



**Anderson de Oliveira Melo Silva**

**Diálogos entre Histórias da Matemática e  
Práticas Experimentais na Escola Básica**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Christine Sertã Costa

Rio de Janeiro,  
Maio de 2021



**Anderson de Oliveira Melo Silva**

**Diálogos entre Histórias da Matemática e  
Práticas Experimentais na Escola Básica**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

**Profa. Christine Sertã Costa**

Orientadora

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Profa. Tatiana Fernandes Sodero**

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. Marcos Craiser**

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. Diego Matos Pinto**

UNI-Rio

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem autorização da universidade, do autor e da orientadora.

## Anderson de Oliveira Melo Silva

Graduou-se em Licenciatura em Física pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) em 1999 e Licenciatura em Matemática pelo Universidade Fluminense (UFF) / CEDERJ em 2011. Atualmente é professor das redes municipais de ensino do Rio de Janeiro e de Mangaratiba.

### Ficha Catalográfica

Silva, Anderson de Oliveira Melo

Diálogos entre histórias da Matemática e práticas experimentais na escola básica / Anderson de Oliveira Melo Silva ; orientadora: Christine Sertã Costa. – 2021.

110 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2021.

Inclui bibliografia

1. Matemática - Teses. 2. História da Matemática. 3. Atividades experimentais. 4. Teorema de Tales. 5. Teorema de Pitágoras. 6. Equação do 2. grau. I. Costa, Christine Sertã. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título

CDD: 510

## Agradecimentos

A Deus, inteligência suprema e causa primária de todas as coisas.

A meus pais Ivan e Nerly que sempre me incentivaram no caminho do conhecimento.

A minha esposa Debora e filha Andressa, que sempre compreenderam o motivo de estar muitas vezes ausente.

A CAPES pelo incentivo ao aperfeiçoamento do professor de Matemática através deste programa de Mestrado.

A PUC-RJ pela sua participação neste programa e pela sensibilidade de entender a rotina semanal do professor da Educação Básica e se dispor a realizar este programa aos sábados e de forma gratuita.

A minha orientadora, Professora Christine, por nos fazer enxergar, desde o início do curso, o tamanho do nosso desafio e da nossa responsabilidade ao fazer parte deste programa e também por ser compreensiva em nossos momentos de dificuldade.

Aos professores do programa, que com muita dedicação contribuíram de forma muito significativa para minha formação.

Aos meus queridos colegas de turma. Incansáveis parceiros nesta grande jornada.

A minha prima Marina por várias vezes ter me ajudado conseguindo muito dos livros usados como referência para esta dissertação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

## Resumo

Silva, Anderson de Oliveira Melo; Costa, Christine Sertã. **Diálogos entre Histórias da Matemática e Práticas Experimentais na Escola Básica.** Rio de Janeiro, 2021. 110p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O objetivo deste trabalho é propor atividades experimentais, fundamentadas na História da Matemática, que problematizem o conteúdo ensinado no 9º ano do ensino fundamental da escola básica, com base nos seus processos históricos de produção provocando o diálogo entre duas abordagens que fundamentam o presente estudo: a história da matemática e o ensino por atividades experimentais. Acreditamos que esse diálogo possibilita o alcance de objetivos específicos importantes: “humanização da matemática” possibilitando que alunos deste ano de escolaridade compreendam a matemática como produto da necessidade humana e “significação da matemática” promovendo o aprendizado através do desenvolvimento de atividades práticas que tragam sentido e motivação à aprendizagem de novos saberes. Três conteúdos tradicionais que constam no currículo deste segmento são apresentados com base na conjugação simultânea destas abordagens: o teorema de Tales, o teorema de Pitágoras e a equação do 2º grau. Para cada um deles, apresentamos uma abordagem histórica, levantamos reflexões importantes sobre construções e autorias e sugerimos atividades fundamentadas no diálogo entre história e prática como propostas a serem desenvolvidas juntos aos alunos.

## Palavras-chave

História da Matemática; Atividades Experimentais; Teorema de Tales; Teorema de Pitágoras; Equação do 2º Grau.

## Abstract

Silva, Anderson de Oliveira Melo; Costa, Christine Sertã. **Dialogues between Mathematics Stories and Experimental Practices in Elementary School**. Rio de Janeiro, 2021. 110 p. Master's Dissertation - Department of Mathematics, Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro.

The objective of this work is to propose experimental activities, based on the History of Mathematics, that problematize the content taught in the 9th grade of elementary school, based on their historical production processes, provoking a dialogue between two approaches that underlie the present study: the history of mathematics and teaching by experimental activities. We believe that this dialogue enables the achievement of important specific objectives: “humanization of mathematics” enabling students of this school year to understand mathematics as a product of human need and “meaning of mathematics” promoting learning through the development of practical activities that bring meaning and motivation to learn new knowledge. Three traditional contents that appear in the curriculum of this segment are presented based on the simultaneous combination of these approaches: the Tales theorem, the Pythagorean theorem and the 2nd degree equation. For each of them, we present a historical approach, raise important reflections on constructions and authorship and suggest activities based on the dialogue between history and practice as proposals to be developed together with the students.

## Keywords

History of Mathematics; Experimental Activities; Tales Theorem; Pythagorean Theorem; 2nd Degree Equation.

## Sumário

1. Introdução .....	14
2. Fundamentação Teórica.....	18
2.1. História da Matemática como Recurso Didático.....	18
2.2. As Atividades Experimentais na Aula de Matemática.....	22
2.3. História da Matemática e Atividade Experimental: Uma Possibilidade para o Ensino de Matemática.....	24
3. Semelhança de Triângulos.....	27
3.1. O Cálculo da Medida da Altura da Pirâmide.....	27
3.2. O Teorema que leva o nome de Tales.....	31
3.3. Consequência do Teorema que leva o nome de Tales.....	37
3.4. Proposta de Atividade 1.....	42
3.4.1. Etapas do Ensino de Matemática por Atividade Experimental para a Atividade o Desafio da Altura da Pirâmide.....	42
3.4.2. Atividade 1: O Desafio da Altura da Pirâmide.....	43
4. Uma relação entre as medidas dos lados do triângulo retângulo.....	47
4.1. A relação na Babilônia.....	47
4.2. A relação no Egito.....	49
4.3. A relação na China.....	50
4.4. A relação na Índia.....	52
4.5. A relação na Grécia.....	52
4.6. A relação de Pitágoras.....	57
4.7. Proposta de Atividade 2.....	61
4.7.1. Etapas do Ensino de Matemática por Atividade Experimental para a Atividade Refletindo sobre o Teorema de Pitágoras.....	61
4.7.2. Atividade 2: Refletindo sobre o Teorema de Pitágoras.....	64
4.8. Proposta de Atividade 3.....	68
4.8.1. Etapas do Ensino de Matemática por Atividade Experimental para a Atividade Os Números Figurados e o Teorema de Pitágoras.....	68

4.8.2. Atividade 3: Os Número Figurados e o Teorema de Pitágoras.....	70
5. A Equação do 2º Grau.....	74
5.1. A Equação do 2º Grau no Egito.....	75
5.2. A Equação do 2º Grau na Babilônia.....	79
5.2.1. O Problema 1 da Placa BM 13901.....	80
5.2.2. O Problema 2 da Placa BC 13901.....	82
5.2.3. Um Problema da Placa YBC 4663.....	83
5.3. A Equação do 2º Grau na Índia: Bháskara.....	86
5.4. A Equação do 2º Grau no Império Islâmico: Al-Khwarizmi.....	92
5.5. Proposta de Atividade 4.....	97
5.5.1. Etapa do Ensino de Matemática por Atividade Experimental para a Atividade Completando o Quadrado e Resolvendo a Equação.....	98
5.5.2. Atividade 4: Completando Quadrados e Resolvendo Equações do 2º grau .....	100
6. Considerações Finais.....	103
7. Referência Bibliográficas.....	105

## Lista de Tabelas

Tabela 1 - Habilidades 9, 12, 13 e 14, prevista pela Base Nacional Comum Curricular, para o 9º ano.....	16
Tabela 2 – Ternos pitagóricos presentes no tablete Plimpton 322, onde os números a, b e c são relacionados pela expressão $a^2 + b^2 = c^2$ .....	48
Tabela 3 – Desenvolvimento do Problema 1 da Placa BM 13901 nos sistemas sexagesimal e decimal.....	81
Tabela 4 – Desenvolvimento do Problema2 da Placa BM 13901 nos sistemas sexagesimal e decimal.....	83
Tabela 5 – Problema da Placa YBC 4663 desenvolvido nos sistemas sexagesimal e decimal.....	85
Tabela 6 – Tipos de equações descritas por Al-Khwarizmi.....	94

## Lista de Figuras

Figura 1 – Ensino de Matemática por Atividade Experimental.....	23
Figura 2 – Mapa da Grécia à época de Tales.....	28
Figura 3 – Imagem de Tales.....	28
Figura 4 – Versão de Plutarco para o cálculo da altura da pirâmide.....	29
Figura 5 – Versão de Hierônimos para o cálculo da altura da pirâmide...	29
Figura 6 – Congruência entre os ângulos dos triângulos formados pelas alturas, raios solares e respectivas sombras.....	30
Figura 7 – Feixe de luz solar que atinge a Terra.....	30
Figura 8 – Feixe de retas paralelas ( $a$ , $b$ , $c$ e $d$ ), cortadas pela reta transversal $t$ .....	31
Figura 9 – Figura utilizada por Bianchini (2018) para demonstrar a congruência de segmentos pertencentes a transversais que cortam um feixe de paralelas.....	32
Figura 10 – Figura utilizada por Bianchini (2018) para demonstrar a congruência de segmentos pertencentes a transversais que cortam um feixe de paralelas.....	32
Figura 11 – Figura utilizada por Bianchini (2018) para demonstrar o teorema de Tales.....	33
Figura 12 – Teorema da Linhas Proporcionais, da 66ª edição do Livro Matemática para a Terceira Série Ginásial, editado em 1963.....	35
Figura 13 – Teorema da Linhas Proporcionais, da 66ª edição do Livro Matemática para a Terceira Série Ginásial, editado em 1963.....	36

Figura 14 – Figura utilizada por Bianchini (2018) para a demonstração da consequência do Teorema de Tales.....	37
Figura 15 – Figura utilizada por Bianchini (2018) para a demonstração da consequência do Teorema de Tales.....	37
Figura 16 – Figura utilizada Por Euclides para demonstrar a proposição 2 do Livro VI dos Elementos.....	38
Figura 17 – Prova utilizada por Euclides.....	40
Figura 18 – Tablete Plimpton 322.....	48
Figura 19 – Cordas usadas pelos egípcios para construir o triângulo retângulo.....	49
Figura 20 – O problema do bambu quebrado.....	50
Figura 21 – Demonstração do teorema de Pitágoras presente no livro Chou Pei.....	51
Figura 22 – Figura utilizada por Euclides para demonstrar o teorema de Pitágoras.....	53
Figura 23 – No triângulo ABC, retângulo em A, os lados $\overline{AB}$ , $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são, respectivamente, bases dos quadrados ABFG, BCED e ACKH.....	54
Figura 24 – Pares de ângulos adjacentes e retos $\widehat{B\hat{A}G}$ e $\widehat{B\hat{A}C}$ , $\widehat{B\hat{A}C}$ e $\widehat{H\hat{A}C}$ , respectivamente sobre as retas.....	54
Figura 25 – Congruência entre os triângulos DBA e FBC.....	55
Figura 26 – Relação entre a área do triângulo ABD com a área do quadrilátero ABDH e entre a área do triângulo FBC com a área do quadrado ABFG.....	55
Figura 27 – Congruência entre os triângulos BCK e ACE.....	56

Figura 28 – Relação entre a área do triângulo ACE com a área do quadrilátero ACEH e entre a área do triângulo BCK com a área do quadrado ACKH. ....	56
Figura 29 – Números triangulares (essas configurações representavam o que hoje escrevemos como 1, 3, 6, 10, 15, 21) .....	58
Figura 30 – Números quadrados. (essas configurações representavam o que hoje escrevemos como os quadrados 1, 4, 9, 16 = $1^2$ , $2^2$ , $3^2$ , $4^2$ ).....	58
Figura 31 – Números pentagonais (essas configurações representavam o que hoje escrevemos como 1, 5, 12, 22) .....	59
Figura 32 – O número quadrado 16 sendo o resultado da adição dos números triangulares sucessivos 6 e 10.....	59
Figura 33 – Sequência de obtenção de números quadrados através de gnomons, partes escurecidas em cada número quadrado.....	60
Figura 34 – Marcação na folha de papel 40 kg, para dobradura e corte..	62
Figura 35 – Dobradura e corte das folhas.....	63
Figura 36 – Dobradura e corte dos quadrados.....	63
Figura 37 – Comparação das áreas dos quadrados por corte e sobreposição.....	64
Figura 38 – Formação de um triângulo retângulo com os lados dos quadrados.....	64
Figura 39 – Desenho do número figurado quadrado 10.....	69
Figura 40 – Destaque do número figurado quadrado 6... ..	69
Figura 41 – Pontos não destacados na forma do número figurado quadrado 8.....	69
Figura 42 – Construção de triângulos retângulos no papel quadriculado.....	70

Figura 43 – Charge representando o ensino da equação do 2º grau na escola básica.....	74
Figura 44 – Tabela de quadrados de números inteiros e fracionários.....	77
Figura 45 – Imagem de Bháskara.....	86
Figura 46 – Imagem de Al-Khwarizmi.....	93
Figura 47 – Figura utilizado por Al-Khwarizmi para resolver o problema resolver o problema de completar o quadrado.....	95
Figura 48 – Figura utilizado por Al-Khwarizmi para resolver o problema resolver o problema de completar o quadrado.....	95
Figura 49 – Figura utilizado por Al-Khwarizmi para resolver o problema resolver o problema de completar o quadrado.....	96
Figura 50 – Relação adotada para as peças do material dourado no processo de completar o quadrado.....	98
Figura 51 – Configuração a ser formada com as peças do material dourado.....	99
Figura 52 – Expressão algébrica referente a configuração formada com as peças do material dourado.....	99

# 1

## Introdução

Ao refletirmos sobre nossas vidas é interessante perceber como somos impulsionados a seguir caminhos que não planejamos! Minha primeira graduação foi em Licenciatura em Física, concluída no ano de 1999, pela Universidade Federal do Rio de Janeiro e apesar disso, minha trajetória profissional me levou a lecionar matemática. Assim, mesmo sendo graduado em Física, naquele mesmo ano ingressei no quadro de professores da Prefeitura Municipal do Rio de Janeiro como professor de matemática e em 2005 no quadro de professores da Prefeitura Municipal de Mangaratiba também para lecionar esta disciplina. Diante destes fatos, decidi recomeçar minha formação e em 2006 ingressei na graduação à distância em Matemática pela Universidade Federal Fluminense através do CEDERJ, tendo concluído em 2011.

Como profissional docente, entendo que os conteúdos matemáticos fazem parte da história do desenvolvimento intelectual humano, sendo parte do seu desenvolvimento enquanto ser social. Constató também que as necessidades das sociedades ao longo do tempo levaram ao desenvolvimento da matemática através de vários povos e em várias épocas e, muitas vezes, com o objetivo de resolver problemas, ou de entender o mundo e de agir sobre ele em seu benefício. Percebo, entretanto, que a escola não maximiza a potencialidade que a história possibilita e o que geralmente ocorre nas aulas de matemática é apresentação de conteúdos isolados, muitas vezes sem objetivos claros, sem motivações que aproximem o conteúdo do alunado e sem significado para que este aluno procure desenvolver, de forma autônoma, seu aprendizado. Todas essas reflexões foram, sem dúvida, determinantes para a escolha do tema do meu estudo.

Outro fato que me motivou a desenvolver a presente pesquisa foi identificado durante a minha trajetória profissional iniciada em 1997. Neste percurso e até o momento, tive a oportunidade de participar de vários programas de formação continuada em física e em matemática, voltados para atividades práticas em sala de aula. Cito, como exemplos, o Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Física oferecido pelo Laboratório Didático do Instituto de Física da UFRJ (LADIF), o Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II voltado para

professores de matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental e os programas PRO-LETRAMENTO e Programa Nacional de Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) voltados para professores de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, onde atuei como formador. Em todos esses programas, aprendi a desenvolver práticas pedagógicas junto a professores e alunos e percebi que as atividades práticas constituem um excelente recurso pedagógico para o ensino.

Com base nestas reflexões e vivências, este trabalho procura entrelaçar o ensino de matemática com questões históricas e aplicações práticas. Primeiro, algumas reflexões gerais de cunho teórico sobre esses dois temas são discutidas. Posteriormente, o contexto histórico de alguns conteúdos matemáticos, presentes no 9º ano do ensino fundamental, são apresentados e atividades práticas experimentais sobre esses temas são sugeridas. Espera-se que esse diálogo entre história e práticas experimentais permita levar os alunos a dar mais significado aos conceitos trabalhados e a perceber sua utilidade e aplicabilidade. A escolha por conteúdos do 9º ano foi feita pelo fato de há bastante tempo estar trabalhando com a matemática do ensino fundamental e ter mais afinidade com estes conteúdos.

Atualmente, a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) é o documento oficial e norteador do currículo escolar. Seu conteúdo relaciona para cada área do conhecimento e para cada ano de escolaridade, uma série de habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos até o final de cada ano letivo. Para o 9º ano, algumas das habilidades relacionadas são fortemente marcadas por questões históricas e também pela possibilidade de serem abordadas de forma experimental. Dentre elas escolhemos quatro para desenvolver no presente trabalho através da apresentação de seus contextos históricos e sugestão de atividades práticas experimentais. São elas as habilidades 9, 12, 13 e 14, redigidas da seguinte forma na BNCC:

Unidade Temática	Objetos de Conhecimento	Código	Habilidades
Álgebra	Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	EF09MA09	Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.
Geometria	Semelhança de triângulos	EF09MA 12	Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
	Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração	EF09MA 13	Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
		EF09MA 14	Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Tabela 1: Habilidades 9, 12, 13 e 14, previstas pela Base Nacional Comum Curricular, para o 9º ano.

Fonte: Base Nacional Comum Curricular

Assim, nosso objetivo ao apresentar este trabalho é referendar a importância da história da matemática e das práticas experimentais na escola básica além de atuar na matriz curricular do 9º ano do ensino fundamental propondo metodologias que permitam aos alunos deste ano de escolaridade perceber mais significado nos conteúdos matemáticos. Esperamos que este trabalho contribua de forma significativa para a ampla formação do aluno do 9º ano do ensino fundamental e para o aumento do conhecimento do professor da escola básica em geral.

Este trabalho contempla mais quatro capítulos, além das considerações finais. No capítulo 2 apresentamos a fundamentação teórica que justifica a utilização da história da matemática como recurso didático e motivador para o ensino de matemática, os pressupostos da utilização de atividades experimentais nas aulas de matemática e ainda as vantagens da conjugação destas metodologias. O Capítulo 3 contém a abordagem histórica envolvendo o tema semelhança de

triângulos através do feito realizado por Tales de Mileto e apresenta uma discussão sobre a autoria do teorema apresentado nas escolas e usualmente denominado Teorema de Tales. O Capítulo 4 destaca uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo apresentando, de forma cronológica, os povos que já a conheciam. Apresenta também uma breve biografia de Pitágoras e o que teria sido a relação estabelecida por ele e que leva seu nome. Por fim, a demonstração de Euclides para o referido teorema e uma proposta para sala de aula também estão explicitadas neste capítulo. O capítulo 5 apresenta algumas maneiras de como a equação do 2º grau foi abordada em diferentes épocas e por diferentes civilizações passando pela formulação de *Bhaskara* para a sua suposta solução até chegar aos desenvolvimentos realizados pelos árabes com destaque ao matemático Al-Khwarizmi. E, como nos temas anteriores, este capítulo também apresenta uma prática para sala de aula sobre o tema. O capítulo final traz, nas considerações elencadas, nossa visão sobre a importância da escola, a importância do ensino de matemática, algumas possibilidades que podem se abrir a partir deste trabalho e sugestões de outros assuntos que podem ser abordados com base nestas metodologias.

## 2

### Fundamentação Teórica

Conforme apresentado na introdução, o objetivo deste trabalho é propor a utilização de forma conjunta de duas metodologias voltadas para o ensino de matemática: a história da matemática e a realização de atividades experimentais. Como isoladamente cada uma delas possuem seus próprios pressupostos teóricos, julgamos necessário apresentá-los para que o leitor possa conhecê-los. Assim, este capítulo apresenta tais pressupostos juntamente com alguns autores que corroboram com estas metodologias e por fim apresenta uma fundamentação teórica para sua combinação.

#### 2.1

##### História da Matemática como Recurso Didático

É muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos em virtude dos problemas de então, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências que nos são estranhas. Do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta (D'Ambrosio, 2009, p. 31).

A narrativa de D'Ambrósio (2009) descreve uma situação recorrente nas aulas de matemática, especialmente na escola básica: apresentar conteúdos através de definições, demonstrações e exemplos, dissociados das necessidades históricas que levaram ao seu surgimento, sua aplicação ou seu contexto no mundo real. Essa abordagem constantemente leva a questionamentos por parte dos alunos em relação a utilidade e aplicabilidade dos conteúdos matemáticos. Perguntas como *“Professor, para que temos que aprender esse assunto?”* ou *“Professor, onde utilizaremos esse assunto em nossas vidas?”* são usuais no chão da escola. Questionamentos dessa natureza não são fáceis de serem respondidos e, frequentemente, nós professores nos valemos de argumentos do tipo *“Esses são conteúdos importantes para o desenvolvimento do raciocínio lógico”* ou *“Esses são assuntos exigidos em provas de concurso”* ou ainda *“Tais conteúdos são bases para conhecimentos para os próximos anos”*. Para Ávila (2010) nestas situações os questionamentos dos alunos são pertinentes pois é natural que sintam

necessidade de justificativas adequadas para dar significado aquilo que lhe é ensinado. Para o autor, as respostas às questões colocadas precisam ser claras, satisfazer a curiosidade do alunado, estimular sua mente e motivá-lo. Dessa forma, um possível desinteresse se transforma em participação ativa no aprendizado.

Nesse sentido, Miguel e Miorim (2011) apontam que no processo de ensino-aprendizagem de matemática autores como Morris Kline (1972) e Jones (1969) já defendem o entrelaçamento do conteúdo com sua história. Tais autores afirmam que esse diálogo possibilita melhor entendimento da matemática e um incentivo à não apatia possibilitando ensino mais contextualizado e aprendizagem mais significativa.

Muitos autores defendem a importância da história no processo de ensino-aprendizagem por considerar que isso possibilitaria a desmistificação da Matemática e o estímulo à não alienação do seu ensino. Os defensores desse ponto de vista acreditam que a forma lógica e emplumada através da qual o conteúdo matemático é normalmente exposto ao aluno, não reflete o modo com esse conhecimento foi historicamente produzido. Então caberia à história estabelecer essa consonância desmistificando, portanto, os cursos regulares de Matemática, que transmitem a falsa impressão de que a Matemática é harmoniosa, de que está pronta e acabada, etc. (Miguel e Miorim 2011, p. 52)

Segundo D'Ambrosio (1999), é um erro desvincular a matemática das outras atividades humanas pois, em todas as civilizações, desenvolveu-se alguma forma de fazer matemática cujas ideias partiram da evolução humana, seja através da definição de estratégias de ação para a iteração com o ambiente, seja buscando explicações sobre fatos e fenômenos da natureza. Enfim, em todos os momentos da história e em todas as civilizações, o desenvolvimento da matemática esteve presente.

Saito (2016) afirma que a história da matemática permite abordar o conhecimento matemático através de uma complexa rede de relações que relacionam diferentes concepções, desconectando-os das malhas formais da matemática moderna e reintegrando-os ao processo histórico que permite ressignificar as amarras conceituais e propor novas estratégias de ensino. Essas ideias dialogam com as ideias de Gomide (1996) sobre a importância de se mostrar todo o esforço desenvolvido para se chegar em resultados que atualmente, por vezes, nos parecem triviais.

A história das dificuldades, esforço, tempo envolvidos em toda a evolução da matemática dá a medida da grandeza desta realização humana. Não deixa persistir a impressão, que o ensino pode dar, de algo que caiu do céu pronto e perfeito. Tudo, inclusive o que já nos parece trivial, agora que sabemos alguma coisa, tudo custou esforço, erros, tentativas até que um resultado fosse construído. E é a história desse esforço permanente que se procura retratar (Gomide 1996 apud Boyer, 2012, p. 18).

Para Roque (2012) os historiadores têm o cuidado de evitar estudar a matemática do passado apenas com a matemática de hoje. A autora afirma que o anacronismo é derrotado ao se vivenciar problemas que caracterizavam a complexidade do pensamento em determinada época, considerando fatores científicos, culturais e filosóficos com suas concepções temporais. Apenas dessa forma seria possível compreender como os problemas surgiram e em que ambiente objetos foram definidos, como métodos foram inventados e como resultados foram estabelecidos.

Chaquiam (2017) afirma que nas cinco últimas décadas houve um aumento significativo no desenvolvimento de pesquisas em história das ciências e em particular na história da matemática. Esse incremento contribuiu para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de matemática, permitindo a observação dos diversos aspectos do seu desenvolvimento e a percepção dos desafios e esforços enfrentados que culminaram nas teorias que hoje são apresentadas como acabadas. O autor ainda cita Vianna (1998) que, em resumo, defende a contribuição da história da matemática para:

- i. Satisfazer nosso desejo de saber como os conceitos da matemática se originaram e desenvolveram;
- ii. O ensino e a pesquisa mediante o estudo dos autores clássicos, o que vem a ser uma satisfação em si mesmo;
- iii. Entendermos nossa herança cultural através das relações da matemática com as outras ciências, em particular a física e a astronomia; e também com as artes, a religião, a filosofia e as técnicas artesanais;
- iv. O encontro entre o especialista em Matemática e profissionais de outras áreas científicas;
- v. Oferecer um pano de fundo para a compreensão das tendências da educação matemática no passado e no presente e
- vi. Ilustrar e tornar mais interessantes o ensino da matemática. (VIANNA, 1998, p. 3, apud Chaquiam, 2017, p. 15)

A história da matemática permite apresentar a matemática sob uma nova abordagem, tornando-a mais contextualizada, mais significativa, mais interdisciplinar, mais criativa e mais humanizada. Suas contribuições e

possibilidades são apresentadas também em documentos oficiais e norteadores do currículo escolar, como os antigos Parâmetros Curriculares Nacionais (os PCN's)

Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático. ... Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.

(Brasil, 1997, p. 34.)

e a Base Nacional Comum Curricular (a BNCC),

Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (Brasil, 2017, p. 267).

A história da matemática torna-se assim um recurso que pode proporcionar ao aluno da educação básica uma experiência legítima de construção de conhecimento histórico e prático; um agente motivador da aprendizagem, que pode levar a aquisição dos conteúdos matemáticos de forma mais dinâmica, significativa e contextualizada, permitindo a esse aluno perceber que a matemática sempre fez parte do conhecimento humano e contribui para seu desenvolvimento intelectual.

Em conformidade com os autores acima citados, e com a percepção do fato de que a matriz curricular da disciplina de matemática do 9º ano do ensino fundamental está repleta de possibilidades envolvendo o conhecimento histórico, a história da matemática pode ser o elemento que permita aos alunos deste ano de escolaridade perceber que o conhecimento matemático provém da necessidade humana de resolver problemas, em vários locais e em várias épocas diferentes e, numa perspectiva empática, tentar colocar esse aluno nas situações vivenciadas por aqueles que contribuíram para o desenvolvimento do conhecimento matemático.

## 2.2

### As Atividades Experimentais nas Aulas de Matemática

Sá (1999) acredita que para que o ensino de matemática contribua na formação do aluno, o professor deve mudar sua postura e permitir que esse aluno descubra e redescubra resultados matemáticos, sob sua orientação. Ele aponta o método científico como uma possível forma de possibilitar ao aluno a descoberta de resultados. O autor define ainda um método, chamado método da Descoberta, que tem como base a utilização das etapas do método científico na construção do conhecimento e que permite estimular nos alunos habilidades como observação, análise, pesquisa, avaliação, inferência, testagem, planejamento, medição e conclusão. Uma das técnicas envolvidas neste método é a técnica da Redescoberta, que se caracteriza por incentivar que o professor direcione a construção do conhecimento do aluno a partir da demonstração e do trabalho experimental (individual ou em grupos). Na demonstração, o professor realiza todo o experimento e o aluno participa através de observação, registro, levantamento de hipóteses e construção de suas conclusões. Já no trabalho experimental, o experimento é totalmente realizado pelos alunos, cabendo ao professor sua introdução e supervisão.

Sá (2019) descreve o ensino por atividade como uma metodologia que exige a participação do aluno por meio de experimentos com materiais manipulativos para vivenciar o processo de descoberta. Sobre o processo, o autor assinala algumas características: deve ser direcionado e estruturado, deve estar de acordo com o conteúdo, deve desenvolver habilidades para além dos conteúdos, sequencial, deve considerar os conhecimentos prévios dos alunos, não deve dispensar a participação do professor, deve ser adequado para a formação de conceitos e acesso a resultados de operações e algoritmos e deve permitir a iteração entre aluno e professor.

Em um trabalho publicado pouco depois, Sá (2020), considera mais adequado denominar tal metodologia de Ensino de Matemática por Atividade Experimental e afirma que esta metodologia possui as seguintes etapas: organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização, conforme ilustrada na figura 1.



Figura 1: Ensino de Matemática por Atividade Experimental

Fonte: Autor

Na etapa organização, a turma deve ser dividida em grupos entre 2 e 4 alunos; não recomendando menos que 2 alunos para que haja discussão de ideias e não mais que 4 alunos para que não haja dispersão. A etapa apresentação, é onde se apresenta a atividade experimental; quando o professor deve distribuir roteiro (se possível impresso) e o material (se possível organizados em kits) para a execução da tarefa; cabendo aos alunos prestar atenção às orientações. A execução da tarefa é onde os grupos realizam o experimento, manipulam os materiais, realizam medidas, fazem observações e comparações; cabendo ao professor supervisionar o processo e retirar dúvidas. A etapa seguinte é o registro, onde cada grupo registra de forma escrita as informações, sendo ideal que haja no roteiro de atividades espaço destinado a este procedimento. Na análise, cada grupo deve avaliar as informações registradas e descobrir uma relação entre as informações, que é o propósito do experimento. Por fim, a institucionalização é o momento em que se constrói uma conclusão da turma com base nas conclusões de cada grupo.

Pires (2016) utiliza o termo aula prática para descrever a metodologia na qual os alunos utilizam materiais manipulativos para executar algum experimento que induz a construção de conceitos, que permita verificar teoremas e leis e que possibilite ao aluno ser parte ativa no processo de aprendizagem.

O autor observa ainda que nesta metodologia, uma vez aprendido o conceito através do processo, o aluno tem a tendência a não esquecer e que pode refazer os passos de construção dos conceitos uma vez esquecidos.

O ensino de matemática através de atividades experimentais é um recurso que pode contribuir de forma efetiva para a aquisição do conhecimento. Esta estratégia didática possibilita ao aluno ser o protagonista no processo de aprendizagem, uma vez que a aquisição de conteúdos matemáticos é muitas vezes facilitada com a manipulação de materiais ou a realização de atividades.

A atividade experimental é uma metodologia que pode auxiliar a aquisição do conhecimento matemático pois permite ao aluno se envolver com mais

efetividade na aula através da manipulação de experimentos que permitirão a observação de fenômenos, a formulação de hipóteses, a realização de conclusões e conseqüentemente a construção de conceitos. Neste sentido, em consonância com os autores mencionados, acreditamos que o aluno, ao desenvolver um experimento, assume um papel de protagonista e torna-se parte ativa no processo de aprendizado, que passa a ser um processo construtivo e dinâmico.

### 2.3

#### **História da Matemática e Atividade Experimental: Uma Possibilidade para o Ensino de Matemática**

A investigação da eficiência da aplicação conjunta dessas duas estratégias de ensino foi realizada por Mendes (2001) que propôs uma abordagem metodológica envolvendo a história da matemática como elemento gerador do conhecimento matemático e tendo o construtivismo como referencial teórico básico do processo de ensino-aprendizagem. O autor define atividade construtivista como sendo o direcionamento didático adotado diante do processo construtivista de geração de conhecimento matemático, que produz criatividade e promove o perfil desafiador do aluno para construir ideias sobre o que aprende. Acrescenta que o ensino através de atividades efetiva os estímulos e constitui um processo contínuo de construção de conhecimento abrangendo a representação dos conceitos matemáticos por modos físico/visual, oral e simbólico.

Para o autor, o uso da história da matemática no ensino através de uma perspectiva construtivista conduz o aluno à redescoberta da matemática pelas situações históricas presentes em cada problematização. Ele explicita que conteúdos, após serem interpretados, experimentados e analisados permitem uma construção mais viva do conhecimento uma vez que o aluno vivencia o contexto histórico dos seus processos de construção. Assim os alunos estabelecem um procedimento de elaboração mental que permite a abstração e aquisição dos conceitos matemáticos envolvidos, apoiados nas atividades de redescoberta já que estas os colocam em situações desafiadoras ao investigar a solução de problemas.

Quando os aspectos históricos são incorporados às atividades de ensino-aprendizagem – junção construtivismo/história –, apresentam um caráter mais construtivo e útil à aprendizagem dos

tópicos matemáticos e isso faz com que os estudantes percebam o caráter investigatório presente na geração, organização e disseminação desses tópicos ao longo do seu desenvolvimento histórico. (Mendes 2001, p. 18)

O autor também afirma que a história da matemática permite a união do conhecimento cotidiano, do conhecimento escolar e do conhecimento científico e sua concretização se efetiva no uso de atividades construtivistas associadas ao conhecimento histórico da matemática. Por fim, conclui que a finalidade da proposta de apresentar os conteúdos matemáticos com base na história da matemática e sua respectiva consolidação da aprendizagem pautada em atividades manipulativas implica em uma efetiva participação do aluno na construção do conhecimento, constituindo-se no aspecto fundamental no processo de ensino-aprendizagem

A história da matemática é um agente de formação cognitivo em sala de aula e uma das metodologias mais eficazes de ensino da matemática é a que se baseia na utilização de atividades estruturadas segundo Fossa (2008). Sobre o aprendizado de matemática o autor ressalta a questão da motivação afirmando que é necessária muita concentração, fator que costuma provocar fadiga nos alunos. Essa exigência de um alto nível de concentração se justificaria pela forma como os conteúdos matemáticos são transmitidos: o apreço pela manipulação algébrica de algoritmos e a obediência aos procedimentos impostos pelo professor tornam a matemática sem sentido para muitos alunos. Para o autor, a história da matemática é a fundamentação teórico-metodológica que permite “humanizar” a matemática pois mostra como essa sempre fez parte da cultura humana e pode contribuir significativamente para a transmissão do conhecimento matemático. Apesar desta possibilidade, o autor também aponta críticas construtivas sobre este mesmo processo de transmissão de conhecimento afirmando que, segundo os construtivistas, a transmissão do conhecimento é um procedimento ativo na qual o sujeito constrói seu próprio conhecimento. Neste sentido, ele afirma que as metodologias mais eficazes de construção de conhecimento são baseadas na realização de atividades estruturadas já que estas levam o aluno a construir estruturas matemáticas por si só, conforme os conceitos construtivistas. O autor afirma também que há nestas atividades um componente intitulado redescoberta, já que os alunos não estão descobrindo novas verdades mas sim redescobrimo estruturas matemáticas já conhecidas por ele. Por fim, o autor afirma que em um

ambiente construtivista, através de atividades estruturadas, o aluno poderá vivenciar uma situação análoga à do pesquisador matemático de um determinado período passado. Assim sob a visão da história da matemática, e com apoio das atividades estruturadas, os alunos se defrontariam com problemas reais enfrentados pelos matemáticos de outras épocas e estariam participando ativamente da construção do próprio conhecimento.

Os próximos capítulos abordam, cada um deles, um tema do currículo básico de Matemática do 9º Ano do ensino fundamental que consideramos permitir a aplicação da metodologia aqui proposta: a semelhança de triângulos, o teorema de Pitágoras e a equação do 2º grau. Para cada tema foram abordados conceitos históricos relevantes da sua construção e construídas propostas de atividades que procuraram promover o diálogo entre a história e a prática.

### 3

## SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

A semelhança de triângulos é um conteúdo tradicional da matriz curricular do 9º ano do ensino fundamental e muito há a discorrer sobre ele. A relação obtida entre as medidas dos lados de triângulos semelhantes contribuiu com a projeção de uma grande personalidade da matemática, Tales de Mileto, uma vez que esse matemático utilizou tal relação para resolver um desafio importante proposto à época. Hoje seu nome é associado a um teorema que também faz parte da matriz do 9º ano: o Teorema de Tales. Particularmente, sempre questionei o porquê de tal teorema levar seu nome já que o desafio proposto e por ele resolvido não teve por base as relações do teorema que leva seu nome.

Assim, esta seção aborda um pouco da história deste conteúdo ao apresentar como este conhecimento foi utilizado para fazer história, um pouco sobre a vida de Tales de Mileto, como o nome de Tales foi associado a um teorema apresentado nas escolas e a primeira demonstração formal do Teorema de Tales. Por fim, uma proposta de uma atividade prática sobre o tema, utilizando as premissas desenvolvidas na fundamentação teórica já apresentada, foi elaborada e é aqui apresentada.

### 3.1

#### O CÁLCULO DA MEDIDA DA ALTURA DA PIRÂMIDE

Por volta do século VI a.C., os gregos tiveram acesso aos conhecimentos dos egípcios por conta do desenvolvimento do comércio entre estes países. A figura 2 mostra um mapa da Grécia no século VI a.C.. Nela, pode-se perceber a proximidade territorial entre a Grécia e o Egito, o que facilitou a influência comercial e cultural na região.



Figura 2: Mapa da Grécia à época de Tales

Fonte: [https://www.educabras.com/enem/materia/historia/historia\\_geral/aulas/historia\\_da\\_grecia](https://www.educabras.com/enem/materia/historia/historia_geral/aulas/historia_da_grecia)  
Acesso em 11/08/2020.

Neste período, viveu Tales (614 a.C. – 550 a.C.), figura 3, que segundo Eves (2011), tornou-se rico como mercador e, com isto, ao final de sua vida pôde dedicar-se a viagens e ao estudo, adquirindo assim conhecimentos matemáticos provenientes dos assírios, dos babilônios e dos egípcios.

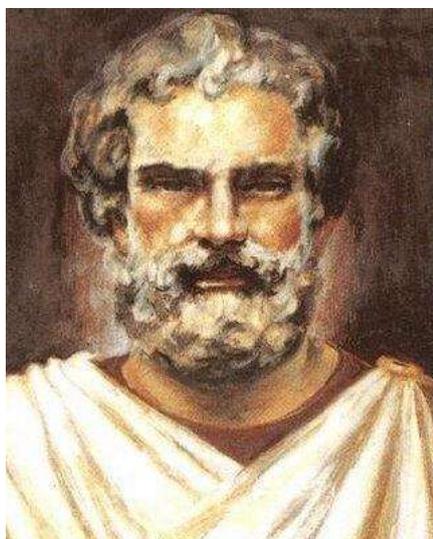


Figura 3: Imagem de Tales

Fonte: <https://www.estudopratico.com.br/biografia-do-filosofo-tales-de-mileto/>. Acesso em 11/08/2020.

Enquanto esteve no Egito, Tales teria sido desafiado pelos escribas do Faraó a medir a altura da pirâmide de Quéops<sup>1</sup>. Segundo Santos (2018) há duas versões sobre como Tales conseguiu calculá-la. A primeira é relatada por Plutarco

<sup>1</sup> Conforme Huisman (2001), Eves (2004), Chaves e Rodrigues (2014) e Roque (2012b), citados por Neto e Pimenta (2016) este desafio teria sido lançado a Tales pelos escribas deste faraó, quando Tales ainda vivia naquela região.

(46 – 126 d.C.), historiador e filósofo grego, que afirmou ter sido o cálculo feito considerando a razão obtida entre a sombra projetada por um bastão vertical de comprimento conhecido e a sombra da pirâmide é a mesma razão entre a altura do bastão e a altura da pirâmide, conforme mostra a figura 4.

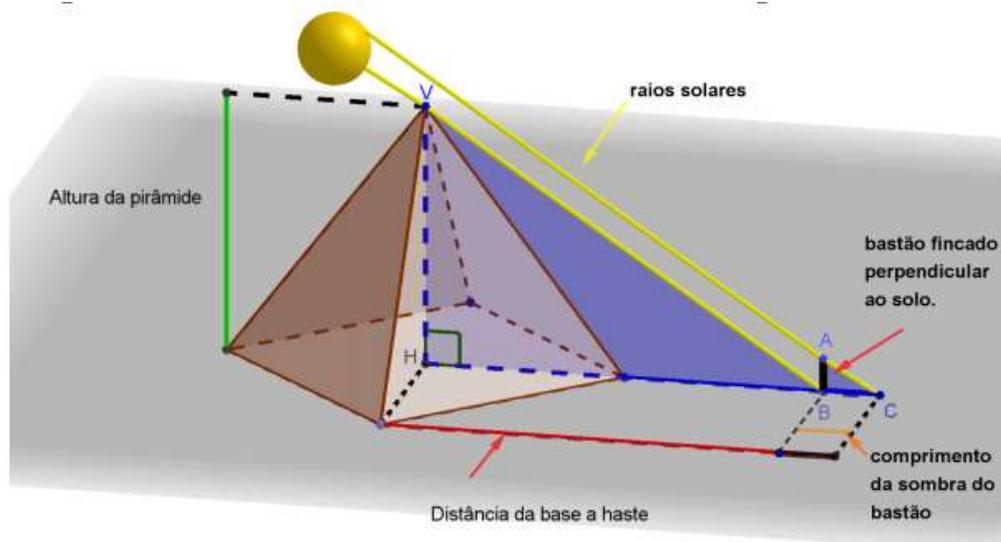


Figura 4: Versão de Plutarco para o cálculo da altura da pirâmide.  
Fonte: Santos (2018, p.11)

A segunda, dada por Hierônimos de Rodes (século III a.C.), discípulo de Aristóteles, afirma que a altura da pirâmide foi medida por Tales ao encontrar o comprimento da sombra da pirâmide no momento em que a sombra de um bastão era igual ao seu próprio comprimento<sup>2</sup> (figura 5), assim a pirâmide teria a mesma altura que o comprimento de sua sombra.

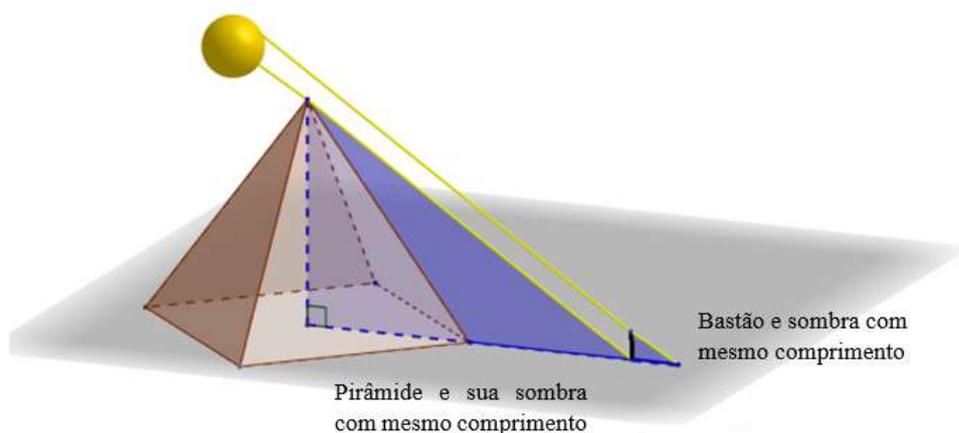


Figura 5: Versão de Hierônimos para o cálculo da altura da pirâmide.  
Fonte: Santos (2018, p.10) modificado.

<sup>2</sup> Esta versão também é atribuída ao historiador e filósofo grego Diógenes (200 – 250 d. C.), por Cajori (1955, p. 15).

Pode-se perceber que, tanto na descrição de Hierônimos quanto na descrição de Plutarco para o cálculo da medida da altura da pirâmide de Quéops, Tales utiliza-se de uma proporção entre as alturas da pirâmide e do bastão com o comprimento de suas sombras. Tal proporção se justifica pois para esta disposição, considerando que os raios solares são paralelos, há a formação de dois triângulos semelhantes: o primeiro formado pelo bastão, sua sombra e um raio solar que une a extremidade do bastão à extremidade da sua sombra e o segundo formado pela altura da pirâmide, sua sombra e um raio solar que une o vértice da pirâmide à extremidade da sua sombra, conforme mostra a figura 6.

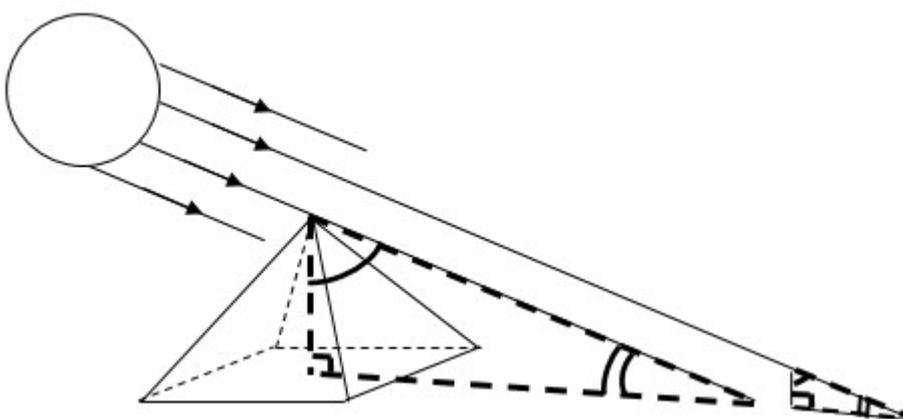


Figura 6: congruência entre os ângulos dos triângulos formados pelas alturas, raios solares e respectivas sombras.

Fonte: autor

Tais triângulos são semelhantes pois ambos possuem dois ângulos congruentes: o primeiro sendo um ângulo reto, formados pela altura da pirâmide com a sua sombra projetada no solo e pelo bastão na posição vertical com a sua sombra projetada e o segundo formado pelos ângulos que os raios formam com o solo já que estes são paralelos, conforme mostra a figura 7.

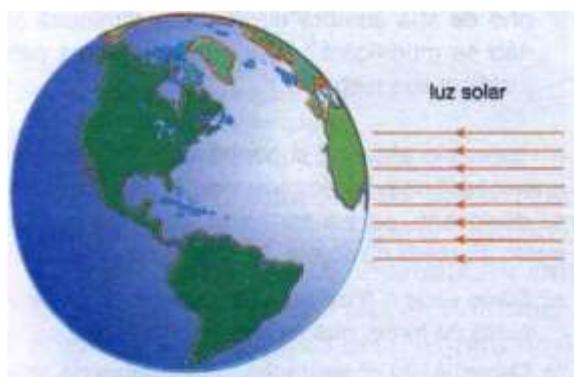


Figura 7: feixe de luz solar que atinge a Terra.

Fonte: Alvarenga, 2006. p. 195

Assim, uma vez estabelecida tal congruência, a razão entre seus lados permanece constante, fato que permite encontrar a medida do lado desconhecido, no caso, a altura da pirâmide<sup>3</sup>. Infelizmente, em nenhuma das referências consultadas, foram apresentados os valores utilizados e encontrado por Tales neste episódio.

### 3.2

#### O TEOREMA QUE LEVA O NOME DE TALES

As ideias de Tales se tornaram conhecidas através de autores como Aristóteles (384 – 322 a.C.) e Heródoto (485 – 425 a.C.), pois seus escritos originais nunca chegaram ao nosso tempo, afirma Dumont (2019).

Atualmente, nos livros didáticos é usualmente associado a Tales um teorema é definido a partir de um feixe de paralelas que determinam, sobre duas transversais, segmentos proporcionais. Tal teorema é conhecido como Teorema de Tales e é assim enunciado: “*Um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais*”.

A seguir, apresentamos sua demonstração a partir da 9ª edição do livro Matemática Bianchini, de 2018.

Primeiramente, o autor define feixe de paralelas e reta transversal como sendo respectivamente o conjunto de três ou mais retas paralelas no plano e a reta que corta o feixe de paralelas, conforme mostra a figura 8.

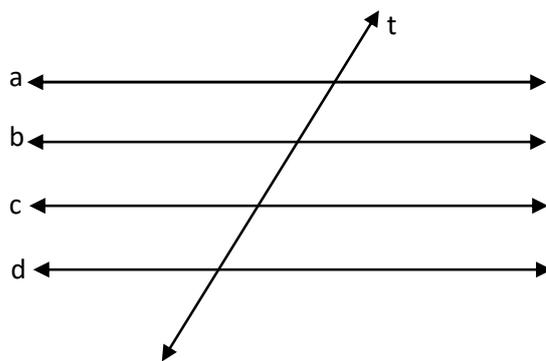


Figura 8: Feixe de retas paralelas ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ ), cortadas pela reta transversal  $t$ .

Fonte: autor

<sup>3</sup> A Grande Pirâmide de Giza, também conhecida como a Pirâmide de Khufu ou a Pirâmide de Quéops foi construída entre os anos 2560 e 2040 a.C. para servir como tumba para o Faraó Khufu (ou Quéops, na forma grega). A Grande Pirâmide tinha uma altura de 146,5 metros e uma base quadrada de 230, 4 metros de lado.

Em seguida, o autor enuncia uma proposição e a respectiva demonstração:  
*Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então ele determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal*, ou seja, considerando a figura 9, o autor demonstra que se  $a \parallel b \parallel c$ ,  $s$  e  $t$  são transversais e  $\overline{AB} \cong \overline{BC}$  então  $\overline{MN} \cong \overline{NP}$ .

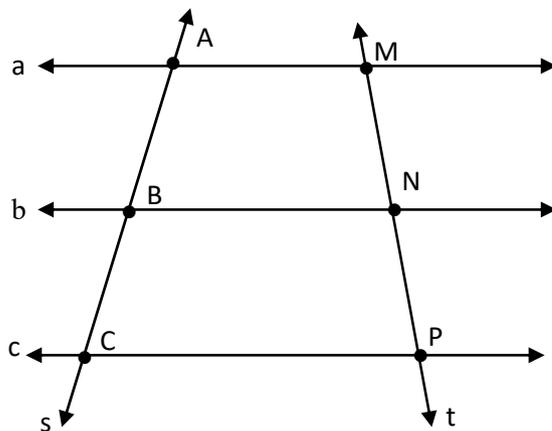


Figura 9: Figura utilizada por Bianchini (2018) para demonstrar a congruência de segmentos pertencentes a transversais que cortam um feixe de paralelas.

Fonte: autor

Demonstração:

Conforme figura 10:

Por M traça-se  $\overline{MR} \parallel s$ . Assim, tem-se o paralelogramo  $ABRM$  com  $\overline{AB} \cong \overline{MR}$  (1).

Por N traça-se  $\overline{NS} \parallel s$ . Assim, tem-se o paralelogramo  $BCSN$  com  $\overline{BC} \cong \overline{NS}$  (2).

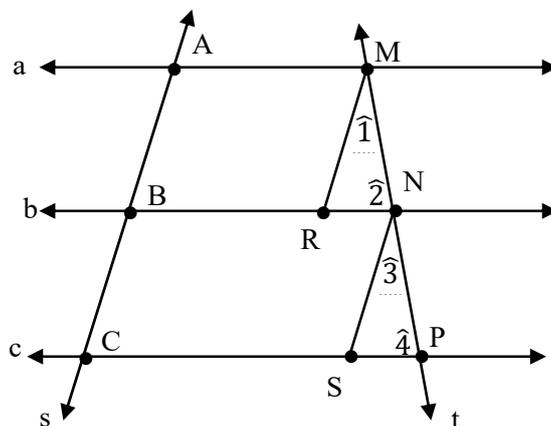


Figura 10: Figura utilizada por Bianchini (2018) para demonstrar a congruência de segmentos pertencentes a transversais que cortam um feixe de paralelas.

Fonte: autor

Das equações (1) e (2), temos que  $\overline{MR} \cong \overline{NS}$  pois  $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ .

Comparando os triângulos  $MRN$  e  $NSP$ , tem-se:

- $\overline{MR} \cong \overline{NS}$

- $\hat{1} \cong \hat{3}$  pois são ângulos correspondentes em retas paralelas cortadas por transversal
- $\hat{2} \cong \hat{4}$  pois são ângulos correspondentes em retas paralelas cortadas por transversal

Conseqüentemente, pelo caso Lado-Ângulo-Ângulo Oposto, os triângulos  $MNR$  e  $NSP$  são congruentes e como  $\overline{MN}$  e  $\overline{NP}$  são lados correspondentes em triângulos congruentes, então  $\overline{MN} \cong \overline{NP}$ .

Dando continuidade, Bianchini (2018) demonstra o teorema de Tales: “Um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais”.

Demonstração: Admitamos que exista um segmento  $u$  que caiba  $x$  vezes em  $\overline{AB}$  e  $y$  vezes em  $\overline{BC}$ , conforme figura 11.

Assim

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{xu}{yu} = \frac{x}{y} \quad (1)$$

Traçando retas paralelas ao feixe pelos pontos de divisão de  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , cujo comprimento é  $u$ , elas dividirão  $\overline{MN}$  e  $\overline{NP}$  em segmentos congruentes de comprimento  $v$  (com  $v \neq 0$ ) e tem-se:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} = \frac{xv}{yv} = \frac{x}{y} \quad (2)$$

Ao comparar as equações (1) e (2), tem-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}}$$

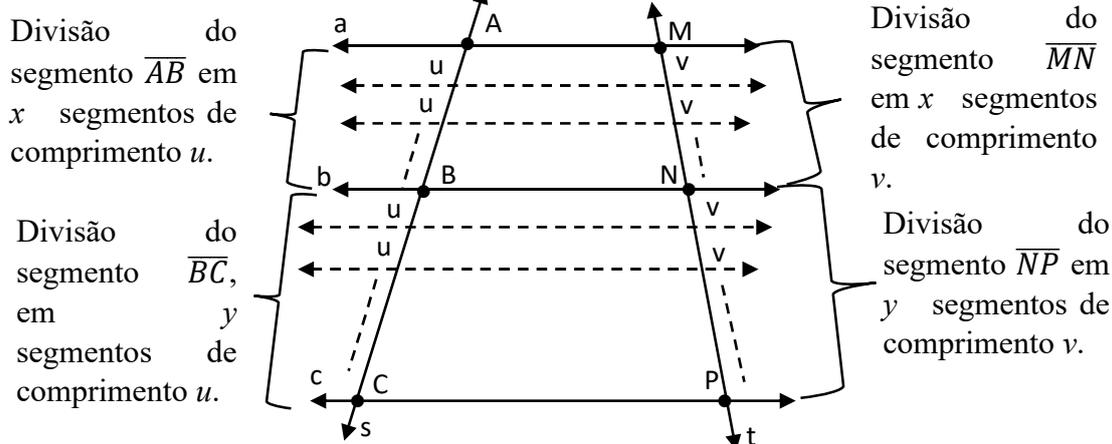


Figura 11: Figura utilizada por Bianchini (2018) para demonstrar o teorema de Tales

Fonte: autor

Segundo Pereira (2005), até o final do século XIX, esta abordagem era conhecida como Teorema das Linhas Proporcionais. A autora ainda afirma que,

no Brasil, este Teorema (das Linhas Proporcionais) passou a ser apresentado como Teorema de Tales na segunda metade do século XX através do Movimento da Matemática Moderna e que autores anteriores aos dessa época, faziam referência ao Teorema antigo das Linhas Proporcionais como uma consequência do conteúdo de semelhança de triângulos.

As figuras 12 e 13 apresentam a imagem das páginas do livro “Matemática para a Terceira Série Ginásial” de Ary Quintela, editado em 1963. Nela, é possível verificar o enunciado do Teorema das Linhas Proporcionais e sua demonstração.

## II — SEGMENTOS DETERMINADOS SOBRE TRANSVERSAIS POR UM FEIXE DE PARALELAS

### 5. Primeiro teorema.

Se um feixe de paralelas divide uma transversal em partes iguais, dividirá também qualquer outra transversal em partes iguais.

Sejam as paralelas  $S_1, S_2, S_3, S_4$  (fig. 110):

Hipótese:  $AB = BC = CD$       Tese:  $a = b = c$ .

DEMONSTRAÇÃO. Tracemos, pelos pontos  $A, B$  e  $C$ , paralelas à segunda transversal  $MN$ .

Em virtude da teoria das paralelas, teremos:

$$a = AE, \quad b = BF, \quad c = CG.$$

Basta, pois, provar a igualdade dos segmentos  $AE, BF$  e  $CG$ . A igualdade destes segmentos resulta imediatamente da congruência dos triângulos  $ABE, BCF, CDG$ , que têm um lado igual por hipótese, adjacente a ângulos respectivamente iguais como correspondentes.

Observemos que o raciocínio é o mesmo para as duas figuras.

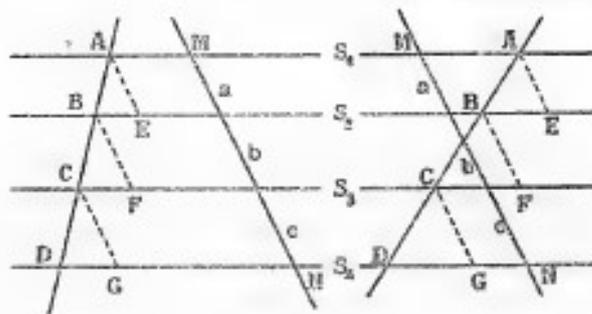


FIG. 110

Figura 12: Teorema da Linhas Proporcionais, da 66ª edição do Livro Matemática para a Terceira Série Ginásial, editado em 1963

Fonte: Quintela, 1963. p. 175

## 6. Segundo teorema.

Um feixe de retas paralelas divide duas transversais quaisquer em segmentos correspondentes proporcionais.

1.ª) Consideremos primeiramente três paralelas  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  e as duas transversais  $AB$  e  $CD$  (fig. 111).

Teremos a tese:  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ .

DEMONSTRAÇÃO. Dividamos os segmentos  $a$  e  $b$  em partes iguais a um segmento  $\alpha$ , o que é sempre possível com erro tão pequeno quanto quisermos por ser  $\alpha$  arbitrário, e admitamos que fique contido 3 vezes em  $a$  e 5 vezes em  $b$ , como mostra a figura. Temos, então:

$$\begin{aligned} a &= 3\alpha \\ b &= 5\alpha \quad \therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{5} \end{aligned} \quad (1)$$

Se traçarmos, pelos pontos de divisão de  $a$  e  $b$ , paralelas às retas do feixe, a segunda transversal  $CD$  ficará, também, dividida em partes iguais. Sendo  $\beta$  uma das partes, virá:

$$\begin{aligned} a' &= 3\beta \\ b' &= 5\beta \quad \therefore \frac{a'}{b'} = \frac{3}{5} \end{aligned} \quad (2)$$

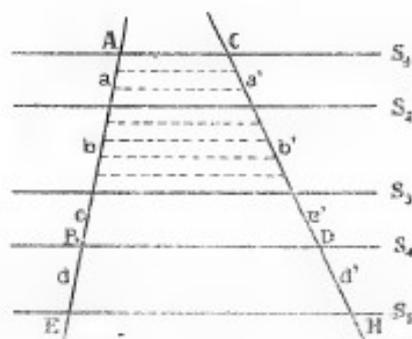


Fig. 111

Figura 13: Teorema das Linhas Proporcionais, da 66ª edição do Livro Matemática para a Terceira Série Ginásial, editado em 1963  
Fonte: Quintela, 1963. p. 175

É possível perceber que, com o tempo, houve uma modificação no título de tais conceitos, atribuindo a Tales este teorema. Bongiovanni (2007) afirma que a primeira publicação onde houve a substituição do nome “Teorema dos Segmentos Proporcionais” para “Teorema de Tales” ocorreu no final do século XIX na França, no livro *Éléments de Géométrie* escrito por Rouche e

Comberousse, em uma reedição de 1883 e uma possível justificativa para tal mudança é dada por Almeida (2008) quando afirma “... as diferentes proposições nomeadas *teorema de Tales* se correlacionam e tratam de propriedades básicas da semelhança de figuras, em particular da semelhança de triângulos”. (Almeida, 2008, p. 237).

### 3.3

#### CONSEQUÊNCIA DO TEOREMA QUE LEVA O NOME DE TALES

A aplicação do teorema que leva o nome de Tales<sup>4</sup> a triângulos é apresentada por Bianchini (2018)

Demonstração:

Considere um triângulo ABC sobre o qual foi traçada uma reta  $r$ , paralela a um de seus lados.

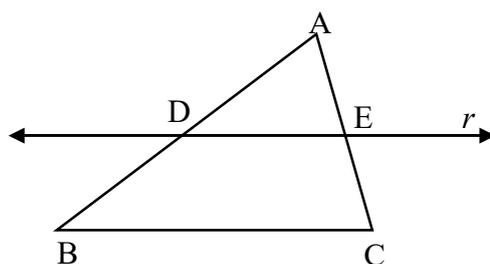


Figura 14: Figura utilizada por Bianchini (2018) para a demonstração da consequência do Teorema de Tales

Fonte: autor

Considere a reta  $s$  paralela ao lado  $\overline{BC}$ , passando pelo vértice A, e a reta  $t$  suporte ao lado  $\overline{BC}$ .

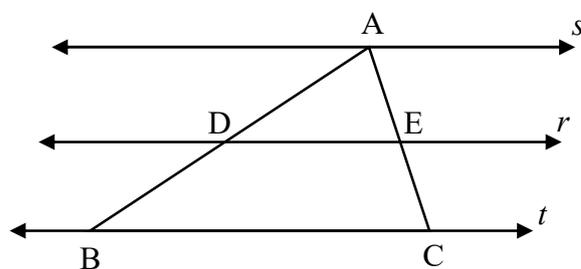


Figura 15: Figura utilizada por Bianchini (2018) para a demonstração da consequência do Teorema de Tales

Fonte: autor

<sup>4</sup> Tal consequência também é apresentada por Quintela (1963) através do primeiro teorema das linhas proporcionais no triângulo.

As retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  forma um feixe de paralelas e os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  são segmentos transversais. Assim, pelo teorema de Tales apresentado por Bianchini (figura 9)

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}$$

E após a conclusão enuncia: Quando uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros lados em dois pontos distintos, ela determina sobre esses lados segmentos proporcionais (Bianchini, 2018, P. 52).

Tal consequência apontada por Bianchini (2018) como consequência do Teorema de Tales aplicado a triângulos é encontrada na proposição 2 do Livro VI de Os Elementos de Euclides (300 a. C) e foi elaborada três séculos após a morte de Tales. Segue abaixo seu enunciado.

Proposição 2: Caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporções; e, caso os lados do triângulo sejam cortados em proporção, a reta, sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante do triângulo. (Euclides, 2009, p. 233).

A seguir apresentamos a demonstração original de Euclides para a proposição 2.

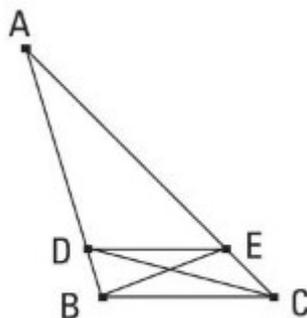


Figura 16: Figura utilizada por Euclides para demonstrar a proposição 2 do Livro VI dos Elementos

Fonte: <https://archive.org/details/Os.Elementos-Euclides/page/n233/mode/1up>. Acesso em 31/08/2020.

Fique, pois, traçada a  $DE$  paralela a um dos lados  $BC$ , do triângulo  $ABC$ ; digo que, como a  $BD$  está para a  $DA$ , assim a  $CE$  para  $EA$ .

Fiquem, pois, ligadas as  $EB$ ,  $CD$ .

Portanto, o triângulo  $BDE$  é igual ao triângulo  $CDE$ ; pois estão sobre a mesma base  $DE$  e nas mesmas paralelas  $DE$ ,  $BC$ ; mas o triângulo  $ADE$  é algum outro. E as iguais têm para a mesma a mesma razão; portanto, como o triângulo  $BDE$  está para o [triângulo]  $ADE$ , assim o triângulo  $CDE$  para o triângulo  $ADE$ . Mas, por um lado, como o triângulo  $BDE$  para o  $ADE$ , assim a  $BD$  para  $DA$ ; pois, estando sob a mesma altura, a perpendicular traçada do  $E$  até o  $AB$ , estão entre si como as bases. Pelas mesmas coisas, então, como o triângulo  $CDE$

para o ADE, assim a CE para EA; portanto também como BD, para DA, assim CE para EA.

Mas, então, fiquem cortados os dois lados AB, AC do triângulo ABC, em proporção, como a BD para DA, assim a CE para EA, e fique ligada a DE; digo que a DE é paralela à BC.

Tendo, pois, sido construída as mesmas coisas, como a BD está para DA, assim a CE para EA, mas, por um lado, como a BD para DA, assim o triângulo BDE para o triângulo ADE, e, por outro lado, como a CE para EA, assim o triângulo CDE para o triângulo ADE, portanto, também como o triângulo BDE para o triângulo ADE, assim o triângulo CDE para o triângulo ADE. Portanto, o triângulo BDE é igual ao triângulo CDE; e estão sob a mesma base DE. Mas os triângulos iguais e que estão sobre a mesma base, também estão nas mesmas paralelas. Portanto, a DE é paralela à BC.

Portanto, caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporção; e, caso os lados do triângulo sejam cortados em proporção, a reta, sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante do triângulo; o que era preciso provar. (Euclides, 2009, p.233)

Em nosso entendimento a proposição 2 do Livro VI dos elementos de Euclides é composta por duas partes.

A primeira afirma que “*caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporções*” (Euclides, 2009, p. 233); acreditamos que a expressão “*corta os lados do triângulo em proporções*” mereça alguns comentários. Observando a figura 16, utilizada por Euclides para desenvolver sua demonstração, é possível perceber que o segmento  $\overline{DE}$  divide o lado  $\overline{AB}$  nos segmentos  $\overline{BD}$  e  $\overline{DA}$  e divide o lado  $\overline{AC}$ , nos segmentos  $\overline{CE}$  e  $\overline{EA}$ . Assim, Euclides utiliza esta expressão para se referir a proporção  $\overline{BD}$  está para  $\overline{DA}$  assim como  $\overline{CE}$  para  $\overline{EA}$ , conforme pode ser observado no 4º parágrafo da sua demonstração onde o autor descreve “*cortados os dois lados AB, AC do triângulo ABC, em proporção, como a BD para DA, assim a CE para EA*”. Podemos perceber nesta afirmação a presença da consequência do Teorema que leva o nome de Tales, já citada, e presente em Bianchini (2018), o que nos leva a concluir que tal consequência não deva ter sido proposta por ele.

A segunda parte da proposição de Euclides afirma que “*caso os lados do triângulo sejam cortados em proporção, a reta, sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante do triângulo*” (Euclides, 2009, p.233), onde o autor utiliza novamente a expressão *cortados em proporção* para se referir a proporção estabelecida entre os segmentos  $\overline{BD}$ ,  $\overline{DA}$ ,  $\overline{CE}$  e  $\overline{EA}$ , ou seja  $\overline{BD}$  está para  $\overline{DA}$  assim como  $\overline{CE}$  está para  $\overline{EA}$ , conforme pode ser visto no 5º parágrafo de

sua demonstração ao descrever o termo “*cortados em proporção*” como a proporção  $BD$  está para  $DA$ , assim a  $CE$  para  $EA$

Por fim, apresentamos a seguir de forma detalhada a demonstração utilizando para isto figuras e símbolos matemáticos aos quais estamos acostumados a lidar.

Demonstração:

Segundo Euclides, ao traçar  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ , tem-se que  $\overline{BD}$  está para  $\overline{DA}$  assim como  $\overline{CE}$  está para  $\overline{EA}$ , ou seja

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}$$

A prova se inicia traçando  $\overline{EB}$  e  $\overline{CD}$  e formando os triângulos  $BDE$  e  $CDE$ . Estes triângulos por terem a mesma base  $\overline{DE}$  e a mesma altura, que é a distância entre as paralelas  $\overline{DE}$  e  $\overline{BC}$  possuem a mesma área, assim a área do triângulo  $BDE$  está para a área do triângulo  $ADE$  assim como a área do triângulo  $CDE$  está para a área do triângulo  $ADE$ , ou seja,

$$\frac{\text{Área } \triangle BDE}{\text{Área } \triangle ADE} = \frac{\text{Área } \triangle CDE}{\text{Área } \triangle ADE}$$

Traçando de  $E$  uma perpendicular ao lado  $\overline{AB}$  do triângulo  $ABC$ , esta corta  $\overline{AB}$  em  $H$  (figura 17) assim  $\overline{EH}$  é altura do triângulo  $ADE$  em relação ao lado  $\overline{AD}$  e também é altura do triângulo  $BDE$  em relação ao lado  $\overline{BD}$ .

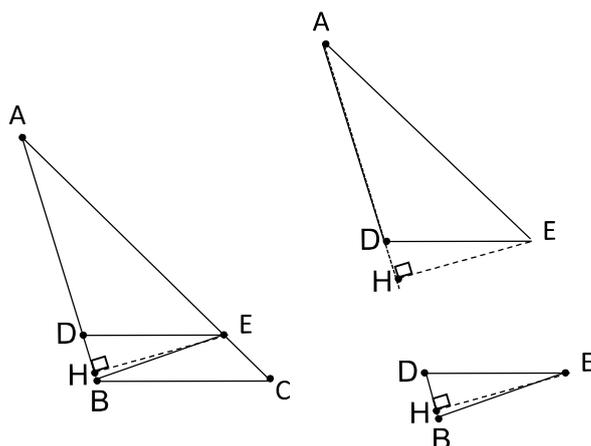


Figura 17: Prova utilizada por Euclides

Fonte: Autor

Assim, tem-se que

$$\text{Área } \triangle ADE = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{EH}}{2} \quad \text{e} \quad \text{Área } \triangle BDE = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{EH}}{2}$$

$$\frac{\text{Área } \triangle ADE}{\text{Área } \triangle BDE} = \frac{\frac{\overline{AD} \cdot \overline{EH}}{2}}{\frac{\overline{BD} \cdot \overline{EH}}{2}}$$

$$\frac{\text{Área}_{\Delta ADE}}{\text{Área}_{\Delta BDE}} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{EH}}{2} \cdot \frac{2}{\overline{BD} \cdot \overline{EH}}$$

$$\frac{\text{Área}_{\Delta ADE}}{\text{Área}_{\Delta BDE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

$$\frac{\text{Área}_{\Delta BDE}}{\text{Área}_{\Delta ADE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$$

E, de modo análogo para os triângulos ADE e BCE, encontra-se:

$$\frac{\text{Área}_{\Delta CDE}}{\text{Área}_{\Delta ADE}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}$$

Se

$$\frac{\text{Área}_{\Delta BDE}}{\text{Área}_{\Delta ADE}} = \frac{\text{Área}_{\Delta CDE}}{\text{Área}_{\Delta ADE}}$$

então

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}$$

A partir deste ponto, Euclides apresenta a recíproca da demonstração afirmando que no triângulo ABC, tomando o ponto D sobre o lado  $\overline{AB}$  e o ponto E sobre o lado  $\overline{AC}$ , se  $\overline{BD}$  está para  $\overline{BA}$  assim como  $\overline{CE}$  está para  $\overline{EA}$ , ou seja  $\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}$  então  $\overline{DE}$  é paralelo a  $\overline{BC}$ .

Novamente, traçando de E uma perpendicular ao lado  $\overline{AB}$  do triângulo ABC, esta corta  $\overline{AB}$  em H (figura 11) assim  $\overline{EH}$  é altura do triângulo ADE em relação ao lado  $\overline{AD}$  e também é altura do triângulo BDE em relação ao lado  $\overline{BD}$  e teremos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{EH}}{\overline{AD} \cdot \overline{EH}} = \frac{\frac{\overline{BD} \cdot \overline{EH}}{2}}{\frac{\overline{AD} \cdot \overline{EH}}{2}} = \frac{\text{Área}_{\Delta BDE}}{\text{Área}_{\Delta ADE}}$$

e de modo análogo tem-se

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\text{Área}_{\Delta CDE}}{\text{Área}_{\Delta ADE}}$$

Se

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}$$

e

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\text{Área}_{\Delta BDE}}{\text{Área}_{\Delta ADE}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\text{Área}_{\Delta CDE}}{\text{Área}_{\Delta ADE}}$$

então

$$\text{Área}_{\Delta BDE} = \text{Área}_{\Delta CDE}$$

e se tais triângulos estão sobre a mesma base  $\overline{DE}$  então estão nas mesmas paralelas. Portanto  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ .

### 3.4

#### PROPOSTA DE ATIVIDADE 1

Nesta seção apresentamos uma proposta de atividade a ser aplicada. A prática sugerida foi idealizada para a aplicação em uma escola da rede municipal de educação do Rio de Janeiro, fato que não impede sua aplicação em outros âmbitos. Seus objetivos são apresentar a história deste conteúdo e estimular a capacidade de resolver problemas e o interesse pelos conteúdos matemáticos e inserir o conceito de proporção. Para isto, baseia-se na forma descrita por Plutarco (46–126 d.C.) com a qual Tales calculou a medida da altura da pirâmide, conforme descrito na seção 3.1. Seu objetivo principal é proporcionar ao alunado a possibilidade de reproduzir a experiência de Tales ao determinar a medida da altura da pirâmide de Quéops. Vale ressaltar que toda a atividade foi planejada de acordo com as etapas propostas por Sá (2020) citado na seção 2.2. Na seção 3.4.1 apresentamos orientações para sua aplicação e na seção 3.4.2 a descrição da atividade que deve ser entregue para os alunos a fim de promoverem sua execução supervisionada.

#### 3.4.1

#### ETAPAS DO ENSINO DE MATEMÁTICA POR ATIVIDADE EXPERIMENTAL PARA A ATIVIDADE “O DESAFIO DA PIRÂMIDE”

##### Organização:

- Divida a turma em grupos de 2 a 4
- Distribua, para cada grupo, duas trenas e a folha de atividades.
- Solicite que tragam calculadora ou permitir o uso da calculadora do celular.

##### Apresentação:

A apresentação da atividade, contém informações sobre a grande pirâmide de Quéops, uma breve descrição sobre a vida de Tales e do desafio lançado a ele no Egito. Sugerimos que tal apresentação seja realizada pelo professor de

modo que este introduza ludicidade a atividade permitindo ao aluno vivenciar a experiência de Tales durante sua realização.

#### **Execução:**

- Leve os alunos a uma área externa, ao sol, para executar os procedimentos.
- Oriente cada grupo a selecionar dois alunos de seu grupo, de preferência os alunos escolhidos devem ter alturas bem distintas.
- Solicite aos outros alunos de cada grupo que em duplas meçam as alturas e respectivas sombras projetadas no chão dos alunos selecionados, de forma simultânea.

#### **Registro:**

- Solicite que as medições das alturas e dos comprimentos das sombras dos alunos selecionados sejam registradas em uma tabela fornecida na atividade.

#### **Análise:**

- Encontre a razão entre a altura de cada aluno e o comprimento de sua sombra e registre na tabela cada resultado com uma casa decimal.

#### **Institucionalização:**

Nesta etapa foram elaboradas perguntas e desafios algébricos cujos objetivos são levar o aluno a refletir sobre a prática, induzir o aluno à construção do conceito de semelhança através do cálculo da razão de semelhança e utilizar o conceito de semelhança para resolver problemas. Por fim, por acreditarmos que a consolidação do aprendizado também pode ser promovida através da escrita na língua materna, propomos, como último item desta etapa, sugerimos que todo o procedimento seja descrito pelo grupo, de modo que este relato possa, não só dar ao professor a possibilidade de verificar o aprendizado dos alunos, mas também evidenciar a necessidade de uma revisão ou complemento do conteúdo.

### **3.4.2**

#### **ATIVIDADE 1: O DESAFIO DA ALTURA DA PIRÂMIDE**

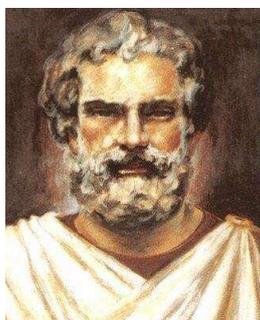
A seguir, apresentamos na íntegra a atividade proposta. O intuito aqui, além de apresentar uma prática fundamentada na teoria desenvolvida, é contribuir com o professor da educação básica. Ele pode utilizar a atividade da forma como foi elaborada ou adaptá-la para a realidade da sua sala de aula.

## ATIVIDADE 1: O DESAFIO DA ALTURA DA PIRÂMIDE

A Pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide de Gizé ou simplesmente Grande Pirâmide, é a mais antiga e a maior das três pirâmides na Necrópole de Gizé, na fronteira de Gizé, no Egito. É a mais antiga das Sete Maravilhas do Mundo Antigo e a única a permanecer em grande parte intacta.



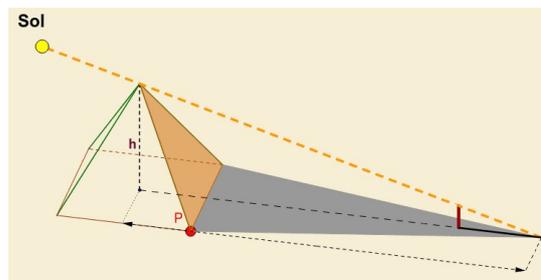
Wikipédia – acesso em 09/02/2021



Tales de Mileto foi um grande matemático grego que viveu entre 614 a 550 antes de Cristo. Durante uma viagem ao Egito, por conta de sua fama de grande matemático, foi desafiado pelos escribas do faraó a determinar a altura da Grande Pirâmide de Quéops, que foi construída entre 2560 e 2040 antes de Cristo.

<https://www.estudopratico.com.br/biografia-do-filosofo-tales-de-mileto/>. Acesso em 11/08/2020

Para resolver este desafio Tales utilizou-se de um bastão, fíncando-o no solo na posição vertical e mediu sua altura; depois mediu os comprimentos das sombras do bastão fíncado no solo e da pirâmide e, através de conhecimentos simples de proporção, encontrou a medida da altura da pirâmide.



<https://www.geogebra.org/m/ZqngBVbD>. Acesso em 07/02/21

### AGORA O DESAFIO É PARA VOCÊS

- Dividam-se em grupos de no mínimo 4 componentes e dirijam-se a uma área externa da escola, ao sol.
- Cada grupo, deve selecionar dois alunos de seu grupo. De preferência os alunos escolhidos devem ter alturas bem distintas.

- Dois dos alunos não escolhidos de cada grupo devem, simultaneamente, medir as alturas e sombras dos colegas escolhidos e registrar essas medições na tabela abaixo.
- A seguir cada grupo deve calcular, para cada aluno da tabela, a razão entre a altura do aluno e o comprimento da sua sombra e também registrar essa medida na tabela.

	<b>ALTURA</b>	<b>COMPRIMENTO DA SOMBRA</b>	<b>RAZÃO</b>
<b>ALUNO 1</b>			
<b>ALUNO 2</b>			

**FAÇAM O QUE SE PEDE EM CADA QUESTÃO**

1) Quem foi Tales de Mileto?

---



---



---



---

2) Qual foi o desafio proposto a ele no episódio da pirâmide?

---



---



---



---

3) Analisando os valores registrados na tabela, o que se pode concluir?

---



---



---



## 4

# UMA RELAÇÃO ENTRE AS MEDIDAS DOS LADOS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Neste capítulo discorreremos sobre um teorema bem conhecido que relaciona as medidas dos lados de um triângulo retângulo: o teorema de Pitágoras. Ele é referenciado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) pelas habilidades 13 e 14 relativas ao 9º ano do ensino fundamental e caracterizado como uma das relações métricas do triângulo retângulo. O documento recomenda que os alunos tenham a habilidade de demonstrar a relação e de resolver e elaborar problemas onde a mesma se aplique.

Escolhemos utilizar a expressão *Uma Relação entre as Medidas dos Lados do Triângulo Retângulo* como título do capítulo pois, além de não ser a única relação entre esses elementos em um triângulo retângulo, levantamos uma reflexão sobre a real autoria de Pitágoras com relação ao teorema que leva seu nome uma vez que, nas pesquisas realizadas, constatamos que esta relação já era de conhecimento de povos muito anteriores a Pitágoras, como egípcios, babilônios e chineses, entre outros.

Neste capítulo apresentamos fatos históricos relevantes sobre esta relação como o seu conhecimento por civilizações anteriores a Pitágoras como citado anteriormente, o tratamento geométrico dado por Euclides ao tema, a provável abordagem de Pitágoras e, ao final, duas sugestões de atividades práticas que procuram dialogar o tema com alguns aspectos da sua história.

### 4.1 A RELAÇÃO NA BABILÔNIA

Os mais antigos relatos sobre o conhecimento dos ternos que satisfazem a expressão que descreve a referida relação se referem à Babilônia. Os babilônios transmitiam seus conhecimentos para as gerações futuras em textos cunhados em tabletes de argila sendo um destes tabletes datado de 1900 a 1600 anos antes de

Cristo e conhecido como tablete de Plimpton 322<sup>5</sup>, figura 18, cujo conteúdo é uma lista com quinze linhas de ternos pitagóricos<sup>6</sup> (EVES, 2011).



Figura 18: tablete Plimpton 322

Fonte:

[https://www.reddit.com/r/ArtefactPorn/comments/8lkbyn/clay\\_tablet\\_called\\_plimpton\\_322\\_babylon\\_1900\\_1800/](https://www.reddit.com/r/ArtefactPorn/comments/8lkbyn/clay_tablet_called_plimpton_322_babylon_1900_1800/). Acesso em 19/08/2020.

A tabela 2 contém os ternos pitagóricos na notação decimal, presentes no tablete de Plimpton 322.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
120	119	169
3456	3367	4825
4800	4601	6649
13500	12709	18541
72	65	97
360	319	481
2700	2291	3541
960	799	1249
600	481	769
6480	4961	8161
60	45	75
2400	1679	2929
240	161	289
2700	1771	3229
90	56	106

Tabela 2: ternos pitagóricos presentes no tablete Plimpton 322, onde os números *a*, *b* e *c* são relacionados pela expressão  $a^2 + b^2 = c^2$

Fonte: Eves 2011.

<sup>5</sup> Segundo Roque (2012), trata-se de uma placa da coleção G.A. Plimpton, da Universidade Columbia, catalogada sob o número 322, que foi escrita no período babilônico antigo, aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C.

<sup>6</sup> Os ternos pitagóricos (ou números pitagóricos) são números naturais (*a*, *b*, *c*), que satisfazem a equação  $a^2 = b^2 + c^2$ .

## 4.2

### A RELAÇÃO NO EGITO

No Egito, aproximadamente 1500 a.C. conforme aponta Gonçalves (2011), já havia o conhecimento de que um triângulo com lados medindo 3, 4 e 5 unidades era classificado como um triângulo retângulo. Sua construção era feita a partir de uma corda com doze nós onde o espaçamento entre os nós era o mesmo e ao ser esticada formavam o triângulo com tais características, conforme ilustrado na figura 19.

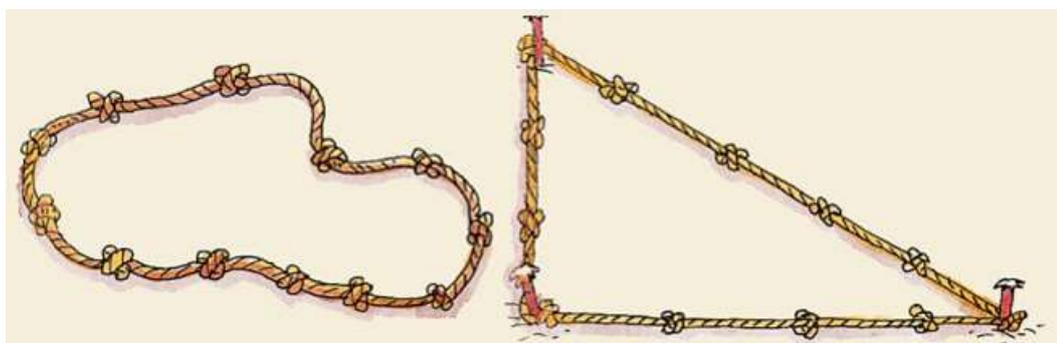


Figura 19: Cordas usadas pelos egípcios para construir o triângulo retângulo.  
Fonte: <http://egiptomirandaunibague.blogspot.com/2014/08/>. Acesso em 19/08/2020.

Estes conhecimentos permitiam resolver certos tipos de problemas como por exemplo o problema das marcações das propriedades de terra que as cheias do Nilo todos os anos modificavam ou faziam desaparecer. Segundo Roque (2012), uma das formas<sup>7</sup> de escrita egípcia na época era o hierático, que era uma forma cursiva de escrita empregada nos papiros e vasos, relacionados a funções do dia a dia, como documentos administrativos, cartas e obras literárias. Assim, os papiros matemáticos continham uma função pedagógica pois continham problemas e soluções preparados por egípcios mais experientes para antecipar situações que os mais jovens poderiam encontrar no futuro. Dentre estes papiros está o papiro do Cairo<sup>8</sup>, datado de 300 a.C., que segundo Eves (2011) é uma coleção de 40 problemas sendo 9 deles relacionados de forma exclusiva ao teorema de Pitágoras. Um deles, o problema 24, está assim enunciado em Ribeiro e Galvão (2014, p. 93):

<sup>7</sup> No período dos faraós também havia outra forma de escrita que era mais utilizada nas inscrições monumentais em pedra: os Hieroglíficos.

<sup>8</sup> Este papiro foi encontrado no Cairo em 1938 e data de 300 a.C. Ele continha 40 problemas de matemática, sendo que nove tratavam de forma exclusiva a relação entre os lados do triângulo retângulo com medidas 3, 4 e 5; 5, 12 e 13; 20, 21 e 29.

*Calcular a nova altura de um bastão de 10 cúbitos em pé que tem sua base afastada de 6 cúbitos.*

Segundo as autoras, o escriba que resolveu o problema determinou a altura da extremidade apoiada do bastão (após percorrer os 6 cúbitos<sup>9</sup>) subtraindo 36 (= 6.6) de 100 (= 10.10) e encontrando 64; em seguida extraiu a raiz quadrada de 64 obtendo 8 e por fim, conclui que a nova altura era  $10 - 2 = 8$ .

### 4.3

#### A RELAÇÃO NA CHINA

Na China essa relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo já era conhecida cerca de mil anos antes de Cristo e era relacionada a problema sobre profundidade de lagos, sombra de árvores e ao famoso problema do bambu quebrado (figura 20) como aponta Silva (2014).



Figura 20: O problema do bambu quebrado.

Fonte: <https://sites.google.com/site/histmatuninove/historia-da-matematica-na-china>. Acesso em 24/08/2020.

Neste problema<sup>10</sup>, a unidade de medida de comprimento é chamada *chi* e seu enunciado descrito em Silva (2014, p. 130) é:

<sup>9</sup> Cúbito egípcio = 52,4 cm

<sup>10</sup> Ao quebrar-se o bambu, haveria a formação de um triângulo retângulo com um dos catetos medindo 3. Sendo  $x$  a parte do bambu que permanece na vertical, o restante do bambu teria medida  $10 - x$  já que o comprimento total do bambu é 10 *chi*. Assim, resolvendo a equação  $(10 - x)^2 = 3^2 + x^2$ , a altura da quebra seria encontrada.

*Um bambu com 10 chi de altura se quebra e a base superior chega ao chão a 3 chi da base. Determine a altura da quebra!*

Segundo o autor, a demonstração do teorema encontra-se no livro *Chou Pei Suang Shing*, figura 21 à direita, que é um pergaminho de dois metros e trinta e que aborda vários assuntos científicos. Ele apresenta a demonstração da relação de um terno que satisfaz a expressão que descreve o Teorema de Pitágoras conhecido por *hsuang-thue* ou por *chi-chu* (agrupamento de quadrados); sendo sua tradução, apresentada por Silva (2014), descrita da seguinte forma:

... quadrado formado pelo lado maior (hipotenusa) é constituído de quatro triângulos e um quadradinho (quadrado de lado unitário). Somando os quatro triângulos, dois a dois, encontram-se mais doze quadradinhos, que somados com o quadradinho central, resulta 25. (Silva 2014, p. 129.)

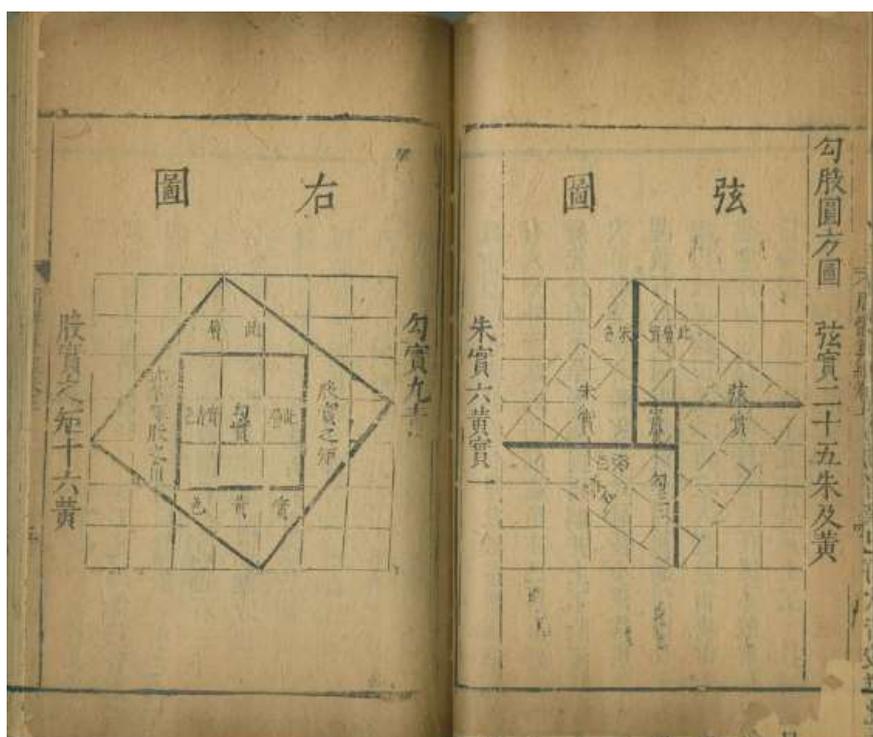


Figura 21: Demonstração do teorema de Pitágoras presente no livro Chou Pei.

Fonte: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-zhoubi-suanjing>. Acesso em 24/08/2020.

Percebe-se nessa demonstração uma visão geométrica da relação associada a cálculo de áreas.

#### 4.4

### A RELAÇÃO NA ÍNDIA

Assim como na China, na Índia também há indícios do conhecimento das relações entre os lados do triângulo retângulo cerca de 1000 anos a.C.. Segundo Waerden (1983), as *Sulbasutras* são antigos manuais hindus onde há detalhes prescritos para a construção de altares. A palavra *Sulbasutra* significa "Manual de corda", e se justifica pois, nas construções do altar, eram utilizadas estacas e cordas. Os *Sulbasutras* foram provavelmente escritos entre 500 e 800 a.C. sendo *Satapatha Brahmana* um *Sulbasutra* bem mais antigo, escrito entre 1000 e 800 a.C. O *Sulbasutra* Baudhayana foi traduzido por G. Thibaut em Pandit volume 9 (1874), volume 10 (1875) e New Series volume I (1876-77). Ele contém uma passagem sobre o Teorema de Pitágoras e imediatamente seguindo, uma passagem sobre triângulos pitagóricos.

A diagonal de um retângulo produz por si ambas as áreas que os dois lados do retângulo produzem separadamente (ou seja, o quadrado da diagonal é igual à soma dos quadrados dos dois lados); isto é visto naqueles retângulos cujos lados são três e quatro, doze e cinco, quinze e oito, sete e vinte e quatro, doze e trinta e cinco, quinze e trinta e seis. (Waerden, 1983, p. 9).

Infelizmente, poucas referências sobre o tema foram encontradas. Porém, como afirmamos na seção 2.1, por ser a história da matemática um recurso que permite ao aluno da educação básica perceber que a matemática sempre fez parte do conhecimento humano em diferentes épocas e civilizações, acreditamos que esta seção também contribui de forma significativa para evidenciar a nossa visão.

#### 4.5

### A RELAÇÃO NA GRÉCIA

Por volta de 300 a. C., na Grécia, uma demonstração da referida relação foi apresentada por Euclides em *Os Elementos*, especificamente na proposição 47 do livro I (Euclides 2009, p. 132).

A figura 22 apresenta a ilustração utilizada por Euclides para a respectiva demonstração da proposição que está, na sua versão original, descrita na citação a seguir.

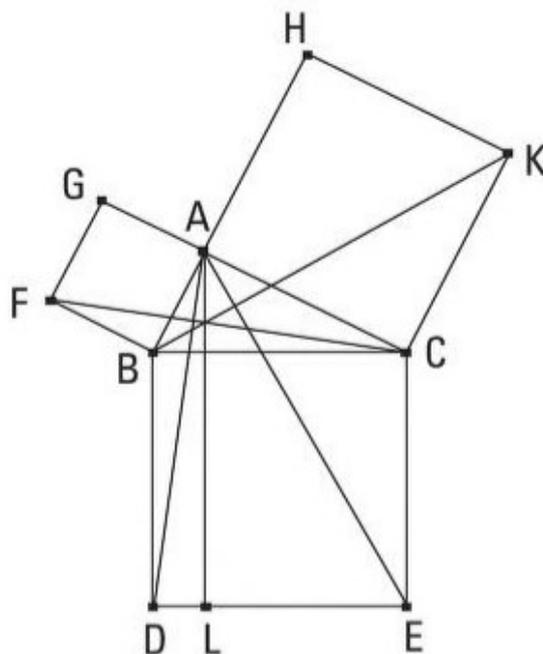


Figura 22: Figura utilizada por Euclides para demonstrar o teorema de Pitágoras.  
 Fonte: <https://archive.org/details/Os.Elementos-Euclides/page/n233/mode/1up>. Acesso em 16/09/2020.

“Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo BAC reto; digo que o quadrado sobre a BC é igual aos quadrados sobre as BA, AC. Fiquem, pois os GB, HC sobre as BA, AC, e pelo A, fique traçada a AL paralela a qualquer uma das BD, CE; e fiquem ligadas as AD, FC. E, como cada um dos ângulos sobre BAC, BAG é reto, então, as duas retas AC, AG, não postas no mesmo lado, fazem relativamente a alguma reta, a BA, e no ponto A sobre ela, os ângulos adjacentes iguais a dois retos; portanto, a CA está sobre uma reta com a AG. Pelas mesmas coisas, então, também a BA está sobre uma reta com a AH. E como o ângulo sob DBC é igual ao sob FBA; pois, cada um é reto; fique adicionado o sob ABC comum; portanto, o sob DBA todo é igual ao sob FBC todo. E como, por um lado, DB é igual à BC, e por outro lado, a FB, à BA, então, as duas DB, BA são iguais às duas FB, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob DBA é igual ao ângulo sob FBC; portanto, a base AD [é] igual à base FC, e o triângulo ABD é igual ao triângulo FBC; e, por um lado, o paralelogramo BL [é] o dobro do triângulo ABD; pois, tanto têm a mesma base BD quanto estão nas mesmas paralelas BD, AL; e, por outro lado, o quadrado GB é o dobro triângulo FBC; pois, de novo, tanto têm a mesma base FB quanto estão nas mesmas paralelas FB, GC. [Mas os dobros das coisas iguais são iguais entre si;] portanto, também o paralelogramo BL é igual ao quadrado GB. Do mesmo modo, então, sendo ligadas as AE, BK, será provado também o paralelogramo CL igual ao quadrado HC. E, por um lado, o quadrado BDEC foi descrito sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC, sobre as BA, AC. Portanto, o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA, AC.

Portanto, nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o [ângulo] reto; o que era preciso provar”. (Euclides, 2009, p.133)

Apresentamos agora a demonstração da proposição 47 do livro I de Os Elementos de Euclides com uma visão mais atual. Segundo Euclides, dado um triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ , a área do quadrado sobre o lado  $\overline{BC}$  é igual a soma das áreas dos quadrados sobre os lados  $\overline{BA}$  e  $\overline{AC}$ .

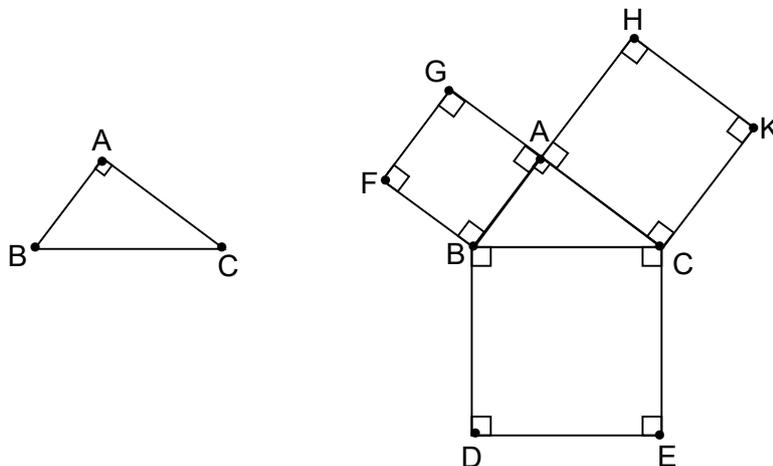


Figura 23: No triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ , os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  são, respectivamente, bases dos quadrados  $ABFG$ ,  $BCED$  e  $ACKH$

Fonte: autor

Se  $ABFG$ ,  $BCED$  e  $ACKH$  são quadrados então todos os seus ângulos são retos. Assim, os ângulos  $\widehat{BAG}$  e  $\widehat{BAC}$  são retos e adjacentes logo os segmentos  $\overline{GA}$  e  $\overline{AC}$  estão sobre a mesma reta  $\overleftrightarrow{AG}$ . E ainda os ângulos  $\widehat{BAC}$  e  $\widehat{HAC}$  são retos e adjacentes logo os segmentos  $\overline{HA}$  e  $\overline{GA}$  estão sobre a mesma reta  $\overleftrightarrow{AH}$ .

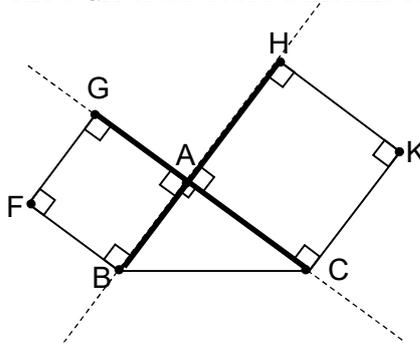


Figura 24: Pares de ângulos adjacentes e retos  $\widehat{BAG}$  e  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{BAC}$  e  $\widehat{HAC}$ , respectivamente sobre as retas  $\overleftrightarrow{CG}$  e  $\overleftrightarrow{BH}$

Fonte: autor

Sabendo que  $\widehat{DBC} = \widehat{FBA} = 90^\circ$  pode-se concluir que  $\widehat{DBC} + \widehat{ABC} = \widehat{FBA} + \widehat{ABC}$ , ou seja  $\widehat{DBA} = \widehat{FBC}$ . E como  $m(\overline{DB}) = m(\overline{BC})$  e  $m(\overline{FB}) = m(\overline{AB})$  tem-se por L.A.L que os triângulos  $ADB$  e  $FBC$  são congruentes e portanto,  $m(\overline{AD}) = m(\overline{FC})$

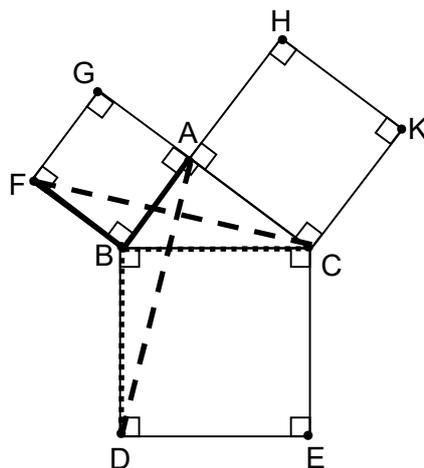


Figura 25: congruência entre os triângulos DBA e FBC.  
Fonte: autor

Seja  $L \in \overline{DE}$  tal que  $\overline{AL} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{CE}$ . Assim, a área do paralelogramo (trapézio retângulo)  $ABDL$  é igual ao dobro da área do triângulo  $ADB$  pois ambos possuem a mesma altura  $\overline{DL}$  e a mesma base  $\overline{BD}$ . Por outro lado, a área do quadrado  $ABFG$  é o dobro da área do triângulo  $FBC$  pois possuem a mesma base  $\overline{FB}$  e, como estão sob as mesmas paralelas  $\overline{CG}$  e  $\overline{FB}$ , possuem a mesma altura  $\overline{FG}$ . Mas como os triângulos  $ABD$  e  $FBC$  são congruentes pode-se concluir que o paralelogramo (trapézio retângulo)  $ABDL$  e o quadrado  $ABFG$  têm a mesma área.

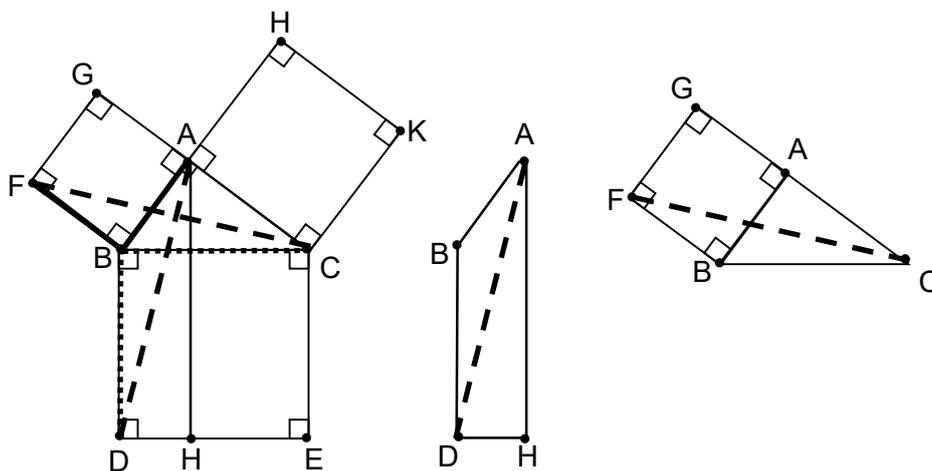


Figura 26: Relação entre a área do triângulo  $ABD$  com a área do quadrilátero  $ABDH$  e entre a área do triângulo  $FBC$  com a área do quadrado  $ABFG$ .  
Fonte: autor

Sabendo que  $\widehat{BCE} = \widehat{ACK} = 90^\circ$  pode-se concluir que  $\widehat{BCE} + \widehat{BCA} = \widehat{ACK} + \widehat{BCA}$ , ou seja  $\widehat{BCK} = \widehat{ACE}$ . E como  $m(\overline{AC}) = m(\overline{CK})$  e  $m(\overline{BC}) = m(\overline{CE})$  tem-se por L.A.L que os triângulos  $BCK$  e  $ACE$  são congruentes e portanto,  $m(\overline{BK}) = m(\overline{AE})$ .

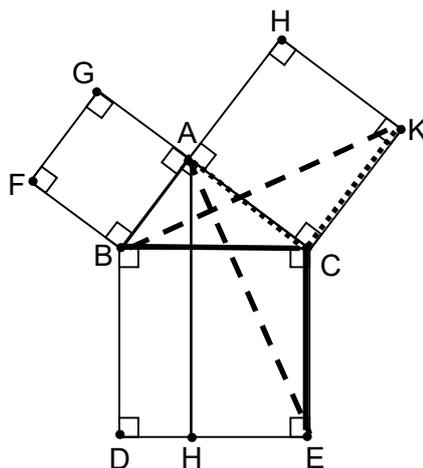


Figura 27: congruência entre os triângulos BCK e ACE.

Fonte: autor

A área do paralelogramo (trapézio retângulo) ACEH é igual ao dobro da área do triângulo ACE pois ambos possuem a mesma altura  $\overline{HE}$  e a mesma base  $\overline{CE}$ . Por outro lado, a área do quadrado ACKH é o dobro da área do triângulo BCK pois possuem a mesma base  $\overline{CK}$  e, como estão sob as mesmas paralelas  $\overline{CK}$  e  $\overline{AH}$ , possuem a mesma altura  $\overline{KH}$ . Mas como os triângulos BCK e ACE são congruentes pode-se concluir que o paralelogramo (trapézio retângulo) ACEH e o quadrado ACKH têm a mesma área.

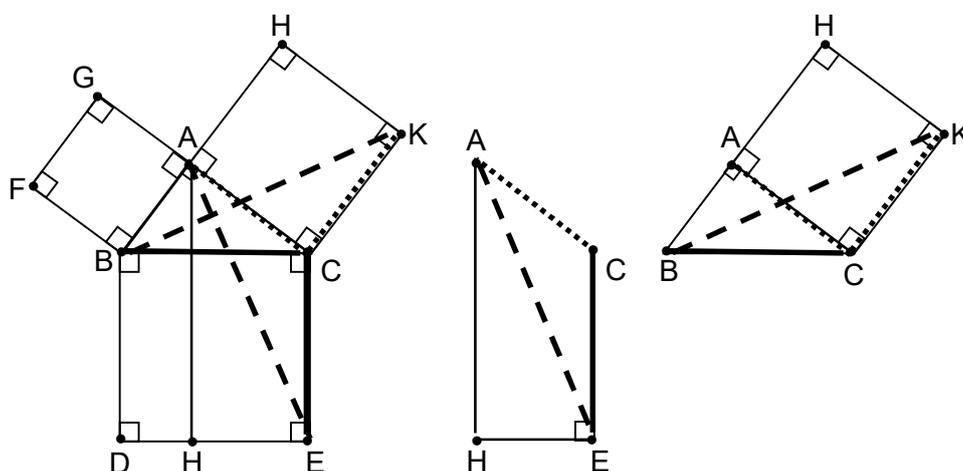


Figura 28: Relação entre a área do triângulo ACE com a área do quadrilátero ACEH e entre a área do triângulo BCK com a área do quadrado ACKH.

Fonte: autor

Portanto, nos triângulos retângulos, a área do quadrado sobre a hipotenusa é igual soma das áreas dos quadrados sobre os lados que contêm o [ângulo] reto; o que era preciso provar. É possível perceber, que a proposição de Euclides também aborda o teorema como uma relação entre áreas.

Pitágoras viveu de 569 a 500 a.C. e, portanto, não poderia ser o autor do teorema que envolve a relação entre as medidas dos lados do triângulo retângulo já que, conforme apresentado, era conhecido de outros povos antecessores a sua época. Assim, na seção a seguir apresentamos como esta relação provavelmente foi verificada por ele.

#### 4.6

### A RELAÇÃO DE PITÁGORAS

Segundo Oliveira e Nascimento (2020) não existem muitas evidências sobre sua vida pois o que se conhece são relatos que foram feitos muito tempo depois de sua morte. Pitágoras nasceu em Samos, ilha grega próxima a Mileto, no ano de 569 a.C.. Era filho de um rico negociante que o incentivou a desenvolver seus atributos de inteligência e justiça. Na idade adulta, teria deixado Samos para adquirir mais conhecimento<sup>11</sup> e viajado para Mileto e Babilônia. Vinte anos depois de partir para o Egito ele retornaria a Samos que se encontrava sob a tirania de Polícrates<sup>12</sup>. Pitágoras não escondia sua insatisfação por não admitir qualquer tipo de tirania e, por isto, foi banido de sua terra natal e fixou-se em Crotona. Lá fundou a Escola Pitagórica (540 a. C.), que era uma sociedade secreta com rigorosas regras de conduta e também uma comunidade religiosa que tinha nos números inteiros a representação de todas as coisas. Seu símbolo era um pentagrama, ou seja, um pentágono regular com suas diagonais traçadas. Esta sociedade reunia os discípulos para estudar filosofia, astronomia, música, geometria e aritmética em um centro de estudos. Sua construção durou dezoito meses e teria sido supervisionada pelo próprio Pitágoras. Situada a três mil passos do centro de Crotona, era cercada por muros altos e possuía um ginásio para atividades esportivas, um anfiteatro destinado ao público externo e um Templo para os iniciados. Após a morte de Pitágoras, em 500 a.C., a escola foi destruída

---

<sup>11</sup> Eves (2011) afirma que ano Egito, a matemática se desenvolveu de forma prática, como uma ciência prática que assistiu as atividades voltadas a agricultura e engenharia. Tais atividades exigiram o desenvolvimento de sistemas de pesos e medidas empregados a colheita, armazenamento, distribuição de alimentos; criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e ainda o desenvolvimento de práticas comerciais abrangendo lançamento e arrecadação de taxas. Enfim, a matemática estava presente na aritmética e na prática de mensuração.

<sup>12</sup> Polícrates de Samos (538 – 522 a. C.) tomou Samos de forma violenta com auxílio de seus irmãos Pantagnoto e Silioson. Mais tarde, assassinou o primeiro e exilou o segundo tornando o trono. Construiu considerável poder bélico e naval que lhe permitiu expandir seu império e morreu assassinado por inimigos políticos.

por um grupo político rival, tendo sido a maioria dos seus membros mortos e o restante se espalhou pelo mundo grego.

Roque (2012) ressalta que o pensamento dos Pitagóricos a respeito dos números era cercado de misticismo. Para eles aos números ímpares eram atribuídos o limitado, já os pares seriam o ilimitado. Assim, da união do ímpar com o par teria surgido a origem do mundo. Duarte, Gonçalves e Nóbrega (2017) acrescentam que os números ímpares representariam o masculino e os pares o feminino. Afirmam também que o número seria a razão de todas as coisas, estando presente na constituição de coisas abstratas como o pensamento, a beleza ou o sofrimento e na formação dos objetos físicos, dos seres vivos, incluindo o homem, e dos fenômenos atmosféricos celestes. Enfim, tudo no universo, incluindo a matéria, teria origem nos números, nas suas associações ou alterações. Assim, os pitagóricos constantemente filosofavam a respeito da origem dos números. No início, utilizavam a letra grega alfa para representar a unidade ( $\alpha = 1$ ) e posteriormente passaram a utilizar pontos ( $\bullet$ ) para a formação dos números.

Tal abordagem também é defendida por Roque (2012) que ressalta que números para os Pitagóricos não eram os símbolos que hoje conhecemos. Sua matemática era baseada em uma aritmética de pontos, representados por pedras organizadas em determinada configuração, dando origem aos números figurados. Por exemplo, a área de um triângulo formado por três pontos seria a representação do 3, hoje o símbolo desta quantidade. As figuras 29, 30 e 31 mostram a disposição de alguns números figurados, que são os números triangulares, números quadrados e números pentagonais respectivamente.

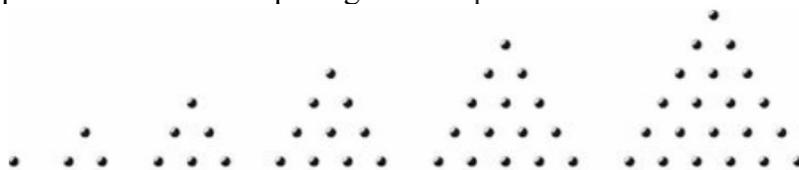


Figura 29: números triangulares (essas configurações representavam o que hoje escrevemos como 1, 3, 6, 10, 15, 21)  
Fonte: Roque (2012)

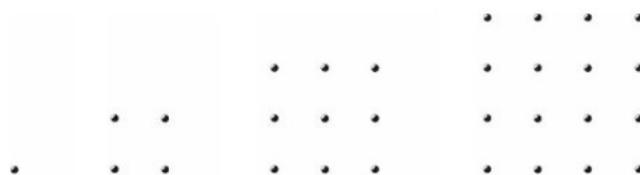


Figura 30: números quadrados. (essas configurações representavam o que hoje escrevemos como os quadrados 1, 4, 9, 16 =  $1^2$ ,  $2^2$ ,  $3^2$ ,  $4^2$ )  
Fonte: Roque (2012)



Figura 31: números pentagonais (essas configurações representavam o que hoje escrevemos como 1, 5, 12, 22)  
Fonte: Roque (2012)

Com essas configurações os pitagóricos obtinham relações aritméticas, como por exemplo o fato de todo o número quadrado ser resultado da adição de dois números triangulares, conforme ilustra a figura 32.

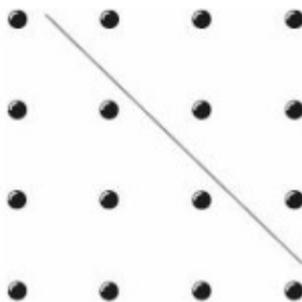


Figura 32: O número quadrado 16 sendo o resultado da adição dos números triangulares sucessivos 6 e 10.  
Fonte: Roque 2012

Roque (2012) sugere que não deve ter existido a forma geométrica do teorema que envolve as medidas dos lados de um triângulo retângulo e sim um estudo sobre as triplas pitagóricas, uma propriedade dos números quadrados que consistia em encontrar um número quadrado que fosse a soma de outros dois números quadrados, sendo tais triplas formadas por números inteiros e associadas às medidas dos lados de um triângulo retângulo. A autora aponta ainda que os Pitagóricos teriam chegado a essas triplas por meio de uma figura conhecida como *gnomon*, que era um número ímpar com formato de esquadro, composto pelas diferenças entre dois números quadrados sucessivos, conforme figura 33.

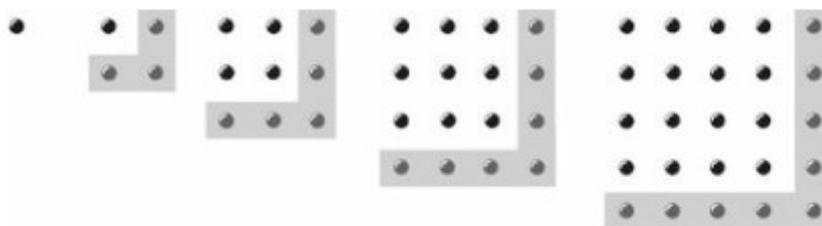


Figura 33: sequência de obtenção de números quadrados através de gnomons, partes escurecidas em cada número quadrado

Fonte: Roque 2012

Na figura 33, o número quadrado 4 é composto pelo número quadrado 1 e adicionado ao gnomon de três pontos<sup>13</sup> e o número quadrado 25 é formado pelo número quadrado 16 mais o gnomon de 9 pontos (que também é um número quadrado); obtendo-se assim a igualdade  $9 + 16 = 25$  obtida a partir da primeira tripla pitagórica formada pelos números quadrados 3, 4 e 5.

Proclus de Lycia (412 – 485), segundo Chlup (2012), foi um dos maiores filósofos da antiguidade e produziu a versão mais sistemática do pensamento neoplatônico e, segundo Roque (2012), Proclus<sup>14</sup> atribui aos pitagóricos um método para encontrar triplas pitagóricas a partir de números ímpares. De acordo com tal método, a partir de um dado número ímpar, toma-se o seu quadrado, subtrai-se uma unidade e divide-se o resultado por dois obtendo o segundo número da tripla; e, para se obter o terceiro, toma-se o quadrado do referido número ímpar, acrescenta-se uma unidade e divide-se o resultado por dois. A autora descreve este método através da linguagem matemática atual, e admitindo  $a$  o número ímpar os outros números que formam a tripla pitagórica são dados por

$$\frac{a^2 - 1}{2} \text{ e } \frac{a^2 + 1}{2}$$

e por consequência tem-se

$$a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2$$

De fato, tomemos, por exemplo,  $a = 5$  assim teríamos

<sup>13</sup> De fato, consideramos quadrados e estendendo este raciocínio para o conjunto dos números reais pode-se perceber que  $1^2 + (\sqrt{3})^2 = 2^2$ .

<sup>14</sup> Segundo Eves (2012) o tablete de Plimpton 322 é uma prova de que os babilônios já conheciam meios de encontrar estas triplas

$$\frac{a^2-1}{2} = \frac{5^2-1}{2} = \frac{25-1}{2} = 12$$

e

$$\frac{a^2+1}{2} = \frac{5^2+1}{2} = \frac{25+1}{2} = 13$$

e por consequência

$$a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2 \Rightarrow 5^2 + 12^2 = 13^2$$

A autora acrescenta que através deste método é possível determinar algumas triplas pitagóricas porém, não todas. A autora acrescenta que os triângulos retângulos eram usados para somar áreas e a aritmética dos números figurados possibilitava encontrar um quadrado cuja área fosse a soma das áreas de outros dois, levando a acreditar que a esta seria a origem da associação da relação de Pitágoras aos triângulos.

#### 4.7

### PROPOSTA DE ATIVIDADE 2

Nesta seção, sugerimos uma atividade prática cujo objetivo é mostrar a relação de áreas existente na relação entre os lados do triângulo retângulos, ressaltando que a atividade deve ser executada após a apresentação do triângulo retângulo e de seus elementos.

#### 4.7.1

### ETAPAS DO ENSINO DE MATEMÁTICA POR ATIVIDADE EXPERIMENTAL PARA A ATIVIDADE “REFLETINDO SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS”

A seguir apresentamos as etapas da metodologia referente ao *Ensino de Matemática por Atividade Experimental* para a proposta de atividade.

#### Organização:

- Dividir a turma em duplas.
- Para cada dupla, distribuir uma régua e uma folha de papel 40 kg no formato A4.
- Distribuir para cada dupla uma cópia da atividade 2.

**Apresentação:**

Nesta etapa, com o objetivo situar a turma no referido contexto histórico onde se desenvolveu o teorema de Pitágoras, sugerimos que o professor faça uma breve narração de sua biografia.

**Execução:**

Sugerimos que o professor oriente o início da execução da atividade, seguindo o roteiro abaixo para realizar as dobraduras.

1. Tome a folha de papel 40 kg no formato A4 e com a régua marque, na lateral de maior comprimento, os comprimentos 10 cm, 18 cm e 24 cm, onde o papel deverá ser dobrado e posteriormente cortado (figura 34).

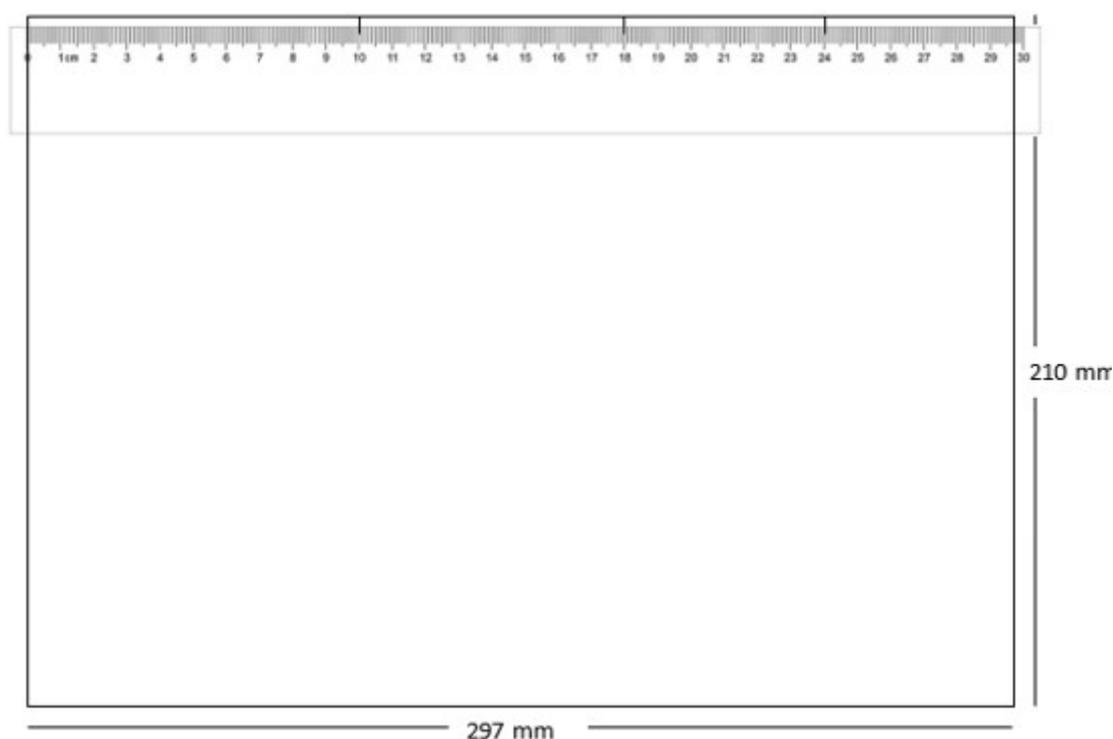


Figura 34: Marcação na folha de papel 40 kg, para dobradura e corte.  
Fonte: Autor.

2. Para realizar a dobra basta manter alinhada a lateral e vincar a folha em cada marcação (figura 35).

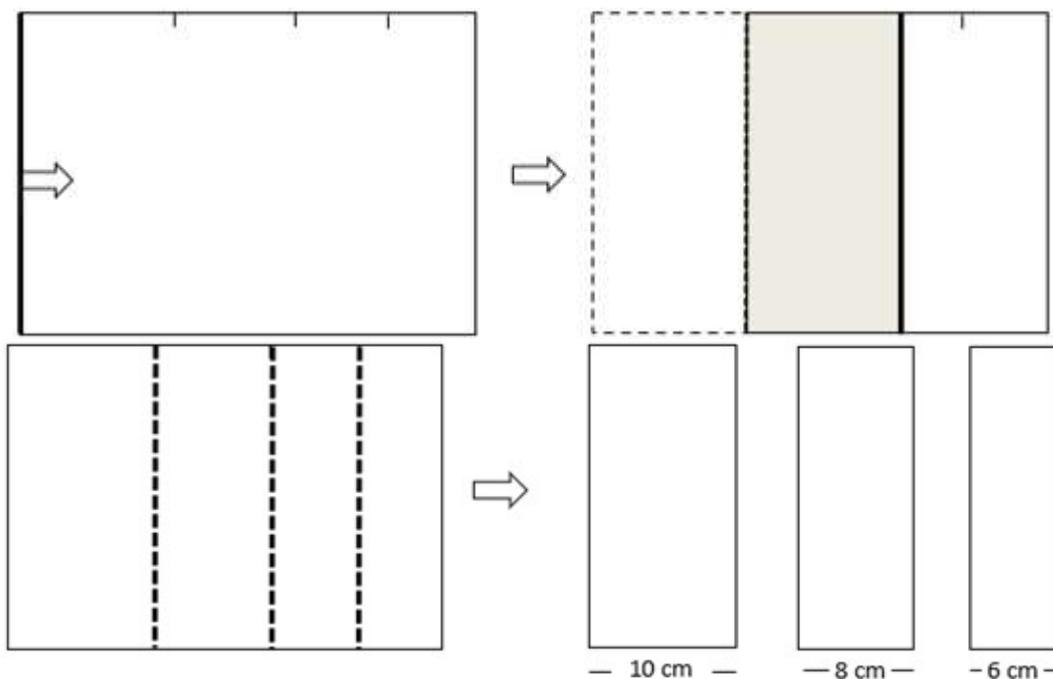


Figura 35: Dobradura e corte das folhas  
Fonte: Autor.

3. Em cada uma das tiras formadas, faça dobraduras para formar três quadrados de lados 10 cm, 8 cm e 6 cm (figura 36).

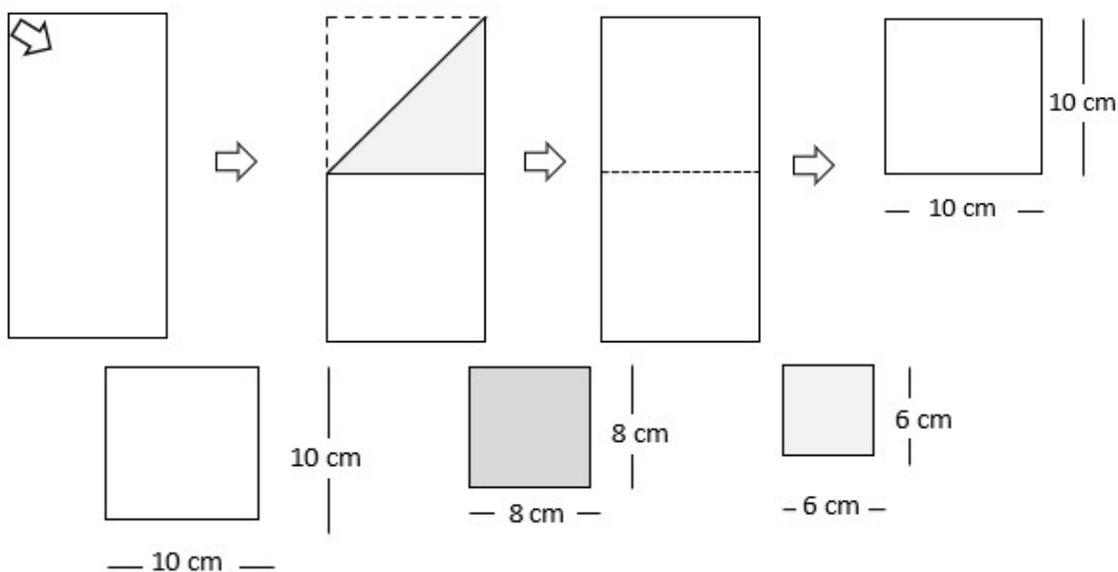


Figura 36: Dobradura e corte dos quadrados  
Fonte: Autor.

**Registro:**

- Solicite que a área de cada quadrado seja calculada e registrada na tabela fornecida

**Análise:**

- Compare os valores obtidos para as áreas e verifique que existe uma expressão matemática que as relaciona:  $100 \text{ cm}^2 = 64 \text{ cm}^2 + 36 \text{ cm}^2$

- Por sobreposição dos quadrados formado através das dobraduras, prove a expressão matemática obtida (figura 37).

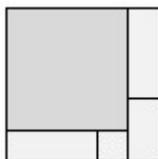


Figura 37: Comparação das áreas dos quadrados por corte e sobreposição.  
Fonte: Autor.

### Institucionalização

Nesta etapa, os alunos devem posicionar os quadrados de modo a formar um triângulo retângulo, conforme a figura 38.

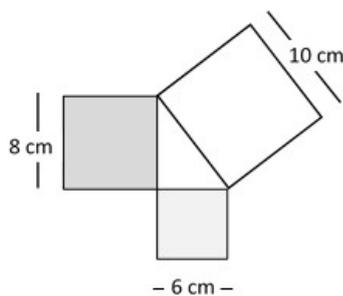


Figura 38: Formação de um triângulo retângulo com os lados dos quadrados.  
Fonte: Autor.

A seguir, solicite que os alunos respondam perguntas sobre a característica do triângulo formado. Foram elaboradas perguntas e desafios algébricos para levar os alunos a refletirem sobre a prática e induzi-los à compreensão da relação de área presente na relação das medidas dos lados de um triângulo retângulo. Como última questão da tarefa, os alunos são convidados a descrever, na língua materna, um relato de toda a atividade.

#### 4.7.2

### ATIVIDADE 2: REFLETINDO SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS

A seguir, apresentamos a atividade a ser desenvolvida pelos alunos. A mesma é composta por perguntas que visam induzir os alunos a compreender a relação de área presente no teorema de Pitágoras

## ATIVIDADE 2: REFLETINDO SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS



<https://www.historianopaint.com/2020/11/12-imagens-com-rostos-reconstruidos-de.html>. Acesso em 13/02/21

No ano de 569 a. C, na ilha grega de Samos, nasceu Pitágoras. Filho de um rico negociante que o incentivou a desenvolver sua inteligência. Na idade adulta, teria deixado Samos para adquirir mais conhecimento e viajado a Mileto, Egito e Babilônia. Estudou astronomia, música, geometria e aritmética e tornando-se assim um grande matemático e um grande filósofo. Ao retornar à sua cidade, fundou em Crotona uma fraternidade de caráter político-filosófico-religioso conhecida como Escola Pitagórica e que tinha nos números inteiros, a representação de todas as coisas, sendo seu símbolo um pentagrama - pentágono regular com suas diagonais traçadas. Esta sociedade reunia os discípulos para estudar filosofia, astronomia, música, geometria e aritmética em um centro de estudos. Conta a história que uma das grandes descobertas de Pitágoras, que é famosa até nossos dias, é a relação entre os lados do triângulo

retângulo: “*O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*”.

### AGORA O DESAFIO É PARA VOCÊS

- Dividam-se em duplas.
- Material necessário: uma folha de papel e régua.
- Esperar orientações do professor para fazer quadrados a partir de dobraduras.

### FAÇAM O QUE SE PEDE EM CADA QUESTÃO

1) Sabendo que a área de um quadrado é obtida através do produto das medidas de seus lados (lado x lado), calcule a área de cada quadrado e registre na tabela abaixo:

Quadrado	Medida da área (cm <sup>2</sup> )
lado 10 cm	
lado 8 cm	
lado 6 cm	

2) Observe os valores encontrados para a área de cada quadrado e escreva uma expressão matemática que as relaciona.

\_\_\_\_\_

3) Através de dobradura e corte, sobreponha os quadrados menores ao quadrado maior para validar a expressão que você encontrou no item anterior.

4) Utilize os lados dos quadrados obtidos através das dobraduras para montar um triângulo.

5) Qual é a classificação deste triângulo quanto aos ângulos? Justifique.

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

6) Como é conhecido o lado de maior medida? \_\_\_\_\_

7) Como são conhecidos os outros dois lados? \_\_\_\_\_

8) Qual é a relação matemática entre as medidas dos lados deste triângulo?

10) Faça uma generalização relacionando esses nomes com a expressão matemática que relaciona os lados deste triângulo.

---

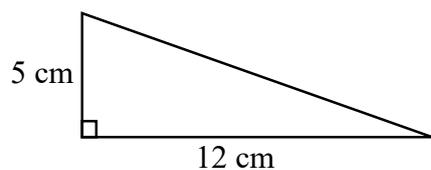


---



---

11) Observe a figura:



Responda:

a) Imagine um quadrado cuja medida do lado é igual a medida do menor cateto deste triângulo. Qual é a área deste quadrado?

---

b) Imagine um quadrado cuja medida do lado é igual a medida do menor cateto deste triângulo. Qual é a área deste quadrado?

---

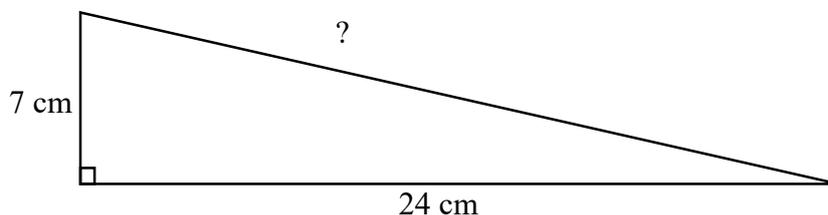
c) Imagine um quadrado sobre a hipotenusa deste triângulo. Qual é a área deste quadrado?

---

d) Qual é a medida da hipotenusa deste triângulo?

---

12) Encontre a medida desconhecida no triângulo:





## 4.8

### PROPOSTA DE ATIVIDADE 3

Nesta seção, apresentamos a sugestão de uma segunda atividade prática cujo objetivo é verificar a relação aritmética dos números quadrados dos pitagóricos e associá-la às medidas dos lados do triângulo retângulo.

#### 4.8.1

### ETAPAS DO ENSINO DE MATEMÁTICA POR ATIVIDADE EXPERIMENTAL PARA A ATIVIDADE “OS NÚMEROS FIGURADOS E O TEOREMA DE PITÁGORAS”

Para a atividade sugerida, as etapas estão discriminadas a seguir.

#### **Organização:**

- Divida a turma em duplas.
- Para cada dupla, distribua uma régua e uma folha de papel quadriculado
- Distribua para cada dupla uma cópia da atividade 2.
- Explique o que é o papel quadriculado e qual é o seu objetivo

#### **Apresentação:**

A atividade deve ser iniciada pelo professor ao ler a descoberta histórica dos números figurados quadrados pelos pitagóricos. Em seguida os alunos devem desenvolver a atividade sob a supervisão do professor.

#### **Execução:**

Os alunos devem realizar a atividade seguindo a proposta de atividade 2 apresentada na próxima seção. Nela constam as seguintes situações a serem realizadas.

1. Peça para que os alunos desenhem um número figurado quadrado 10 (figura 39).

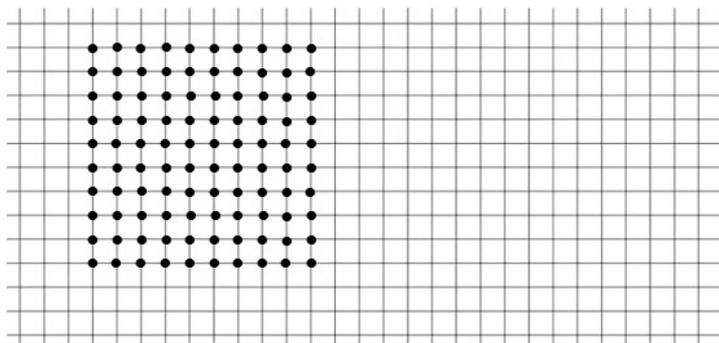


Figura 39: Desenho do número figurado quadrado 10.  
Fonte: Autor.

2. Sugira às duplas para destacarem o número figurado quadrado 6 (figura 40).

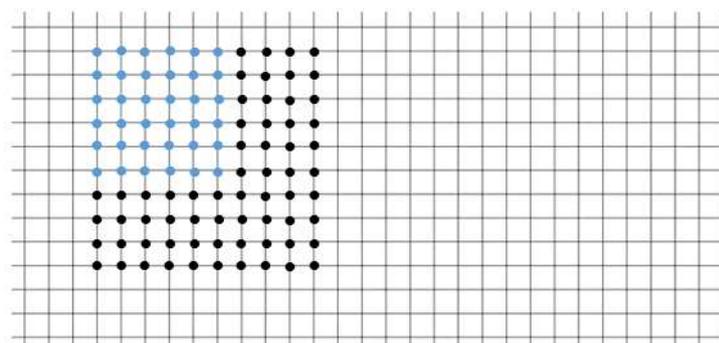


Figura 40: Destaque do número figurado quadrado 6.  
Fonte: Autor.

### Registro:

1. Os alunos devem reconhecer os demais pontos como o número quadrado 8, associando  $64$  a  $8^2$ .
2. Registre no papel quadriculado os demais pontos não destacados na forma de um número quadrado (figura 41).

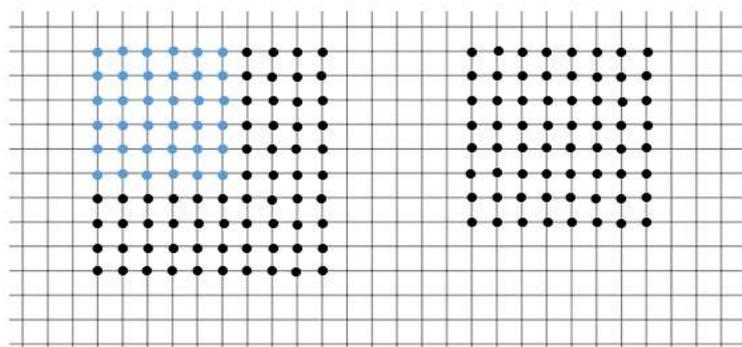


Figura 41: Pontos não destacados na forma do número figurado quadrado 8.  
Fonte: Autor.

3. Registre na tabela fornecida os números figurados presentes na construção.

**Análise:**

1. Escreva a relação entre os números figurados registrados.
2. No papel quadriculado construa dois segmentos perpendiculares e consecutivos. O primeiro horizontal de comprimento 8 cm e o segundo vertical de comprimento 6 cm.
3. Feche o triângulo e classifique-o quanto aos ângulos (figura 42).

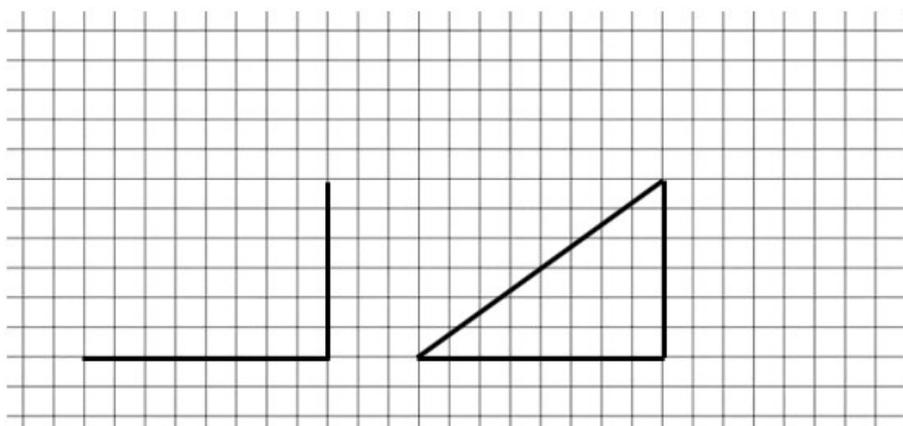


Figura 42: Construção de triângulos retângulos no papel quadriculado.

Fonte: Autor.

4. Meça o comprimento da hipotenusa

**Institucionalização**

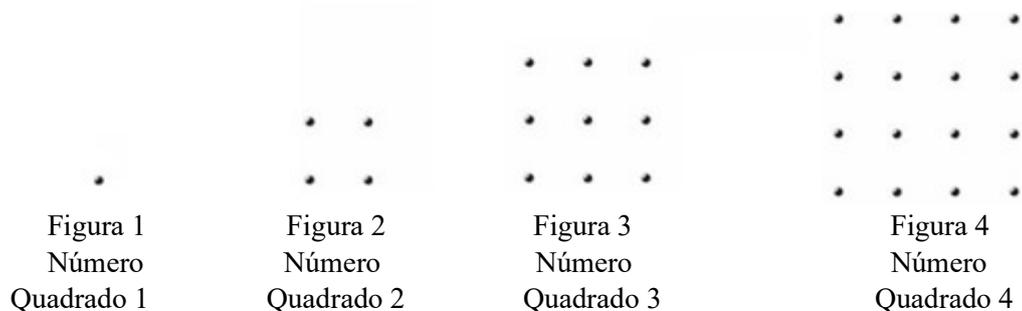
Nesta etapa os alunos serão levados a reconhecer a relação entre os números figurados e as medidas dos lados do triângulo retângulo formado com eles, estabelecendo a relação de Pitágoras para o triângulo retângulo.

**4.8.2****ATIVIDADE 3: OS NÚMEROS FIGURADOS E O TEOREMA DE PITÁGORAS**

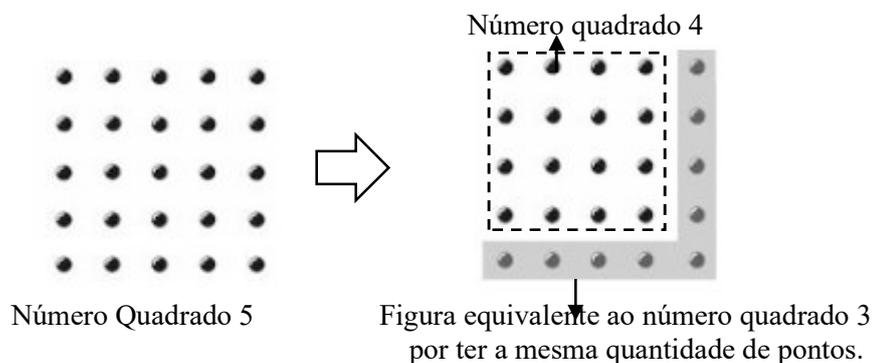
Apresentamos a seguir o roteiro da atividade a ser desenvolvida pelos alunos, com o objetivo de reconhecer no triângulo retângulo a relação presente nos números figurados quadrados.

### ATIVIDADE 3: OS NÚMEROS FIGURADOS E O TEOREMA DE PITÁGORAS

Dentre os estudos realizado por Pitágoras e pelos pitagóricos está uma aritmética estabelecida através de pontos. Os números para os pitagóricos não eram representados pelos algarismos que conhecemos hoje: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Sua matemática era baseada em pontos, representados por pedras organizadas em determinada configuração, dando origem aos números figurados, como por exemplo os números figurados quadrados representados abaixo.



A partir destas configurações, os pitagóricos formavam relações entre números quadrados. Observe:



#### AGORA O DESAFIO É PARA VOCÊS

- Dividam-se em duplas.
- Material necessário: régua e uma folha de papel quadriculado.

#### FAÇAM O QUE SE PEDE EM CADA QUESTÃO

1) Responda:

a) Por que você acha que a figura 2, que possui 4 pontos, é chamada de *número quadrado 2*?

---



---

b) Por que vocês acham que a figura 3 que possui 9 pontos é chamada de *número quadrado 3*?

---

c) Por que vocês acham que a figura 4 que possui 16 pontos é chamada de *número quadrado 4*?

---

d) Por que vocês acham que a figura 1 que possui 1 ponto é chamada de *número quadrado 1*?

---

- 2) Represente o número quadrado 10 na folha de papel quadriculado.
- 3) Destaque na representação anterior o número quadrado 6.
- 4) A que número quadrado corresponde os pontos não destacados? Por que?
- 5) Represente-o na folha de papel quadriculado.
- 6) Complete a tabela com base na sequência de números figurados que você construiu.

	Nome	Quantidade de Pontos
1º número figurado representado		
2º número figurado representado		
número figurado oculto		

- 7) Escreva a relação matemática que envolve estes três números figurados quadrados.

---

- 8) Aproveitando as pautas da folha de papel quadriculado construa:
  - a) um vertical de comprimento 6 cm.
  - b) um segmento horizontal de 8 cm a partir de uma das extremidades do segmento construído anteriormente.
  - c) utilize a régua para unir as extremidades livres de cada segmento.
  - d) Utilize a régua e meça o segmento que fecha o triângulo.
- 9) Qual é a medida deste segmento? \_\_\_\_\_
- 10) Em relação aos ângulos deste triângulo responda: que tipo de triângulo você formou?  
\_\_\_\_\_
- 11) Como é chamado o lado de maior comprimento deste triângulo?  
\_\_\_\_\_
- 12) Como são chamados os outros dois lados deste triângulo?  
\_\_\_\_\_
- 13) Pelo que você viu anteriormente em relação aos números quadrados, escreva uma relação matemática envolvendo as medidas dos lados deste triângulo.  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_



## 5 A EQUAÇÃO DO 2º GRAU

A equação do 2º grau é um conteúdo tradicional do 9º Ano do ensino fundamental e a figura 43 reflete o pensamento de muitos alunos sobre este assunto e sua abordagem.

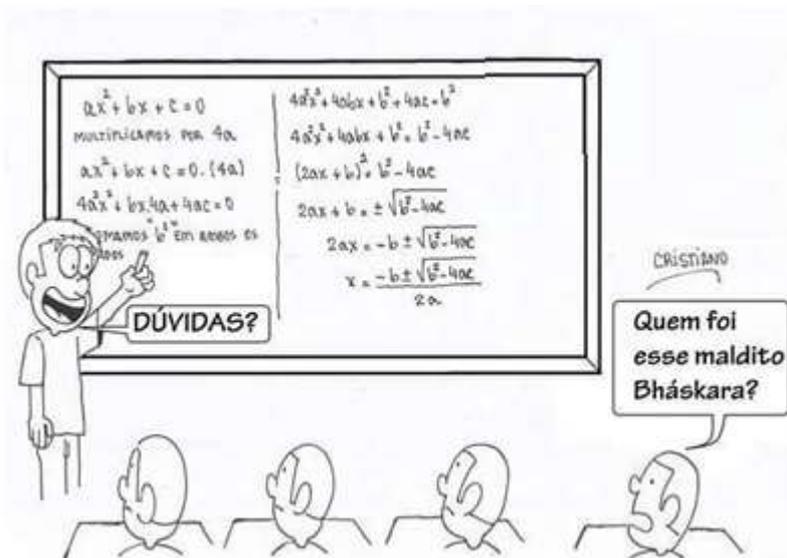


Figura 43: Charge representando o ensino da equação do 2º grau na escola básica.

Fonte:

<https://pt-br.facebook.com/matematicario/photos/f%C3%B3rmula-de-bhaskara-que-n%C3%A3o-%C3%A9-de-bhaskara-hahaha-feliz-dia-do-matem%C3%A1ticoentenda-/1488630137819286/>. Acesso em 06/03/2021 (modificada).

Também é bastante comum os livros didáticos apresentarem a “fórmula de Bhaskara” como uma fórmula resolvente desta equação. Atualmente o método resolvente conhecido como “completar o quadrado” também tem sido apresentado, como é possível ver em Júnior e Castrucci (2018). Pouco se comenta que as equações quadráticas já eram conhecidas por outros povos em várias épocas distintas. Pouco se apresenta da forma como esses povos as resolviam e também dificilmente são mencionados outros matemáticos que desenvolveram resoluções para essas equações. Conhecer a história em torno das equações do 2º grau permite compreender sua utilidade e mais uma vez perceber que a matemática é uma linguagem da construção humana.

Assim, o objetivo deste capítulo é apresentar uma contextualização histórica, apresentando os povos que já conheciam esta equação e como as resolviam, passando pela figura de Bháskara, personagem frequentemente citado na escola fundamental como autor da fórmula resolvente (fato que também

merece uma breve discussão) até chegar aos árabes com os resultados trazidos pelo matemático Al-Khwarizmi.

## 5.1

### A EQUAÇÃO DO 2º GRAU NO EGITO

De acordo com Eves (2011), a matemática egípcia foi desenvolvida baseada em necessidades práticas de agricultura, engenharia, administração entre outras. Eves destaca que nesta matemática não havia um caráter demonstrativo, havendo a descrição de procedimentos, ao invés de argumentos, na forma de instruções aplicáveis em casos específicos.

Roque (2012) afirma que a forma de transmitir conhecimentos, para garantir a formação das próximas gerações, era através dos papiros, cujos conteúdos continham problemas que procuravam antecipar situações em que os administradores mais jovens poderiam se deparar no futuro e suas respectivas soluções.

Dentre esses papiros, destaca-se o papiro de Berlim, que segundo Barasuol (2006) data de aproximadamente 1800 a.C. e encontra-se atualmente no museu Staatliche em Berlim. Segundo a autora, dois problemas presentes neste papiro dão origem a um sistema de equação do 2º grau. Um deles é assim descrito:

É-te dito ... a área de um quadrado de 100 [cúbitos<sup>15</sup> quadrados] é igual à de dois quadrados mais pequenos. O lado de um dos quadrados é  $1/2 + 1/4$ <sup>16</sup> o lado do outro. Diz-me quais são os lados dos dois quadrados desconhecidos. (Pereira 2017 apud Clagett, 1999, pp. 250-251).

Pereira (2017) afirma que os egípcios resolviam este tipo de problemas com um método chamado método da falsa posição e apresenta os passos dados pelos escribas egípcios para resolver tal problema:

Tome sempre o quadrado de lado 1. Então o lado do outro é  $1/2 + 1/4$ . Multiplica-o por  $1/2 + 1/4$ . A área do quadrado pequeno dá  $1/2 + 1/16$ .

<sup>15</sup> O cúbito era uma unidade de medida de comprimento utilizada pelos egípcios há cerca de 4 mil anos, que indicava a distância do cotovelo até a ponta do dedo médio.

<sup>16</sup> Os egípcios utilizavam uma estrutura de números racionais baseada na fração  $2/3$  e nas frações unitárias, que são frações cujo numerador é igual a 1. Assim, representavam qualquer fração através da adição da fração  $2/3$  com outras frações unitárias ou através da adição de parcelas formadas exclusivamente por frações unitárias.

A soma da área dos dois quadrados pequenos é  $1 + 1/2 + 1/16$ . Calcule a raiz quadrada de  $1 + 1/2 + 1/16$ . É  $1 + 1/4$ . Calcule a raiz quadrada de 100 cúbitos. É 10. Divide 10 por  $1 + 1/4$ . Dá 8, o lado de um quadrado. Calcule  $1/2 + 1/4$  de 8. Dá 6, o lado do outro quadrado. (Pereira 2017 apud Gillings, 1972, p. 161).

Para Pereira (2017) o problema do Papiro de Berlim pode ser traduzido para a forma matemática da seguinte forma:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)y \end{cases}$$

E pelo método da falsa posição, faz-se  $y = 1$  e por consequência  $x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$ . A seguir, as passagens omitidas pelos escribas serão desenvolvidas em nosso sistema de numeração.

- Tome um quadrado de lado 1. Então o lado do outro é  $1/2 + 1/4$

Segundo Eves (2011), os egípcios utilizavam a fração  $2/3$  e representavam todas as outras como a soma de frações unitárias, que são frações com numerador igual a 1. Assim, no nosso sistema de numeração, a fração  $1/2 + 1/4$  equivale a fração  $3/4$  e na expressão inicial da resolução do problema, o escriba se refere aos dois quadrados menores e atribui a eles as medidas de seus lados: o primeiro medindo 1 cúbito e o segundo medindo  $1/2 + 1/4$ . Assim,  $y^2$  corresponde a área do quadrado de lado 1 cúbito e  $x^2$  corresponde a área do quadrado de lado  $1/2 + 1/4$  cúbito.

- Multiplica-o por  $1/2 + 1/4$ . A área do quadrado pequeno dá  $1/2 + 1/16$ .

Nesta passagem, o escriba encontra a área do quadrado menor, bastando para isto multiplicar a medida do lado deste quadrado por ela mesma.

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

Os egípcios possuíam conhecimento da propriedade distributiva da multiplicação e o cálculo do quadrado de  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$  era feito da seguinte forma

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

Logo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$$

Vale ressaltar que o escriba não mencionou o cálculo da área do quadrado de lado 1 cúbito, que é 1 cúbito quadrado.

- A soma da área dos dois quadrados pequenos é  $1 + 1/2 + 1/16$ .

A soma das áreas dos dois quadrados menores é então  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$  (1).

- Calcule a raiz quadrada de  $1 + 1/2 + 1/16$ . É  $1 + 1/4$ . Calcule a raiz quadrada de 100 cúbitos. É 10.

Segundo Gillings (1972) os egípcios calculavam e registravam tanto quadrados de números inteiros quanto de números fracionários, porém, não suas raízes. Não havia um método para encontrar raízes quadradas de quadrados perfeitos e quando necessário, bastaria consultar as tabelas de quadrados de números inteiros e fracionários, semelhante a figura 44<sup>17</sup>, onde é possível perceber na última linha da primeira coluna que o quadrado de 10 é 100 e na segunda linha da sétima coluna que o quadrado de  $1 + \frac{1}{4}$  é  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$ .

Perfect squares as they might have been tabulated by the scribes.

No.	Square	No.	Square	No.	Square	No.	Square
1	1	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{16}$
2	4	$1\bar{2}$	$2\bar{4}$	$1\bar{3}$	$1\bar{3}\bar{9}$	$1\bar{4}$	$1\bar{2}\bar{16}$
3	9	$2\bar{2}$	$6\bar{4}$	$2\bar{3}$	$5\bar{3}\bar{9}$	$2\bar{4}$	$5\bar{16}$
4	16	$3\bar{2}$	$12\bar{4}$	$3\bar{3}$	$11\bar{9}$	$3\bar{4}$	$10\bar{2}\bar{16}$
5	25	$4\bar{2}$	$20\bar{4}$	$4\bar{3}$	$18\bar{3}\bar{9}$	$4\bar{4}$	$18\bar{16}$
6	36	$5\bar{2}$	$30\bar{4}$	$5\bar{3}$	$28\bar{3}\bar{9}$	$5\bar{4}$	$27\bar{2}\bar{16}$
7	49	$6\bar{2}$	$42\bar{4}$	$6\bar{3}$	$40\bar{9}$	$6\bar{4}$	$39\bar{16}$
8	64	$7\bar{2}$	$56\bar{4}$	$7\bar{3}$	$53\bar{3}\bar{9}$	$7\bar{4}$	$52\bar{2}\bar{16}$
9	81	$8\bar{2}$	$72\bar{4}$	$8\bar{3}$	$69\bar{3}\bar{9}$	$8\bar{4}$	$68\bar{16}$
10	100	$9\bar{2}$	$90\bar{4}$	$9\bar{3}$	$87\bar{9}$	$9\bar{4}$	$85\bar{2}\bar{16}$

Figura 44: Tabela de quadrados de números inteiros e fracionários  
Fonte: GILLINGS (1972)

Como a soma das áreas equivale a 100, esta passagem sugere a seguinte equivalência:

$$x^2 + y^2 = 100$$

<sup>17</sup> Gillings utiliza a notação  $\bar{n}$  para representar uma fração unitária  $\frac{1}{n}$  e  $\bar{2}$  para representar a fração  $\frac{2}{3}$ .

Como  $x^2 + y^2$  é a soma das áreas dos quadrados menores, substituindo esta soma pela expressão (1) tem-se:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 100$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 100 \quad \leq \sqrt{\quad}$$

$$1 + \frac{1}{4} = 10$$

- *Divide 10 por  $1 + 1/4$ . Dá 8.*

Conforme Boyer (2012), no processo de divisão, os egípcios procediam duplicando o divisor sucessivamente. Assim, tem-se

$$1 + \frac{1}{4} = 10 \quad \div \left(1 + \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1 + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{10}{1 + \frac{1}{4}} \quad \times 2$$

$$\frac{2 + \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{20}{2 + \frac{1}{2}} \quad \times 2$$

$$\frac{4 + 1}{4 + 1} = \frac{40}{4 + 1}$$

$$\frac{5}{5} = \frac{40}{5}$$

$$1 = 8$$

Então, tem-se que uma das raízes é 8. De fato, tem-se que:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)y \end{cases}$$

Então, escrevendo o desenvolvimento na linguagem matemática atual, teríamos:

$$\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)y\right)^2 + y^2 = 100$$

$$\left(\frac{3}{4}y\right)^2 + y^2 = 100$$

$$\frac{9}{16}y^2 + y^2 = 100$$

$$\frac{25}{16}y^2 = 100 \quad \leq \sqrt{\quad}$$

$$\frac{5}{4}y = 10 \quad \leq \div \frac{5}{4}$$

$$y = \frac{10}{\frac{5}{4}} = 10 \cdot \frac{4}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

- Dá 6, o lado do outro quadrado.

Como o lado de um dos quadrados é  $1/2 + 1/4$  o lado do outro, tem-se as correspondências

1	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	x 2
2	$2 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2}$	x 2
4	$2 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2 + 1 = 3$	x 2
8	$2 \times 3 = 6$	

De fato como  $y = 8$  e  $x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)y$ , tem-se que  $x = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$ .

## 5.2

### A EQUAÇÃO DO 2º GRAU NA BABILÔNIA

Conforme já mencionado na seção 4.1, os babilônios transmitiam seus conhecimentos através de escritas em placas e, de acordo com Pereira (2017), dezenas delas indicam que 2000 anos a.C. este povo já conhecia e resolvia três tipos de equações completas com coeficientes positivos, cujas formas são:  $x^2 + x = c$ ,  $x^2 = bx + c$  e  $x^2 + c = bx$ .

Segundo Boyer (2012), as equações quadráticas, tanto na antiguidade como nas Idades Média e Moderna, eram classificadas nos 3 tipos apontados acima por Pereira (2017) já que, até então, não se pensava em resolver equações da forma  $x^2 + bx + c = 0$  com  $b$  e  $c$  positivos pois para tais casos não há raízes positivas. O autor também afirma que todos esses tipos de equações quadráticas já eram conhecidos pelos babilônios há 4000 anos e que suas soluções podiam ser encontradas em textos de problemas presentes em tabletes de argila.

Para perfeita interpretação deste desenvolvimento, conhecer o sistema de numeração babilônio<sup>18</sup> e as operações neste sistema torna-se fundamental. O sistema de numeração babilônio era um sistema de numeração posicional de base 60. De acordo com Friberg (2007), todo número inteiro  $a$ , pode ser escrito na forma

$$a = a_{n-1} \cdot 60^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 60^2 + a_1 \cdot 60^1 + a_0$$

<sup>18</sup> É importante ressaltar que os babilônios não utilizavam outros símbolos em seu sistema numérico, não havia um símbolo para representar o zero e entre as ordens se diferenciavam através de espaço entre os símbolos.

onde  $n$  é um inteiro e  $a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  são inteiros entre 1 e 59.

Para Pereira (2017), este sistema apresenta uma convenção<sup>19</sup> que consiste em separar as unidades das diferentes ordens decimais por *vírgulas* (,) e apresenta um exemplo:

$$2, 35, 42 = 2 \times 60^2 + 35 \times 60 + 42 = 9342$$

O autor acrescenta que esta convenção é usada tanto na escrita de números inteiros como na de números fracionários e a separação entre a parte inteira e a parte fracionária é dada por *ponto e vírgula* (;), como no exemplo:

$$3,21;11,27 = 3 \times 60 + 21 + 11 \times 60^{-1} + 27 \times 60^{-2}.$$

Nas subseções a seguir serão apresentados alguns dos problemas correspondentes aos tipos de equações conhecidas pelos babilônios presentes em algumas placas da época. As soluções eram feitas pelo “método de completar o quadrado” que também serão descritos além de explicitarmos o desenvolvimento destas soluções através das representações matemáticas atuais.

### 5.2.1

#### O PROBLEMA 1 DA PLACA BM 13901

Conforme Pereira (2017) o primeiro problema presente na placa BM 13901 que se encontra no British Museum apresenta uma equação quadrática do tipo  $x^2 + bx = c$ , traduzida como: “*Adicionei a superfície e o lado do meu quadrado e obtive 0;45. Qual é o lado?*”.

Segundo o autor, a solução foi apresentada pelos escribas babilônios através de instruções, da seguinte forma:

Tu porás 1, a unidade.  
 Tu fracionarás em 2 e obterás 0;30.  
 Tu cruzarás 0;30 e obterás 0;15 juntarás 0;15 a 0;45 e obterás 1.  
 [1] é o quadrado de 1.  
 Tu subtrairás 0; 30, que tu quadraste de 1 e obterás 0;30 que é o lado do quadrado. (apud Pereira, 2017, P.17)

A seguir, será apresentado o desenvolvimento da solução feita pelos escribas e sua respectiva escrita na forma decimal.

---

<sup>19</sup> A convenção citada por Pereira (2017) foi descrita em *Mathematical Cuneiform Texts (1986)* por Otto Neugebauer (1899 – 1990), historiador e matemático austríaco que fez contribuições importantes para a história da matemática e da astronomia antigas.

Passagem da solução	Desenvolvimento babilônio	Desenvolvimento na escrita atual e decimal
Adicionei a superfície e o lado do meu quadrado e obtive 0;45. Qual é o lado?”.	0; 45	$x^2 + x = 0;45 = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$
Tu porás 1, a unidade	0; 45 + 1	$x^2 + x = \frac{3}{4} + 1$
Tu fracionarás em 2 e obterás 0;30	0; 45 + 0;30	$0;30 = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} = \frac{1 \times 30}{2 \times 30}$ logo $x^2 + x + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$
Tu cruzarás <sup>20</sup> 0;30 e obterás 0;15	0; 45 + 0;30 . 0;30 0; 45 + 0;15	$x^2 + x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ $x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ sendo $0;15 = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$
juntarás 0;15 a 0;45 e obterás 1	0; 45 + 0;15 1	$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{4}$ $x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$
[1] é o quadrado de 1 <sup>21</sup>	1.1 = 1	$\sqrt{x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ $\sqrt{x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ $\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = 1$ $x + \frac{1}{2} = 1$
Tu subtrairás 0;30, que tu quadraste de 1 e obterás 0;30 que é o lado do quadrado.	1 – 0;30 0;30	$x + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$  $x = \frac{1}{2}$

Tabela 3: Desenvolvimento do Problema 1 da Placa BM 13901 nos sistemas sexagesimal e decimal.

Fonte: Autor

<sup>20</sup> Em Andrade 2000, tal ordem é narrada da forma: “Multiplicas 30 por 30”.

<sup>21</sup> Segundo Souza (2015), os babilônios eram conhecedores da operação de potenciação; registrando, em tábuas de argila, tabelas que continham potências sucessivas de um número e algumas de expoente dois para resolver problemas relacionados ao comércio e à astronomia

## 5.2.2

### O PROBLEMA 2 DA PLACA BM 13901

Um outro problema apresentado por Boyer (2012) pede para calcular o lado de um quadrado se a área menos o lado dá 14,30. Segundo Gil (2012), este é o segundo problema da placa BM 13901, cujo autor associa à equação do tipo  $x^2 - bx = c$  e de acordo com Andrade (2000), pelo fato de os babilônios não admitirem coeficientes negativos, o problema foi interpretado como  $x^2 = bx + c$  (segundo tipo de equação conhecida pelos babilônios), sendo a solução do escriba assim descrita:

Tome a metade de 1, que é 0;30, e multiplique 0;30 por 0;30, o que dá 0;15; some isto a 14,30, o que dá 14,30;15. Isto é o quadrado de 29;30. Agora some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, o lado do quadrado. (Boyer 2012, p. 44).

Desenvolvendo a solução dos escribas em paralelo com a linguagem que conhecemos, tem-se:

Passagem da solução	Desenvolvimento babilônio	Desenvolvimento na escrita atual e decimal
Calcular o lado de um quadrado se a área menos o lado dá 14,30	14,30	$14,30 = 14.60^1 + 30.60^0 = 870$ Assim $x^2 - x = 870$
Tome a metade de 1, que é 0;30, e multiplique 0;30 por 0;30, o que dá 0;15; some isto a 14,30, o que dá 14,30;15	$14,30 + 0;30$ $14,30 + 0;30 \cdot 0;30$ $14,30 + 0;15$ $14,30;15$	$x^2 - x + \frac{1}{2} = 870 + \frac{1}{2}$ $x^2 - x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 870 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ $x^2 - x + \frac{1}{2} = 870 + \frac{1}{4}$ $x^2 - x + \frac{1}{2} = \frac{3481}{4}$
- Isto é o quadrado de 29;30. <sup>22</sup>	$29;30 \cdot 29;30$ $14,30;15$	Assim $\sqrt{\frac{3481}{4}} = \frac{59}{2}$ $\sqrt{x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3481}{4}} = \frac{59}{2}$ $\sqrt{x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{59}{2}$ $\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{59}{2}$ $x - \frac{1}{2} = \frac{59}{2}$
Agora some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, o lado do quadrado	$29;30 + 0;30$ $29;60$ $30$	$x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{59}{2} + \frac{1}{2}$ $x = \frac{60}{2} = 30$

Tabela 4: Desenvolvimento do Problema 2 da Placa BM 13901 nos sistemas sexagesimal e decimal.

Fonte: Autor

### 5.2.3

#### UM PROBLEMA DA PLACA YBC 4663

Junior (2019) afirma que o exemplo a seguir pertence a tábua YBC 4663 e corresponde ao terceiro tipo de equação do 2º grau conhecida pelos babilônios ( $x^2 + c = bx$ ), que diz: “encontrar os lados de um retângulo sabendo que a sua

<sup>22</sup> Conforme mencionado anteriormente, os babilônios possuíam tábuas com o resultado de várias potências. Assim, utilizaremos o sistema decimal para calcular a raiz quadrada da fração encontrada e faremos a devida conversão para o sistema sexagesimal babilônio.

soma é 6;30 e sua área é 7;30 (Junior 2019, p. 37)”. O autor ainda apresenta a solução do escriba para o problema:

Eu adicionei o comprimento e a largura do meu retângulo: deu 6;30; a sua área é 7;30. Tu divides 6;30 a meio: dá 3;15. Multiplicas 3;15 por 3;15: dá 10;33,45. [A seguir] subtrais 7;30 de 10;33,45 : dá 3;3,45. É o quadrado de 1;45. Junta 3;15; que foi o que tu multiplicaste, a 1;45: dá 5;00, é o comprimento do rectângulo. Retira de 3;15 que foi o que tu multiplicaste, 1;45: dá 1;30, é a largura. (apud ANDRADE, 2000, p.18)

Segundo ao autor, para resolver este problema, o escriba considerou o sistema de equações do segundo grau

$$\begin{cases} x + y = 6;30 \\ x \cdot y = 7;30 \end{cases}$$

A seguir, novamente apresentamos a solução dos escribas no sistema sexagesimal e também seu desenvolvimento em nossa escrita.

Passagem da solução	Desenvolvimento babilônio	Desenvolvimento na escrita atual e decimal
Eu adicionei o comprimento e a largura do meu retângulo: deu 6;30		$6;30 = 6 + \frac{30}{60} = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$ Assim $x + y = \frac{13}{2}$
sua área é 7;30		$7;30 = 7 + \frac{30}{60} = 7 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$ Assim $x \cdot y = \frac{15}{2}$
Tu divides 6;30 a meio: dá 3;15	$6;30 = 3;15 + 3;15$	$x + y = \frac{13}{2} : 2$ $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{13}{4}$
Multiplicas 3;15 por 3;15: dá 10;33,45	$3;15 \cdot 3;15$ $10;33,45$	$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{13}{4}\right)^2$ $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{169}{16}$
- [A seguir] subtrais 7;30 de 10;33,45: dá 3;3,45	$10;33,45 - 7;30$ $3;3,45$	$7;30 = xy = \frac{15}{2}$ $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 - xy = \frac{169}{16} - \frac{15}{2}$ $\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{4} - xy = \frac{49}{16}$ $\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{4} = \frac{49}{16}$ $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{49}{16}$
-3;3,45 é o quadrado de 1;45.	$1;45 \cdot 1;45$ $3;3,45$	$\sqrt{\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{16}}$ $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = \frac{7}{4}$
Junta 3;15; que foi o que tu multiplicaste, a 1;45: dá 5;00, é o comprimento do rectângulo.	$1;45 + 3;15$ $(3 + 1);(15 + 45)$ $4;60$ $4 + 1$ $5;00$	Da 3ª passagem, tínhamos que $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{13}{4}$ Assim $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{7}{4} + \frac{13}{4}$ $x = \frac{20}{4} = 5$
Retira de 3;15 que foi o que tu multiplicaste, 1;45: dá 1;30, é a largura	$3;15 - 1;45$ $1;30$	Da 3ª passagem, tínhamos que $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{13}{4}$ assim $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right) = \frac{13}{4} - \frac{7}{4}$ $y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Tabela 5: Problema da Placa YBC 4663 desenvolvido no sistema sexagesimal e no sistema decimal.

Fonte: Autor

É possível perceber que os babilônios possuíam bastante conhecimento da álgebra e impressiona o fato de que este conhecimento foi constituído independentemente da simbologia que é utilizada na álgebra contemporânea.

### 5.3

#### A EQUAÇÃO DO 2º GRAU NA ÍNDIA: BHÁSKARA

Por muito tempo os livros didáticos da educação básica, ao abordarem a equação do 2º grau, definiam sua forma geral e apresentavam a *fórmula de Bháskara* (figura 45), que resolve a equação do 2º grau encontrando suas raízes.

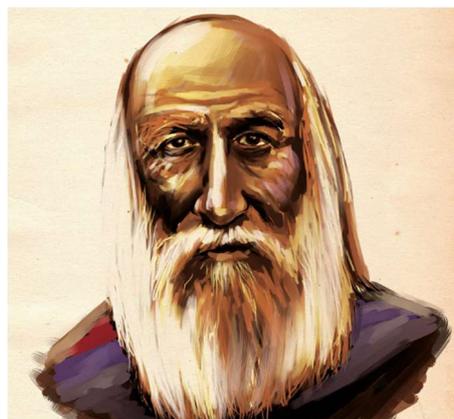


Figura 45: Imagem de Bhaskara

Fonte: <https://matematica.com.br/blog/post/bhaskara/1490641071>. Acesso em 26/03/21.

Atualmente, muitos livros apresentam esta conhecida expressão como *fórmula resolutiva da equação do 2º grau*, ainda atribuindo a Bháskara sua autoria e, por vezes, trazendo algum contexto histórico bem limitado sobre este matemático conforme podemos ver em Mori e Onaga (2015)

No século XII, Bhaskara, um importante matemático da Índia, destacou-se por seus vários escritos sobre aritmética, álgebra e outros assuntos. Dentre esses escritos, encontra-se a fórmula de Bhaskara, que é uma **generalização da resolução** de equações de 2º grau com uma incógnita (Mori e Onaga, 2015, p. 56).

Como consideramos ser muito pouco difundido os conhecimentos acerca da matemática praticada por este povo, nesta seção apresentamos uma breve

contextualização da trajetória histórica da matemática hindu até este conhecido matemático.

No mesmo período em que prosperaram as civilizações egípcia e mesopotâmica, a matemática já havia começado o seu desenvolvimento no norte da Índia, afirma Garbi (2009). Segundo Eves (2011) este povo havia desenvolvido a escrita, sistemas de contagem, pesos e medidas e construía canais de irrigação, afirmando serem estes requisitos básicos para a matemática e para a engenharia. No século VI a.C. houve a invasão persa de Dario e em 326 a.C. a invasão macedônica de Alexandre ao noroeste da Índia, ambas levando novas grandes contribuições culturais e científicas à região. Nesta época se desenvolveu a Astronomia e a Matemática prática. Cajori (1955) aponta que os hindus apresentavam um pensamento aritmético, lidando com o simbolismo numérico tendo desenvolvido sua álgebra e tendo sua geometria voltada apenas para mensuração e sem a presença de demonstrações.

Neste contexto nasceu Bhaskara, filho de astrônomo e tendo nascido em Vijayapura em uma época onde haviam famílias de excelentes matemáticos que transmitam seus ensinamentos de pai para filho. Foi conhecido como o sábio tornando-se matemático, professor e astrônomo. Escreveu *Siddhânta* em 1150, uma obra sobre astronomia composta por quatro partes: *Lilavati* (também conhecida como *Lilivati*, que era o nome de sua filha) uma obra sobre aritmética em 278 versos, *Bijaganita* sobre álgebra, *Goladhyaya* dedicada a esfera (ou o globo celeste) e *Grahaganita* consagrada ao movimento planetário.

Sobre a equação do 2º grau, seu primeiro registro se dá com Brahmagupta através da equação  $y^2 = ax^2 + 1$ . Pedroso (2009) apresenta exemplo deste tipo de equação e também de sua solução em notação hindu e em nossa notação:

$$\begin{array}{cccc} ya & v & l & ya & 10 \\ & ru & & & \dot{0} \end{array}$$

De acordo com o autor segue a tradução

- *ya*: abreviação de *yavattavat* que significa a primeira incógnita;
- *ka*: abreviação de *kalaka*, que significa negro, a segunda incógnita;
- *v*: abreviação de *varga* e significa quadrado;
- O ponto sobre o número indica um número negativo, ou seja  $1\dot{0} = -10$ ;

- *ru* abreviação de *rupa*, que significa número puro, ou seja, o termo independente;
- A primeira linha contém o primeiro membro da equação e a 2ª linha o 2º membro.

Assim, a tradução da equação seria  $x^2 - 10x = -9$  e a solução de Brahmagupta seria assim desenvolvida:

- $-9$
- $(-9) \cdot 4 = -36$
- $-36 + (-10)^2 = 64$
- $\sqrt{64} = 8$
- $8 - (-10) = 18$
- $18 : (2 \cdot 1) = 9$
- A raiz é 9

O autor não comenta os motivos destas transformações mas após profunda análise percebemos a possível presença da forma algébrica para o método de completar o quadrado, observe:

$$x^2 - 10x = -9 \quad . 4$$

$$4x^2 - 40x = -36 \quad + (-10)^2$$

$$4x^2 - 40x + (-10)^2 = -36 + (-10)^2$$

$$4x^2 - 40x + 100 = -36 + 100$$

$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-10) + (-10)^2 = 64$$

$$(2x - 10)^2 = 64 \quad \sqrt{\quad} \text{ e admitindo a raiz}$$

positiva

$$2x - 10 = 8 \quad -(-10)$$

$$2x - 10 - (-10) = 8 - (-10)$$

$$2x - 10 + 10 = 8 + 10$$

$$2x = 18$$

$$x = 18 : 2$$

$$x = 9$$

Sobre a resolução destas equações por Bháskara o autor ressalta que o próprio Bháskara afirma ter usado a solução de Sridhara<sup>23</sup> (870 – 930), um matemático

que viveu cerca de dois séculos antes. A seguir, apresentamos a tradução de um problema sugerido por Bháskara em seu livro *Lilavati* e também a tradução de sua solução

De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmims. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?. (Costa, 2016, p. 11)

A tradução da solução deste problema é apresentada por Pedroso (2009).

Seja  $ya \ v \ 2$  o número de abelhas do enxame.  
 A raiz quadrada da metade desse número é  $ya \ 1$ .  
 Oito nonos de todo o enxame é  $ya \ v \ \frac{16}{9}$ .  
 A soma da raiz quadrada com a fração e o casal de abelhas é igual à quantidade de abelhas do enxame, isto é  $ya \ v \ 2$ .  
 Reduzindo ao mesmo denominador os dois membros da equação e eliminando o denominador, a equação transforma-se em

$$\begin{array}{r} ya \ v \ 18 \ ya \ 0 \ ru \ 0 \\ ya \ v \ 16 \ ya \ 9 \ ru \ 18 \end{array}$$

Após a subtração torna-se  $ya \ v \ 2 \ ya \ 9 \ ru \ 0$   
 $ya \ v \ 0 \ ya \ 0 \ ru \ 18$

Portanto  $ya \ é \ 6$   
 Donde  $ya \ v \ 2 \ é \ 72$ . (Pedroso, 2009, p. 184)

O autor inicia a tradução da solução atribuindo  $2x^2$  ao número de abelhas. Assim, a raiz quadrada da metade do número de abelhas é dada por

$$\sqrt{\frac{2x^2}{2}} = x$$

E oito nonos de todo o enxame é expresso por

$$\frac{8}{9} \cdot (2x^2) = \frac{16x^2}{9}$$

A soma da raiz quadrada (da metade do número de abelhas do enxame) com a fração  $\frac{8}{9}$  do restante do número de abelhas do enxame) e o casal de abelhas é igual à quantidade de abelhas do enxame é representado por

$$x + \frac{16x^2}{9} + 2 = 2x^2$$

Reduzindo ao mesmo denominador e eliminando-o tem-se

<sup>23</sup> Conforme Costa (2016) Sridhara havia publicado obras que infelizmente não chegaram até nossos dias.

$$\frac{9x}{9} + \frac{16x^2}{9} + \frac{18}{9} = \frac{18x^2}{9}$$

$$9x + 16x^2 + 18 = 18x^2$$

ou

$$18x^2 = 16x^2 + 9x + 18$$

Por fim, realizando as devidas adições

$$18x^2 - 16x^2 - 9x = 16x^2 + 9x - 16x^2 - 9x + 18$$

$$2x^2 - 9x = 18$$

A partir daí, a citação de pedroso aponta que  $x = 6$ , conseqüentemente, o número de abelhas é  $2.6^2 = 72$ . Costa (2016) apresenta como Bháskara obteve a resposta. Primeiramente, multiplica-se os dois membros da equação por 8

$$2x^2 - 9x = 18 \cdot 8$$

$$16x^2 - 72x = 144$$

Em seguida, somam-se 81 a ambos os membros

$$16x^2 - 72x + 81 = 144 + 81$$

$$16x^2 - 72x + 81 = 225$$

O autor conclui que ambos os membros são quadrados perfeitos, toma suas raízes e admite apenas a raiz positiva e continua o processo

$$(4x)^2 + 2.4x.(-9) + (-9)^2 = 225$$

$$(4x - 9)^2 = 225$$

$$4x - 9 = 15$$

$$4x - 9 + 9 = 15 + 9$$

$$4x = 24$$

$$4x : 4 = 24 : 4$$

$$x = 6$$

e por consequência o número de abelhas é 72.

Vemos portanto que a forma hindu para resolver a equação do 2º grau era baseada no método de completar o quadrado e ressaltamos que os hindus não faziam uso de generalizações conforme a dedução da fórmula de Bháskara cuja dedução apresentamos a seguir.

Considerando a equação  $ax^2 + bx + c = 0$  com  $a \neq 0$ .

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 && : a \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 && - \frac{c}{a} \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} &= - \frac{c}{a} \\ x^2 + \frac{b}{a}x &= - \frac{c}{a} \end{aligned}$$

que pode ser escrito da forma

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x = - \frac{c}{a}$$

Não sendo primeiro membro é um quadrado perfeito, aplica-se o artifício hindu de completar o quadrado ao adicionar  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$  em ambos os membros

$$\begin{aligned} x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \end{aligned}$$

Reduzindo o segundo membro ao mesmo denominador tem-se

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Extrai-se a raiz quadrada da equação

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalmente, subtraindo  $\frac{b}{2a}$  de ambos os membros

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \\ x &= - \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= - \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

O simbolismo presente nesta dedução surge apenas no século XVI com o matemático francês François Viète (1540 – 1603). Não encontramos referências

sobre a autoria desta dedução, contudo acreditamos que tal expressão no Brasil tenha recebido o nome de Bháskara pelo fato de que em sua dedução há a aplicação da estratégia hindu de completar o quadrado.

#### 5.4

#### A EQUÇÃO DO 2º GRAU NO IMPÉRIO ISLÂMICO: AL-KHWARIZMI

A partir de 622 d.C., Boyer (2012) afirma que por um século o Islam se expandiu da Arábia para Pérsia, para o norte da África e para a Espanha. Maomé teria pregado o islã até 632 d.C. e estabelecido o estado maometano com centro em Meca e, apesar de sua morte neste ano, seus seguidores continuaram a expansão Islam com muita rapidez. Em 641 tomaram Alexandria que foi por muito tempo o centro matemático do mundo e uma das consequências desta invasão foi a queima de livros da biblioteca e é provável que poucos livros tenham sobrado. As guerras teriam continuado por mais um século e por volta de 750 d.C. Bagdá se tornou a nova capital do mundo árabe, se transformando no novo centro da matemática. No novo mundo árabe a unidade se dava nos campos econômico e religioso, mas não no político, sendo a língua árabe usada por poucos. Dentre eles, os intelectuais; daí Boyer (2012) considerar ser mais apropriado se referir a esta cultura como cultura islâmica, embora utilize ambos os termos de forma indiferente. Os árabes, durante as invasões, absorveram a cultura das civilizações que haviam derrotado. Neste período Bagdá se tornou a nova Alexandria; para lá foram chamados estudiosos da Síria, Iran e Mesopotâmia; o califa Al-Mamum ordenou a tradução para o árabe de todas as obras gregas, das quais destacam-se *Os Elementos* de Euclides, o *Almagesto*<sup>24</sup> de Ptolometu e fundou a “Casa da Sabedoria” (Bait al-hikma), que poderia ser comparada à antiga Universidade de Alexandria, espaço que abrigava uma coleção de manuscritos antigos e que recebeu um observatório junto à propriedade. Por volta do século, XIII a Casa da

---

<sup>24</sup> Almagesto é um tratado matemático e astronômico escrito no século II por Cláudio Ptolomeu. A obra, escrita em grego, adota o modelo geocêntrico para o sistema solar, além de conter um extenso catálogo estelar<sup>[1]</sup>. É um dos textos científicos mais influentes de todos os tempos, tendo sido autoridade no assunto desde a antiguidade, no império bizantino, no mundo árabe e na Europa ocidental ao longo da idade Média e Renascença até o século XVI, quando o surgiu o heliocentrismo de Copérnico.

Sabedoria teria sido destruída durante a invasão mongol a Bagdá e seus livros e manuscritos jogados no .

Dentre os matemáticos e astrônomos deste observatório, Boyer (2012) destaca *Mohamed ibn Musa al-Khwarizmi* (780 – 850), cujo nome é a origem a palavra algoritmo.



Figura 46: imagem de Al-Khwarizmi

Fonte: <https://mirfaces.com/al-khwarizmi-medieval-scientist/> . Acesso em 17/02/2021.

*Al-Khwarizmi* escreveu obras sobre astronomia, aritmética e álgebra que tiveram papéis importantes no desenvolvimento matemático. Uma de suas obras seria a tradução árabe dos numerais hindus, o que provavelmente teria sido responsável pela propagação da origem árabe do sistema de numeração já que suas obras foram traduzidas para o latim e na Europa muitos leitores atribuíram esta origem a ele, fato desmentido pelo próprio Al-Khwarizmi ao assumir que o sistema de numeração é de origem hindu. Seu livro mais importante chamava-se *Hisob al-jabr wa'l muqabalah*, cujo nome (al-jabr) deu origem ao termo *álgebra*. De acordo com Cajori (1955) a tradução mais próxima do inglês para o termo *al-jabr wa'l muqabalah* seria “restauração” e “redução”<sup>25</sup>, que significa respectivamente a transposição de termos negativos para o outro lado da equação e a união de termos semelhantes e exemplifica dizendo que  $x^2 - 2x = 5x + 6$  passaria por al-jabr a  $x^2 = 5x + 2x + 6$  e posteriormente por wa'l muqabalah para  $x^2 = 7x + 6$ .

<sup>25</sup> Boyer (2012) utiliza a palavra “completação” para a tradução do termo al-jabr e “equilíbrio” para *muqabalah*.

Capítulo	Tipo	Exemplos	Forma Geral
1	Quadrados iguais a raízes	$x^2 = 5x$ $\frac{x^2}{3} = 4x$ $5x^2 = 10x$	$ax^2 = bx$
2	Quadrados iguais a números	----	$ax^2 = c$
3	Raízes iguais a números	----	$ax = b$
4	Quadrados e raízes iguais a números	$x^2 + 10x = 39$ $2x^2 + 10x = 48$ $\frac{x^2}{2} + 5x = 28$	$x^2 + bx = c$
5	Quadrados e números iguais a raízes	$x^2 + 21 = 10x$	$x^2 + c = bx$
6	Raízes e números iguais a quadrados	$3x + 4 = x^2$	$bx + c = x^2$

Tabela 6: Tipos de equações descritas por Al-Khwarizmi.

Fonte: Boyer 2012

As equações, segundo Boyer (2012), são apresentadas por Al-Khwarizmi em seu livro *Hisob al-jabr wa'l muqabalah*, em seis capítulos que descrevem seis tipos de equações formadas por três tipos: raízes ( $x$ ), quadrados ( $x^2$ ) e números; sendo em cada capítulo discriminado um tipo de equação, onde para alguns deles o autor apresenta os exemplos de Al-Khwarizmi em nossa notação. A tabela 6 apresenta os tipos de equações apresentados por Boyer (2012) e suas formas gerais segundo Andrade (2000).

A tradução de um dos problemas presentes no capítulo 4 do livro *Hisob al-jabr wa'l muqabalah* de Al-Khwarizmi, cuja representação matemática atual está apresentada na tabela 6 através do primeiro exemplo daquele capítulo, juntamente com sua solução, são apresentadas por Santos (2017).

Um quadrado e dez raízes dele são iguais a trinta e nove dirhems<sup>26</sup>. Quer dizer, quanto deve ser quadrado, o qual, quanto aumentado por dez de suas próprias raízes, é igual a trinta e nove? (BERLINGHOFF E GOUVÊA, 2010, p. 131, apud Santos, 2017, p. 36)

Você divide o número de raízes por dois, no caso presente, fornece cinco. Isso você multiplica por si mesmo; o produto é vinte e cinco. Some isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso, que é oito, e subtraia disso a metade do número de raízes, que é cinco; o resto é três. Essa é a raiz do quadrado que você procurava; o próprio quadrado é nove. (BERLINGHOFF E GOUVÊA, 2010, p. 131, apud Santos, 2017, p. 36)

---

<sup>26</sup> Antiga moeda de prata

A solução proposta por Al-Khwarizmi é desenvolvida de forma geométrica e é apresentada por Andrade (2000). Inicialmente é proposto a construção de um quadrado de lado  $x$  e de quatro retângulos de área  $2,5x$ , adjacentes aos lados do quadrado, cujas áreas somadas resulta em  $10x$ , conforme figura 47. Vale ressaltar que tal área equivale a 39 unidades de área.

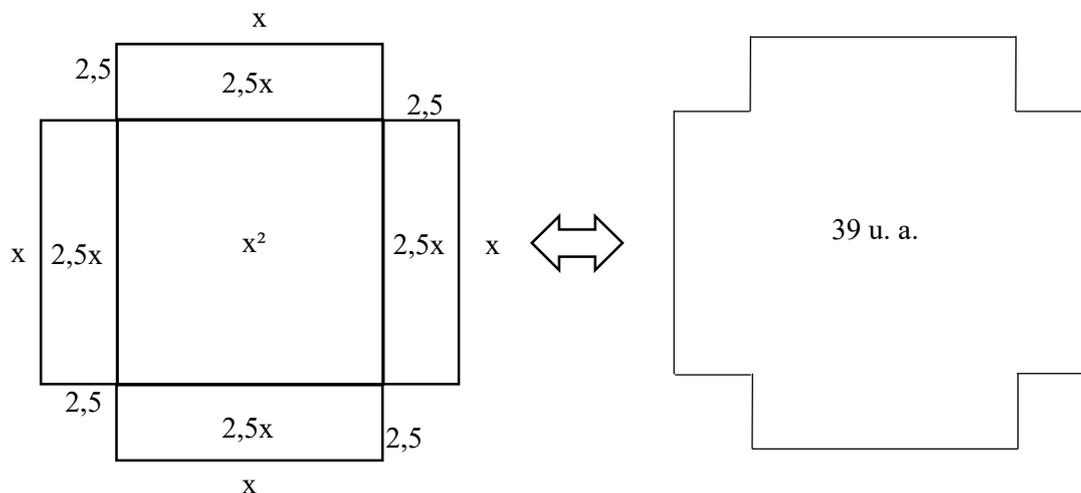


Figura 47: Figura utilizado por Al-Khwarizmi para resolver o problema resolver o problema de completar o quadrado  
Fonte: Andrade (2000) (modificado)

A figura é completada com quatro quadrados cuja área de cada um é  $2,5^2$  unidades de área conforme a figura 48, ou seja, 25 unidades de área, totalizando uma área de 64 unidades de área.

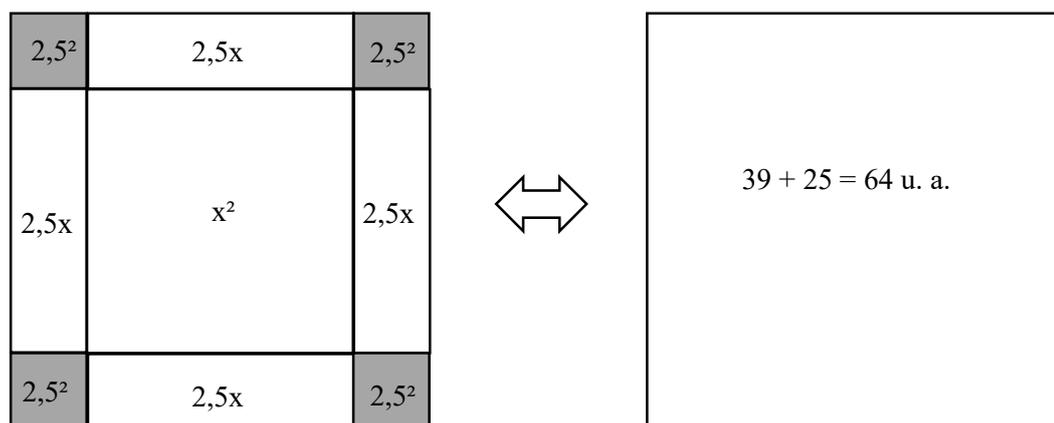


Figura 48: Figura utilizado por Al-Khwarizmi para resolver o problema resolver o problema de completar o quadrado  
Fonte: Andrade (2000) (modificado)

Assim, para uma área de 64 unidades de área, tem-se um quadrado cujo lado mede 8 unidades de comprimento e retirando-se os comprimentos

completados (2,5 unidades), tem-se que o que o lado do quadrado é 3 e sua área é 9. A figura 49 mostra tal conclusão.

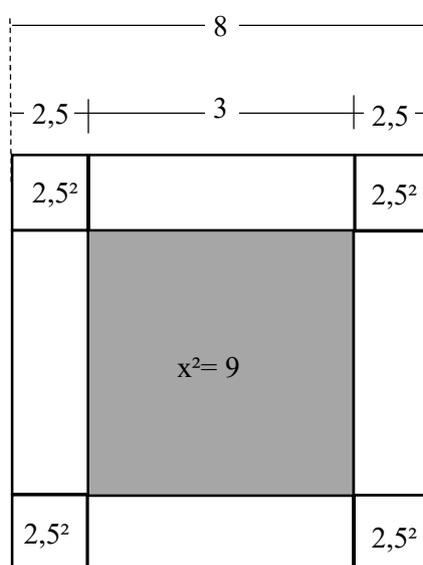


Figura 49: Figura utilizado por Al-Khwarizmi para resolver o problema de completar o quadrado

Fonte: Andrade (2000) (modificado)

O método empregado por Al-Khwarizmi, segundo Boyer (2012), é atualmente hoje conhecido como *método de completar o quadrado*. O autor ainda ressalta que apenas raízes positivas eram admitidas como solução (pois o zero também não era conhecido).

Uma solução algébrica referente ao problema proposta por Al-Khwarizmi, é apresentada por Santos (2017), que a seguir desenvolvemos de forma detalhada de forma conjunta com as notações usuais atuais.

- *Você divide o número de raízes por dois, no caso presente, fornece cinco*

Conforme Boyer (2012), a raiz é representada por  $x$  assim, dividir o número de raízes por 2 significa fazer

$$\frac{10}{2} = 5$$

- *Isso você multiplica por si mesmo; o produto é vinte e cinco*

Isto é

$$5 \cdot 5 = 25$$

- *Some isso a trinta e nove*

Nesta etapa da solução, consideremos a expressão matemática do problema

$$x^2 + 10x = 39$$

e enfim, somando o resultado anterior teremos

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$x^2 + 10x + 25 = 64$$

- Agora, tome a raiz disso, que é oito

Fatorando o primeiro membro da expressão acima temos

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2.5x + 5^2$$

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

Logo, aplicando este fato à etapa da solução

$$x^2 + 10x + 25 = 64$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$\sqrt{(x + 5)^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$x + 5 = 8$$

- Subtraia disso a metade do número de raízes, que é cinco; o resto é três

Nesta etapa, utilizando o método de “restauração” descrito por Al-Khwarizmi temos

$$x + 5 - 5 = 8 - 5$$

$$x = 3$$

que é a resposta apresentada por Al-Khwarizmi.

O método de *completar o quadrado* é bastante prático e felizmente vem sendo inserido na escola como mais uma possibilidade de resolução da equação do 2º grau, além à fórmula de Bháskara, sendo sua vantagem permitir encontrar de modo prático as raízes da equação.

## 5.5

### PROPOSTA DE ATIVIDADE 4

Esta atividade foi desenvolvida com base na sugestão de Araújo, Avelar e Oliveira (2019), que sugerem a utilização do material dourado para a apresentação do método de resolução de completar o quadrado, utilizados pelos hindus para resolver equação do 2º grau. O objetivo da atividade é associar as peças do

material dourado a áreas e induzir os alunos à compreensão do método. Após a consolidação deste aprendizado, os alunos serão induzidos a resolver equações do 2º grau por este método, de forma escrita.

### 5.5.1

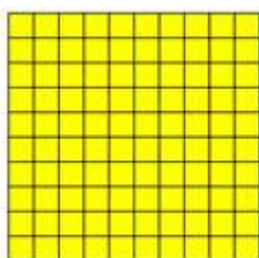
## ETAPAS DO ENSINO DE MATEMÁTICA POR ATIVIDADE EXPERIMENTAL PARA A ATIVIDADE “COMPLETANDO QUADRADOS E RESOLVENDO EQUAÇÕES DO 2º GRAU”

### Organização:

- Divida a turma em duplas;
- Material necessário: uma placa, quatro barras e nove cubos pequenos.

### Apresentação:

A atividade deve ser iniciada pelo professor ao comentar fatos históricos sobre a equação do 2º grau, a forma de resolução conhecida como “completar o quadrado” e apresentando o material dourado relacionando suas peças com valores de área pré-determinados, conforme figura 50.



Placa: área =  $x^2$



Barra área =  $x$



cubo pequeno: área = 1 u.a.

Figura 50: Relação adotada para as peças do material dourado no processo de completar o quadrado.

Fonte: Autor

### Execução:

Os alunos serão solicitados a separem algumas peças do material, formando uma configuração a figura 51.

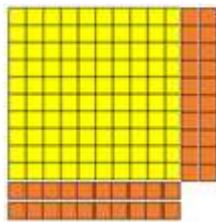


Figura 51: Configuração a ser formada com as peças do material dourado.  
Fonte: Autor

### Registro:

Solicite aos alunos que registrem de forma escrita a área da configuração sugerida, conforme figura 52.

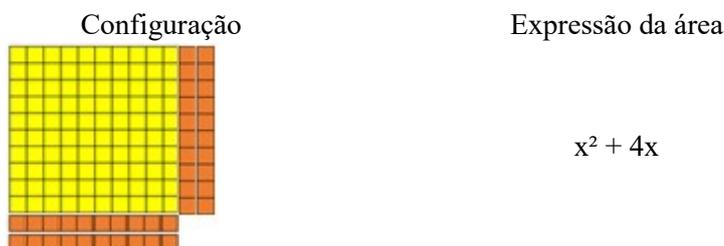


Figura 52: Expressão algébrica referente a configuração formada com as peças do material dourado.  
Fonte: Autor

### Análise:

Os alunos devem:

1. Formar um quadrado na configuração já montada (acrescentando 4 cubinhos)
2. Escrever a expressão da medida do lado do quadrado ( $x + 2$ ).
3. Escrever como se calcula a área do quadrado com base nesta expressão ( $(x + 2)^2$ ).
4. Escrever a expressão da área deste quadrado ( $x^2 + 4x + 4$ ).
5. Perceber a igualdade entre as expressões ( $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ ).
6. Perceber o quadrado formado pelos pequenos cubos e escrever a medida de seu lado (2).
7. Escrever a potência que representa a área deste pequeno quadrado ( $2^2$ ).
8. Questionar quantas duplas de barras existem na configuração do quadrado (duas vezes).
9. Escrever a quantidade final de barras em relação a quantidade dupla de barras ( $2 \cdot 2x$ ).
10. Reescrever a expressão da área do quadrado em função da área da placa, da potência que representa a área formada pelos pequenos cubos e da quantidade de vezes referente ao número inicial de placas ( $x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2$ ).

11. Observar a forma da expressão que representa o quadrado de uma expressão algébrica  $(x + 2)^2$ .

### **Institucionalização**

Nesta etapa os alunos serão induzidos a resolver uma equação do 2º grau de forma escrita, com base no método de completar o quadrado e observando o princípio de equilíbrio da equação.

#### **5.5.2**

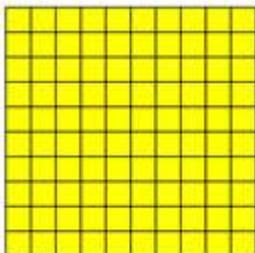
### **ATIVIDADE 4: COMPLETANDO QUADRADOS E RESOLVENDO EQUAÇÕES DO 2º GRAU**

Apresentamos a seguir o roteiro da atividade a ser desenvolvida pelos alunos, com o objetivo de resolver a equação do 2º grau pelo método de completar o quadrado. Ressaltamos que para a perfeita execução da atividade, são necessários conhecimentos acerca de alguns princípios relacionados com o conceito de equação, como por exemplo, os conceitos de membro e possibilidade de adicionar a mesma quantidade em cada membro da equação sem alterá-la.

### ATIVIDADE 4: COMPLETANDO QUADRADOS E RESOLVENDO EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Problemas que recaem em uma equação do 2º grau já são conhecidos há mais de quatro mil anos em textos escritos em placas de argila na Mesopotâmia e em papiros no Egito e na Índia. Estes povos utilizavam um método conhecido como “completar o quadrado” para resolver este tipo de equação, que consiste em formar um quadrado a partir de uma figura inicial.

Para isso utilizaremos um material de contagem onde suas áreas serão consideradas da seguinte forma:



Placa: área =  $x^2$



Barra área =  $x$



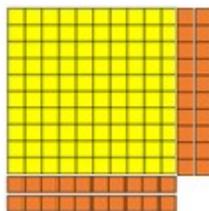
cubo pequeno: área = 1 u.a.

#### AGORA O DESAFIO É PARA VOCÊS

- Dividam-se em duplas.
- Material necessário: uma placa, seis barras e nove cubos.

#### FAÇAM O QUE SE PEDE EM CADA QUESTÃO

1) Com uma placa, e quatro barras, monte a configuração conforme a figura abaixo, que será chamada *configuração inicial*.



2) Escreva a expressão que representa a área desta configuração.

---

3) Utilize as peças sobressalentes para montar um quadrado, que será chamado de *configuração final*.

4) Escreva a área do quadrado em função da quantidade de placas, barras e cubos pequenos.

---

5) Quantas duplas de barras estão presentes na *configuração final*?

---

6) Observe apenas os quadrados formados pelos cubos na *configuração final* e responda:

a. Qual é a medida de seu lado? \_\_\_\_\_

b. Qual é a medida de sua área? \_\_\_\_\_

c. Escreva esta área em como uma potência da medida de seu lado. \_\_\_\_\_

7) Reescreva a área obtida no item 4 em função das respostas obtidas nos itens 5 e 6c.

---

8) Qual é a expressão que representa a medida do lado do quadrado da *configuração final*?

---

9) Como calcular a área do quadrado da *configuração final* da *configuração final* com base na expressão que você escreveu?

---

10) As soluções dos itens 7 e 9 representam a área do mesmo quadrado. Escreva a igualdade destas expressões.

---

11). Considere a equação

$$x^2 + 8x + 10 = 30$$

a) Reescreva o 1º membro da equação, substituindo a segunda parcela por uma equivalente a expressão do item 5.

---

b) Qual deve ser o valor a ser adicionado em ambos os membros da equação para que o 1º membro possa ser escrito conforme o item 6b? \_\_\_\_\_

12) Adicione este valor e reescreva a equação conforme o item 6b

---

13) Reescreva a equação conforme o item 10.

---

14). Extraia a raiz quadrada de ambos os membros da equação.

---

15) Resolva a equação do 1º grau formada.

16) Descreva com suas palavras o experimento realizado e as conclusões obtidas.

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

## 6

### Considerações finais

A escola, especialmente por sua importância no contexto social, não pode fugir do seu papel de formação e transformação do cidadão. Neste contexto, o ensino de matemática deve se valer de metodologias que justifiquem sua presença no currículo escolar e mostrem a importância histórica dos conteúdos trabalhados para o progresso da humanidade e alternativas didáticas que promovam a compreensão significativa dos conceitos matemáticos inseridos no contexto escolar.

A história da matemática como fundamentação teórico-metodológica permite a sua compreensão como necessidade humana justificando o ensino dos objetos matemáticos. O ensino por atividades, por sua vez, possibilita ao aluno perceber de forma ativa a construção destes objetos levando-o a se apropriar destes novos conhecimentos de forma mais efetiva. Acreditamos que a combinação destas duas metodologias possa desempenhar um papel transformador no ensino de matemática, na qual o aluno passaria a ter papel significativo na construção de seu conhecimento sendo o ator principal e não mais o coadjuvante.

Neste sentido, acreditando conhecer um pouco das dificuldades apresentadas pelos alunos durante nossa trajetória profissional, as práticas apresentadas foram desenvolvidas com base nestas metodologias e visam atender a essas necessidades educacionais, fazendo do aluno o ator principal e não mais coadjuvante do processo educacional. É válido lembrar que tais propostas não são manuais que devem ser seguidos com rigor e que podem e devem ser modificadas de acordo com cada realidade.

Muitos temas da escola básica também podem ser abordados através da combinação destas metodologias, como a construção do conceito de números naturais e racionais, a trigonometria, a análise combinatória, as funções, entre outros.

As propostas de atividades apresentadas mostram a forma como penso que respectivos assuntos poderiam ser desenvolvidos de forma prática, induzindo o aluno à construção dos respectivos conhecimentos de forma gradual durante a

realização das mesmas. Também esperamos que o presente trabalho contribua de forma efetiva com o conhecimento e motivação do professor da escola básica e o incentive, não só a utilizar as metodologias e atividades aqui propostas, como também o instigue para que ele mesmo construa novas propostas com esse olhar. De algum modo esperamos estar contribuindo para o desenvolvimento da educação matemática na escola básica.

## 7

**Referências bibliográficas**

ALMEIDA, R. C. M. **Demonstrações em geometria plana em livros-textos no Brasil a partir do século XIX**. Dissertação (Dissertação em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

ALVARENGA, B.; MÁXIMO, A. **Física – Ensino Médio**. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2006.

ANDRADE, B. C. **A evolução histórica da resolução das equações do 2º grau**. Dissertação (Dissertação em Matemática) – Universidade do Porto, Porto, 2000.

ÁVILA, G. S. S. **Várias faces da matemática: Tópicos para licenciatura e leitura em geral**. 2. Ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BARASUOL, F. F. **A matemática da pré-história ao antigo Egito**. UNirevista. V. 1. N. 2, P. 1- 6, 2006. Disponível em <[http://www.matematicando.net.br/wp-content/uploads/2018/06/slidex.tips\\_a-matematica-da-pre-historia-ao-antigo-egito.pdf](http://www.matematicando.net.br/wp-content/uploads/2018/06/slidex.tips_a-matematica-da-pre-historia-ao-antigo-egito.pdf)>. Acesso em 09/01/2021.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**. 9ª ed. São Paulo: Moderna, 2018.

BONGIOVANNI, V. **O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico**. REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática [online]. V. 2.5, p. 94 – 106, 2007. Disponível em <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12993/12094>>. Acesso em 01/10/2020.

BOYER, B. C.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher: 2012.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros curriculares Nacionais**. Brasília, MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, MEC/SEB, 2017.

CAJORI, F. **A History of Mathematics**. 2ª Ed. New York: The Macmillan Company. 1955.

CHAQUIAM, M. **Ensaio temático: história e matemática em sala de aula**. 1 ed. Belém: SBEM, 2017.

CHLUP, R. **Proclus: an introduction**. 1ª ed. New York, Cambridge University Press: 2012.

COSTA, L. C. **A evolução na resolução das equações algébricas**. Dissertação (Dissertação em Matemática). Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2016.

D'AMBROSIO, U. **A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática**. In: BICUDO, M. A. V.(org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 97-115. Disponível em <[http://cattai.mat.br/site/files/ensino/uneb/pfreire/docs/HistoriaDaMatematica/Ubiratan\\_DAmbrosio\\_doisTextos.pdf](http://cattai.mat.br/site/files/ensino/uneb/pfreire/docs/HistoriaDaMatematica/Ubiratan_DAmbrosio_doisTextos.pdf)>. Acesso em 03/12/2020.

\_\_\_\_\_. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. 17 ed. São Paulo: Papirus, 2009.

DUARTE, C. L.; GONÇALVES, H. H.; NÓBREGA, N. P. **Tudo é número: uma análise conceitual da ideia de número em Pitágoras**. Revista Principia: Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB [online]. N. 33, P. 99 – 107. 2017. Disponível em <<https://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/view/847>>. Acesso em 18/01/2021.

DUMONT, G. M.; LIMA, L. A. **Astronomia: uma breve história**. Gilberto de Melo Dumont. Patos de Minas: 2019.

EUCLÍDES; **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP: 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, Editora da Unicamp: 2011.

FOSSA, J. A. **Matemática, História e Compreensão**. Cocar [online]. V. 2, N. 4, P. 7–16, 2008. Disponível em <<https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/77>>. Acesso em 29/12/2020.

FRIBERG, J. **A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Text**. New York, Sringer: 2007.

GARBI, G. G.; **O Romance das Equações Algébricas**. 3ª ed. São Paulo, Livraria da Física: 2009.

GIL, P. D. **A História da matemática no fomento de uma cultura de argumentação em sala de aula**. Dissertação (Dissertação em Ciência da Educação) – Universidade de Minho, Braga, 2012.

GILLINGS, R. J. **Mathematics in the Time of the Pharaohs**. New York, Dover Publications Inc: 1972.

GONÇALVES, I. M. F. L. **Os Problemas da Matemática: O seu papel na Matemática e nas aulas de Matemática**. Dissertação (Dissertação em Ensino de Matemática) – Universidade da Madeira, Funchal, 2011.

JUNIOR, E. P. L. **A história da equação do 2º grau ao longo dos séculos**. Dissertação (Dissertação em Matemática) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática: 9º ano.** 4ª ed. São Paulo, FTD: 2018.

MENDES, I. A. **Ensino da Matemática por Atividades: Uma Aliança entre o Construtivismo e a História da Matemática.** Dissertação (Dissertação em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2001.

MIGUEL, A; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios.** 2 ed. Belo Horizonte, Autêntica: 2011.

MORI, I.; ONAGA, D. S. **Matemática: Ideias e Desafios – 9º Ano.** 18ª ed. São Paulo, Saraiva: 2015.

OLIVEIRA, A. M. L.; NASCIMENTO, E. S.; A trajetória de Pitágoras e suas principais contribuições à Matemática. Itinerarius Reflectionis: Revista Eletônica de Graduação e Pós-Graduação em Educação [online]. V. 16, N. 2, P. 1 -13. Disponível em <<https://www.revistas.ufg.br/rir/article/view/62848>>. Acesso em 17/12/2020.

PEDROSO, A. H. **História da Matemática.** 2009. Disponível em <[https://issuu.com/joaoe.brito/docs/apostila\\_hist\\_mat\\_prof.hermes\\_pedro](https://issuu.com/joaoe.brito/docs/apostila_hist_mat_prof.hermes_pedro)>. Acesso em 23/02/20/21.

PEREIRA, A. M. Q. **Equações Algébricas: alguns episódios históricos.** Dissertação (Dissertação em Matemática) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2017.

PEREIRA, A. C. C. **Teorema de Thales: Uma conexão entre os aspectos Geométricos e Algébricos em Alguns Livros Didáticos de Matemática.** Dissertação (Dissertação em Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

Pires, C. E. M. **O Ensino da Trigonometria por meio de aulas práticas**. Dissertação (Dissertação em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2016.

QUINTELA, A. **Matemática para a terceira série ginásial**. 66ª ed. São Paulo, Companhia Editora Nacional: 1963.

RIBEIRO, M. H.; GALVÃO, M. E. E. L. **A assimetria histórica entre as técnicas e o desenvolvimento do conceito de área na Antiguidade**. História da Ciência e Ensino: Construindo Interfaces [online]. V. 10, P. 85 – 109, 2014. Disponível em, <https://revistas.pucsp.br/index.php/hcensino/article/view/20841/15356>. Acesso em 15/12/2020.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1ª ed. Rio de Janeiro, Zahar: 2012.

SÁ, P. F. **Possibilidade do ensino de Matemática por Atividade**. 1 ed. Belém: SINEPEM, 2019. Disponível em <http://sinepem.sbempara.com.br/file/V7.pdf>. Acesso em 21/12/2020.

SÁ, P. F. **Atividades experimentais no ensino de matemática**. REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura [online]. V 15, N. 35, p. 143-162, 2020. Disponível em <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/290/234>. Acesso em 21/12/2021.

SÁ, P. F. **Ensinando matemática através da redescoberta**. Traços [online]. V.2, N. 3, P. 77 - 81, 1999. Disponível em <http://revistas.unama.br/index.php/revistatracos/article/view/822>. Acesso em 21/12/2020

SAITO, F. **Construindo Interfaces entre História e Ensino da Matemática**. Ensino de Matemática em Debate [online]. São Paulo. V. 3, N. 1, P. 3-19, 2016. Disponível em < <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/29002>>. Acesso em 07/12/2020.

SANTOS, A. E. **Semelhança de Triângulos e suas aplicações**. Dissertação (Dissertação em Matemática) – Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, 2018.

SANTOS, L. S. **Uma abordagem Histórica em metodologia dos métodos de resolução de equação do 2º grau desenvolvidos por Al-Khwarizmi**. Dissertação (Dissertação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.

SILVA, E. R. **O Surgimento das Trigonometrias em Diferentes Culturas e as Relações Estabelecidas entre elas**. Dissertação (Dissertação de Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2014.

SOUZA, E. S. **Uma proposta de utilização efetiva da calculadora padrão no ensino de potência**. Dissertação (Dissertação em Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2015.

WAERDEN, B. L. V. **Geometry and Algebra in Ancient Civilizations**. Berlin, Springer Verlag: 1983.