Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Pós-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Ciências Exata e Naturais
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
(PROFMat)

Uma Fórmula Geral Não Recursiva da Soma das Funções Polinomiais dos Inteiros Positivos

Francisco Adriano Maciel de Brito Sena

Mossoró-RN
Junho de 2021

Francisco Adriano Maciel de Brito Sena

Uma Fórmula Geral Não Recursiva da Soma das Funções Polinomiais dos Inteiros Positivos

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.
Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Matemática Discreta.

Orientador
Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia

Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Mossoró-RN

Junho de 2021

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei n° 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei n° 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

M474f Maciel de Brito Sena, Francisco Adriano.
Uma fórmula geral não recursiva da soma das funções polinomiais dos inteiros positivos / Francisco Adriano Maciel de Brito Sena. - 2021.
106 f. : il.

Orientador: Antonio Ronaldo Gomes Garcia.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2021.

1. Somas de potências de inteiros. 2. Funções polinomiais. 3. Diferença finita. 4. Operadores. 5. Números de Bernoulli. I. Gomes Garcia, Antonio Ronaldo, orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC´s) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

Documento de qualificação de Mestrado sob o título *Uma Fórmula Geral Não Recursiva da Soma das Funções Polinomiais dos Inteiros Positivos* apresentada por Francisco Adriano maciel de Brito Sena e aceita pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, sendo aprovada por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia
Orientador(a)
Departamento de Ciências Exata e Naturais
Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA

FABRICIO DE FIGUEREDO OLIVEIRA:64905896304
Assinado de forma digital por FABRICIO DE FIGUEREDO OLIVEIRA:64905896304
Dados: 2021.07.23 16:53:15 -03'00'

Prof. Dr. Fabrício de Figueredo Oliveira
Examinador Interno
Departamento de Ciências Exata e Naturais
Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA

Paulo César Linhares da Silva

Prof. Dr. Paulo César Linhares da Silva
Examinador Interno
Departamento de Ciências Exata e Naturais
Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA

Prof. Dr. Flávio Alexandre Falcão Nascimento
Examinador Externo
Departamento de Matemática
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Mossoró-RN, 16 de Julho de 2021.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

No decorrer desta jornada, tive o privilégio de ter junto a mim pessoas maravilhosas que me motivaram, orientaram, apoiaram incondicionalmente e me ajudaram a concretizar o meu sonho. Assim, importa fazer referência a todas as pessoas que me acompanharam e me marcaram ao longo de todo o meu percurso académico.

Em primeiro lugar, a Deus, por tudo em minha vida!

Em segundo lugar, um imenso obrigado aos meus pais e irmãos, por todo o apoio e ajuda que me deram desde o início e por acreditarem em mim. Obrigado por estarem lá quando mais precisei, e por todo o carinho.

Aos meus queridos avós, que tenho muito orgulho, e que durante minha vida inteira nunca me faltou um carinho muito especial e todo amor que me proporcionou, e pelo apoio e incentivo incondicionais.

Um especial obrigado à minha esposa Andréa Lídia, que permaneceu ao meu lado desde o início do Mestrado. Muito obrigado pela tua amizade verdadeira, por todo o teu apoio, incentivo e principalmente por acreditares sempre em mim.

Aos meus filhos, Bruna Samara e João Emídio, por todo amor, todo carinho e por momentos e emoções inesquecíveis.

À minha família, em geral, por toda a ajuda e apoio.

Agradeço, com especial apreço, ao meu orientador, por todo o apoio, flexibilidade, sabedoria e compreensão na elaboração deste trabalho.

Ademais, cumprimos o elementar dever de gratidão pelo desprendimento com que os professores examinadores Flávio Alexandre, Fábricio Oliveira e Paulo César se dispuseram a ler o trabalho e apresentar sugestões, então para eles um grande obrigado, pela transmissão de conhecimentos, pelas orientações e apoio no decorrer do trabalho, que muito contribuiram para a conclusão desta dissertação.

O mesmo preito de gratidão estendemos a todos os meus professores do PROFMAT - UFERSA e funcionários, como também a todos os meus professores e funcionários da minha graduação em matemática na UECE - FAFIDAM por todo o ensinamento na área de matemática e que nos propiciaram uma convivência de crescimento pessoal e profissional.

À turma do PROFMAT 2019, pelo companheirismo e amizade, em especial ao meu amigo Fabiano pelas viagens e pelos momentos compartilhados de estudos e conversas, e também ao meu amigo Brasil pelas boas conversas no restaurante universitário.

Agradeço, ainda, a todas as pessoas que não mencionei, mas que indiretamente contribuíram e participaram nesta jornada.

A todos, o meu mais sincero obrigado!

"A vida é feita de momentos, momentos pelos quais temos que passar, sendo bons ou não, para o nosso aprendizado. Nada é por acaso. Precisamos fazer a nossa parte, desempenhar o nosso papel no palco da vida, lembrando de que a vida nem sempre segue o nosso querer, mas ela é perfeita naquilo que tem que ser."

(Chico Xavier)

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é apresentar uma fórmula geral não recursiva que determina a soma das funções polinomiais aplicadas nos inteiros positivos. Para isso, são apresentadas algumas generalizações do conceito de funções e sequências utilizando-se o operador diferença de ordem superior. Assim, com isso, obtém-se uma fórmula para a soma das potências dos inteiros não negativos, que é um caso particular das funções polinomiais. Em seguida, obtém-se uma fórmula para determinar o termo geral de uma progressão aritmética de ordem superior, como também, uma fórmula para determinar a soma dos n primeiros termos da mesma. E por último, obtém-se uma fórmula para determinar um número figurado e a soma dos mesmos para qualquer que seja o número de lados.

Palavras-chave: Funções polinomiais; Diferença finita; Operadores; Números de Bernoulli; Somas de potências de inteiros.

Abstract

The main objective of this work is to present a non-recursive general formula that determines the sum of polynomial functions applied to positive integers. For this, some generalizations of the concept of functions and sequences using the higher-order difference operator are presented. Thus, with this, we obtain a formula for the sum of the powers of non-negative integers, which is a particular case of polynomial functions. Then, a formula for determining the general term of a higher order arithmetic progression is obtained, as well as a formula for determining the sum of the first n terms of it. And finally, you get a formula to determine a figured number and the sum of them for whatever the number of sides.

Keywords: Polynomial functions; Finite difference; Operators; Bernoulli numbers; Sums of integer powers.

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$: Conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z}$: Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Z}_+$ ou $\mathbb{Z}_{\geq 0}$: Conjunto dos números inteiros não negativo

$\mathbb{R}$: Conjunto dos números reais

Δ: Operador diferença

Δ_h^p: Operador diferença de ordem p com incremento h

$P.A.^k$: Progressão aritmética de ordem k

$p_{n,l}$: Número poligonal de l lados

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: Espaço de todas as sequências ordenadas de números reais

Sumário

CAPÍTULO *1*

INTRODUÇÃO

Este trabalho desenvolve um método para utilizarmos nos somatórios das funções polinomiais definidas nos inteiros positivos. Tem, portanto, o objetivo de aprofundar o que existe a respeito de tais sequências. Temos também como objetivo principal obter uma fórmula geral não recursiva para a soma das funções polinomiais definidas nos inteiros positivos.

Mostraremos uma fórmula geral e não recursiva para a soma das funções polinomiais dos inteiros positivos, uma fórmula fechada para esta soma finita. Este trabalho teve como objetivo inicial a busca de uma fórmula não recursiva para a soma das potências dos inteiros positivos. Da qual, segundo [Beery 2009] e [Coen 1996], em 1713 apareceu na revista Ars Conjectandi[1] uma fórmula recursiva (isto é, não fechada) para o referido somatório. A fórmula em questão é atribuída a Jacobi Bernoulli (1654-1705). Tal fórmula envolve os números de Bernoulli que estão entre as sequências numéricas mais interessantes e importantes da Matemática.

Historicamente, os números de Bernoulli surgiram na obra póstuma Ars Conjectandi, em 1713, do matemático suíço Jacobi Bernoulli (1654-1705). Os números de Bernoulli são os termos de uma sequência de números racionais descobertos, independentemente, no processo de resolução de um problema antigo por Jacobi Bernoulli e pelo matemático

[1]Arte de Conjecturar.

japonês Seki Takakazu (1642-1708). Seki Takakazu também definiu os mesmos números de Bernoulli no seu livro póstumo Katsuyo Sanpo[2], em 1712. Ambos encontraram os números acidentalmente em seus esforços para calcular a soma de potências de inteiros consecutivos

$$S_p(n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^p \;=\; 1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

para inteiros $n \geq 1$ e $p \geq 0$. Após essa descoberta, segundo [Coen 1996], os números de Bernoulli apareceram em muitos resultados importantes, incluindo as expansões em série de funções trigonométricas e hiperbólicas, a Fórmula de Soma de Euler-Maclaurin, a avaliação da função zeta de Riemann e o Último Teorema de Fermat.

Desde a antiguidade, os matemáticos lutam para somar as potências de inteiros positivos e consecutivos. Em alguns casos, eles foram movidos pela curiosidade. Outros, precisavam de fórmulas para resolver problemas específicos de engenharia e física. Muitas mentes matemáticas progrediram no problema, mas uma fórmula geral se mostrou ilusória.

Embora Bernoulli tenha sido o primeiro a dar uma única fórmula para todas as somas de potências, os matemáticos haviam considerado fórmulas para somas de potências por quase 2 000 anos antes dele. O objetivo deste trabalho é mostrar uma fórmula fechada para essas somas finitas de potências de inteiros positivos, como também para o caso mais geral, onde a expressão da função é um polinômio, sendo este um caso particular.

Vamos descrever, agora, um pouco da organização do texto desta dissertação.

Este documento está organizado em cinco capítulos, descritos logo a seguir. Este primeiro capítulo traz uma introdução ao trabalho e se encerra nesta seção.

No capítulo 2 estuda-se a fundamentação matemática mínima necessária para o acompanhamento do trabalho. A primeira seção apresenta brevemente o conceito de *fatorial* de um número natural. Na segunda, são apresentados os conceitos de *somatório e produtórios*, a terceira, a *indução finita*. Na seção seguinte, *Números binomiais e o triângulo aritmético*. Na próxima seção são apresentados os *números figurados e o triângulo aritmético* e finalizando, na última seção, *sequências recorrentes*.

[2] Fundamentos da Arte do Cálculo.

No capítulo 3 é introduzido uma breve revisão histórica das somas de potências de inteiros positivos, dando como exemplo, nomes de alguns matemáticos que contribuíram com o desenvolvimento do assunto discutido neste trabalho para sua generalização. Também, estuda-se exemplos de fórmulas de soma de potências de inteiros positivos, vê-se também exemplos de aplicações destas fórmulas. A primeira é a fórmula de Pascal e a segunda é a fórmula de Bernoulli, ambas são fórmulas recursivas, isto é, fórmulas não fechadas.

No capítulo 4 introduz-se com o conceito de operadores diferença de ordem superior de funções e sequências, obtém-se e demonstra-se vários teoremas e resultados importantes. Aqui também, determina-se e demonstra-se uma fórmula geral e não recursiva para a soma das funções polinomiais aplicadas nos inteiros positivos que é o objetivo principal do nosso trabalho.

No capítulo 5 inicia-se um trabalho de aplicação desta fórmula geral e não recursiva, aplicando a fórmula na soma das potências de inteiros não negativos, vê-se também exemplos de aplicações desta fórmula nas funções polinomiais e em progressões aritméticas de ordem superior, que é um caso particular das funções polinomiais. Para estas, obtém-se e demonstra-se também teoremas importantes, centrais de progressões aritméticas de ordem superior. Por último, aplicamos a fórmua geral não recursiva nos números poligonais, obtendo aqui também importantes relações.

Finalmente, no capítulo 6, são apresentadas as considerações finais do trabalho acerca desta dissertação.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, expomos a teoria básica para o desenvolvimento deste trabalho. Começaremos apresentando definições e resultados de *fatorial*, *número binomial*, *indução matemática*, *somatórios* e o *triângulo de Pascal* veja em [Morgado e Carvalho 2015] e [Filho 1981], e *recorrências* que se encontra em [Caminha 2012].

2.1 Fatorial

Definição 2.1.1. (Fatorial).
*Chama-se **fatorial** de um inteiro não negativo* n $(n \geq 0)$ *o inteiro que se indica por* $n!$, *e tal que:*

$$n! \;=\; \begin{cases} 1, & para \;\; n = 0 \\ n(n-1)!, & para \;\; n \geq 1 \end{cases} . \tag{2.1}$$

Exemplo 2.1. *Seja* $n = 3$, *assim, por definição, temos:*

$$3! \;=\; 3(3-1)! \;=\; 3 \cdot 2! \;=\; 3 \cdot 2 \cdot 1 \;=\; 6. \tag{2.2}$$

Observação 2.1. *Algumas vezes utilizamos* $n! = n(n-1)(n-2)!$.

2.2 Somatórios

Nesta seção explicaremos a notação de somatório e produtório, as quais se revelam muito úteis no contexto de sequências.

Definição 2.2.1. (Somatórios).
Dada uma sequência $(a_i)_{i\geq 1}$, *escreve-se* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ *para denotar a* **soma** $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, *para* $1 \leq i \leq n$. *Assim,*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \begin{cases} a_1, & para \quad n = 1 \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n, & para \quad n > 1 \end{cases}. \tag{2.3}$$

que se lê: "somatório de a_i *com* i *variando de* 1 *a* n*".*

A notação **somatória** $(\sum)$ é utilizada para representar numa forma reduzida a soma de um determinado número de *expressões*, *funções*, *números*, etc.

Se m e n são inteiros, com $m \leq n$, definimos

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} \cdots + a_n.$$

Em particular, para $n = 2$ e 3, temos:

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = a_1 + a_2,$$

e

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3.$$

Chama-se índice da soma (ou do somatório) $\sum\limits_{i=1}^{n}$ a letra i e pode ser substituída por qualquer outra diferente (que não intervenha na soma). Diz-se assim que i é um índice mudo. Na notação indicial, o(s) índice(s) repetido(s) uma única vez é(são) denominados índice(s) mudo(s). E os inteiros 1 e n que figuram abaixo e acima da letra grega maiúscula $\sum$ (sigma) chamam-se respectivamente *limite inferior* e *limite superior* do índice i.

Observação 2.2. *O número de parcelas de um somatório que representamos aqui por* $N(s)$ *é determinado pela expressão*

$$N(s) = n - 1 + 1,$$

isto é, é sempre igual a diferença entre os limites superior e inferior do seu índice mais uma unidade.

Exemplo 2.2. *Considerando o somatório abaixo, temos:*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} 7i &= 7\cdot 1 + 7\cdot 2 + 7\cdot 3 + 7\cdot 4 + 7\cdot 5\\ &= 7 + 14 + 21 + 28 + 35\\ &= 105.\end{aligned}$$

Da definição de somatório, dada a sequência $(a_i)_{i\geq 1}$, temos as seguintes propriedades.

Propriedade 2.2.1. *Sejam $(a_i)_{i\geq 1}$ e $(b_i)_{i\geq 1}$ sequências quaisquer e $c \in \mathbb{R}$. O somatório, tem as seguintes propriedades:*

1. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$;
2. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$;
3. $\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm c) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm nc$;
4. $\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$;
5. $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$;
6. $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j$;
7. $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.
8. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$, *com* $1 \leq m < n$.

A notação $\sum$ é particularmente útil para fazermos cancelamentos em somas. Mais precisamente, dada uma sequência $(a_i)_{i\geq 1}$, temos

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1.$$

Esta fórmula é conhecida como a fórmula para uma *soma telescópica*.

2.3 Indução Finita

Nesta seção estudaremos um princípio de demonstração matemática envolvendo o conjunto dos naturais, chamado de *Princípio da Indução Finita* (ou *Pincípio da Indução Matemática*). Existem duas formas deste princípio para provar proposições associadas aos números naturais, elaboradas pelo matemático *Giuseppe Peano* (1858 - 1932) que, estudando os números naturais, percebeu que esses números gozavam de propriedades específicas.

Proposição 2.1. (Primeiro Princípio da Indução Matemática).
Dados $a \in \mathbb{N}$ e uma propriedade $P(n)$ do natural n, temos $P(n)$ verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq a$, se e somente se, as duas condições a seguir forem satisfeitas:

1. *$P(a)$ é verdadeira;*

2. *para todo $k \geq a$, $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow P(k+1)$ verdadeira.*

Nestas condições, $P(n)$ é verdadeira, $\forall n \geq a$.

Vamos aplicar este princípio de indução para resolver um exemplo.

Exemplo 2.3. *Prove por indução que*

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

De fato, para $n=1$ tem-se

$$1\frac{(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Supomos que o resultado vale para $n=k$, ou seja,

$$1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Vamos mostrar que vale para $n=k+1$, ou seja, precisamos mostrar que

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\
&= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Logo, o resultado vale para $k+1$. *Assim, concluímos que o resultado vale para todo* $n \geq 1$.

Proposição 2.2. (Segundo Princípio da Indução Matemática).
Dados $a \in \mathbb{N}$ *e uma propriedade* $P(n)$ *do natural* n, *temos* $P(n)$ *verdadeira para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $n \geq a$, *se e somente se, as duas condições a seguir forem satisfeitas:*

1. $P(a)$ *é verdadeira;*

2. $P(m)$ *verdaeira para todo natural* m *com* $a \leq m \leq k$ *implica* $P(k+1)$ *verdadeira.*

Nestas condições, $P(n)$ *é verdadeira,* $\forall n \geq a$.

2.4 Números Binomiais

Definição 2.4.1. (Número Binomial).
Dados dois números inteiros, n *e* p, *chama-se* ***número binomial*** *(ou coeficiente binomial ou número combinatório) a expressão dada por*

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 0, & \textit{para} \quad p < 0 \textit{ ou } p > n \\ \dfrac{n!}{p!(n-p)!}, & \textit{para} \quad 0 \leq p \leq n \end{cases}. \tag{2.4}$$

Podemos também escrever:

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(p+1)}{(n-p)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}.$$

Exemplo 2.4. *Assim, temos:*

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5\cdot\cancel{4!}}{\cancel{4!}\cdot\cancel{3!}} = \frac{7\cdot 5}{1} = 35.$$

Observação 2.3. *Há várias formas de denotar a expressão do número binomial, algumas delas são*

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p} = {}_nC_p = C_n^p = C_{n,p}.$$

Neste trabalho sempre utilizaremos $\binom{n}{p}$.

Definição 2.4.2. (Números Binomiais Complementares).
Dados dois números binomiais $\binom{n}{p}$ *e* $\binom{m}{q}$, *são ditos complementares quando,* $n = m$ *e* $p + q = n$.

Exemplo 2.5. *São complementares:*

(a) $\binom{5}{2}$ *e* $\binom{5}{3}$ *são complementares, pois* $2 + 3 = 5$*;*

(b) $\binom{7}{4}$ *e* $\binom{7}{3}$ *são complementares, pois* $4 + 3 = 7$.

Proposição 2.3. (Relação de Stifel). *A seguinte identidade é válida:*

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}. \tag{2.5}$$

***Demonstração*:** Temos

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)(n-p-1)!} + \frac{n!}{(p+1)p!(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1}\right) \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \cdot \frac{n+1}{(p+1)(n-p)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = \binom{n+1}{p+1}.
\end{aligned}
$$

■

2.5 A Fórmula do Binômio de Newton

Obteremos a seguir a fórmula binomial de Newton, ou seja, da expansão da expressão $(x+y)^n$ em monômios.

Teorema 2.1. (Teorema do binômio).
Para $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, *tem-se*

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i. \tag{2.6}$$

Demonstração: Seja $n = 0$, então $(x+y)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{-k} y^k = 1.$

Suponha verdadeira para $n \geq 1$, precisamos mostrar que vale para $n+1$, então

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.
\end{aligned}
$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} + y^{n+1}.
\end{aligned}$$

Façamos, na última expressão acima, as seguintes trocas nos índices dos somatórios: no primeiro somatório troque k por j e no segundo somatório troque $k+1$ por j; desse modo, no segundo somatório temos $k = j-1$ e $0 \leq k \leq n-1 \Leftrightarrow 1 \leq j \leq n$. Assim procedendo, obtemos

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j+1}y^j + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}x^{n-j+1}y^j + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left[\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}\right]x^{n-j+1}y^j + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}x^{n-j+1}y^j + y^{n+1},
\end{aligned}$$

onde na última igualdade acima utilizamos a relação de Stifel. Por fim, desde que $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$, podemos escrever a última linha acima como

$$\binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}x^{n-j+1}y^j + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1},$$

ou, o que é o mesmo,

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}x^{n+1-j}y^j,$$

exatamente a expressão que desejávamos obter. Logo, temos por indução que o teorema é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. ∎

2.6 Triângulo Aritmético de Tartaglia-Pascal

É um triângulo numérico infinito formado por números binomiais $\binom{n}{p}$, onde n representa o número da linha (posição horizontal) e p representa o número da coluna (posição vertical), iniciando a contagem a partir do zero. O triângulo foi criado pelo matemático chinês Yang Hui (1238-1298) e 500 anos depois várias de suas propriedades foram estudadas pelo matemático francês Blaise Pascal.

Tabela 1: Triângulo Aritmético.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & & \binom{n}{2} & & \binom{n}{3} & & \binom{n}{4} & & \cdots & & \binom{n}{n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Fonte: Autoria própria (2021).

Substituindo cada número binomial pelo seu respectivo valor numérico, escreve-se:

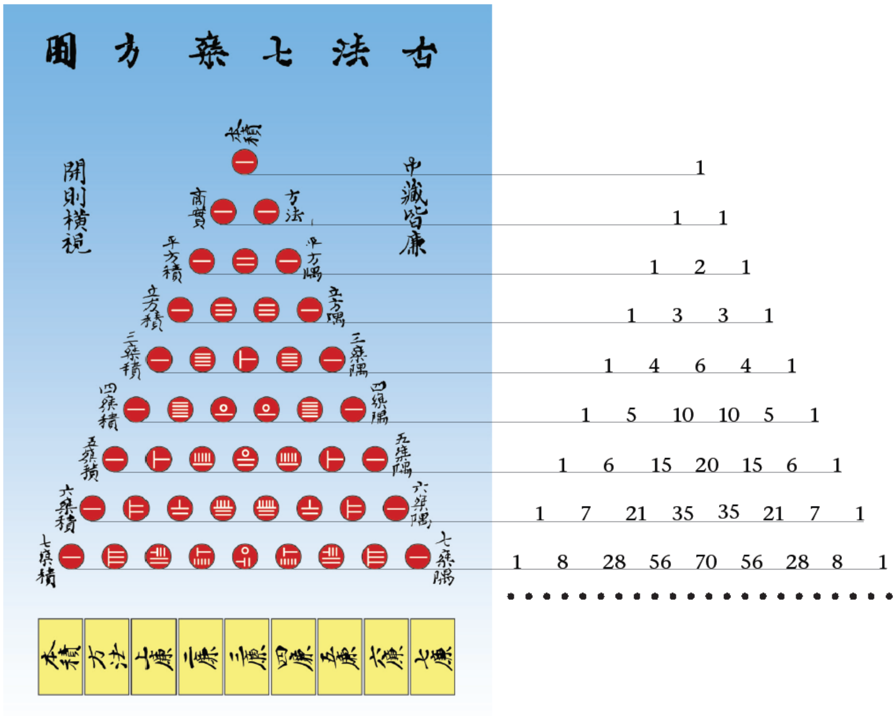
Tabela 2: Triângulo de Tartaglia-Pascal.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Fonte: Autoria própria (2021).

Na imagem abaixo, um desenho de um livro de 1303, de Zhu Shijie, com a versão chinesa do triângulo (ali representado como "triângulo de Yang Hui", que viveu muito antes de Pascal).

Figura 1: O triângulo de Yang Hui.



Fonte: Material extraído do livro Matemática para o ensino médio: volume II.

O triângulo de Tartaglia-Pascal é uma tabela de dupla entrada onde estão registrados os valores dos $\binom{n}{p}$.

Tabela 3: O triângulo de Tartaglia-Pascal.

$n \backslash p$	0	1	2	$\cdots$	p	$\cdots$
0	$\binom{0}{0}$					
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\cdots$	$\binom{n}{p}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fonte: Autoria própria (2021).

Propriedade 2.6.1. (do Triângulo de Pascal).

O triângulo aritmético goza das seguintes propriedades:

1. *Em cada linha do triângulo, o primeiro elemento vale* 1, *pois, qualquer que seja a linha, o primeiro elemento é* $\binom{n}{0} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Tabela 4: Propriedade do primeiro elemento.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&\boxed{1}&&&&&& \\
&&&&&\boxed{1}&&1&&&&& \\
&&&&\boxed{1}&&2&&1&&&& \\
&&&\boxed{1}&&3&&3&&1&&& \\
&&\boxed{1}&&4&&6&&4&&1&& \\
&\boxed{1}&&5&&10&&10&&5&&1& \\
\boxed{\vdots}&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots
\end{array}
$$

Fonte: Autoria própria (2021).

2. *Em cada linha do triângulo, o último elemento vale* 1, *pois, qualquer que seja a linha, o último elemento é* $\binom{n}{n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Tabela 5: Propriedade do último elemento.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&\boxed{1}&&&&&& \\
&&&&&1&&\boxed{1}&&&&& \\
&&&&1&&2&&\boxed{1}&&&& \\
&&&1&&3&&3&&\boxed{1}&&& \\
&&1&&4&&6&&4&&\boxed{1}&& \\
&1&&5&&10&&10&&5&&\boxed{1}& \\
\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\boxed{\vdots}
\end{array}
$$

Fonte: Autoria própria (2021).

3. *Dois números binomiais equidistantes dos extremos em uma mesma linha do triângulo de Pascal são iguais, ou seja,*

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}. \tag{2.7}$$

Tabela 6: Binomiais equidistantes.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
\boxed{1} \quad 2 \quad \boxed{1} \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad \boxed{4} \quad 6 \quad \boxed{4} \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}$$

Fonte: Autoria própria (2021).

4. *A partir da terceira linha, cada elemento, com exceção do primeiro e do último, é a soma dos elementos da linha anterior, imediatamente acima dele, ou seja, é consequência da relação de Stifel:*

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}. \tag{2.8}$$

Tabela 7: Relação de Stifel.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Fonte: Autoria própria (2021).

5. (Teorema das colunas) *Seja p um natural arbitrariamente fixado. Para $n \geq p$ vale a seguinte identidade:*

$$\sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} = \binom{n+1}{p+1}. \tag{2.9}$$

Tabela 8: Teorema das colunas.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Fonte: Autoria própria (2021).

Demonstração: *Vamos demonstrar por indução sobre n. Para $i = p$, temos*

$$\sum_{i=p}^{p} \binom{i}{p} = \binom{p+1}{p+1}.$$

Suponhamos a validade para $n = k$, com $k \geq p$, isto é

$$\sum_{i=p}^{k} \binom{i}{p} = \binom{k+1}{p+1}.$$

Agora, provemos que vale para $n = k+1$, isto é

$$\sum_{i=p}^{k+1} \binom{i}{p} = \binom{(k+1)+1}{p+1}.$$

Então, vejamos que

$$\sum_{i=p}^{k+1}\binom{i}{p} = \sum_{i=p}^{k}\binom{i}{p}+\binom{k+1}{p}.$$

Por hipótese, temos

$$\sum_{i=p}^{k+1}\binom{i}{p} = \binom{k+1}{p+1}+\binom{k+1}{p}.$$

Utilizando a Relação de Stifel, fica

$$\begin{aligned}\sum_{i=p}^{k+1}\binom{i}{p} &= \binom{k+2}{p+1}\\ &= \binom{(k+1)+1}{p+1}.\end{aligned}$$

Portanto, está demonstrado o Teorema das colunas. ■

6. (Teorema das linhas) *Seja* n *um natural arbitrariamente fixado. Para* $n \geq i$ *vale a seguinte identidade:*

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n. \tag{2.10}$$

Tabela 9: Teorema das linhas.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\rightarrow$	$2^3 =$	8
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Fonte: Autoria própria (2021).

7. (Teorema das diagonais) *Seja* n *um natural arbitrariamente fixado. Para* $i = 0, 1, 2, \cdots, p$ *vale a seguinte identidade:*

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{i} = \binom{n+p+1}{p}. \tag{2.11}$$

Tabela 10: Teorema das diagonais.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	$\cdots$
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	$\boxed{6}$	4	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fonte: Autoria própria (2021).

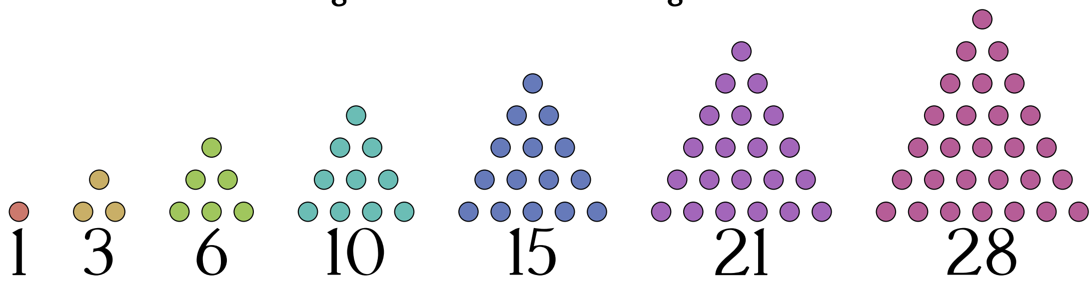
Nesta seção, falaremos brevemente dos números figurados ou números poligonais e sua relação com o Triângulo Aritmético.

2.7 Números Figurados e o Triângulo Aritmético

Seguindo os antigos matemáticos, vamos agora considerar os conjuntos de pontos formando algumas figuras geométricas no plano.

Começando de um ponto, some dois pontos, de modo que obtemos um Triângulo Equilátero. Triângulo equilátero de seis pontos pode ser obtido do triângulo de três pontos, adicionando a ele três pontos; adicionando a este quatro pontos dá um triângulo de dez pontos, etc. Então, adicionando a um ponto dois, três, quatro etc. pontos, organizando os pontos no formato de um triângulo equilátero e contando o número de pontos em cada tal triângulo, pode-se obter os números $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, \ldots,$ que são chamados de números triangulares como podemos ver na figura 2 abaixo.

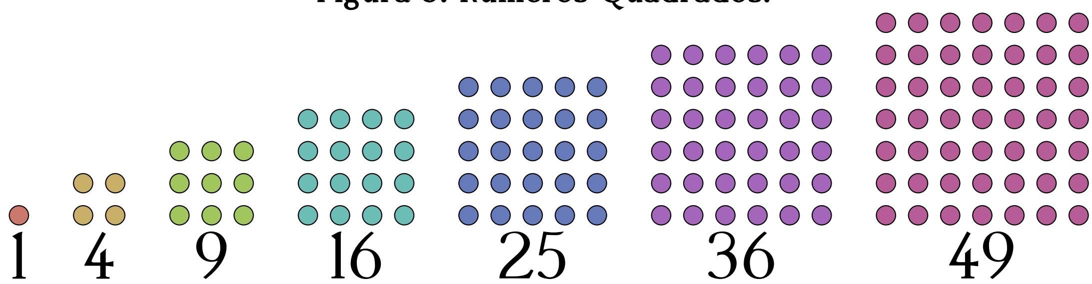
Figura 2: Números Triângulares.



Fonte: Autoria própria (2021).

Da mesma forma, adicionando a um ponto três, cinco, sete etc. pontos e organizando-os em forma de quadrado, pode-se obter os números $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81, \ldots,$ que são chamados de números quadrados como mostra a figura 3 abaixo.

Figura 3: Números Quadrados.



Fonte: Autoria própria (2021).

A 3ª coluna e a 4ª coluna no triângulo de Pascal mostrado na tabela 11 abaixo têm particular importância porque dão os totais de elementos de uma pilha com formas geométricas. A terceira coluna corresponde a sequência dos números triangulares como mostra a figura 2 e a quarta coluna aos números tetraédricos ou números piramidais-triangulares.

Tabela 11: Números Figurados.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\ddots$

Fonte: Autoria própria (2021).

Os números da 4ª coluna são assim chamados porque dão o total de objetos dispostos em forma de pirâmide de base triangular. São pirâmides formadas por camadas sucessivas de triângulos superpostos como mostra a figura 4 a seguir.

Figura 4: Números Tetraédricos.

Fonte: Autoria própria (2021).

Assim, se tivermos uma pilha triangular com n elementos na aresta da base o total de objetos da pilha será o n-ésimo elemento da 3ª coluna.

Como a pilha triangular tem 1 objeto no vértice superior, 2 na 2ª camada, 3 na 3ª camada etc., então o total será:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+(n-1)+n &= \binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\cdots+\binom{n-1}{1}+\binom{n}{1} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\binom{i}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

que é a expressão geral dos números da 3ª coluna.

Sendo os números da 3ª coluna, números triangulares, os números da 4ª coluna são somas de números triangulares, logo, representam números de camadas triangulares tendo 1 objeto no vértice, 3 na segunda camada, 6 na terceira camada e assim por diante.

O número de objetos da pilha triangular piramidal será o n-ésimo elemento da 4ª coluna:

$$\begin{aligned} 1+3+6+\cdots+\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2} &= \binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2} \\ &= \sum_{i=2}^{n+1}\binom{i}{2}=\binom{n+2}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

que é a expressão geral dos elementos da 4ª coluna onde n é o número de camadas.

2.8 Sequências Recorrentes

Definição 2.8.1. (Sequências Recorrentes).
São sequência de números reais $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots)$ *em que cada termo é determinado por uma dada função dos termos anteriores. Dado um inteiro positivo* k*, uma sequência recorrente de ordem* k *é uma sequência em que cada termo é determinado como uma função dos* k *termos anteriores:*

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1},\, x_{n+k-2},\, \ldots,\, x_{n+1},\, x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

É costume denotar uma sequência por $(x_k)_{k\geq 1}$ *ou* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$*.*

2.8.1 Sequências Recorrentes Lineares

Definição 2.8.2. (Sequências Recorrentes lineares).
Uma sequências $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência recorrente linear de ordem* k *(onde* k *é um inteiro positivo) se existem constantes do corpo numérico* $(\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$ $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k$ *tais que*

$$x_{n+k} = c_1x_{n+k-1} + c_2x_{n+k-2} + \ldots + c_{k-1}x_{n+1} + c_kx_n = \sum_{i=1}^{k} c_ix_{n+k-i}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

Tais sequências são determinadas pelos seus k primeiros termos $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ e são conhecidas como sequências recorrentes lineares, e generalizam simultaneamente as progressões aritméticas, geométricas e os polinômios. Vejamos a seguir alguns exemplos.

Exemplo 2.6. *Se (x_n) é uma progressão aritmética, então é uma sequência recorrente linear de ordem 2, pois*

$$x_n = x_{n-1} + r \ \text{ e } \ x_{n-1} = x_{n-2} + r, \ \text{ com } r \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, subtraindo a segunda equação da primeira, fica

$$x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} \Longrightarrow x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}, \ \forall n \geq 2.$$

Exemplo 2.7. *Se (x_n) é uma progressão geométrica, então é uma sequência recorrente linear de ordem 1, visto que*

$$x_n = x_0q^n = qx_0q^{n-1} = qx_{n-1} \ \therefore \ x_n = qx_{n-1} \ \forall n \geq 1.$$

CAPÍTULO 3

Revisão Histórica de Somas de Potências

Este capítulo e o próximo baseiam-se integralmente em [Coen 1996] e [Beery 2009].

Iremos neste capítulo estudar a descoberta de fórmulas para a soma de potências de inteiros positivos, fórmulas essas que eram investigadas desde há antiguidade por matemáticos de todo o mundo. Para este capítulo relatamos as descobertas na idade antiga, que corresponde ao período de 4.000 a.C. (invenção da escrita) a 476 d.C. (queda do Império Romano).

Começamos nossa revisão histórica a mais de 2 000 anos antes da "invenção" de Bernoulli, que foi discutido no Capítulo 1, considerando o tratamento de somas finitas de potências de inteiros consecutivos e positivos pelos primeiros matemáticos aproximadamente 550 a.C. a 1713 d.C. No restante deste capítulo, nós iremos revisar uma pequena, mas significativa, porção da "extensa literatura sobre o assunto" das somas das potências de inteiros positivos até os dias atuais.

3.1 Histórico das Somas de Potências de Inteiros

Numa aula de cálculo introdutório, os estudantes universitários ou mesmo os estudante do ensino médio frequentemente encontram as seguintes fórmulas de somatório:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4},$$

para qualquer número inteiro positivo n. Normalmente, estas são provadas por indução matemática e são utilizadas na soma de Riemann. No entanto, é natural perguntar se existe uma fórmula geral para todos os expoentes.

O problema de encontrar fórmulas para somas de potências de inteiros positivos cativou os matemáticos durante muitos séculos. No século VI a.C., os pitagóricos já sabiam como encontrar uma soma de números naturais consecutivos com o auxílio de uma simples figura geométrica. Os pitagóricos foram os primeiros a descobrir a fórmula para a soma das primeiras potências.

Também por métodos geométricos os pitagóricos conseguiram explicar por que as somas dos números ímpares, a partir de 1, são sempre quadrados perfeitos, conforme abaixo:

$1 = 1 = 1^2$

$1+3 = 4 = 2^2$

$1+3+5 = 9 = 3^2$

$1+3+5+7 = 16 = 4^2$

$1+3+5+7+9 = 25 = 5^2$

$1+3+5+7+9+11 = 36 = 6^2$

$1+3+5+7+9+11+13 = 49 = 7^2$

etc...

Como se vê, os conhecimentos sobre somas de algumas séries particulares são bastante antigos.

Aproximadamente três séculos depois Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.), o maior matemático da antiguidade e talvez de todos os tempos, é uma das primeiras pessoas registradas a ter considerado a solução para as somas de potências de inteiros. Na opinião de muitos matemáticos, ele pode ter descoberto uma fórmula para a soma dos quadrados, mas não a demostrou formalmente. Em vez disso, ele simplesmente a usou como um passo em outra prova.

Arquimedes é agraciado com uma prova geométrica das duas últimas fórmulas acima.

Circa de 800 anos depois, Aryabhata (476-550 d.C.), um dos primeiros físicos e astrônomos importantes da Índia, descobriu uma fórmula para a soma dos cubos. Abu Bakr Al-Karaji, de Bagdá (953?-1029), um engenheiro e matemático, escreveu as somas de cubos até 10. É provável que ele também tenha descoberto uma fórmula. Na década seguinte, o matemático iraquiano Abu Ali al-Hassan ibn al-Haytham (965-1039), conhecido como "Alhazen"na Europa, tinha desenvolvido as fórmulas acima no início do século XI. Ibn Al-Haytham também escreveu sua magnum opus[1], a ótica em sete volumes, que incluiu um resultado que exigia conhecimento que

$$S_4(n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^4 \;=\; 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 \;=\; \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.$$

Os matemáticos europeus redescobriram métodos para calcular as somas das quartas potências muito mais tarde - nos séculos XVI e XVII - mas levaram os resultados significativamente mais longe. Thomas Harriot (1560-1621), um matemático e cientista inglês que viveu em Londres, foi apadrinhado por Sir Walter Raleigh e Henry Percy, Conde de Northumberland, usou “tabelas de diferença” para calcular as somas das quartas potências enquanto viajava à colônia da Virgínia em 1585. Ele também introduziu a notação simbólica, isso o colocava bem à frente de muitos de seus contemporâneos, que ainda escreviam todos os seus cálculos matemáticos em frases. Infelizmente, Harriot nunca publicou as 5 000 páginas de notas matemáticas que escreveu e apenas transmitiu parte de seu conhecimento por meio de frases.

A primeira tentativa de se atacar o caso geral foi feita pelo matemático alemão Johann Faulhaber (1580-1635) no seu trabalho Academia algebrae, de 1631. Nascido em uma família de tecelões de cestos em Ulm, Alemanha, ele foi fundador de uma escola

[1]Grande obra. Pode ser traduzido vulgarmente como “obra-prima”.

para engenheiros no início do século 17 na sua cidade natal. Sua paixão por aritmética e álgebra o levou a devotar uma parte considerável de sua vida ao cálculo de fórmulas para somas de potências. Cerca de dois séculos passaram-se tranquilamente quando Faulhaber, em 1610, fez avanços significativos no problema das somas de potências inteiras calculando fórmulas explícitas para somas até a décima potência.

Na Academia de Algebrae, sua obra póstuma de 1631 em latim, ele deu fórmulas para potências até a décima sétima, muito mais alto do que qualquer um antes dele. Faulhaber não só conseguiu calcular até décima sétima potência como estabeleceu um resultado teórico surpreendente que diz que a soma $S_p(n)$ é um polinômio de grau $p+1$ na variável n e tal polinômio pode ser expresso em termos das duas primeiras somas $S_1(n)$ e $S_2(n)$. O primeiro exemplo deste resultado é a notável relação

$$S_3(n) \;=\; \sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2 \;=\; \big(S_1(n)\big)^2.$$

É interessante observar que uma demonstração rigorosa destes resultados de Faulhaber foi publicada por Carl Jacobi em 1834, aproximadamente duzentos anos depois.

Johann Faulhaber encontrou maneiras notáveis de calcular as somas das potências de inteiros, mas nunca apresentou uma fórmula geral. No entanto, existe a fórmula geral de Bernoulli que foi declarado pelo matemático suíço Jacobi Bernoulli e, às vezes, é chamada de fórmula de Faulhaber.

No século XVII, a criação europeia do cálculo tornou-se uma força motriz no desenvolvimento de fórmulas para somas de potências. Pierre de Fermat (1601-1665), um advogado francês, descobriu sua própria fórmula para as somas das quartas potências, que ele usou para calcular integrais definidas da forma cx^k. Como Harriot, ele nunca publicou seu trabalho, mas em vez disso se correspondia regularmente com vários outros matemáticos amadores e profissionais. Depois de Faulhaber, em 1636, matemáticos franceses, um deles o matemático Fermat, utilizando os números figurados encontraram também fórmulas de recorrência para somas de potências de ordem superior. Os historiadores acreditam que sua técnica de usar somas de potências para determinar a área inspirou Newton enquanto ele desenvolvia uma estrutura para cálculo no período de 1665 a 1670.

Na mesma época Blaise Pascal (1623-1662) se baseou nos avanços de seus predecessores. Ele introduziu seu agora famoso Triângulo Aritmético ao problema de usar somas de potências anteriores para calcular o próximo. Este sistema teoricamente permitia o cálculo de cada soma de potências, mas na prática tornou-se rapidamente muito complicado para ser usado com precisão.

O que Fermat e Pascal desconheceram, dizem os estudiosos históricos, foi o trabalho de Johann Faulhaber. Embora Pascal tenha correspondido-se com Fermat, os dois matemáticos provavelmente não partilharam um com o outro o seu trabalho sobre somas de potências de inteiros, pois a abordagem de Pascal para descrever fórmulas para estas somas foi bastante diferente da de Fermat.

No seu famoso Traite du Triangle Arithmetique ou Tratado sobre o Triângulo Aritmético, escrito em 1654 e publicado em 1665, Pascal descreveu por palavras uma fórmula geral para a soma das potências dos primeiros n termos de uma progressão aritmética, da qual $S_p(n)$ (a soma dos potências dos primeiros n inteiros positivos) é um caso especial e mostrou indutivamente que $S_p(n)$ é um polinômio em n de grau $p+1$.

Apesar da linhagem de matemáticos europeus que trabalharam nas somas de potências durante séculos, foi na verdade um matemático japonês, Seki Takakazu (1642-1708), quem primeiro descobriu os "números de Bernoulli". Os números de Bernoulli surgiram na obra póstuma Ars Conjectandi, em 1713, do suíço Jacob Bernoulli, na tentativa de descrever uma forma de calcular a soma de potências de inteiros consecutivos.

Seki nasceu em Fujioka Gumma, Japão, em uma família de guerreiros samurais. Desde muito jovem, Seki demonstrou um talento matemático prodigioso e, em seus últimos anos, recebeu o crédito de transformar o estudo de matemática no Japão. Em 1683, Seki se tornou o primeiro matemático a estudar determinantes (antes de Leibniz) e os usou para resolver equações mais gerais do que Leibniz dez anos depois. Seki tinha um método análogo à interpolação polinomial de Newton e resolveu polinômios cúbicos usando um método ainda não descoberto na Europa. Além disso, usando uma técnica chamada Ruisai Shosa-ho, ele descobriu a sequência dos números de Bernoulli e seu papel no cálculo das somas de potências.

Do outro lado do mundo, Jacobi Bernoulli (1655-1705) nasceu em Basel, Suíça, em uma família de comerciantes. Se o nome Bernoulli não soa familiar, deveria. Em duas gerações no século XVII, a família Bernoulli produziu uma dúzia de matemáticos e cientistas proeminentes. Por exemplo, o famoso “Princípio de Bernoulli” na física, que descreve como o comportamento de um fluido movendo-se ao longo de uma linha de corrente e traduz para os fluidos o princípio da conservação da energia, foi nomeado em homenagem ao sobrinho de Jacobi Bernoulli, Daniel, filho do irmão de

Jacobi (e rival) Johann. Jacobi Bernoulli desenvolveu os primórdios de uma teoria das séries e provou a lei dos grandes números na teoria da probabilidade, mas contribuiu significativamente para a matemática com a sua obra póstuma Ars Conjectandi. Nessa obra, ele expôs suas soluções para as dez primeiras somas de potências e a sequência de números que descobriu durante seus cálculos, números esses que foram citados acima e são chamados de números de Bernoulli.

Esses dois matemáticos Seki Takakazu e Jacobi Bernoulli estavam situados em mundos culturais e matemáticos muito diferentes, mas conseguiram descobrir essa sequência importante de números quase ao mesmo tempo.

Na próxima seção mostraremos as fórmulas gerais para as somas de potências de inteiros positivos de Blaise Pascal e Jacobi Bernoulli, como foi relatado muitos matemáticos já tinham dado uma fórmula para casos particulares, mas foram Blaise Pascal e Jacobi Bernoulli que conseguiram dar uma fórmula geral em termos recursivos, o primeiro utilizando as somas anteriores e o segundo os números de Bernoulli.

3.2 A Fórmula Geral Recursiva de Pascal e Bernoulli

Agora, vamos ver as fórmulas recursivas de Pascal e de Bernoulli.

O objetivo desta seção é conhecer e aplicar as fórmulas nas somas das potências dos primeiros n inteiros estritamente positivos, iniciaremos com a fórmula de Pascal, e por fim, a de Bernoulli.

3.2.1 A Fórmula Recursiva de Pascal

Em seu Tratado sobre o Triângulo Aritmético publicado em 1665, o matemático e filósofo Blaise Pascal, descreve uma fórmula geral permitindo calcular a soma das potências dos primeiros n inteiros positivos. Isto é, somas de potências do tipo

$$S_p(n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^p \;=\; 1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

para inteiros $n \geq 1$ e $p \geq 0$. Para esta soma das potências dos n primeiros inteiros estritamente positivos, Pascal prova a seguinte fórmula

$$S_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p = \frac{1}{p+1}\left[(n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=0}^{p-1}\binom{p+1}{j}S_j(n)\right], \ \forall p \geq 1. \tag{3.1}$$

Esta fórmula expressa $S_p(n)$ em função de $S_0(n)$, $S_1(n)$, $\ldots$, $S_{p-1}(n)$. Então, por exemplo, para calcular $S_9(n)$, você deve primeiro calcular $S_1(n)$, $S_2(n)$, $\ldots$, $S_8(n)$.

Vejamos agora alguns exemplos que levaram Pascal a deduzir esta fórmula.

Como foi mencionado no início do capítulo, num curso de cálculo, os estudantes encontram as seguintes fórmulas para as somas das pontências:

$$S_1(n) = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{3.2}$$

$$S_2(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{3.3}$$

e

$$S_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{3.4}$$

De onde vêm essas fórmulas? Existe uma maneira sistemática de obter uma fórmula para cada $S_p(n)$, uma vez que você conheça as fórmulas anteriores para $S_0(n)$, $S_1(n)$, $S_2(n)$, $\ldots$, $S_{p-1}(n)$. Vamos ilustrar na subseção seguinte com apenas dois exemplos.

3.2.2 Aplicações da Fórmula de Pascal

Exemplo 3.1. *Temos o fato de que*

$$S_0(n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^0 \;=\; 1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots + n^0 \;=\; 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n,$$

como esse fato poderia ser usado para obter uma fórmula para

$$S_1(n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^1 \;=\; 1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots + n^1 \;=\; 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Bem, para qualquer inteiro positivo k, sabemos que $(k+1)^2 = k^2+2k+1$, daí, temos a seguinte igualdade $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$. Então, nós escrevemos isso substituindo em cada valor de k os valores $k = 1$, $k = 2$, $\ldots$, $k = n$.

$$\begin{aligned} 2^2 - 1^2 &= 2(1) + 1 \\ 3^2 - 2^2 &= 2(2) + 1 \\ 4^2 - 3^2 &= 2(3) + 1 \\ &\vdots \\ (n+1)^2 - n^2 &= 2(n) + 1. \end{aligned}$$

Somando as colunas em ambos os lados e pela soma telescópica, nos dá

$$(n+1)^2 - 1^2 \;=\; 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i^0,$$

desenvolvendo o primeiro membro, fica

$$n^2 + 2n \;=\; 2S_1(n) + n,$$

logo

$$S_1(n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} i \;=\; \frac{n^2+n}{2} \;=\; \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemplo 3.2. *Portanto, agora sabemos as fórmulas para $S_0(n)$ e $S_1(n)$. Como podemos usá-las para obter uma fórmula para*

$$S_2(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

É a mesma ideia, mas apenas um pouco mais de álgebra. Para qualquer inteiro positivo k, sabemos que $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, daí, temos a seguinte igualdade $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Então, nós escrevemos isso substituindo em cada valor de k os valores $k = 1$, $k = 2$, ..., $k = n$.

$$\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3(1)^2 + 3(1) + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3(2)^2 + 3(2) + 1 \\
4^3 - 3^3 &= 3(3)^2 + 3(3) + 1 \\
&\vdots \\
(n+1)^3 - n^3 &= 3(n)^2 + 3(n) + 1.
\end{aligned}$$

Somando as colunas em ambos os lados e pela soma telescópica, nos dá

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i^0,$$

desenvolvendo o primeiro membro, fica

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 = 3S_2(n) + 3S_1(n) + S_0(n),$$

assim

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S_2(n) + 3\left(\frac{n^2 + n}{n}\right) + n,$$

portanto

$$S_2(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Agora vamos deduzir a fórmula de Pascal.

Sejam dois inteiros $n \geq 1$ e $p \geq 1$. Nós sabemos (do teorema binomial) que para qualquer inteiro $m \in \{1, \dots, n\}$, temos a igualdade

$$(m+1)^{p+1} = \binom{p+1}{p+1} m^{p+1} + \binom{p+1}{p} m^p + \cdots + \binom{p+1}{1} m^1 + \binom{p+1}{0} m^0,$$

donde

$$(m+1)^{p+1} = m^{p+1} + \binom{p+1}{p} m^p + \binom{p+1}{p-1} m^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{1} m^1 + 1,$$

o que nos implica

$$(m+1)^{p+1} - m^{p+1} = \binom{p+1}{p} m^p + \binom{p+1}{p-1} m^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{1} m^1 + 1,$$

Escrevendo esta igualdade para cada valor de $m = 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned}
2^{p+1} - 1^{p+1} &= \binom{p+1}{p} 1^p + \binom{p+1}{p-1} 1^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{1} 1^1 + 1 \\
3^{p+1} - 2^{p+1} &= \binom{p+1}{p} 2^p + \binom{p+1}{p-1} 2^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{1} 2^1 + 1 \\
&\vdots \\
(n+1)^{p+1} - n^{p+1} &= \binom{p+1}{p} n^p + \binom{p+1}{p-1} n^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{1} n^1 + 1.
\end{aligned}$$

Fazendo a soma membro a membro das n equações acima, resulta

$$(n+1)^{p+1} - 1^{p+1} = \binom{p+1}{p} S_p(n) + \binom{p+1}{p-1} S_{p-1}(n) + \cdots + \binom{p+1}{1} S_1(n) + S_0(n).$$

Sabendo que $\binom{p+1}{p} = \binom{p+1}{1} = p+1,$ assim a fórmula anterior pode ser escrita

$$(n+1)^{p+1} - 1 = (p+1)S_p(n) + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n),$$

a partir da qual deduzimos a fórmula de Pascal

$$S_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p = \frac{1}{p+1}\left[(n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n)\right], \ \forall p \geq 1.$$

Vejamos agora um exemplo de aplicação desta fórmula.

Exemplo 3.3. *Aplicando a fórmula de Pascal, vamos obter uma expressão para* $S_4(n)$ *conhecendo os valores de* $S_0(n),\ S_1(n),\ S_2(n)$ *e* $S_3(n)$ *que se encontram na introdução do capítulo 3. Sabemos que*

$$S_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p = \frac{1}{p+1}\left[(n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n)\right].$$

Para $p = 4,$ *temos a seguinte igualdade*

$$S_4(n) = \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{4+1}\left[(n+1)^{4+1} - 1 - \sum_{j=0}^{4-1} \binom{4+1}{j} S_j(n)\right],$$

assim, fica

$$S_4(n) = \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{5}\left[(n+1)^{5} - 1 - \sum_{j=0}^{3} \binom{5}{j} S_j(n)\right],$$

desenvolvendo, teremos

$$\begin{aligned}
S_4(n) &= \frac{1}{5}\left[(n+1)^5 - 1 - \binom{5}{0}S_0(n) - \binom{5}{1}S_1(n) - \binom{5}{2}S_2(n) - \binom{5}{3}S_3(n)\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[(n+1)^5 - 1 - n - 5\frac{n(n+1)}{2} - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 10\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] \\
&= \frac{6(n+1)^5 - 6(n+1) - 15n(n+1) - 10n(n+1)(2n+1) - 15n^2(n+1)^2}{30}.
\end{aligned}$$

Simplificando, obtemos

$$\begin{aligned}
S_4(n) &= \frac{(n+1)\Big(6(n+1)^4 - 6 - 15n - 10n(2n+1) - 15n^2(n+1)\Big)}{30} \\
&= \frac{(n+1)(6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n - 15n - 20n^2 - 10n - 15n^3 - 15n^2)}{30} \\
&= \frac{(n+1)(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n)}{30} \\
&= \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$S_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Agora, veremos a fórmula de Berloulli. Uma fórmula também recursiva, que utiliza os números de Berloulli.

3.2.3 A Fórmula Recursiva de Berloulli

No seu famoso Traite du Triangle Arithmetique, escrito em 1654 e publicado em 1665, Pascal descreveu a fórmula geral para a soma das potências dos primeiros n inteiros positivos e além disso, como foi relatado no capítulo 3, ele mostrou indutivamente que $S_p(n)$ é um polinômio em n de grau $p+1$.

Bernoulli estuda estes polinômios e acaba por descobrir um padrão nos coeficientes de n ao escrever os dez primeiros, e disse que eles poderiam ser facilmente determinados. Em 1755 o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) chamou tais números de Números de Bernoulli.

Os dez primeiros polinômios que Berloulli estudou foram

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$\begin{aligned}
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\
S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \\
S_5(n) &= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 \\
S_6(n) &= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n \\
S_7(n) &= \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 \\
S_8(n) &= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n \\
S_9(n) &= \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 \\
S_{10}(n) &= \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n.
\end{aligned}$$

Esta sequência de coeficientes do termo n denota-se habitualmente por B_k cujos primeiros valores se apresentam na Tabela 12. A fórmula por ele apresentada é a seguinte:

$$S_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p = \frac{1}{p+1}n^{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \sum_{j=2}^{p} \frac{1}{p+1}\binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j},\ \forall p \geq 1,$$

que simplificando esta fórmula, obtem-se

$$S_p(n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^p = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{p+1}\binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j},\ \forall p \geq 1. \tag{3.5}$$

Bernoulli no seu trabalho apenas destaca a sequência dos índices pares, isto é, os B_{2m} para $m \geq 1$, usando letras maiúsculas $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{30}$, $C = \frac{1}{42}$, $D = -\frac{1}{30}$, ... para denotar os seus elementos, que são os únicos não nulos que ocorrem nesta fórmula. Já para os de índices ímpares, isto é, a sequência dos B_{2m+1}, para $m \geq 1$, são todos nulos. Ele determina os valores de B_k de forma recursiva a partir da equação obtida ao se substituir n por 1, ou seja,

$$1 \;=\; \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{p} \frac{1}{p+1}\binom{p+1}{j} B_j,\ \forall p \geq 1,$$

que simplificando, obtem-se

$$p+1 \;=\; \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} B_j,\ \forall p \geq 1.$$

Ao determinar estas fórmulas, afirma que descobriu (corretamente), em menos de um quarto de hora, que a soma das décimas potências dos mil primeiros números naturais a partir do 1 é $91409924241424243424241924242500$.

De mesmo modo, Seki, como foi relatado, apresentou estas mesmas fórmulas e definiu toda a sequência B_k, para $k \geq 0$.

Tabela 12: Números de Berloulli.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
B_k	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0	$-\frac{3617}{510}$

Fonte: Autoria própria (2021).

Vamos agora ver na seguinte subseção um exemplo da aplicação desta fórmula.

3.2.4 Aplicações da Fórmula de Bernoulli

Exemplo 3.4. *Com a fórmula de Bernoulli, vamos obter uma expressão para* $S_3(n)$ *conhecendo os valores dos números de Bernoulli* B_0, B_1, B_2 *e* B_3 *que se encontram na Tabela 12. Temos*

$$S_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{p+1}\binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}, \ \forall p \geq 1.$$

Para $p = 3$, *temos a seguinte igualdade*

$$S_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{j=0}^{3} \frac{1}{3+1}\binom{3+1}{j} B_j n^{3+1-j}, \ \forall p \geq 1,$$

assim, fica

$$S_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{j=0}^{3} \frac{1}{4}\binom{4}{j} B_j n^{4-j}, \ \forall p \geq 1,$$

desenvolvendo e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned}
S_3(n) &= \frac{1}{4}\left[\binom{4}{0}B_0 n^{4-0} + \binom{4}{1}B_1 n^{4-1} + \binom{4}{2}B_2 n^{4-2} + \binom{4}{3}B_3 n^{4-3}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[n^4 + 4\cdot\frac{1}{2}n^3 + 6\cdot\frac{1}{6}n^2 + 4\cdot 0n^1\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[n^4 + 2n^3 + n^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[n^2(n^2 + 2n + 1)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[n^2(n+1)^2\right].
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$S_3(n) \;=\; \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Neste próximo capítulo mostra-se a fórmula geral não recursiva para as somas das funções polinomiais, onde as somas de potências de inteiros consecutivos e positivos são casos particulares.

CAPÍTULO 4

A Fórmula Geral Não Recursiva

Aqui, determina-se e demonstra-se a fórmula geral não recursiva para a soma dos inteiros positivos. Para isso, inicia-se nosso estudo introduzindo o conceito de operador diferença de ordem superior, que pode-se encontar em [BARROSO et al.], [Bermúdez, Martinón e Noda 2014], [Mickens 1987], [Neto 2012], [Hershey 2012] [Marques 2009], [Levy e Lessman 1992], [Lima 2013], [Lima 2004], [Neto 2015] e [Silva 2000], para em seguida, chegar em nosso objetivo principal.

4.1 Introdução

Operador é um símbolo que, anteposto às funções, indica abreviadamente as transformações que devem sofrer essas funções. Isto é, em matemática, um operador transforma uma função f para outra função, g.

O caso em que estamo-nos interessados no presente capítulo é aquele em que o domínio e o contradomínio de um operador que denotaremos pelo símbolo Δ é o conjunto de todas as sequências de números reais, que denota-se por $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ o espaço de todas as sequências ordenadas de números reais. Isto é,

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \Big\{a : a = (a_n : n \in \mathbb{N}) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), a_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots\Big\}.$$

Definiremos operadores que chamam-se operadores diferença que transformam sequências de números reais em sequências de números reais. Isto é

$$\begin{array}{rccl} \Delta : & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & (a_1, a_2, \ldots) & \longmapsto & \Delta\Big((a_1, a_2, \ldots)\Big) = (\Delta a_1, \Delta a_2, \ldots) \end{array}.$$

4.2 Operadores Diferença de Ordem Superior

Seja h um número real diferente de zero e f uma função. Quando $f(x+h)$ e $f(x)$ são números reais, chamamos

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

a primeira diferença (ou diferença de ordem 1 ou diferença de primeira ordem) de f em x com o incremento h.

Além disso, $\Delta_h^0 f(x)$ significa $f(x)$, isto é, Δ_h^0 é o operador identidade, que podemos também denotar por I. Para qualquer número inteiro $n \geq 1$, definimos a n-ésima diferença por $\Delta_h^n f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{n-1} f(x))$, ou seja, a definição de operador diferença baseiam-se na possibilidade de se iterar uma função $\Delta : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ um número arbitrário, n, de vezes.

Assim, para $n = 0$, tem-se

$$\Delta_h^0 f(x) = f(x).$$

Para $n = 1$, tem-se

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Aplicando agora, para $n = 2$, tem-se

$$\begin{aligned}\Delta_h^2 f(x) &= \Delta_h(\Delta_h f(x))\\ &= \Delta_h f(x+h) - \Delta_h f(x)\\ &= [f(x+2h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)]\\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).\end{aligned}$$

Observação 4.1. *Se* $h = 1$, *simplesmente escrevemos* Δ *e omitimos o subscrito* h.

A definição a seguir, foi apresentada por [Silva 2000] em seu livro intitulado "*Novas Sequências Aritméticas e Geométricas (Com programação na HP Prime)*", sendo que aqui, trabalha-se com o incremento h, com $h \in \mathbb{R}$.

Definição 4.2.1. (Operador Diferença de uma Função).
Seja h *um número real diferente de zero e* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma sequência. Definimos a* p*-ésima diferença de* f *com incremento* h *pela seguinte fórmula de recorrência:*

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Delta_h^0 f(n) &=& f(n),\\ \Delta_h^p f(n) &=& \Delta_h^{p-1} f(n+h) - \Delta_h^{p-1} f(n),\ p, n \in \mathbb{Z}_+.\end{array}\right. \tag{4.1}$$

Observe que Δ_h^p é um operador de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ou seja,

$$\begin{array}{rccl}\Delta_h^p : & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\\ & (a_1, a_2, \ldots) & \longmapsto & \Delta_h^p\big((a_1, a_2, \ldots)\big) = (\Delta_h^p a_1, \Delta_h^p a_2, \ldots)\end{array}.$$

Observação 4.2. (Tabelas de Diferenças de uma função).

Todas as diferenças podem ser representadas em uma forma tabular, uma tabela como é mostrada na Tabela 13, que dá diferenças sucessivas de $y = f(x)$, para $x = a$, $a + h$, $a + 2h$, $\ldots$, isto é, $\Delta_h y$, $\Delta_h^2 y$, $\Delta_h^3 y$, $\ldots$, e é chamada de tabela de diferença.

Tomando os oito primeiros valores de x, isto é, com p variando de 1 a 5, e fazendo a troca de denotação para $f(a) = y_0$, $f(a+h) = y_1$, $f(a+2h) = y_2$, $f(a+3h) = y_3$, $f(a+4h) = y_4$, e $f(a+5h) = y_5$, teremos a seguinte disposição abaixo:

Tabela 13: Tabela de diferenças de ordem p.

$\Delta_h^p y \diagdown x$	a	$a+h$	$a+2h$	$a+3h$	$a+4h$	$a+5h$
y	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
$\Delta_h y$	$\Delta_h y_0$	$\Delta_h y_1$	$\Delta_h y_2$	$\Delta_h y_3$	$\Delta_h y_4$	
$\Delta_h^2 y$	$\Delta_h^2 y_0$	$\Delta_h^2 y_1$	$\Delta_h^2 y_2$	$\Delta_h^2 y_3$		
$\Delta_h^3 y$	$\Delta_h^3 y_0$	$\Delta_h^3 y_1$	$\Delta_h^3 y_2$			
$\Delta_h^4 y$	$\Delta_h^4 y_0$	$\Delta_h^4 y_1$				
$\Delta_h^5 y$	$\Delta_h^5 y_0$					

Fonte: Autoria própria (2021).

A fim de que a definição do operador diferença tenha utilidade, precisamos das propriedades contidas na proposição a seguir. E note-se que se pode estabelecer um paralelo entre estas regras com as do cálculo diferencial.

Proposição 4.1. *Sejam $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ sequências quaisquer e $a, b, c, h \in \mathbb{R}$. O operador diferença, tem as seguintes propriedades:*

1. $\Delta_h c = 0$;

2. $\Delta_h^p\left[cf(n)\right] = c\Delta_h^p f(n)$;

3. $\Delta_h^p\left[af(n) + bg(n)\right] = a\Delta_h^p f(n) + b\Delta_h^p g(n)$;

4. $\Delta_h\left[f(n)g(n)\right] = f(n+h)\Delta_h g(n) + g(n)\Delta_h f(n)$;

5. $\Delta_h\left[\dfrac{f(n)}{g(n)}\right] = \dfrac{g(n)\Delta_h f(n) - f(n)\Delta_h g(n)}{g(n+h)g(n)},\ g(n+h)g(n) \neq 0$;

   Em particular, tem-se que

6. $\Delta_h\left[\dfrac{1}{f(n)}\right] = -\dfrac{\Delta_h f(n)}{f(n+h)f(n)},\ f(n+h)f(n) \neq 0$;

   Pode-se generalizar para uma soma finita a propriedade 3 como

7. $\Delta_h^p\left[c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + \cdots + c_m f_m(n)\right] = c_1\Delta_h^p f_1(n) + c_2\Delta_h^p f_2(n) + \cdots + c_m\Delta_h^p f_m(n)$;

Demonstração:

1. Considere a função constante $f(n) = c$. Pela primeira diferença de f, tem-se:

$$\Delta_h f(n) \;=\; f(n+h) - f(n) \,=\, c - c \,=\, 0.$$

2. Indução sobre p. Para $p = 0$, pela definição 4.2.1, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Delta_h^0 \left[cf(n)\right] &= \Delta_h^0 (cf)(n) \\
&= (cf)(n) \\
&= cf(n) \\
&= c\Delta_h^0 f(n).
\end{aligned}$$

Suponhamos a validade da fórmula para algum p:

$$\Delta_h^p \left[cf(n)\right] \;=\; c\Delta_h^p f(n).$$

Provemos que vale para $p+1$. Então, pela definição 4.2.1, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Delta_h^{p+1} \left[cf(n)\right] &= \Delta_h^{p+1} (cf)(n) \\
&= \Delta_h^p cf(n+h) - \Delta_h^p cf(n) \\
&= c\left[\Delta_h^p f(n+h) - \Delta_h^p f(n)\right] \\
&= c\left[\Delta_h^{p+1} f(n)\right] \\
&= c\Delta_h^{p+1} f(n).
\end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução, ela é válida para todos os inteiros positivos.

3. Indução sobre p. Para $p = 0$, pela definição 4.2.1, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Delta_h^0 \left[af(n) + bg(n)\right] &= \Delta_h^0 (af + bg)(n) \\
&= (af + bg)(n) \\
&= af(n) + bg(n) \\
&= a\Delta_h^0 f(n) + b\Delta_h^0 g(n).
\end{aligned}$$

Suponhamos a validade da fórmula para algum p:

$$\Delta_h^p \left[af(n) + bg(n)\right] \;=\; a\Delta_h^p f(n) + b\Delta_h^p g(n).$$

Provemos que vale para $p+1$. Então, pela definição 4.2.1, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Delta_h^{p+1}\left[af(n) + bg(n)\right] &= \Delta_h^{p+1}(af + bg)(n) \\
&= \Delta_h^p(af + bg)(n+h) - \Delta_h^p(af + bg)(n) \\
&= \left[a\Delta_h^p f(n+h) + b\Delta_h^p g(n+h)\right] - \left[a\Delta_h^p f(n) + b\Delta_h^p g(n)\right] \\
&= a\left[\Delta_h^p f(n+h) - \Delta_h^p f(n)\right] + b\left[\Delta_h^p g(n+h) - \Delta_h^p g(n)\right] \\
&= a\Delta_h^{p+1} f(n) + b\Delta_h^{p+1} g(n).
\end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução, ela é válida para todos os inteiros positivos.

4. Aplicando a primeira diferença de f, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Delta_h\left[f(n)g(n)\right] &= \Delta_h\left[(fg)(n)\right] \\
&= (fg)(n+h) - (fg)(n) \\
&= f(n+h)g(n+h) - f(n)g(n).
\end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo $f(n+h)g(n)$, no segundo membro acima fica

$$\begin{aligned}
\Delta_h\left[f(n)g(n)\right] &= f(n+h)g(n+h) - f(n+h)g(n) + f(n+h)g(n) - f(n)g(n) \\
&= f(n+h)\left[g(n+h) - g(n)\right] + g(n)\left[f(n+h) - f(n)\right] \\
&= f(n+h)\Delta_h g(n) + g(n)\Delta_h f(n).
\end{aligned}$$

Observação 4.3. *Adicionando e subtraindo $g(n+h)f(n)$ em vez de $f(n+h)g(n)$, também pode-se provar que*

$$\begin{aligned}
\Delta_h\left[f(n)g(n)\right] &= f(n)\Delta_h g(n) + g(n+h)\Delta_h f(n) \\
&= f(n)\Delta_h g(n) + g(n)\Delta_h f(n) + \Delta_h f(n)\Delta_h g(n).
\end{aligned}$$

5. Para $g(n) \neq 0$ e aplicando a primeira diferença de f, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Delta_h \left[\frac{f(n)}{g(n)}\right] &= \Delta_h \left[\left(\frac{f}{g}\right)(n)\right] \\
&= \left(\frac{f}{g}\right)(n+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(n) \\
&= \frac{f(n+h)}{g(n+h)} - \frac{f(n)}{g(n)} \\
&= \frac{f(n+h)g(n) - f(n)g(n+h)}{g(n+h)g(n)}
\end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo $f(n)g(n)$, no numerador do segundo membro acima fica

$$\begin{aligned}
\Delta_h \left[\frac{f(n)}{g(n)}\right] &= \frac{f(n+h)g(n) - f(n)g(n) + f(n)g(n) - f(n)g(n+h)}{g(n+h)g(n)} \\
&= \frac{g(n)\left[f(n+h) - f(n)\right] - f(n)\left[g(n+h) - g(n)\right]}{g(n+h)g(n)} \\
&= \frac{g(n)\Delta_h f(n) - f(n)\Delta_h g(n)}{g(n+h)g(n)}.
\end{aligned}$$

■

A partir da definição do operador diferença, vamos deduzir e provar um importante teorema.

A partir da descrição inicial sobre o operador diferença, sabe-se que

$$\Delta_h^0 f(n) = f(n),$$

$$\Delta_h f(n) = f(n+h) - f(n)$$

e

$$\Delta_h^2 f(n) = f(n+2h) - 2f(n+h) + f(n).$$

Agora, para $p = 3$, tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta_h^3 f(n) &= \Delta_h^2 f(n+h) - \Delta_h^2 f(n) \\
&= [\Delta_h f(n+2h) - \Delta_h f(n+h)] - [\Delta_h f(n+h) - \Delta_h f(n)] \\
&= \begin{array}{l} \Big\{ [f(n+3h) - f(n+2h)] - [f(n+2h) - f(n+h)] \Big\} \\ \qquad -\Big\{ [f(n+2h) - f(n+h)] - [f(n+h) - f(n)] \Big\} \end{array} \\
&= \Big\{ f(n+3h) - 2f(n+2h) + f(n+h) \Big\} - \Big\{ f(n+2h) - 2f(n+h) + f(n) \Big\} \\
&= f(n+3h) - 3f(n+2h) + 3f(n+h) - f(n).
\end{aligned}$$

Assim, pode-se observar novamente que os coeficientes de cada expressão encontram-se nas linhas do Triângulo Aritmético, veja:

$$p = 0 \implies \Delta_h^0 f(n) = f(n) = 1 \cdot f(n) = \binom{0}{0} f(n).$$

Agora para $p = 1$, tem-se

$$\Delta_h f(n) = f(n+h) - f(n) = 1 \cdot f(n+h) - 1 \cdot f(n) = \binom{1}{0} f(n+h) - \binom{1}{1} f(n).$$

De mesmo modo, para $p = 2$, tem-se

$$\Delta_h^2 f(n) = f(n+2h) - 2f(n+h) + f(n) = \binom{2}{0} f(n+2h) - \binom{2}{1} f(n+h) + \binom{2}{2} f(n).$$

Logo, para $p = 3$, tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta_h^3 f(n) &= f(n+3h) - 3f(n+2h) + 3f(n+h) - f(n) \\
&= \binom{3}{0} f(n+3h) - \binom{3}{1} f(n+2h) + \binom{3}{2} f(n+h) - \binom{3}{3} f(n).
\end{aligned}$$

Como podem ver, recorrer à definição para o cálculo da p-ésima Diferença de uma função, é monótono. Então, veremos a seguir uma fórmula, que nos fornece uma expressão da p-ésima Diferença de uma função sem a necessidade da recursividade, utilizando o Triângulo Aritmético.

O teorema a seguir, foi apresentada por [Silva 2000], sendo que aqui, trabalha-se com o incremento h, com $h \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.1. (Expressão da p-ésima Diferença de uma função).
Dada uma função f de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, para todo número p, com $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ arbitrariamente fixado, a seguinte identidade se verifica:

$$\Delta_h^p f(n) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} f(n - ih + ph). \tag{4.2}$$

Demonstração: Vamos provar por indução sobre p. Para $p = 0$ e $p = 1$, é claramente verdadeira, pois para $p = 0$, tem-se

$$\Delta_h^0 f(n) = \sum_{i=0}^{0} (-1)^i \binom{0}{i} f(n - ih + 0h).$$

então,

$$\Delta_h^0 f(n) = (-1)^0 \binom{0}{0} f(n - 0h + 0h).$$

logo,

$$\Delta_h^0 f(n) = f(n).$$

Vejamos agora, para $p = 1$,

$$\Delta_h^1 f(n) = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \binom{1}{i} f(n - ih + 1h)$$

então,

$$\Delta_h^1 f(n) \;=\; (-1)^0\binom{1}{0}f(n-0h+1h)+(-1)^1\binom{1}{1}f(n-1h+1h)$$

logo,

$$\Delta_h^1 f(n) \;=\; f(n+h)-f(n).$$

Mostrando assim que é verdadeira. Suponhamos que ela é válida para algum valor de p. Isto é,

$$\Delta_h^p f(n) \;=\; \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}f(n-ih+ph).$$

E agora, provemos que vale para $p+1$. Ou seja,

$$\Delta_h^{p+1} f(n) \;=\; \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\binom{p+1}{i}f\Big(n-ih+(p+1)h\Big).$$

Com efeito, da definição de operador diferença, tem-se

$$\Delta_h^{p+1} f(n) \;=\; \Delta_h^p f(n+h)-\Delta_h^p f(n).$$

Da hipótese de indução, em $f(n+h)$, tem-se

$$\Delta_h^p f(n+h) \;=\; \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}f\Big((n+h)-ih+ph\Big).$$

Subtraindo desta última equação, a hipótese de indução, em $f(n)$, resulta que

$$\Delta_h^{p+1} f(n) \;=\; \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}f\Big((n+h)-ih+ph\Big)-\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}f(n-ih+ph).$$

Sabendo que $\binom{p}{-1} = 0$, pela lei comutativa de um somatório podemos aplicar a técnica da mudança de variável, fazendo a seguinte troca de índices no segundo somatório acima, $i = j - 1$. Como $0 \leq i \leq p$, fica $0 \leq j - 1 \leq p$, com isso, temos $1 \leq j \leq p + 1$. Agora, fazendo $j = i$, tem-se

$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}f(n - ih + ph) = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^{i-1}\binom{p}{i-1}f\Big((n+h) - ih + ph\Big).$$

Sendo assim, tem-se

$$\Delta_h^{p+1}f(n) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}f\Big((n+h) - ih + ph\Big) - \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^{i-1}\binom{p}{i-1}f\Big((n+h) - ih + ph\Big),$$

ou ainda,

$$\Delta_h^{p+1}f(n) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}f\Big((n+h) - ih + ph\Big) + \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^{i}\binom{p}{i-1}f\Big((n+h) - ih + ph\Big).$$

Tendo ainda em conta que $\binom{p}{p+1} = 0$, resulta

$$\Delta_h^{p+1}f(n) = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\binom{p}{i}f\Big((n+h) - ih + ph\Big) + \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^{i}\binom{p}{i-1}f\Big((n+h) - ih + ph\Big).$$

Simplificando o segundo membro desta igualdade, fica

$$\Delta_h^{p+1}f(n) = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\left[\binom{p}{i} + \binom{p}{i-1}\right]f\Big((n+h) - ih + ph\Big).$$

Usando a relação de Stiefel, obtem-se

$$\Delta_h^{p+1}f(n) = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\binom{p+1}{i}f\Big((n+h) - ih + ph\Big).$$

Sendo assim, teremos

$$\Delta_h^{p+1} f(n) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \binom{p+1}{i} f\Big(n - ih + (p+1)h\Big).$$

Portanto, assim fica provado para todo $p \in \mathbb{N}$. ■

Com isso, segundo [Silva 2000], obtem-se o seguinte corolário, aqui com o incremento h, com $h \in \mathbb{R}$.

Corolário 4.1. *Dada a função f de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, para todo número p, com $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ arbitrariamente fixado, temos a identidade:*

$$\Delta_h^p f(n) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} \binom{p}{i} f(n + ih). \tag{4.3}$$

***Demonstração*:** De fato, pois fazendo uma troca de índices na identidade 4.2, fazendo $j = p - i$, assim, $i = p - j$. Como $0 \leq i \leq p$, fica $0 \leq p - j \leq p$, com isso, temos $-p \leq -j \leq 0$, logo, $0 \leq j \leq p$. Agora, fazendo $j = i$, tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta_h^p f(n) &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} f(n - ih + ph) \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} \binom{p}{p-i} f\Big(n - (p-i)h + ph\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} \binom{p}{p-i} f(n - ph + ih + ph) \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} \binom{p}{p-i} f(n + ih).
\end{aligned}$$

Como $\binom{p}{p-i}$ e $\binom{p}{i}$ são complementares, tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta_h^p f(n) &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} \binom{p}{p-i} f(n + ih) \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} \binom{p}{i} f(n + ih).
\end{aligned}$$

Ficando assim verificada a validade da identidade. ■

Agora, vamos ver dois lemas, o primeiro sobre o somatório de uma diferença que faz um paralelo ao cálculo diferencial, é o análogo discreto do teorema fundamental do cálculo, e o segundo sobre a diferença de um somatório, onde encontra-se em [Luís 2006].

Lema 4.1. *Seja* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma sequência. Se* $n_0 \leq n$ *com* $n_0, n \in \mathbb{Z}_+$, *então*

$$\sum_{i=n_0}^{n} \Delta f(i) = f(n+1) - f(n_0). \tag{4.4}$$

Demonstração: De fato, seja $n_0 \leq n$ com $n_0, n \in \mathbb{Z}_+$, então, aplicando o somatório variando de n_0 a n no operador diferença da sequência f, tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n_0}^{n} \Delta f(i) &= \sum_{i=n_0}^{n} \Big[f(i+1) - f(i)\Big] \\
&= \begin{array}{c} \Big[f(n_0+1) - f(n_0)\Big] + \Big[f(n_0+2) - f(n_0+1)\Big] \\ +\Big[f(n_0+3) - f(n_0+2)\Big] + \cdots + \Big[f(n+1) - f(n)\Big] \end{array} \\
&= \begin{array}{c} f(n_0+1) - f(n_0) + f(n_0+2) - f(n_0+1) + f(n_0+3) - f(n_0+2) \\ +f(n_0+4) - f(n_0+3) + \cdots + f(n) - f(n-1) + f(n+1) - f(n). \end{array}
\end{aligned}$$

Agora, cancelando os termos comuns do segundo membro acima, fica

$$\sum_{i=n_0}^{n} \Delta f(i) = f(n+1) - f(n_0).$$

■

Este lema, como já dissemos no Capítulo 2, é conhecido como soma telescópica.

Vejamos a seguir, o operador diferença aplicado em um somatório.

Lema 4.2. *Dada a sequência* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Se* $n_0 \leq n$ *com* $n_0, n \in \mathbb{Z}_+$, *então*

$$\Delta\left(\sum_{i=n_0}^{n} f(i)\right) = f(n+1). \tag{4.5}$$

Demonstração: Com efeito, dada a função g definida nos $\mathbb{Z}_+$ e tomando valores nos $\mathbb{R}$, tal que $g(n) = \sum\limits_{i=n_0}^{n} f(i)$, com $n_0 \leq n$ e $n_0, n \in \mathbb{Z}_+$. Então, aplicando a definição do operador diferença em g, tem-se

$$\Delta g(n) = g(n+1) - g(n).$$

Logo, fica

$$\begin{aligned}\Delta\left(\sum_{i=n_0}^{n} f(i)\right) &= \sum_{i=n_0}^{n+1} f(i) - \sum_{i=n_0}^{n} f(i)\\ &= f(n+1) + \sum_{i=n_0}^{n} f(i) - \sum_{i=n_0}^{n} f(i)\\ &= f(n+1).\end{aligned}$$

■

Os resultados a seguir, foram apresentados por [Silva 2000] em seu livro, sendo novamente aqui, cada resultado com o incremento h, com $h \in \mathbb{R}$.

Corolário 4.2. *Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência qualquer e Δ_h^p o operador diferença de ordem p com incremento h, então é válida a seguinte identidade*

$$\Delta_h^p f(n) = \Delta_h^{p-1}\Delta_h f(n). \tag{4.6}$$

Demonstração: Por definição, sabemos que $\Delta_h f(n) = \Delta_h^0 f(n+h) - \Delta_h^0 f(n)$, ou seja, $\Delta_h f(n) = f(n+h) - f(n)$. Agora façamos $f(n+h) = g(n)$. Então,

$$\begin{aligned}\Delta_h f(n) &= f(n+h) - f(n)\\ &= g(n) - f(n).\end{aligned}$$

Isto é, $\Delta_h f = g - f$. Logo, por definição tem-se

$$\begin{aligned}\Delta_h^p f(n) &= \Delta_h^{p-1} f(n+h) - \Delta_h^{p-1} f(n)\\ &= \Delta_h^{p-1} g(n) - \Delta_h^{p-1} f(n)\\ &= \Delta_h^{p-1}\left[g(n) - f(n)\right]\\ &= \Delta_h^{p-1}(g-f)(n)\\ &= \Delta_h^{p-1}\Delta_h f(n).\end{aligned}$$

Mostrando assim, a validade do corolário. ■

Com isso, podemos generalizar com a seguinte proposição.

Proposição 4.2. *Dada a função f de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, seja p um natural arbitrariamente fixado, e, $1 \leq i \leq p$. Nestas condições é válida a seguinte identidade:*

$$\Delta_h^p f(n) = \Delta_h^{p-i}\Delta_h^i f(n). \tag{4.7}$$

Demonstração: Vamos mostrar por indução sobre i. Para $i = 1$ tem-se

$$\Delta_h^p f(n) = \Delta_h^{p-1}\Delta_h f(n).$$

Que é o corolário acima.

Suponhamos que a proposição é válida para algum j com $1 \leq j < p$. Isto é,

$$\Delta_h^p f(n) = \Delta_h^{p-j}\Delta_h^j f(n).$$

Provemos que vale para $j+1$, ou seja,

$$\Delta_h^p f(n) \;=\; \Delta_h^{p-(j+1)}\Delta_h^{j+1} f(n).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\Delta_h^p f(n) &= \Delta_h^{p-j}\Delta_h^j f(n)\\
&= \Delta_h^j\left[\Delta_h^{p-(j+1)} f(n+h) - \Delta_h^{p-(j+1)} f(n)\right]\\
&= \Delta_h^j \Delta_h \Delta_h^{p-(j+1)} f(n)\\
&= \Delta_h^{j+1}\Delta_h^{p-(j+1)} f(n).
\end{aligned}$$

Portanto, fica provado a validez da proposição. ∎

Vejamos agora a seguinte proposição.

Proposição 4.3. *Dada a função f de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(n) = n^p$, com $p \in \mathbb{N}$ arbitrariamente fixado. Nestas condições é válida a seguinte identidade*

$$\Delta_h n^p \;=\; \sum_{i=1}^{p}\binom{p}{i} n^{p-i}h^i. \tag{4.8}$$

Demonstração: Com efeito, por definição, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_h f(n) &= f(n+h) - f(n)\\
&= (n+h)^p - n^p\\
&= \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i} n^{p-i}h^i - n^p\\
&= \sum_{i=1}^{p}\binom{p}{i} n^{p-i}h^i.
\end{aligned}$$

∎

A partir desta proposição obtemos o seguinte corolário.

Corolário 4.3. *Dada a função* f *de* $\mathbb{N}$ *em* $\mathbb{R}$*, dada por* $f(n) = n^p$*, com* $p \in \mathbb{N}$ *arbitrariamente fixado e* $h = 1$*. Assim, é válida a seguinte identidade*

$$\Delta n^p = \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} n^{p-i}. \tag{4.9}$$

Demonstração: De fato, é uma consequência direta da proposição acima, logo para $h = 1$, tem-se

$$\Delta n^p = \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} n^{p-i} 1^i.$$

Ou seja,

$$\Delta n^p = \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} n^{p-i}.$$

■

Na seção a seguir, veremos importantes resultados que nos fornecem generalizações do conceito de funções. Iniciaremos, com a proposição que caracteriza as funções polinomiais.

4.3 Generalizações do Conceito de Funções

Segundo [Mickens 1987], obtem-se agora a seguinte propriedade que caracteriza as funções polinomiais. Aqui, com o incremento h, com $h \in \mathbb{R}$.

Proposição 4.4. (Propriedade característica das funções polinomiais).
Se p *é uma função polinomial em* x *de grau* m *com coeficientes reais e* $m \in \mathbb{Z}_+$*, isto é,* $p(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m$*, então para todo* $x \in \mathbb{R}$*, tem-se*

$$\Delta_h^m p(x) = a_0 m! h^m \ \ e \ \ \Delta_h^k p(x) = 0 \ \ para \ \ k > m.$$

Demonstração: Dado p uma função polinomial em x de grau m, definida pela expressão $p(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m$, com coeficientes reais e $m \in \mathbb{Z}_+$, então, aplicando o operador diferença em p, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_h p(x) &= p(x-h) - p(x) \\
&= \Big[a_0(x+h)^m + a_1(x+h)^{m-1} + \cdots + a_m\Big] - \Big[a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m\Big] \\
&= a_0\Big[(x+h)^m - x^m\Big] + a_1\Big[(x+h)^{m-1} - x^{m-1}\Big] + \cdots + a_{m-1}\Big[(x+h) - x\Big] \\
&= a_0\Big[(x+h)^m - x^m\Big] + a_1\Big[(x+h)^{m-1} - x^{m-1}\Big] + \cdots + a_{m-1}h.
\end{aligned}$$

Onde, tem-se

$$\begin{aligned}
(x+h)^m &= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m-i}h^i \\
&= \binom{m}{0}x^m + \binom{m}{1}x^{m-1}h + \cdots + \binom{m}{m-1}xh^{m-1} + h^m.
\end{aligned}$$

Expandindo cada binômio e reduzindo os termos semelhantes, obtém-se

$$\Delta_h p(x) = a_0mx^{m-1}h + q_1(x) + a_{m-1}h,$$

sendo $q_1(x)$ um polinômio em x de grau $m-2$, com coeficientes reais e $a_{m-1}h \in \mathbb{R}$. Aplicando-se o operador diferença de segunda ordem em $p(x)$, fica

$$\begin{aligned}
\Delta_h^2 p(x) &= \Delta_h\Big[\Delta_h p(x)\Big] \\
&= \Delta_h\Big[a_0mx^{m-1}h + q_1(x) + a_{m-1}h\Big] \\
&= \Big[a_0m(x+h)^{m-1}h + q_1(x+h)\Big] - \Big[a_0mx^{m-1}h + q_1(x)\Big] \\
&= a_0mh\Big[(x+h)^{m-1} - x^{m-1}\Big] + q_1(x+h) - q_1(x) \\
&= a_0mh^2(m-1)x^{m-2} + q_2(x)
\end{aligned}$$

logo,

$$\Delta_h^2 p(x) = a_0 m(m-1)h^2 x^{m-2} + q_2(x).$$

Tendo aqui, $q_2(x)$ um polinômio em x de grau $m-3$, com coeficientes reais.

De modo análogo, tomando o operador diferença de terceira ordem, tem-se

$$\Delta_h^3 p(x) = a_0 m(m-1)(m-2)h^3 x^{m-3} + q_3(x),$$

com $q_3(x)$ um polinômio em x de grau $m-4$, com coeficientes reais.

Procedendo dessa maneira, vemos finalmente que

$$\Delta_h^m p(x) = a_0 m(m-1)(m-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot h^m + q_m(x),$$

onde tem aqui $q_m(x) = 0$, ou seja,

$$\Delta_h^m p(x) = a_0 m! h^m.$$

Com $a_0 m! h^m$ uma constante real. Sendo assim,

$$\Delta_h^k p(x) = 0 \text{ para } k > m.$$

Portanto, está demonstrado a validade da proposição. ■

Vejamos agora, um importante lema que vai auxiliar para se obter um teorema para a conclusão do nosso objetivo. Daqui em diante, muitos resultados foi descorberto com inspiração estudando o livro de [Silva 2000].

Lema 4.3. (Expressão geral de uma função por diferenças).
Dada a função f de $\mathbb{Z}_+$ em $\mathbb{R}$, para todo iteiro não negativo n, e $n \geq k$ com $k \in \mathbb{Z}_+$,

temos a seguinte identidade:

$$f\Big(x + (n-k)h\Big) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \Delta_h^i f(x). \tag{4.10}$$

Demonstração: Pelo o teorema binomial sabemos que

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \Delta_h^i f(x) = (\Delta_h + I)^{n-k} f(x).$$

Provaremos por indução sobre n. Com efeito, para $n = 0$ e $n = 1$, é verdadeira, pois, para $n = 0$ temos $k = 0$, assim tem-se

$$f(x + 0h) = (\Delta_h + I)^0 f(x)$$

então,

$$f(x + 0h) = f(x)$$

logo,

$$f(x) = f(x)$$

Agora, para $n = 1$ e $k = 0$, tem-se

$$f(x + 1h) = (\Delta_h + I)^1 f(x)$$

então,

$$f(x + h) = (\Delta_h + I) f(x)$$

logo,

$$f(x+h) \;=\; \Delta_h f(x) + f(x),$$

que está de acordo com a Definição 4.2.1 do operador diferença.

Agora, para $n = 1$ e $k = 1$, tem-se

$$f(x+0h) \;=\; (\Delta_h + I)^0 f(x)$$

então,

$$f(x) \;=\; f(x)$$

que é verdadeira. Suponhamos que é válida para algum valor de n com $n \geq k$. Isto é,

$$f\Big(x+(n-k)h\Big) \;=\; (\Delta_h + I)^{n-k} f(x).$$

Agora, provemos que é válida para $n+1$. Ou seja,

$$f\Big(x+[(n+1)-k]\,h\Big) \;=\; (\Delta_h + I)^{[(n+1)-k]} f(x).$$

De fato, pois temos

$$\begin{aligned} f\Big(x+[(n+1)-k]\,h\Big) &= (\Delta_h + I)^{[(n+1)-k]} f(x) \\ &= (\Delta_h + 1)(\Delta_h + I)^{n-k} f(x) \\ &= \Delta_h(\Delta_h + I)^{n-k} f(x) + (\Delta_h + I)^{n-k} f(x). \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, tem-se

$$\begin{aligned} f\Big(x + [(n+1) - k]\,h\Big) &= \Delta_h(\Delta_h + I)^{n-k} f(x) + (\Delta_h + I)^{n-k} f(x) \\ &= \Delta_h f(x + (n-k)h) + f(x + (n-k)h). \end{aligned}$$

De acordo com a Definição 4.2.1 do operador diferença a prova está concluída.

Portanto,

$$f\Big(x + (n-k)h\Big) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \Delta_h^i f(x),$$

é vedadeira para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. ■

Com este lema, agora damos uma expressão para o termo geral de uma sequência arbitrária em função do operador diferença.

Teorema 4.2. (Termo geral de uma sequência por diferenças).
Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma sequência. Então, para* $n \in \mathbb{Z}_+$, *e* $n \geq k$ *com* $k \in \mathbb{Z}_+$, *tem-se a seguinte identidade:*

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \Delta^i f(k). \tag{4.11}$$

Demonstração: Com efeito, do lema acima, tem-se

$$f\Big(x + (n-k)h\Big) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \Delta_h^i f(x),$$

Assim, tomando $x = k$ e pondo $h = 1$, fica

$$f(k + (n-k)1) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \Delta_1^i f(k).$$

Logo, teremos

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \Delta^i f(k).$$

Portanto, está verificada a identidade. ■

A seguir, veremos um teorema de grande importância para alcançar nosso objetivo.

Teorema 4.3. (Expressão geral de uma função polinomial por diferenças).
Seja f uma função de $\mathbb{Z}_+$ em $\mathbb{R}$. f é uma função polinomial de grau m, $m \in \mathbb{Z}_+$ e $x \geq k$ com $k \in \mathbb{Z}_+$, de uma variável e coeficientes reais se, e somente se, é dada pela seguinte expressão

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} \binom{x-k}{i} \Delta^i f(k). \tag{4.12}$$

Demonstração: $(\Longrightarrow)$ Se f é uma função polinomial de grau m em x com coeficientes reais e $m \in \mathbb{Z}_+$, e sejam $x_j = x_0 + j$, com $1 \leq j \leq m$, cujo os valores são $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_m)$ de f. Assim, nós podemos escrever f na seguinte forma

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_m(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{m-1}).$$

Substituindo $x = x_0, x_1, \ldots, x_m$ sucessivamente na expressão acima, obtemos os valores $f(x_0) = a_0$, $f(x_1) = a_0 + a_1(x - x_0)$, $f(x_2) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$ e assim por diante. Disso vem que,

$$a_0 = f(x_0).$$

Aplicando o operador diferença em $f(x_0)$, tem-se

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = a_1(x_1 - x_0) = a_1.$$

Portanto,

$$a_1 \;=\; \Delta f(x_0).$$

Também temos

$$\begin{aligned}\Delta f(x_1) &= f(x_2) - f(x_1)\\ &= a_1(x_2 - x_1) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\\ &= a_1 + 2a_2\\ &= \Delta f(x_0) + 2a_2\end{aligned}$$

portanto,

$$a_2 \;=\; \frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{2} = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}.$$

Da mesma forma, $a_3 = \dfrac{\Delta^3 f(x_0)}{3!}$ e assim, pelo o processo de indução finita, tem-se $a_m = \dfrac{\Delta^m f(x_0)}{m!}$.

Substituindo esses valores na expressão da função acima, obtem-se

$$f(x) \;=\; \begin{array}{r} f(x_0) + \Delta f(x_0)(x - x_0) + \dfrac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)\\ + \cdots + \dfrac{\Delta^m f(x_0)}{m!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{m-1}).\end{array}$$

Agora, se for necessário avaliar o valor de $f(x)$ de f para $x = x_0 + p$, com $p \in \mathbb{N}$, então

$$(x - x_0) \;=\; p.$$

Para, $(x - x_1)$, temos

$$(x - x_1) = x - x_0 - (x_1 - x_0) = p - 1.$$

De modo análogo,

$$(x - x_2) = x - x_1 - (x_2 - x_1) = p - 1 - 1 = p - 2.$$

Prosseguindo para $(x - x_m)$, teremos

$$(x - x_m) = p - m.$$

Portanto, escrevendo $x_0 = k$, e $p = x - k$ a última expressão torna-se

$$\begin{aligned} f(x) \;=\; & f(k) + (x-k)\Delta f(k) + \frac{(x-k)(x-k-1)}{2!}\Delta^2 f(k) \\ & + \cdots + \frac{(x-k)(x-k-1)\cdots((x-k)-m+1)}{m!}\Delta^m f(k). \end{aligned}$$

Que colocando na forma reduzida, fica

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} \binom{x-k}{i} \Delta^i f(k).$$

Portanto, está demonstrado a primeira parte.

$(\Longleftarrow)$ Se a função f é definida pela seguinte expressão

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} \binom{x-k}{i} \Delta^i f(k),$$

então, fazendo $k = 0$, tem-se

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} \binom{x}{i} \Delta^i f(0),$$

assim, expandindo o somatório, tem-se

$$f(x) = \binom{x}{0}\Delta^0 f(0)+\binom{x}{1}\Delta^1 f(0)+\binom{x}{2}\Delta^2 f(0)+\cdots+\binom{x}{m-1}\Delta^{m-1} f(0)+\binom{x}{m}\Delta^m f(0)$$

onde,

$$f(x) = f(0) + x\Delta f(0) + \frac{x(x-1)\Delta^2 f(0)}{2!} + \cdots + \frac{x(x-1)\cdots(x-m+1)\Delta^m f(0)}{m!}.$$

Desenvolvendo o segundo membro acima, e simplificando os termos semelhantes, tem-se

$$f(x) = \frac{\Delta^m f(0)}{m!}x^m + q(x) + f(0),$$

onde $q(x)$ é um polinômio de grau $m-1$, sem termo independente. Portanto, f é uma função polinomial de grau m em x com coeficientes reais e $m \in \mathbb{Z}_+$. ■

Exemplo 4.1. *Mostremos para* $k = 1$ *que* $f(x) = x^2 = \sum_{i=0}^{2}\binom{x-1}{i}\Delta^i f(1)$.

Demonstração: *De fato, por*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m}\binom{x-k}{i}\Delta^i f(k).$$

Fazendo $k = 1$ *e* $m = 2$, *temos*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2}\binom{x-1}{i}\Delta^i f(1).$$

Construindo a tabela de diferença para i *variando de* 0 *a* 2, *temos*

Tabela 14: Tabela de diferenças de x^2.

$\Delta^p y \setminus x$	0	1	2	3	$\cdots$
$f(x)$	0	1	4	9	$\cdots$
$\Delta f(x)$	1	3	5	$\cdots$	
$\Delta^2 f(x)$	2	2	$\cdots$		
$\Delta^3 f(x)$	0	$\cdots$			

Fonte: Autoria própria (2021).

Assim, substituindo os valores determinados na tabela e simplificando, temos

$$f(x) = \binom{x-1}{0} + 3\binom{x-1}{1} + 2\binom{x-1}{2} = x^2.$$

$\blacksquare$

Na seção a seguir, demonstraremos um método, no caso, obteremos uma fórmula, que utiliza o operador diferença de uma função polinomial para obter uma fórmula da soma das funções polinomiais aplicadas nos inteiros positivos.

4.4 A Fórmula Geral da Soma das Funções Polinomiais

Dos métodos existentes, apresentou-se no Capítulo 3 dois métodos para generalizar somas de potências de inteiros positivos em termos de relações de recorrência usando o método de Pascal e o de Bernoulli, agora na forma fechada, isto é, não recursiva, vamos usar um método, utilizando e aplicando a teoria dos operadores diferença de ordem superior para obtermos uma fórmula geral não recursiva para a soma das potências dos inteiros positivos. Tal fórmula, não só determina a soma das potências dos inteiros positivos, como também determina a soma das funções polinomiais dos inteiros positivos.

Considere inicialmente a função polinomial f de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ de grau p, e a soma respectivamente, dada por:

$$f(j) \quad = \quad c_p j^p + c_{p-1} j^{p-1} + \cdots + c_1 j + c_0. \tag{4.13}$$

$$S_p(n) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} f(j). \tag{4.14}$$

Onde, temos que $c_p, c_{p-1}, \ldots, c_1, c_0 \in \mathbb{R}$ e $c_p \neq 0$.

Teorema 4.4. (Fórmula Geral Não Recursiva da soma das funções polinomiais). *Seja f uma função definida de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Se f é uma função polinomial de grau p dada por $f(j) = c_p j^p + c_{p-1} j^{p-1} + \cdots + c_1 j + c_0$, com $c_p, c_{p-1}, \ldots, c_1, c_0 \in \mathbb{R}$ e $c_p \neq 0$, então, para $k = 0$ ou $k = 1$, tem-se*

$$S_p(n) \quad = \quad \sum_{i=0}^{p} \binom{n-k+1}{i+1} \Delta^i f(k), \tag{4.15}$$

para todo $p \geq 0$, e $n \geq 1$.

***Demonstração*:** De fato, seja a função polinomial f de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, de grau p dada por

$$f(j) \quad = \quad c_p j^p + c_{p-1} j^{p-1} + \cdots + c_1 j + c_0.$$

com $c_p, c_{p-1}, \ldots, c_1, c_0 \in \mathbb{R}$ e $c_p \neq 0$. Por (4.14), tem-se

$$S_p(n) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} f(j).$$

Aplicando o Teorema 4.3, que nos dar a expressão geral de uma função polinomial por diferenças, teremos que,

$$\begin{aligned} S_p(n) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{p}\binom{j-k}{i}\Delta^i f(k) \\ &= \sum_{i=0}^{p}\left[\sum_{j=1}^{n}\binom{j-k}{i}\right]\Delta^i f(k). \end{aligned}$$

Usando agora o Teorema das colunas, que é a equação (2.9), obtem-se

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^{p}\binom{n-k+1}{i+1}\Delta^i f(k),$$

para todo $p \geq 0$, $n \geq 1$ e fazendo $k = 0$ ou $k = 1$.

Portanto, está demonstrado a validez do Teorema. ■

Observação 4.4. *A escolha do valor de* k *para* $k = 0$ *ou* $k = 1$ *é arbitrária, a sua escolha é para facilitar os cálculos, tonando a coluna da tabela diferença com o maior número de zero.*

No capítulo seguinte, vamos ver várias aplicações dessa fórmula geral não recursiva da soma das funções polinomiais. Inicia-se nas funções potências e em seguida, nas progressões aritméticas de ordem superior e finalizando nos números figurados.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES DA FÓRMULA GERAL NÃO RECURSIVA

Um grande número de aplicações e exemplos facilita o entendimento do texto e é imprescindível quando se almeja uma formação sólida. Há indicações de aplicabilidade teórica e históricas, no intuito de motivar o leitor naquilo que está estudando. Com o escopo didático, as aplicações e os exemplos estão dispostos em ordem crescente de dificuldade. Há de se tomar público que, o presente capítulo recebeu preponderante influência do livro "*Novas Sequências Aritméticas e Geométricas (Com programação na HP Prime)*" de [Silva 2000].

5.1 Aplicações da Fórmula nas Funções Polinomiais

Mostraremos algumas aplicações desta fórmula para alguns exemplos da soma das potências dos inteiros positivos. Que são casos particulares das funções polinomiais.

5.1.1 Aplicações da Fórmula Geral na Soma das Potências

Inicia-se esta subseção com algumas aplicações da fórmula geral não recursiva na soma das potências dos inteiros não negativos.

Exemplo 5.1. *Aplicando a fórmula geral não recursiva, vamos obter uma expressão para*

$S_0(n)$, $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$ que se encontra na introdução do Capítulo 3 e também para $S_4(n)$.

Solução: 1. Primeiramente, seja $f(j) = j^0$, para todo j. Logo, pela fórmula geral, temos

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \binom{n-k+1}{i+1} \Delta^i f(k).$$

Fazendo $p = 0$ e $k = 1$, na fórmula acima, tem-se

$$\begin{aligned} S_0(n) &= \sum_{i=0}^{0} \binom{n}{i+1} \Delta^i f(1) \\ &= \binom{n}{1} f(1) \\ &= n \cdot 1 \\ &= n. \end{aligned}$$

2. De mesmo modo, seja $f(j) = j^1$, para todo j. Logo, pela fórmula geral e fazendo $k = 0$, temos

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \binom{n+1}{i+1} \Delta^i f(0).$$

Agora, fazendo $p = 1$, obtem-se,

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \sum_{i=0}^{1} \binom{n+1}{i+1} \Delta^i f(0) \\ &= \binom{n+1}{0+1} \Delta^0 f(0) + \binom{n+1}{1+1} \Delta^1 f(0) \\ &= \binom{n+1}{1} f(0) + \binom{n+1}{2} \Delta f(0) \\ &= (n+1) \cdot 0 + \frac{(n+1)n}{2} [f(1) - f(0)] \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

3. Agora, para $f(j) = j^2$, para todo j. Assim, pela fórmula geral e fazendo $k = 0$, temos

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \binom{n+1}{i+1} \Delta^i f(0).$$

Fazendo $p = 2$ na fórmula acima, fica-se

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \sum_{i=0}^{2} \binom{n+1}{i+1} \Delta^i f(0) \\ &= \binom{n+1}{1} f(0) + \binom{n+1}{2} \Delta f(0) + \binom{n+1}{3} \Delta^2 f(0). \end{aligned}$$

Na tabela 15, encontra-se $0 \leq p \leq 2$.

Tabela 15: Tabela de diferenças de $S_2(n)$.

$\Delta^p y \backslash j$	0	1	2	3	$\cdots$
$f(j)$	0	1	4	9	$\cdots$
$\Delta f(j)$	1	3	5	$\cdots$	
$\Delta^2 f(j)$	2	2	$\cdots$		
$\Delta^3 f(j)$	0	$\cdots$			

Fonte: Autoria própria (2021).

Assim, substituindo os valores determinados na tabela, tem-se

$$S_2(n) = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}.$$

Logo, desenvolvendo e simplificando, fica

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \end{aligned}$$

4. Similarmente, para $f(j) = j^3$, para todo j. Pela fórmula geral e fazendo $k = 0$, temos

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \binom{n+1}{i+1} \Delta^i f(0).$$

Fazendo $p = 3$ na fórmula acima, obtem-se

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \sum_{i=0}^{3} \binom{n+1}{i+1} \Delta^i f(0) \\ &= \binom{n+1}{1} f(0) + \binom{n+1}{2} \Delta f(0) + \binom{n+1}{3} \Delta^2 f(0) + \binom{n+1}{4} \Delta^3 f(0). \end{aligned}$$

Na tabela 16, encontra-se $0 \leq p \leq 3$.

Tabela 16: Tabela de diferenças de $S_3(n)$.

$\Delta^p y$ \ j	0	1	2	3	4	$\cdots$
$f(j)$	0	1	8	27	64	$\cdots$
$\Delta f(j)$	1	7	19	37	$\cdots$	
$\Delta^2 f(j)$	6	12	18	$\cdots$		
$\Delta^3 f(j)$	6	6	$\cdots$			
$\Delta^4 f(j)$	0	$\cdots$				

Fonte: Autoria própria (2021).

Com isso, substituindo os valores determinados na tabela diferença, fica

$$S_3(n) = \binom{n+1}{2} + 6\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4}.$$

Assim, desenvolvendo tem-se

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}. \end{aligned}$$

5. De modo análogo, para $f(j) = j^4$, para todo j. Pela fórmula geral e fazendo $k = 0$, temos

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \binom{n+1}{i+1} \Delta^i f(0).$$

Substituindo $p = 4$ na fórmula acima, tem-se

$$S_4(n) = \sum_{i=0}^{4} \binom{n+1}{i+1} \Delta^i f(0).$$

Na tabela 17, encontra-se $0 \leq p \leq 4$, então, tem-se

Tabela 17: Tabela de diferenças de $S_4(n)$.

$\Delta^p y \backslash j$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$f(j)$	0	1	16	81	256	625	$\cdots$
$\Delta f(j)$	1	15	65	175	369	$\cdots$	
$\Delta^2 f(j)$	14	50	110	194	$\cdots$		
$\Delta^3 f(j)$	36	60	84	$\cdots$			
$\Delta^4 f(j)$	24	24	$\cdots$				
$\Delta^5 f(j)$	0	$\cdots$					

Fonte: Autoria própria (2021).

Logo, substituindo os valores determinados na tabela diferença, tem-se

$$S_4(n) = \binom{n+1}{2} + 14\binom{n+1}{3} + 36\binom{n+1}{4} + 24\binom{n+1}{5}.$$

Portanto, desenvolvendo obtem-se

$$\begin{aligned} S_4(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \\ &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}. \end{aligned}$$

□

Finalizamos aqui, a aplicação da fórmula nas somas das potências dos inteiros positivos.

Na próxima subseção, veremos a aplicação desta fórmula na teoria nas sequências numéricas que chama-se de Progressões Aritméticas de Ordem Superior.

5.1.2 Aplicações em Progressões Aritméticas de Ordem m

Definição 5.1.1. (Progressões Aritméticas de Ordem m)
Seja k um número inteiro não negativo. Uma sequência (a_n) é chamada de progressão aritmética de ordem m quando $\Delta^m a_n$ for constante, e $\Delta^{m+1} a_n = 0$.

Para uma melhor compreensão da definição, considere o exemplo a seguir.

Exemplo 5.2. *A sequência $(a_n) = (6, 18, 36, 60, 90, \ldots)$, é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois $(\Delta a_n) = (12, 18, 24, 30, \ldots)$ é uma progressão aritmética de primeira ordem e $(\Delta^2 a_n) = (6, 6, 6, \ldots)$ é uma sequência constante, e $\Delta^3 a_n = 0$.*

A seguir, discutiremos sobre o termo geral de uma progressão aritmética de ordem superior. No próximo resultado, damos duas expressões para o termo geral de uma progressão aritmética de ordem m. Este resultado foi modificado de [Bermúdez, Martinón e Noda 2014].

Teorema 5.1. *Seja (a_n) uma sequência. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *A sequência (a_n) é uma progressão aritmética de ordem m.*

(2) *Para todos $n \geq 0$ e $k \in \mathbb{Z}_+$, tem-se*

$$a_n = \sum_{i=0}^{m} \binom{n-k}{i} \Delta^i a_k. \tag{5.1}$$

(3) *Existe um polinômio p_a, com coeficientes reais de grau menor ou igual a m, tal que $p_a(n) = a_n$, para qualquer $n \geq 0$, ou seja, existem $c_m, c_{m-1}, \ldots, c_1, c_0 \in \mathbb{R}$ e $c_m \neq 0$, de modo que*

$$a_n = c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \cdots + c_1 n + c_0, \tag{5.2}$$

onde $c_m = \dfrac{\Delta^m a_0}{m!}$ *e* $c_0 = a_0$.

Demonstração: $(1) \Longrightarrow (2)$ Por definição, temos $\Delta^j a_0 = 0$, para qualquer $j \geq m+1$.

Agora, aplicando (4.11), obtemos a expressão

$$a_n \;=\; \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \Delta^i a_k.$$

Como $\Delta^j a_0 = 0$, para qualquer $j \geq k+1$, tem-se que

$$a_n \;=\; \sum_{i=0}^{m} \binom{n-k}{i} \Delta^i a_k,$$

assim, obtem-se a expressão de (2).

$(2) \Longrightarrow (3)$ Por (4.12), temos que a_n é um polinômio em n de grau m, portanto a_n é um polinômio $p_a(n)$ em n de grau menor ou igual a m, consequentemente

$$a_n \;=\; c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \cdots + c_1 n + c_0,$$

para algum $c_m, c_{m-1}, \ldots, c_1, c_0 \in \mathbb{R}$ e $c_m \neq 0$.

Claramente, temos que $a_0 = p_a(0) = c_0$.

Do Teorema 4.3, obtemos também que o coeficiente de n^m é $c_m = \dfrac{\Delta^m a_0}{m!}$.

$(3) \Longrightarrow (1)$ Se a_n for dado por (5.2), tem-se

$$\begin{aligned} \Delta a_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= \sum_{i=0}^{m} c_i (n+1)^i - \sum_{i=0}^{m} c_i n^i. \end{aligned}$$

Como sabemos que $(n+1)^i = n^i + \sum_{r=0}^{i-1} \binom{i}{r} n^r$, teremos

$$\begin{aligned}
\Delta a_n &= \sum_{i=0}^{m} c_i \left[n^i + \sum_{r=0}^{i-1} \binom{i}{r} n^r \right] - \sum_{i=0}^{m} c_i n^i \\
&= \sum_{i=0}^{m} c_i n^i + \sum_{i=0}^{m} c_i \sum_{r=0}^{i-1} \binom{i}{r} n^r - \sum_{i=0}^{m} c_i n^i \\
&= \sum_{i=0}^{m} c_i \sum_{r=0}^{i-1} \binom{i}{r} n^r \\
&= \sum_{i=1}^{m} b_{i-1} n^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} b_i n^i,
\end{aligned}$$

para um certo b_i em $\mathbb{R}$, com $b_i = (i+1)c_{i+1}$. Então, $\Delta^m a_n$ é um polinômio em n de grau menor ou igual a 1. Portanto, $\Delta^{m+1} a_n = 0$, o que comprova a afirmação. ■

Em vista do teorema acima, as progressões aritméticas também são chamadas de sequências polinomiais.

Proposição 5.1. *Se o termo geral da sequência (x_n) é um polinômio de grau m em n com coeficiente líder a_m, então o termo geral da sequência (Δx_n) é um polinômio de grau $m-1$ em n com coeficiente líder $m!a_m$.*

Demonstração: Com efeito, como x_n é um polinômio de grau m em n com coeficiente líder a_m, pode-se escrever x_n como

$$x_n = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0.$$

Aplicando a proposição 4.4, temos x_n um polinômio de ordem $m-1$ e fazendo $p(x) = x_n$, $a_0 = a_m$, $m = m$ e $h = 1$ em

$$\Delta_h^m p(x) = a_0 m! h^m,$$

tem-se

$$
\begin{aligned}
\Delta_1^1 x_n &= a_m m! 1^m \\
\Delta x_n &= m! a_m.
\end{aligned}
$$

■

Agora, vejamos uma aplicação do item (2) do Teorema 5.1.

Exemplo 5.3. *Dada a sequência* $(a_n) = (1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots)$*, então, encontremos a fórmula do termo geral dessa sequência.*

Solução: A sequência (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois observando a tabela de diferença que encontra-se na página seguinte, a sequência das diferenças é uma progressão aritmética de primeira ordem. Logo, substituindo $m = 2$ e $k = 0$ na fórmula (5.1), obtem-se:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} \Delta^i a_0 \\
&= \binom{n}{0} \Delta^0 a_0 + \binom{n}{1} \Delta^1 a_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 a_0.
\end{aligned}
$$

Simplificando e substituindo os valores das diferenças da tabela 18, obtem-se:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1 + 2n + \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}
$$

Esta é a fórmula do termo geral dessa $P.A.^2$, que é um polinômio de grau 2.

Tabela 18: Tabela de diferenças da $P.A.^2$.

$\Delta^p a_n \backslash n$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$	
a_n	1	3	6	10	15	21	$\cdots$	$P.A.^2$
Δa_n	2	3	4	5	6	$\cdots$	$P.A.^1$	
$\Delta^2 a_n$	1	1	1	1	$\cdots$	$P.A.^0$		
$\Delta^3 a_n$	0	0	0	$\cdots$				

Fonte: Autoria própria (2021).

$\square$

Observação 5.1. *Uma aplicação importante de uma $P.A.^m$ é a relação dela com polinômios, pois, dada uma sequência com $m+1$ termos, podemos encontrar um polinômio de grau m que gera estes $m+1$ termos.*

Exemplo 5.4. *Vamos encontrar uma fórmula para os cinco primeiros números primos.*

Solução: Devemos encontrar um polinômio que gere a sequência:

$$2, 3, 5, 7, 11.$$

Como temos $4+1$ termos, estes determinam uma $P.A.^4$, da seguinte forma:

$$a_n = \sum_{i=0}^{4} \binom{n}{i} \Delta^i a_0.$$

Ou seja,

$$a_n = \binom{n}{0}\Delta^0 a_0 + \binom{n}{1}\Delta^1 a_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 a_0 + \binom{n}{3}\Delta^3 a_0 + \binom{n}{4}\Delta^4 a_0.$$

Na tabela 19, utilizando os valoeres de a_0, tem-se

Tabela 19: Tabela de diferenças da $P.A.^4$.

$\Delta^p a_n \backslash n$	0	1	2	3	4
a_n	2	3	5	7	11
Δa_n	1	2	2	4	
$\Delta^2 a_n$	1	0	2		
$\Delta^3 a_n$	-1	2			
$\Delta^4 a_n$	3				

Fonte: Autoria própria (2021).

Substituindo estes coeficientes e simplificando, obtem-se:

$$a_n = \frac{n^4}{24} - \frac{3n^3}{8} + \frac{4n^2}{3} + 2.$$

Que é o polinômio que determina os cinco primeiros primos. $\square$

Agora, vamos obter uma fórmula para a soma dos primeiros termos de uma progressão aritmética de ordem m. Vejamos o teorema a seguir

Teorema 5.2. (Soma dos termos de uma $P.A.^k$)
Em uma progressão aritmética de ordem m a soma $S_m(n)$ dos n termos iniciais, em que $k = 0$ ou $k = 1$, vale

$$S_m(n) = \sum_{i=0}^{m} \binom{n-k+1}{i+1} \Delta^i a_k. \tag{5.3}$$

para todo $m \geq 0$, $n \geq 1$.

Demonstração: Seja (a_n) a progressão aritmética de ordem m. Como vimos no Teorema 5.1 a fórmula do termo geral de uma $P.A.^m$ é um polinômio de grau m, da forma

$$a_j = \sum_{i=0}^{m} \binom{j-k}{i} \Delta^i a_k.$$

Da equação (4.14), tem-se

$$S_m(n) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Daí, teremos

$$\begin{aligned} S_m(n) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{m}\binom{j-k}{i}\Delta^i a_k \\ &= \sum_{i=0}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}\binom{j-k}{i}\right]\Delta^i a_k. \end{aligned}$$

Usando agora (2.9), obtem-se

$$S_m(n) \quad = \quad \sum_{i=0}^{m}\binom{n-k+1}{i+1}\Delta^i a_k.$$

para todo $m \geq 0$, $n \geq 1$ e $k = 0$ ou $k = 1$.

Portanto, concluimos a validade do Teorema. ■

Observação 5.2. *Nota-se também que a fórmula da soma dos termos de uma $P.A.^m$ é um polinômio de grau $m+1$. Nos exemplos a seguir podemos constatar isto em alguns casos.*

Exemplo 5.5. *A sequência dos números triângulares, isto é, $(t_n) = (1, 3, 6, 10, 15, 21, \cdots)$, é uma progressão aritmética de segunda ordem como foi visto no exemplo 5.3. Vamos encontrar uma fórmula para a soma de seus n primeiros termos.*

Solução: Pelo Teorema 5.2, tomando $k = 0$, tem-se

$$S_m(n) \quad = \quad \sum_{i=0}^{m}\binom{n+1}{i+1}\Delta^i a_0.$$

Substituindo m por 2 e a_0 por t_0 e simplificando, teremos

$$
\begin{aligned}
S_2(n) &= \sum_{i=0}^{2} \binom{n+1}{i+1} \Delta^i t_0. \\
&= \binom{n+1}{1} \Delta^0 t_0 + \binom{n+1}{2} \Delta^1 t_0 + \binom{n+1}{3} \Delta^2 t_0.
\end{aligned}
$$

Na tabela 20, tomando os valores da primeira coluna, tem-se

$$
S_2(n) = \binom{n+1}{1} + 2\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3}.
$$

Desenvolvendo e simplificando, obtem-se

$$
S_2(n) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.
$$

Que é dado por um polinômio de grau 3.

Tabela 20: Tabela de diferenças de t_n.

$\Delta^p t_n \diagdown n$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
t_n	1	3	6	10	15	21	$\cdots$
Δt_n	2	3	4	5	6	$\cdots$	
$\Delta^2 t_n$	1	1	1	1	$\cdots$		
$\Delta^3 t_n$	0	0	0	$\cdots$			

Fonte: Autoria própria (2021).

$\square$

Exemplo 5.6. *Encontremos o valor da soma dos n primeiros termos da sequência (a_n), cujo termo geral é dado por $a_n = (3n-1)\cdot n^2$.*

Solução: Como $a_n = (3n-1)\cdot n^2$ é um polinômio de grau 3, na tabela 21, teremos

Tabela 21: Tabela de diferenças de a_n.

$\Delta^p a_n \diagdown n$	0	1	2	3	4	$\cdots$
a_n	0	2	20	72	176	$\cdots$
Δa_n	2	18	52	104	$\cdots$	
$\Delta^2 a_n$	16	34	52	$\cdots$		
$\Delta^3 a_n$	18	18	$\cdots$			
$\Delta^4 a_n$	0	$\cdots$				

Fonte: Autoria própria (2021).

substituindo p por 3 e aplicando o Teorema 5.2, tomando $k = 1$, temos

$$S_3(n) = \sum_{i=0}^{3} \binom{n}{i+1} \Delta^i a_1.$$

Assim, expandindo, substituindo e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned} S_3(n) &= 2\binom{n}{1} + 18\binom{n}{2} + 34\binom{n}{3} + 18\binom{n}{4} \\ &= \frac{n(n+1)(9n^2+5n-2)}{12}. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 5.7. *Sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 1$, encontremos uma expressão para S em n, onde tenhamos que*

$$S(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n-1) + f(n).$$

Solução: Devemos encontrar a soma dos termos da sequência

$$(0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 24,\ \ldots,\ n^2 - 1).$$

O termo geral desta sequência é $f(n) = n^2 - 1$, que é um polinômio de grau 2, logo, é uma progressão aritmética de segunda ordem, assim, pelo o Teorema 5.2, temos

$$S_m(n) = \sum_{i=0}^{p} \binom{n-k+1}{i+1} \Delta^i a_k.$$

Fazendo, $m = 2$, $k = 1$, teremos

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i+1} \Delta^i f(1) \\ &= \binom{n}{1} \Delta^0 f(1) + \binom{n}{2} \Delta^1 f(1) + \binom{n}{3} \Delta^2 f(1). \end{aligned}$$

Constuindo a tabela 22, temos

Tabela 22: Tabela de diferenças de f.

$\Delta^p f(n)$ \ n	1	2	3	4	5	$\cdots$
$f(n)$	0	3	8	15	24	$\cdots$
$\Delta f(n)$	3	5	7	9	$\cdots$	
$\Delta^2 f(n)$	2	2	2	$\cdots$		
$\Delta^3 f(n)$	0	0	$\cdots$			

Fonte: Autoria própria (2021).

Expandindo, substituindo e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned} S_2(n) &= 3\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} - \frac{5n}{6}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 5.8. *Conhecendo uma das sequências das diferenças de uma função polinomial f de grau 2, como é dada na tabela 23, determine* *a) o termo geral desse polinômio.*

b) a expressão geral para a soma dos n primeiros termos dessa função polinomial.

Tabela 23: Tabela de diferenças de ordem 3.

$\Delta^p f(n)$ \ n	1	2	3	4	5	$\cdots$
$f(n)$			12			
$\Delta f(n)$			8			
$\Delta^2 f(n)$			2			
$\Delta^3 f(n)$			0			

Fonte: Autoria própria (2021).

Solução: Para o item a), pelo o Teorema 4.3, temos

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} \binom{x-k}{i} \Delta^i f(k).$$

Fazendo, $m = 2$ e $k = 3$, e trocando a variável x por n, teremos

$$f(n) = \sum_{i=0}^{2} \binom{n-3}{i} \Delta^i f(3).$$

Desenvolvendo e substituindo os valores da tabela e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned}
f(n) &= \binom{n-3}{0}\Delta^0 f(3) + \binom{n-3}{1}\Delta^1 f(3) + \binom{n-3}{2}\Delta^2 f(3) \\
&= 12\binom{n-3}{0} + 8\binom{n-3}{1} + 2\binom{n-3}{2} \\
&= 12 + 8(n-3) + (n-3)(n-4) \\
&= n^2 + n \\
&= n(n+1).
\end{aligned}$$

Já para o item b), como determinamos o termo geral da função, assim, podemos completar a tabela diferença que é

Tabela 24: Tabela de diferenças de ordem 0.

$\Delta^p f(n)$ \ n	0	1	2	3	4	$\cdots$
$f(n)$	0	2	6	12	20	$\cdots$
$\Delta f(n)$	2	4	6	8	$\cdots$	
$\Delta^2 f(n)$	2	2	2	$\cdots$		
$\Delta^3 f(n)$	0	0	$\cdots$			

Fonte: Autoria própria (2021).

Agora, aplicando o Teorema 4.3, temos

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \binom{n-k+1}{i+1} \Delta^i f(k).$$

Fazendo $p = 2$ e $k = 0$, teremos

$$S_2(n) = \sum_{i=0}^{2} \binom{n+1}{i+1} \Delta^i f(0).$$

Expandindo, substituindo os valores da primeira coluna da tabela e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \binom{n+1}{1}\Delta^0 f(0) + \binom{n+1}{2}\Delta^1 f(0) + \binom{n+1}{3}\Delta^2 f(0) \\ &= 2\binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3} \\ &= \frac{n^3}{3} + n^2 + \frac{2n}{3} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \end{aligned}$$

$\square$

Para finalizarmos, veremos a última aplicação destas fórmulas nos números poligonais.

5.1.3 Aplicações em Números Poligonais de l Lados

Temos, ainda como consequência das progressões aritméticas de ordem superior, que os números poligonais estão em progressões aritméticas de ordem 2.

Definição 5.1.2. (Números Poligonais de l Lados)
Chama-se número poligonal de l lados todo número que é soma de termos consecutivos da P.A. de primeiro termo 1 e de razão $l-2$, sendo $l \geq 3$ um inteiro arbitrariamente fixado. Isto é,

$$1,\ l-1,\ 2l-3,\ 3l-5,\ \ldots \tag{5.4}$$

Exemplo 5.9. *Dada a sequência (5.4). Determine*

a) *o termo geral dessa sequência.*

b) *o termo geral da sequência $(p_{n,l})$ dos números poligonais de l lados.*

c) *a expressão geral para a soma dos n primeiros termos da sequência $(p_{n,l})$.*

Solução: Vejamos o item a). Para determinarmos o termo geral, usaremos o item (2) do Teorema 5.1, assim

$$a_n \ = \ \sum_{i=0}^{m} \binom{n-k}{i} \Delta^i a_k.$$

Substituindo, a_n por $a_{n,l}$, fazendo $m=1$ e $k=1$, temos

$$a_{n,l} \ = \ \sum_{i=0}^{1} \binom{n-1}{i} \Delta^i a_1.$$

Onde fica,

$$a_{n,l} = \binom{n-1}{0}\Delta^0 a_1 + \binom{n-1}{1}\Delta^1 a_1.$$

Na tabela 25, encontra-se os valores das diferenças de $a_{n,l}$, assim, teremos

Tabela 25: Tabela de diferenças de $a_{n,l}$.

$\Delta^p a_{n,l} \diagdown n$	1	2	3	4	$\cdots$
$a_{n,l}$	1	$l-1$	$2l-3$	$3l-5$	$\cdots$
$\Delta a_{n,l}$	$l-2$	$l-2$	$l-2$	$\cdots$	
$\Delta^2 a_{n,l}$	0	0	$\cdots$		

Fonte: Autoria própria (2021).

Expandindo, substituindo os volores da primeira coluna e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned} a_{n,l} &= \binom{n-1}{0} + (l-2)\binom{n-1}{1} \\ &= 1 + (n-1)(l-2) \\ &= nl - l - 2n + 3, \end{aligned}$$

para todo $l \geq 3$, com $l \in \mathbb{Z}$.

Para o item b), aplicando o Teorema 5.2, temos

$$S_m(n) = \sum_{i=0}^{m} \binom{n-k+1}{i+1}\Delta^i a_k.$$

Fazendo, $S_m(n) = p_{n,l}$, $m = 1$ e $k = 1$, teremos

$$p_{n,l} = \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i+1}\Delta^i a_1.$$

Agora, utilizando a primeira coluna da tabela 25 de diferença de a_n, em seguida, expandindo, substituindo e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned} p_{n,l} &= \binom{n}{1}\Delta^0 a_1 + \binom{n}{2}\Delta^1 a_1 \\ &= \binom{n}{1} + \binom{n}{2}(l-2) \\ &= n + \frac{n(n-1)(l-2)}{2} \\ &= \frac{(l-2)n^2 - ln}{2}. \end{aligned}$$

para todo $l \geq 3$, com $l \in \mathbb{Z}$.

Agora, para o item c), a soma dos n primeiros termos da sequência $(p_{n,l})$ é determinada usando novamente o Teorema 5.2, vejamos

$$S_m(n) = \sum_{i=0}^{m} \binom{n-k+1}{i+1}\Delta^i a_k.$$

Fazendo, $S_m(n) = S_{p_l}(n)$, $m = 2$ e $k = 1$, teremos

$$S_{p_l}(n) = \sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i+1}\Delta^i a_1.$$

Agora, construindo a tabela 26 de diferença de $p_{n,l}$, obtemos

Tabela 26: Tabela de diferenças de $p_{n,l}$.

$\Delta^p p_{n,l}$ \ n	1	2	3	4	$\cdots$
$p_{n,l}$	1	l	$3l-3$	$6l-8$	$\cdots$
$\Delta p_{n,l}$	$l-1$	$2l-3$	$3l-5$	$\cdots$	
$\Delta^2 p_{n,l}$	$l-2$	$l-2$	$\cdots$		
$\Delta^3 p_{n,l}$	0	$\cdots$			

Fonte: Autoria própria (2021).

Expandindo, substituindo os valores da primeira coluna e simplificando, obtemos

$$
\begin{aligned}
p_{n,l} &= \binom{n}{1}\Delta^0 a_1 + \binom{n}{2}\Delta^1 a_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 a_1 \\
&= \binom{n}{1} + \binom{n}{2}(l-1) + \binom{n}{3}(l-2) \\
&= n + \frac{(n^2-n)(l-1)}{2} + \frac{(n^3-3n^2+2n)(l-2)}{6} \\
&= \frac{(l-2)n^3 + 3n^2 - (l-5)n}{6},
\end{aligned}
$$

para todo $l \geq 3$, com $l \in \mathbb{Z}$. $\square$

Finalizamos aqui, as aplicações desta fórmula geral não recursiva nas funções polinomiais, aplicações nas progressões aritméticas de ordem superior e finalizamos fazendo aplicação desta nos números figurados.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por objetivo a busca de uma fórmula fechada não recursiva para a soma das funções polinomiais dos inteiros positivos, apresentando uma abordagem histórica simples e direta, desde a descoberta de métodos e fórmulas, fórmulas essas que eram investigadas desde há antiguidade por matemáticos de todo o mundo.

Pensamos ter atingido os objetivos a que nos propusemos, uma vez que, apresentaram-se alguns métodos mais usuais para a determinação da soma das funções polinomiais dos inteiros positivos, bem como para busca de uma fórmula fechada e não recursiva.

A necessidade de se redigir um texto com este tema, surge a partir do estudo da busca de uma fórmula fechada para a soma das funções polinomiais dos inteiros positivos, foi onde se deu o início deste trabalho. Por muito tempo, em minha mente, havia a certeza de que tal fórmula existia, e também da dificuldade em se encontrar bibliografia, que aborde este conteúdo. E apesar de sua aplicabilidade em inúmeros problemas da Matemática, nem sempre os alunos do Ensino Básico, nem mesmo os do Ensino Superior têm a oportunidade de constatarem tais métodos, fórmulas nas aulas de Matemática. Assim, pensamos que este trabalho poderá ser útil a quem queira conhecer ou ensinar um método, uma fórmula para a soma das funções polinomiais dos inteiros positivos.

Por este motivo, buscamos elaborar um material no assunto que compilasse questões históricas, teóricas e aplicadas sobre as somas das funções polinomiais dos inteiros positivos, com o intuito de que este conhecimento pudesse ser utilizado para enriquecer as aulas, tanto no Ensino Básico quanto no Ensino Superior.

Acredito que toda a pesquisa realizada para a elaboração da dissertação me proporcionou um grande enriquecimento teórico e aplicado sobre o assunto. Naturalmente, não se cobriram todos os desenvolvimentos deste assunto, que poderão ser objeto de trabalho futuro.

Referências

BARROSO, L. C. et al. Calculo numerico (com aplicaçoes).[sl]: Harbra, 1987.

BEERY, J. *Sums of powers of positive integers*. 2009. `https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/sums-of-powers-of-positive-integers`.

BERMÚDEZ, T.; MARTINÓN, A.; NODA, J. A. Arithmetic progressions and its applications to (m, q)-isometries: a survey. *arXiv preprint arXiv:1409.1160*, 2014.

CAMINHA, A. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

COEN, L. E. S. Sums of powers and the bernoulli numbers. 1996.

FILHO, E. de A. *Teoria elementar dos números*. [S.l.]: Nobel, 1981.

HERSHEY, D. *Transport analysis*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

LEVY, H.; LESSMAN, F. *Finite difference equations*. [S.l.]: Courier Corporation, 1992.

LIMA, E. L. Curso de análise vol 1. 11a edição. *Rio de Janeiro: IMPA*, 2004.

LIMA, E. L. *Números e funções reais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

LUÍS, R. D. G. *Equações de diferenças e aplicações*. Tese (Doutorado) — Universidade da Madeira, 2006.

MARQUES, M. S. d. F. *Teoria da medida*. [S.l.]: UNICAMP, 2009.

MICKENS, R. E. *Difference equations*. [S.l.]: Van Nostrand Reinhold New York, 1987. v. 13.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. Matemática discreta. *Rio de Janeiro: SBM*, p. 16, 2015.

NETO, A. C. M. Tópicos de matemática elementar: polinômios. *V*, v. 6, p. 23–29, 2012.

NETO, A. C. M. Fundamentos de cálculo. *Rio de Janeiro: SBM*, 2015.

SILVA, G. L. Novas seqüências aritméticas e geométricas. *Brasılia-DF: THESAURUS EDITORA*, 2000.