

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

MURIEL BELIQUE SANGALI

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Vitória

2021

MURIEL BELIQUE SANGALI

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Professor Doutor Florêncio Ferreira Guimarães Filho.

Vitória

2021

FICHA CATALOGRÁFICA

MURIEL BELIQUE SANGALI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Doutor Florêncio Ferreira Guimarães Filho.

Membros da banca

Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho

(Orientador – Universidade Federal do Espírito Santo)

Prof. Dr. Moacir Rosado

(Examinador – Universidade Federal do Espírito Santo)

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes

(Examinador – Universidade Federal de Campina Grande)

Vitória

2021

AGRADECIMENTOS

Em princípio a Deus, minha primeira fortaleza, por ter me dado a força necessária para vencer cada momento de dificuldade e frustração, saúde e coragem para percorrer com harmonia, fé e persistência essa caminhada árdua que me trouxe até essa conquista.

A minha família, em especial ao meu esposo Marcelo Sangali e filhos Lucas Belique Sangali e Mateus Belique Sangali por me apoiar, incentivar e compreender os momentos em que tive que abdicar do convívio familiar para estudar de forma incansável.

A minha mãe Acremilda Maria Morosini Belique, meu alicerce de vida, companheira e amiga de todos os dias, semanas, meses e anos que me auxiliou e incentivou. Cada um dos meus familiares que colocaram suas casas à disposição para que eu pudesse fugir do cotidiano e estudar com tranquilidade em dias que antecediam nossas avaliações.

Os professores Dr. Domingos, Dr. Valmecir, Dr. Moacir, Dra. Magda e Dra. Rosa que com paciência e dedicação nos ajudaram a construir e aprimorar nossos conhecimentos. Em especial, ao professor Dr. Florêncio Guimarães que com sabedoria, simplicidade e paciência me auxiliou na construção desse trabalho.

Aos amigos e companheiros que durante dois anos toleraram minhas frustrações e decepções, especialmente os amigos Andressa, Brás e Roberto. Agradeço pelo acolhimento que me possibilitou idas e vindas semanais divertidas. Pelos momentos em silêncio, insatisfeitos com nós mesmos, mas sempre calorosos e fraternos. Aos colegas que se tornaram amigos e companheiros, que faziam das minhas quintas-feiras momentos únicos. Agradeço também à amiga e parceira Mary, pelos conselhos, apoio e palavras de incentivo que me faziam acreditar que esse sonho era possível.

Aos meus alunos e companheiros de trabalho da EEEFM Padre Antônio Volkens pela compreensão, apoio e principalmente pelo incentivo, fazendo com que o caminho pudesse ser trilhado de uma forma mais suave e finalmente concluído.

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma proposta de ensino das razões trigonométricas seno, co-seno e tangente. A abordagem investigativa e significativa tem como público alvo alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e da 2ª série do Ensino Médio. Para fortalecer os conceitos e atividades, utilizaremos o software de geometria dinâmica Geogebra. O estudo apresenta uma breve abordagem da história da trigonometria a fim de explorar o estudo das razões trigonométricas aplicadas em problemas contextualizados e práticos.

Palavras-Chave: Razões trigonométricas, história da trigonometria, Geogebra, matemática, aprendizagem.

ABSTRACT

The main objective of this work is to present a proposal for teaching the trigonometric ratios sine, cosine and tangent. The investigative and meaningful approach is aimed at students from the 9th grade of elementary school and the 2nd grade of high school. To strengthen the concepts and activities, we will use Geogebra dynamic geometry software. The study presents a brief approach to the history of trigonometry in order to explore the study of trigonometric ratios applied to contextualized and practical problems.

Keywords: Trigonometric ratios, history of trigonometry, Geogebra, mathematics, learning.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Esquema de Aristarco	16
Figura 2: Esquema de Erastónes: calculando o raio da Terra.	19
Figura 3: As fases da Lua invertendo a posição Sol e Lua.	21
Figura 4: Aristarco e as fases da lua.	22
Figura 5: Eclipse lunar segundo Aristarco	23
Figura 6: Representação de um eclipse lunar	26
Figura 7: Tipos de eclipses lunares	26
Figura 8: Representação de um eclipse solar	27
Figura 9: Eclipse solar total ocorrido em 2017.....	27
Figura 10: Representação artística do eclipse solar total de 21/08/2017	28
Figura 11: Foto da sombra da Lua sobre a Terra durante o eclipse solar	28
Figura 12: Alinhamento dos astros.....	29
Figura 13: Representação do Sol, Terra e Lua	30
Figura 14: Lua, Terra e Sol num eclipse solar	31
Figura 15: A origem da palavra seno.....	33
Figura 16: A origem da palavra tangente	34
Figura 17: Gnomon	35
Figura 18: Triângulo construído por Tales.....	36
Figura 19: Feixe de retas paralelas ($r//s//t$) cortadas pelas transversais m e n	37
Figura 20: Feixe de retas paralelas	37
Figura 21: Determinação de unidade de comprimento	38
Figura 22: Demonstração segmentos incomensuráveis	39
Figura 23: Feixe de paralelas para demonstração de proposição	41
Figura 24: Construção dos paralelogramos a partir do feixe de paralelas	41

Figura 25: Demonstração das igualdades angulares dos paralelogramos.....	42
Figura 26: Demonstração do teorema de Tales usando áreas.....	43
Figura 27: Pontos e retas no plano.....	45
Figura 28: Dois pontos determinam uma única reta	46
Figura 29: Semirreta \overrightarrow{CA} de origem C.....	46
Figura 30: Segmento de reta AB	47
Figura 31: Regiões angulares no plano	47
Figura 32: Definição de grau com unidade de medida angular	48
Figura 33: Definição de grau	48
Figura 34: Representação do ângulo agudo	49
Figura 35: Representação do ângulo reto	49
Figura 36: Representação do ângulo obtuso	49
Figura 37: Pontos colineares.....	50
Figura 38: Pontos não colineares.....	50
Figura 39: Região triangular definida pelos vértices A, B e C.....	51
Figura 40: Triângulo equilátero.....	51
Figura 41: Triângulo isósceles.....	52
Figura 42: Triângulo escaleno	52
Figura 43: A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer	53
Figura 44: Triângulo acutângulo.....	53
Figura 45: Triângulo obtusângulo.....	54
Figura 46: Triângulo retângulo	54
Figura 47: Demonstração do teorema de Pitágoras utilizando áreas.....	56
Figura 48: Elementos do triângulo retângulo	57
Figura 49: Áreas e o teorema de Pitágoras	58
Figura 50: Triângulos retângulos semelhantes.....	65

Figura 51: Razões trigonométricas no triângulo retângulo.....	67
Figura 52: O ângulo de 45° no quadrado	70
Figura 53: Construção das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente	71
Figura 54: Os ângulos de 30° e 60° no triângulo equilátero.....	72
Figura 55: Construção das razões trigonométricas seno	72
Figura 56: Triângulo inscrito na circunferência	75
Figura 57: Demonstração da lei dos senos	75
Figura 58: Aplicação da lei dos senos	77
Figura 59: Demonstração da lei dos cossenos com altura interna ao triângulo	78
Figura 60: Demonstração da lei dos cossenos com altura externa ao triângulo	79
Figura 61: Aplicação da lei dos cossenos I.....	82
Figura 62: Aplicação da lei dos cossenos II.....	82
Figura 63: Aplicação da lei dos cossenos III.....	84

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Razões trigonométricas dos ângulos notáveis (30° , 45° e 60°) 74

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	10
1. Um pouco da história da Trigonometria.....	14
2. A Geometria plana no cálculo de distâncias astronômicas.....	17
2.1 – A determinação do raio da Terra	17
2.2 Distância Terra-Lua e Raio da Lua.....	20
2.2.1 Método de Aristarco de Samos	20
3. A matemática por trás de um eclipse	25
3.1 Eclipse lunar.....	26
3.2 Eclipse Solar	27
3.3 Cálculos dos comprimentos da sombra.....	29
3.4 A ocorrência dos eclipses solares	29
4 ORIGEM DAS PALAVRAS SENO, COSSENO E TANGENTE	33
5 TEOREMA DE TALES.....	355
6. OS TRIÂNGULOS	45
6.1 Ângulo.....	477
6.2 Triângulos	499
7 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO.....	555
7.1 As funções trigonométricas do ângulo agudo	655
7.2 Ângulos Notáveis 30° , 45° e 60°	70
7.2.1 Ângulo de 45°	70
7.2.2 Ângulos de 30° e 60°	71
7.3 Aplicações das razões trigonométricas	74
7.3.1 Lei dos Cossenos e dos Senos	74
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	86
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	88

INTRODUÇÃO

A matemática é um importante componente para a construção da cidadania, por isso deve estar ao alcance de todos de forma igualitária e democrática. Não se pode entender a matemática como algo pronto e definitivo, mais sim como um conhecimento em constante construção. Um conhecimento que, quando adquirido pelo aluno, pode ser um fator de transformação da sua realidade.

Destacam-se como princípios básicos da matemática: a observação de fatos e representações reais associados aos conceitos e princípios científicos da matemática. É de suma importância para o ensino da matemática estimular o aluno em sua apropriação de conceitos matemáticos através de resolução de problemas do cotidiano. Uma das maneiras é a utilização de recursos tecnológicos que dão forma e movimento aos conceitos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, subdivide a matemática em blocos de conteúdos, em um deles estudamos o ESPAÇO E FORMA, bloco que aborda o estudo de conceitos geométricos na área de matemática. Segundo os PCNs, é por meio do estudo da geometria que o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Compreendendo a Geometria como um campo propício para se trabalhar com situações-problema, verifica-se que é um tema pelo qual os alunos demonstram um interesse significativo.

O trabalho com noções geométricas estimula a observação, a percepção de semelhanças e diferenças e a identificação de regularidades, base do desenvolvimento dos conceitos acerca das razões trigonométricas. Além disso, permite que o trabalho seja desenvolvido a partir da exploração dos objetos do mundo real. Isso levará o aluno a estabelecer a conexão entre a Matemática e outras áreas do conhecimento humano.

A aprendizagem da matemática¹ apresenta uma linguagem denominada científica, em que são encontradas hipóteses demonstradas encadeadas em sequências de raciocínios dedutivamente articulados. Muitas vezes, isso leva o educando a uma dificuldade de aprendizado e apreensão de conhecimentos matemáticos. Em outras

¹ Aqui é tratada a geométrica tradicional, desde a abordagem de Euclides.

abordagens, apresenta-se uma aprendizagem em Matemática ligada à compreensão e apreensão do significado, relacionada ao cotidiano vivenciado pelo aluno. Apreender o significado de um objeto ou de um conhecimento matemático nos permite aplicar esses conceitos na resolução de situações cotidianas ou de observar a existência desses objetos ou conhecimentos em tudo o que nos cerca. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. Para BICUDO e BORBA, p.93, 2005:

“Uma solução que parece indicada nesta situação, é buscar fazer os alunos verem a “Matemática na vida real”, “trazer a vida real para as aulas de Matemática”. [...] ligar a Matemática que se estuda nas salas de aula com a “Matemática do cotidiano”, “da vida”.

A resolução de problemas é um caminho concreto para o ensino de Matemática e vem sendo discutido ao longo dos últimos anos. A própria História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados à outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados às investigações internas à própria Matemática.

Segundo Pólya, “A resolução de problemas é a coluna vertebral da instrução matemática desde o papiro de Rhind.”² (1959). Em suma, muitos são os argumentos para organizar o estudo da Matemática em torno da resolução de problemas. Para as pesquisadoras brasileiras Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely G. Allevato (2011) são: mobilizar a atenção e o pensamento matemático dos estudantes; possibilitar o uso de diferentes estratégias; desenvolver a crença de que os estudantes são capazes de fazer Matemática e propiciar a compreensão de conceitos matemáticos.

Outro fator relevante para uma verdadeira compreensão e apreensão do ensino da matemática está intimamente ligado aos recursos didáticos a serem utilizados. O estudo da trigonometria pode ser reforçado com o uso de calculadoras, softwares de matemática dinâmica, materiais construídos em sala para medição de ângulos e outras

²<https://novaescola.org.br/conteudo/15759/aprender-matematica-atraves-de-resolucao-de-problemas>

ferramentas que darão significado real na construção dos conceitos trigonométricos das razões seno, cosseno e tangente, e suas aplicações na resolução de situações reais. Esses e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, haja vista que ambos são importantes bases da atividade matemática.

Este trabalho está estruturado em 7 capítulos. Inicialmente, apresentamos as origens dos estudos matemáticos e dos conceitos trigonométricos. Além disso, apresentamos os matemáticos da antiguidade que contribuíram para o desenvolvimento dessa área. No capítulo 2, intitulado de A Geometria plana no cálculo das distâncias astronômicas, trazemos a discussão de métodos utilizados na antiguidade pelo matemático Aristarco, a fim de calcular a medida do raio da Terra e distâncias astronômicas entre a Terra, o Sol e a Lua. Uma das aplicações que apresentamos neste texto para o uso da trigonometria associada à sua origem astronômica é a análise de eclipses lunares e solares e sua relação com a posição angular dos astros: Terra, Sol e Lua. Apresentamos o seguinte questionamento: Quando e por que ocorre um eclipse?

No capítulo 4 adentramos nos conceitos específicos da matemática e abordamos a discussão da origem das palavras, atualmente utilizadas no estudo da trigonometria, seno, cosseno e tangente. No capítulo intitulado Teorema de Tales, trazemos uma abordagem demonstrativa e dedutiva dos conceitos através de recursos da geometria dinâmica. Quando tratamos dos triângulos, ampliamos a discussão para conceitos básicos e primitivos da geometria Euclidiana, importantes para o entendimento do elemento geométrico triângulo. Não se pode estudar o triângulo retângulo sem fazer uma referência ao matemático Pitágoras de Samos, fundador da escola Pitagórica e que por suas relevantes contribuições no estudo da matemática teve seu nome associado a um Teorema largamente utilizado: O teorema de Pitágoras. No capítulo 7, abordamos o estudo da trigonometria no triângulo retângulo, demonstramos a veracidade do teorema através de construções dedutivas e com material concreto. Verificamos que tudo isso pode ser apresentado em um ambiente de sala de aula, a fim de fortalecer a aprendizagem do teorema e sua aplicação em situações reais. Além de abordar o teorema de Pitágoras, o capítulo intitulado Trigonometria no triângulo retângulo, aborda

de forma objetiva os conceitos, teoremas e relações que se estabelecem no triângulo retângulo em referência aos seus ângulos e lados. Concluímos nosso estudo expandindo tais relações a outros triângulos, definindo as leis dos senos e dos cossenos através de demonstrações e aplicações.

Os conceitos e demonstrações construídas no decorrer do texto vêm acompanhadas de figuras que auxiliam no entendimento dos princípios matemáticos desenvolvidos e tem como principal público alvo professores de matemática que atuam nas turmas de ensino fundamental e médio. Por fim, sintetizamos os resultados nas Considerações Finais.

1 UM POUCO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

A matemática desenvolvida pelos povos egípcios e babilônicos sempre esteve associada a um método prático e realista de proposição de soluções de problemas ligados ao cotidiano. O conhecimento construído por esses povos encontra relação com o conhecimento prático do teorema de Pitágoras e com a semelhança entre triângulos. Encontram-se fragmentos do estudo da trigonometria na civilização babilônica, sobretudo no que diz respeito à estruturação de uma tabela dos valores do quadrado da secante, construídos através do desenvolvimento da astronomia.

Ainda que houvesse algum conhecimento trigonométrico, esses apenas se relacionam às medidas dos lados de um triângulo. Não é possível afirmar se essas civilizações tinham desenvolvido algum conceito sobre ângulo ou uma relação entre sua medida e a variação deste com o lado de um triângulo. Nessa perspectiva, é difícil afirmar se houve um estudo das relações trigonométricas relacionada à trigonometria como um ramo de estudo da matemática.

A ausência de formulação observada nos papiros e documentos da época e a falta de preocupação com provas e demonstrações dos procedimentos aplicados na solução dos problemas foi fator determinante que inibiu a teorização e a abstração dos conhecimentos práticos desses povos, e conseqüentemente retardou o desenvolvimento do estudo da trigonometria.

A trigonometria surgiu por volta do século IV ou V a.C. e preocupou-se com estudos relacionados à astronomia, à agrimensura e às navegações desenvolvidos pelos povos egípcios, babilônicos e gregos. A palavra significa medida das partes de um triângulo, e um dos principais objetivos do estudo era entender os movimentos dos corpos celestes.

Acredita-se que Tales de Mileto, filósofo, matemático e astrônomo grego, iniciou sua vida como mercador e esteve no Egito. No Egito, o matemático teve a oportunidade de aprender conceitos e aplicações geométricas. Já na Babilônia, ele experimentou seus primeiros contatos com tabelas e instrumentos astronômicos.

Para alguns historiadores da matemática antiga foi Tales de Mileto quem principiou

a geometria demonstrativa. E é atribuída a ele a preocupação em relacionar as medidas dos ângulos, dos lados e das propriedades dos triângulos, como se pode observar nos seguintes fatos geométricos:

A demonstração de que os ângulos da base de dois triângulos isósceles são iguais;

A demonstração do seguinte teorema: se dois triângulos têm dois ângulos e um lado respectivamente iguais, então são iguais;

A demonstração de que todo diâmetro divide um círculo em duas partes iguais;

A demonstração de que ao unir-se qualquer ponto C de uma circunferência aos extremos de um diâmetro AB obtém-se um triângulo retângulo em C.

Aproximadamente em 300 a.C., o pensamento rigoroso matemático teve seu ápice no desenvolvimento axiomático da geometria de Euclides. Com a formação do império Persa por Alexandre o Grande, foi rápido o avanço da civilização grega. Nessa perspectiva, a cultura helênica foi difundida por todo o império, atingindo o Egito, a Mesopotâmia e parte da Índia.

A decadência do rigor matemático ocorre concomitante à morte de Alexandre o Grande. As civilizações urbanas mantinham suas características helenísticas, entretanto o campo preservava suas tradições. Neste contexto, a matemática grega sentiu a forte influência de questões administrativas práticas, além de ter que resolver estudos relacionados à astronomia. A trigonometria fica, portanto, voltada à solução de problemas relacionados à agricultura, à navegação e intensamente à astronomia.

A trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem – ou nação. Teoremas sobre as razões entre os lados de triângulos semelhantes tinham sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônicos (Boyer, 1974, p. 116).

Sobre os estudos astronômicos, como a determinação do tamanho da Terra e as distâncias do sol e da lua, tem-se as primeiras considerações do conceito de ângulo na resolução de problemas envolvendo triângulos.

Em sua obra sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua, num universo geocêntrico, Aristarco (310 – 230 a.C.) buscou comparar a distância entre a Terra e a Lua e a distância entre a Terra e o Sol. O autor concluiu que o Sol estaria 20 vezes mais

distante da Terra em relação à Lua, porém a verdadeira proporção é 400 vezes. Embora o resultado encontrado por Aristarco não seja o real, cabe observar que o procedimento adotado está correto.

Nota-se que, ao construir seu esquema, Aristarco estimou um ângulo de 87° , uma estimativa boa, dada a fragilidade dos instrumentos de medidas de ângulos da época. O ângulo na verdade é de $89,5^\circ$.

Aristarco deduziu que, com um quarto iluminado da lua crescente ou minguante seria possível construir um triângulo. Este triângulo caracteriza-se como um triângulo retângulo, conforme é apresentado na figura abaixo.

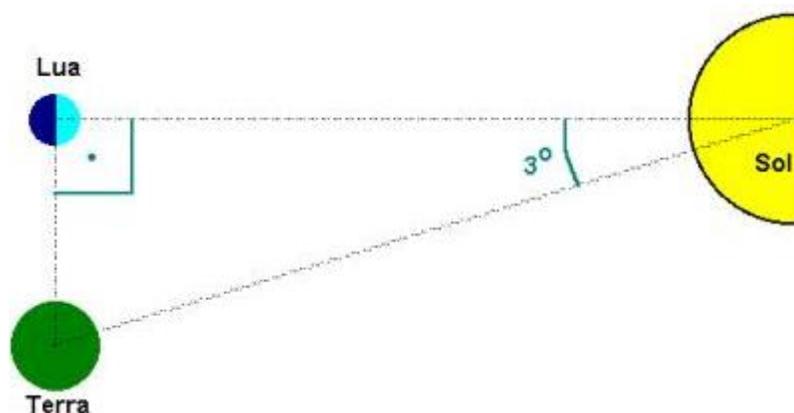


Figura 1 – Esquema de Aristarco

Fonte: <https://cref.if.ufrgs.br/?contact-pergunta=determinacao-da-distancia-terra-sol-na-antiga-grecia>

Na segunda metade do século II a.C., Hiparco de Nicéia, que viveu por volta de 180 a 125 a.C., teve grande influência no estudo da trigonometria. Considerado o pai da trigonometria por escrever um tratado em doze livros, é pioneiro na elaboração de uma tabela de trigonometria, ou seja, uma tábua de cordas, com os valores dos seus arcos para uma série de ângulos. Tais cálculos teriam sido usados em seus estudos em astronomia.

Usando os conceitos dos babilônicos, introduziu na Grécia a divisão da circunferência em 360° . Outrossim, aperfeiçoou as constates astronômicas, como a duração do dia e do ano.

Hiparco, através de um aparelho que seria o precursor do teodolito moderno, confirmou que a distância das estrelas não era fixa na esfera celeste.

2 A GEOMETRIA PLANA NO CÁLCULO DE DISTÂNCIAS ASTRONÔMICAS

Segundo Ptolomeu, século II d.C., a concepção geométrica do Universo privilegia a forma mais perfeita conhecida: o círculo. A partir de observações do céu e da forma esférica dos astros mais próximos, Lua, Sol e alguns planetas, defendia-se a ideia de que o Universo teria uma arquitetura esférica. O planeta Terra em seu centro seria rodeado por esferas concêntricas, uma para cada astro. Estas giravam em círculos, já as estrelas representavam pontos fixos numa única esfera que concluiria o Universo.

Nessa perspectiva, a Geometria teve e tem um papel determinante na interpretação do Universo e suas formas. Os conhecimentos geométricos desenvolvidos, em especial pela civilização grega, permitiram que estudiosos pudessem desenvolver cálculos e assim construir a noção das distâncias entre os astros mais próximos.

Apresentam-se conceitos da geometria plana utilizados no cálculo de distâncias astronômicas como:

Semelhança de triângulos;

Razões trigonométricas;

Dualidade ângulo – arco;

Observamos também o uso de relações decorrentes das propriedades, quer dos triângulos quer da circunferência como:

Teorema de Pitágoras;

Proporcionalidade nos triângulos semelhantes;

Razões trigonométricas;

Perímetro da circunferência;

Amplitude de ângulos ao centro.

2.1 – A determinação do raio da Terra

O primeiro cálculo baseado em métodos geométricos foi obra de Eratóstenes de Alexandria, por volta de 230 a.C.. Para além de um grande matemático, Eratóstenes foi

gramático, poeta, geógrafo, bibliotecário e astrônomo da Grécia Antiga. Nasceu em Cirene, na África, e morreu em Alexandria. No campo da matemática, escreveu uma obra chamada *Platonicus* e trabalhou com os números primos, de onde surgiu o Crivo de Eratóstenes. Ademais, escreveu o livro *Sobre os significados* e *Sobre a mediação da Terra*. O primeiro foi considerado por Pappo de Alexandria um importante livro de geometria. Foi “o último grande geômetra das Escolas helênicas”. Para Boyer o matemático foi “[...] movido pelo mesmo espírito que animara Euclides, Arquimedes e Apolônio.” (BOYER, p.135, 1974). Embora ambas as obras estejam perdidas, apresentam grande relevância por se tratar da medição da circunferência da Terra.

Como diretor da Biblioteca de Alexandria, Eratóstenes notou por meio de um dos manuscritos da biblioteca, que no Solstício de Verão, na cidade de Siena ao meio dia, o Sol ficava quase que exatamente no zênite (é como se o sol ficasse bem no topo de céu, formando um ângulo reto com o solo). Dessa maneira, os raios solares iluminavam o fundo de um poço situado em Siena. No entanto, em Alexandria, à mesma hora e à mesma data, isso não acontecia, visto que o Sol não ficava próximo o suficiente do zênite.

Eratóstenes concluiu que se pudesse determinar o ângulo de inclinação dos raios solares e descobrisse a distância entre as cidades, poderia determinar o tamanho da Terra. Destarte, fixou uma vara perpendicular ao solo em Alexandria e tomou as medidas do comprimento da sombra projetada. A sombra projetada em proporção ao comprimento da vara encontrou o ângulo de $7,2^\circ$, o que correspondente à quinquagésima parte da circunferência.

Com base nessas observações, o raciocínio utilizado pode ser traduzido geometricamente na figura seguinte.

Para determinar o ângulo θ , ele precisava conhecer o comprimento da estaca e de sua sombra para que pudesse calcular:

$$\tan \theta = \frac{\text{comp. vara}}{\text{sombra vara}} \Rightarrow \theta = \arctan \frac{\text{comp. vara}}{\text{sombra vara}} \Rightarrow \theta = 7,2^\circ$$

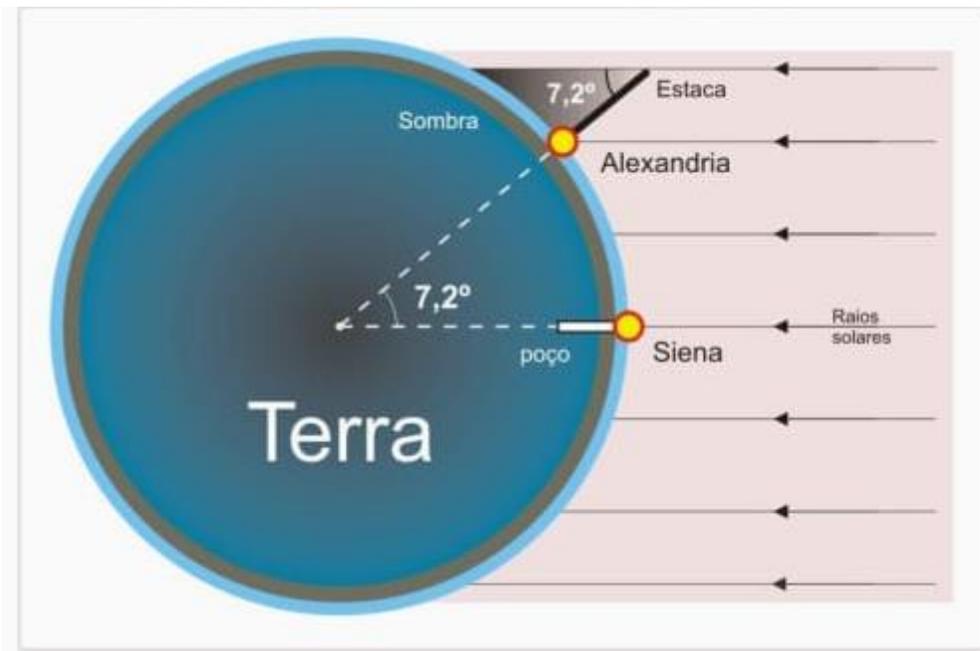


Figura 2: Esquema de Eratóstenes

Fonte: <http://www.ime.unicamp.br/~apmat/a-primeira-medicao-do-raio-da-terra/>

Por conhecer o teorema: *se duas retas paralelas interceptam uma reta transversal, então os ângulos correspondentes são iguais*, Eratóstenes assumiu que o ângulo entre as cidades era o mesmo que a vara fazia com a luz do sol. Estendendo os raios do sol (imaginariamente) ao centro da Terra, obteve os ângulos correspondentes e aplicou a relação:

$$\frac{\text{distância cidades}}{\text{circunferência Terra}} = \frac{\theta}{2\pi}$$

por proporção tem-se:

$$\text{circunferência Terra} = \frac{2\pi \cdot \text{distância cidades}}{\theta}$$

$$\text{circunferência Terra} = \frac{360^\circ \cdot \text{distância cidades}}{7,2^\circ}$$

$$\text{circunferência Terra} = 50 \cdot \text{distância cidades}$$

O matemático concluiu que a Circunferência da Terra era igual a 50 vezes a distância entre as cidades de Alexandria e Siena. Sendo a distância entre as duas cidades igual a 5 000 estádios (unidade de medida de valor aproximado de 157 metros),

temos que:

$$\text{circunferência Terra} = 50 \cdot 5\,000 \text{ estadios}$$

$$\text{circunferência Terra} = 250\,000 \text{ estadios}$$

Ao convertemos para a unidade quilômetro, obtemos a medida de:

$$\text{circunferência Terra} = 250\,000 \cdot 157 = 39\,250\,000 \text{ metros}$$

$$\text{circunferência Terra} = \frac{39\,250\,000}{1\,000} = 39\,250 \text{ km}$$

Assumindo que a Terra tem forma esférica e utilizando a relação do comprimento da circunferência ($2\pi R$), Eratóstenes determinou a medida do raio da Terra.

$$C = 2\pi R \Rightarrow 39\,250 = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{39\,250}{2\pi} \Rightarrow R \cong 6\,250 \text{ km}$$

Sabe-se que o raio da terra é de 6.370 km, o que dá uma diferença de aproximadamente 120 km. Um erro de apenas 1,8%, fato impressionante.

2.2 Distância Terra-Lua e Raio da Lua

Nos tópicos seguintes serão explanados e exemplificados a distância entre a Terra-Lua e a o Raio da Lua.

2.2.1 Método de Aristarco de Samos

Aristarco de Samos (310 – 230 a.C) foi um ilustre astrônomo da Antiguidade e autor de um importante livro sobre o cálculo das distâncias entre a Terra e o Sol e a determinação do tamanho desses. Assim como Eratóstenes, Aristarco pertenceu à escola de Alexandria, porém viveu alguns anos antes de Eratóstenes. Foi Originário de Samos, mesma ilha de origem de Pitágoras (século VI a.C.) e o primeiro grande astrônomo da escola de Alexandria.

A partir do raio da Terra, Aristarco de Samos determinou a distância entre a Terra e o Sol ao combinar, de forma simples, a geometria com suas observações. Usou os seguintes raciocínios e construções:

O Sol está consideravelmente mais longe da Terra que a Lua. Tal conclusão pode ser inferida ao se observar o movimento da Lua ao longo do mês, notando sua passagem por suas várias fases. Começando com a Lua cheia, a luminosidade lunar vai se reduzindo progressivamente, passando por quarto-minguante até chegar a lua-nova. Isso mostra que a Lua vai se interpondo progressivamente entre o Sol e a Terra, portanto, a Lua está mais próxima de nós do que o Sol. Algumas vezes, ao chegar à lua-nova ocorre um eclipse solar, o que é a prova final de que a Lua está mais próxima.

A fim de esclarecer mais, propomos outro exercício para verificarmos que o Sol está mais distante da Terra do que a Lua. Suponha que a Lua está mais distante da Terra do que o Sol. Sendo assim, ao observarmos o céu, veríamos a Lua sempre iluminada de forma direta pelo Sol, desta forma nunca haveria lua-nova. E a lua-cheia ocorreria duas vezes no ciclo lunar, posições 1 e 3. O que não acontece.

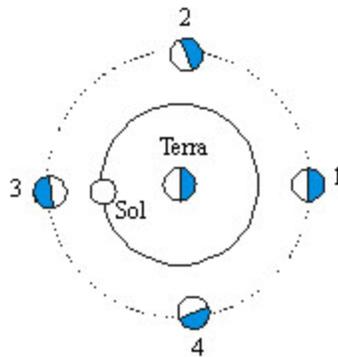


Figura 3: As fases da Lua invertendo a posição do Sol e da Lua
Fonte: <https://rpm.org.br/cdrpm/55/1.htm>.

A ideia de Aristarco é considerada por célebres autores uma das mais notáveis na história da ciência. Aristarco observou a Lua em quarto-crescente ou quarto-minguante, quando ela é vista metade escura e metade iluminada. A observação é feita exatamente ao nascer ou ao pôr-do-Sol, por isso é possível notar que a Lua está aproximadamente na vertical sobre nossas cabeças³.

³ Existe um fenômeno no mínimo interessante que ocorre na passagem da lua-nova: o disco lunar. Embora voltado para a Terra e não recebendo luz direta do Sol, apresenta-se levemente iluminado. Como pode ser isso? Tal explicação foi apresentada pela primeira vez por Leonardo da Vinci (1452-1519), é curiosa e deveras interessante: a luz do Sol, refletida pela Terra, reflete-se novamente na Lua e volta à Terra. Assim, aquela fraca iluminação do disco lunar numa lua-nova é proveniente da Terra por reflexão na Lua! Pode-

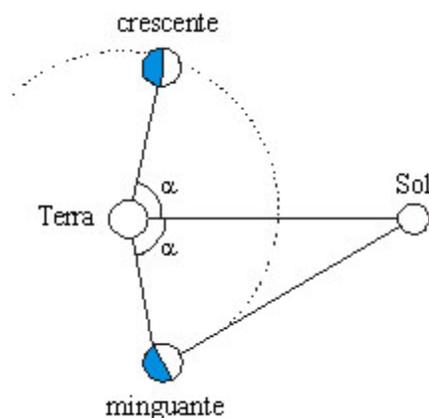
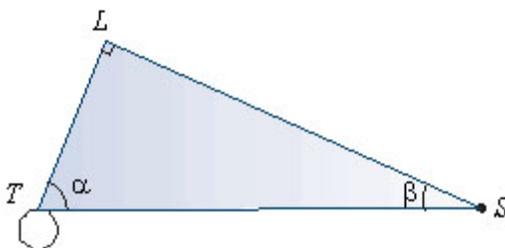


Figura 4: Aristarco e as fases da lua
 Fonte: <https://rpm.org.br/cdrpm/55/1.htm>.

Note que fazendo T um observador terrestre, L o centro da Lua e S o centro do Sol construímos o triângulo LST, retângulo em L, cujo ângulo α estará bem próximo de 90° . O que representa conclusão suficiente para comprovar que o Sola está muito mais longe da Terra do que a Lua.

Sendo α um ângulo muito próximo de 90° , o ângulo β será bem próximo de zero, uma vez que α e β são complementares, ou seja, $\alpha + \beta = 90^\circ$.



Aristarco calculou para α um valor bem próximo de 87° , donde podemos constatar que o lado TS é aproximadamente 20 vezes o lado TL. Ou seja, a distância da Terra ao Sol é aproximadamente 20 vezes a distância da Terra à Lua.

Em suas construções e observações ressaltamos as razões construídas a partir da semelhança dos triângulos e a utilização de conceitos matemáticos importantes, como o fato de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180° . Tal fato garante que uma vez conhecido um desses triângulos, a razão TS/TL é a mesma em todos eles. Assim,

se constatar que tal iluminação está ausente mesmo pouco antes do quarto-crescente ou pouco depois do quarto-minguante.

ao ser impossível medir essa razão no triângulo astronômico original, Aristarco desenhou um triângulo semelhante ao original e de posse desse pequeno triângulo mediu as distâncias TL e TS. O matemático constatou que TS é aproximadamente igual a $20 \times TL$ ⁴.

Para inferir a medida do ângulo α , Aristarco teria observado o tempo gasto pela Lua para completar uma volta em torno da Terra e o tempo gasto para ir de minguante a crescente. Em suas observações, Aristarco constatou que o ciclo lunar completo é de 29,5 dias; e a passagem da lua minguante a crescente dura cerca de 14,25 dias. Desse modo, temos a seguinte proporção:

$$\frac{360^\circ}{29,5} = \frac{2\alpha}{14,25}$$

$$2\alpha \cdot 29,5 = 360 \cdot 14,25$$

$$\alpha = \frac{5130}{59}$$

$$\alpha = 86,9 \cong 87^\circ$$

O resultado obtido por Aristarco está muito longe do valor correto, haja vista que hoje constatou-se que a distância entre a Terra e o Sol é cerca de 400 vezes a distância da Terra à Lua. O que nos leva a concluir que o ângulo α está ainda mais próximo de 90° sendo aproximadamente $89,86^\circ$, fato este que não tira o mérito de Aristarco, no que se refere a ideia de calcular a distância da Terra ao Sol, ao comparar a distância entre a Terra e a Lua.

Raciocínio de Aristarco ao observar um eclipse lunar:

O cone de sombra projetada pela Terra, e a Lua, ao atravessá-lo, terá de percorrer uma distância igual ao diâmetro da Terra.

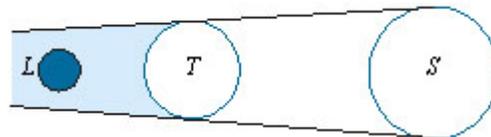


Figura 5: Eclipse lunar segundo Aristarco
Fonte: <https://rpm.org.br/cdrpm/55/1.htm>

⁴ Isso acontece porque a reta LS é perpendicular ao plano que passa pelo observador terrestre e separa na Lua o hemisfério iluminado do hemisfério escuro. O que ele afirma é que atualmente dizemos que TS/TL é um número que estava compreendido entre 18 e 20.

Durante a ocorrência de um eclipse lunar, Aristarco observou que o tempo que a Lua gastou para submergir completamente na sombra da Terra era de $\frac{1}{4}$ do tempo gasto para atravessar todo o cilindro da sombra, donde concluiu que o raio da Lua mediria $\frac{1}{4}$ do raio da Terra.

$$R_L = \frac{1}{4} \cdot R_T$$

Tendo o raio da Terra igual a 6 370 km, podemos assim determinar o raio da lua:

$$R_L = \frac{1}{4} \cdot 6370$$

$$R_L = 1\,592,5 \text{ km}$$

Sendo o raio atual da Lua igual a 1 737 km, notamos que o erro de Aristarco de Samos é de 8%, fato notável para aquele momento histórico.

3. A MATEMÁTICA POR TRÁS DE UM ECLIPSE

Estimulados pelos conceitos e construções dos matemáticos da antiguidade abordaremos neste capítulo estudos sobre a matemática que explica os eclipses. Os conceitos de geometria plana anteriormente citados corroboram a interpretação dos fenômenos conhecidos como eclipses, permitindo assim determinar grandezas que caracterizam suas diferentes modalidades:

- Comprimentos de sombras
- Zonas de sombra e de penumbra
- Tempo de duração
- Posição angular nas órbitas

Para simplificar nosso estudo e nossa abordagem sobre os eclipses, faremos uso da geometria plana em substituição à geometria esférica (KOHATSU e MURAMATSU, p. 9, 2019).

Do grego, *ékleipsis*, a palavra eclipse significa desaparecimento. No eclipse da Lua, a Lua se esconde na sombra da Terra, desaparecendo. No eclipse do Sol, o Sol “desaparece” porque é encoberto pela Lua. Um eclipse acontece quando um objeto astronômico se move em frente a outro, formando sombra, ou quando um objeto astronômico se move dentro da sombra de outro objeto.

Eclipse é um fenômeno que ocorre sempre que a Lua entra na sombra da Terra – chamado eclipse lunar, e quando a sombra da Lua atinge a Terra, chamado eclipse solar.

Se imaginássemos a órbita da Terra em torno do Sol, e a órbita da Lua em torno da Terra em um mesmo plano ocorreria um eclipse da Lua sempre na Lua Cheia, e um eclipse do Sol na Lua Nova. Todavia, o plano orbital da Lua está inclinado 5° em relação ao plano orbital da Terra, fato que faz com os eclipses ocorram quando a Lua está na fase de Lua Cheia ou Nova, e quando o Sol está sobre a linha dos nodos, que é a linha de intersecção dos orbitais da Terra e da Lua.

O tempo de duração de um eclipse, a extensão das áreas afetadas pela sombra, no caso dos eclipses solares, e a posição orbital nos eclipses são determinados a partir do cálculo das sombras.

3.1 Eclipse lunar

O eclipse lunar acontece na fase da Lua cheia. A face cheia da Lua desaparece quando esta entra na zona de sombra da Terra. O eclipse lunar pode passar sem ser percebido, pois a Lua se torna avermelhada devido à interação dos raios solares com a atmosfera da Terra. Uma sombra pode ser dividida em duas regiões: umbra, parte mais escura, e penumbra, região onde há maior incidência de raios de luz, ficando um pouco mais iluminada. O eclipse lunar é:

- penumbral, quando a Lua atravessa a zona de penumbra;
- parcial, enquanto a Lua está entrando na zona de umbra;
- total, quando a Lua se encontra na zona de umbra.

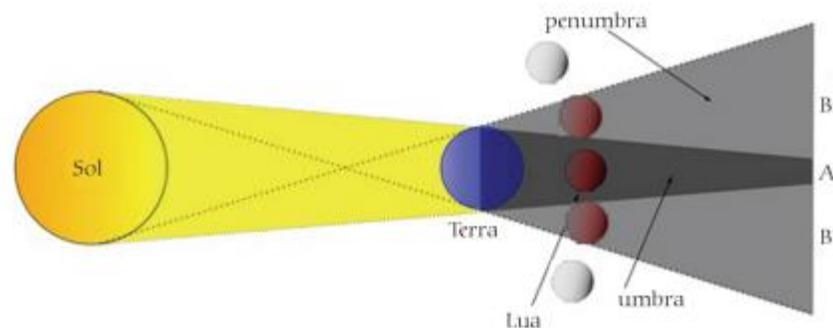


Figura 6: Representação de um eclipse lunar

Fonte: <http://www1.fisica.org.br/fne/phocadownload/Vol17-Num1/a03.pdf>



Figura 7: Tipos de eclipses lunares

Fonte: <http://www1.fisica.org.br/fne/phocadownload/Vol17-Num1/a03.pdf>

3.2 Eclipse Solar

O eclipse solar ocorre na fase da Lua Nova. O Sol desaparece ao se esconder atrás da Lua. Isso possibilita que o alinhamento da Lua entre o Sol e a Terra projete uma sombra da Lua sobre a superfície terrestre, mas o eclipse do Sol é visível apenas para os habitantes da Terra que estão na zona de sombra da Lua. Vê-se o fenômeno nas figuras 8 e 9:

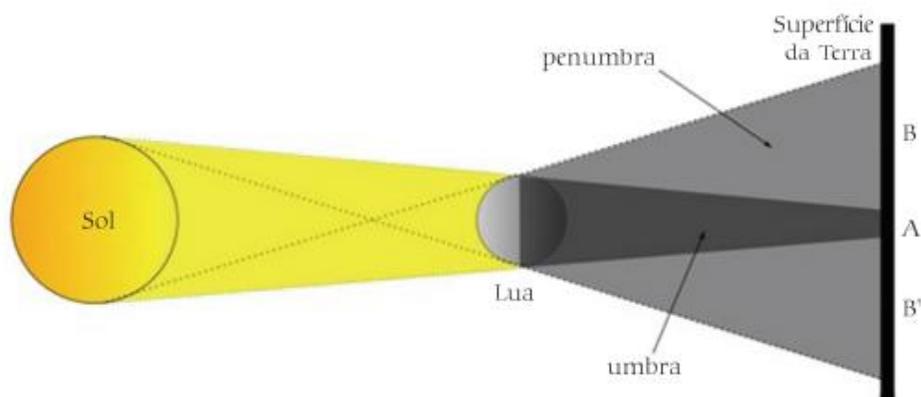


Figura 8: Representação de um eclipse solar
 Fonte: <http://www1.fisica.org.br/fne/phocadownload/Vol17-Num1/a03.pdf>

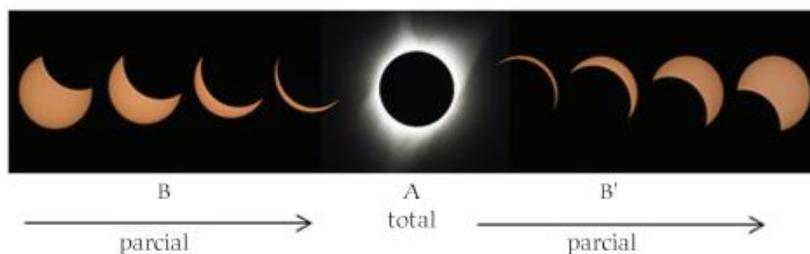


Figura 7: Representação gráfica do eclipse solar. O eclipse total do Sol ocorre na região de umbra, a parte mais escura da sombra. O anteparo onde se formam as sombras é a superfície terrestre. O desenho está fora de escala. Um observador localizado nas regiões de umbra (A) ou de penumbra (B) e (B') veria o Sol como numa das situações exibidas na composição de fotos da progressão do eclipse total solar em 21 de agosto de 2017, Madras, Oregon, EUA.

Figura 9: Eclipse solar total ocorrido em 2017.
 Fonte: <http://www1.fisica.org.br/fne/phocadownload/Vol17-Num1/a03.pdf>

O eclipse total do Sol ocorre na região de umbra, parte mais escura de sombra. As sombras se formam na superfície terrestre. Um observador localizado nas regiões de umbra (A) ou de penumbra (B) e (B') veria o Sol como numa das situações apresentadas na figura 9. A composição de fotos apresenta a progressão do eclipse total do Sol, ocorrido em 21 de agosto de 2017, Madras, Oregon, EUA.

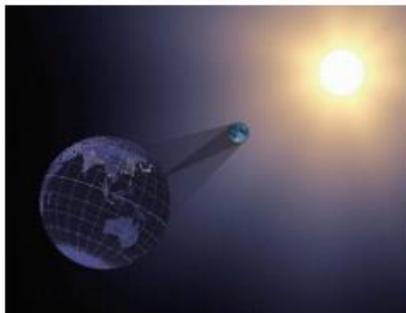


Figura 5: Representação artística do eclipse solar total em 21 de agosto de 2017. Fora de escala.

Figura 10: Representação artística do eclipse solar total em 21 de agosto de 2017.
 Fonte: <http://www1.fisica.org.br/fne/phocadownload/Vol17-Num1/a03.pdf>.



Figura 6: Foto da sombra da Lua sobre a Terra durante o eclipse solar de 21/08/2017 capturada do observatório espacial de clima Deep Space Climate Observatory (DSCOVR).

Figura 11: Foto da sombra da Lua sobre a Terra durante o eclipse solar de 21/08/2017 capturada pelo observatório espacial de clima Deep Space Climate Observatory (DSCOVR)

Fonte: <http://www1.fisica.org.br/fne/phocadownload/Vol17-Num1/a03.pdf>

3.3 Cálculos dos comprimentos da sombra

Considere um corpo luminoso de raio R a uma distância d de uma esfera opaca de raio R' .

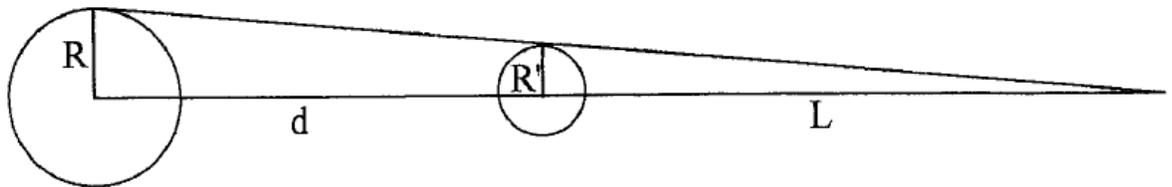


Figura 12: Alinhamento dos astros

Aplicando a semelhança dos triângulos temos que:

$$R'/L = R/L + d$$

$$R' \cdot (L + d) = L \cdot R$$

$$R'L + R'd = LR$$

$$LR - R'L = R'd$$

$$L(R - R') = R'd$$

$$L = R'd / (R - R')$$

Onde:

L - comprimento da sombra

d - distância da fonte à esfera opaca

R' - raio da esfera opaca

R - raio da fonte

3.4 A ocorrência dos eclipses solares

A figura 13 mostra a Lua na posição de um eclipse solar. Considere os três astros num mesmo plano perpendicular à Eclíptica. Devido a enorme distância entre a Terra e o Sol, consideraremos os raios paralelos, $S_1T_1 // ST$. A partir dessa simplificação, poderemos determinar o tamanho do disco solar à distância da lua e assim determinar a posição da Lua.

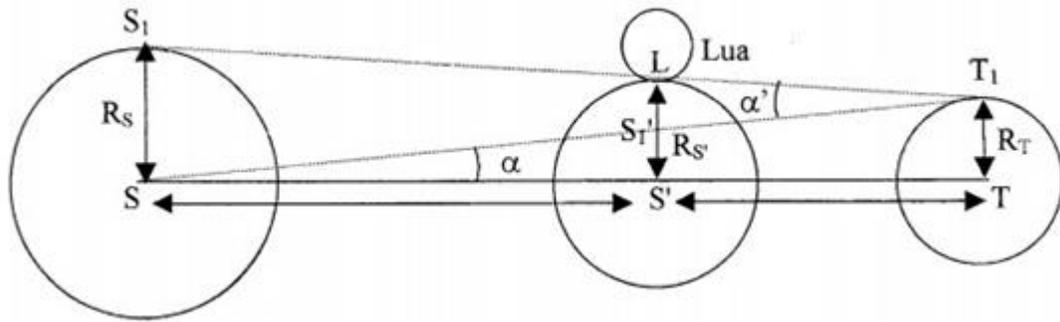


Figura 13: Representação do Sol, Terra e Lua considerando a Lua no mesmo plano (perpendicular à Eclíptica)

Da figura temos $S_1T_1 // ST$ o que implica:

$$T_1L = S'T \quad (i)$$

Considerando o triângulo T_1LS_1' temos:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{S_1'L}{T_1L}$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{S_1'L}{S'T} \text{ por substituição de (i)}$$

$$S_1'L = S'T \cdot \operatorname{tg} \alpha' \quad (ii)$$

Note que:

$$R_{S'} = S'S_1' + S_1'L \quad (iii)$$

Considerando o triângulo $SS'S_1'$ temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S'S_1'}{SS'}$$

$$S'S_1' = SS' \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (iv)$$

Por substituição de (ii) e (iv) em (iii) temos:

$$R_{S'} = SS' \cdot \operatorname{tg} \alpha + S'T \cdot \operatorname{tg} \alpha' \quad (v)$$

Nos triângulos STT_1 e SS_1T_1 temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_T}{ST} \quad (vi)$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{R_S}{S_1T_1} \quad (vii)$$

Por substituição de (vi) e (vii) em (v) concluímos que:

$$RS' = SS' \cdot \frac{R_T}{ST} + S'T \cdot \frac{R_S}{S_1T_1}$$

$$RS' = (149\,600\,000 - 384\,000) \cdot \left(\frac{6\,370}{149\,600\,000}\right) + 384\,000 \cdot \left(\frac{696\,000}{149\,600\,000}\right)$$

Considerando

$S'T = 384\,000$ km (distância Lua-Terra)

$ST = 149\,600\,000$ km (distância Sol-Terra)

$TL = 384\,000$ km (distância Terra-Lua)

$R_T = 6\,370$ km (raio da Terra)

$R_S = 696\,000$ km (raio do Sol)

O disco solar em relação à distância da Lua é observado da Terra com um raio de 8140 km, o que implica a entrada da lua no disco, encobrindo-o quando a distância à Eclíptica for inferior à soma do raio lunar com o raio solar à distância da Lua, ou seja, $1770 + 8140 = 9910$ km.

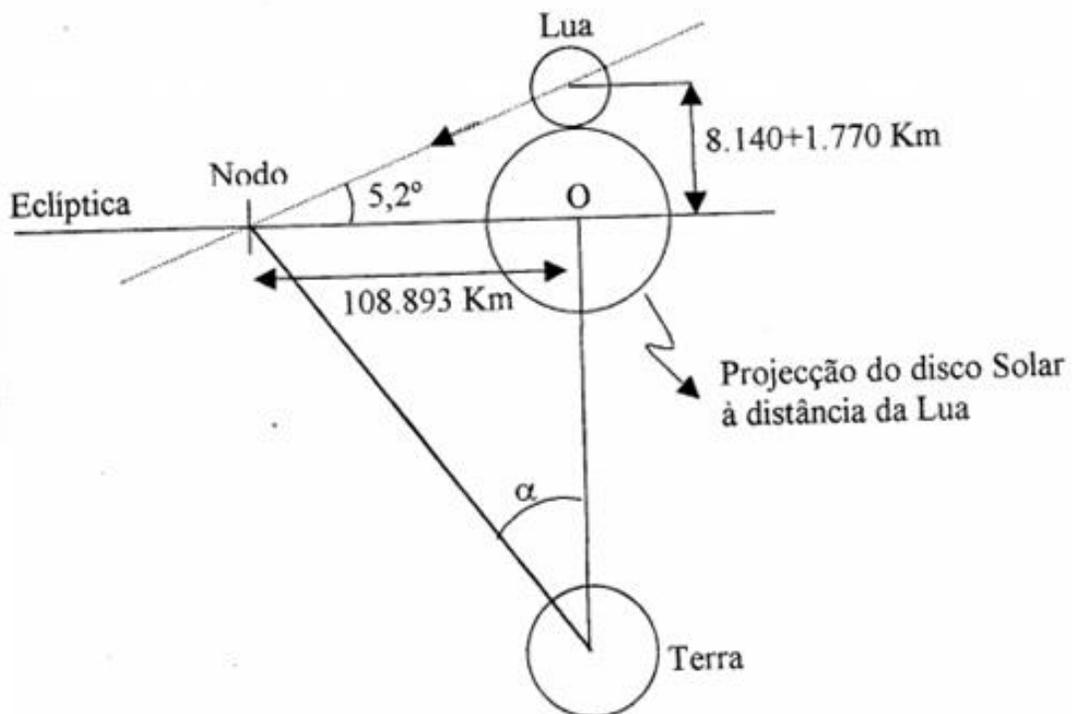


Figura 14: Lua, Terra e Sol num eclipse solar

Note que neste momento a distância ao nodo é tal que:

$$\operatorname{tg} 5,2^\circ = OL/ON$$

$$ON = OL/\operatorname{tg}5,2^\circ$$

$$ON = 9910/\operatorname{tg}5,2^\circ$$

$$ON = 108\,893 \text{ km}$$

O que corresponde a um afastamento angular α :

$$\alpha = 2 \cdot \operatorname{arctg} (108893/ 2 \times 384000)$$

$$\alpha = 2 \cdot \operatorname{arctg} (0,14178776)$$

$$\alpha = 2 \times 8,07^\circ$$

$$\alpha = 16,1^\circ$$

Como o sistema Terra-Lua orbita o Sol, aproximadamente duas vezes ao ano, a linha dos nodos está alinhada com o Sol e a Terra. Apenas quando a Lua passar pelo nodo durante a temporada de eclipses, ocorre um eclipse. As temporadas ocorrem a cada 173 dias e não exatamente a cada meio ano.

Por causa da periodicidade das órbitas da Terra em torno do Sol e da Lua em torno da Terra, bem como do ângulo de $5,2^\circ$ entre a órbita da Lua e da Terra, os eclipses ocorrem ciclicamente. Destarte, sua previsão pode ser feita com certa facilidade. Num período de um ano, podem ocorrer:

- no mínimo 2 eclipses solares e 2 lunares
- 3 eclipses solares e 2 lunares
- 4 eclipses solares e 2 (ou 3) lunares
- 5 eclipses solares e 2 lunares

Depois de 18 anos e 11,3 dias, os eclipses voltam a ocorrer na mesma ordem em que ocorreram no ciclo anterior. Esse período é chamado de Período de Saros, e contém 70 eclipses, sendo 41 solares e 29 lunares. A duração de um eclipse solar é de aproximadamente 7 minutos.

4 ORIGEM DAS PALAVRAS SENO, COSSENO E TANGENTE

Os conceitos de seno e cosseno tiveram suas origens dentro da Astronomia devido, principalmente, à necessidade que os astrônomos tinham de medir distâncias em linha reta entre dois pontos situados sobre a superfície da Terra. Já a palavra tangente, surgiu da necessidade de se medir alturas e distâncias inacessíveis.

Foi através dos árabes que a trigonometria baseada na meia corda de uma circunferência chegou à Europa. Os hindus chamavam a metade da corda de jiba, os árabes a transformaram em jiba. Na língua árabe é comum escrever apenas as consoantes de uma palavra, deixando que o leitor acrescente mentalmente as vogais. Desse modo, os tradutores árabes registraram jb.

Na sua tradução do árabe para o latim, Robert de Chester interpretou jb como as consoantes da palavra jaib, que significa baía ou enseada, e escreveu sinus, seu equivalente em latim. A partir daí, a jiba ou meia corda hindu passou a ser chamada de sinus, em português, seno.

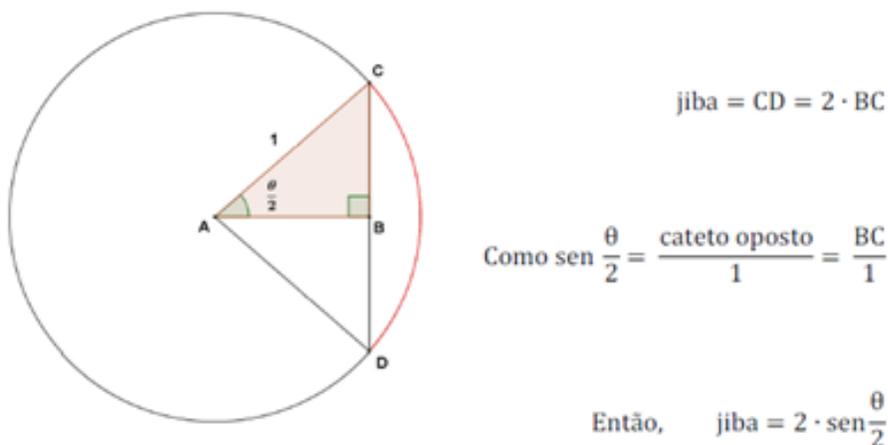


Figura 15: A origem da palavra seno

A palavra cosseno teve seu surgimento datado no século XVII, sendo utilizada como o seno do complemento de um ângulo a qualquer, ou seja, $\cos a = \sin(90^\circ - a)$.

A tangente era a antiga função sombra, pois tinha suas ideias associadas a sombras projetadas por uma vara colocada na horizontal. A variação da elevação do sol causava uma variação no ângulo que os raios solares formavam com a vara e, por conseguinte modificava o tamanho da sombra.

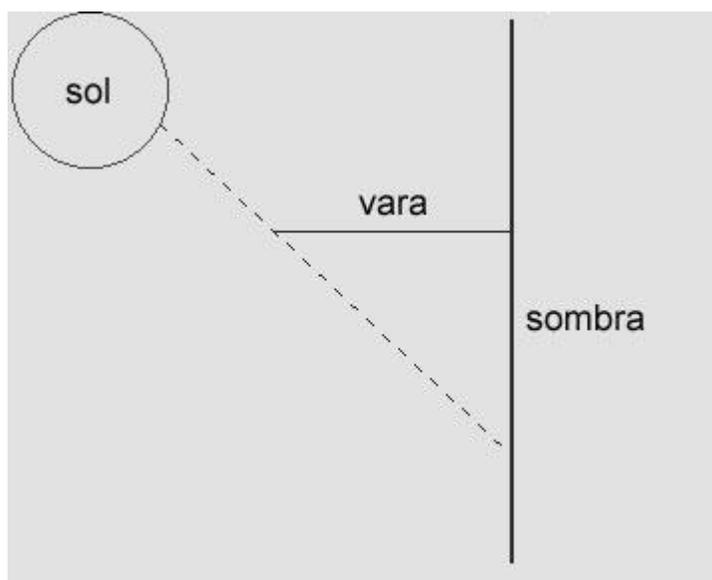


Figura 16: A origem da palavra tangente

O nome tangente foi primeiro usado por Thomas Fincke, em 1583. Cotangente foi primeiro usado por Edmund Gunter, em 1620. A tangente e a cotangente trilharam caminhos diferentes do seno. Ambos os conceitos foram desenvolvidos juntos e não foram inicialmente associados à ângulos, mas foram importantes para calcular o comprimento da sombra produzida por um objeto.

O comprimento das sombras foi fundamental para a construção do relógio de sol. Tales usou os comprimentos das sombras para calcular as alturas das pirâmides através da semelhança de triângulos. As primeiras tabelas de sombras conhecidas foram produzidas pelos árabes por volta de 860.

5 TEOREMA DE TALES

Foram muitas as realizações técnicas do final do século VII a.C. que contribuíram para o desenvolvimento da matemática. As contribuições envolvem conhecimentos geométricos presentes na arquitetura, na astronomia e no calendário, associados a conceitos referentes a ângulos e círculos. Uma delas é o gnomon, instrumento de origem babilônica, conhecido e usado a partir do século V a.C. Trata-se de um relógio solar, em forma de esquadro, que permitia observar sombras e associá-las à explicação dos fenômenos astronômicos, o que possibilitou o estudo da semelhança entre figuras geométricas.



Figura 17: Gnomon

Tales de Mileto (624 a.C. a 546 a.C.) foi um importante precursor da introdução de noções da matemática oriental na Grécia e contribuiu para a substituição do pensamento místico cosmogônico pelo embasamento racional. Em sua ida ao Egito, calculou a altura das pirâmides e a distância de um navio até a costa utilizando um gnomon, a fim de definir o ângulo formado por um homem sobre uma torre, o barco e a base da torre. Sem mudar o ângulo, girou o instrumento 180° e marcou em terra, do outro lado, um ponto para o qual o instrumento estaria apontado. A igualdade entre os ângulos de visão resultou na igualdade entre as distâncias.

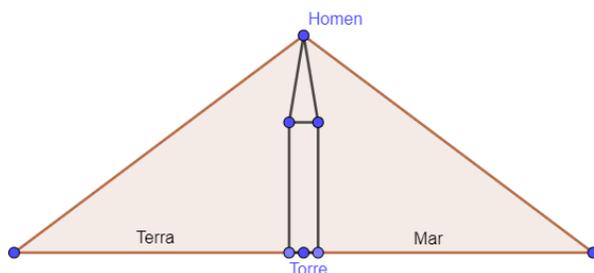
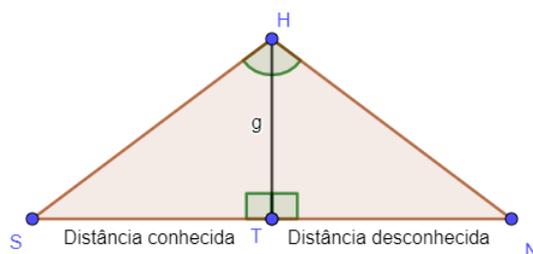


Figura 18: Triângulo construído por Tales para calcular a distância de um navio à costa

Entre as muitas demonstrações de Geometria atribuídas a Tales, a mais importante é a de um teorema que recebeu o seu nome e afirma que: “Retas paralelas cortadas por retas transversais determinam segmentos correspondentes diretamente proporcionais”.

PROPOSIÇÃO 1 - Sejam r, s, t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, A' \in r, B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares.

Então $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$

Demonstração:

Sejam as retas r, s e t paralelas entre si, logo $r//s//t$ e as retas m e n transversais, tais que:

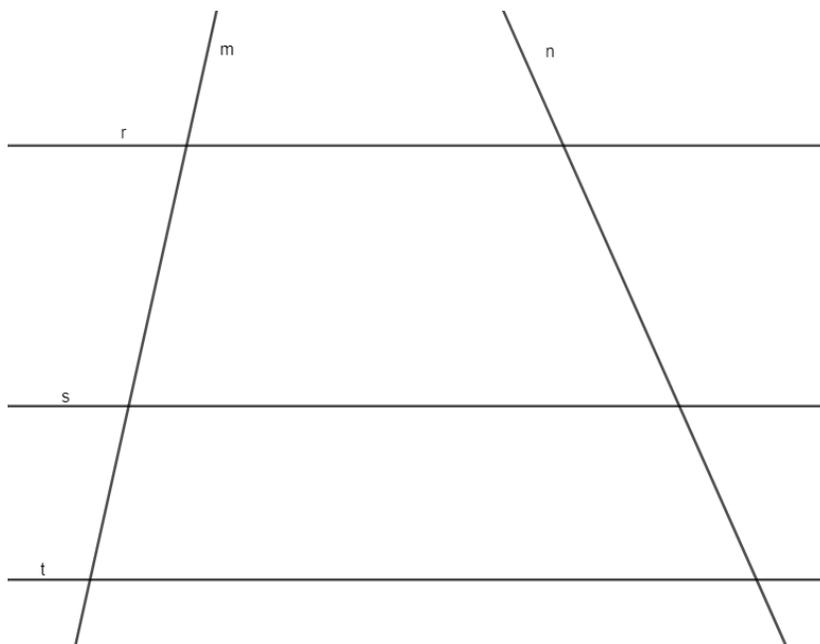


Figura 19: Feixe de retas ($r/s/t$) cortadas pelas transversais m e n .

Suponha que possamos traçar várias outras paralelas às retas r , s e t , de forma que os segmentos formados sobre a transversal m sejam congruentes.

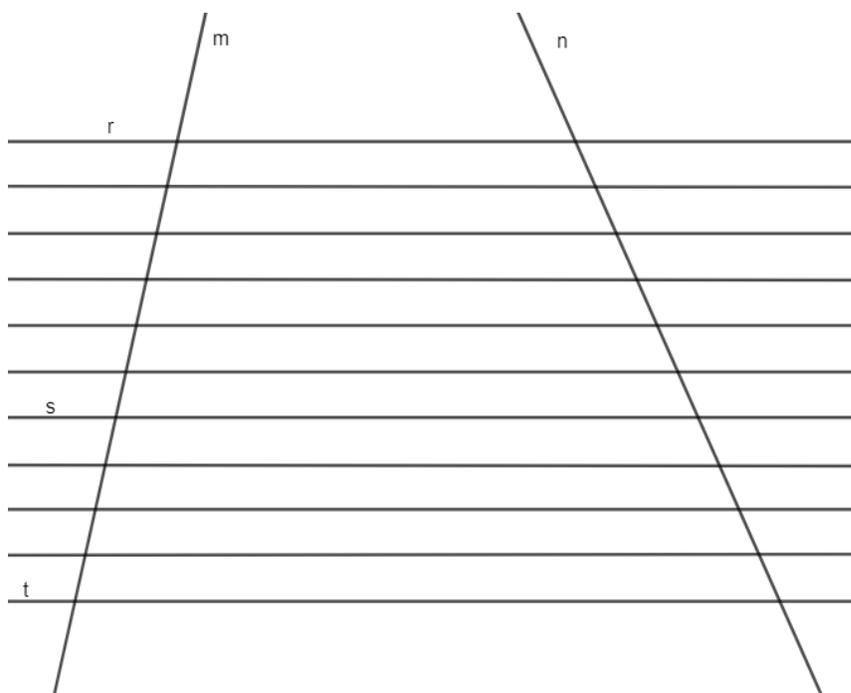


Figura 20: Feixe de retas paralelas.

Se uma secante está dividida em segmentos congruentes por um feixe de retas

paralelas, então a secante n também está dividida em segmentos congruentes.

Considere os pontos A , B e C sobre a secante m e os pontos A' , B' e C' sobre a secante n . Sendo u a unidade de comprimento dos segmentos definidos sobre a reta m e u' a unidade de comprimento dos segmentos definidos sobre a reta n . Temos:

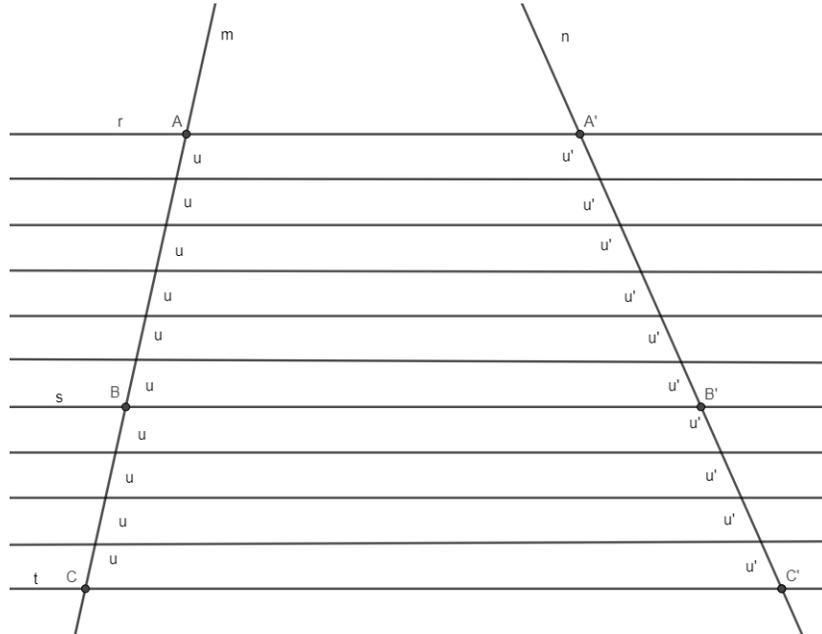


Figura 21: Determinação da unidade de comprimento.

Logo temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{6u}{6u'} = \frac{u}{u'} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{4u}{4u'} = \frac{u}{u'}$$

Pelas igualdades anteriores temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{6u}{6u'} = \frac{u}{u'} = \frac{4u}{4u'} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Demonstração do Teorema de Tales para segmentos incomensuráveis.

Consideremos \overline{AB} e \overline{CD} segmentos incomensuráveis, ou seja, não existe

segmento submúltiplo comum de \overline{AB} e \overline{CD} .

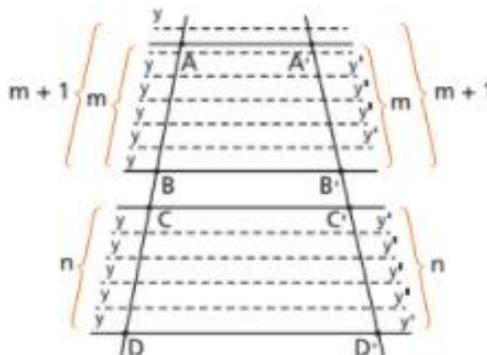


Figura 22: Demonstração do Teorema de Tales para segmentos incomensuráveis

Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar – 9ª edição – (página 180)

Tomamos um segmento y submúltiplo de \overline{CD} (y cabe um certo número inteiro n de vezes em \overline{CD}), isto é:

$$\overline{CD} = n \cdot y \text{ (I)}$$

Por serem \overline{AB} e \overline{CD} incomensuráveis, marcando sucessivamente y em \overline{AB} , para um certo número inteiro m de vezes temos que:

$$m \cdot y < \overline{AB} < (m + 1) \cdot y \text{ (II)}$$

Operando com as relações (I) e (II) temos:

$$\frac{m \cdot y}{n \cdot y} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{(m + 1) \cdot y}{n \cdot y}$$

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{m + 1}{n} \text{ (III)}$$

Construindo retas do feixe pelos pontos de divisão de \overline{AB} e \overline{BC} e aplicando a propriedade anterior, temos:

$$\overline{C'D'} = n \cdot y' \text{ (IV)}$$

$$m \cdot y' < \overline{A'B'} < (m + 1) \cdot y' \quad (V)$$

Operando com as relações (IV) e (V) encontramos:

$$\frac{m \cdot y'}{n \cdot y'} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{(m + 1) \cdot y'}{n \cdot y'}$$

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{m + 1}{n} \quad (VI)$$

Sendo assim, y é um submúltiplo de \overline{CD} que pode variar, pois dividindo y , aumentamos n e nestas condições $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ formam um par de classes contíguas que definem um único número real, que é $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ conforme expressão (III), e é $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ pela expressão (VI).

Sendo esse número único, então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

∴ A razão entre segmentos correspondentes é constante.

T1 – Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determina sobre outra qualquer transversal desse feixe segmentos também congruentes.

Demonstração:

H.: $a \parallel b \parallel c \parallel d$

s e t são transversais

$$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD}$$

T.: $\overline{MN} \equiv \overline{NP} \equiv \overline{PQ}$

Por hipótese temos:

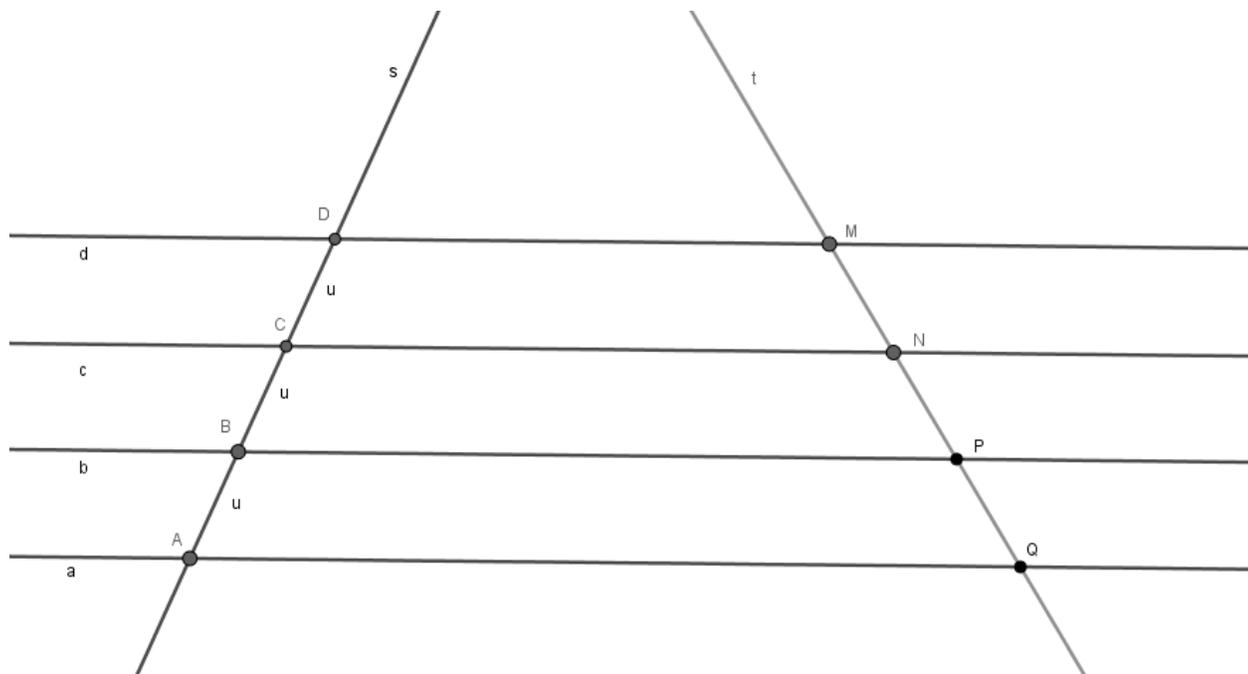


Figura 23: Feixe de paralelas para demonstração de proposição

Por construção fazamos $MR \parallel DC$, $NS \parallel BC$ e $PT \parallel AB$.

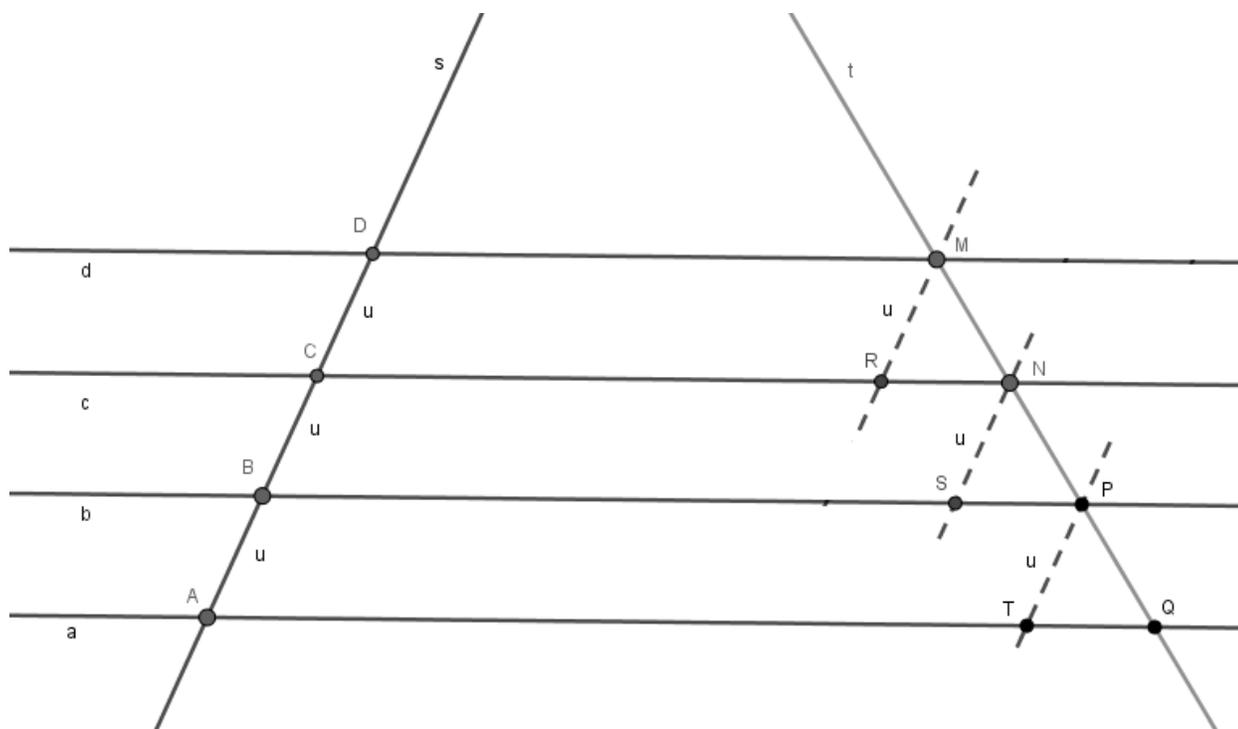


Figura 24: Construção dos paralelogramos a partir do feixe de paralelas.

Os quadriláteros $ABPT$, $BCNS$ e $CDMR$ são paralelogramos. Logo, seus lados

opostos são congruentes, ou seja,

$$AB = PT = u$$

$$BC = NS = u$$

$$CD = MR = u$$

Note que os ângulos $M\hat{R}N$, $N\hat{S}P$ e $P\hat{T}Q$ são congruentes, pois são suplementares dos ângulos obtusos dos paralelogramos ABPT, BCNS e CDMR.

Ainda temos que os ângulos $R\hat{M}N$, $S\hat{N}P$ e $T\hat{P}Q$ são congruentes, pois são suplementares dos ângulos agudos dos paralelogramos ABPT, BCNS e CDMR.

Logo pelo caso A.L.A os triângulos ΔMRN , ΔNSP e ΔPTQ são congruentes e sendo assim temos que: $\overline{MN} \equiv \overline{NP} \equiv \overline{PQ}$, o que demonstra o teorema: Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determina sobre outra qualquer transversal desse feixe segmentos também congruentes.

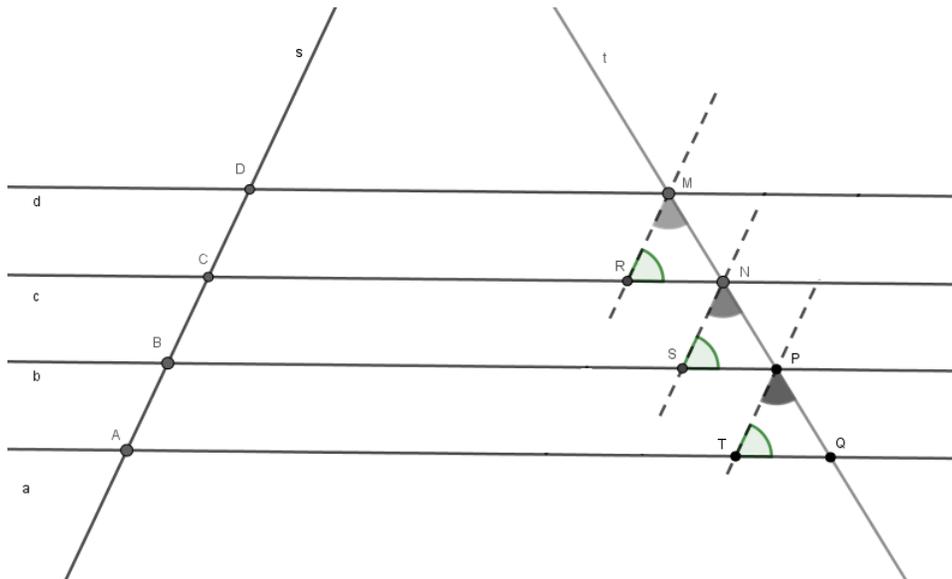


Figura 25: Demonstração das igualdades angulares dos paralelogramos.

Demonstração do teorema de Talles utilizando conceitos de área.

“Dado um feixe de retas paralelas cortado por duas ou mais transversais as paralelas determinam sobre as retas transversais segmentos proporcionais.”

Considere um feixe de retas paralelas $h \parallel g \parallel f$ com j e i retas transversais que definem sobre as retas paralelas os pontos A, B e C e A', B' e C' , respectivamente.

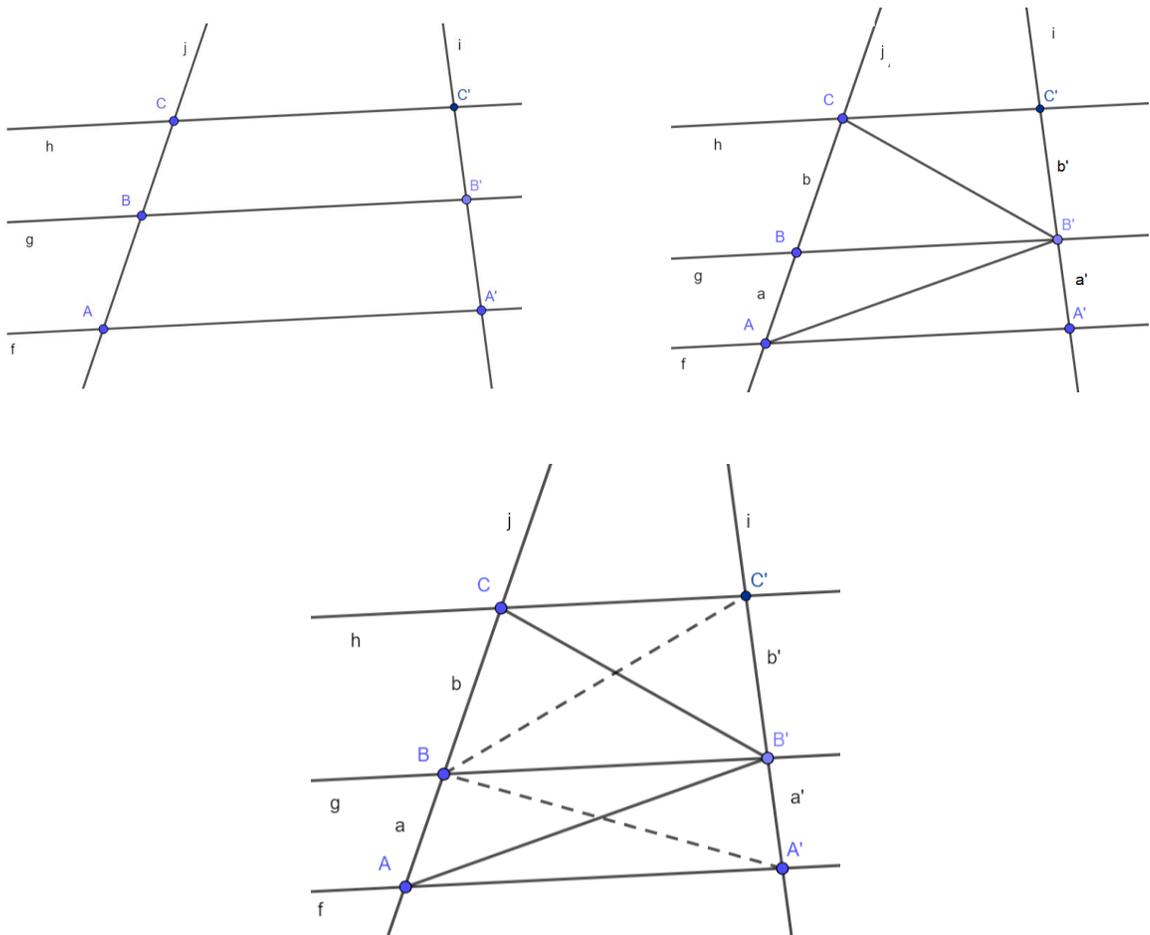


Figura 26: Demonstração do teorema de Tales aplicando o conceito de áreas.

Traçando os segmentos CB' e $B'A$ temos por construção o triângulo $\triangle AB'C$ no qual BB' é uma ceviana do triângulo. Pela propriedade das cevianas temos que:

$$\frac{A[AB'B]}{A[BB'C]} = \frac{a}{b}$$

Traçando os segmentos $C'B$ e BA' temos por construção o triângulo $\Delta A'BC'$ no qual BB' é uma ceviana do triângulo. Pela propriedade das cevianas temos que:

$$\frac{[A'BB']}{[B'BC']} = \frac{a'}{b'}$$

Sendo $AA' // BB'$ temos que $\Delta A'BB'$ tem a mesma área do $\Delta AB'B$ ou seja $[A'BB'] = [AB'B]$.

Considerando o $\Delta BB'C'$, notamos que este tem a mesma área do $\Delta BB'C$, pois $BB' // CC'$, ou seja $[C'BB'] = [BB'C]$, logo

Logo,

$$\frac{[AB'B]}{[BB'C]} = \frac{a}{b} = \frac{[A'BB']}{[C'BB']} = \frac{a'}{b'}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

6. OS TRIÂNGULOS

No cotidiano, constroi-se com clareza as ideias do que vem a ser um ponto, uma reta ou um plano. Porém, no estudo da geometria assumimos essas noções como conceitos primitivos, ou seja, elementos que prescindem de definições formais. Para o estudo dos elementos geométricos aqui apresentados, cabe ainda considerar que toda reta é um conjunto de pontos (pelo menos dois pontos).

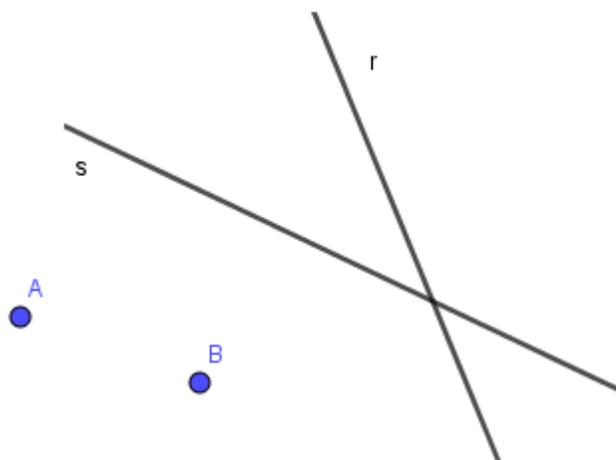


Figura 27: Pontos e retas no plano

Neste estudo, denotaremos os pontos por letras maiúsculas e as retas por letras minúsculas. Os temas ora abordados tem por base a Geometria Euclidiana Plana que estuda as propriedades relativas aos pontos e retas de um plano.

Convenientemente, considera-se que por dois pontos distintos A e B do plano, podemos traçar uma única reta. No caso, sendo r a reta que se determina pelos pontos A e B, denotaremos $r = \overleftrightarrow{AB}$.

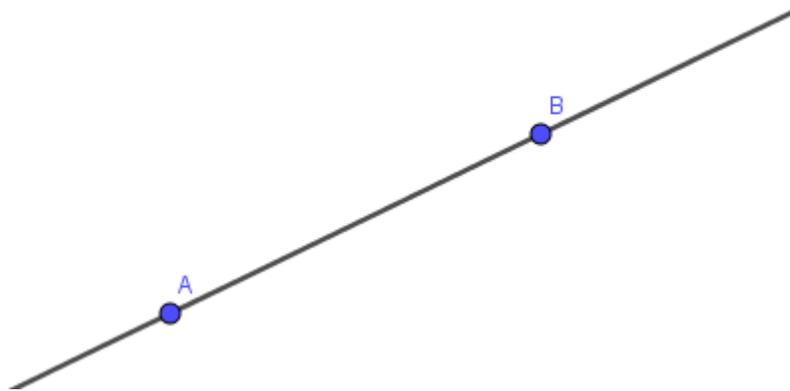


Figura 28: Dois pontos determinam uma única reta.

Um ponto C , localizado sobre uma reta r , a divide em duas partes, as quais denominamos semirretas de origem C e denotaremos por \overrightarrow{CA} e \overrightarrow{CB} .

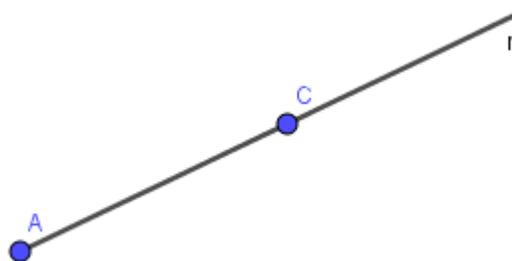


Figura 29: semirreta \overrightarrow{CA} de origem C

Dados dois pontos distintos A e B sobre um reta r , o segmento AB é a porção da reta r situada de A a B . Escreve-se \overline{AB} e este segmento que está limitado entre os pontos A e B podem ser medidos por unidade de medida conveniente. Cabe ainda observar que dados os pontos A e B no plano, defini-se a distância $d(A, B)$ entre os pontos como sendo o comprimento \overline{AB} do segmento AB .



Figura 30: Segmento de reta AB

Vejamos alguns conceitos importantes para a construção da trigonometria.

6.1 Ângulo

Dadas, no plano, duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , um ângulo ou região angular de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} é uma região do plano limitada pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} .

Um ângulo pode ser convexo ou não convexo. Denotamos um ângulo de lado \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} por $\angle AOB$ ou \widehat{AOB} ou \widehat{BOA} .

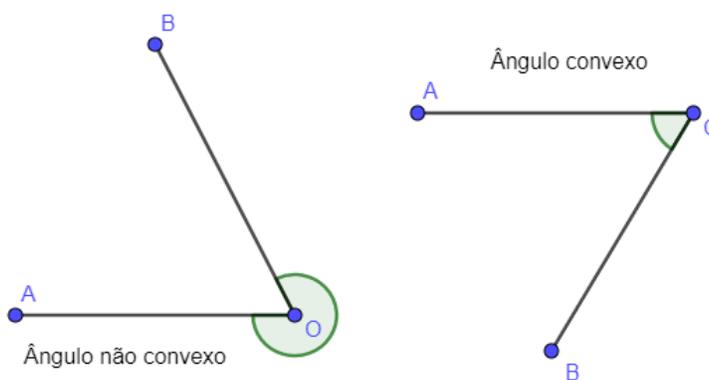


Figura 31: Regiões angulares no plano

Todo ângulo representa uma medida da região do plano que ele ocupa. Se dividirmos um círculo γ de centro O em 360 arcos iguais e tomando X e Y, extremos de um desses arcos iguais, teremos a medida do ângulo $\angle XOY$ em 1 grau, denotado por 1° , logo $\widehat{XOY} = 1^\circ$.

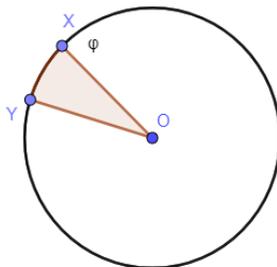
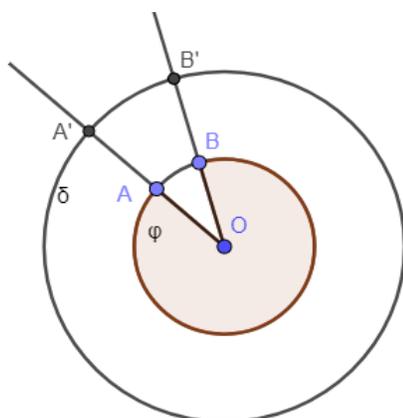


Figura 32: Definição de grau com unidade de medida angular

A medida do ângulo $\angle XOY$ independe do tamanho do círculo. Considere os círculos γ e φ , concêntricos em O , e dois pontos $A, B \in \gamma$. Sejam A' e B' os pontos de intersecção das semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} com φ . Ambos os arcos \widehat{AB} e $\widehat{A'B'}$ representam o mesmo ângulo central, logo:



$$\widehat{AB} = \widehat{A'B'} = 1^\circ$$

Figura 33: Definição de grau

Para denotar medidas de ângulos, usamos letras gregas minúsculas $A\hat{O}B = \theta$ para indicar que a medida do ângulo $\angle A\hat{O}B$ é θ graus.

Nesse sentido, quando escrevemos $\angle A\hat{O}B$, nos referimos ao ângulo convexo. Considerando $\angle A\hat{O}B$ tal que $0^\circ < A\hat{O}B < 180^\circ$. Diremos:

$\angle A\hat{O}B$ é agudo quando $0^\circ < A\hat{O}B < 90^\circ$.

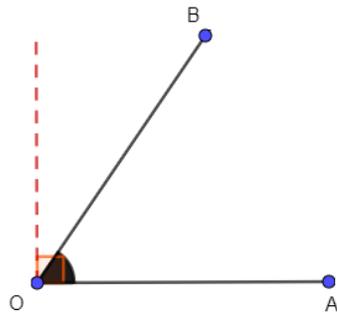


Figura 34: Representação do ângulo agudo

$\angle A\hat{O}B$ é reto quando $\angle A\hat{O}B = 90^\circ$.

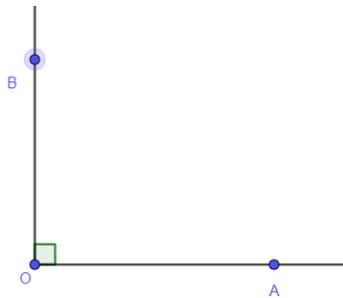


Figura 35: Apresentação do ângulo reto

$\angle A\hat{O}B$ é obtuso quando $90^\circ < \angle A\hat{O}B < 180^\circ$.

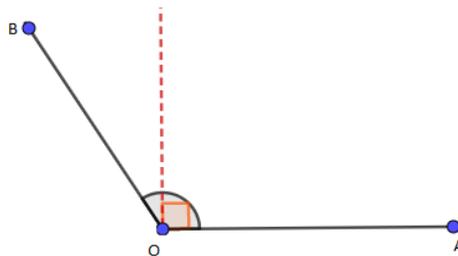


Figura 36: Apresentação do ângulo obtuso

6.2 Triângulos

Ao considerar três pontos A, B e C no plano, temos: Se C estiver sobre a reta \overrightarrow{AB} teremos A, B e C pontos colineares, caso contrário A, B e C serão não colineares.

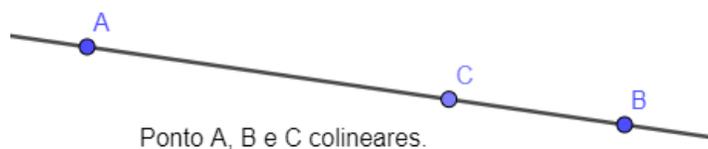


Figura 37: Pontos colineares

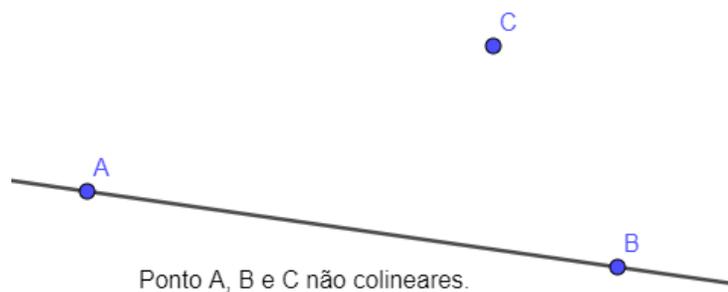


Figura 38: Pontos não colineares

Três pontos não colineares formam um triângulo. A região triangular corresponde a região limitada do plano, delimitada pelos segmentos que unem os pontos dois a dois. Sendo A, B e C os pontos. Diremos que:

A, B e C são os vértices do triângulo;

Os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} são os lados do triângulo;

$\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ onde a, b e c são os comprimentos dos lados.

Os ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} são os ângulos internos do triângulo.

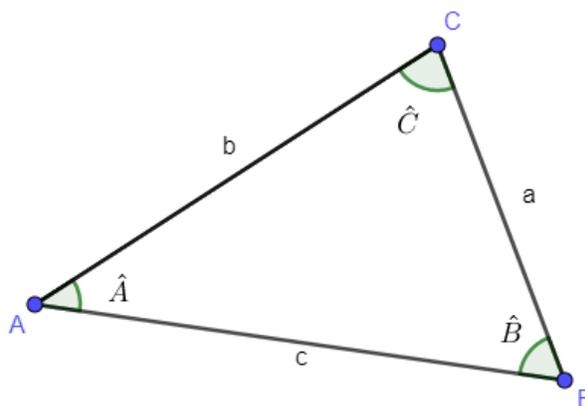


Figura 39: Região triangular definida pelos vértices A, B e C

Os triângulos podem ser classificados de duas maneiras: em relação aos comprimentos de seus lados ou em relação às medidas dos seus ângulos.

Quanto ao comprimento de seus lados, temos:

Triângulo Equilátero, se $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$.

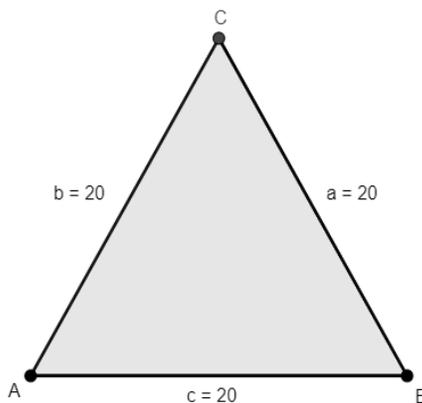


Figura 40: triângulo equilátero

Triângulo Isósceles: se ao menos dois dentre os lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} forem iguais.

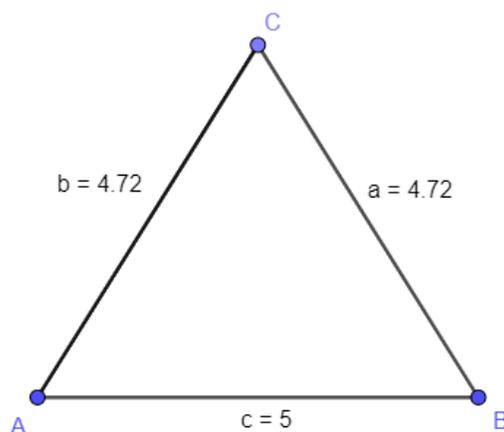


Figura 41: triângulo isósceles

Triângulo Escaleno, se $\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$

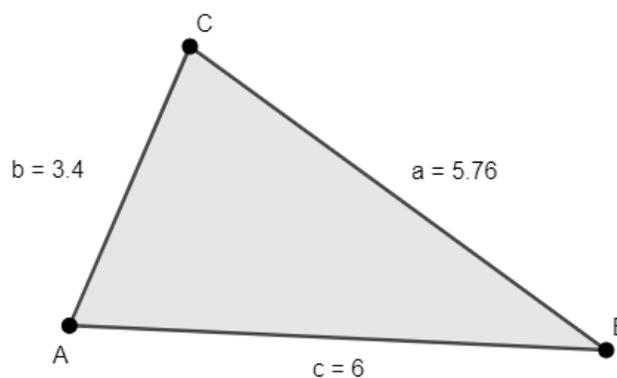


Figura 42: triângulo escaleno

Quanto ao estudo dos triângulos, vale destacar e demonstrar uma importante proposição que relaciona os ângulos internos de qualquer triângulo.

Proposição - A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a 180° .

Demonstração:

Sejam ABC um triângulo qualquer e \overrightarrow{XY} a reta paralela ao lado \overline{BC} e passando por A.

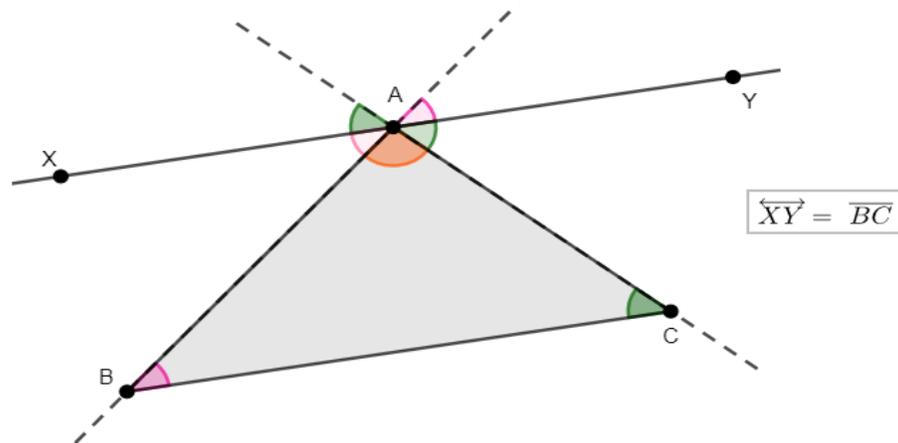


Figura 43: A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer

Por definição de ângulos alternos temos:

$$\begin{aligned}\hat{B} &= X\hat{A}B \\ \hat{C} &= Y\hat{A}C \\ \text{e } B\hat{A}C &= \hat{A}\end{aligned}$$

logo,

$$\hat{A} + X\hat{A}B + Y\hat{A}C = 180^\circ \text{ (ângulos suplementares)}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

\therefore A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°

Quanto a medida de seus ângulos:

Triângulo Acutângulo, se todos os seus ângulos forem menores do que 90°

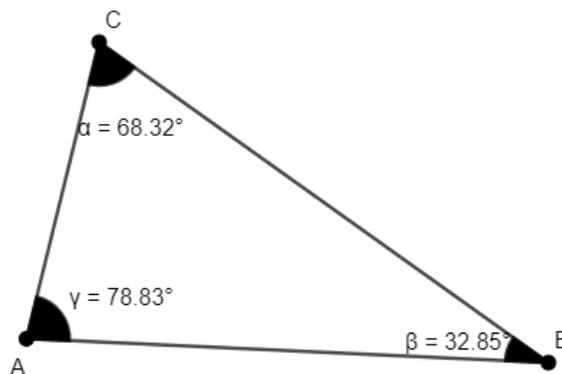


Figura 44: Triângulo acutângulo

Triângulo Obtusângulo, se um de seus ângulos for maior do que 90° e menor do que 180° .

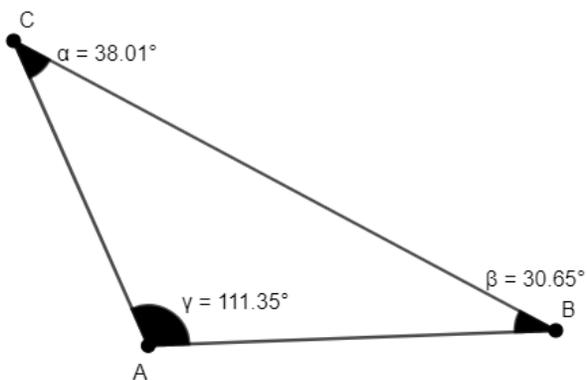


Figura 45: Triângulo obtusângulo

Triângulo Retângulo, se um de seus ângulos for igual a 90° .

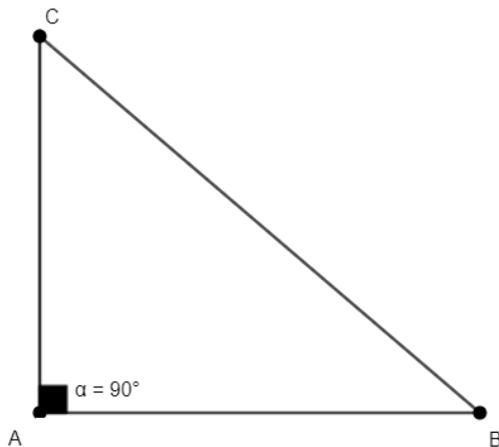


Figura 46: Triângulo retângulo

7 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Não há como estudar o triângulo retângulo com suas relações métricas e trigonométricas sem ressaltar um importante matemático grego: Pitágoras. Apesar de não haver provas registradas sobre sua vida e haver muitas lendas fantasiosas, supõe-se que Pitágoras tenha nascido aproximadamente em 572 a. C., em Samos, no mar Egeu. Samos é uma das ilhas do Dodecaneso, próximo a Mileto, onde nasceu Tales.

Filho de mercador, Pitágoras fez diversas viagens ao Egito e à Jônia, acompanhando seu pai, onde entrou em contato com alguns pensadores da época. Diversos autores acreditam que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales devido à proximidade das regiões onde nasceram. Eles afirmam ter sido Pitágoras o fundador de uma sociedade, a escola pitagórica (comunitária e secreta), com bases matemáticas e filosóficas, cujo lema era “Tudo é número”.

Há divergências em relação a Pitágoras ter sido discípulo de Tales, haja vista que há diferença de meio século entre suas idades. As semelhanças em seus estudos podem ser facilmente explicadas pelo fato de Pitágoras e Tales terem tido contato com a matemática desenvolvida pelos egípcios e babilônicos em suas viagens.

De fato, é difícil separar história e lenda no que se refere ao homem. Afinal, Pitágoras foi considerado filósofo, astrônomo, matemático, abominador de feijões, santo, profeta, milagroso, mágico e charlatão. O que se pode afirmar é que ele foi uma das figuras mais influentes da história. Suas crenças foram difundidas por quase todo o mundo grego.

Os egípcios dessa época não só sabiam que o triângulo 3, 4 e 5 é um triângulo retângulo, mas que os triângulos de medidas 5, 12 e 13; 20, 21 e 29 apresentavam a mesma classificação.

O teorema das áreas dos quadrados formados sobre os lados de um triângulo retângulo é atribuída a Pitágoras e recebe seu nome, todavia esse teorema já era de conhecimento dos chineses e babilônios bem antes de Pitágoras.

O teorema de Pitágoras representa uma relação entre os 3 lados de um triângulo retângulo qualquer. O teorema de Pitágoras pode ser apresentado de várias formas. Euclides escreveu em seu livro *Os Elementos* duas proposições que podem ser relacionadas com o teorema de Pitágoras.

A primeira proposição, chamada proposição 47, afirma que: “Em todo o triângulo retângulo o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual aos quadrados formados sobre os outros lados que fazem o mesmo ângulo reto”.

A segunda é a proposição 48 e nela está escrito que “Se o quadrado feito sobre um lado de um triângulo for igual ao quadrado dos outros dois lados, o ângulo compreendido por estes dois lados será reto”.

Simplificando o enunciado, pode-se afirmar que: Um triângulo ABC é retângulo no vértice C se, e somente se, $(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2$ ou como usualmente trabalha-se nas escolas: “O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos” e se a é a medida da hipotenusa e se b e c são as medidas dos catetos, o enunciado do teorema de Pitágoras equivale a afirmar que $a^2 = b^2 + c^2$.

De acordo com o teorema, a área sombreada em tom mais claro é igual a área sombreada em tom mais escuro, como é possível observar na figura a seguir:

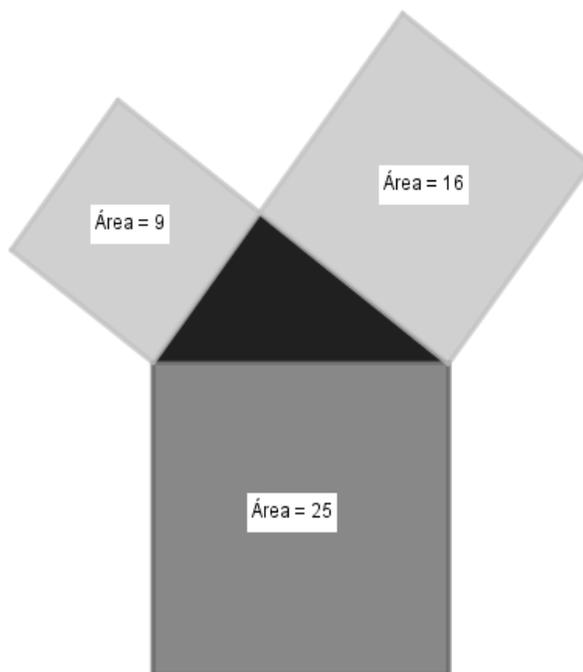


Figura 47: Demonstração do teorema de Pitágoras utilizando áreas.

Para Perigal (1873), o teorema parece claro e evidente, pois usa uma demonstração baseada em construções geométricas para determinar polígonos congruentes.

Teorema: “O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.

Demonstração

Seja ABC um triângulo retângulo em A , tal que $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$.

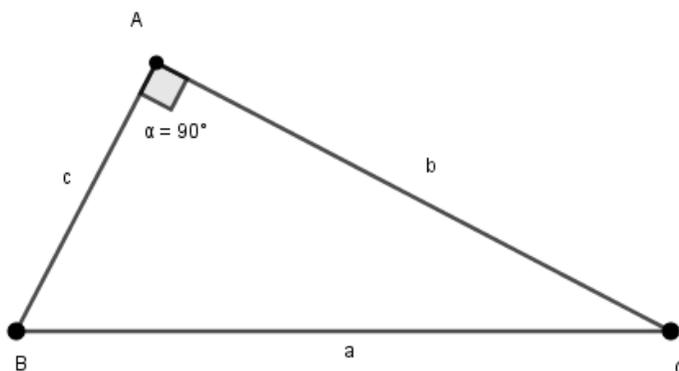


Figura 48: Elementos do triângulo retângulo

Constrói-se quadrados sobre os lados do ΔABC , de modo que $ACDE$ é o quadrado sobre o maior cateto desse triângulo.

Seja O o centro do quadrado $ACDE$ definido pela intersecção de suas diagonais.

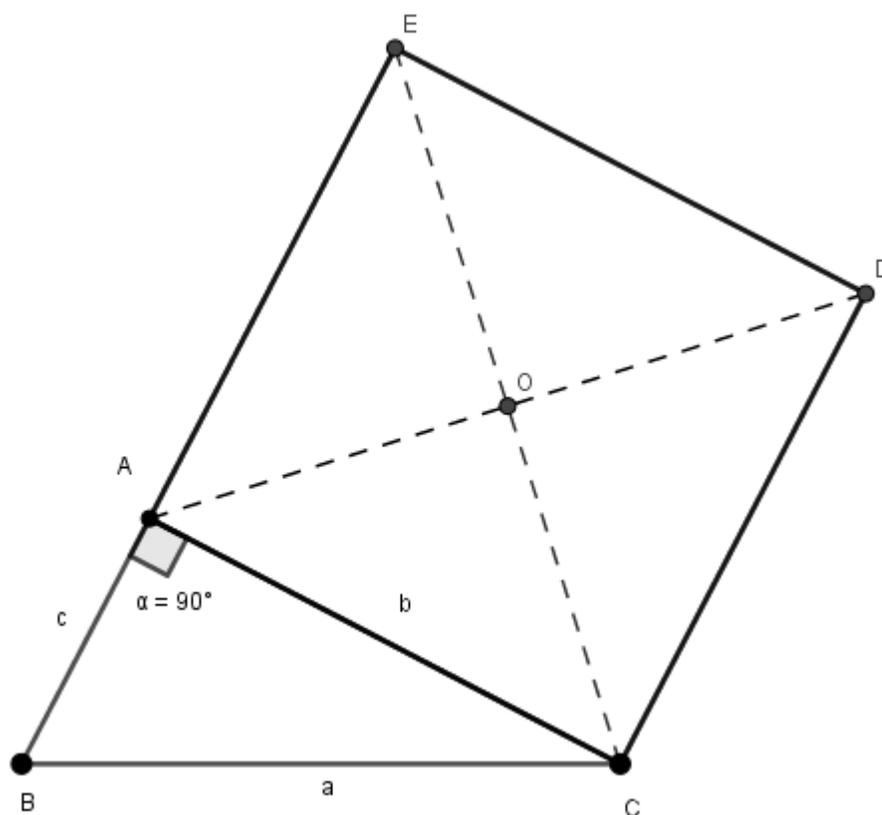
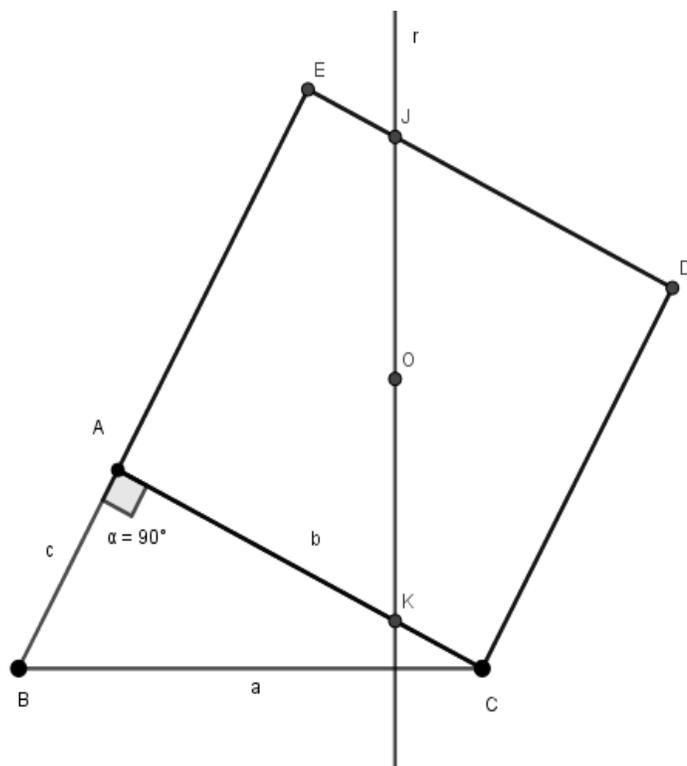
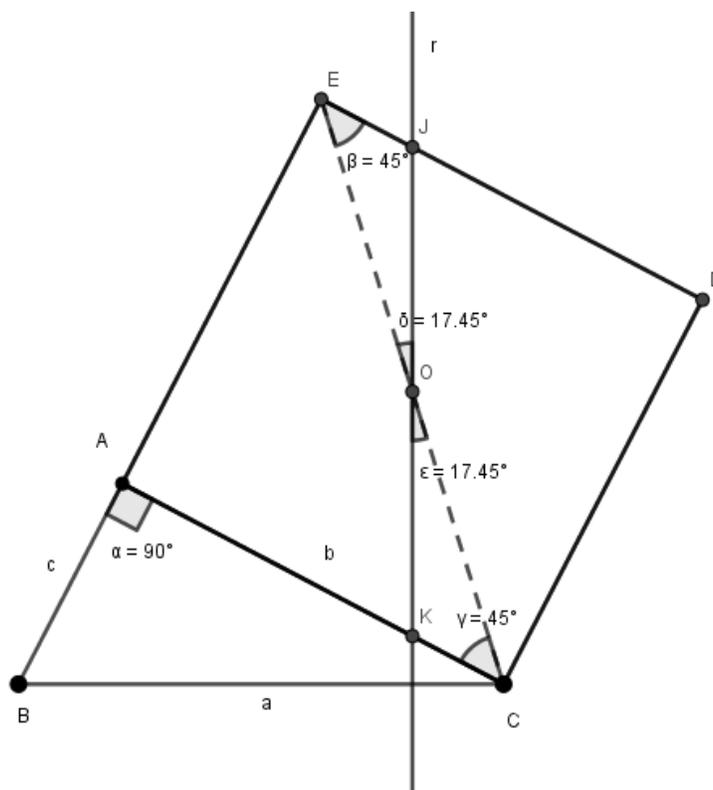


Figura 49: Áreas e teorema de Pitágoras

Por O constrói-se uma reta r perpendicular à hipotenusa. A reta r define o ponto J sobre ED e o ponto K sobre o lado AC do triângulo.



Vamos provar que O é ponto médio do segmento \overline{JK} , logo $\overline{JO} = \overline{OK}$.
 Considere o $\triangle OEJ$ e o $\triangle OCK$, temos que:



$\widehat{OÊJ} = \widehat{O\hat{C}K}$, pois são alternos internos

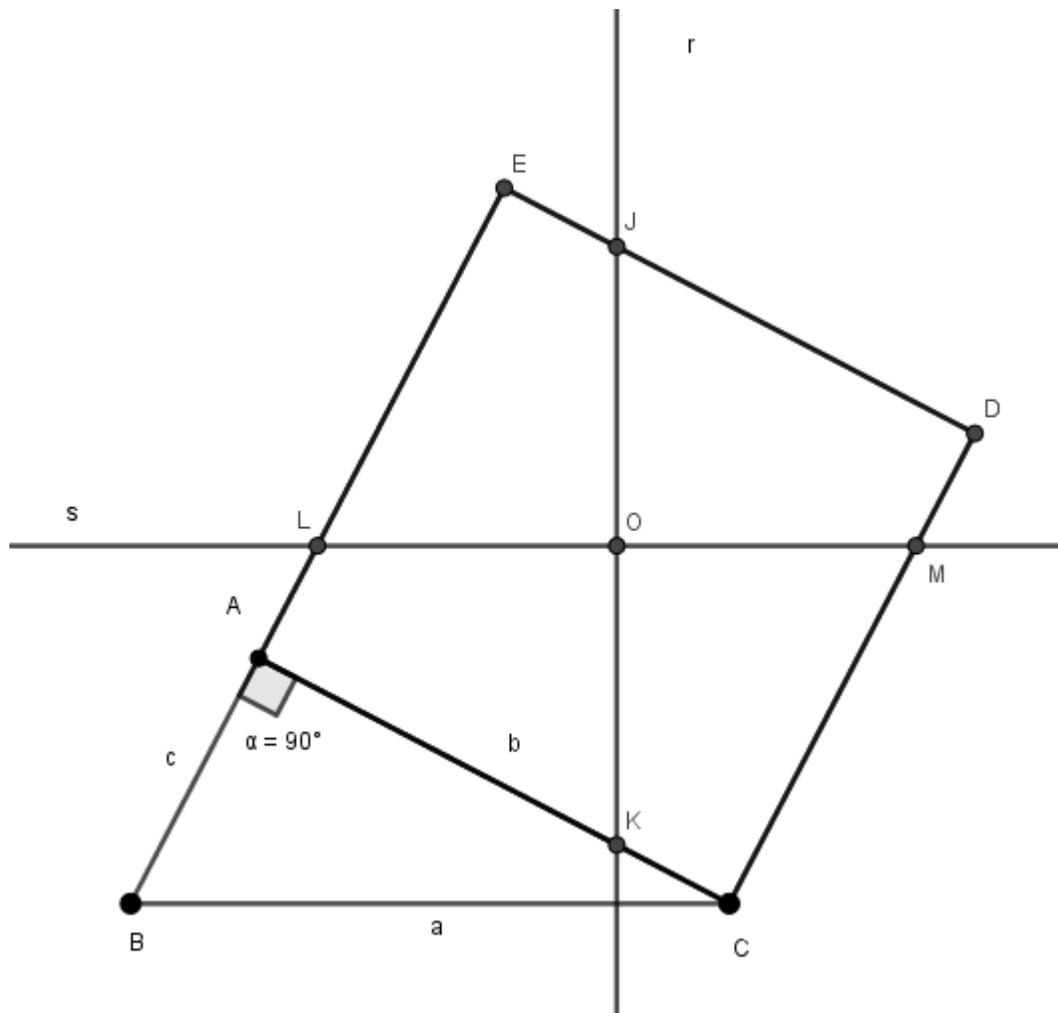
$\widehat{EÔJ} = \widehat{CÔK}$, pois são opostos pelos vértices \rightarrow pelo caso A.L.A $\Delta OEJ = \Delta OCK$

$\overline{EO} = \overline{OC}$, ponto médio da diagonal do quadrado

Logo $\overline{JO} = \overline{OK}$.

$\therefore O$ é ponto médio do segmento \overline{JK} .

Constrói-se uma reta s tal que s seja paralela à hipotenusa BC do triângulo retângulo ABC , passando pelo centro O do quadrado.



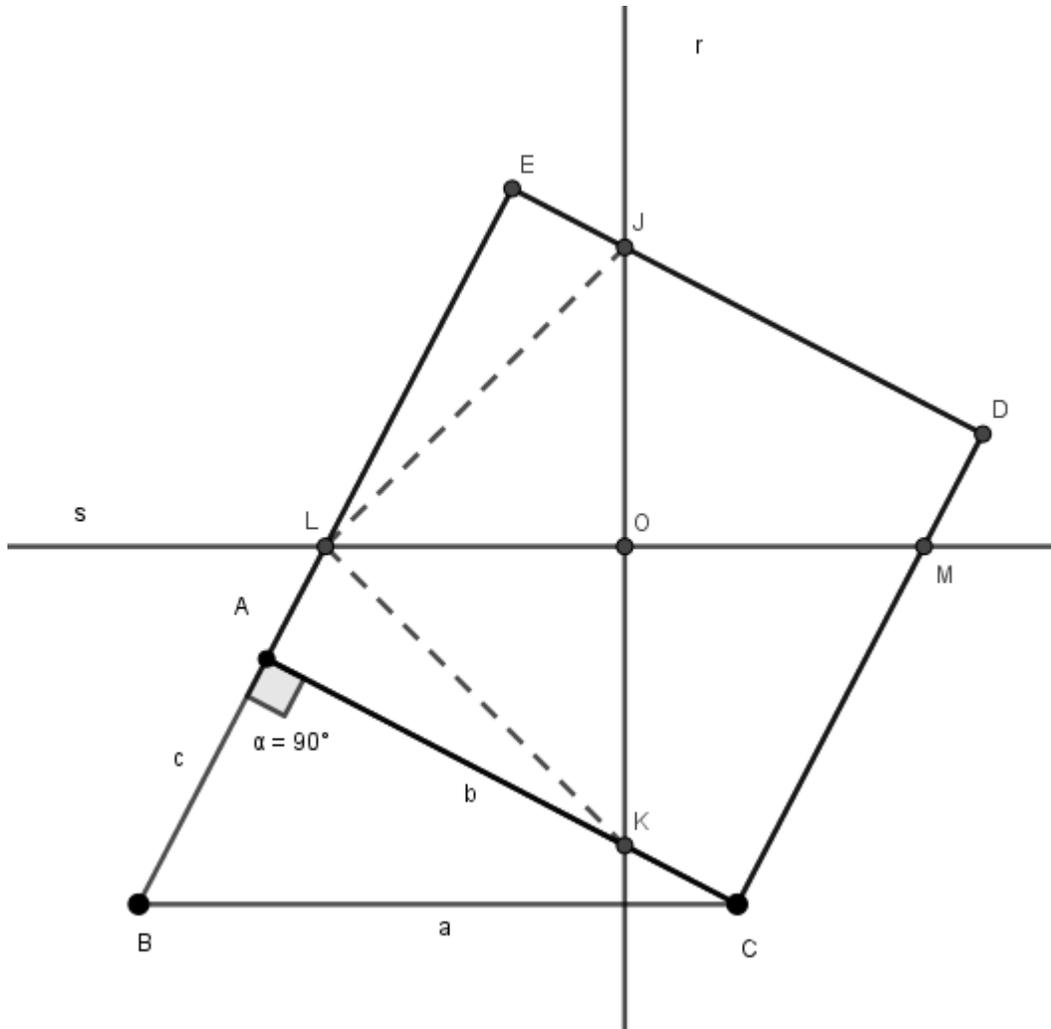
A reta s define o ponto L sobre o lado AE do quadrado e o ponto M sobre o lado CD do quadrado. De forma semelhante e considerando os triângulos ΔOLA e ΔOMD , afirma-se que o ponto O é o ponto médio do segmento \overline{LM} , logo $\overline{LO} = \overline{OM}$.

Devemos mostrar que:

$$\overline{OJ} = \overline{OL} = \overline{OK} = \overline{OM} \text{ e}$$

\overline{LM} é perpendicular a \overline{JK}

Para concluir que os segmentos $\overline{OJ}, \overline{OL}, \overline{OK}$ e \overline{OM} são congruentes, devemos mostrar que os quadriláteros ALOK, CKOM, DMOJ e EJOL são congruentes entre si. Para tanto, é preciso decompor os quadriláteros em triângulos e demonstrar suas congruências.



Considere os triângulos ΔOLJ e ΔOLK , note que:

$$\overline{OJ} = \overline{OK}, \text{ O é ponto médio de } \overline{JK}.$$

$$\overline{OL} = \overline{OL}, \text{ lado comum.}$$

→ pelo caso L.A.L temos $\Delta OLJ \cong \Delta OLK$

$$\hat{JOL} = \hat{KOL}, \text{ reta } s \parallel BC \text{ e } r \text{ perpendicular à } BC.$$

Considere agora os triângulos ΔEJL e ΔALK , note que:

$$\overline{JL} = \overline{KL}, \text{ pois } \Delta OLJ \cong \Delta OLK$$

$\widehat{L\hat{A}K} = \widehat{J\hat{E}L} = 90^\circ$, ângulos do quadrado. \rightarrow pelo caso L.A.A temos $\Delta EJL \equiv \Delta ALK$
 $\widehat{L\hat{R}A} = \widehat{J\hat{L}E}$, lados AC e ED do quadrado.

Pelas congruências dos triângulos, os quadriláteros EJOL e ALOK são congruentes.

De forma análoga, pode-se mostrar que os quadriláteros ALOK, CKOM, DMOJ e EJOL.

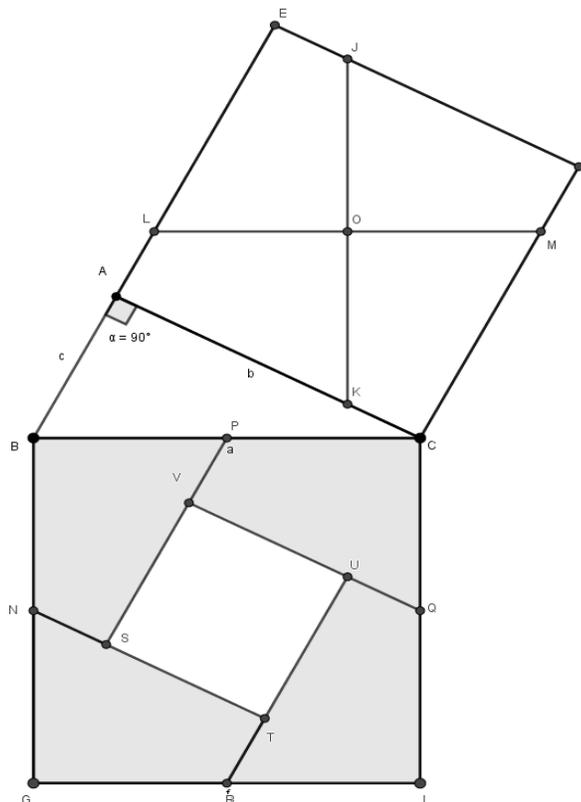
\therefore os quadriláteros são congruentes.

Considere o quadrado BCHI e os pontos médios sobre seus lados: os pontos médios são P, Q, R e N.

Pelo ponto N trace uma reta paralela ao cateto AC e pelo ponto R trace uma reta paralela ao cateto AB.

Seja T o ponto de intersecção entre as retas paralelas traçadas pelos pontos N e R.

Do mesmo modo, trace pelo ponto Q uma reta paralela ao cateto AC e pelo ponto P uma reta paralela ao cateto AB.



Considere o quadrilátero BCML, temos que por construção BCML é paralelogramo, logo seus lados paralelos são congruentes por definição, ou seja $\overline{BC} = \overline{LM}$.

Pela congruência dos lados opostos e pelo ponto médio temos que:

$$\overline{OM} = \overline{OB}$$

$$\overline{BN} = \overline{PB} = \overline{OM}$$

Vamos demonstrar que MOKC é congruente a PBSN.

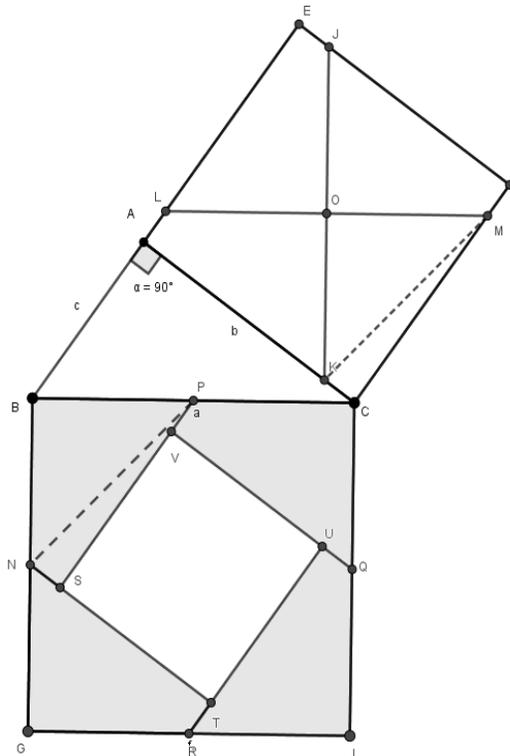
Considere o ΔMOK e ΔPBN , temos que:

$$\overline{MO} = \overline{PB}, \text{ ponto médio}$$

$$M\hat{O}K = P\hat{B}N = 90^\circ \text{ ângulo reto} \quad \rightarrow \text{ pelo caso L.A.L temos } \Delta MOK \equiv \Delta PBN$$

$$\overline{OK} = \overline{BN}, \text{ ponto médio}$$

$$\therefore \overline{NP} = \overline{KM}$$



Considere os triângulos ΔNSP e ΔKCN , temos que:

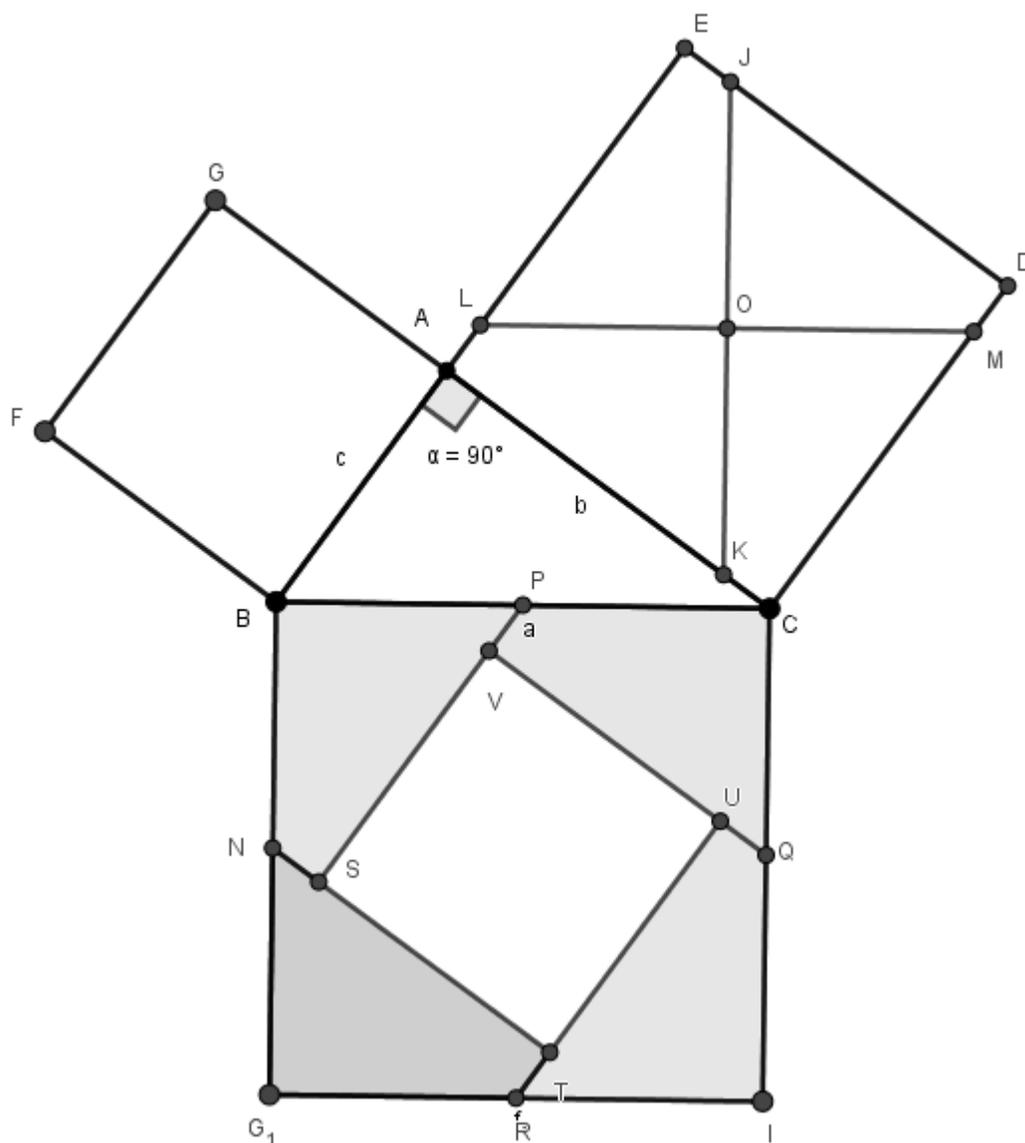
$$\overline{NP} = \overline{MK} \text{ pela congruência anterior}$$

$$\hat{N} = \hat{K}, \text{ paralelas} \quad \rightarrow \text{ pelo caso A.L.A temos } \Delta NSP \equiv \Delta KCN$$

$$\hat{M} = \hat{P}, \text{ paralelas}$$

Pode-se concluir, pelas demonstrações I e II, que os quadriláteros MOBC e PBNS são congruentes.

Para finalizar a demonstração, basta provar que o quadrilátero STUV é um quadrado congruente ao quadrado BAFG construído sobre o cateto AB.



Basta provar que o quadrilátero STUV é um quadrado congruente ao quadrado BAFG, construído sobre o cateto AB de medida c do triângulo ABC. Por congruência prova anteriormente temos que:

$$\overline{SP} = \overline{MC} = \overline{BL}$$

$$\overline{BL} = \overline{BA} + \overline{AL}$$

$$\overline{SP} = \overline{SV} + \overline{VP}$$

Logo, $\overline{SV} + \overline{VP} = \overline{BA} + \overline{AL}$

Ainda por congruência temos que $\overline{VP} = \overline{AL}$

De onde podemos concluir que: $\overline{SV} = \overline{BA} = c$

Portanto $STUV \cong ABFG$.

Ou seja, o quadrado desenhado sobre a hipotenusa é igual aos quadrados desenhados sobre os catetos.

7.1 As funções trigonométricas do ângulo agudo

Ao considerarmos um ângulo $A\hat{O}B = \theta$ tal que $0^\circ < \theta < 90^\circ$ e tomarmos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ sobre a semirreta \overrightarrow{OA} e por tais pontos traçamos retas perpendiculares à semirreta \overrightarrow{OB} , definindo assim os pontos $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$, como mostra a figura a seguir.

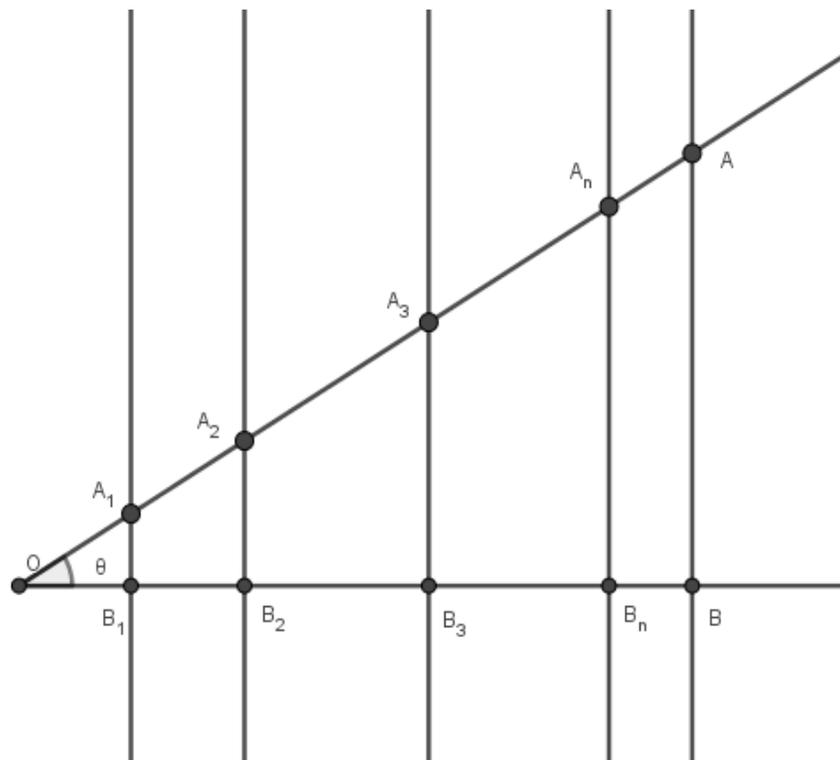


Figura 50: Triângulos retângulos semelhantes.

Note que os triângulos OA_1B_1 , OA_2B_2 ,, OA_nB_n , são semelhantes por terem ângulos congruentes e pela sua construção.

Considere as razões:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \dots = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OA_n}} = \dots =$$

Ao utilizar a construção no software geogebra podemos observar e mostrar claramente que essas razões não dependem do comprimento dos segmentos envolvidos e sim do ângulo $A\hat{O}B = \theta$.

A função $\frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OA_n}} = \text{sen } \theta$ definida para $0^\circ < \theta < 90^\circ$. Lê-se seno do ângulo θ .

Comparando a função seno com os lados do triângulo retângulo temos que:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

Ao considerarmos as razões:

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \dots = \frac{\overline{OB_n}}{\overline{OA_n}} = \dots$$

Definimos a função $\frac{\overline{OB_n}}{\overline{OA_n}} = \text{cos } \theta$ definida para $0^\circ < \theta < 90^\circ$. Lê-se cosseno do ângulo θ . Comparando a função cosseno com os lados do triângulo retângulo temos que:

$$\text{cos } \theta = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

Se considerarmos as razões

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \dots = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OB_n}} = \dots$$

Teremos definido a função $\frac{\overline{A_n B_n}}{\overline{O B_n}} = \operatorname{tg} \theta$ definida para $0^\circ < \theta < 90^\circ$. Lê-se tangente do ângulo θ . Comparando a função tangente com os lados do triângulo retângulo temos que:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}$$

Como essas razões são as mesmas para todos os triângulos retângulos semelhantes entre si, podemos defini-las com base em apenas um deles, como o apresentado na figura abaixo.

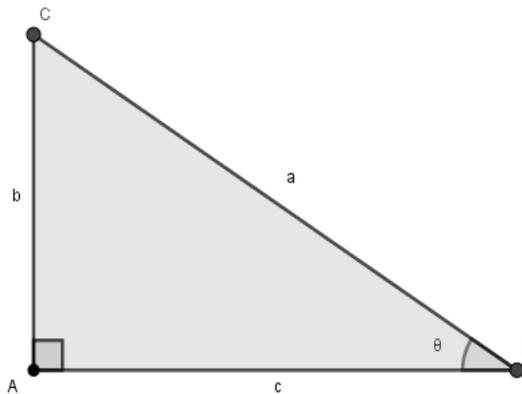


Figura 51: Razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Daí:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta} = \frac{b}{c}$$

Utilizando as razões trigonométricas anteriores, podemos escrever e demonstrar algumas relações importantes para o estudo da trigonometria.

Vamos demonstrar as relações trigonométricas listadas abaixo.

$$A - \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta}$$

$$B - \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1$$

Considerando as razões trigonométricas seno e cosseno referentes ao triângulo retângulo da figura 50, temos:

$$I \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{b}{a} \rightarrow b = \operatorname{sen} \theta \cdot a$$

$$II \quad \operatorname{cos} \theta = \frac{c}{a} \rightarrow c = \operatorname{cos} \theta \cdot a$$

Demonstração da relação A.

Substituindo I e II em $\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{c}$, temos:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta \cdot a}{\operatorname{cos} \theta \cdot a}, \quad \text{com } a \neq 0$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta}$$

Portanto, a tangente pode ser determinada pelo quociente entre o seno e o cosseno de um ângulo agudo dado.

Demonstração da relação B

Pelo teorema de Pitágoras temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ por substituição de I e II}$$

$$a^2 = (\operatorname{sen} \theta \cdot a)^2 + (\operatorname{cos} \theta \cdot a)^2$$

$$a^2 = \operatorname{sen}^2 \theta \cdot a^2 + \operatorname{cos}^2 \theta \cdot a^2$$

$$a^2 = a^2 \cdot (\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta), \text{ como } a \neq 0$$

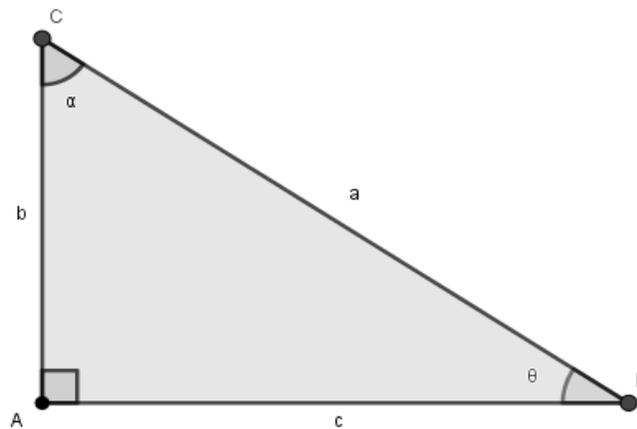
$$\frac{a^2}{a^2} = \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1$$

Observando o triângulo retângulo da figura e já tendo mostrado que a soma dos ângulos agudos α e θ é igual a 90° , ou seja, $\alpha + \theta = 90^\circ$, concluímos que os ângulos α e θ são complementares e $\alpha = 90^\circ - \theta$.

Proposição 1: Se dois ângulos α e θ são complementares ($\alpha = 90^\circ - \theta$), então $\text{sen } \theta = \text{cos } \alpha$. O cosseno de um ângulo é igual ao seno do ângulo complementar e $\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \theta}$.

Vamos à demonstração!



Aplicando as definições no triângulo da figura acima temos:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \text{cos } \alpha$$

Logo,

$$\text{sen } \theta = \text{cos } \alpha$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}} = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

7.2 Ângulos Notáveis 30°, 45° e 60°

Os ângulos de 30°, 45° e 60°, pela frequência que aparecem nos problemas geométricos, ganharam o título de ângulos notáveis. Para determinarmos as razões trigonométricas desses ângulos, utilizaremos um quadrado de lado a e um triângulo equilátero também de lado a .

7.2.1 Ângulo de 45°

Considere um quadrado ABCD cujo lado mede a .

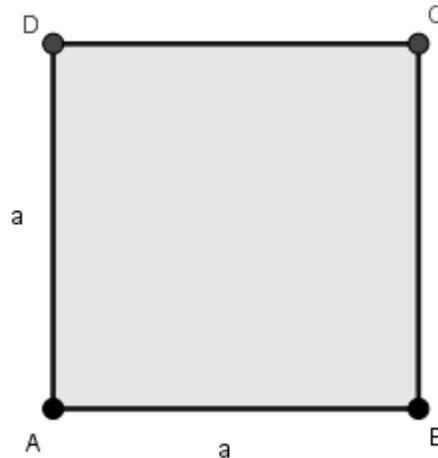


Figura 52: O ângulo de 45° no quadrado

Traçando a diagonal $\overline{BD} = d$, temos por construção que o triângulo ABD é retângulo em \hat{A} e isósceles logo o ângulo $\hat{ABD} = 45^\circ$.

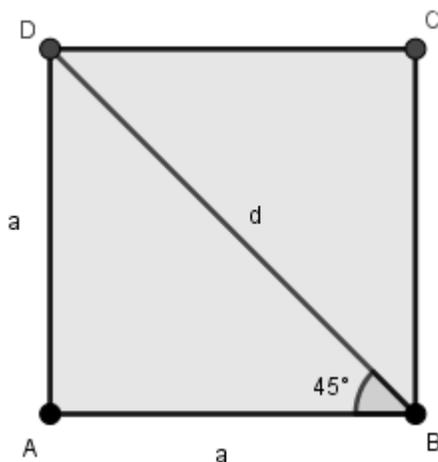


Figura 53: Construindo as razões seno, cosseno e tangente do ângulo de 45°

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABD, temos:

$$d^2 = a^2 + a^2 \rightarrow d = a\sqrt{2}$$

Assim por definição temos:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

7.2.2 Ângulos de 30° e 60°

Considere o triângulo ΔABC equilátero de lado medindo “a” e ângulos congruentes $\alpha = 60^\circ$.

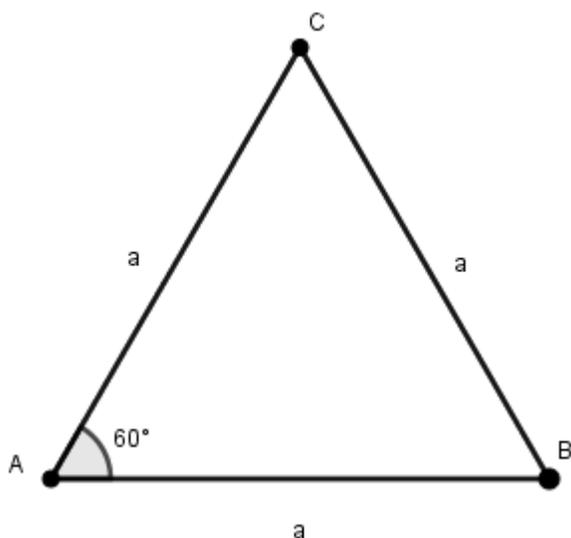


Figura 54: Os ângulos de 30° e 60° no triângulo equilátero

Baixando a altura relativa ao lado BC, temos o triângulo ΔAHC , que é retângulo em H e tal que:

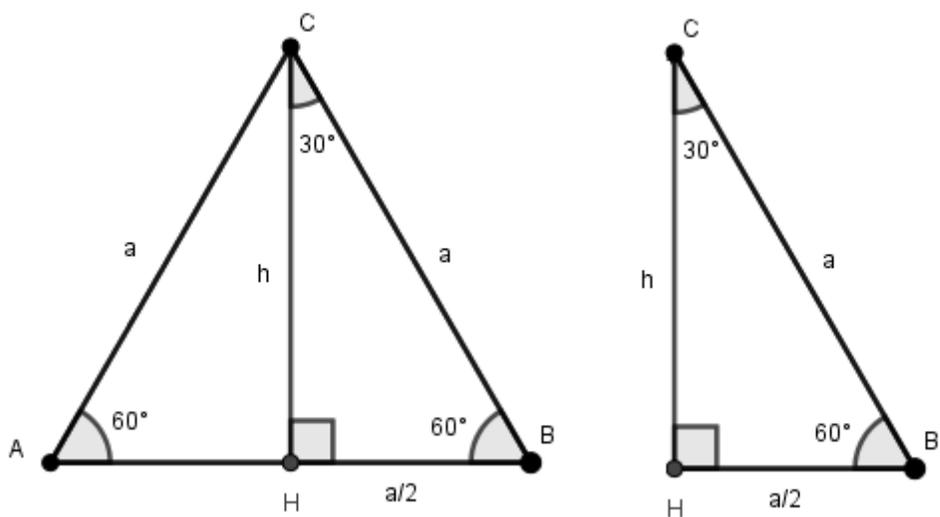


Figura 55: Construção das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° e 60°

Por Pitágoras

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \quad \text{multiplicando por 4}$$

$$4a^2 = 4h^2 + a^2$$

$$3a^2 = 4h^2$$

$$\frac{3a^2}{4} = h^2$$

$$\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = h$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = h$$

Aplicando as definições das razões trigonométricas no triângulo retângulo ΔAHC encontramos:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2} = \operatorname{cos} 60^\circ$$

$$\operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen} 60^\circ$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a} = \sqrt{3}$$

Desse modo, podemos construir a tabela de razões trigonométricas, muito aplicada no ensino da trigonometria nas escolas de ensino fundamental e médio.

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 1: Razões trigonométricas dos ângulos notáveis

7.3 Aplicações das razões trigonométricas

A seguir, serão abordadas as leis dos Cossenos e Senos, importantes conteúdos nos estudos matemáticos.

7.3.1 Lei dos Cossenos e dos Senos

O teorema ou lei dos Senos é uma relação de proporcionalidade entre as medidas dos lados de um triângulo qualquer e seus ângulos.

Teorema (Lei dos Senos) – Qualquer que seja o triângulo ABC, seus lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos na mesma razão do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo, ou seja,

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2r,$$

onde $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e r é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

Demonstração:

Considere o triângulo ABC inscrito em uma circunferência de raio r e centro O .

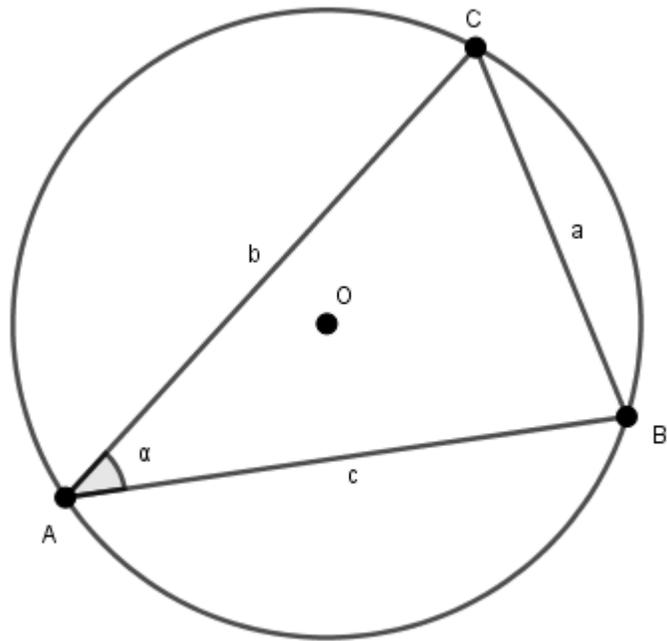


Figura 56: Triângulo inscrito na circunferência.

Traçando o diâmetro de B a um ponto D qualquer dessa circunferência, teremos um triângulo $\triangle BCD$ retângulo em C.

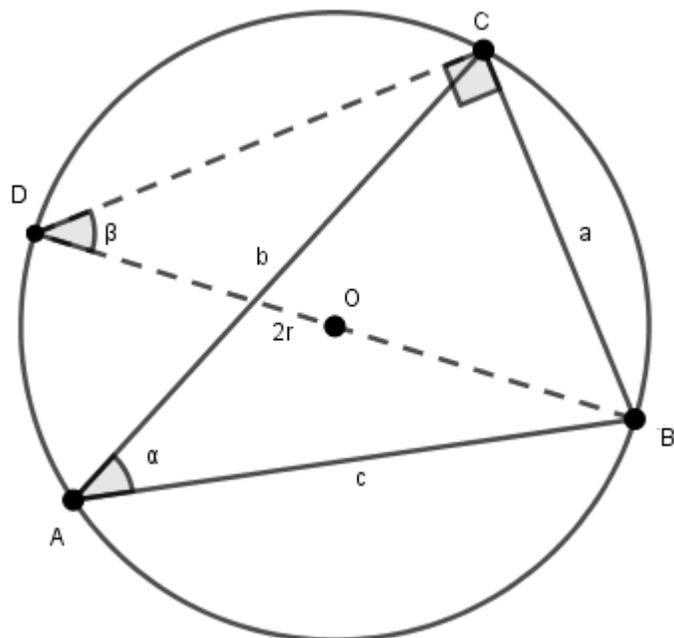


Figura 57 – Demonstração da Lei dos Senos

Aplicando as relações trigonométricas no triângulo retângulo BDC, temos:

$$\text{sen } \hat{D} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{a}{2r}$$

Pelo teorema do ângulo inscrito à circunferência temos que $\hat{D} = \hat{A}$, logo

$$\text{sen } \hat{D} = \text{sen } \hat{A} = \frac{a}{2r}$$

$$a = \text{sen } \hat{A} \cdot 2r$$

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = 2r$$

De forma análoga, podemos afirmar que:

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2r$$

E assim concluir que:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2r$$

Aplicação da Lei dos Senos

Considere uma situação problema onde se pretende calcular a distância de um ponto inacessível a outro.

“Um observador está em um ponto A e deseja conhecer a distância desse ponto a um ponto P, como na figura.”

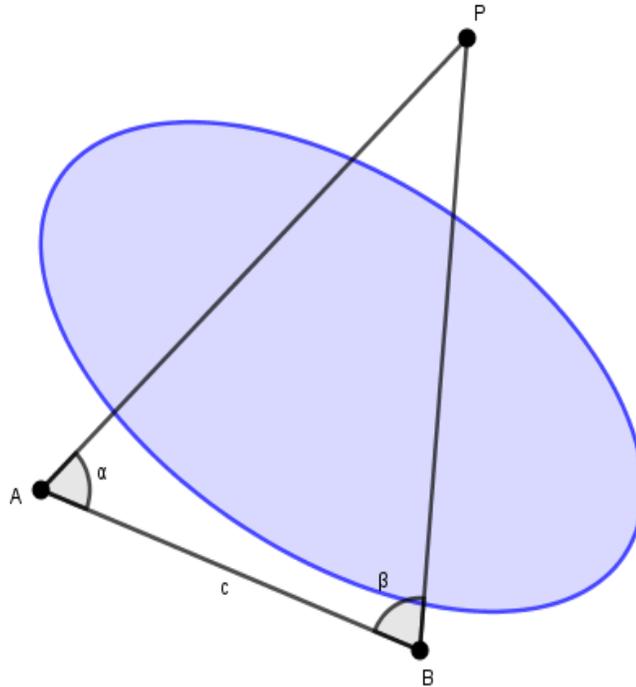


Figura 58: Aplicação da Lei dos Senos

Como a medida não pode ser feita diretamente, o observador escolhe um ponto B qualquer e tal que $\overline{AB} = c$ os ângulos $P\hat{A}B = \alpha$ e $P\hat{B}A = \beta$.

Aplicando a lei dos senos temos:

$$I \quad \frac{\overline{PA}}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen}(\pi - (\alpha + \beta))}$$

Note que:

$$\begin{aligned} (\pi - (\alpha + \beta)) &= \text{sen } \pi \cdot \cos(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha + \beta) \cdot \cos \pi \\ &= -\text{sen}(\alpha + \beta) \cdot (-1) \\ &= \text{sen}(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Por substituição de II em I temos:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PA}}{\text{sen } \beta} &= \frac{c}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \\ \overline{PA} &= \frac{c \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

Teorema (Lei dos Cossenos)

Num triângulo ABC qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual a soma das medidas dos quadrados dos outros lados menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado, ou seja,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A},$$

onde $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$.

Demonstração:

A demonstração desse teorema é dividida em três casos: $\hat{A} < 90^\circ$, $\hat{A} = 90^\circ$ e $\hat{A} > 90^\circ$.

1º caso: $\hat{A} < 90^\circ$

Seja H o pé da perpendicular baixada do vértice C sobre a reta \overleftrightarrow{AB} e $\overline{AH} = x$.

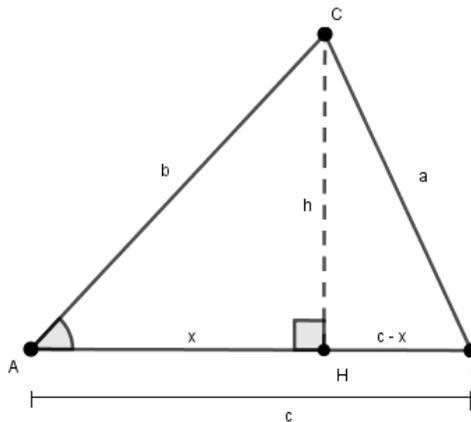


Figura 59: Demonstração da Lei dos Cossenos com a altura interna ao triângulo.

Considere o ΔAHC .

Por Pitágoras temos:

$$I \quad b^2 = x^2 + h^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = b^2 - x^2$$

$$\text{E ainda: } \hat{A} = \frac{x}{b} \quad \rightarrow \quad x = \cos \hat{A} \cdot b$$

Considere o ΔCHB

Por Pitágoras

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

Substituindo I

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2.c.x + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.c.x$$

Substituindo II

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.c.b . \cos \hat{A}$$

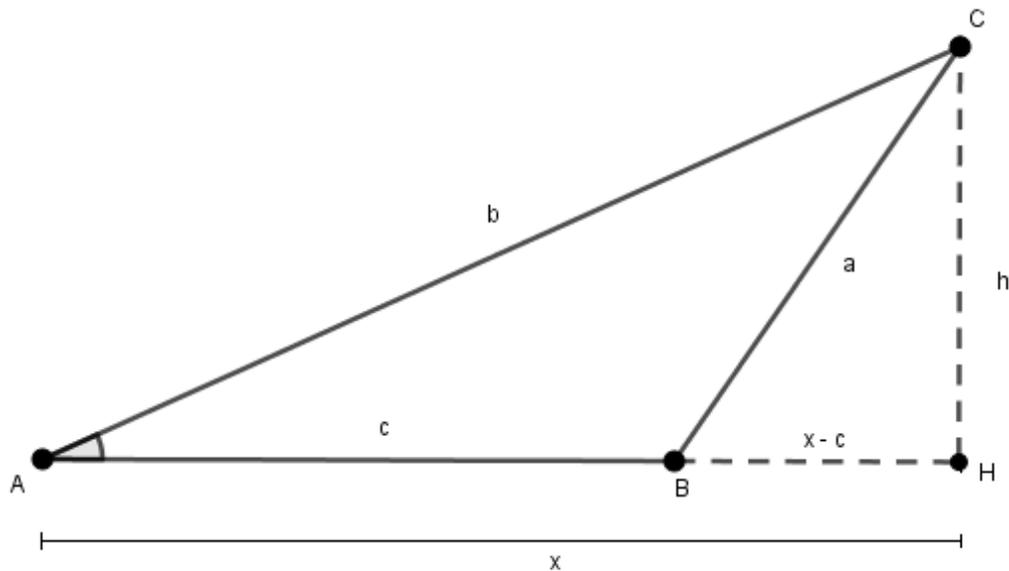


Figura 60: Demonstração da Lei dos Cossenos com a altura externa ao triângulo.

Considere o ΔAHC Por Pitágoras temos:

$$I \quad b^2 = x^2 + h^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = b^2 - x^2$$

$$\text{E ainda: } \hat{A} = \frac{x}{b} \quad \rightarrow \quad x = \cos \hat{A} . b$$

Considere o ΔCHB

Por Pitágoras

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

Substituindo I

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2.c.x + x^2$$

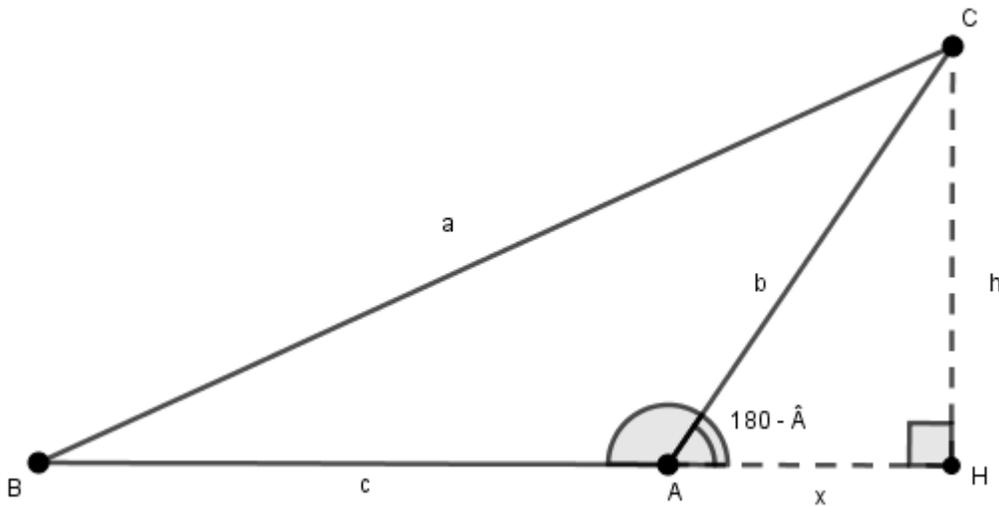
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.c.x$$

Substituindo II

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.c.b.\cos\hat{A}$$

2º caso: $\hat{A} > 90^\circ$

Sendo H o pé da perpendicular baixada do vértice C sobre a reta \overleftrightarrow{AC} e $\overline{AH} = x$.



Considere o ΔAHC Por Pitágoras temos:

$$I \quad b^2 = x^2 + h^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = b^2 - x^2$$

$$\text{E ainda: } (180^\circ - \hat{A}) = \frac{x}{b}$$

$$x = \cos(180^\circ - \hat{A}) \cdot b$$

$$x = b \cdot [\cos 180^\circ \cdot \cos \hat{A} + \text{sen} 180^\circ \cdot \text{sen} \hat{A}]$$

$$x = b \cdot [-1 \cdot \cos \hat{A}]$$

$$x = -b \cdot \cos \hat{A}$$

Considere o ΔBHC

Por Pitágoras

$$a^2 = h^2 + (c + x)^2$$

Substituindo I

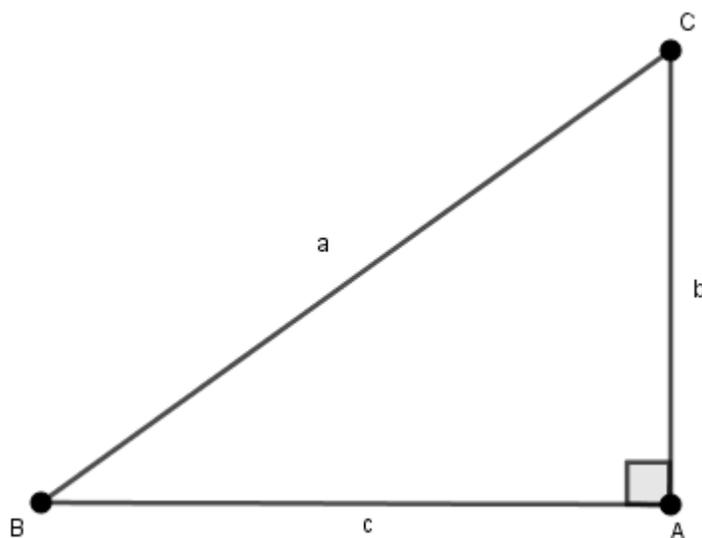
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + 2.c.x + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2.c.x$$

Substituindo II

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.c.b . \cos \hat{A}$$

3° caso: $\hat{A} = 90^\circ$



Se $\hat{A} = 90^\circ$ temos $\cos \hat{A} = 0$ e por Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}$$

Aplicação:

I “De um triângulo ABC temos $\underline{AC} = 8$, $\underline{AB} = 12$ e $B\hat{A}C = 120^\circ$.

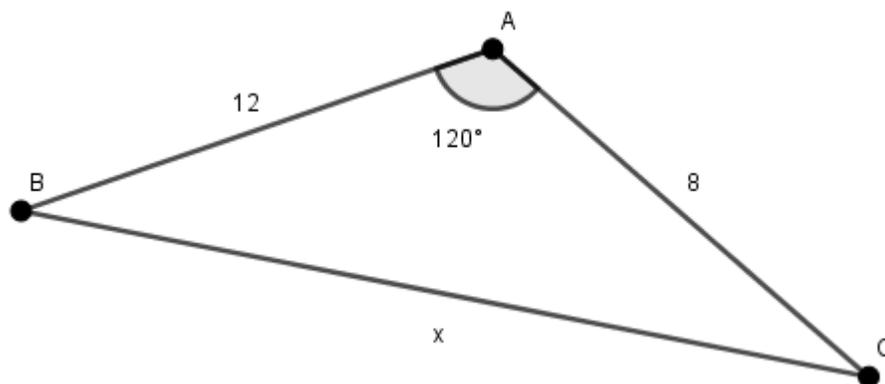


Figura 61: Aplicação da Lei dos Cossenos I

$$x^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos(120^\circ)$$

$$x^2 = 64 + 144 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = 208 + 96$$

$$x = \sqrt{304}$$

II. Determine os lados de um triângulo ABC no qual se tem $a = 3$, $\hat{A} = 30^\circ$ e $\hat{B} = 45^\circ$.

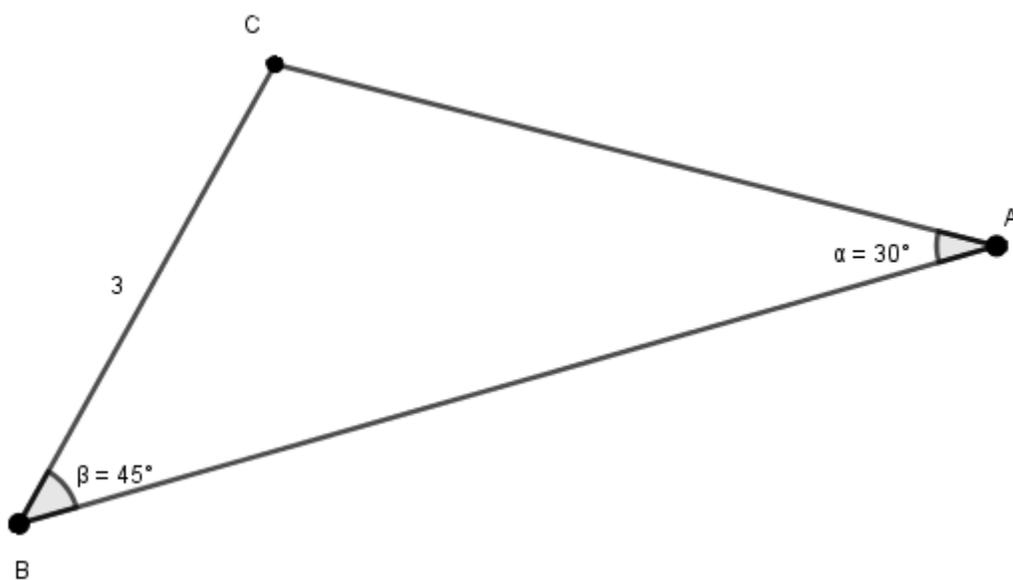


Figura 62: Aplicação da Lei dos Cossenos II

Pela soma dos ângulos internos de um triângulo temos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad \rightarrow \quad 30^\circ + 45^\circ + \hat{C} = 180^\circ \quad \rightarrow \quad \hat{C} = 105^\circ$$

Pelo teorema da Lei dos Senos

$$\frac{3}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{x}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{y}{\text{sen } 105^\circ}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{\text{sen } 30^\circ} &= \frac{x}{\text{sen } 45^\circ} \\ x \cdot \text{sen } 30^\circ &= 3 \cdot \text{sen } 45^\circ \\ x \cdot \frac{1}{2} &= 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{\text{sin } 30^\circ} &= \frac{y}{\text{sin } 105^\circ} \\ y \cdot \text{sin } 30^\circ &= 3 \cdot \text{sin } 105^\circ \end{aligned}$$

Substituindo I temos:

$$\begin{aligned} y \cdot \frac{1}{2} &= 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right) \\ y &= 3 \cdot \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I \text{ sen } 105^\circ &= \text{sen } (60^\circ + 45^\circ) = \text{sen } 60^\circ \cdot \text{cos } 45^\circ + \text{sen } 45^\circ \cdot \text{cos } 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

III. Os lados de um triângulo ABC medem $a = 4$, $b = 5$ e $c = 6$. Mostre que $\hat{C} = 2\hat{A}$

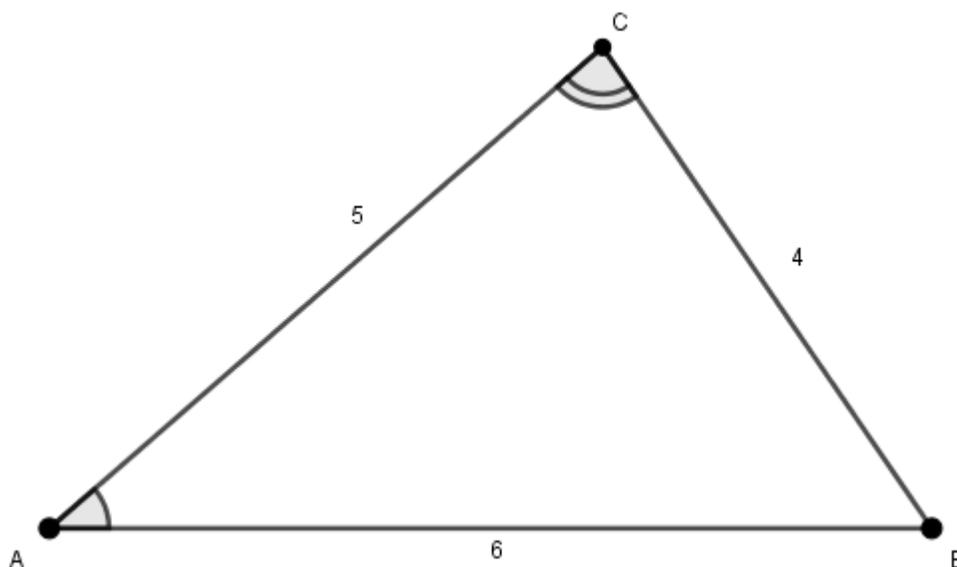


Figura 63: Aplicação da Lei dos Cossenos III

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos \hat{A}$$

$$16 = 25 + 36 - 60 \cdot \cos \hat{A}$$

$$I \quad \cos \hat{A} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

$$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \hat{C}$$

$$36 = 16 + 25 - 40 \cdot \cos \hat{C}$$

$$II \quad \cos \hat{C} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

$$III \quad \cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1 \quad \rightarrow \quad \sin^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 \hat{A}$$

$$\cos(A + A) = \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{A} - \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{A}$$

$$\cos \hat{C} = \cos^2 \hat{A} - \sin^2 \hat{A}$$

Por substituição de III

$$\cos \hat{C} = 2\cos^2 \hat{A} - 1$$

Por substituição de I

$$\cos \hat{C} = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1$$

$$\cos \hat{C} = \frac{18}{16} - 1$$

$$\cos \hat{C} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

Como determinado em II.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo principal desenvolver e apresentar conceitos sobre o ensino da trigonometria e seus aspectos históricos, com foco na relação entre a trigonometria e os estudos astronômicos na antiguidade.

Utilizamos uma sequência de tópicos que trouxe a discussão da origem da trigonometria e apresentamos os grandes nomes da matemática que contribuíram para a construção dos conhecimentos. As descrições vão desde as aplicações das razões trigonométricas no triângulo retângulo até a sua aplicação em estudos astronômicos, como na ocorrência de eclipses solares e lunares e na aplicação de resolução de situações cotidianas.

Verificou-se que as demonstrações e deduções matemáticas sobre os teoremas e os conceitos matemáticos relevantes para o desenvolvimento do conhecimento trigonométrico podem ser abordados no ambiente da sala de aula de forma dinâmica, através de recursos tecnológicos que permitem a experimentação e visualização de fatos geométricos em construções softwares de geometria.

Além disso, ficou exposto no trabalho a importante função da história da matemática como um estímulo para aguçar a curiosidade do aluno. A história mostra de forma clara que a matemática não é uma ciência pronta e acabada e que seus conhecimentos foram e são construídos a partir de perguntas e problemas do cotidiano da humanidade. Entender o funcionamento e o movimento do universo levou os matemáticos a desenvolverem todo o conhecimento trigonométrico aplicados desde a antiguidade.

O desenvolvimento desta dissertação tratou sobre conceitos relevantes para que os professores de matemática ampliem seus conhecimentos sobre a Trigonometria no triângulo retângulo e suas relações com os fenômenos naturais astronômicos. A pesquisa também buscou contribuir para o desenvolvimento de sujeitos ativos, observadores, críticos e participativos em seu próprio processo de aprendizagem e da relação da matemática com outras áreas do conhecimento.

O tema aqui abordado possibilita outros estudos sobre a utilização de recursos tecnológicos, visuais e concretos. Melhora o desempenho dos alunos em seu processo de ensino e aprendizagem, contribuindo para uma aprendizagem de fato significativa e

prazerosa que leva o educando a construir seu próprio conhecimento matemático incorporado ao seu cotidiano.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL, *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Ensino Médio*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica-MEC/Semtec, v. 3, 2000.

BRASIL, *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Matemática*. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental – MEC/SEF, 1997.

BOYER, Carl B. (tradução: Elza F. Gomide). *História da Matemática*. São Paulo, Edgard Bucher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. *Educação Matemática pesquisa em movimento*. 2ª ed. Cortez Editora, 2005.

DOLCE, Osvaldo e POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar – Geometria plana*. Volume 9. São Paulo: Atual, 9ª edição, 2013.

KOHATSU, Doris e MURAMATSU, Mikiya. *Eclipse em escala*. Física na escola, v.17, n.1, 2019.

PÓLYA, G. *10 mandamentos para professores de Matemática*. University of British Columbia, Vancouver and Victoria (3) 1959, p. 61-69.

SEDU. *Secretaria da Educação Ensino Médio: área de Ciências da Natureza / Secretaria da Educação*. – Vitória: Espírito Santo, SEDU, 2009.

SOUZA, Maria Helena. *21 Teoremas Matemáticos que Revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta Brasil, 2018.

www.ime.unicamp.br/~apmat/a-primeira-medicao-do-raio-da-terra/ Acesso em 10/02/2021.

<http://clubes.obmep.org.br/blog/trigonometria-trigonometria-do-triangulo-retangulo/> Acesso em 10/02/2021

ecalculo.if.usp.br/historia_trigonometria.htm Acesso em 20/05/2020.

<https://rpm.org.br/cdrpm/55/1.htm> Acesso em 20/05/2021.