1)!$.

4.2.5 Problemas envolvendo combinações simples

4.2.5.1 Problema 1

Para competirem num evento científico estadual, cada escola competidora deve inicialmente formar uma equipe fixa composta por 9 de seus estudantes, que competirão na Etapa Municipal, disputando com as equipes das outras escolas do município. A escola ganhadora de cada município será promovida para a Etapa Estadual, contudo, nessa etapa as equipes devem ser menores, de modo que cada escola deve selecionar 5 dos 9 estudantes da equipe original para comporem a equipe que as representará na etapa final. Quantas equipes diferentes uma escola pode formar para a Etapa Estadual?

Fonte: Próprio autor 15 jun. 2021

Inicialmente ocorre a *proposição do problema*, a qual aconselha-se que seja feita pela entrega de versões impressas a cada estudante para que todos tenham acesso confortável ao seu enunciado e possam fazer boa leitura. Após isso os estudantes seguem para a *compreensão do problema*, iniciando-se com a *leitura individual*.

Nesse momento eles devem individualmente tirar conclusões acerca do problema, fazer interpretações e recolher informações que julgarem pertinentes para a futura resolução. Após isso, em suas equipes, os estudantes realizam a *leitura em conjunto*, momento no qual trocarão ideias acerca do problema, compartilhando as interpretações que cada um fez e as informações que por eles foram reunidas no momento individual para, assim, construírem uma boa compreensão do problema.

Para auxiliar as equipes nessa construção, o professor pode conduzi-las e orientá-las através de questionamentos que favoreçam esse processo.

- *Qual a situação do problema?*

- Há uma competição entre escolas dividida em duas etapas. Na 1ª, cada escola é representada por uma equipe de 9 estudantes e, na 2ª, por equipes de 5 estudantes, selecionados daqueles nove.

- *Isso mesmo. O que se quer determinar nesse problema?*

- Quantas equipes diferentes uma escola pode formar para a última etapa com os integrantes da equipe da 1ª etapa.

- *Ótimo. Há algum processo de tomada de decisões nessa situação?*

- Sim. Cada escola deve decidir quais os alunos da 1ª etapa que irão formar a equipe competidora da etapa final.

- *Certo. E, pelo que disseram, quer-se saber de quantos modos uma escola pode fazer isso, não é? Escolher 5 dentre 9?*

- Isso. Isso mesmo.

- *Excelente! Vejo que todos estão compreendendo bem a situação.*

Alcançada uma boa compreensão por parte das equipes, estas seguem para a propriamente dita *resolução do problema*, iniciando-se com o *estabelecimento de um plano*. Nessa fase, com base na compreensão que foi alcançada e nos conhecimentos de cada estudante, as equipes devem traçar uma sequência de passos, métodos e estratégias que, segundo cada uma, permita chegar a uma solução para o problema.

Novamente ressalta-se a importância de construir e incutir nos estudantes a atenção pela adoção de métodos e estratégias que estejam baseados em argumentação convincente e coerente com a situação do problema, eliminando a execução de cálculos e procedimentos aleatórios e não embasados.

Uma vez que o plano esteja bem estabelecido, é hora de *executá-lo*. Durante a execução, cada membro da equipe deve aproveitar esse momento para examinar e avaliar cada passo da resolução, observando sua coerência, sua execução e se está bem justificado. Em meio a isso o professor *observa* e *incentiva* as equipes, verificando os planos de cada uma e encorajando-as a os colocarem em prática e a observarem cuidadosamente cada passo da resolução.

Caso alguma delas precise de ajuda, o professor deve fazê-lo de forma muito cuidadosa evitando dar aos estudantes as informações, mas conduzindo-os com perguntas e sugestões que os permitam chegar a essas informações com o maior grau possível de autonomia.

Uma vez que os planos tenham sido executados e as equipes chegado a uma solução, passa-se para a etapa de *registro das resoluções na lousa*. Nessa etapa cada equipe irá mostrar na lousa a sua resolução para as demais e, nesse processo, deve deixar claro cada passo de sua resolução, mostrando o que os motivou e a argumentação que os sustenta. Isso é essencial para que todas compreendam como cada uma pensou e resolveu o problema e, assim, possam discutir com mais propriedade na fase seguinte.

É importante ressaltar que, na eventualidade de alguma equipe executar uma resolução equivocada ou chegar a uma resposta incorreta, o professor não haja por impulso e corrija de imediato o equívoco, mas o deixe passar para que as equipes possam discutir sobre isso na etapa seguinte.

Quando todos os registros tiverem sido realizados, passa-se para a etapa da *plenária*. Como é sugerido, nessa etapa as equipes irão discutir as resoluções e os procedimentos umas das outras ao comparar suas resoluções na busca de pontos comuns e divergentes e ao avaliar as estratégias e os métodos adotados, colocando à prova a argumentação que os embasa.

É nesse momento que os equívocos e os procedimentos não adequados serão apontados, avaliados e corrigidos, sempre por intermédio do professor, que auxiliará os estudantes a chegarem a um *consenso* acerca da solução do problema.

Alcançado o consenso, segue-se para o *retrospecto* e para o início da *formalização do procedimento*. Com auxílio do professor, é hora recapitular e resumir todo o processo de resolução do problema, desde sua compreensão até o alcance do resultado, e utilizar essa retomada para que os estudantes percebam as características desse processo de contagem.

> - *Nesse problema cada escola é representada inicialmente por uma equipe de nove dos seus estudantes e, após a 1ª etapa, cada uma deve selecionar, dentre eles, cinco estudantes para formar a equipe da 2ª etapa. O que se quer saber é quantas equipes diferentes uma mesma escola pode formar para essa etapa. Em outras palavras, o que queremos determinar?*
>
> - Com um total de 9 pessoas, quantas equipes de 5 integrantes podemos formar.
>
> - *Isso mesmo. E lembro que havíamos comentado sobre uma tomada de decisões. Como ficam essas decisões?*

- Devemos decidir quais as cinco pessoas que, dentre as nove, formarão a equipe da 2ª etapa.

- *Correto. E como podemos fazer isso?*

- Podemos decidir pessoa a pessoa!

- *Uma boa ideia. Como ficaria?*

- Ficaria assim: para a 1ª pessoa da equipe, temos 9 opções. Tomada essa decisão, ficamos com 8 opções para a 2ª e, sucessivamente, uma pessoa a menos após cada decisão, mais ou menos como no fatorial, mas para na 5ª pessoa, já que a equipe será formada por cinco integrantes. Seguindo o PFC, ficamos com

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15.120$$

distribuições diferentes.

- *Ótimo. Esse é o número de equipes diferentes que cada escola pode formar para a Etapa Estadual?*[76]

- Sim. Com os 9 estudantes iniciais, cada escola pode formar 15.120 equipes diferentes para a 2ª etapa da competição.

- *Certo. Vamos fazer uma simulação aqui na sala para verificarmos esse resultado? Vou escolher nove de vocês e, com esses nove, devemos montar equipes de cinco. Vou selecionar, então, os estudantes E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8 e E_9. Agora, vamos formar uma equipe com cinco deles. Quantas opções para o 1º integrante da equipe?*

- Podemos decidir isso dentre 9 opções.

- *Correto! Para deixar as coisas mais lúdicas, digamos que a nossa decisão foi o estudante E_7, tudo bem?*

- Tudo bem.

- *Ok. Agora o segundo membro. Quantas opções?*

- 8 opções.

- *Isso mesmo. Digamos que agora foi o estudante E_3. O procedimento está claro para todos?*

---

[76] Novamente esse é um questionamento essencial. Após o consenso, é natural que os estudantes a respondam corretamente: "não". Nesse caso, o professor pode se certificar de que todos compreenderam o porquê disso, questionando-os a esse respeito e fazendo com que eles mesmos expliquem. Neste diálogo é mostrada uma sugestão para o caso em que os estudantes (antes do consenso) respondam equivocadamente essa pergunta.

- Sim. Estamos aplicando a tomada de decisões do PFC e decidindo quais alunos irão formar a equipe e, ao mesmo tempo, o senhor está formando uma delas como exemplo.
- *Isso mesmo. Então, para agilizar, digamos que as nossas próximas escolhas foram* E_5, E_1 *e* E_9, *nessa ordem. Dessa forma, a equipe formada foi a equipe*

$$E_7 - E_3 - E_5 - E_1 - E_9,$$

tudo bem?
- Sim.
- *Ok. Agora vamos formar outra equipe e, como todos já compreenderam o processo, digamos que as decisões para essa nova equipe foram, respectivamente,* E_5, E_1, E_9, E_7 *e* E_3, *ou seja, a equipe*

$$E_5 - E_1 - E_9 - E_7 - E_3.$$

Observam alguma coisa?[77]
- Hum... Ah! É a mesma equipe, mas apenas com os membros em ordem diferente!
- *Ah, interessante. Todos observam isso? Trata-se da mesma* <u>*equipe*</u>*, a única diferença é que os integrantes estão em ordens diferentes. Essas distribuições estão dentro daquelas 15.120 de antes?*
- Sim, estão, pois foram construídas através da tomada de decisões.
- *Então, qual o problema aqui?*
- O problema é que, numa equipe, a ordem dos integrantes não a altera!
- *Isso mesmo. Quando falamos "9 opções para o 1º membro, 8 opções para o 2º, etc.", estamos adotando uma ordem artificial para os membros da equipe e, por essa razão, o produto* $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ *ignora o fato de que as mesmas pessoas em ordens diferentes não alteram uma equipe.*
- Isso. Fizemos como se fosse uma fila, pois nela a ordem das pessoas a altera, o que não acontece numa equipe!

[77] Na sala de aula aconselha-se que essa dinâmica seja realizada com os próprios estudantes, podendo o professor simultaneamente fazer os registros na lousa.

- Exato. Para nós, até o momento, a ordem dos elementos (pelo menos distintos) alteravam a distribuição, como numa fila ou num anagrama. Mas, como aconteceu nas permutações de elementos nem todos distintos e nas permutações circulares, a simples ordem em que se escolhe os elementos pode não ser decisiva, sendo exatamente o que aconteceu aqui novamente.

- É verdade.

- O que difere uma equipe de outra, então?

- Se uma delas tem pelo menos um integrante que a outra não tem!

- Isso mesmo. A ordem dos integrantes não altera uma equipe, mas apenas a mudança de um ou mais integrantes. Voltando à análise anterior, vimos que a equipe $E_7 - E_3 - E_5 - E_1 - E_9$ *foi contada pelos menos duas vezes. Esse foi o número total de vezes que ela foi contada no processo de decisões?*

- Não. Ela foi contada bem mais vezes, pois é só trocar a ordem dos seus integrantes.

- É verdade. Quantas vezes ela foi contada, então? Como podemos determinar esse valor, já que é só trocar a ordem dos integrantes?

- Já que basta trocar a ordem, é só calcularmos as suas permutações!

- Exatamente! Basta permutarmos os elementos E_1, E_3, E_5, E_7 *e* E_9 *para determinarmos quantas vezes a equipe formada por eles foi contada. Como fica?*

- Fica

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

ou seja, ela foi contada 120 vezes!

- Exato. Então, essas 120 filas são, na verdade, uma equipe só.

- Isso. São a mesma equipe.

- Se tomarmos uma equipe diferente, por exemplo, E_2, E_4, E_6, E_8 *e* E_9, *quantas vezes ela foi contada?*

- Também foi contada 120 vezes, pois é só novamente permutar os seus cinco integrantes.

- Exato. Então, notem que, uma vez formada uma equipe, ela só será contada novamente se permutarmos a ordem de seus integrantes. Ou seja, cada equipe foi contada 120 vezes. Então, no final das contas, quantas equipes distintas podemos de fato formar?

- Como cada equipe foi contada 120 vezes no processo de tomada de decisões, basta fazermos

$$\frac{15.120}{120} = 126.$$

Ou seja, na verdade, cada escola pode formar 126 equipes diferentes e não 15.120, como havíamos concluído.

- *Bem menos, não é verdade?*

- É sim.

- *Notem que tudo isso vem do fato de que, nessa situação, a ordem dos elementos não altera uma distribuição estabelecida, mas apenas a mudança de elementos. Quando isso acontece, não estamos fazendo uma permutação, mas uma* ***combinação*** *dos elementos!*

- Então, estamos combinando 9 estudantes em grupos de 5, é isso?

- *Exatamente! Agora, vamos retomar alguns pontos. De onde veio o valor 15.120?*

- Veio da multiplicação $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$, quando estávamos decidindo os estudantes que iam formar uma equipe.

- *Certo. E de onde veio o valor 120?*

- Veio da multiplicação $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, quando estávamos contando quantas vezes uma mesma equipe foi contada no processo anterior.

- *Ótimo. Podemos representar esse produto através de algum símbolo que aprendemos recentemente?*

- Sim. Podemos escrever $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$.

- *Excelente. Então, pelo que fizeram, para determinarmos o número de equipes diferentes que podem ser formadas, resolvemos a expressão*

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!}$$

concordam?

- Sim. A parte de cima é quase o fatorial de 9, mas não chega até o final e, a parte de baixo, é o fatorial de 5.

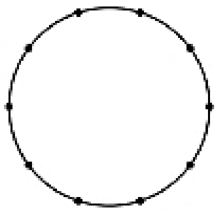
- Excelente. Vamos analisar outro problema e verificar se percebemos algo em comum com o que acabamos de concluir.

Antes de concluir a formalização do procedimento, segue-se para a *proposição e resolução de novos problemas*, a fim de que os estudantes percebam com mais clareza as características da contagem por combinações simples e como se caracteriza a equação que generaliza esse procedimento.

4.2.5.2 Problema 2

Dez pontos são marcados ao redor de uma circunferência, como ilustra a Figura 17.

Figura 17 – Dez pontos sobre uma circunferência



Fonte: <http://147.65.23.40/banco.php>. Acesso em: 19 mar. 2021

a) Quantas cordas podem ser formadas ligando dois quaisquer desses pontos? (Uma corda é um segmento de reta ligando dois pontos sobre uma circunferência.)
b) Quantos triângulos podem ser formados ligando três quaisquer destes pontos?

Fonte: OBMEP (2021), prova de 2011, nível 2, questão 63, "Segmentos e Triângulos"

Inicialmente realiza-se a *proposição do problema* e, nesse caso, também se aconselha que o professor o faça por meio da entrega de versões impressas aos estudantes da turma. Após isso, dá-se início à *compreensão do problema*, iniciando-se com a *leitura individual*. Nessa fase cada estudante, em posse do problema, realizará a leitura do seu enunciado para que possa extrair informações, tirar conclusões e fazer interpretações a respeito da situação proposta.

Uma vez que isso tenha sido realizado, passa-se para a *leitura em conjunto*, momento no qual os estudantes, reunidos em suas equipes, lerão novamente o enunciado do problema, mas de forma coletiva, de modo a, entre si, trocar as informações coletadas, expor as conclusões que cada um tirou e esclarecer aos demais as interpretações que cada um fez, juntando, assim, recursos para construir uma boa compreensão do problema e, futuramente, uma resolução satisfatória.

Visando auxiliar ainda mais o processo de compreensão, o professor pode orientar e provocar os estudantes mediante questionamentos oportunos.

- *Qual a situação sobre a qual o problema se constrói?*

- Sobre uma circunferência são marcados 10 pontos.

- *Ok. O que se quer determinar no item a)?*

- Queremos determinar quantas cordas podem ser formadas com esses pontos.

- *O que é uma corda?*

- O problema explica no final do item: é o segmento formado ao se ligar dois pontos de uma circunferência.

- *Então, como determinamos uma corda?*

- Ligando-se dois pontos.

- *Podemos fazer decisões a respeito desses pontos?*

- Sim. Podemos decidir cada um dos dois pontos que formarão a corda!

- *Certo. Agora, o que se quer determinar no item b)?*

- Queremos determinar quantos triângulos podem ser formados com esses pontos!

- *Certo, muito bem. Como se determina um triângulo?*

- Através de três pontos diferentes.

- *Esses pontos podem estar alinhados?*

- Não, pois assim não se forma um triângulo!

- *Na figura existem três pontos alinhados?*

- Não.

- *Ótimo, então isso não será algo a se observar, pois quaisquer três pontos dessa figura não estão alinhados.*

- Isso.

- *Ok. Pode-se tomar alguma decisão a respeito desses pontos?*

- Sim. Assim como no item a), podemos decidir sobre cada ponto que irá formar o triângulo!

- *Excelente! Como estão com uma boa compreensão, é hora de pensar em como solucionar cada um dos itens desse problema.*

Uma vez que todos os estudantes tenham compreendido bem a situação proposta, segue-se para a propriamente dita *resolução do problema*, iniciando-se com o *estabelecimento de um plano*. Baseadas nos conhecimentos e nas análises anteriores e também na compreensão que alcançaram acerca da situação proposta, cada equipe trabalhará na construção de uma sequência de passos que permitirá chegar a uma solução para o problema.

Nessa construção, cada passo, cada estratégia e cada decisão que figurarão no plano de resolução de cada equipe devem estar claros para todos os seus respectivos membros e também devem ser construídos e estar sustentados em argumentação plausível e coerente, sendo ela passível de avaliação e justificativa.

Em meio a esse processo, o professor deve *observar e incentivar* as equipes, atuando nesse momento como um agente imparcial e externo a cada uma delas, não interferindo nas decisões que estão tomando (mesmo que perceba que elas estão conduzindo a equipe a um erro) e, caso alguma delas solicite a sua ajuda, não fornecendo conclusões prontas ou indagações mal elaboradas, mas, sim, questionamentos e orientações que permitam aos membros da equipe chegarem a tais conclusões ou a algo próximo a elas por si mesmos, sempre com muita discrição e paciência.

Assim que o tiverem estabelecido, a equipe segue para a *execução do plano* e, nessa execução, ela deve verificar cada passo constantemente, avaliando se ele está correto e de acordo com a situação interpretada e com o que fora discutido nas etapas anteriores pelos membros da equipe. Para assegurar que isso ocorra, o professor segue de perto orientando e incentivando as equipes a realizarem essa verificação.

Assim que todas as equipes tiverem alcançado uma solução para o problema, segue-se para o *registro das resoluções na lousa*. Nessa etapa, cada equipe deve expor na lousa sua solução e o passo a passo que realizou para chegar a ela, deixando claras a motivação por trás de cada passo e a argumentação que sustenta cada decisão tomada em sua estratégia de resolução. Esse nível de detalhamento auxiliará tanto a própria equipe, pois tal trabalho exigirá aprimoramento de habilidades de comunicação e construção de argumentação, como também as demais, no entendimento dos métodos e das estratégias de resolução das outras equipes. Após a exposição, segue-se para a *plenária*.

Nessa etapa, com base nas exposições realizadas pelas equipes, cada uma delas irá avaliar e argumentar acerca da resolução das outras, comparando suas resoluções com enfoque nas argumentações adotadas e nas estratégias utilizadas em cada uma delas. Os objetivos são observar os pontos comuns e divergentes entre as resoluções, avaliar a aplicabilidade dos métodos adotados em cada uma e julgar a coerência da argumentação utilizada para construir cada resolução.

Ressalta-se novamente a importância da atitude do professor nessa etapa, devendo este oferecer liberdade na discussão entre as equipes, ao agir como intermediador e ao não lhes fornecer conclusões preestabelecidas, mas guiá-las adequadamente, auxiliando-as quando for oportuno e necessário e as mantendo firmes na *busca do consenso* por uma solução.

Assim que for alcançado um consenso a respeito da solução de cada item do problema, segue-se para a fase de *retrospecto* e a etapa de *formalização do conteúdo*. Isso se dá de forma simultânea, isto é, ao mesmo tempo em que se percorre todo o processo de resolução do problema, toma-se proveito do momento para construir gradativamente com os estudantes as ideias e noções que generalizarão e formalizarão o procedimento em análise.

Para isso, novamente o professor questiona e instiga os estudantes para que deles partam as conclusões necessárias.

- *Nesse problema temos dez pontos marcados numa circunferência e, a partir deles, queremos determinar, no item a), quantas cordas podem ser construídas e, no item b), quantos triângulos podem ser formados. Vamos focar primeiro no item a). Como determinamos uma corda?*
- Ligando-se dois pontos.
- *Como podemos contabilizar o total de cordas possíveis?*[78]
- Podemos contar quantas cordas partem de um mesmo vértice e multiplicar esse número por 10, já que são dez pontos ao todo.
- *Ótimo plano! Como fica?*
- Fica assim: de um ponto partem 9 cordas, pois sobram nove pontos para ligar com ele, e, com são ao todo 10 pontos, ficamos com

$$10 \cdot 9 = 90$$

cordas.

[78] Enfatizam-se no texto duas respostas possíveis para os estudantes em relação a esse questionamento: pelo método de decisões do PFC e pela contagem das cordas que partem de um mesmo ponto. Independentemente da resposta, o importante é fazê-los perceber que, embora as abordagens sejam diferentes, existem similaridades notáveis e, claro, que elas levam à mesma conclusão.

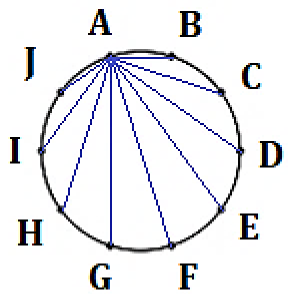
- *Muito bom! Esse é o total de cordas?*[79]

- Não, pois, fazendo assim, cada corda foi contada duas vezes!

- *Conseguem explicar isso melhor?*

- Acho que sim. Enumerando os pontos de A a J e formando as 9 cordas que partem de A, determinamos os segmentos de reta $\overline{AB}, \overline{AC}, \dots, \overline{AJ}$ (Figura 18). Quando contarmos todas as que partem de B, contaremos a corda $\overline{AB}$ novamente e, procedendo assim para cada um dos outros pontos, cada corda será contada duas vezes: uma por um de seus extremos e mais uma pelo outro!

Figura 18 – Cordas que partem de A



Fonte: Próprio autor 22 jun. 2021

- *Excelente! Como se conclui, então?*

- Como nesse processo multiplicativo cada corda foi contada duas vezes, fazemos

$$\frac{90}{2} = 45,$$

ou seja, na verdade podemos determinar 45 cordas com esses pontos.

- *Ótimo passo a passo. E se tomássemos decisões acerca dos pontos que formarão as cordas, como ficaria?*

- Para decidir o primeiro extremo, contamos com 10 opções. Tomada essa decisão, para decidir o outro extremo, contamos com 9 opções, pois não podemos escolher o mesmo ponto de antes. Assim, pelo PFC, temos

[79] Espera-se que, após a análise do problema anterior (o das equipes), os estudantes atentem um pouco mais para a questão da relevância da ordem e que, assim, respondam corretamente a esse questionamento.

$$10 \cdot 9 = 90$$

possibilidades.

- *Porém...*

- Porém, como antes, cada corda foi contada duas vezes, pois a ordem em que os extremos são tomados não configura cordas diferentes. Assim, ficamos com

$$\frac{90}{2} = 45$$

cordas diferentes.

- *Excelente! Ótimas abordagens. Notem que, embora sejam diferentes, aparecem as mesmas contas e, consequentemente, os mesmos resultados.*

- Isso. Apareceu o $10 \cdot 9$ e, depois, a divisão por 2.

- *Exato. Reservemos isso um pouco e vamos observar agora o item b). Como podemos determinar um triângulo?*

- Ligando-se três desses pontos.

- *Podemos tomar decisões a esse respeito?*

- Sim. Podemos decidir ponto a ponto.

- *Ótimo. Como proceder?*

- Temos 10 opções para escolher o primeiro. Tomada essa decisão, ficamos com 9 opções para o segundo e, após essa decisão, ficamos com 8 opções para o terceiro. Pelo PFC, ficamos com

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

possibilidades de escolher três pontos.

- *A ordem desses pontos importa para diferir um triângulo?*

- Assim como antes, não. Independentemente da ordem em que escolhamos três desses pontos, o triângulo ainda é o mesmo!

- *Exato! Então, no processo anterior, cada triângulo foi contado quantas vezes?*

- Cada triângulo foi contado $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ vezes. Ou seja, na verdade temos

$$\frac{720}{6} = 120$$

triângulos.

- *Muito bem! Agora uma perguntinha: será que podemos responder a esse item a partir da resposta do item a)?*[80]

- Como assim?

- *Vamos pensar: uma vez que tenhamos uma carda, o que falta para determinarmos um triângulo?*

- Fica faltando apenas um ponto para ligar com os extremos da corda.

- *Isso mesmo! Podemos, então, reformular nossas decisões de que forma?*

- Podemos escolher uma corda e, depois, um ponto que não seja um extremo da corda, determinando um triângulo!

- *Maravilha! Como fica?*

- Fica assim: pelo item a), temos 45 cordas diferentes, ou seja, 45 opções. Escolhida uma delas, ficamos com 8 pontos para escolher, pois os extremos da corda não nos interessam. Pelo PFC, obtemos

$$45 \cdot 8 = 360$$

maneiras de escolher uma corda e um ponto que não um de seus extremos.

- *Ok, mas já sabemos que são 120 triângulos na verdade. De que forma os triângulos estão sendo contados mais de uma vez nesse processo?*

- Para dar 120, 360 tem que ser dividido por 3, ou seja, cada triângulo foi contado três vezes!

- *Excelente raciocínio. Mas, por que eles estão sendo contados três vezes?*

- Hum... Ah! Já sei! Como cada corda é um lado do triângulo, estamos contando um mesmo triângulo três vezes, uma para cada lado!

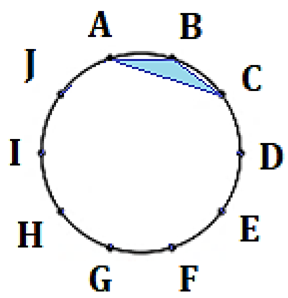
- *Ah! Muito bem. Mas expliquem isso melhor. Usem um exemplo!*

---

[80] A abordagem do texto é feita baseada na situação de os estudantes não terem conseguido pensar do modo como sugere o questionamento. Todavia, caso (numa experiência real) eles tenham conseguido pensar de tal forma, eles mesmos podem explicar o passo a passo e o professor apenas medeia e faz o seu registro.

- Certo. Por exemplo, o triângulo ABC (Figura 19) é contado ao escolhermos a corda $\overline{AB}$ e o ponto C, é novamente contado ao escolhermos a corda $\overline{BC}$ e o ponto A e, uma vez mais, ao escolhermos a corda $\overline{AC}$ e o ponto B.

Figura 19 – Triângulo ABC



Fonte: Próprio autor 22 jun. 2021

- *Muito bom! Como se conclui?*
- Fazemos a divisão

$$\frac{360}{3} = 120.$$

Ou seja, mais uma vez, podemos formar 120 triângulos a partir dos dez pontos dados.
- *Muito bem! Acredito que agora estejamos bastante preparados para generalizar o processo que seguimos para resolver tanto o problema das equipes como o dos pontos. O que vocês perceberam nesses problemas?*
- Percebemos que o princípio multiplicativo da tomada de decisões não foi suficiente para contar de forma direta o total de maneiras possíveis, pois, como a ordem dos elementos dentro de uma mesma disposição não é relevante, acabamos por contar cada disposição mais de uma vez.
- *Exato! Escolher os elementos do grupo é necessário, mas não é suficiente para contar todos eles de modo exato. Temos de eliminar as repetições. Como fizemos isso?*
- Novamente, contamos quantas vezes um mesmo grupo foi contado e dividimos o resultado da multiplicação obtido pelo PFC por esse valor.
- *Ótimo. Estamos avançando muito bem. Vamos observar os problemas novamente. No problema das equipes de estudantes, quantos estudantes devíamos escolher?*
- Cinco.

- *Dentre quantos?*

- Dentre nove.

- *Ok. Como foram contabilizados os modos de formar equipes?*

- Seguindo o PFC, decidimos aluno a aluno, ou seja, $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15.120$ modos.

- *Qual era o "porém"?*

- O "porém" era que, dentro dessa contagem, uma mesma equipe foi contada várias vezes, pois ali uma mesma equipe aparece com seus membros em ordens diferentes.

- *Como resolvemos esse contratempo?*

- Contamos o número de vezes que uma mesma equipe foi destacada!

- *E como isso foi feito?*

- Tomada uma equipe qualquer, o número de vezes que ela foi contada é igual ao número de ordenações possíveis, contado através da permutação da ordem de seus membros.

- *Isso! E o que usamos para calcular esse número?*

- O fatorial do número de membros, isto é, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

- *Como foi concluído?*

- Ao final, dividimos 15.120 por 120, pois equipes agrupadas pela igualdade de elementos contam como uma equipe só.

- *Pronto. Então, resumindo, o número exato de equipes distintas é dado por*

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!},$$

não é isso?

- Isso mesmo.

- *Agora, vamos comparar essa expressão com as que nos deram as respostas para os itens a) e b) do último problema. Vocês lembram dessas expressões?*

- Sim. No item a) era $\frac{90}{2}$ e, no item b), era $\frac{720}{6}$.

- *Ok. Mas, como obtemos os valores 90, 720 e 6?*

- Certo. 90 foi de $10 \cdot 9$, 720 foi de $10 \cdot 9 \cdot 8$ e, o 6, foi de $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$.

- *Muito bom. Como ficaria, então?*

- Ficaria, no item a), $\frac{10\cdot 9}{2}$ e, no item b), $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}$.

- *Excelente! Apenas percebam que, para que as três expressões fiquem similares, falta apenas um fatorial no 2, concordam?*

- Sim.

- *Isso ocorre?*

- Como assim?

- *Esse 2 vem da permutação de dois elementos, isto é, de* $2!$*?*

- Sim, pois podemos escolher dois pontos de $2! = 2 \cdot 1 = 2$ modos.

- *Ótimo! Então, em resumo, temos as expressões*

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!}, \quad \frac{10 \cdot 9}{2!} \quad e \quad \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!}.$$

O que elas têm em comum?

- Nos denominadores temos o fatorial do número de elementos que devemos escolher, já que estamos calculando o número de maneiras que podemos ordená-los.

- *Muito bom! E nos numeradores?*

- Nos numeradores temos quase o fatorial do número total de elementos de que se dispõe, mas não desenvolve o fatorial todo.

- *Ok. Onde para esse desenvolvimento?*

- Para quando fazemos as escolhas de todos os elementos que queremos.

- *Exato. Em outras palavras, distribuímos os elementos de que dispomos sem repetir um já escolhido (por isso cai sempre de 1 em 1) até que tenhamos um grupo com a quantidade de elementos preestabelecida, concordam?*

- Isso mesmo.

- *Vamos generalizar isso para uma quantidade não especificada de elementos como também para uma quantidade não especificada de elementos que comporão os grupos. Já fizemos algo parecido antes. Vamos usar letras para representar essas quantidades.*

- Certo.

- *Digamos que temos* n *elementos distintos entre si e que queremos com eles formar grupos de* p *elementos. Precisamos que* $p \leq n$*, concordam?*

- Sim, pois não podemos formar grupos com uma quantidade de elementos maior do que a de que dispomos.

- *Excelente. Que condição está faltando para se encaixar na natureza da situação apresentada em cada problema? Ou seja, o que caracteriza o que estamos chamando de* <u>*combinação*</u>*?*

- Que a ordem desses elementos é irrelevante para distinguir agrupamentos.

- Precisamente. Então, uma vez encontradas essas condições, o número de agrupamentos diferentes que se pode formar é calculado de que forma?

- Primeiro decidimos um a um os elementos que comporão o grupo. Fazemos isso através do PFC.

- Exato. Quantas opções para o 1º?

- Temos n opções.

- Muito bom. Decidido o primeiro, quantas opções para o 2º?

- Um a menos.

- Como representamos isso com a linguagem que estamos usando?

- Com $n - 1$.

- Ótimo. E para o 3º?

- Ficamos com $n - 2$.

- Ok. E fazemos isso até onde?

- Até que tenhamos a quantidade de elementos que formam o grupo.

- Ótimo. Que quantidade é essa? Como a chamamos agora há pouco?

- De p.

- Muito bem. Então ficamos com $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots$ *até que tenhamos* p *fatores, não é isso?*

- Isso mesmo.

- Vamos representar assim:

$$\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots}^{p \text{ fatores}},$$

tudo bem?

- Sim.

- Agora, para eliminar o fator "ordem", como fazemos?

- Permutamos os elementos dentro do grupo para contar todas as ordenações possíveis.

- Maravilha. Quantos elementos tem o grupo?

- Tem p elementos.

- Como fica a contagem das ordenações possíveis?

- É só calcular o fatorial de p, isto é, o valor de $p!$, que é p vezes $p - 1$ vezes $p - 2$, etc., até chegar a 1.

- *Ótimo. E, para finalizar, o que fazemos com esses valores para contar efetivamente a quantidade de agrupamentos?*

- É só dividir.

- *Excelente! Então, ficamos com*

$$\frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots}^{p\ fatores}}{p!},$$

concordam?

- Sim. Assim, teremos a quantidade exata de grupos diferentes que se pode formar, desconsiderada a ordem dos elementos de cada grupo.

- *Perfeito. Para fechar, na situação que estamos generalizando, nossa intenção é formar grupos de p elementos a partir de n elementos distintos dados (com $p \leq n$), de modo que seja irrelevante a ordem desses elementos no grupo. Nessas condições, o número de grupos que podemos formar será indicado por C_n^p, lendo-se "combinações de n elementos p a p" e, como acabamos de concluir, é dado por*

$$C_n^p = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots}^{p\ fatores}}{p!}.$$

Uma vez formalizado o procedimento, a *proposição e resolução de novos problemas* vem com a finalidade de explorar e exercitar a sua aplicação em problemas que explícita ou implicitamente a requiram, mas sempre tomando-se o cuidado de não se restringir à mera aplicação do resultado e, sim, à sua aplicação consciente, enfatizando-se mais o procedimento do que a equação em si mesma.

Para isso, sugere-se mais um problema, mas é evidente que o professor tem a liberdade de explorar mais do que isso e, na verdade, ele deve se sentir encorajado a fazê-lo.

4.2.5.3 Problema 3

Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida em um grupo de 8 homens e 5 mulheres.

a) Quantas comissões podem ser formadas?
b) Qual seria a resposta se um dos homens não aceitasse participar da comissão se nela estivesse determinada mulher?

Fonte: MORGADO et al. (2016, p. 32), Exercício 1

O processo inicia-se pela *proposição do problema* e, nesse caso, como o enunciado não é muito longo, o professor pode optar por apresentá-lo na lousa ou entregá-lo a cada estudante em versão impressa. Uma vez que tenha sido proposto, prossegue-se naturalmente para a fase de *compreensão do problema*.

Essa fase se inicia pela *leitura individual*, momento no qual cada estudante irá individualmente ler o enunciado para, assim, começar a tirar suas primeiras conclusões, a fazer interpretações e a coletar informações que venha a julgar relevantes para futura resolução.

Após isso, com os estudantes reunidos em equipes, segue-se para a *leitura em conjunto* e, nesse momento, cada uma delas lerá novamente o enunciado do problema, mas de forma coletiva entre os seus membros, de modo a situarem-se coletivamente na situação proposta pelo problema, mostrando cada um suas conclusões, interpretações e informações coletadas.

Essa troca de informações é essencial e extremamente benéfica para o desenvolvimento dos estudantes, pois, ao mesmo tempo que devem conscientemente selecionar um discurso que promova o entendimento de suas ideias, cada um deles será muito provavelmente exposto a diferentes pontos de vista e conclusões por parte dos membros de sua equipe.

Para contribuir com a compreensão dos estudantes acerca da situação proposta, o professor pode os conduzir através de questionamentos discretos, mas oportunos.

- *Bem, pessoal, o que se quer determinar nesse problema?*

- No item a), o número total de comissões que podem ser formadas e, no item b), o número de comissões que podem ser formadas de modo que nelas não estejam um homem e uma mulher específicos.

- *Muito bem. Como é formada uma comissão?*

- Com três homens e três mulheres.

- *Quais são os dados?*

- Que existem oito homens e cinco mulheres.

- *No item a), há algum processo de decisão que possa ser realizado?*

- Sim. Para formar uma comissão, devemos escolher três homens dentre os oito e três mulheres dentre as cinco.

- *Alguma observação acerca desse processo? Algo de similar com alguma discussão que tenhamos feito?*

- Como assim, professor?

- *Existe algo que seja importante notar em relação às decisões dos membros que irão compor uma comissão?*

- Ah! Uma vez escolhidos três homens ou três mulheres, a ordem em que eles serão escolhidos para formar a comissão não importa, pois ela ainda será a mesma.

- *Hum, muito bom. Então, o que temos por trás dessa situação?*

- Combinações!

- *Isso, excelente! Agora, no item b), o que queremos determinar?*

- A mesma coisa: o número de comissões formadas por três homens e três mulheres.

- *Já que a incógnita é a mesma, há alguma condição?*

- Sim. Um dos homens não aceita participar da comissão se lá estiver determinada mulher.

- *Hum... Então, nesse caso, que tipos de comissões devemos formar? O que deve acontecer?*

- O homem e a mulher destacados não podem aparecer juntos numa mesma comissão!

- *O que pode acontecer, então, nessas comissões?*

- Pode ter só ele e ela não; pode ter só ela e ele não; ou pode não aparecer nenhum deles.

- *Muito bem. Agora, que tal pensarem numa forma de resolver esse problema?*

Uma vez que esteja compreendido, segue-se para a *resolução do problema*. Nessa etapa, inicialmente as equipes devem *estabelecer um plano*, ou seja, baseadas no que compreenderam e no que trazem consigo, cada uma delas deve construir uma sequência de passos, procedimentos e estratégias que conduzam a uma solução para o problema.

É imprescindível que todos de uma mesma equipe tenham plena consciência do passo a passo que estão construindo, isto é, toda decisão tomada nesse processo deve ter uma motivação clara e coerente com a situação ou com a estratégia que estejam seguindo, eliminando-se cálculos ou procedimentos sem embasamento. Além disso, a argumentação que sustentará o plano deve ser verificável e, assim, passível de julgamento.

Em meio a isso, o professor deve manter constante circulação pela sala, *observando e incentivando* o andamento das equipes. É importante observar se elas estão tentando e conseguindo estabelecer um plano de resolução e, caso estejam com alguma dificuldade, o professor deve prestar auxílio, mas reitera-se que isso sempre seja feito com muita calma e discrição, promovendo a autonomia dos estudantes ao não lhes fornecer as respostas, mas questionamentos oportunos feitos com o propósito de neles despertar alguma ideia ou fazer-lhes pensar de um modo ainda não cogitado.

Uma vez que esteja estabelecido, cada equipe segue para a *execução do plano*. No processo de execução, toda a equipe deve estar atenta à realização de cada procedimento, avaliando e verificando constantemente cada passo para, assim, validá-lo ou reformulá-lo se for necessário. No momento em que todas as equipes tiverem chegado a alguma solução, dá-se prosseguimento com o *registro das resoluções na lousa*.

Nessa etapa, cada uma delas deve na lousa registrar e explicar todo o passo a passo de sua resolução, de forma ao mais minuciosamente possível descrever suas estratégias e ressaltar a argumentação que as sustenta. Ressalta-se que erros e equívocos cometidos pelas equipes em suas resoluções não devem ser prontamente apontados pelo professor, devendo este se conter e permitir que os próprios estudantes os discutam entre si na etapa seguinte. No caso de algo passar por eles despercebido, o professor, então, o traz à tona para discussão e adequação.

Após realizados todos os registros, prossegue-se para a *plenária*. É nesse momento que cada equipe, com base na resolução das outras, irá avaliar e discutir essas resoluções, observando-se o que há de comum entre elas, se há divergências em algum aspecto, se há coerência na argumentação adotada e se os métodos e procedimentos estão corretamente aplicados.

É importante ressaltar (principalmente para os estudantes) que não se trata de uma disputa, em que se ataca e se defende, mas de um momento de discussão, avaliação e autoavaliação saudáveis em que o foco reside sobre o problema e sua resolução, mantendo-se firmes na *busca do consenso* sobre sua solução.

Nesse processo o professor medeia e orienta os estudantes, oferecendo-lhes e garantindo-lhes espaço de fala, escuta e debate, de modo a buscar que deles possam partilhar as conclusões sobre cada aspecto discutido.

Alcançado o consenso acerca da resolução e da solução do problema mediante o debate, segue-se para as etapas finais de *retrospecto* e *formalização do procedimento*. Uma vez que o procedimento de contagem por meio de combinações simples já se encontra formalizado, a atenção volta-se para retomar todo o passo a passo de resolução ao mesmo tempo em que se observa novamente a identificação, as características e a resolução de problemas envolvendo esse procedimento.

- *O que temos de informação nesse problema?*

- Tem-se um grupo de 8 homens e 5 mulheres e, como eles, deseja-se formar uma comissão composta de 3 homens e 3 mulheres.

- *Perfeito. No item a) queremos determinar quantas comissões diferentes pode-se formar, não é isso?*

- Isso mesmo.

- *Como podemos fazer essa contagem?*

- Devemos escolher 3 homens dentre os 8 e 3 mulheres dentre as 5.

- *Ótimo. Em relação aos homens, como podemos fazer essas escolhas?*

- Já que a ordem em que são escolhidos não importa, combinamos 8 homens em grupos de 3.

- *Por que exatamente a ordem de escolha não importa? Podem dar um exemplo?*

- Sim. Por exemplo, escolher Alberto – Beto – Carlos é o mesmo que escolher Beto – Carlos – Alberto, pois, no final das contas, o trio é o mesmo.

- *Excelente! Como fica, então?*

- Fica

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 8 \cdot 7 = 56$$

trios diferentes com os homens.

- *Ótimo. E como fica com as mulheres?*

- Bem parecido. Fica

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 5 \cdot 2 = 10$$

trios diferentes com as mulheres.

- *Muito bem. Então, quantas comissões pode-se formar, isto é, o que fazer com os valores 56 e 10?*[81]

[81] Espera-se que, após toda a abordagem realizada sobre os principais métodos de contagem, os estudantes percebam que essa indagação se trata de decidir um trio de homens e, logo depois, um trio de mulheres, o que se resolve pelo princípio multiplicativo. Todavia, na busca pelo consenso, caso alguém responda a esse questionamento equivocadamente (somando 56 com 10, por exemplo), basta fazê-los perceber que, para cada um dos 56 trios masculinos, pode-se escolher qualquer um dos 10 trios femininos, ou seja, que novamente trata-se da aplicação do PFC.

- Escolhido um dos 56 trios de homens, pode-se escolher qualquer um dos trios de mulheres, ou seja, pelo PFC, são $56 \cdot 10 = 560$ comissões diferentes.

- *Excelente! Uma ótima resolução. Agora vamos focar no item b). O que queremos determinar nesse item tem a mesma natureza do que queríamos determinar no anterior: comissões formadas por três homens e três mulheres. Mas temos uma condição. Qual é ela?*

- Que, numa mesma comissão, não podem estar um homem e uma mulher específicos, pois tal homem não aceita participar da mesma comissão que esteja tal mulher.

- *Como podemos garantir essa condição?*[82]

- Podemos formar três tipos de comissão: aquelas em que o homem esteja e a mulher não; que a mulher esteja e o homem não; ou que nenhum dos dois esteja presente.

- *Maravilha. Como podemos contar as do primeiro tipo?*

- Já que o referido homem deve estar presente na comissão, combinamos os outros 7 nas duas vagas restantes, ou seja, são

$$C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2!} = \frac{42}{2} = 21$$

trios de homens. No caso das mulheres, já que uma delas não pode compor a parte feminina, combinamos as outras 4 nas três vagas, isto é, são

$$C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

trios de mulheres. Pelo PFC, temos $21 \cdot 4 = 84$ comissões do 1º tipo.

- *Ótimo. Como ficam as do 2º tipo?*

- Já que o homem não deve estar presente, combinamos os outros 7 nas três vagas, ou seja, são

---

[82] No texto serão enfatizados dois procedimentos: pela contagem de cada tipo de comissão que cumpra a condição exposta; e pela contagem das comissões não desejadas para futura subtração do número total de comissões. É importante que os estudantes tenham contato com diversas abordagens de resolução, mas em nenhum momento o professor deve priorizar uma forma padronizada de resolução em detrimento daquela pensada e adotada pelos estudantes, pois isso pode surtir em efeito contrário ao que se pretende. É válido que estratégias “geniais” e saídas mais curtas têm seu valor, mas é imprescindível lembrar que, no final das contas, o importante é resolver o problema e, mais ainda, os estudantes compreenderem o que está sendo feito.

$$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 7 \cdot 5 = 35$$

trios masculinos. No caso das mulheres, como a referida mulher deve estar presente, combinamos as outras 4 nas duas vagas restantes, ou seja, são

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2!} = \frac{12}{2} = 6$$

trios femininos. Portanto, pelo PFC, são $35 \cdot 6 = 210$ comissões do 2º tipo.

- *Perfeito! E, para finalizar, como ficam as do 3º tipo?*

- Nem o homem nem a mulher que foram mencionados devem compor a comissão, portanto, combinamos os 7 homens restantes nas três vagas e fazemos o mesmo com as 4 mulheres restantes, ou seja, como já fizemos, $C_7^3 = 35$ e $C_4^3 = 4$. Logo, pelo PFC, são $35 \cdot 4 = 140$ comissões do 3º tipo.

- *Muito bem! O que concluímos?*

- Juntando as comissões de cada tipo, ficamos com

$$84 + 210 + 140 = 434$$

comissões em que o referido homem e a referida mulher não participam simultaneamente.

- *Excelente! Contar cada tipo separadamente e depois somar as quantidades foi uma ótima estratégia. Será que podemos chegar a mesma conclusão por outra abordagem?*

- Não sei dizer... Talvez?!

- *Vamos pensar na situação: queremos contar quantas comissões cumprem a condição de o homem e a mulher que foram mencionados não participarem simultaneamente de uma mesma comissão.*

- Exatamente.

- *O que contamos no item a)?*

- Todas as comissões que podem ser formadas com os 8 homens e as 5 mulheres.

- *Exato. Concordam que essas comissões contadas no item a) reúnem as que queremos no item b) com as que não queremos?*

- Ah, é verdade. Todas as comissões possíveis reúnem os três tipos que separadamente acabamos de contar com o tipo de comissão que não queremos no item b): aquelas em que o homem e a mulher aparecem ao mesmo tempo.

- *Muito bom! Então, o que devemos fazer para ficarmos só com o que nos interessa nesse item?*

- Devemos tirar o tipo de comissão que não queremos.

- *Exato! Quantas são essas comissões?*

- Já que tanto o homem como a mulher estão presentes, basta combinarmos os outros 7 homens nas duas vagas e as 4 mulheres restantes nas outras duas, isto é, como já fizemos, $C_7^2 = 21$ e $C_4^2 = 6$. Pelo PFC, ficamos com $21 \cdot 6 = 126$ comissões do tipo que não queremos.

- *Como se conclui?*

- Já que, de acordo com o item a), temos um total de 560 comissões possíveis, basta desse número retiramos aquelas que não satisfazem a condição, ou seja, são

$$560 - 126 = 434$$

comissões que não apresentam simultaneamente o tal homem e a tal mulher.

- *Muito bom! Interessante também, não é, esse modo de pensar?*

- É sim. Contar todos os casos, depois contar os que não satisfazem à condição para, após isso, subtrair esses valores e ficar apenas com o que é pedido.

- *Juntem mais essa abordagem às que vocês já construíram, mas não esqueçam de que a melhor maneira de resolver qualquer problema é aquela que vem à nossa mente após o compreendermos bem.*

4.2.5.4 Complemento

Uma vez que os estudantes estejam compreendendo satisfatoriamente as características e as ideias por trás de problemas envolvendo a contagem mediante combinações simples, surge a possibilidade de fazê-los perceber e compreender duas identidades importantes: $C_n^p = C_n^{n-p}$ e $0! = 1$. Para isso, o professor pode conduzir como é indicado a seguir.

- *Todos compreenderam bem o que indica o símbolo C_n^p, com $p \leq n$?*

- Sim. Indica o número de grupos de p elementos que podem ser formados a partir de n elementos (distintos) dados, de modo que a ordem dos elementos desses grupos seja irrelevante. Chamamos isso de combinações, por isso o C.
- *Excelente. Agora, vamos analisar a seguinte igualdade:* $C_n^p = C_n^{n-p}$. *Compreendem o que está sendo dito nela?*
- Mais ou menos. Primeiro temos as combinações de n elementos em grupos de p elementos, mas, depois, não compreendi esse $n - p$...
- *Certo. Para ficar mais claro, vamos atribuir valores a* n *e a* p. *Digamos que são grupos de 4 elementos a partir de 6 elementos distintos dados, ou seja,* $n = 6$ *e* $p = 4$. *Como ficaria nesse caso?*
- Ficaria assim:

$$C_6^4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 5 = 15$$

- *Ok. Como ficaria o outro membro?*
- $n - p$ fica $6 - 4 = 2$, ou seja, C_6^2 que é igual a

$$\frac{6 \cdot 5}{2!} = \frac{30}{2} = 15$$

- *Exatamente! Percebem alguma coisa?*
- Que deu o mesmo resultado.
- *Exato. Notem que, com esse exemplo, ocorre uma igualdade entre as combinações calculadas, exatamente como foi colocado de início. Mas será que isso ocorre somente para esses valores de* n *e* p*?*
- Hum... Não sei. Talvez não?!
- *Que tal fazermos mais um teste? Façamos para* $n = 10$ *e* $p = 3$. *Como fica?*
- O primeiro membro fica

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

e, no segundo, como $10 - 3 = 7$, fica

$$C_{10}^{7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120,$$

dando, de novo, o mesmo resultado.

- *Interessante, não é? Combinar n elementos distintos em grupos com p elementos parece ser igual a combinar n elementos distintos em grupos com $n - p$ elementos.*

- É interessante.

- *Será que isso é válido para quaisquer n e p, desde que $p \leq n$? Como podemos verificar isso?*

- Não sei explicar ao certo...

- *Vamos analisar o que está acontecendo. No primeiro teste formamos inicialmente grupos de 4 elementos a partir de 6 elementos distintos dados, não foi isso?*

- Sim. E encontramos 15 grupos.

- *Perfeito. E esse foi o mesmo valor para grupos de 2 (dois) elementos, não foi?*

- Sim, o mesmo valor.

- *Por que exatamente essa igualdade aconteceu?*

- Hum... Não sei dizer...

- *Ok. Vamos dizer que os seis elementos dados são a, b, c, d, e, f, tudo bem?*

- Tudo bem.

- *Digam-me um grupo de quatro elementos formados a partir deles.*

- Certo. O grupo a, b, c, d.

- *Ok. Quantos elementos sobram?*

- Dois: e, f.

- *Certo. Digam-me mais um grupo?*

- b, c, d, e.

- *Certo. Quantos sobram?*

- Dois de novo, mas são a, f.

- *Notam alguma coisa? Algo em comum com a segunda combinação que calcularam nesse exemplo?*

- Sempre que formamos um grupo de quatro elementos, sobram outros dois.

- *E qual foi a segunda combinação que calcularam nesse exemplo do $n = 6$ e $p = 4$?*

- Foi a combinação C_6^2, já que $6 - 4 = 2$.

- *E que tipo de grupo está sendo formado nessas combinações?*

- Grupo de dois elementos a partir dos seis.

- *E aí? Notam algo de interessante?*

- Ah! Acho que sim. Ao formarmos grupos de quatro elementos, sobram exatamente dois, os quais formam um grupo com essa quantidade de elementos.

- *Exatamente! Para cada grupo de quatro elementos que formamos, automaticamente formamos um grupo de dois elementos com exatamente os dois que sobram após a escolha.*

- É verdade.

- *O mesmo acontece para o segundo exemplo?*

- Sim, pois, ao formarmos com 10 elementos distintos um grupo com 7 elementos, automaticamente formamos um grupo com 3 elementos.

- *Maravilha. E isso ocorre somente para esses valores que escolhemos nos exemplos?*

- Não. Independentemente da quantidade de elementos dados, na hora em que formamos um grupo com alguns desses elementos, automaticamente formamos um grupo com os elementos que sobram.

- *Muito bem. Vamos generalizar isso? São dados n elementos distintos e vamos formar grupos de p elementos. Ao escolhermos os elementos do grupo, quantos sobram?*

- Sobra a diferença, isto é, $n - p$.

- *Exato. Então, para cada grupo de p elementos que formamos, automaticamente se forma um grupo com $n - p$ elementos. Como podemos indicar isso simbolicamente?*

- Os primeiros grupos são C_n^p e, os que se formam junto com eles, são C_n^{n-p}.

- *Muito bem. E, como para cada um do 1º tipo tem-se um do 2º, ao final teremos a mesma quantidade de grupos de cada tipo, concordam?*

- Sim, por isso, podemos colocar o sinal de igual. Isto é,

$$C_n^p = C_n^{n-p}.$$

- *Compreendida agora essa igualdade?*

- Sim.

- *Excelente. Com base nisso, vamos chegar a uma conclusão bem interessante. Lembram do fatorial, não lembram?*

- Sim.

- *Vimos como atribuir valores aos fatoriais de números naturais de 1 em diante, não foi?*

- Sim. Concluímos que $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, e assim por diante.

- *Muito bom. E o que vocês acham do valor de* $0!$*?*[83]

- Não sei. Zero?!

- *Vamos pensar com calma. O que era o fatorial?*

- O número de maneiras de organizar objetos (distintos) em fila.

- *Certo. Então,* $0!$ *indicaria o número de maneiras de se organizar zero objetos em fila, concordam?*

- Sim.

- *Que número é esse?*

- Nenhuma. Zero.

- *Hum... Vamos analisar por um ponto de vista recente. Vimos que, para* $p \leq n$*, temos que* $C_n^p = C_n^{n-p}$*, não foi?*

- Isso mesmo.

- *O que ocorre se* $p = n$*?*

- Ficamos com

$$C_n^n = C_n^0.$$

- *Muito bem. No primeiro membro temos combinações de* n *objetos em grupos de* n *objetos. Quantos grupos podemos formar?*

- Apenas 1 (um): o próprio grupo de n elementos.

- *Perfeito. Podemos até encontrar esse valor através da expressão que deduzimos para combinações, ou seja,*

$$C_n^n = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots}^{n \text{ fatores}}}{n!},$$

concordam?

- Isso mesmo.

[83] É muito provável que os estudantes deem como resposta 0 (zero). Caso surjam outras, dificilmente estarão embasadas em alguma argumentação.

- *Mas, se a expressão do numerador tem n fatores, o produto se desenvolve até que valor?*

- Ele vai até o 1 (um), ou seja, é o fatorial inteiro.

- *Exatamente. Então, ficamos com*

$$C_n^n = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots}^{n \text{ fatores}}}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1,$$

o mesmo resultado que vocês deduziram.

- Isso mesmo. Apenas 1 (um) grupo.

- *Nessa mesma linha de raciocínio, como ficaria o segundo membro?*

- Ficaria

$$C_n^0 = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots}^{0 \text{ fatores}}}{0!}$$

- *Muito bom! Já que não temos ainda um valor para* $0!$, *como ficaria o numerador dessa expressão?*[84]

- Já que não colocamos nenhum daqueles fatores, fica 0 (zero), não?

- *É aí que está o detalhe. Se "colocarmos" nenhum daqueles fatores, devemos ficar o que "sobra" além deles. Ao dizerem que resta colocar o zero, é como se houvesse um zero multiplicando esses fatores a todo momento, como a seguir.*

$$C_n^0 = \frac{0 \cdot \overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots}^{0 \text{ fatores}}}{0!}$$

Mas, se isso ocorresse, qualquer combinação sempre daria o mesmo resultado. Que resultado seria esse?

- Sempre daria zero, pois ele multiplicaria todos os outros fatores.

- *Precisamente. Então, já que não é o zero que "sobra", qual é o fator que "acompanha" todos esses fatores?*

[84] Novamente, trabalha-se com a resposta provável a ser apresentada pelos estudantes.

- Hum... Não sei.

- *Qual o valor que pode "acompanhar" esse produto sem alterá-lo?*

- Ah! É o 1 (um), pois ele é neutro na multiplicação.

- *Exato. Tanto faz escrevermos assim*

$$n(n-1)(n-2)\cdots$$

ou assim

$$1 \cdot n(n-1)(n-2)\cdots,$$

concordam?

- Sim. No final, é o mesmo resultado.

- *Muito bem. Sendo assim, quando "colocamos" nenhum dos fatores* $n(n-1)(n-2)\cdots$*, o que "sobra"?*

- Sobra o 1 (um).

- *Maravilha. Então podemos escrever*

$$C_n^0 = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots}^{0\text{ fatores}}}{0!} = \frac{1}{0!},$$

concordam?

- Sim.

- *Ok. Agora, como* $C_n^n = C_n^0$ *e* $C_n^n = 1$*, concluímos que* $C_n^0 = 1$ *e, assim, podemos escrever*

$$1 = \frac{1}{0!},$$

não é?

- Isso mesmo.

- *O que podemos concluir sobre* $0!$ *dessa última igualdade?*

- Já que 1 (um) dividido pelo valor de $0!$ resulta em 1 (um), então $0! = 1$.

- *Isso mesmo. Concluímos que, na verdade,* $0! = 1$. *Confuso, não é?*
- É sim. Um pouco.
- *Mas, se pensarmos sobre outro ponto de vista, isso faz um pouco mais de sentido.*
- Como, professor?
- *Vamos lembrar dos conjuntos. Dado um conjunto* A *com* n *elementos, isto é,* $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, *ao calcularmos* C_n^p, *estamos contando quantos são os* <u>*subconjuntos*</u> *de* A *que possuem exatamente* p *elementos, concordam?*
- Como assim?
- *Por exemplo:* C_n^1 *seriam todos os grupos formados por exatamente 1 (um) elemento, o que dá exatamente* n *grupos, um para cada elemento. Trocando-se a palavra grupos por subconjuntos, teremos exatamente os* n *subconjuntos de A com apenas um elemento, isto é, os conjuntos*

$$\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}.$$

O mesmo pode ser afirmado para outras quantidades de elementos, até chegar ao próprio conjunto A, *com todos os* n *elementos. Compreendem melhor?*
- Sim. Cada combinação representa um subconjunto.
- *Isso mesmo. Nesse sentido, o que significaria* C_n^0*?*
- A quantidade de subconjuntos de A que apresentam nenhum elemento.
- *Precisamente. E quantos conjuntos existem com essa propriedade? Vocês lembram?*
- Sim. Existe apenas um: o conjunto vazio!
- *Excelente. O que podemos afirmar, então?*
- O mesmo de antes: que $C_n^0 = 1$.
- *Ótimo. Isso encerra o que queríamos saber sobre* $0!$. *Em resumo, não vale 0 (zero), vale 1 (um).*

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através das discussões levantadas neste trabalho, pôde-se perceber que as expectativas sobre o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória não estão sendo refletidas na realidade geral dos resultados apresentados por esse processo. Enquanto se espera que os estudantes, a partir dele, consigam lidar com grandes quantidades de dados, arrumando-os e agrupando-os estrategicamente para efetuarem contagens de forma organizada, rápida e eficiente, desenvolvendo, em meio à resolução de problemas, estratégias de contagem, o que se tem é o não desenvolvimento desse raciocínio combinatório, sendo o mais comum a apresentação dessas estratégias como definições e o uso mecânico de suas fórmulas pelos estudantes.

Uma vez que essa constatação veio ao encontro de algumas experiências do autor com o assunto, foi desenvolvido este trabalho visando contribuir com a reversão dessa situação, retirando-se o foco da exposição de técnicas e fórmulas e o transferindo ao desenvolvimento da compreensão dos estudantes a respeito desse assunto.

Com essa finalidade, foi elaborada neste trabalho uma sequência didática para o ensino-aprendizagem de Combinatória através da resolução de problemas. Sua estruturação foi pensada ao se perceber, nos documentos nacionais orientadores do processo educativo, a frequente recomendação de que o raciocínio combinatório e as técnicas de contagem fossem desenvolvidos em meio à resolução de problemas, o que concebeu a metodologia.

A fim de compreendê-la melhor, foi feita uma pesquisa aprofundada sobre vários de seus aspectos, conhecendo-se um pouco a história de seu desenvolvimento e discutindo-se algumas considerações importantes acerca de sua abordagem e de seus impactos na aula de Matemática.

Esse estudo deu origem à organização da metodologia adotada, que consiste da combinação dos métodos de duas importantes referências no que tange à resolução de problemas: Onuchic et al. (2019), com suas dez etapas para o desenvolvimento de conteúdos matemáticos através da resolução de problemas, e Polya (1995), com suas quatro fases para o processo de resolução.

Através desse método, que detalha passo a passo como o conteúdo matemático é desenvolvido em meio à resolução de um problema pelos estudantes e também ajuda a desenvolver, organizar e potencializar esse processo, a sequência didática surgiu de sua aplicação ao desenvolvimento das técnicas de Combinatória trabalhadas no ensino médio.

A contribuição de tal sequência no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem de Combinatória reside em algumas percepções. Primeiro, nenhuma das técnicas é apresentada aos estudantes, elas são por eles concebidas e desenvolvidas por meio da necessidade de mobilizar suas capacidades e conhecimentos prévios para solucionar problemas, o que atribui sentido e significado ao que estão fazendo.

Além disso, ao se enfatizar nesse processo a compreensão e o uso do PFC, utilizando-o como recurso à percepção das outras técnicas em consequência de sua aplicação, ao mesmo tempo em que os estudantes compreendem e dominam uma ferramenta simples e poderosa de contagem, não haverá a necessidade de memorizar as demais técnicas, pois estarão conectadas ao seu entendimento por meio de um princípio bastante elementar e das caraterísticas que configuram os diferentes tipos de problema de contagem, o que, por sua vez, também mobiliza os estudantes a compreenderem cada problema antes de começar a usar os seus dados.

É oportuno salientar que, devido às diversas complicações trazidas pela pandemia da Covid-19, essa sequência didática não foi ainda aplicada em sala de aula para verificação e estudo prático de seus resultados. Entretanto, intenta-se prontamente fazê-lo assim que o cenário permitir, além de aplicar a metodologia a outros tópicos de Matemática, gerando novas sequências e abordagens.

Considera-se válido ressaltar que o aprofundamento na pesquisa que a originou permitiu ao autor fazer profundas reflexões sobre o ensino (não somente de Combinatória, mas de Matemática de uma forma geral), sendo a ele possível perceber que elas têm diretamente influenciado em sua prática pedagógica a partir de então.

De fato, temos esperado mais pelos nossos alunos, buscado problemas que gerem a mobilização de conhecimento e discussões e mais insistentemente solicitado a manifestação de suas conclusões. Temos aplicado os questionamentos e as orientações de Polya (1995) para suscitar essas conclusões e, além disso, temos orientado nossos alunos a desenvolverem e guardarem estratégias de resolução, insistindo que eles se habituem a separar todas as informações de um problema, a fim de enxergarem como elas se relacionam com algo que já viram e, assim, perceberem uma saída para a solução.

Este trabalho também proporcionou a possibilidade de vislumbrar um pouco mais do quanto a teoria ainda está distante da prática, já que existem estratégias e metodologias muito bem estruturadas, que são pensadas, estudadas e desenvolvidas no intuito de promover um ensino de Matemática significativo, porém fatores como uma formação insuficientemente preparatória, a estagnação da prática, a falta de busca por aprofundamento, a dificuldade de uma formação continuada, o ritmo de ensino acelerado imposto pelas extensas grades curriculares e um sistema de ensino que constantemente desvaloriza os profissionais da educação, fazem com que esse ensino se dê, de forma assustadoramente frequente, nos moldes tradicionais de exposição, aplicação e repetição.

Assim, ao explicitar uma sequência didática e, por meio dela, sugerir um modo de repensar o ensino de Combinatória, fazendo-a ser desenvolvida através da resolução de problemas, espera-se que tal sugestão venha a servir como recurso didático, auxiliando colegas professores de Matemática no planejamento e no desenvolvimento de suas aulas de Combinatória, além de um material para reflexão, buscando-se pensar em como reverter a situação anteriormente discutida e fazer com que os estudantes consigam, de fato, compreender Matemática.

6 REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência**. Rio Claro: [s.n.].

BACHX, A. C.; POPPE, L. M. B.; TAVARES, R. N. O. **Preludio à análise combinatória**. 7. ed. São Paulo: Nacional, 1975. v. 1

BEGLE, E. G. Some lessons learned by SMSG. **The Mathematics Teacher**, v. 66, n. 3, mar. 1973.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997. v. 3

BRASIL. **Orientações curriculares para o ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2006. v. 2

BRASIL. **Base nacional comum curricular: educação é a base**. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais ensino médio (PCNEM). Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, [s.d.a]. v. III

BRASIL. **Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais (PCN+ ensino médio). Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, [s.d.b].

BROWNELL, W. A. The progressive nature of learning in mathematics. **Mathematics Teacher**, v. 100, n. Special, p. 26–34, 2007.

DIAS, M. O. **Tendências em educação matemática: percursos curriculares brasileiros e paraguaios**. 1. ed. Curitiba: Appris, 2016.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática completa**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005. v. 1

HIPÓTESE; TESE. In: **Michaelis dicionário brasileiro de língua portuguesa**. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/>. Acesso em: 6 jul. 2021.

IMPA. **OBMEP**. Disponível em: <http://147.65.23.40/banco.php>. Acesso em: 13 mar. 2021.

KENNEY, M. J. Discrete mathematics and curriculum reform. **The Journal of Education**, v. 178, n. 2, p. 51–58, 1996.

LAMBDIN, D. V. Benefits of teaching through problem solving. In: LESTER, F. K. J.; CHARLES, R. (Eds.). **Teaching Mathematics through Problem Solving: Prekibdergarten - Grade 6**. [s.l.] NCTM, 2003. p. 1–269.

LESH, R.; ZAWOJEWSKI, J. Problem solving and modeling. In: LESTER, F. K. JR. (Ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics**. [s.l.] NCTM, 2007. p. 763–804.

LESTER, F.; CAI, J. Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno? **Boletim GEPEM**, n. 60, p. 147–162, jun. 2012.

LUCCA, A. M. T. **Aprendizaje significativo en matemática**. [s.l: s.n.].

MEEKER, K. R. **Using discrete mathematics in the K-12 classroom to inspire students to enjoy mathematics**. Oklahoma: [s.n.].

MENDONÇA, M. C. D. **Problematização: um caminho a ser percorrido em educação matemática**. Campinas: [s.n.].

MORGADO, A. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MORGADO, A.; CARVALHO, P. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MORRIS, J. **Combinatorics: an upper-level introductory course in enumeration, graph theory, and design theory**. 1. ed. [s.l.] Creative Commons, 2017. v. 1

NCTM. **An agenda for action: recommendations for school mathematics of the 1980s**. Disponível em: <https://www.nctm.org/flipbooks/standards/agendaforaction/html5/index.html>. Acesso em: 7 jul. 2021.

NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. [s.l.] Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

ONUCHIC, L. R. et al. **Resolução de problemas: teoria e prática**. 1. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2019. v. 1

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática (Bolema)**, v. 25, n. 41, p. 73–98, dez. 2011.

POLYA, G. **Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving**. Combined Edition ed. [s.l.] John Wiley & Sons, 1962. v. 1 & 2

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. v. 2

RIBEIRO, B. S. et al. **Clubes de matemática da OBMEP: disseminando o estudo da matemática**. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudo-permutacoes-circulares-e-os-numeros-de-stirling-do-primeiro-tipo/>. Acesso em: 8 jun. 2021.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROWE, M. B. Wait-time and rewards as instructional variables: their influence on language, logic, and fate control. **National Association for Research in Science Teaching**, p. 1–32, abr. 1972.

SCHOENFELD, A. H. Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 10, n. 3, p. 173–187, maio 1979.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics**. New York: Macmillan, 1992. p. 334–370.

SCHOENFELD, A. H. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Eds.). **Investigar para aprender matemática**. 1. ed. Lisboa: APM e Projeto MPT, 1996. p. 61–72.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. J. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New Directions for Elementary School Mathematics**. [s.l.] Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989. p. 31–42.

SOUZA, A. C. P. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas**. Rio Claro: [s.n.].

THORNDIKE, E. **The new methods in arithmetic**. Nova York: Rand McNally & Company, 1921.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: ARTMED, 1998.