

latexsym



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL – PROFMAT**



Lucylla Medeiros da Silva

Uma Abordagem Geométrica para Operações Básicas dos Polinômios de 1º, 2º e 3º Graus

Orientadora:

Profa. Dra. Débora Borges Ferreira

Natal/RN - 2021

LUCYLLA MEDEIROS DA SILVA

UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA PARA OPERAÇÕES BÁSICAS DOS
POLINÔMIOS DE 1º, 2º E 3º GRAUS

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - CCET - UFRN, como requisito parcial da obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora:

Profa. Dra. Débora Borges Ferreira

Natal/RN - 2021

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Silva, Lucylla Medeiros da.

Uma abordagem geométrica para operações básicas dos polinômios de 1º, 2º e 3º graus / Lucylla Medeiros da Silva. - 2021.

87f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Departamento de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Natal, 2021.

Orientadora: Profa. Dra. Débora Borges Ferreira.

1. Matemática - Dissertação. 2. Polinômios - Dissertação. 3. Geometria - Dissertação. 4. Ensino da matemática - Dissertação. 5. Jogos - Dissertação. I. Ferreira, Débora Borges. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT

LUCYLLA MEDEIROS DA SILVA

UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA PARA OPERAÇÕES BÁSICAS DOS
POLINÔMIOS DE 1º, 2º E 3º GRAUS

Dissertação (aprovada) em 22 de Julho de 2021

Comissão Examinadora:

Prof. Dra. Débora Borges Ferreira

Prof. Dr. Ronaldo Freire de Lima

Prof. Dra. Wenia Valdevino Félix de Lima

Natal/RN - 2021

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus por tantas bênçãos, dentre elas, permitir a mim ter tido capacidade e disciplina para encarar a Universidade por duas vezes e ainda cursar o Mestrado que tanto sonhei. Foi à Deus que pedi baixinho força. Ele me deu.

À minha mãe e à meu pai que estiveram presentes e segurando a minha mão para que eu pudesse me dedicar exclusivamente à educação.

À minha irmã que com seu dom da escrita tanto me ajudou no desenvolvimento desta dissertação.

À UFRN e aos docentes do PROFMAT pelo conhecimento compartilhado comigo para que eu pudesse chegar hoje à apresentação desta dissertação.

Aos meus amigos Rosângela, Gisalmir, João Victor, Iago, Cleiton, Alexandre e João Cláudio pela parceria, paciência, experiências trocadas e tantas risadas que demos juntos durante todo o mestrado.

Resumo

Ao estudarmos a História da Matemática, vemos que os problemas eram interpretados e tratados por meio da geometria, já que toda a economia na antiguidade era concentrada na agricultura: divisão de terras, distância entre locais, preço de terrenos, etc. Desse modo, vemos útil a recuperação da abordagem geométrica em diversos conteúdos matemáticos, dentre os quais trouxemos como tema os polinômios de 1º, 2º e 3º graus. A presente dissertação traz uma sugestão para professores de matemática de como abordar o estudo dos polinômios no ensino fundamental de maneira geométrica. Para tanto faremos uma relação com áreas e volumes de figuras geométricas, em especial - pela praticidade, porque trataremos do Ensino Básico - do retângulo e do prisma retangular reto. Discorreremos sobre as definições e proposições algébricas dos polinômios, bem como das definições de áreas dos retângulos e volumes dos paralelepípedos, para então correlacionarmos as duas abordagens. Ademais, incluímos uma sugestão de atividade lúdica para ser aplicada numa turma do 8º ano do ensino fundamental, de modo que esta demonstre a eficiência da utilização da geometria no ensino dos polinômios em sala de aula, ou seja, que por meio da geometria, os alunos do 8º ano os compreendam e saibam operá-los.

PALAVRAS-CHAVE: Polinômios; Geometria; Ensino da matemática; Jogos.

Abstract

When studying the History of Mathematics, we see that the problems were interpreted and treated through geometry, since the entire economy in antiquity was concentrated on agriculture: land division, distance between places, land prices, etc. In this way, we see useful the recovery of the geometric approach in several mathematical contents, among which we brought as theme the 1st, 2nd and 3rd degree polynomials. This dissertation provides a suggestion for mathematics teachers on how to approach the study of polynomials in elementary school in a geometric way. For this, we will make a relation with areas and volumes of geometric figures, in particular - for their practicality, because we will deal with Basic Education - the rectangle and the right rectangular prism. We discuss the algebraic definitions and propositions of polynomials, as well as the definitions of areas of rectangles and volumes of parallelepipeds, and then correlate both approaches. In addition, we have included a suggestion for a ludic activity to be applied in an 8th grade class of elementary school, so that it demonstrates the efficiency of using geometry in teaching polynomials in the classroom, I.e, that through geometry, the 8th graders students understand them and know how to operate them.

KEYWORDS: Polynomials; Geometry; Teaching of Mathematics; Games

Lista de Figuras

3.1	Área do retângulo	21
3.2	Área do retângulo de 1 unidade de área	21
3.3	Área do retângulo de x unidades de área	22
3.4	Área do retângulo de x^2 unidades de área	22
3.5	Monômio $P_2 = 3x^2$	23
3.6	Polinômio $P = 2x^2 + 3$	23
3.7	Polinômio $P_0 = 1$	24
3.8	Polinômio $P_0 = 1$	24
3.9	Polinômio $P'_0 = -1$	24
3.10	Polinômio $P_1 = x$	25
3.11	Polinômio $P_1 = x$	25
3.12	Polinômio $P'_1 = -x$	25
3.13	Polinômio $P'_1 = -x$	26
3.14	Polinômio $P_2 = x^2$	26
3.15	Polinômio $P_2 = x^2$	26
3.16	Polinômio $P'_2 = -x^2$	27
3.17	Polinômio $P + Q$	27
3.18	Polinômio $P = xy$	28
3.19	Polinômio $Q = -zx$	28
3.20	Polinômio $P + Q$	28
3.21	Polinômio $x^2 + 2x + 2$	29
3.22	Polinômio $2x^2 - x - 1$	29
3.23	Polinômio $P_1 = (x + y) \cdot (x + 1)$	30
3.24	Polinômio $(2x + 1)(x + 2)$	31
3.25	Polinômio $(-x)(2x + 1)$	31
3.26	Polinômio $(x - 2)(-x + 1)$	32
3.27	Paralelepípedo de lados medindo a, b e c	32
3.28	Paralelepípedo de medida 1 unidade de volume	33
3.29	Paralelepípedo de medida x unidades de volume	33
3.30	Paralelepípedo de medida x^2 unidades de volume	34

3.31	Paralelepípedo de medida x^3 unidades de volume	34
3.32	Paralelepípedo associado ao polinômio $P = 4x^2$	35
3.33	Monômio $P_0 = 1$	36
3.34	Monômio $P_0 = 1$	36
3.35	Monômio $P'_0 = -1$	36
3.36	Monômio $P'_0 = -1$	37
3.37	Monômio $P_1 = x$	37
3.38	Monômio $P_1 = x$	37
3.39	Monômio $P_1 = x$	38
3.40	Monômio $P'_1 = -x$	38
3.41	Monômio $P'_1 = -x$	38
3.42	Polinômio $P_2 = x^2$	39
3.43	Polinômio $P_2 = x^2$	39
3.44	Polinômio $P_2 = x^2$	39
3.45	Polinômio $P'_2 = -x^2$	40
3.46	Polinômio $P'_2 = -x^2$	40
3.47	Polinômio $P_3 = x^3$	40
3.48	Polinômio $P_3 = x^3$	41
3.49	Polinômio $P'_3 = -x^3$	41
3.50	Polinômio $P'_3 = -x^3$	41
3.51	Polinômio $P_1 = 12xyz$	42
3.52	Polinômio $P_2 = xzt - yzt$	43
3.53	Polinômio $P_3 = (x + y) \cdot (z - t) \cdot v$	43
3.54	Polinômio P_4	44
3.55	Polinômio $P_4 = x^3 + 1$	44
3.56	Polinômio $P_4 = x^3 + 1$	45
3.57	Polinômio $P_5 = x^3 + 3x^2 + x - 2$	45
3.58	Polinômio $P_5 = x^3 + 3x^2 + x - 2$	46
3.59	Polinômio $P_5 = x^3 + 3x^2 + x - 2$	46
3.60	Operação geométrica de $M + N$	47
3.61	Operação geométrica de $P_3 + P_0$	48
3.62	Operação geométrica de $P_3 + P_1$	48
3.63	Operação geométrica de $P_3 + P_2$	49
3.64	Operação geométrica de $P_2 + P_0$	49
3.65	Operação geométrica de $P_2 + P_1$	50
3.66	Operação geométrica de $P_1 + P_0$	51
3.67	Operação geométrica de $M - N$	52
3.68	Operação geométrica de $P_3 - P_0$	52
3.69	Operação geométrica de $P_3 - P_0$	53

3.70	Operação geométrica de $P_3 - P_2$	54
3.71	Operação geométrica de $P_2 - P_0$	54
3.72	Operação geométrica de $P_2 - P_1$	55
3.73	Operação geométrica de $P_1 - P_0$	55
3.74	Operação geométrica de $P + Q$	56
3.75	Operação geométrica de $P - Q$	56
3.76	Operação geométrica de $P + Q$	57
3.77	Operação geométrica de $P - Q$	57
3.78	Operação geométrica de PQ	58
3.79	Operação geométrica de P_3P_0	58
3.80	Operação geométrica de P_2P_0	59
3.81	Operação geométrica de P_2P_1	59
3.82	Operação geométrica de P_1P_0	60
4.1	Peça cinza de volume 1 associada ao monômio 1	62
4.2	Peça vermelha de volume 1 associada ao monômio -1	62
4.3	Peça cinza de volume x associada ao monômio x	62
4.4	Peça vermelha de volume x associada ao monômio $-x$	63
4.5	Peça cinza de volume x^2 associada ao monômio x^2	63
4.6	Peça vermelha de volume x^2 associada ao monômio $-x^2$	64
4.7	Peça cinza de volume x^3 associada ao monômio x^3	64
4.8	Peça vermelha de volume x^3 associada ao monômio $-x^3$	65
4.9	Prédio $\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$	68
4.10	Base do Prédio $\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$	68
4.11	Prédio $\frac{x^2 + 3x}{x + 2}$	69
4.12	Prédio $\frac{x^2 + 3x}{x + 2}$	69
4.13	Base do Prédio $\frac{x^2 + 3x}{x + 2}$	70
4.14	Prédio $\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$	70
4.15	Base do prédio $\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$	70
4.16	Prédio $\frac{x^2 + x - 2}{x + 3}$	71
4.17	Prédio $\frac{x^2 + x - 2}{x + 3}$	72
4.18	Base do Prédio $\frac{x^2 + x - 2}{x + 3}$	72
4.19	Prédio $\frac{x^3 + 2x^2}{x + 2}$	73

4.20	Base do Prédio	$\frac{x^3 + 2x^2}{x + 2}$	73
4.21	Prédio	$\frac{x^3 + x^2}{x - 1}$	74
4.22	Prédio	$\frac{x^3 + x^2}{x - 1}$	74
4.23	Base do prédio	$\frac{x^3 + x^2}{x - 1}$	75
4.24	Prédio	$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x + 1}$	75
4.25	Base do prédio	$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x + 1}$	76
4.26	Prédio	$\frac{x^3 + 2x^2}{x - 1}$	77
4.27	Prédio	$\frac{x^3 + 2x^2}{x - 1}$	78
4.28	Base do Prédio	$\frac{x^3 + 2x^2}{x - 1}$	78
4.29	Base do prédio	$\frac{-x^3 + x^2}{-x^2 + x}$	79
4.30	Prédio	$\frac{-x^3 + x^2}{-x^2 + x}$	79
4.31			80
4.32	Base do Prédio	$\frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$	80
4.33	Prédio	$\frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$	81

Conteúdo

1	Introdução e Contexto Histórico	9
1.1	Contexto Histórico	11
2	Operações Básicas com Polinômios de Graus 1, 2 e 3 com Álgebra	13
2.1	Monômios	13
2.2	Polinômios	15
3	Operações Básicas com Polinômios de Graus 1, 2 e 3 por meio de Geometria	20
3.1	Polinômios de Graus 0, 1 e 2 Associados a Retângulos	21
3.1.1	Adição e Subtração de Polinômios	27
3.1.2	Multiplicação de Polinômios	30
3.2	Polinômios de Graus 0, 1, 2 e 3 Associados a Prismas	32
3.2.1	Soma de Polinômios de grau Máximo 3	47
3.2.2	Subtração de Polinômios de Grau Máximo 3	51
3.2.3	Multiplicação de Polinômios de Grau Máximo 3	57
4	Jogo "Monte seu prédio"	61
4.1	Conhecendo as peças do jogo	61
4.2	Condições sobre os polinômios para o jogo ser possível	65
4.3	Divisão de polinômios de grau 2 por outro de grau 1	67
4.4	Divisão de polinômios de grau 3 por outro de grau 1	72
4.5	Divisão de polinômios de grau 3 por outro de grau 2	79
5	Considerações Finais	82

Capítulo 1

Introdução e Contexto Histórico

A presente dissertação de mestrado objetiva apresentar aos professores de Matemática do ensino básico métodos geométricos para a resolução de operações com polinômios de graus 1, 2 e 3. Hoje, com o avanço tecnológico e as várias fontes de informações que temos acesso, os professores são desafiados a reinventar a prática do ensino matemático para motivar os alunos não somente a buscar informações na sala de aula mas a se interessar por essas informações. Logo, quanto mais ferramentas os professores dispuserem, maior a chance de passar conhecimento e garantir que o aluno logre uma aprendizagem significativa.¹

Pensando desta forma, a busca por diferentes visões e métodos de resolução de problemas apresentados se torna imprescindível, sendo bastante necessário encaixar esses problemas à realidade do aluno. De acordo com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), documento que norteia a educação de base:

"Essa área - Matemática -, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade -, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da Matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental."(BRASIL, 2018, p.265)

¹Teoria de aprendizagem desenvolvida por David Ausubel (1963, 1968).

Segundo Aristóteles [9], o conhecimento é empírico, ou seja, está na observação do mundo à nossa volta, portanto, para que haja uma funcionalidade da matemática é necessário que ela possa ser aplicada em algo concreto bem como experimentada, desse modo, partimos da utilidade prática em resolver problemas oferecidos geometricamente, além de ser uma ferramenta bastante facilitadora para a visualização do problema.

A partir das observações acima, decidimos seguir a metodologia seguinte: interpretar polinômios de graus 0, 1, 2 e 3 em termos de figuras e sólidos geométricos, para que, desse modo, haja uma visualização da resolução de problemas propostos, como as operações entre polinômios (soma, subtração, multiplicação e divisão), bem como fatoração, dentro dos casos possíveis. Para tanto, foi criado o jogo "Monte seu prédio" que será detalhadamente explicado adiante.

Durante o planejamento deste trabalho, havia a intenção de aplicarmos numa turma do Ensino Fundamental II, 8º ano, do Colégio e Curso Renascer situado em Parnamirim, no estado do Rio Grande do Norte, uma atividade sobre polinômios para que os alunos desta turma resolvessem os problemas apresentados por meio do cálculo da área de retângulos e do volume de paralelepípedos e, desta forma, interpretar geometricamente os resultados encontrados. Entretanto, fomos surpreendidos com a pandemia, o que ocasionou uma mudança no funcionamento das escolas, de modo que as aulas passaram a ser remotas e os conteúdos foram redistribuídos diante a redução da carga horária, bem como o trabalho do professor teve que ser redefinido. Desse modo, a aplicação prática planejada não pôde ser realizada. Contudo, durante uma das aulas remotas, tive a oportunidade de mencionar a relação entre álgebra e geometria que havia no conteúdo sobre polinômios. Como esperado, os alunos tiveram uma reação positiva e conseguiram relacionar os cálculos algébricos à abordagem geométrica. Contudo, tendo em vista que o enfoque maior durante todo o período escolar é algébrico, houve uma resistência por parte dos alunos ao utilizarmos métodos geométricos para resolvermos problemas envolvendo os polinômios. É esperado que essa resistência tenha acontecido pelos problemas mencionados anteriormente - redistribuição dos conteúdos e tempo restrito para ministrá-los.

"Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental – Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência."(BRASIL, 2018, p.298)

Com base no recorte anterior e no fato de que a Geometria é parte da matemática "palpável", ou seja,

que por si só é concreta, logo, pode ser manuseada facilmente e compreendida pelos alunos, que propomos o seguinte para o estudo de polinômios nos anos finais do ensino fundamental: um jogo de quebra cabeça, que chamamos de "Monte seu prédio", utilizando peças com formatos de prismas retangulares (o paralelepípedo) para que relacionemos a álgebra e a geometria de modo que possamos visualizar e manusear os materiais e tornarmos significativo o ensino das operações entre polinômios com foco nas multiplicações e divisões.

O presente trabalho será dividido em cinco capítulos: no primeiro introduzimos o tema abordado acompanhado de uma contextualização histórica afim de justificar o tratamento geométrico da álgebra, no segundo há uma fundamentação teórica baseada num aspecto algébrico dos polinômios em contraste com o terceiro capítulo, onde tratamos da abordagem geométrica. Seguindo no quarto capítulo, apresentamos o jogo "Monte seu prédio" como uma sugestão prática no ensino de polinômios e, por fim, no quinto capítulo, as considerações finais acerca do tema tratado.

1.1 Contexto Histórico

É sabido que a Matemática é subdividida em várias áreas, tais como Álgebra, Análise, Probabilidade e Geometria (há, ainda, algumas linguas que consideram a Lógica mais uma dessas áreas [4]). Inclusive na França e na Inglaterra a disciplina é chamada de "Matemáticas".

Na Grécia Antiga, época que se estendeu entre os séculos XII e IV a.c, a área da Matemática que se destacava era a Geometria [1] - do Grego: medida da Terra. Vários nomes são referência até hoje: Tales de Mileto (625 a.c), Arquimedes (287 a.c), Pitágoras (570 a.c), Euclides (não há referência que documente local e/ou data de nascimento). Nesse período da história, a Matemática era quase que em sua totalidade, desenvolvida por meio da Geometria. Problemas como repartição de terras, preços de terrenos e distância entre dois pontos (locais) eram bastante comuns já que a economia se baseava na agricultura.

Entretanto, no ano de 1540, durante o Renascimento, nasce o matemático francês François Viète. Dentre suas obras a que se destaca é "Introdução à Arte Analítica", ou "Isagoge", como é mais conhecida, onde moderniza a Álgebra introduzindo o cálculo literal, isto é, utilizando letras do alfabeto [4]. Viète propõe o uso de vogais para as incógnitas das equações e o uso de consoantes para os números conhecidos. Mais tarde, outros matemáticos como Renè Descartes aprimoraram essa linguagem para a Álgebra.

Essa nova notação desvinculou a Álgebra da Geometria, que até então eram complementares. Portanto, problemas como a multiplicação foram desvinculados do cálculo de áreas e de volumes. As consequências dessa separação (entre a Álgebra e a Geometria) perduram até a atualidade, refletindo no ensino básico. Ou seja, conteúdos que seriam melhor compreendidos usando simultaneamente conceitos algébricos e geométricos passaram a ser tratados independentes um do outro. Dentre esses

conteúdos se encontram os "polinômios", que é o tema central da presente dissertação. Deste modo, traremos uma sugestão de como tratar polinômios em sala de aula tanto a partir de uma visão algébrica quanto geométrica e resgatar o vínculo entre essas duas áreas da Matemática.

Capítulo 2

Operações Básicas com Polinômios de Graus 1, 2 e 3 com Álgebra

O ensino de polinômios, em geral, se dá por meio da apresentação das propriedades e do algoritmo utilizado para a resolução dos problemas. Veremos, neste capítulo, as principais propriedades utilizadas para que, em seguida, possamos relacioná-las com a geometria.

2.1 Monômios

Definição 2.1.1. *Monômio é uma expressão algébrica formada por um coeficiente numérico (parte numeral) e variáveis (parte literal) em um produto. Podemos escrever um monômio na forma*

$$k \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} = k \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n},$$

em que $k \in \mathbb{R}$ é o coeficiente numérico e $\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ é a parte literal com $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1.1. *São exemplos de monômios:*

1. $2xy$;
2. xyz^3 ;
3. πxyz .

Definição 2.1.2. *Aos monômios que possuem a mesma parte literal, chamamos de monômios semelhantes, por exemplo: $2xyz$ e $-xyz$.*

Definição 2.1.3. *Seja o monômio $k \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$, definimos o seu grau como a soma $\sum_{i=1}^n \alpha_i$.*

Exemplo 2.1.2. *O grau do monômio $3xy^2z^3$ é $1 + 2 + 3 = 6$, em que 1 é o expoente do x , 2 é o expoente do y e 3 é o expoente do z .*

As definições acima nos permitem, agora, definir as operações entre os monômios: soma, subtração, multiplicação e divisão.

Definição 2.1.4. *Sejam os monômios semelhantes $k_1 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ e $k_2 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$. A soma é definida como sendo o monômio*

$$(k_1 + k_2) \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}.$$

Definição 2.1.5. *Analogamente à soma, definimos a subtração entre os monômios semelhantes $k_1 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ e $k_2 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ como sendo o monômio*

$$(k_1 - k_2) \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}.$$

Exemplo 2.1.3. *Dados os monômios $3x^2z$ e $-8x^2z$, temos que a soma e a subtração é, respectivamente, $-5x^2z$ e $11x^2z$.*

Proposição 2.1.1. *Sejam os monômios semelhantes $A = k_1 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$, $B = k_2 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ e $C = k_3 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$. A soma entre monômios possui as propriedades:*

1. *Comutativa: $A + B = B + A$;*
2. *Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$;*
3. *Elemento neutro é o 0: $A + 0 = A$.*

Demonstração: Seja $X = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$, então

1. $A + B = k_1 \cdot X + k_2 \cdot X = (k_1 + k_2) \cdot X = (k_2 + k_1) \cdot X = k_2 \cdot X + k_1 \cdot X = B + A$;
2. $(A + B) + C = (k_1 \cdot X + k_2 \cdot X) + k_3 \cdot X = (k_1 + k_2) \cdot X + k_3 \cdot X = (k_1 + k_2 + k_3) \cdot X = k_1 \cdot X + (k_2 + k_3) \cdot X = k_1 \cdot X + (k_2 \cdot X + k_3 \cdot X) = A + (B + C)$;
3. $A + 0 = k_1 \cdot X + 0 \cdot X = (k_1 + 0) \cdot X = k_1 \cdot X = A$.

Supondo que é de posse do leitor o conhecimento sobre definições e propriedades básicas de potenciação, seguiremos com o estudo das operações e propriedades dos monômios.

Definição 2.1.6. *Sejam os monômios $M_1 = k_1 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ e $M_2 = k_2 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}$. A multiplicação é definida pelo monômio*

$$M_1 M_2 = (k_1 \cdot k_2) \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i + \beta_i}.$$

Definição 2.1.7. *Sejam os monômios $M_1 = k_1 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ e $M_2 = k_2 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}$, $k_2 \neq 0$. A divisão é definida pelo monômio*

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i - \beta_i}.$$

Exemplo 2.1.4. *Sejam os monômios $3xyz^2$ e $2xz$. Temos que*

$$(3xyz^2) \cdot (2xz) = 6x^2yz^3$$

e

$$(3xyz^2) \div (2xz) = \frac{3}{2}yz.$$

Proposição 2.1.2. *Sejam os monômios $A = k_1 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$, $B = k_2 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}$ e $C = k_3 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$. A multiplicação entre monômios possui as propriedades:*

1. *Comutativa:* $A \cdot B = B \cdot A$;
2. *Associativa:* $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
3. *Distributiva:* $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
4. *Elemento neutro é o 1:* $A \cdot 1 = A$.

Demonstração:

1. $A \cdot B = (k_1 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}) \cdot (k_2 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i + \beta_i} = (k_2 \cdot k_1) \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i + \alpha_i} = (k_2 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}) \cdot (k_1 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}) = B \cdot A$.
2. $(A \cdot B) \cdot C = [(k_1 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}) \cdot (k_2 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i})] \cdot k_3 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} = [(k_1 \cdot k_2) \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i + \beta_i}] \cdot k_3 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} = (k_1 \cdot k_2 \cdot k_3) \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i + \beta_i + \gamma_i} = k_1 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \cdot [(k_2 \cdot k_3) \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i + \gamma_i}] = A \cdot (B \cdot C)$.
3. $A \cdot (B + C) = k_1 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \cdot (k_2 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i} + k_3 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}) = (k_1 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \cdot k_2 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}) + (k_1 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \cdot k_3 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}) = (k_1 \cdot k_2 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i + \beta_i}) + (k_1 \cdot k_3 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i + \gamma_i}) = A \cdot B + A \cdot C$.
4. $A \cdot 1 = (k_1 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}) \cdot 1 = k_1 \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} = A$.

2.2 Polinômios

Com base nas definições e propriedades dos monômios, enunciamos o estudo sobre os polinômios. São estes a base desta presente dissertação, para a qual foi desenvolvida uma abordagem geométrica como alternativa ao seu ensino na educação básica. Para que tenhamos um embasamento teórico, seguiremos com a definição e proposições a seguir:

Definição 2.2.1. *Um polinômio de variáveis x_{ij} é uma expressão algébrica da forma:*

$$k_1 \cdot x_{11}^{\alpha_{11}} \cdot x_{12}^{\alpha_{12}} \cdot \dots \cdot x_{1n}^{\alpha_{1n}} + k_2 \cdot x_{21}^{\alpha_{21}} \cdot x_{22}^{\alpha_{22}} \cdot \dots \cdot x_{2m}^{\alpha_{2m}} + \dots + k_p \cdot x_{p1}^{\alpha_{p1}} \cdot x_{p2}^{\alpha_{p2}} \cdot \dots \cdot x_{pq}^{\alpha_{pq}},$$

em que $k_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{N}$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$. Isto é, polinômio é uma expressão formada pela soma de monômios, ou seja,

$$\sum_{j=1}^p M_j, \text{ com } M_j = \prod_{i=1}^q k_j x_{jn_i}^{\alpha_{jn_i}}.$$

Exemplo 2.2.1. São exemplos de polinômios:

1. $2xy + xy^2$;
2. $x^2 + 3x - 2$;
3. $x + y$.

Definição 2.2.2. Seja o polinômio

$$k_1 \cdot x_{11}^{\alpha_{11}} \cdot x_{12}^{\alpha_{12}} \cdot \dots \cdot x_{1n}^{\alpha_{1n}} + k_2 \cdot x_{21}^{\alpha_{21}} \cdot x_{22}^{\alpha_{22}} \cdot \dots \cdot x_{2m}^{\alpha_{2m}} + \dots + k_p \cdot x_{p1}^{\alpha_{p1}} \cdot x_{p2}^{\alpha_{p2}} \cdot \dots \cdot x_{pq}^{\alpha_{pq}}.$$

Alternativamente, $\sum_{j=1}^p M_j$ com $M_j = \prod_{i=1}^q k_j x_{jn_i}^{\alpha_{jn_i}}$. O grau de um polinômio é dado por:

$$\max\{(\alpha_{11} + \alpha_{12} + \dots + \alpha_{1n}), (\alpha_{21} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{2m}), \dots, (\alpha_{p1} + \alpha_{p2} + \dots + \alpha_{pq})\}$$

ou seja, $\max\{\text{grau}(M_j)\}$ com $1 \leq j \leq p$. Isto é, o grau do monômio de maior valor dentre todos os monômios que o constitui.

Exemplo 2.2.2. O grau do polinômio $2xy + xy^2$ é $\max\{(1 + 1), (1 + 2)\} = \max\{2, 3\} = 3$.

As operações soma, subtração e multiplicação entre polinômios são análogas às operações entre monômios, bem como as propriedades, tendo em vista que, ao reduzirmos os termos semelhantes estaremos tratando, em resumo, de monômios.

Para uma melhor compreensão, sigamos com as definições e proposições:

Definição 2.2.3. Sejam os polinômios $P_1 = \sum_{j=1}^p \left(\prod_{i=1}^q k_j x_{jn_i}^{\alpha_{jn_i}} \right)$ e $P_2 = \sum_{j=1}^p \left(\prod_{i=1}^q l_j x_{jn_i}^{\alpha_{jn_i}} \right)$. Definimos a soma $P_1 + P_2$ como sendo o polinômio

$$\sum_{j=1}^p \left(\prod_{i=1}^q (k_j + l_j) x_{jn_i}^{\alpha_{jn_i}} \right).$$

Equivalentemente, sejam $P_1 = \sum_{j=1}^p M_j$ e $P_2 = \sum_{j=1}^p N_j$, onde $M_j = k_j \prod_{i=1}^q x_{jn_i}^{\alpha_{jn_i}}$ e $N_j = l_j \prod_{i=1}^q x_{jn_i}^{\alpha_{jn_i}}$. Então,

$$P_1 + P_2 = \sum_{j=1}^p (M_j + N_j).$$

Ou seja, é sempre possível escrever $P_1 + P_2$ como uma soma de p fatores.

Definição 2.2.4. Sejam os polinômios $P_1 = \sum_{j=1}^p \left(\prod_{i=1}^q k_j x_{jn_i}^{\alpha_{jn_i}} \right)$ e $P_2 = \sum_{j=1}^p \left(\prod_{i=1}^q l_j x_{jn_i}^{\alpha_{jn_i}} \right)$. Analogamente à soma, definimos a subtração entre P_1 e P_2 como sendo o polinômio

$$\sum_{j=1}^p \left(\prod_{i=1}^q (k_j - l_j) x_{jn_i}^{\alpha_{jn_i}} \right).$$

É importante notar que caso os polinômios P_1 e P_2 das Definições 2.2.3 e 2.2.4 não sejam formados por monômios semelhantes, basta reescrevê-los acrescentando os termos distintos com coeficiente igual a zero. Observe o exemplo:

Exemplo 2.2.3. *Sejam os polinômios $P_1 = x^2 + 1$ e $P_2 = 2x^3 - 2x^2 + x$.*

$$\text{A soma } P_1 + P_2 = (x^2 + 1) + (2x^3 - 2x^2 + x) = (0x^3 + x^2 + 0x + 1) + (2x^3 - 2x^2 + x + 0) = (0x^3 + 2x^3) + (x^2 - 2x^2) + (0x + x) + (1 + 0) = 2x^3 + (-x^2) + x + 1 = 2x^3 - x^2 + x + 1.$$

$$\text{A subtração } P_1 - P_2 = (x^2 + 1) - (2x^3 - 2x^2 + x) = (0x^3 - 2x^3) + (x^2 - (-2x^2)) + (0x - x) + (1 - 0) = -2x^3 + x^2 - x + 1.$$

Proposição 2.2.1. *Sejam os polinômios $A = \sum_{j=1}^p (\prod_{i=1}^q k_j x_{jn_i}^{\alpha_{jn_i}})$, $B = \sum_{j=1}^p (\prod_{i=1}^q l_j x_{jn_i}^{\alpha_{jn_i}})$ e $C = \sum_{j=1}^p (\prod_{i=1}^q m_j x_{jn_i}^{\alpha_{jn_i}})$. A soma desses polinômios possui as propriedades:*

1. *Comutativa: $A + B = B + A$;*
2. *Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$;*
3. *Elemento neutro é o 0: $A + 0 = A$.*

Demonstração:

Sejam $A = \sum_{j=1}^p k_j \cdot X$, $B = \sum_{j=1}^p l_j \cdot X$ e $C = \sum_{j=1}^p m_j \cdot X$, com $X = \prod_{i=1}^q x_{jn_i}^{\alpha_{jn_i}}$.

1. $A + B = \sum_{j=1}^p k_j X + \sum_{j=1}^p l_j X = \sum_{j=1}^p (k_j + l_j) X = \sum_{j=1}^p (l_j + k_j) X = \sum_{j=1}^p l_j X + \sum_{j=1}^p k_j X = B + A$;
2. $(A+B)+C = \left(\sum_{j=1}^p k_j X + \sum_{j=1}^p l_j X \right) + \sum_{j=1}^p m_j X = \left(\sum_{j=1}^p (k_j + l_j) X \right) + \sum_{j=1}^p m_j X = \sum_{j=1}^p ((k_j + l_j) + m_j) X = \sum_{j=1}^p (k_j + (l_j + m_j)) X = \sum_{j=1}^p k_j X + \left(\sum_{j=1}^p (l_j + m_j) X \right) = \sum_{j=1}^p k_j X + \left(\sum_{j=1}^p l_j X + \sum_{j=1}^p m_j X \right) = A + (B + C)$;
3. $A + 0 = \sum_{j=1}^p k_j X + \sum_{j=1}^p 0X = \sum_{j=1}^p (k_j + 0) X = \sum_{j=1}^p k_j X = A$.

Para tratarmos a multiplicação, dividiremos em duas possibilidades: multiplicação entre polinômios e monômios e multiplicação entre polinômios. Vejamos a seguir:

Definição 2.2.5. *Sejam o monômio $M = k \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}$ e o polinômio $P = \sum_{i=1}^p \left(\prod_{j=1}^q k_i x_{in_j}^{\alpha_{in_j}} \right)$, definimos o produto por*

$$M \cdot P = k \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i} \cdot \sum_{i=1}^p \left(\prod_{j=1}^q k_i x_{in_j}^{\alpha_{in_j}} \right) = \sum_{i=1}^p \prod_{j=1}^q k_i k_i \cdot \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i} \right).$$

De modo análogo, $P = \sum_{i=1}^p M_i$, então $M \cdot P = \sum_{i=1}^p M M_i$.

Note que podemos escrever a definição acima como uma aplicação da distributividade vista na Proposição 2.3.

Definição 2.2.6. *Sejam os polinômios $A = \sum_{j=1}^p (\prod_{i=1}^q k_j x_{jn_i}^{\alpha_{jn_i}})$ e $B = \sum_{j=1}^p (\prod_{i=1}^q l_j x_{jm_i}^{\alpha_{jm_i}})$. A multiplicação $A \cdot B$ é obtida pela multiplicação de cada monômio de A por B ; reescrevendo $A = \sum_{j=1}^p M_j$, então*

$$A \cdot B = M_1 B + M_2 B + \dots + M_p B = \sum_{j=1}^p M_j B.$$

Exemplo 2.2.4. *Sejam os polinômios $A = 2xy^2 + 3ab + 2z$ e $B = 5xy^2 - ab + 6z + 2t$.*

1. *A soma $A + B = 2xy^2 + 3ab + 2z + 5xy^2 - ab + 6z + 2t = (2xy^2 + 5xy^2) + (3ab - ab) + (2z + 6z) + 2t = 7xy^2 + 2ab + 8z + 2t$.*
2. *A subtração $A - B = 2xy^2 + 3ab + 2z - (5xy^2 - ab + 6z + 2t) = 2xy^2 + 3ab + 2z - 5xy^2 + ab - 6z - 2t = (2xy^2 - 5xy^2) + (3ab + ab) + (2z - 6z) - 2t = -3xy^2 + 4ab - 4z - 2t$.*
3. *A multiplicação $A \cdot B = (2xy^2 + 3ab + 2z) \cdot (5xy^2 - ab + 6z + 2t)$.*

Aplicando a propriedade distributiva vista anteriormente, temos:

$$2xy^2 \cdot (5xy^2 - ab + 6z + 2t) + 3ab \cdot (5xy^2 - ab + 6z + 2t) + 2z \cdot (5xy^2 - ab + 6z + 2t) = (10x^2y^4 - 2xy^2ab + 12xy^2z + 4xy^2t) + (15xy^2ab - 3a^2b^2 + 18abz + 6abt) + (10xy^2z - 2abz + 12z^2 + 4zt).$$

Reduzindo aos monômios semelhantes, obtemos:

$$10x^2y^4 + 4xy^2t - 3a^2b^2 + 6abt + 12z^2 + 4zt + (-2xy^2ab + 15xy^2ab) + (12xy^2z + 10xy^2z) + (18abz - 2abz) = 10x^2y^4 + 4xy^2t - 3a^2b^2 + 6abt + 12z^2 + 4zt + 13xy^2ab + 22xy^2z + 16abz.$$

Como visto acima, a soma, a subtração e a multiplicação podem ser facilmente aplicáveis entre os polinômios quando reduzidos aos termos semelhantes. Para que possamos compreender a divisão teremos que considerar duas situações: divisão entre polinômio e monômio e divisão entre polinômios. A divisão entre polinômio e monômio pode ser entendida como uma soma de frações cujo denominador é o mesmo em todas as parcelas como definido a seguir:

Definição 2.2.7. *Sejam o polinômio*

$$P = k_1 \cdot x_{11}^{\alpha_{11}} \cdot x_{12}^{\alpha_{12}} \cdot \dots \cdot x_{1n}^{\alpha_{1n}} + k_2 \cdot x_{21}^{\alpha_{21}} \cdot x_{22}^{\alpha_{22}} \cdot \dots \cdot x_{2m}^{\alpha_{2m}} + \dots + k_p \cdot x_{p1}^{\alpha_{p1}} \cdot x_{p2}^{\alpha_{p2}} \cdot \dots \cdot x_{pq}^{\alpha_{pq}} = \sum_{j=1}^p M_j$$

e o monômio

$$M = k \cdot \prod_{i=1}^r x_i^{\alpha_i}.$$

A divisão $\frac{P}{M}$ é dada por

$$\frac{k_1 \cdot x_{11}^{\alpha_{11}} \cdot x_{12}^{\alpha_{12}} \cdot \dots \cdot x_{1n}^{\alpha_{1n}}}{k \cdot \prod_{i=1}^r x_i^{\alpha_i}} + \frac{k_2 \cdot x_{21}^{\alpha_{21}} \cdot x_{22}^{\alpha_{22}} \cdot \dots \cdot x_{2m}^{\alpha_{2m}}}{k \cdot \prod_{i=1}^r x_i^{\alpha_i}} + \dots + \frac{k_p \cdot x_{p1}^{\alpha_{p1}} \cdot x_{p2}^{\alpha_{p2}} \cdot \dots \cdot x_{pq}^{\alpha_{pq}}}{k \cdot \prod_{i=1}^r x_i^{\alpha_i}} = \sum_{j=1}^p \frac{M_j}{M}.$$

Exemplo 2.2.5. Seja o polinômio $P = 6xy^2 + 3x^2y - 9xy$ e o monômio $M = 3xy$. A divisão

$$\frac{P}{M} = \frac{6xy^2 + 3x^2y - 9xy}{3xy} = \frac{6xy^2}{3xy} + \frac{3x^2y}{3xy} - \frac{9xy}{3xy} = 2y + x - 3.$$

Para que possamos entender a divisão entre polinômios, lembremos da divisão Euclidiana:

$$p = q \cdot n + r$$

vista mais comumente da forma

$$\begin{array}{r|l} p & q \\ \hline r & n \end{array}$$

ou ainda da forma

$$\frac{p}{q} = n + \frac{r}{q}$$

onde, $p, q, n, r \in \mathbb{Z}$ com $0 < r < |q|$. Ambas igualdades anteriores indicam que p dividido por q é igual à n e deixa um resto r . Por exemplo $9 = 2 \cdot 4 + 1$, ou seja, $9 \div 2 = 4$ deixando um resto 1.

Seguindo o raciocínio da divisão Euclidiana apresentada acima, podemos relacionar os números p, q, n, r com polinômios. Desse modo, trataremos a divisão entre polinômios por meio da expressão

$$P = Q \cdot N + R$$

onde P, Q, N e R são polinômios.

Note que o grau do polinômio P é maior que o grau dos polinômios Q e N . Mais ainda, o grau do polinômio R é menor que o grau dos polinômios Q e N .

Exemplo 2.2.6. Sejam os polinômios $P = x^2 + 3x - 6$ e $Q = x + 3$. A divisão entre P e Q é o polinômio $N = x - 2$ mais o resto $2x$, pois:

$$x^2 + 3x - 6 = (x + 3) \cdot (x - 2) + 2x$$

Exemplo 2.2.7. Sejam os polinômios $P = x^2 + 5x + 4$ e $Q = x + 1$. A divisão entre P e Q é igual ao polinômio $N = x + 4$, pois

$$x^2 + 5x + 4 = (x + 1) \cdot (x + 4).$$

Dizemos, neste caso, que a divisão é exata, visto que não há um resto.

Capítulo 3

Operações Básicas com Polinômios de Graus 1, 2 e 3 por meio de Geometria

No ensino atual, a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) [2] propõe a álgebra para a resolução de problemas que envolvem polinômios, bem como equações, e propõe a geometria para a resolução de problemas relacionados ao espaço geométrico: figuras geométricas planas e espaciais. Somente há interseção entre álgebra e geometria quando o estudo do plano cartesiano é oferecido.

Portanto, há uma defasagem da BNCC quanto às propostas de métodos a serem ensinados no ensino básico. Como dito anteriormente, numa sala de aula há pluralidade, logo, o professor de Matemática deve buscar diversas alternativas ao ensinar determinado conteúdo, por isso, esta dissertação trará o método geométrico mesmo que este não esteja inserido na proposta de ensino ofertada pela BNCC. Para minimizar este problema, a presente dissertação sugere o ensino das propriedades e operações entre polinômios concomitantemente com o ensino de cálculo de áreas de retângulos e volumes de paralelepípedos, fazendo uma relação entre álgebra e geometria. Desse modo, duas das grandes áreas da matemática seriam abrangidas e o conhecimento adquirido pelos alunos seria mais completo.

Também é válido considerar que a Geometria, por ser concreta, facilita a compreensão do abstrato, sendo este fator mais um incentivo para o tema deste trabalho, já que o objetivo do professor é, além de ensinar, buscar ferramentas que facilitem o ensino e, como já mencionado anteriormente, seus alunos compreendam os conteúdos ministrados e tenham uma aprendizagem significativa.

Este capítulo será dividido em duas seções, uma para o tratamento geométrico dos polinômios de primeiro e segundo grau, a outra para o tratamento geométrico dos polinômios de terceiro grau.

3.1 Polinômios de Graus 0, 1 e 2 Associados a Retângulos

Ao estudar o conceito de áreas de figuras geométricas, costumamos tratar de objetos com duas dimensões, cujas unidades de medidas são quadráticas. Por isso, é comum relacionarmos o cálculo das áreas com polinômios de segundo grau. No entanto, a depender da escolha das medidas dos lados dos retângulos, podemos associar o cálculo dessas áreas com polinômios de grau zero ou 1º ou 2º grau.

Primeiramente, lembremos que o cálculo da área de um retângulo é realizado por meio do produto da base pela altura.

Definição 3.1.1. *Seja R um retângulo de lados medindo b e h unidades. Definimos a área de R como o produto $b \cdot h$ unidades quadradas ou unidades de área.*



Figura 3.1: Área do retângulo

Desse modo, temos três possibilidades para a relação da área dos retângulos com polinômios:

1. Monômio de grau zero: basta utilizarmos um retângulo com todos os lados medindo 1 unidade.

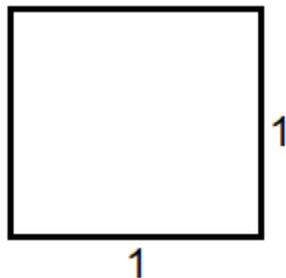


Figura 3.2: Área do retângulo de 1 unidade de área

Assim, sua área é igual a 1 unidade de área, ou seja, representa um monômio $P_0 = 1$ cujo grau é 0.

2. Monômio de grau 1: basta utilizarmos um retângulo cuja base mede x unidades e sua altura mede 1 unidade. Assim, o monômio $P_1 = x$ está relacionado com a área do retângulo da Figura 3.3.

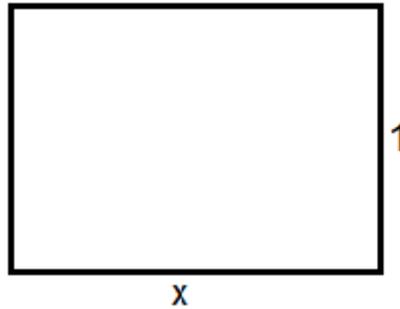


Figura 3.3: Área do retângulo de x unidades de área

3. Monômio de grau 2: tome o polinômio $P_2 = x^2$. Podemos relacioná-lo a um retângulo cuja base e altura medem x unidades.

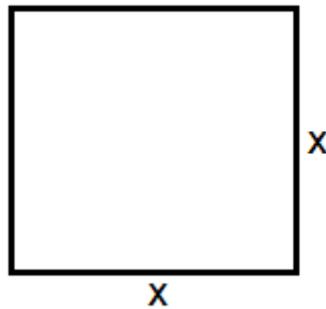


Figura 3.4: Área do retângulo de x^2 unidades de área

Relacionamos, então, os monômios $P_0 = 1$, $P_1 = x$ e $P_2 = x^2$ cujos graus são 0, 1 e 2, respectivamente, com áreas de retângulos. Caso tenhamos um múltiplo dos polinômios P_0 , P_1 e/ou P_2 basta multiplicarmos a medida da base e/ou altura do retângulo associado pelo múltiplo.

Exemplo 3.1.1. *Seja o monômio $P = 3x^2$. O retângulo associado ao monômio P seria um retângulo composto por 3 quadrados cujos lados medem x unidades, logo um dos lados do retângulo formado seria igual à $3x$ unidades e o outro igual à x unidades. Veja na Figura 3.5.*

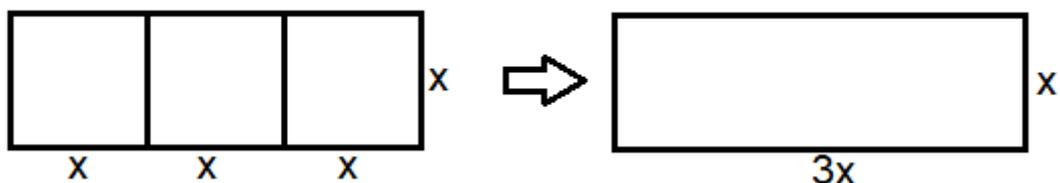


Figura 3.5: Monômio $P_2 = 3x^2$

Exemplo 3.1.2. *Seja o polinômio $P = 2x^2 + 3$. Para representar geometricamente P utilizaremos um retângulo associado ao monômio $2x^2$ e um retângulo associado ao monômio 3 . O polinômio P será a composição desses dois retângulos. Veja na Figura 3.6*

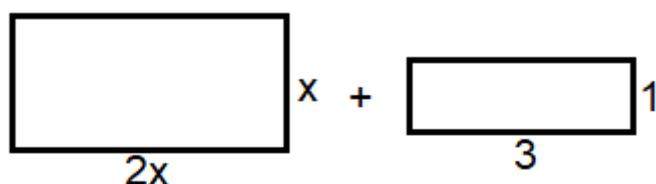


Figura 3.6: Polinômio $P = 2x^2 + 3$

Agora que sabemos relacionar polinômios de graus 0, 1 e 2 cujos coeficientes são positivos com áreas de retângulos, podemos introduzir a relação de monômios de coeficientes negativos com áreas de retângulos. Para isto, usamos retângulos na cor cinza para representar monômios com sinal positivo e retângulos na cor vermelha para representar monômios com sinal negativo. Desse modo, temos as seguintes possibilidades:

1. Um dos lados representado pela cor preta e o outro lado representado pela cor vermelha resulta num retângulo de cor vermelha - retângulo associado a um monômio com sinal negativo;
2. Base e altura representados pela cor preta resultam num retângulo de cor cinza - retângulo associado a um monômio com sinal positivo;
3. Base e altura representados pela cor vermelha resultam num retângulo de cor cinza - retângulo associado a um monômio de sinal positivo.

É importante notar que os retângulos associados aos polinômios de sinal negativo podem ter ou a base ou a altura da cor vermelha, já que por se tratar de uma multiplicação, a posição dos lados não altera o valor da área calculada.

Exemplo 3.1.3. *Sejam os polinômios $P_0 = 1$ e $P'_0 = -1$. Os retângulos associados à P_0 e P'_0 são respectivamente*

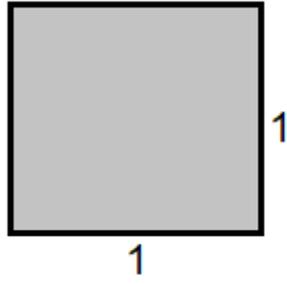


Figura 3.7: Polinômio $P_0 = 1$

ou ainda,

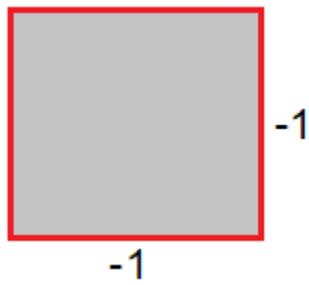


Figura 3.8: Polinômio $P_0 = 1$

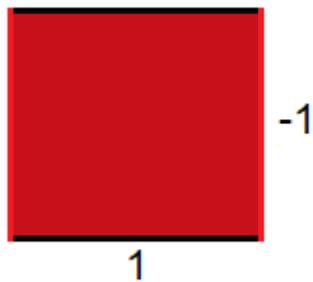


Figura 3.9: Polinômio $P'_0 = -1$

Exemplo 3.1.4. *Sejam os polinômios $P_1 = x$ e $P'_1 = -x$. Os retângulos associados à P_1 e P'_1 são respectivamente*

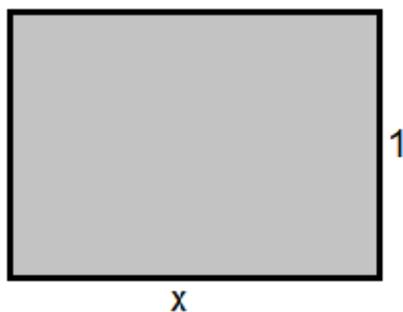


Figura 3.10: Polinômio $P_1 = x$

ou ainda,

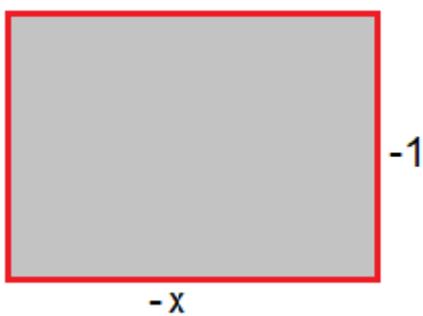


Figura 3.11: Polinômio $P_1 = x$

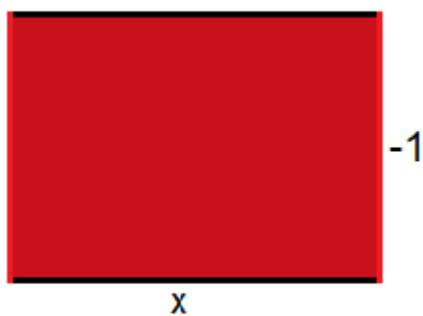


Figura 3.12: Polinômio $P'_1 = -x$

ou ainda,



Figura 3.13: Polinômio $P'_1 = -x$

Exemplo 3.1.5. *Sejam os polinômios $P_2 = x^2$ e $P'_2 = -x^2$. Os retângulos associados à P_2 e P'_2 são respectivamente*

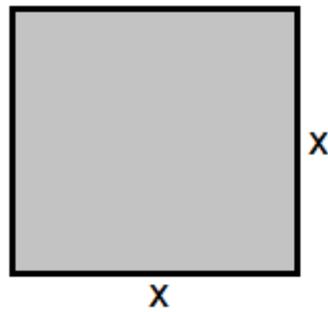


Figura 3.14: Polinômio $P_2 = x^2$

ou ainda,

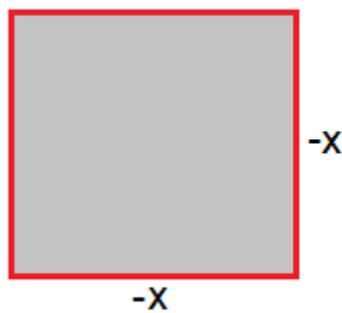


Figura 3.15: Polinômio $P_2 = x^2$

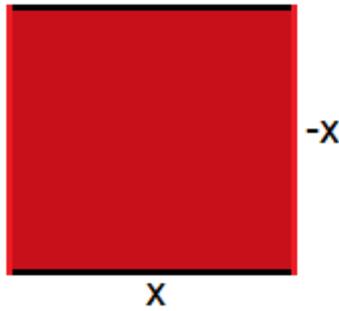


Figura 3.16: Polinômio $P'_2 = -x^2$

3.1.1 Adição e Subtração de Polinômios

Para tratar da adição e subtração de polinômios usaremos a noção de composição de áreas. Como a área total de um retângulo é a soma das áreas de todos os retângulos que o compõem, temos que a soma dos polinômios será a soma das áreas dos seus retângulos associados. Ou seja, sendo A_1, A_2, \dots, A_n as áreas dos retângulos componentes, a área do retângulo associado à soma do polinômio será

$$A = \sum_{i=1}^n A_n.$$

Para visualizar essa composição, analisemos os exemplos a seguir.

Exemplo 3.1.6. *Sejam os polinômios $P = x$ e $Q = x^2$. A soma $P+Q$ está associada geometricamente ao retângulo*

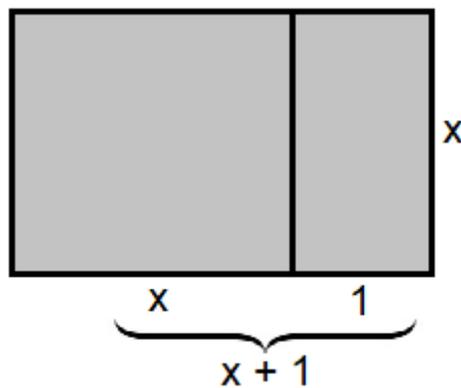


Figura 3.17: Polinômio $P + Q$

Logo, $P + Q$ pode ser escrito como a área do retângulo cuja base mede $x + 1$ unidades e a altura mede x unidades, ou seja, $P + Q = x^2 + x = (x + 1) \cdot x$.

Exemplo 3.1.7. *Sejam os polinômios $P = xy$ e $Q = -zx$. Podemos representar geometricamente P e Q das formas:*

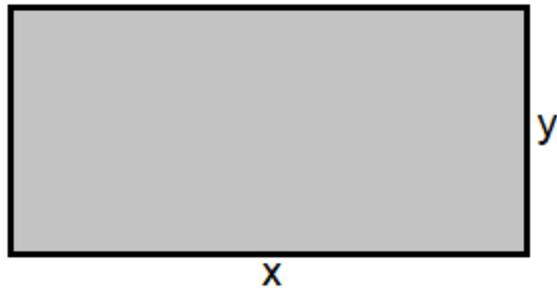


Figura 3.18: Polinômio $P = xy$



Figura 3.19: Polinômio $Q = -zx$

E representar a soma $P + Q$ como a composição dos retângulos das Figuras 3.18 e 3.19. Veja a Figura 3.20.

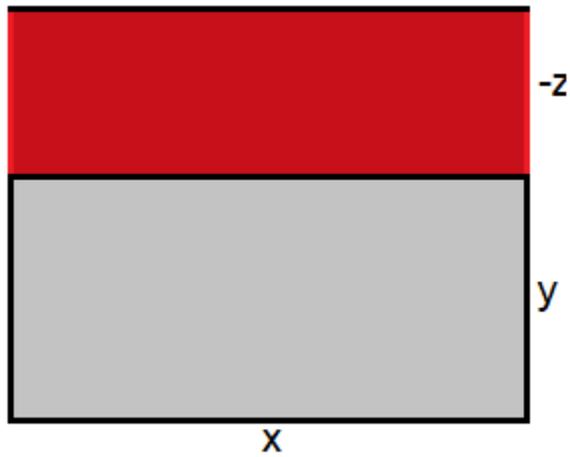


Figura 3.20: Polinômio $P + Q$

Podemos escrever a área total do retângulo da Figura 15 como sendo o polinômio $P + Q = xy + x(-z) = xy - xz = x \cdot (y - z)$. Portanto, sem que tenhamos utilizado as propriedades algébricas, podemos efetuar a soma $P + Q$ por meio da soma das áreas que compuseram o retângulo da Figura 3.20.

Exemplo 3.1.8. Seja o polinômio $x^2 + 2x + 2$. Sua apresentação geométrica é da seguinte forma:

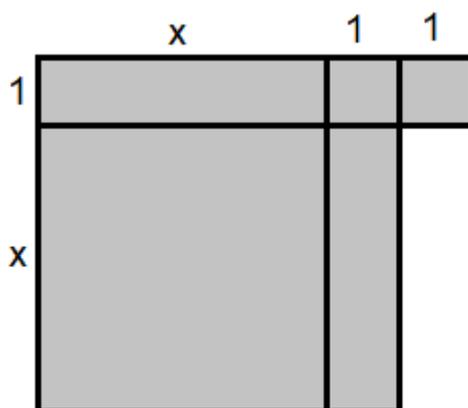


Figura 3.21: Polinômio $x^2 + 2x + 2$

Observe que há, na Figura 3.21, um retângulo "sobrando". Podemos escrever $x^2 + 2x + 2$ como sendo a área do retângulo maior, de lados $x + 1$, somada com a área do retângulo menor cujos lados medem 1: $x^2 + 2x + 2 = (x + 1) \cdot (x + 1) + 1 = (x + 1)^2 + 1$.

Exemplo 3.1.9. Seja o polinômio $2x^2 - x - 1$. Sua representação geométrica é:

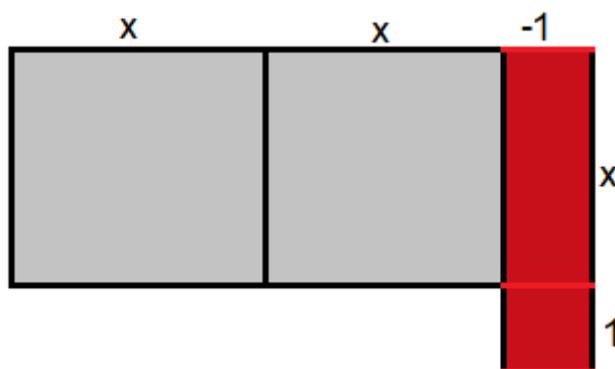


Figura 3.22: Polinômio $2x^2 - x - 1$

Assim como no exemplo anterior, temos um retângulo "sobrando" representado pela Figura 3.22. Por isso, podemos escrever $2x^2 - x - 1$ como sendo a soma entre a área do retângulo de lados x e $2x - 1$ e a área do retângulo vermelho de lados 1 e -1 : $x(2x - 1) + (-1) \cdot 1 = x(2x - 1) - 1 = 2x^2 - x - 1$.

3.1.2 Multiplicação de Polinômios

Para tratar de multiplicação de polinômios de 0, 1 ou 2 graus usaremos o seguinte: consideremos o retângulo cuja base será o primeiro polinômio e a altura será representada pelo segundo polinômio. O resultado da multiplicação será a área do retângulo obtido.

Exemplo 3.1.10. *Sejam os polinômios $P = (x + y)$ e $Q = (x + 1)$. A Figura 3.23 mostra a forma geométrica de PQ :*

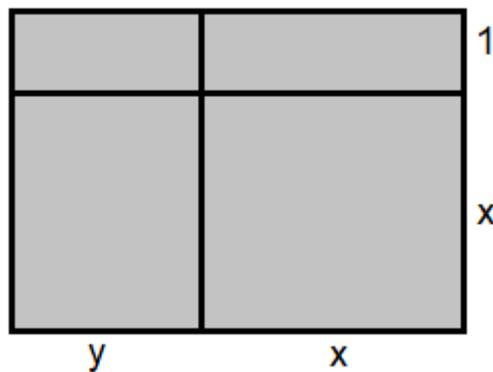


Figura 3.23: Polinômio $P_1 = (x + y) \cdot (x + 1)$

Realizando a soma das quatro áreas formadas obtemos $PQ = base \times altura = (x + y)(x + 1) = 1 \cdot y + 1 \cdot x + xy + x^2 = x^2 + xy + x + y$ como esperado se seguíssemos as proposições algébricas demonstradas no capítulo anterior.

Exemplo 3.1.11. *Sejam os polinômios $(2x + 1)$ e $(x + 2)$. Podemos representar a multiplicação $(2x + 1)(x + 2)$ conforme a Figura 3.24 a seguir:*

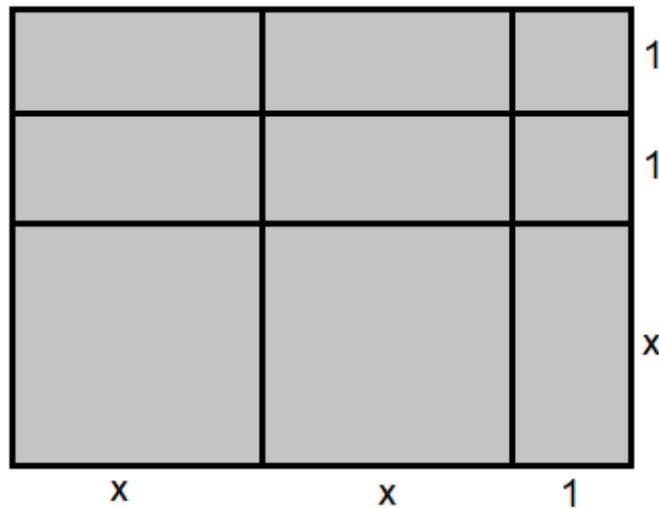


Figura 3.24: Polinômio $(2x + 1)(x + 2)$

Somando as áreas de cada um dos retângulos formados, temos $x + x + 1 + x + x + 1 + x^2 + x^2 + x = 2x^2 + 5x + 2$. Ou seja, temos duas áreas de medida x^2 , cinco áreas de medida x e duas áreas de medida 1. Portanto, $(2x + 1)(x + 2) = 2x^2 + 5x + 2$ como esperado se efetuássemos as propriedades de soma e multiplicação estudadas anteriormente.

Exemplo 3.1.12. Sejam os polinômios $(2x + 1)$ e $(-x)$. Podemos representar geometricamente a multiplicação $(2x + 1)(-x)$ da forma:

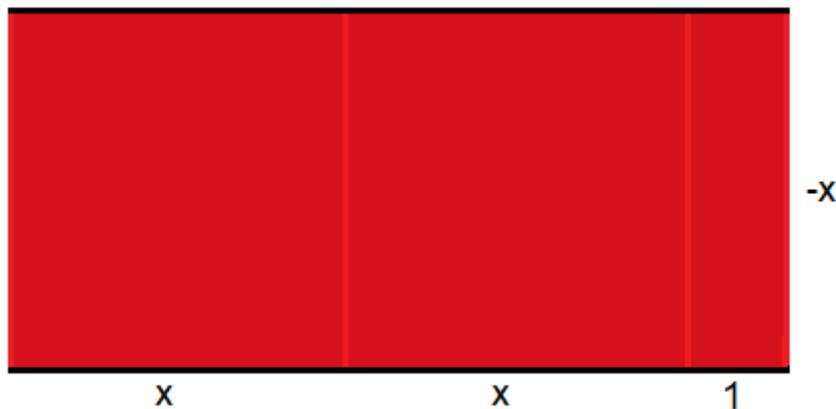


Figura 3.25: Polinômio $(-x)(2x + 1)$

Assim, podemos escrever o polinômio $(-x)(2x + 1)$ como a soma das áreas retangulares representadas na Figura 3.25:

$$x \cdot (-x) + x \cdot (-x) + 1 \cdot (-x) = -2x^2 - x = (-x)(2x + 1).$$

Exemplo 3.1.13. Sejam os polinômios $(x - 2)$ e $(-x + 1)$. A multiplicação $(x - 2)(-x + 1)$ tem como representação geométrica o retângulo

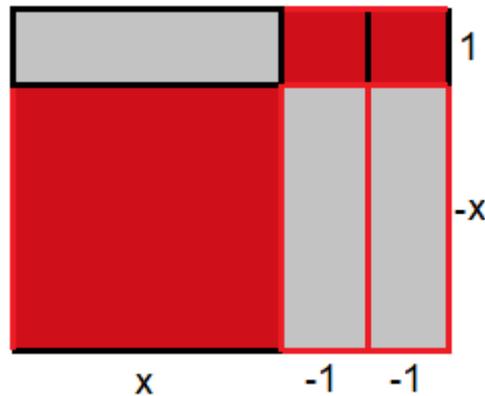


Figura 3.26: Polinômio $(x - 2)(-x + 1)$

Somando as áreas representadas acima na Figura 3.26, temos:

$$x + (-1) + (-1) + (-x^2) + (-1)(-x) + (-1)(-x) = -x^2 + 3x - 2,$$

ou seja, é exatamente o resultado da multiplicação algébrica dos fatores do polinômio $(x - 2)(-x + 1)$.

Seguiremos, agora, com uma nova interpretação geométrica de polinômios de graus 0, 1 e 2 de modo que os polinômios de grau 3 também possam ser compreendidos. Tal representação se dará de maneira análoga ao trabalho realizado anteriormente com as áreas dos retângulos.

3.2 Polinômios de Graus 0, 1, 2 e 3 Associados a Prismas

A ideia aqui é relacionar polinômios de graus 0, 1, 2 e 3 com volumes de prismas retangulares retos, os paralelepípedos. Para isto, lembremos que o cálculo do volume de um prisma retangular reto é dado pela multiplicação das medidas de comprimento, largura e altura:

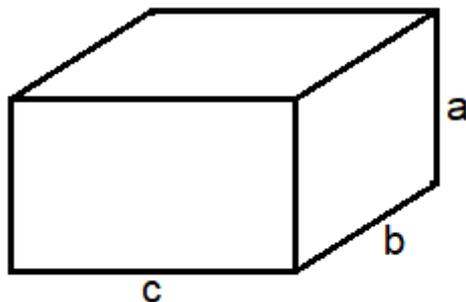


Figura 3.27: Paralelepípedo de lados medindo a , b e c

Definição 3.2.1. Dado o paralelepípedo de lados medindo a , b e c unidades de comprimento, definimos seu volume como sendo a expressão

$$V = abc$$

De maneira análoga à área de uma superfície retangular, podemos representar geometricamente os polinômios, bem como suas operações, por meio de paralelepípedos. Analisemos as quatro possibilidades para a relação do volume dos paralelepípedos com monômios de grau no máximo 3:

1. Monômio de grau 0: basta utilizarmos um prisma retangular reto com todas as arestas medindo 1 unidade.

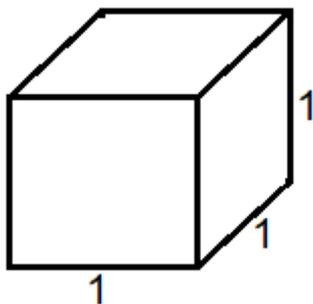


Figura 3.28: Paralelepípedo de medida 1 unidade de volume

Assim, seu volume é igual a 1 unidade de volume, ou seja, representa um monômio $P_0 = 1$ cujo grau é 0.

2. Monômio de grau 1: basta utilizarmos um paralelepípedo com uma das arestas medindo x unidades e as demais medindo 1 unidade. Aqui não importa qual das arestas mede x , pois o volume será a multiplicação das três arestas resultando sempre x unidades de volume.

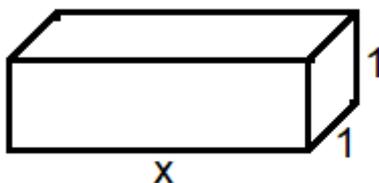


Figura 3.29: Paralelepípedo de medida x unidades de volume

Assim, seu volume é igual à x unidades de volume e está associado ao monômio de 1º grau $P_1 = x$.

3. Monômio de grau 2: utilizaremos um paralelepípedo com uma de suas arestas medindo 1 unidade e as demais medindo x unidades. Como no item anterior, não importa qual das arestas medirá 1 unidade, já que o volume será sempre x^2 unidades de volume.

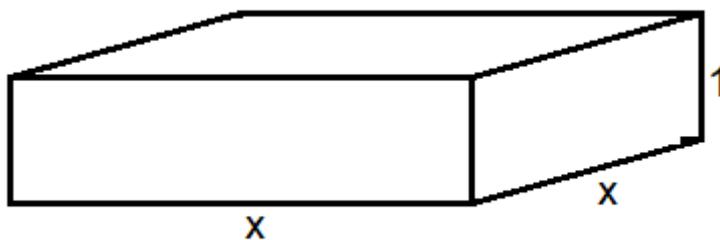


Figura 3.30: Paralelepípedo de medida x^2 unidades de volume

Logo, temos um paralelepípedo de volume x^2 unidades de volume que está associado ao monômio de 2º grau $P_2 = x^2$.

4. Monômio de grau 3: utilizaremos um paralelepípedo com todas as arestas medindo x unidades.

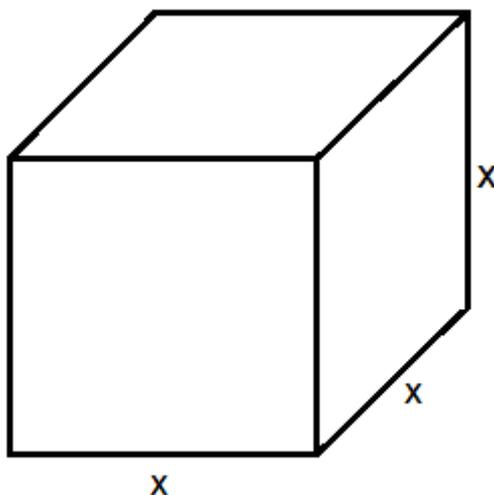


Figura 3.31: Paralelepípedo de medida x^3 unidades de volume

Portanto, o paralelepípedo da Figura 3.31 está associado ao monômio de 3º grau $P_3 = x^3$.

Assim como fizemos ao relacionar monômios com áreas de retângulos, relacionamos $P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = x^2$ e $P_3 = x^3$ cujos graus são 0, 1, 2 e 3, respectivamente, com volume de paralelepípedos. Caso tenhamos um múltiplo dos monômios P_0 , P_1 , P_2 e/ou P_3 basta multiplicarmos a medida de uma das arestas do paralelepípedo associado pelo múltiplo. Por exemplo:

Exemplo 3.2.1. *Seja o polinômio $P = 4x^2$. O prisma retangular reto associado será*

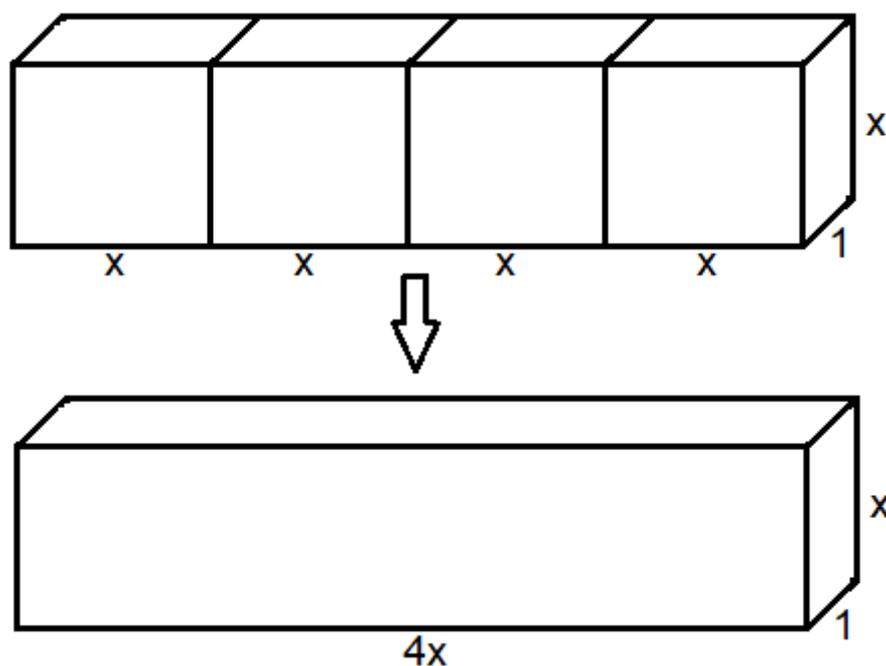


Figura 3.32: Paralelepípedo associado ao polinômio $P = 4x^2$

Analogamente a associação feita entre polinômios de sinal negativo e positivo de graus 0, 1 e 2 com áreas de retângulos, faremos com os polinômios de sinal negativo e positivo de graus 0, 1, 2 e 3 com volumes de paralelepípedos. Para isto, usamos prismas retangulares retos na cor cinza para representar polinômios com sinal positivo e prismas retangulares retos na cor vermelha para representar polinômios com sinal negativo. Sendo assim, temos as possibilidades a seguir. Considere as arestas citadas como largura, altura e profundidade.

1. Uma das arestas representada pela cor preta e as demais representadas pela cor vermelha resultam num paralelepípedo de cor cinza - associado a um monômio de sinal positivo;
2. Duas arestas representadas pela cor preta e uma aresta representada pela cor vermelha resultam num paralelepípedo de cor vermelho - associado a um monômio de sinal negativo;
3. Todas as arestas representadas pela cor preta resultam num paralelepípedo de cor cinza - associado a um monômio de sinal positivo;
4. Todas as arestas representadas pela cor vermelha resultam num paralelepípedo de cor vermelho - associado a um polinômio de sinal negativo.

Exemplo 3.2.2. *Sejam os monômios $P_0 = 1$ e $P'_0 = -1$. Os prismas associados à P_0 e P'_0 são respectivamente*

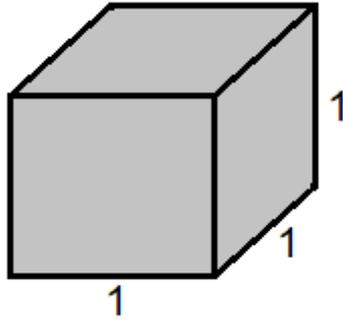


Figura 3.33: Monômio $P_0 = 1$

ou ainda,

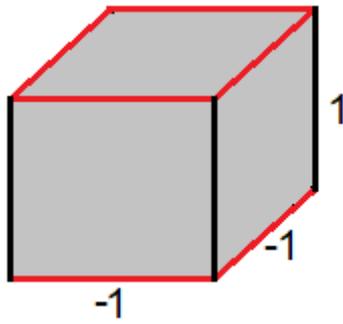


Figura 3.34: Monômio $P_0 = 1$

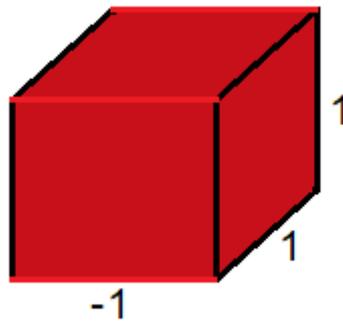


Figura 3.35: Monômio $P'_0 = -1$

ou ainda

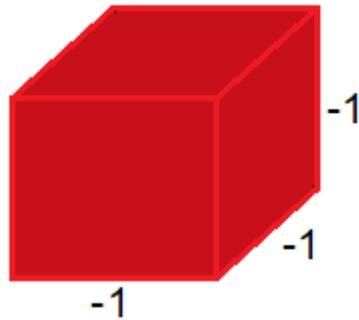


Figura 3.36: Monômio $P'_0 = -1$

Exemplo 3.2.3. *Sejam os monômios $P_1 = x$ e $P'_1 = -x$. Os prismas associados à P_1 e P'_1 são respectivamente*

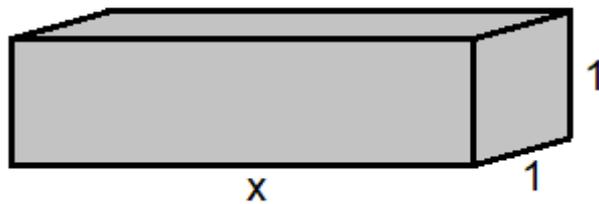


Figura 3.37: Monômio $P_1 = x$

Para $P_1 = x$, podemos ter, ainda, as arestas $P_1 = 1 \cdot (-1)(-x)$ ou $P_1 = (-1)(-1)x$:

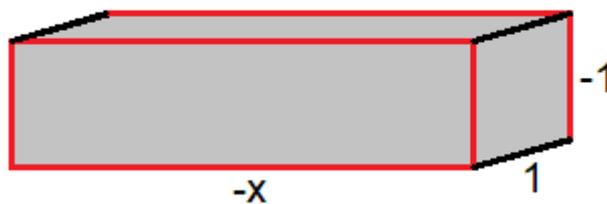


Figura 3.38: Monômio $P_1 = x$



Figura 3.39: Monômio $P_1 = x$



Figura 3.40: Monômio $P_1' = -x$

ou também o paralelepípedo

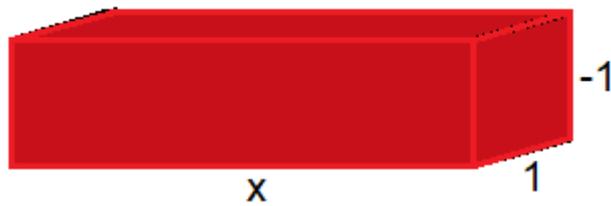


Figura 3.41: Monômio $P_1' = -x$

Exemplo 3.2.4. *Sejam os monômios $P_2 = x^2$ e $P_2' = -x^2$. Os prismas associados à P_2 e P_2' são respectivamente*

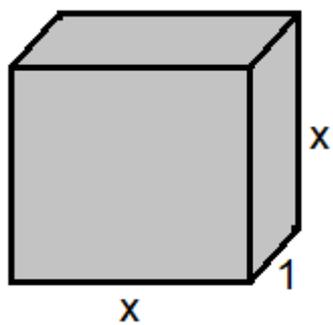


Figura 3.42: Polinômio $P_2 = x^2$

ou ainda os primas

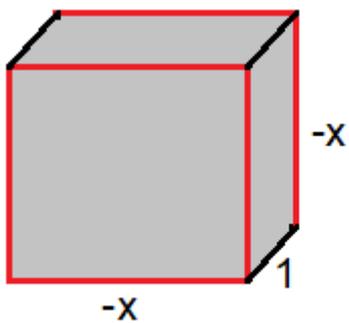


Figura 3.43: Polinômio $P_2 = x^2$

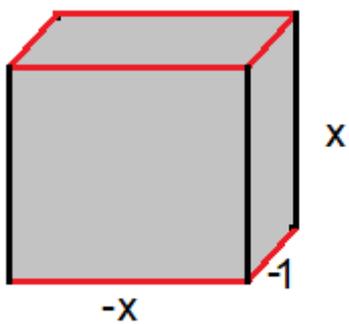


Figura 3.44: Polinômio $P_2 = x^2$

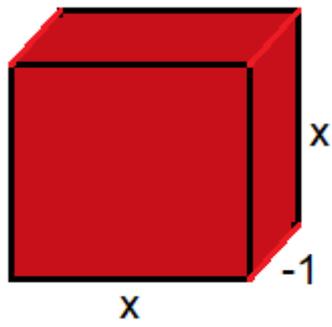


Figura 3.45: Polinômio $P'_2 = -x^2$

ou ainda

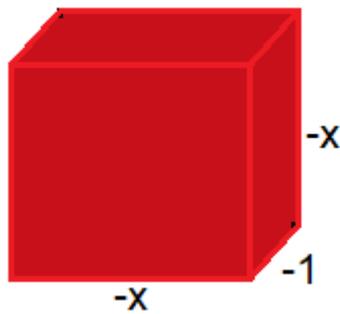


Figura 3.46: Polinômio $P'_2 = -x^2$

Exemplo 3.2.5. *Sejam os monômios $P_3 = x^3$ e $P'_3 = -x^3$. Os prismas associados à P_3 e P'_3 são respectivamente*

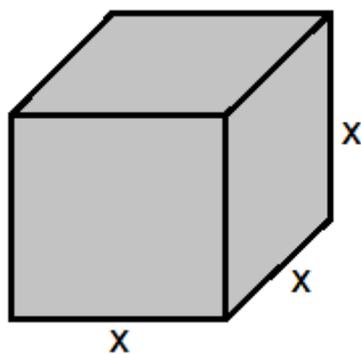


Figura 3.47: Polinômio $P_3 = x^3$

ou ainda,

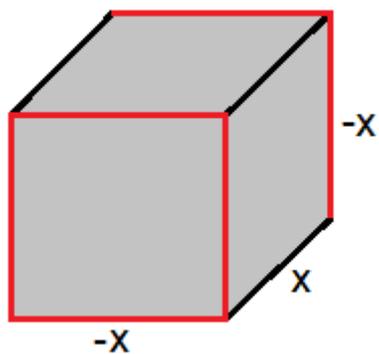


Figura 3.48: Polinômio $P_3 = x^3$

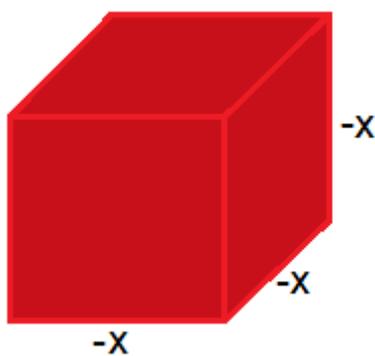


Figura 3.49: Polinômio $P'_3 = -x^3$

ou ainda,

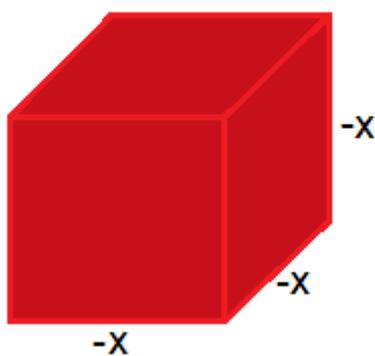


Figura 3.50: Polinômio $P'_3 = -x^3$

Com base nas representações e associações vistas acima, podemos relacionar geometricamente qualquer polinômio de grau no máximo 3. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.2.6. Seja o polinômio $P_1 = 12xyz$. Há diversas maneiras de representar P_1 geometricamente. Se pensarmos de maneira algébrica, P_1 pode ser escrito das formas $12(xyz) = (2x)(6y)z = (3x)y(4z)$ e tantas outras ainda. Um possível representação é mostrada pela Figura 3.51.

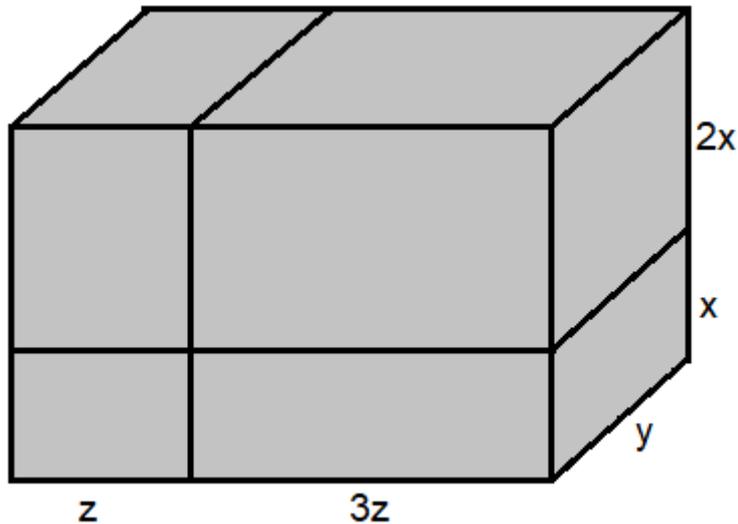


Figura 3.51: Polinômio $P_1 = 12xyz$

É possível, ainda, utilizando a representação geométrica da Figura 3.51, trabalhar P_1 como uma soma de monômios. Somando os volumes dos quatro paralelepípedos construídos a partir da decomposição do paralelepípedo de volume $12xyz$, temos $2xyz + 6xyz + 3xyz + xyz = 12xyz$ como esperado se usássemos a soma algébrica convencional.

Exemplo 3.2.7. Seja o polinômio $P_2 = xzt - yzt$. Podemos reescrever $P_2 = xzt + (-y)zt$. A Figura 3.52 mostra uma representação geométrica de P_2 :

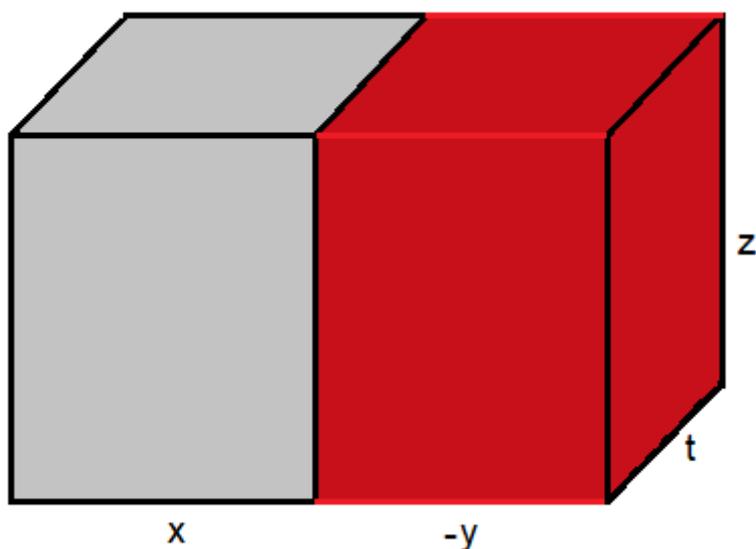


Figura 3.52: Polinômio $P_2 = xzt - yzt$

Também é possível encontrar uma forma simplificada de P_2 calculando o volume total do paralelepípedo, assim, $V = (x + (-y))zt = (x - y)zt$. Ou seja, o polinômio P_2 pode ser simplificado e escrito da forma $P_2 = xzt - yzt = (x - y)zt$.

Exemplo 3.2.8. Seja o polinômio $P_3 = (x + y) \cdot (z - t) \cdot v$. Podemos representá-lo conforme o paralelepípedo da Figura 3.53.

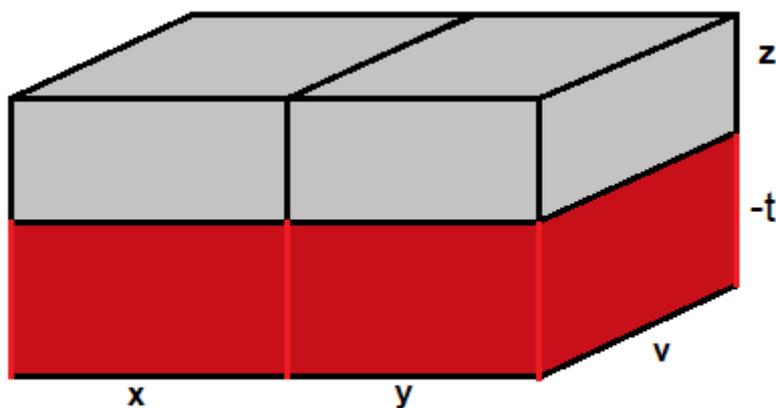


Figura 3.53: Polinômio $P_3 = (x + y) \cdot (z - t) \cdot v$

Calculando o volume de cada um dos paralelepípedos formados, temos: $xzv - xtv - ytv + yzv$. Equivalente ao polinômio P_3 se efetuássemos as operações de soma e multiplicação vistas na seção anterior. Logo, $P_3 = (x + y) \cdot (z - t) \cdot v = xzv - xtv - ytv + yzv$.

Exemplo 3.2.9. Seja o polinômio $P_4 = x^3 + 1$. Uma possível representação geométrica de P_4 seria a da Figura 3.54 a seguir.

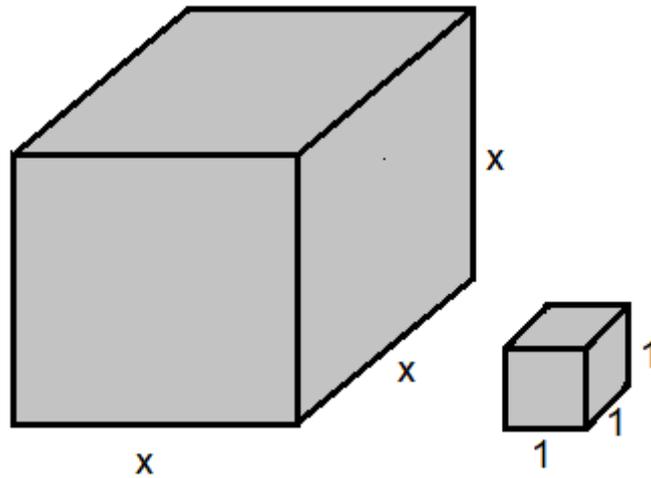


Figura 3.54: Polinômio P_4

Observe que, neste caso, não conseguimos construir um único prisma retangular reto. Podemos acrescentar alguns prismas e retirar outros de mesmo volume e obter outra representação geométrica por P_4 . Desta forma, P_4 não sofrerá alteração. Veja as Figuras 3.55 e 3.56:

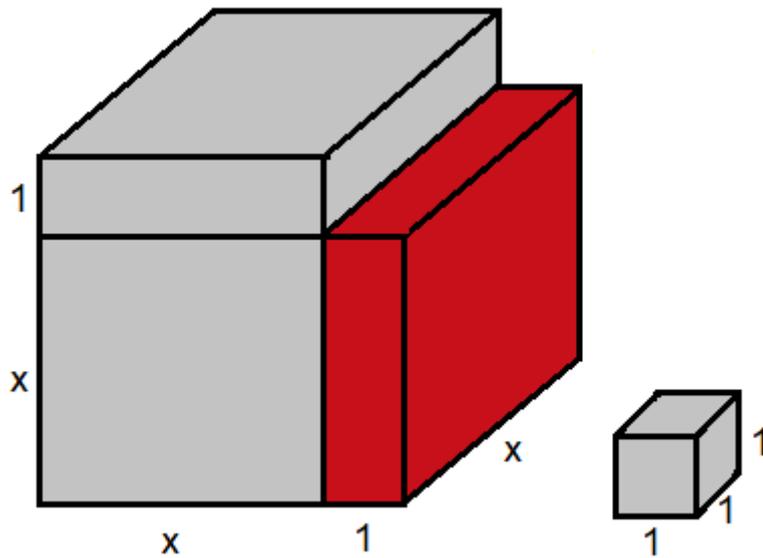


Figura 3.55: Polinômio $P_4 = x^3 + 1$

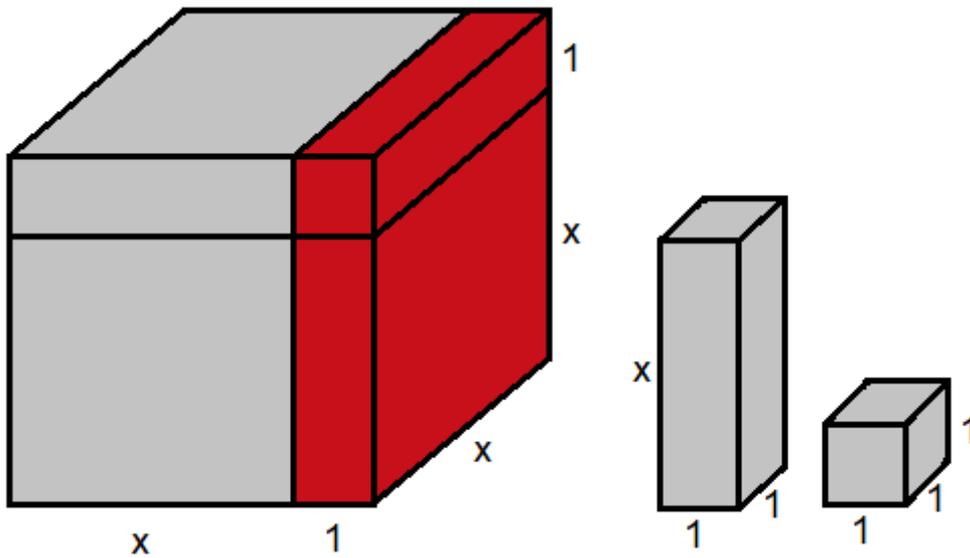


Figura 3.56: Polinômio $P_4 = x^3 + 1$

Algebricamente, fizemos: $P_4 = x^3 - x^2 + x^2 - x + x + 1$. Calculando a soma dos volumes da composição de paralelepípedos, temos $P_4 = x(x+1)(x-1) + x + 1$. Construimos, desta maneira, outra representação geométrica de P_4 que nos fornece uma nova maneira algébrica de escrevê-lo. Portanto, representamos P_4 como um prisma retangular reto de medidas x , $x+1$ e $x-1$, outro de medidas x , 1 e 1 , por último, um cubo de lado 1 . A partir de agora, chamaremos estes primas que "sobraram" de restos.

Vejamos outro exemplo:

Exemplo 3.2.10. Seja o polinômio $P_5 = x^3 + 3x^2 + x - 2$. Sua possível representação geométrica seria a da Figura 3.57:

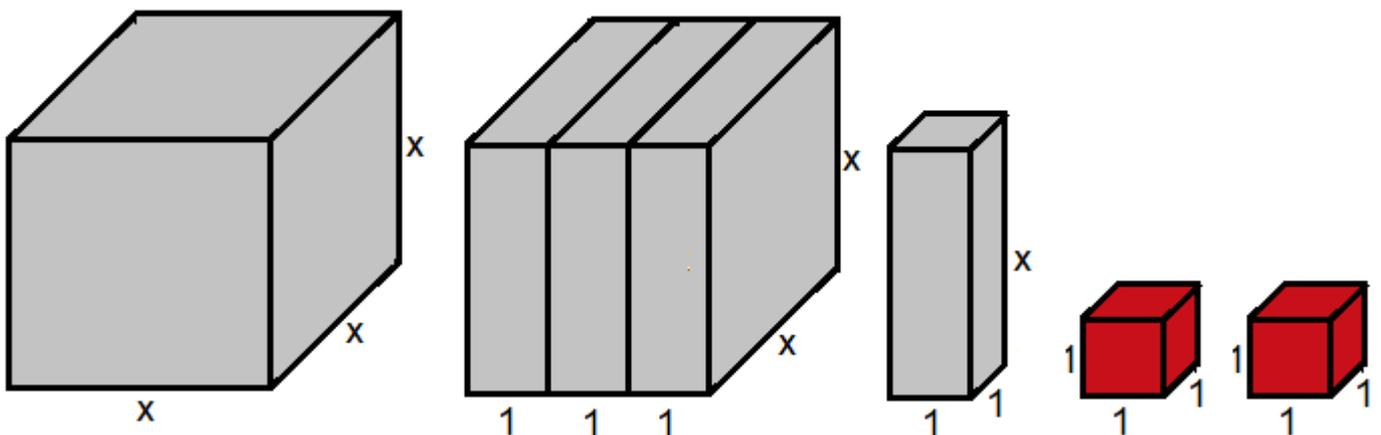


Figura 3.57: Polinômio $P_5 = x^3 + 3x^2 + x - 2$

Mas observe que, alguns dos paralelepípedos utilizados poderiam se agrupar formando o sólido da Figura 3.58:

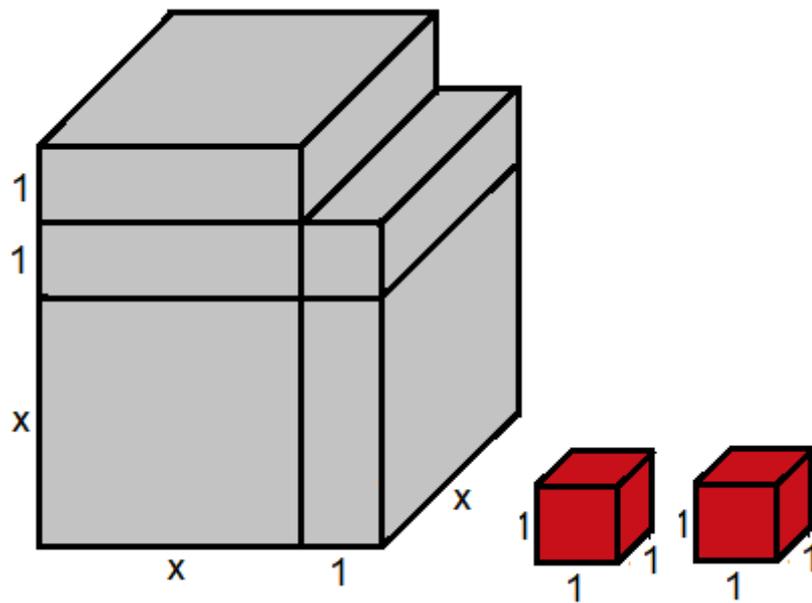


Figura 3.58: Polinômio $P_5 = x^3 + 3x^2 + x - 2$

Para construirmos um prisma retangular reto, adicionaremos um paralelepípedo cinza cujo volume é x e um paralelepípedo vermelho também de volume x algebricamente equivalente a $P_5 = x^3 + 3x^2 + x + x - x - 2$. Observe na Figura 3.59 a seguir a nova representação geométrica de P_5 :

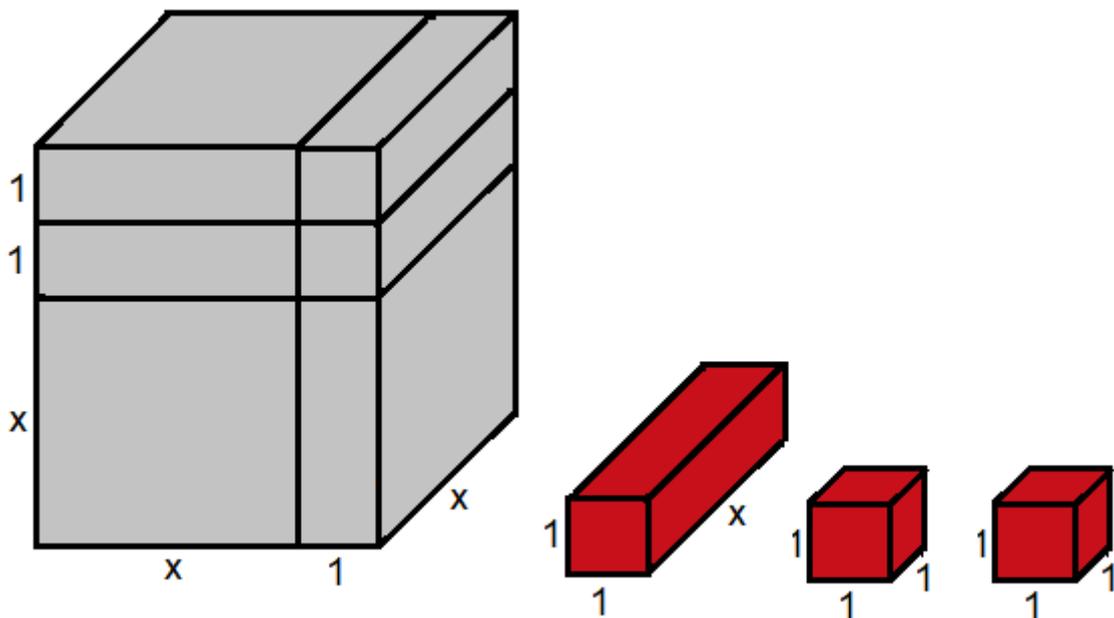


Figura 3.59: Polinômio $P_5 = x^3 + 3x^2 + x - 2$

A representação geométrica da Figura 3.59 corresponde, algebricamente, ao polinômio $x(x + 1)(x + 2) - x - 2$. Ou seja, podemos reescrever P_5 da forma $x(x + 1)(x + 2) - x - 2$.

Até agora estudamos maneiras de representar geometricamente os monômios e polinômios. Seguiremos tratando as operações de soma, subtração e multiplicação entre monômios e polinômios de maneira geométrica.

3.2.1 Soma de Polinômios de grau Máximo 3

Pensando na ideia trazida pela operação da soma que é acrescentar, juntar, aumentar, trabalharemos, geometricamente, essa ideia com a composição, já introduzida na seção anterior, de áreas de retângulos e/ou volumes de paralelepípedos. Para que esta ideia seja visualmente e geometricamente compreendida, sejam, por exemplo, os monômios $M = x^2$ e $N = x^3$. Queremos representar geometricamente a soma $M + N$, veja na Figura 3.60.

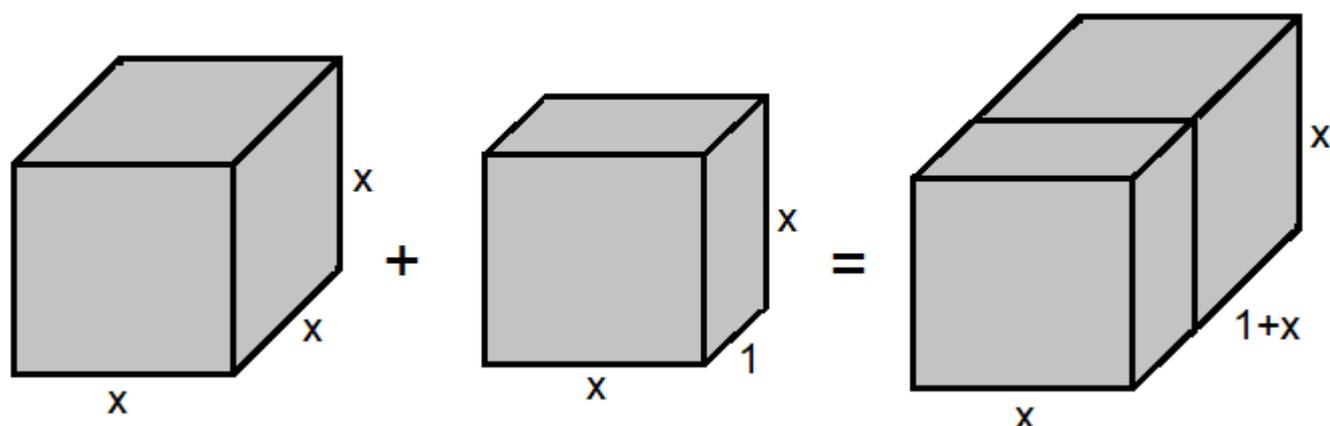


Figura 3.60: Operação geométrica de $M + N$

Temos que, tanto algebricamente como geometricamente, $M + N = x^3 + x^2$ ou, ainda, $M + N = x^2 \cdot (1 + x)$, pois a partir da composição dos paralelepípedos, o prisma resultante possui dois lados medindo x unidades de medida e um lado medindo $x + 1$ unidades de medida.

De posse da ideia apresentada, vejamos exemplos de todas as possibilidades de soma de polinômios de grau no máximo 3.

Exemplo 3.2.11. Sejam $P_3 = x^3$ e $P_0 = 2$ cujos graus são, respectivamente, 3 e 0. A representação geométrica da soma $P_3 + P_0$ é:

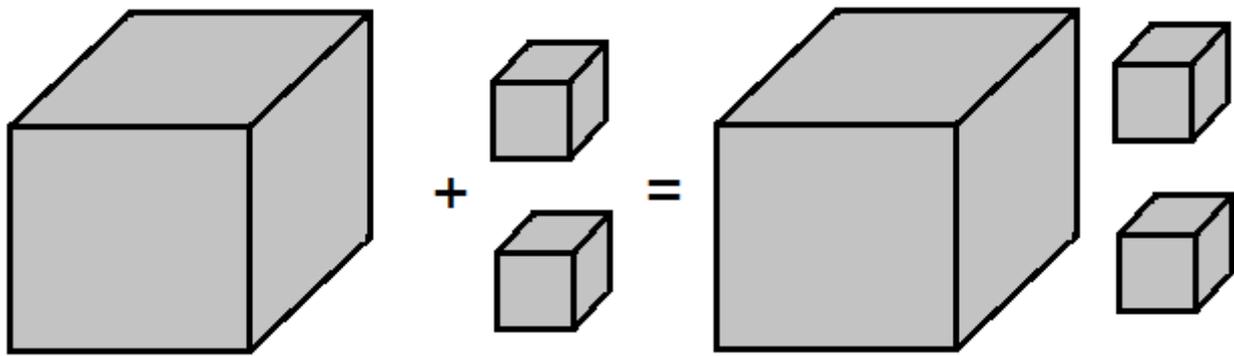


Figura 3.61: Operação geométrica de $P_3 + P_0$

Como os dois cubos de volume 1 não encaixam no cubo de volume x , a representação geométrica da soma $x^3 + 2$ será somente a disposição dos três prismas.

Exemplo 3.2.12. Sejam $P_3 = x^3$ e $P_1 = -x$ cujos graus são, respectivamente, 3 e 1. A representação geométrica da soma $P_3 + P_1$ é:

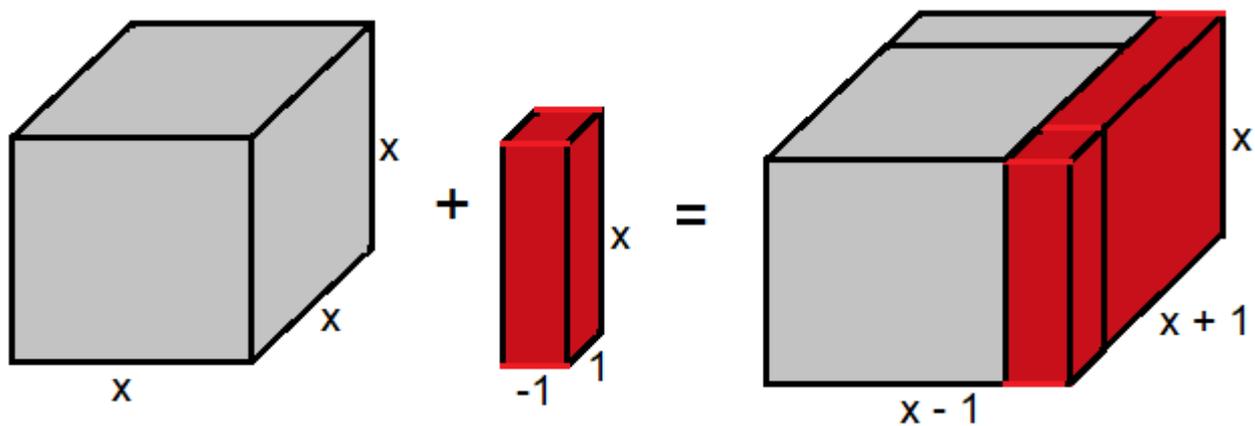


Figura 3.62: Operação geométrica de $P_3 + P_1$

A Figura 3.62 mostra a representação geométrica de $P_3 + P_1$ mesmo não sendo possível uma composição dos dois paralelepípedos da esquerda associados aos polinômios P_3 e P_1 . Para que a composição fosse possível, acrescentamos dois paralelepípedos associados aos polinômios x^2 e $-x^2$. A soma equivalente dos volumes é exatamente $P_3 + P_1$, pois $x^3 + (-x) + x^2 + (-x^2) = x^3 - x$. É possível, ainda, a partir do paralelepípedo resultante, encontrarmos uma simplificação da soma $P_3 + P_1$ calculando o volume total $(x - 1)(x + 1)x = P_3 + P_1$.

Exemplo 3.2.13. Sejam $P_3 = x^3$ e $P_2 = -2x^2$ cujos graus são, respectivamente, 3 e 2. A representação geométrica da soma $P_3 + P_2$ é:

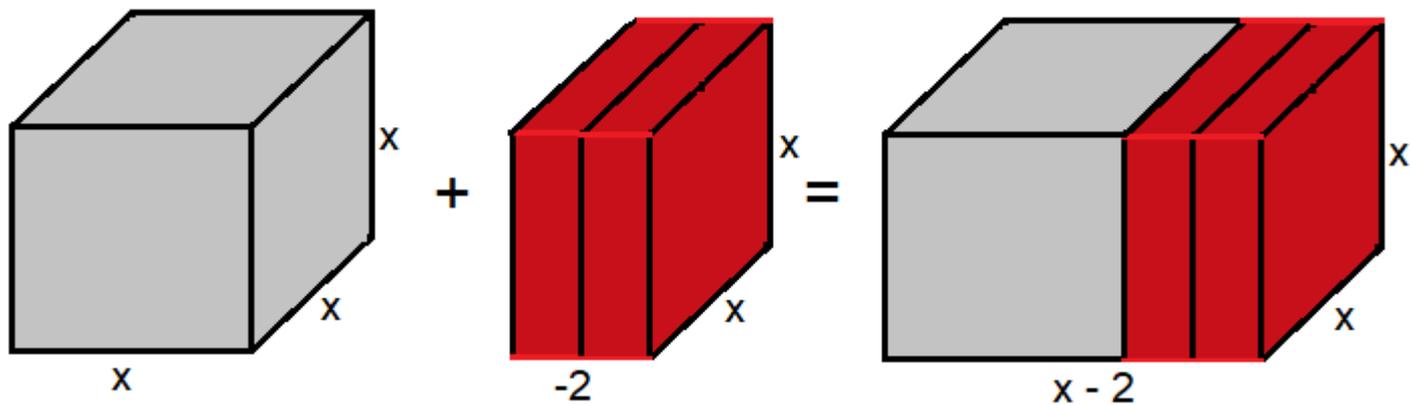


Figura 3.63: Operação geométrica de $P_3 + P_2$

A Figura 3.63 mostra a representação geométrica de $P_3 + P_2$, e ainda, uma maneira de simplificarmos a expressão ao realizar o cálculo do volume do paralelepípedo resultante. Portanto, $P_3 + P_2 = (x - 2)x^2$.

Exemplo 3.2.14. Sejam $P_2 = -x^2$ e $P_0 = 1$ cujos graus são, respectivamente, 2 e 0. A representação geométrica da soma $P_2 + P_0$ é:

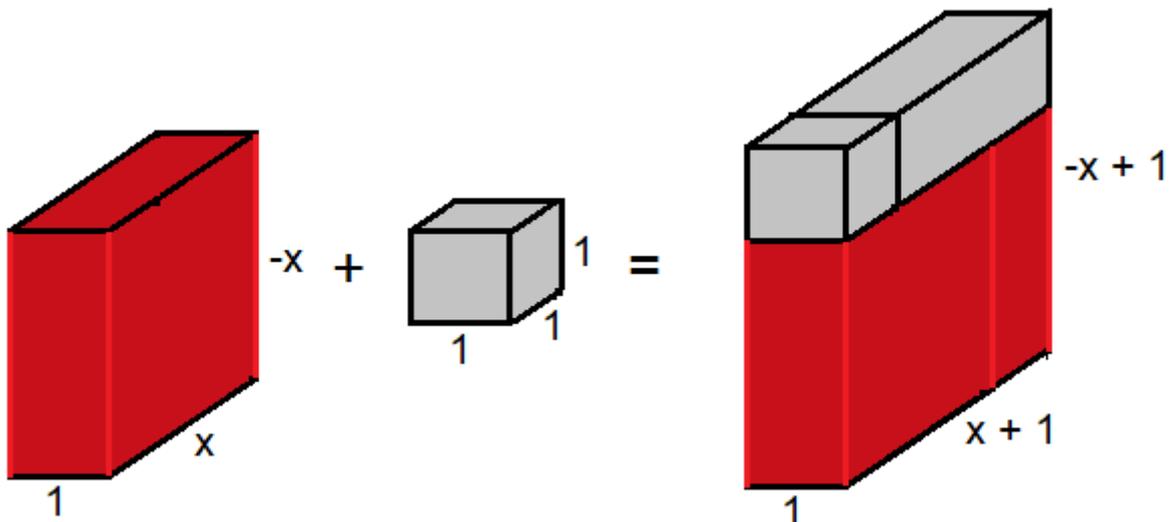


Figura 3.64: Operação geométrica de $P_2 + P_0$

A Figura 3.64 mostra a representação geométrica de $P_2 + P_0$, e assim como no exemplo anterior, uma maneira de simplificarmos a expressão ao realizar o cálculo do volume do paralelepípedo resultante. Portanto, $P_2 + P_0 = 1(x + 1)(-x + 1) = (1 + x)(1 - x)$.

Exemplo 3.2.15. Sejam $P_2 = 2x^2$ e $P_1 = x$ cujos graus são, respectivamente, 2 e 1. A representação geométrica da soma $P_2 + P_1$ é:

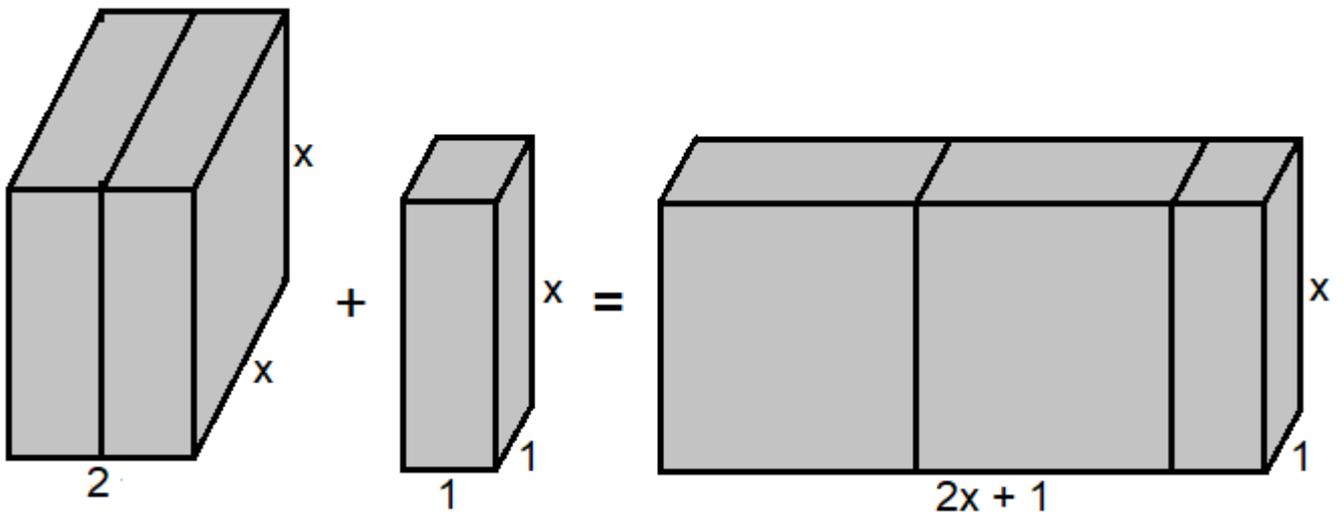


Figura 3.65: Operação geométrica de $P_2 + P_1$

Logo, a soma $P_2 + P_1 = 2x^2 + x = (2x + 1)x$ calculando o volume do prisma retangular reto resultante da Figura 3.65.

Exemplo 3.2.16. Sejam $P_1 = -3x$ e $P_0 = 2$ cujos graus são, respectivamente, 1 e 0. A representação geométrica da soma $P_1 + P_0$ é:

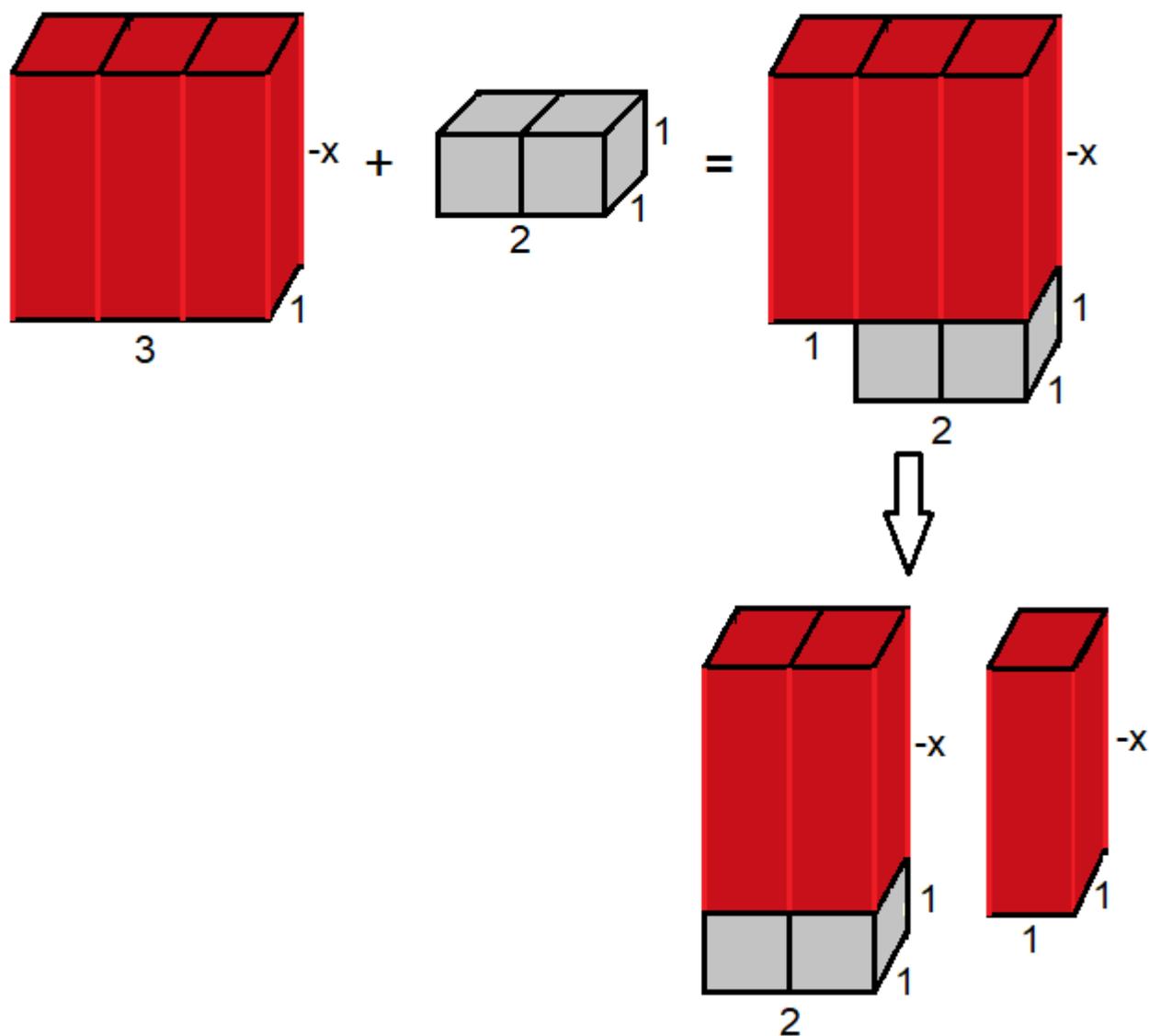


Figura 3.66: Operação geométrica de $P_1 + P_0$

Podemos observar, na Figura 3.66, que "sobra" uma peça vermelha de volume x associada ao polinômio $-x$. Logo, a soma $P_1 + P_0$ também pode ser escrita como $2(1 - x) + (-x) = 2(1 - x) - x$.

Vimos as possíveis somas entre polinômios de graus 0, 1, 2 e 3. Veremos, a seguir, as possíveis subtrações entre estes polinômios de grau no máximo 3.

3.2.2 Subtração de Polinômios de Grau Máximo 3

Seguindo o mesmo raciocínio da soma, ao trabalhar a operação subtração de maneira geométrica usaremos a composição de áreas de retângulos e/ou volumes de paralelepípedos. Para visualizar, sejam os monômios $M = x^3$ e $N = x^2$. Queremos representar geometricamente a subtração $M - N$, veja.

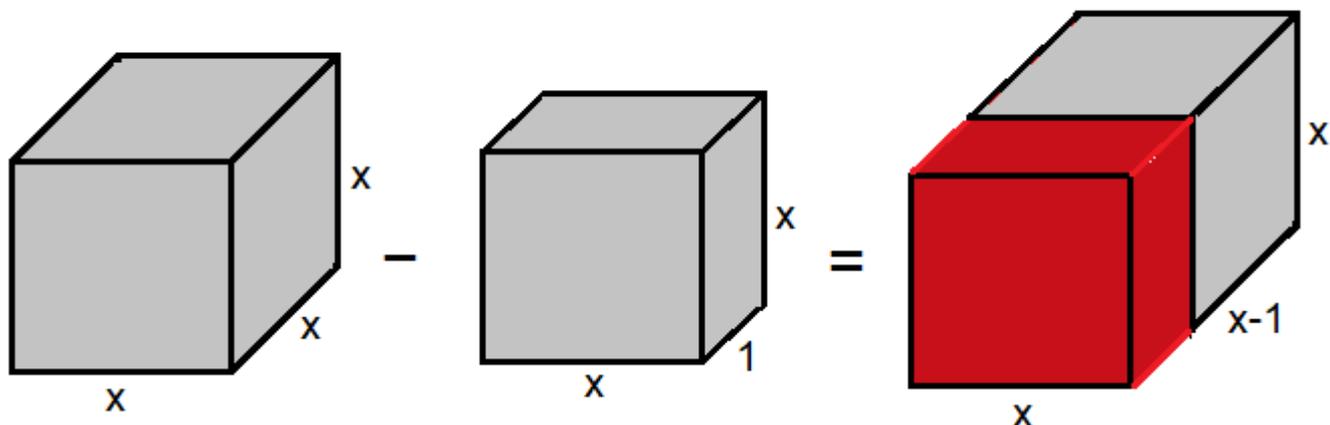


Figura 3.67: Operação geométrica de $M - N$

Temos que $M - N = x^3 - x^2 = x(x - 1)x = x^2(x - 1)$.

Assim como fizemos com a soma, traremos exemplos das subtrações possíveis entre polinômios de grau no máximo 3.

Exemplo 3.2.17. *Sejam os polinômios $P_3 = x^3$ e $P_0 = 1$ cujos graus são, respectivamente, 3 e 0. A representação geométrica da subtração $P_3 - P_0$ é:*

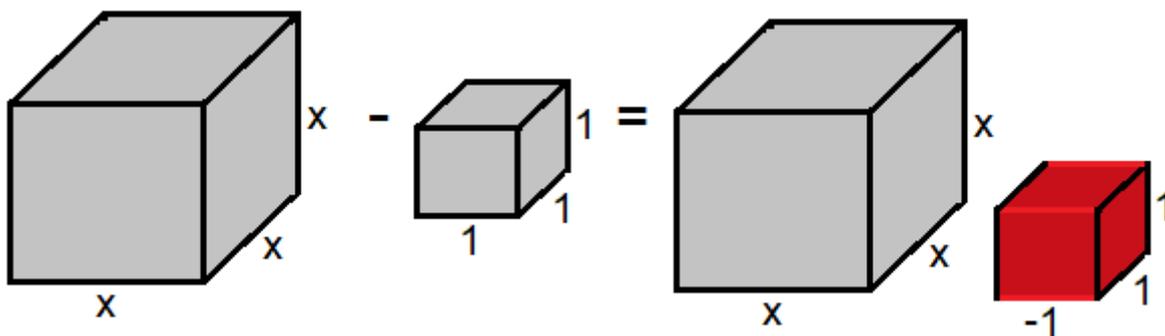


Figura 3.68: Operação geométrica de $P_3 - P_0$

Assim como na soma de polinômio de grau 3 com polinômio de grau 0, não foi possível encaixar os cubos de volume x e de volume 1. Logo, nesse caso, a representação geométrica se dará pela disposição dos dois prismas.

Exemplo 3.2.18. *Sejam os polinômios $P_3 = x^3$ e $P_1 = -2x$ cujos graus são, respectivamente, 3 e 1. A subtração $P_3 - P_1 = x^3 - (-2x) = x^3 + 2x$. Sua representação geométrica é:*

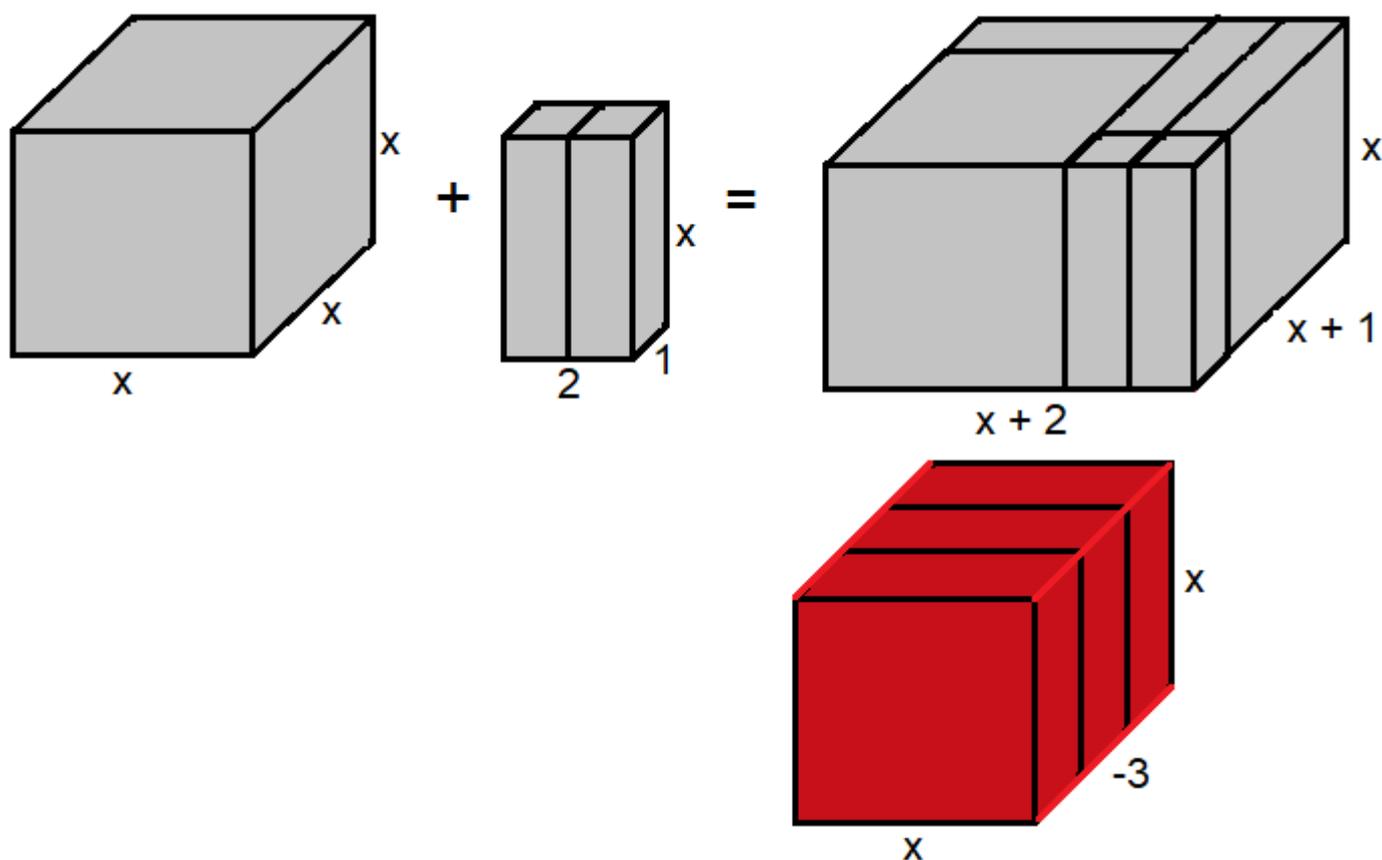


Figura 3.69: Operação geométrica de $P_3 - P_0$

Observe, na Figura 3.69, que para conseguirmos obter uma representação geométrica em forma de prisma retangular reto, tivemos que acrescentar 3 paralelepípedos de cor cinza associados ao polinômios x^2 . Para que o resultado da operação $P_3 - P_1$ não fosse alterado, acrescentamos, também, 3 paralelepípedos de cor vermelha associados ao polinômios $-x^2$. No entanto, esses últimos ficaram "sobrando" na construção do prisma. Logo, a subtração $P_3 - P_1$ pode ser escrita da forma $P_3 - P_1 = x(x + 2)(x + 1) + (-3x^2) = x(x + 2)(x + 1) - 3x^2$.

Exemplo 3.2.19. Sejam os polinômios $P_3 = -x^3$ e $P_2 = 2x^2$ cujos graus são, respectivamente, 3 e 2. A representação geométrica da subtração $P_3 - P_2$ é:

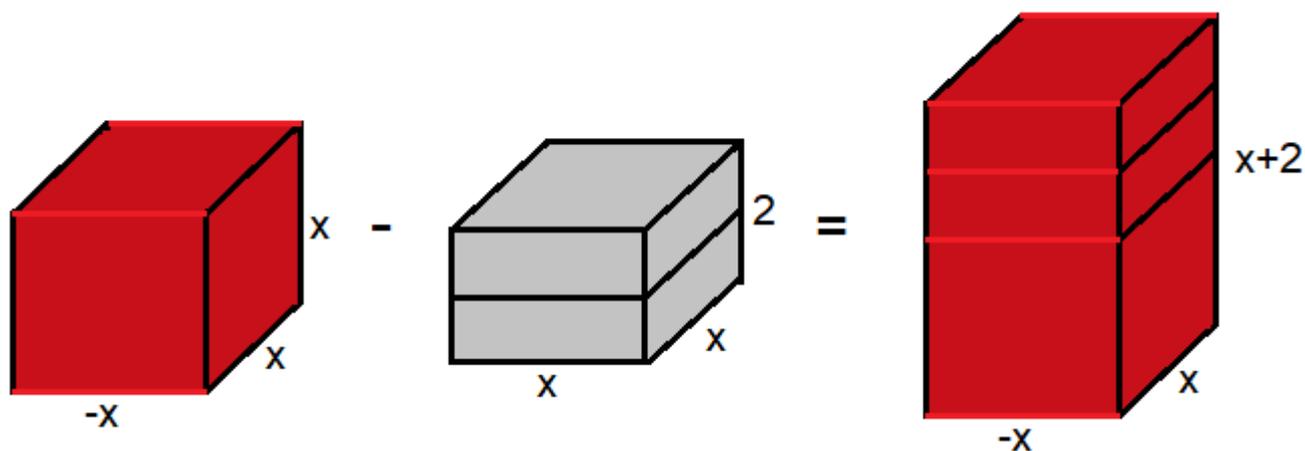


Figura 3.70: Operação geométrica de $P_3 - P_2$

Temos, portanto, que $P_3 - P_2 = -x^3 - 2x^2$, por isso o paralelepípedo resultante é completamente vermelho. Calculando seu volume total, podemos reescrever $P_3 - P_2 = (-x)x(x + 2) = -x^2(x + 2)$.

Exemplo 3.2.20. Sejam os polinômios $P_2 = -2x^2$ e $P_0 = 2$ cujos graus são, respectivamente, 2 e 0. A representação geométrica da subtração $P_2 - P_0$ é:

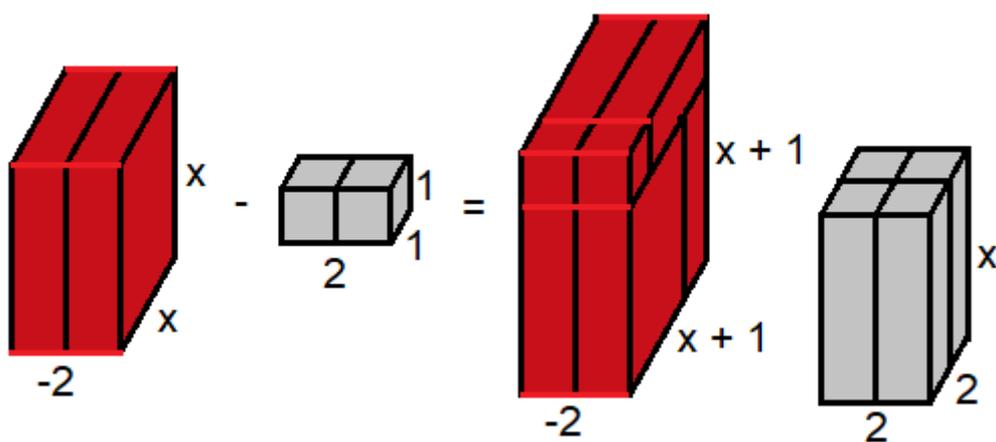


Figura 3.71: Operação geométrica de $P_2 - P_0$

Assim como já fizemos anteriormente, para que a subtração fosse representada geometricamente por um prisma retangular reto, acrescentamos 4 paralelepípedos de cor vermelha e 4 paralelepípedos de cor cinza associados, respectivamente aos polinômios $-x$ e x . Portanto, calculando o volume total do paralelepípedo resultante, temos $P_2 - P_0 = -2(x^2 + 1)$.

Exemplo 3.2.21. Sejam os polinômios $P_2 = x^2$ e $P_1 = 3x$ cujos graus são 2 e 1, respectivamente. A representação geométrica de $P_2 - P_1 = x^2 - 3x$ é:

Calculando o volume total do paralelepípedo resultante, temos que $P_2 - P_1$ pode ser escrito da forma $(x - 3)x$.

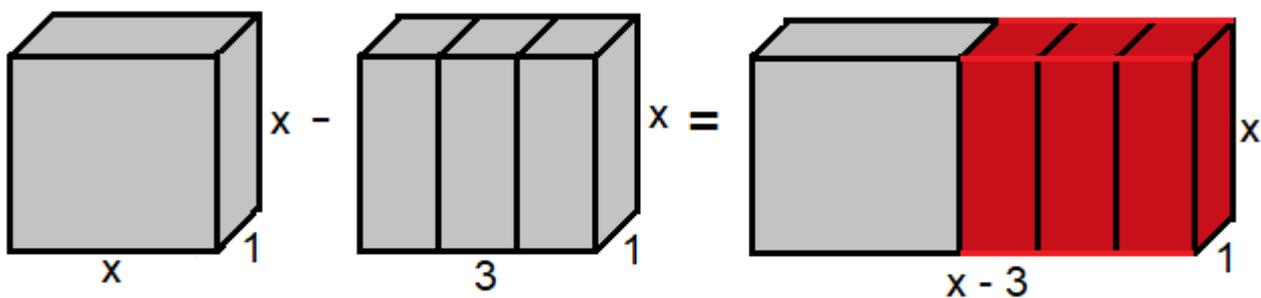


Figura 3.72: Operação geométrica de $P_2 - P_1$

Exemplo 3.2.22. *Sejam os polinômios $P_1 = -x$ e $P_0 = -2$, cujos graus são, respectivamente, 1 e 0. A subtração $P_1 - P_0 = -x - (-2) = -x + 2 = 2 - x$ pode ser representada geometricamente da forma*

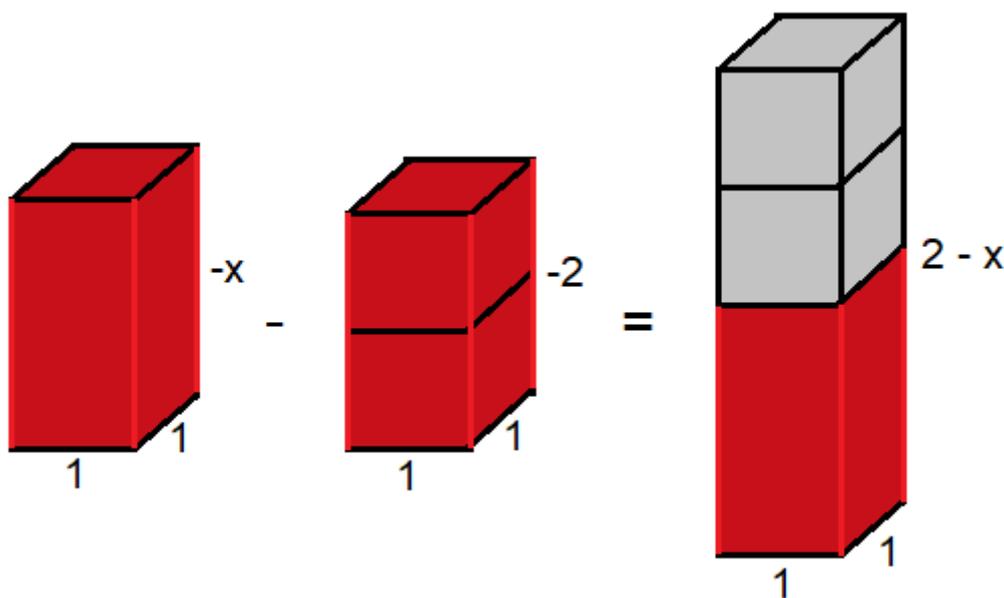


Figura 3.73: Operação geométrica de $P_1 - P_0$

De posse das representações geométricas da soma e da subtração expostas anteriormente, vejamos exemplos que combinam várias das possibilidades vistas:

Exemplo 3.2.23. *Sejam os polinômios $P = -x^3 + x^2 - 1$ e $Q = x - 1$. A soma $P + Q$ pode ser geometricamente representada pela Figura 3.74.*

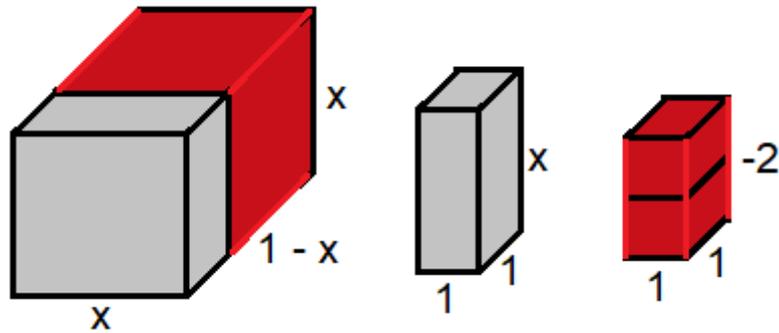


Figura 3.74: Operação geométrica de $P + Q$

Veja que o prisma associado à parcela x e o prisma associado à parcela -2 não encaixaram no paralelepípedo que representa a soma $P + Q$, logo, calculando o volume total temos $P + Q = x^2(1 - x) + x - 2$.

Vejamos, agora, a representação geométrica de $P - Q$ na Figura 3.75.

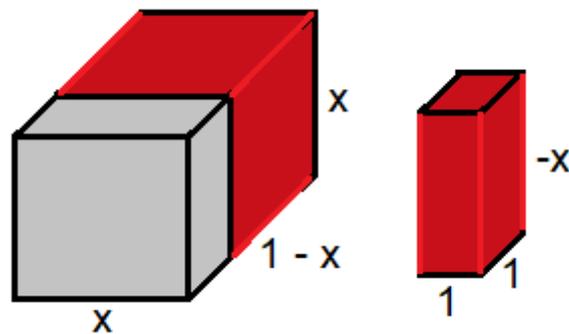


Figura 3.75: Operação geométrica de $P - Q$

Assim como na soma, o prisma associado à parcela $-x$ não encaixou no paralelepípedo resultante da subtração $P - Q$. Como $P - Q = -x^3 + x^2 - 1 - (x - 1) = -x^3 + x^2 - 1 - x + 1 = -x^3 + x^2 - x$, os cubos associados às parcelas 1 e -1 foram cancelados. Logo, $P - Q = x^2(1 - x) - x$.

Exemplo 3.2.24. Sejam os polinômios $P = 2x^3 - x$ e $Q = x^2 - x - 2$. A soma $P + Q$ pode ser representada pela Figura 3.76.

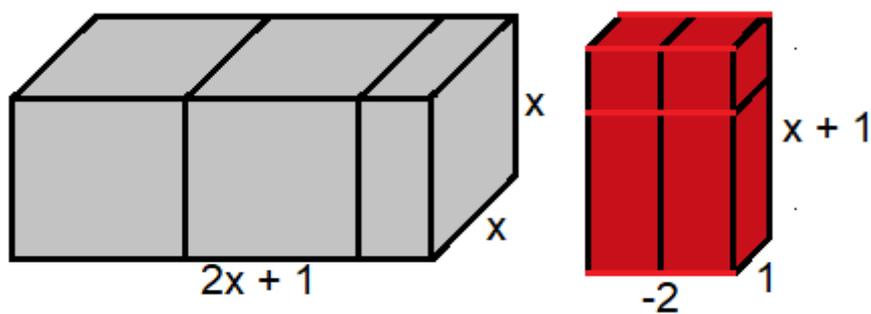


Figura 3.76: Operação geométrica de $P + Q$

Veja que não conseguimos formar um único paralelepípedo que represente $P + Q$, mas, calculando o volume total dos dois paralelepípedos formados conseguimos obter uma expressão para a soma $P + Q$. Logo, $P + Q = [x^2(2x + 1)] + [-2(x + 1)] = x^2(2x + 1) - 2(x + 1)$. Agora, observe a Figura 3.77 que representa geometricamente $P - Q$

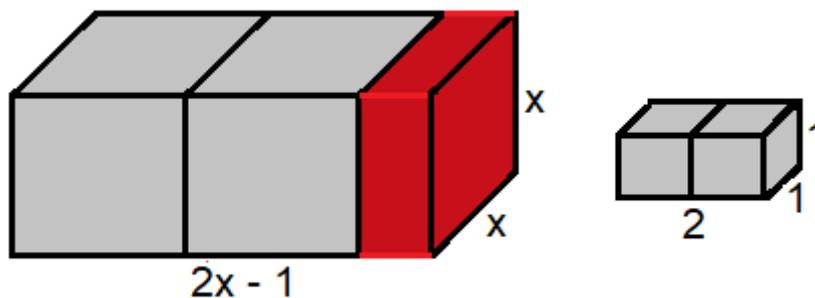


Figura 3.77: Operação geométrica de $P - Q$

Assim como na representação geométrica da soma $P + Q$, também não conseguimos montar por composição um único paralelepípedo que representasse $P - Q$, porém, calculando o volume total de cada prisma retangular reto construído, obtemos $P - Q = x^2(2x - 1) + 2$.

Vejamos, agora, as possíveis representações geométricas da multiplicação.

3.2.3 Multiplicação de Polinômios de Grau Máximo 3

A multiplicação será mais direta, visto que anteriormente, ao trabalharmos as representações geométricas dos polinômios e monômios, realizamos implicitamente diversas multiplicações. No entanto, passaremos a analisá-la de maneira mais direta. Tomemos, por exemplo, os polinômios $P = x + 1$ e $Q = x^2$. Queremos representar geometricamente PQ . Para isto, pensemos no cálculo algébrico do produto $PQ = x^2(x + 1) = x^3 + x^2$, logo, PQ pode ser representado por um paralelepípedo associado a um polinômio de grau 3 e um polinômio de grau 2. Veja na Figura 3.78.

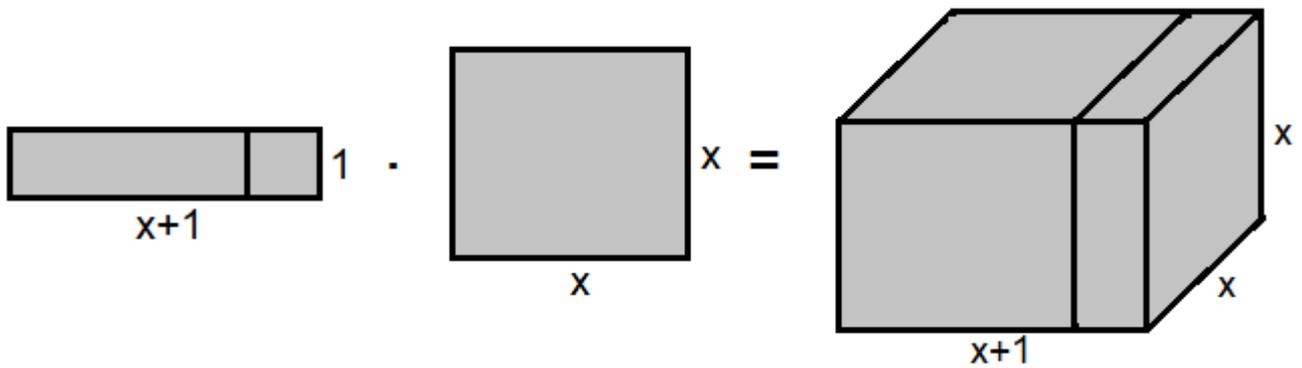


Figura 3.78: Operação geométrica de PQ

Analisando de maneira geométrica, o volume de um paralelepípedo, como vimos anteriormente, é dado pelo produto da área da sua base e a sua altura. Logo, para representar geometricamente uma multiplicação entre polinômios, podemos associá-los às três arestas de um paralelepípedo. Sendo assim, calculando o volume total do prisma resultante da Figura 64, temos $PQ = (x + 1)x^2 = x^3 + x^2$.

No caso da multiplicação entre polinômios, é importante ter atenção no grau resultante do produto. Como neste trabalho somente tratamos de polinômios de graus 0, 1, 2 e 3, representaremos geometricamente somente os produtos entre polinômios de graus 3 e 0, polinômios de graus 2 e 0, polinômios de graus 2 e 1, e, por fim, polinômios de graus 1 e 0. Vejamos exemplos que representem essas possibilidades apontadas.

Exemplo 3.2.25. *Sejam os polinômios $P_3 = x^3$ e $P_0 = 2$ cujos graus são, respectivamente, 3 e 0. Neste caso, P_3P_0 trata-se de um múltiplo de P_3 . Basta construirmos um prisma retangular reto composto por dois paralelepípedos associados ao polinômio x^3 . Veja a Figura 3.79.*

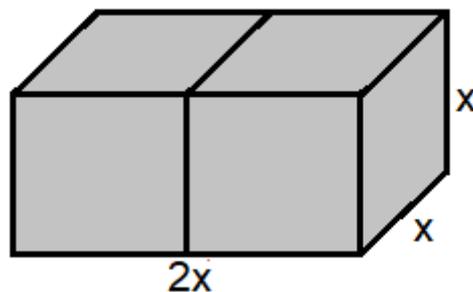


Figura 3.79: Operação geométrica de P_3P_0

Portanto, $P_3P_0 = 2x^3$.

Exemplo 3.2.26. *Sejam os polinômios $P_2 = -x^2$ e $P_0 = -2$ cujos graus são 2 e 0, respectivamente. Como ambos os polinômios são negativos, a multiplicação resultará num polinômio de sinal positivo.*

Assim como no exemplo anterior, P_2P_0 é um múltiplo de P_2 e esta mudança de sinal pode ser observada também na representação geométrica de P_2P_0 . Sendo este representado por um prisma retangular reto de cor cinza cujo volume é $2x^2 = P_2P_0$. Veja na Figura 3.80.

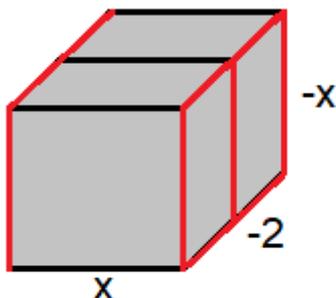


Figura 3.80: Operação geométrica de P_2P_0

Exemplo 3.2.27. Sejam os polinômios $P_2 = 2x^2$ e $P_1 = -x$ cujos graus são, respectivamente, 2 e 1. Associando os polinômios P_2 e P_1 às arestas de um paralelepípedo, temos que P_2P_1 será representado geometricamente da forma

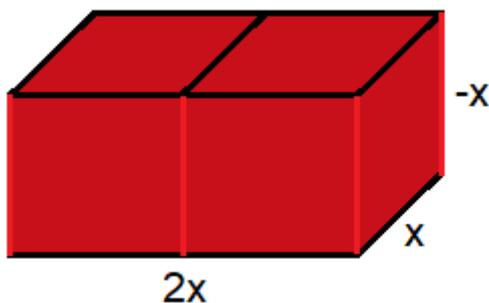


Figura 3.81: Operação geométrica de P_2P_1

Calculando o volume total do paralelepípedo da Figura 3.81, temos que $P_2P_1 = -2x^3$.

Exemplo 3.2.28. Sejam os polinômios $P_1 = -x$ e $P_0 = 3$ cujos graus são, respectivamente 1 e 0. P_1P_0 é um múltiplo de P_1 . Portanto, como visto anteriormente, sua representação geométrica é a da Figura 3.82.

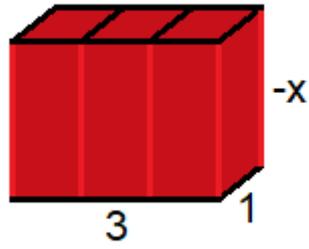


Figura 3.82: Operação geométrica de P_1P_0

Para que possamos efetuar geometricamente a divisão entre polinômios, introduziremos o "quebra-cabeça" desenvolvido para a realização da presente dissertação.

Até aqui já estamos dotados de conhecimento algébrico acerca dos polinômios, especialmente os de grau no máximo 3, bem como interpretá-los de maneira geométrica utilizando área de superfícies retangulares e volume de prismas retangulares retos. Dessa maneira, espera-se que o jogo apresentado a seguir seja de fácil compreensão.

Capítulo 4

Jogo "Monte seu prédio"

Nesse capítulo propomos efetuar divisão de polinômios de grau 3 por polinômios de graus 2 e 1, bem como divisão de polinômios de grau 2 por polinômios de grau 1, de forma lúdica utilizando o jogo "Monte seu prédio". Este conteúdo é ministrado na turma do 8º ano do ensino fundamental II, de acordo com o currículo oferecido pela BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Portanto, o jogo é sugerido para este público e com este fim: ensino das operações de multiplicação e divisão de polinômios nas turmas de 8º ano do ensino fundamental II.

Como já esclarecido anteriormente, a manipulação de objetos matemáticos facilita o aprendizado, por isso, o objetivo deste trabalho foi trazer uma maneira lúdica de concretizar e experienciar a matemática de modo que fosse fácil pôr em prática na sala de aula, mesmo num momento de aulas remotas e/ou híbridas, como estamos vivenciando. Uma sugestão é disponibilizar para os alunos as diversas planificações dos prismas retangulares que serão utilizados para que eles montem as peças e durante a aula planejada o jogo possa ser executado.

Trata-se de um quebra cabeça composto por peças que são paralelepípedos retos de dimensões diversas. Essas peças serão apresentadas nas cores: cinza, quando tratarmos de monômios com coeficientes positivos, e vermelho, quando tratarmos de monômios com coeficientes negativos.

4.1 Conhecendo as peças do jogo

A peça que representa a unidade positiva tem todas as medidas iguais à 1 unidade, isto é, altura, largura e comprimento medem 1 unidade. Já a peça que representa a unidade negativa tem todos os lados associados a -1 e as demais dimensões medindo 1. Veja as Figuras 4.1 e 4.2:

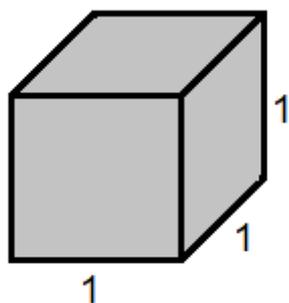


Figura 4.1: Peça cinza de volume 1 associada ao monômio 1

ou

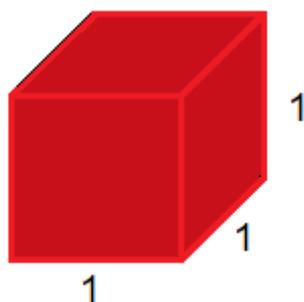


Figura 4.2: Peça vermelha de volume 1 associada ao monômio -1

A próxima peça terá as dimensões altura e largura com 1 unidade e comprimento com x unidades. Será cinza quando representar o monômio x e vermelha quando simbolizar $-x$. Veja as Figuras 4.3 e 4.4:

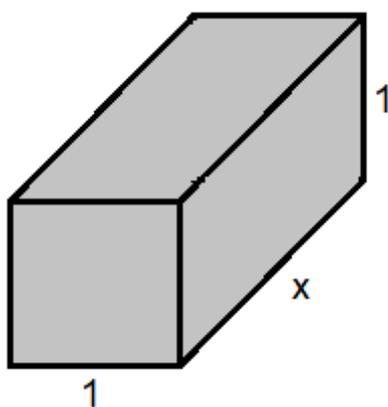


Figura 4.3: Peça cinza de volume x associada ao monômio x

ou

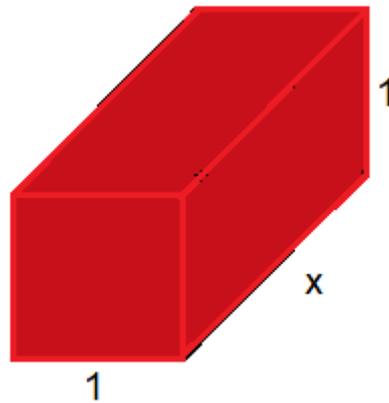


Figura 4.4: Peça vermelha de volume x associada ao monômio $-x$

É importante ressaltar que x não pode ser múltiplo da unidade para não causar confusão com o medida de "x" ao jogar.

A peça seguinte terá as dimensões altura e largura com x unidades e comprimento com 1 unidade, logo, seu volume é x^2 . Será cinza quando representar o monômio x^2 e vermelha para $-x^2$. Veja as Figuras 4.5 e 4.6:

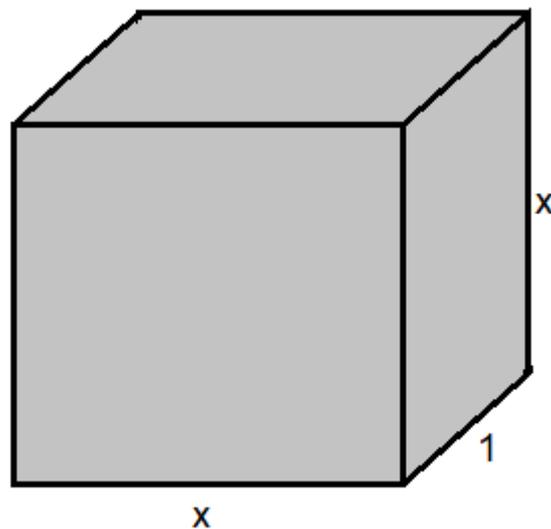


Figura 4.5: Peça cinza de volume x^2 associada ao monômio x^2

ou

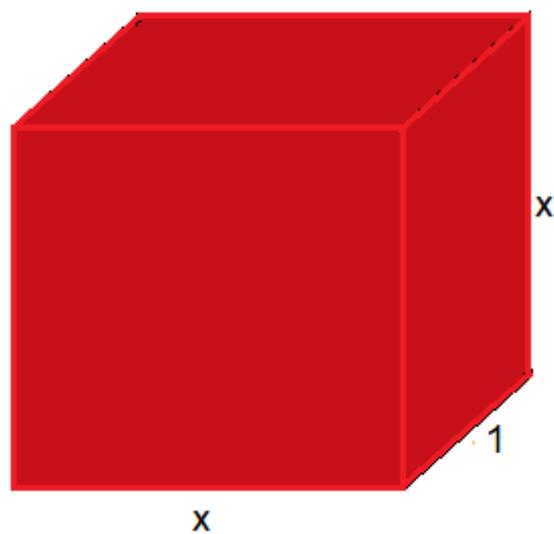


Figura 4.6: Peça vermelha de volume x^2 associada ao monômio $-x^2$

Por fim, a maior peça tem todas as medidas, altura, largura e comprimento, medindo x unidades. A peça será cinza quando representar o monômio x^3 e vermelha quando o monômio for $-x^3$:

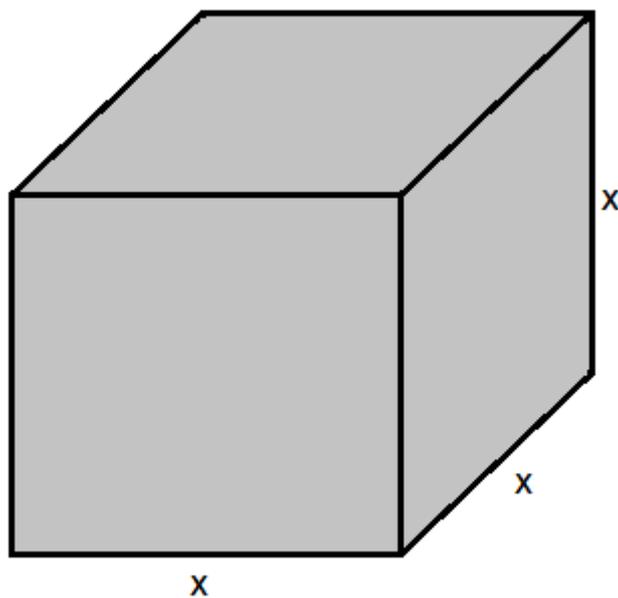


Figura 4.7: Peça cinza de volume x^3 associada ao monômio x^3

ou

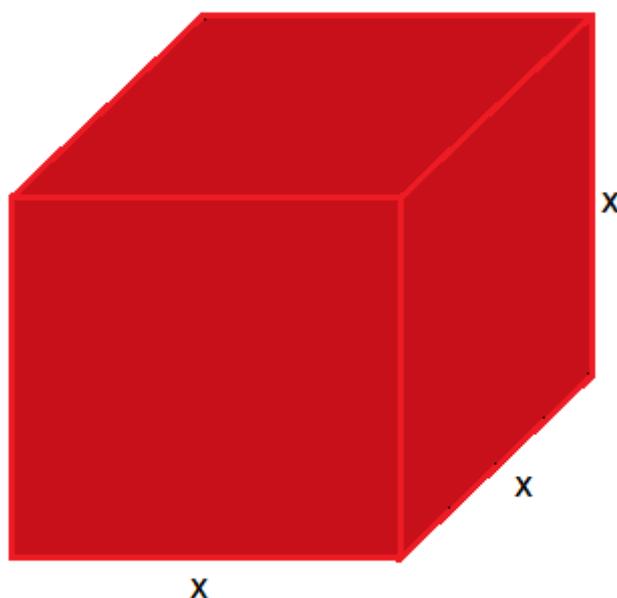


Figura 4.8: Peça vermelha de volume x^3 associada ao monômio $-x^3$

4.2 Condições sobre os polinômios para o jogo ser possível

Utilizando as peças apresentadas para efetuar as divisões por meio do jogo, há 3 casos possíveis a serem trabalhados, porém, devemos considerar algumas condições necessárias ao funcionamento do jogo "Monte seu prédio". Vejamos:

1. Divisão de polinômio de grau 2 por um polinômio de grau 1:

Seja a divisão $\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ entre polinômios de grau 2 e grau 1:

$$\begin{array}{r}
 ax^2 + bx + c \quad \left| \quad dx + e \right. \\
 \underline{-ax^2 - \frac{ae}{d}x} \qquad \frac{a}{d}x + \frac{b}{d} - \frac{ae}{d^2} \\
 (b - \frac{ae}{d})x + c \\
 \underline{(-b + \frac{ae}{d})x + \frac{ae^2}{d^2} - \frac{be}{d}} \\
 c + \frac{ae^2}{d^2} - \frac{be}{d}
 \end{array}$$

Como utilizaremos peças com medidas naturais, as condições necessárias para que seja possível utilizar o jogo são que $\frac{a}{d^2}, \frac{b}{d} \in \mathbb{N}$.

Para jogar, construiremos o prédio de modo que o volume total das peças utilizadas para

montar o quebra cabeça corresponderá ao polinômio do numerador e a altura do prédio corresponderá o mais próximo possível ao denominador, sendo assim, a área da base do prédio corresponderá ao quociente da divisão. As peças que sobraem serão o resto desta divisão.

2. Divisão de polinômio de grau 3 por um polinômio de grau 1:

Seja a divisão $\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{mx + n}$ entre polinômios de grau 3 e grau 1:

$$\begin{array}{r}
 ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \left| \quad mx + n \right. \\
 \underline{-ax^3 - \frac{an}{m}x^2} \qquad \qquad \frac{a}{m}x^2 + \left(\frac{b}{m} - \frac{an}{m^2}\right)x + \left(\frac{c}{m} - \frac{bn}{m^2} - \frac{an^2}{m^3}\right) \\
 (b - \frac{an}{m})x^2 + cx + d \\
 \underline{-(b - \frac{an}{m})x^2 + (-\frac{bn}{m} + \frac{an^2}{m^2})x} \\
 (c - \frac{bn}{m} + \frac{an^2}{m^2})x + d \\
 \underline{(-c + \frac{bn}{m} - \frac{an^2}{m^2})x - \frac{cn}{m} + \frac{bn^2}{m^2} + \frac{an^3}{m^3}} \\
 d - \frac{cn}{m} + \frac{bn^2}{m^2} + \frac{an^3}{m^3}
 \end{array}$$

Como utilizaremos um número inteiro de peças, as condições necessárias para que seja possível utilizar o jogo são que $\frac{a}{m^3}, \frac{b}{m^2}, \frac{c}{m} \in \mathbb{N}$.

Para jogar, construiremos o prédio de modo que o numerador corresponderá ao volume do prédio a ser construído, ou seja, corresponderá ao total de peças a serem utilizadas para montar o quebra cabeça; o denominador será a altura do prédio, sendo assim, a área da base do prédio corresponderá ao quociente da divisão. As peças que sobraem serão o resto desta divisão.

3. Divisão de polinômio de grau 3 por um polinômio de grau 2:

Seja a divisão $\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{mx^2 + nx + p}$ entre polinômios de grau 3 e grau 2:

$$\begin{array}{r}
 ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \left| \quad mx^2 + nx + p \right. \\
 \underline{-ax^3 - \frac{an}{m}x^2 - \frac{ap}{m}x} \qquad \qquad \frac{a}{m}x + \left(\frac{b}{m} - \frac{an}{m^2}\right) \\
 (b - \frac{an}{m})x^2 + (c - \frac{ap}{m})x + d \\
 \underline{-(b - \frac{an}{m})x^2 + (-\frac{bn}{m} + \frac{an^2}{m^2})x + (-\frac{bp}{m} + \frac{anp}{m^2})} \\
 (c - \frac{ap}{m} - \frac{bn}{m} + \frac{an^2}{m^2})x + d - \frac{bp}{m} - \frac{anp}{m^2}
 \end{array}$$

Como utilizaremos um número inteiro de peças, as condições necessárias para que seja possível utilizar o jogo são que $\frac{a}{m^2}, \frac{b}{m} \in \mathbb{N}$.

Para jogar, construiremos o prédio de modo que o numerador corresponderá ao volume do prédio a ser construído, ou seja, corresponderá ao total de peças a serem utilizadas para montar o quebra cabeça; o denominador será a base do prédio, sendo assim, a altura do prédio corresponderá ao quociente da divisão. As peças que sobrem serão o resto desta divisão.

O objetivo do jogo é, a partir de uma divisão de polinômios, construir um prédio com base, ou altura, determinada pelo denominador e volume o mais próximo possível do numerador. No caso de sobrem peças, estas serão o resto da divisão, observando que o total de peças, incluindo as que sobraram, será equivalente ao polinômio indicado pelo numerador da divisão.

Como visto anteriormente, o volume de um paralelepípedo é dado pela multiplicação da área da base pela altura, logo, para utilizar o quebra cabeça, seguiremos o seguinte raciocínio quando não há resto, ou seja, quando a divisão for exata:

$$\frac{V}{b} = h$$

ou

$$\frac{V}{h} = b$$

onde V é o polinômio que representa o volume do paralelepípedo, b o polinômio que representa a base e h o polinômio que representa a altura.

Quando a divisão for inexata, ou seja, quando houver resto (sobra de peças), o volume V do prisma será a soma das peças utilizadas na montagem do prédio com as peças que sobraram. Veremos a seguir como jogar de acordo com os três casos possíveis.

4.3 Divisão de polinômios de grau 2 por outro de grau 1

De posse das peças, começamos a efetuar a divisão de um polinômio de grau 2 por outro de grau 1 montando um prédio, que será um prisma retangular reto, de volume o mais próximo possível do numerador e cuja altura corresponderá ao polinômio do denominador da divisão. A resultado da divisão será a base do prédio a ser determinada no quebra-cabeça. Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 4.3.1. *Seja a divisão $\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$. Para representar o polinômio $V = x^2 + 4x + 3$, utilizaremos uma peça cinza de volume x^2 , quatro peças cinzas de volume x e três peças cinzas de volume unitário de modo que a altura do prédio a ser construído seja o polinômio do denominador $h = x + 1$. O único modo de dispor essas peças de modo que a altura seja $x + 1$ é o representado pela Figura 4.9. A área da base encontrada será o quociente da divisão. Veja a representação abaixo:*

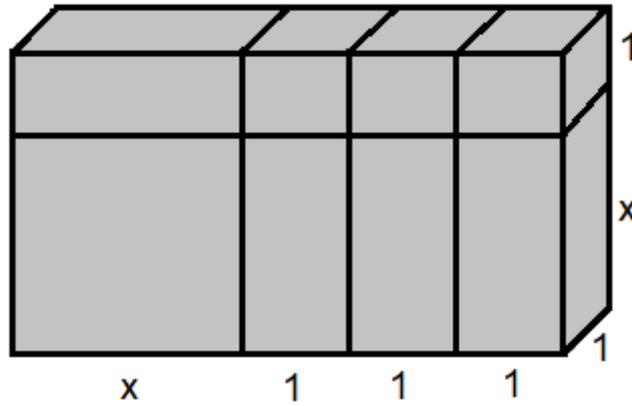


Figura 4.9: Prédio $\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$

O retângulo obtido na base é:



Figura 4.10: Base do Prédio $\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$

Temos, portanto, que a área da base encontrada é $x + 3$, logo, o resultado da divisão é $\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} = x + 3$.

Exemplo 4.3.2. Seja a divisão $\frac{x^2 + 3x}{x + 2}$. Queremos construir um prédio de altura $h = x + 2$ cujo total de peças utilizadas para a construção represente o numerador $V = x^2 + 3x$. Para isto, iniciaremos utilizando uma peça cinza de volume x^2 e três peças cinzas de volume x :

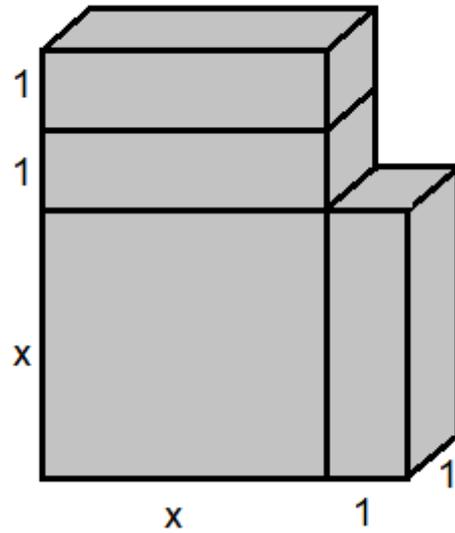


Figura 4.11: Prédio $\frac{x^2 + 3x}{x + 2}$

Contudo, não conseguimos construir um paralelepípedo reto. Para isto, devemos acrescentar duas peças cinzas de volume 1. E, para não interferir no volume total, também acrescentaremos duas peças vermelhas de volume 1:

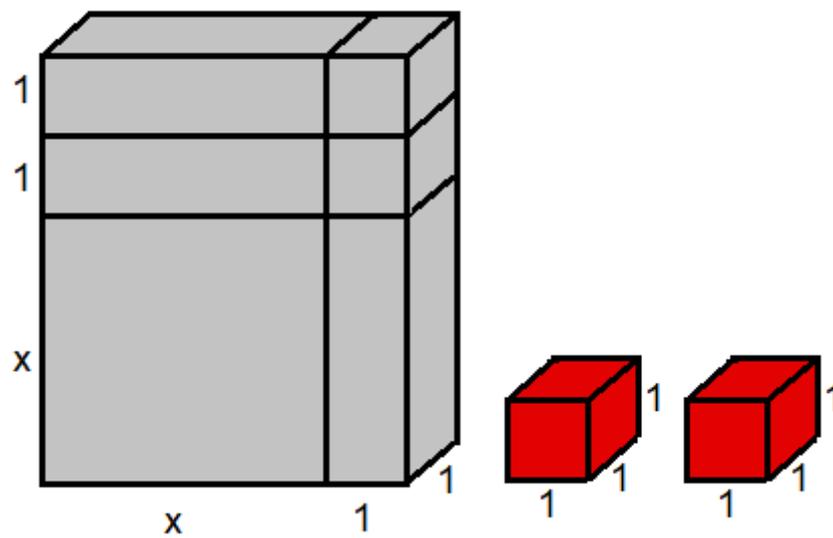


Figura 4.12: Prédio $\frac{x^2 + 3x}{x + 2}$

Desse modo, sobraram peças que representarão o resto da divisão. A base obtida na construção do prédio é:

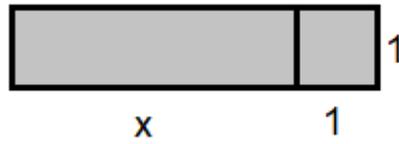


Figura 4.13: Base do Prédio $\frac{x^2 + 3x}{x + 2}$

cuja área mede $b = (x + 1) \cdot 1 = x + 1$. Portanto, $\frac{x^2 + 3x}{x + 2} = x + 1$ e sobra um resto igual à -2 .

Exemplo 4.3.3. Seja a divisão $\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$. Queremos construir um prédio de tal maneira que as peças utilizadas totalizem um volume igual ao numerador $x^2 + 4x + 4$ e a altura do prédio seja $x + 2$.

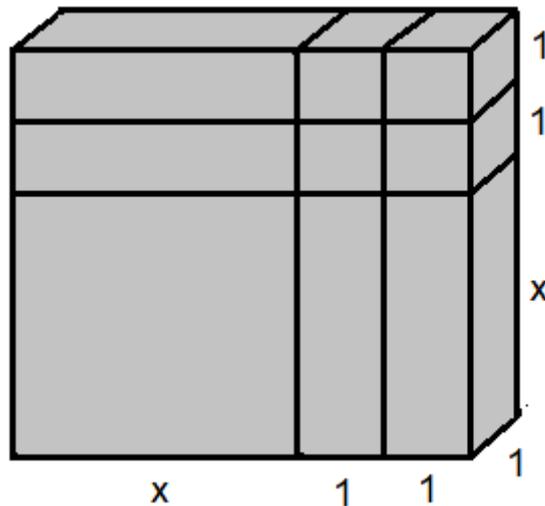


Figura 4.14: Prédio $\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$

Utilizamos, para a construção do prédio da Figura 4.14, uma peça cinza de volume x^2 , quatro peças cinzas de volume x e quatro peças cinzas de volume 1. A área da base encontrada é representada pela Figura 4.15:

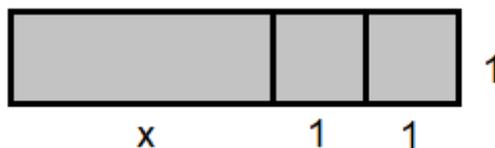


Figura 4.15: Base do prédio $\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$

Algebricamente representada por $(x + 2) \cdot 1 = x + 2$. Portanto, $\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = x + 2$.

Exemplo 4.3.4. Seja a divisão $\frac{x^2 + x - 2}{x + 3}$. Queremos construir um prédio utilizando um total de peças cujo volume seja igual ao polinômio do numerador e cuja altura seja $x + 3$. Para isto, serão necessários uma peça cinza de volume x^2 , três peças cinza de volume x (para que tenhamos altura $x + 3$), duas peças vermelha de volume x (para que cancelando com as peças de cor cinza obtenhamos um volume igual a x) e duas peças de cor vermelha de volume 1. Veja a Figura 4.16.

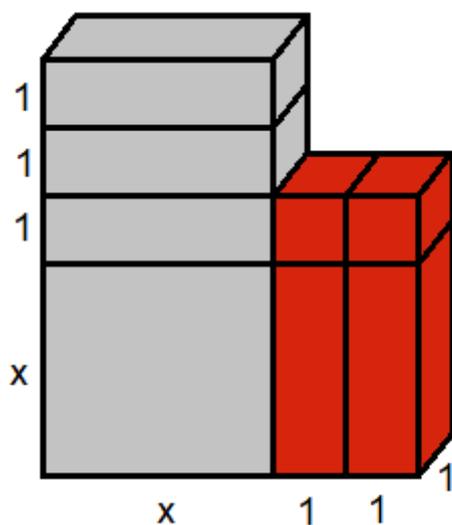


Figura 4.16: Prédio $\frac{x^2 + x - 2}{x + 3}$

Para que o prédio construído seja um prisma retangular reto, precisamos acrescentar quatro peças vermelhas de volume 1. Como não podemos interferir no volume total, também acrescentaremos quatro peças cinzas de volume 1. Observe na Figura 4.17.

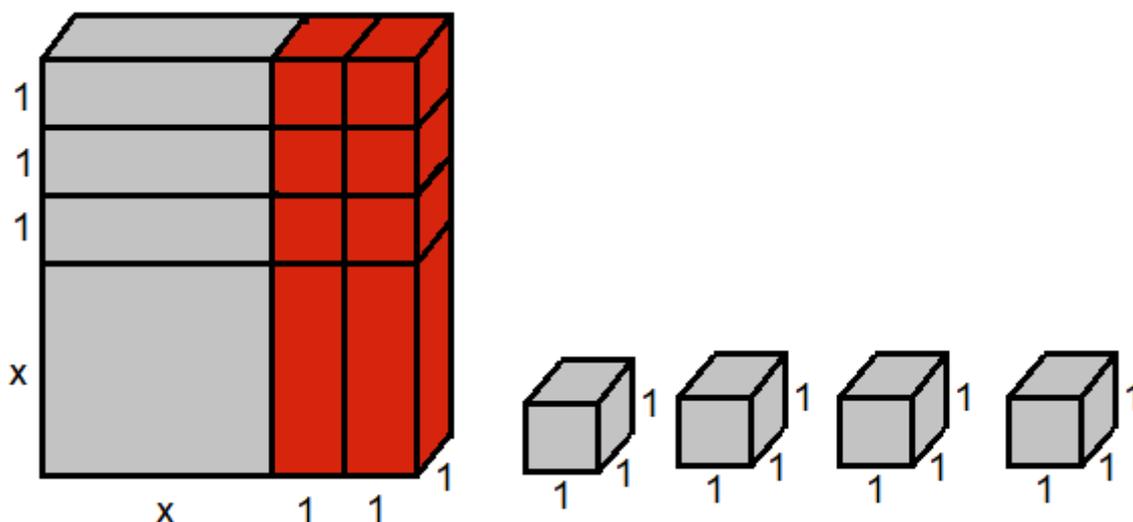


Figura 4.17: Prédio $\frac{x^2 + x - 2}{x + 3}$

Ao construir o prédio, a área da base encontrada é igual à $x - 2$, como representada pela Figura 4.18.



Figura 4.18: Base do Prédio $\frac{x^2 + x - 2}{x + 3}$

Como sobraram quatro peças de volume 1, temos que $\frac{x^2 + x - 2}{x + 3} = x - 2$ com resto igual à 4.

4.4 Divisão de polinômios de grau 3 por outro de grau 1

Na divisão de um polinômio de grau 3 por um polinômio de grau 1 montaremos um prédio cujo volume será o mais próximo possível do numerador e altura será o denominador da divisão. A base, que será determinada ao jogar, representará o quociente da divisão. Veja os exemplos.

Exemplo 4.4.1. Seja a divisão $\frac{x^3 + 2x^2}{x + 2}$. Queremos construir um prédio cujo total de peças seja o mais próximo possível do volume dado pelo polinômio $V = x^3 + 2x^2$ de modo que a altura seja representada pelo polinômio $h = x + 2$:

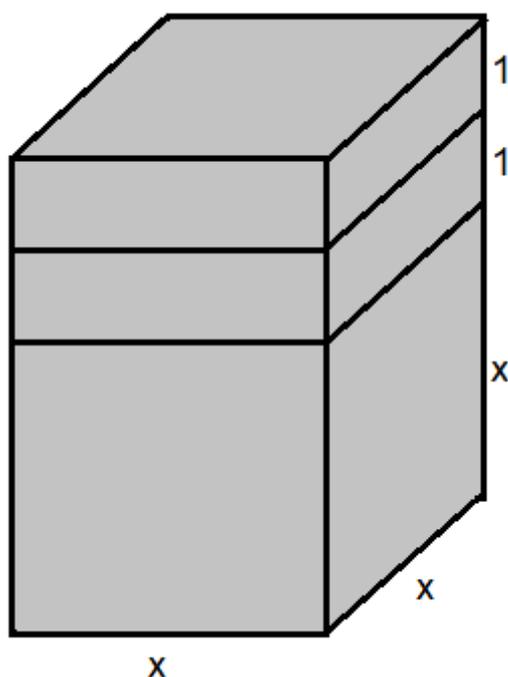


Figura 4.19: Prédio $\frac{x^3 + 2x^2}{x + 2}$

Para a construção do prédio da Figura 4.19 utilizamos uma peça cinza de volume igual à x^3 e duas peças de cor cinza de volume x^2 . Observe a Figura 4.20 que indica a área da base do prédio obtido:

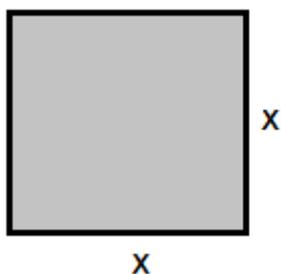


Figura 4.20: Base do Prédio $\frac{x^3 + 2x^2}{x + 2}$

Portanto, o quociente da divisão $\frac{x^3 + 2x^2}{x + 2}$ é x^2 .

Exemplo 4.4.2. Seja a divisão $\frac{x^3 + x^2}{x - 1}$. Queremos construir um prédio de altura $h = x - 1$ utilizando um total de peças que resultem num volume igual, ou mais próximo possível, ao numerador da divisão: $V = x^3 + x^2$. Para representá-lo, começaremos utilizando uma peça cinza de volume x^3 , uma peça vermelha de volume x^2 e duas peças cinzas de volume x^2 (uma delas irá cancelar com o $-x^2$) para que o prédio tenha a altura determinada. Veja na Figura 4.21.

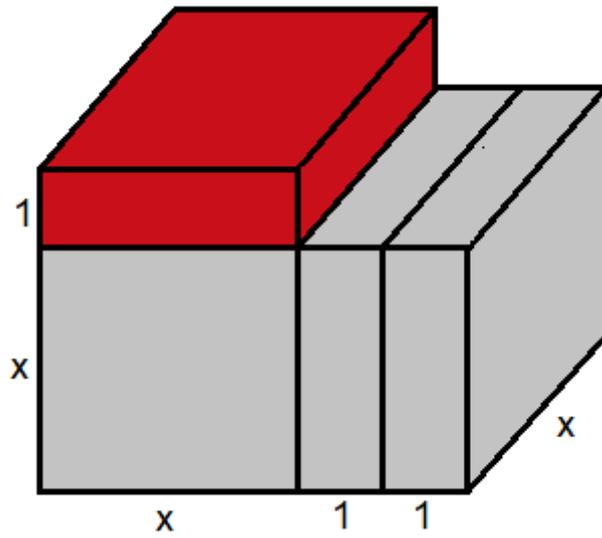


Figura 4.21: Prédio $\frac{x^3 + x^2}{x - 1}$

Observe que o prédio construído não está no formato de um prisma retangular. Para isto, acrescentaremos duas peças cinzas de volume x e duas peças vermelhas de volume x , assim não iremos interferir no volume total. Veja:

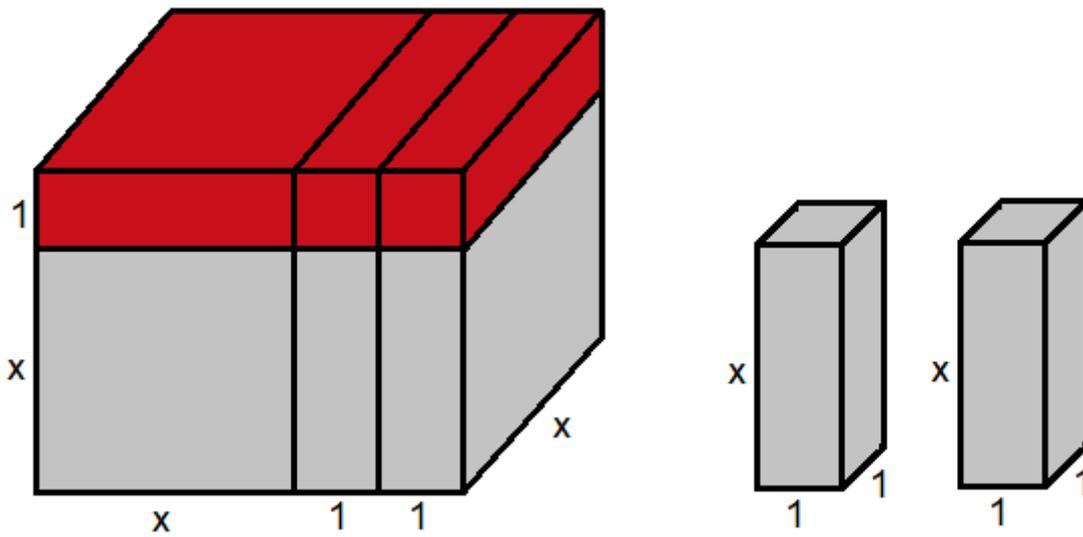


Figura 4.22: Prédio $\frac{x^3 + x^2}{x - 1}$

Cujo retângulo obtido na base do prédio é:

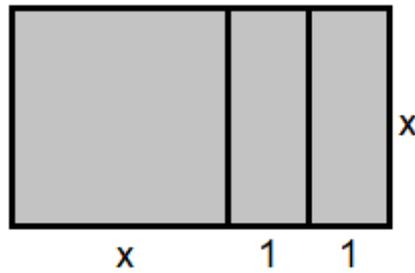


Figura 4.23: Base do prédio $\frac{x^3 + x^2}{x - 1}$

A área da base encontrada no prédio construído mede $x^2 + x + x = x^2 + 2x$. Como sobraram peças na construção do prédio, estas são o resto da divisão $\frac{x^3 + x^2}{x - 1}$. Portanto, $\frac{x^3 + x^2}{x - 1} = x^2 + 2x$ e sobra um resto igual à $2x$.

Exemplo 4.4.3. Seja a divisão $\frac{x^3 + x^2 + 1}{x + 1}$. Construiremos um prédio cujo volume seja o mais próximo possível do numerador $V = x^3 + x^2 + 1$. Para tanto, utilizaremos uma peça cinza de volume x^3 , uma peça cinza de volume x^2 e uma peça cinza de volume 1 de modo que a altura representada seja o denominador $h = x + 1$:

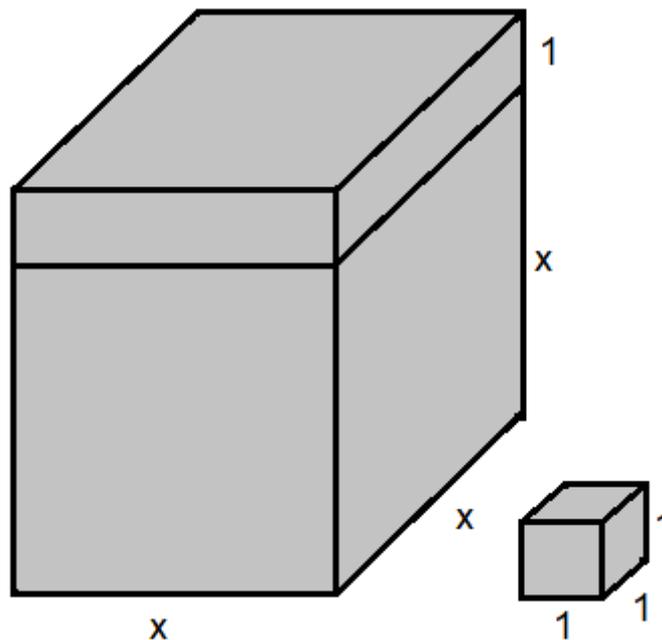


Figura 4.24: Prédio $\frac{x^3 + x^2 + 1}{x + 1}$

Como a peça de volume 1 não encaixa nas demais peças para que possamos construir o prédio da

Figura 4.24 - lembrando que o prédio deve ser sem formato de prisma retangular - representará, então, o resto da divisão. A base encontrada é $x \cdot x = x^2$. Veja na Figura 4.25:

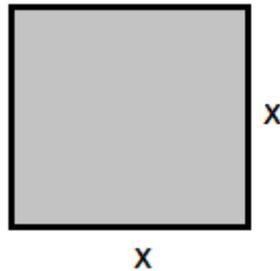


Figura 4.25: Base do prédio $\frac{x^3 + x^2 + 1}{x + 1}$

Portanto, $\frac{x^3 + x^2 + 1}{x + 1} = x^2$ e sobra resto igual à 1.

Exemplo 4.4.4. Seja a divisão $\frac{x^3 + 2x^2}{x - 1}$. O total de peças que podemos utilizar para montar o prédio deverá ter volume o mais próximo possível do numerador $x^3 + 2x^2$ de modo que a altura seja igual ao denominador $x - 1$. Para tanto, precisaremos de uma peça cinza de volume x^3 , uma peça vermelha de volume x^2 e três peças cinza de volume x^2 , pois uma delas irá cancelar com a peça vermelha de volume x^2 obtendo um volume total igual ao numerador $x^3 + 2x^2$. Veja na Figura 4.26:

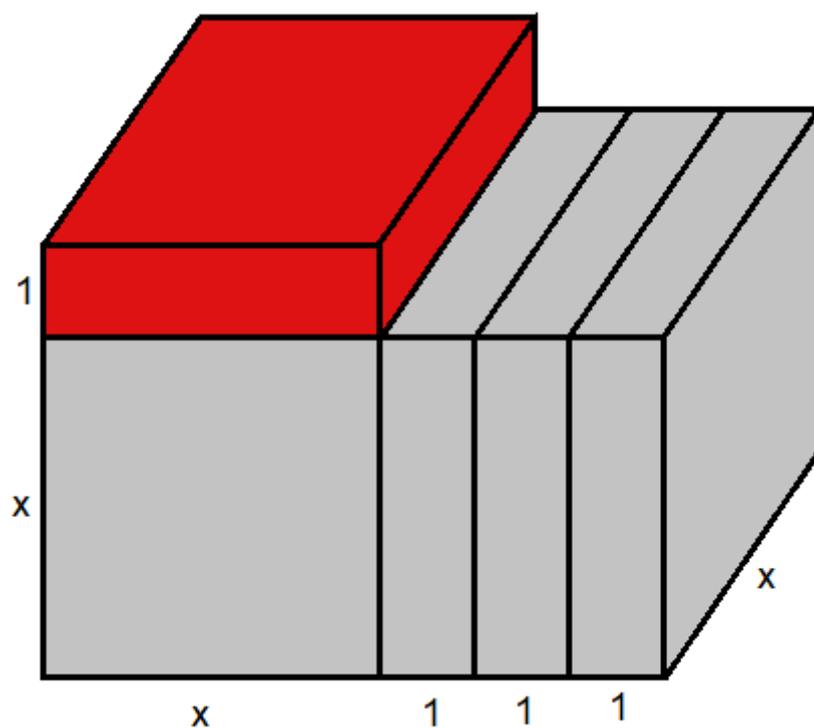


Figura 4.26: Prédio $\frac{x^3 + 2x^2}{x - 1}$

Entretanto, não obtivemos um prédio em formato de prisma retangular reto. Desse modo, acrescentaremos três peças de cor vermelha de volume igual à x . Para que estas peças acrescentadas não interfiram no volume total, devemos acrescentar também três peças de cor cinza de volume igual à x . Veja na Figura 4.27:

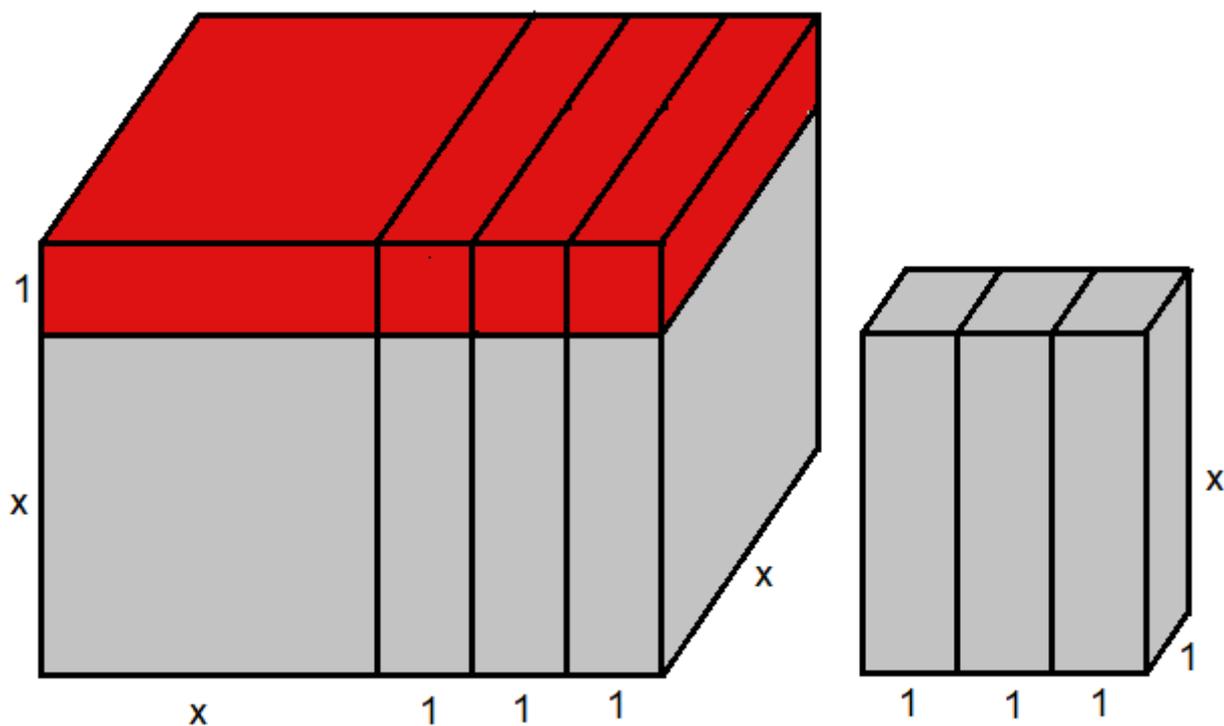


Figura 4.27: Prédio $\frac{x^3 + 2x^2}{x - 1}$

Temos, finalmente, uma prédio de volume igual ao numerador da divisão, $x^3 + 2x^2$, e de altura igual ao denominador, $x - 1$. A base encontrada é representada pela Figura 4.28:

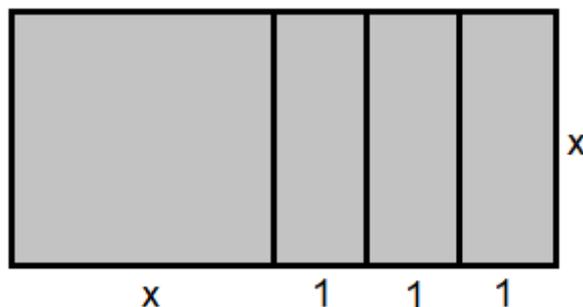


Figura 4.28: Base do Prédio $\frac{x^3 + 2x^2}{x - 1}$

Ou seja, a área da base encontrada é $x^2 + 3x$. Como sobraram três peças de cor cinza de volume igual à x , totalizando um volume de $3x$, temos que $\frac{x^3 + 2x^2}{x - 1} = x^2 + 3x$ sobrando um resto igual à $3x$.

Vimos até aqui que, dada a divisão, devemos observar o denominador: se o grau for 1, então precisaremos montar um prédio com altura igual ao polinômio do denominador tendo a base a ser determinada na solução do quebra cabeça.

4.5 Divisão de polinômios de grau 3 por outro de grau 2

Este caso será diferente dos anteriores, se dará de modo que o volume corresponderá ao numerador, a base corresponderá ao denominador e altura a ser determinada na resolução do quebra cabeça corresponderá ao quociene da divisão. Veja os exemplos.

Exemplo 4.5.1. Seja a divisão $\frac{-x^3 + x^2}{-x^2 + x}$. Queremos construir um prédio cujo volume represente o numerador $V = -x^3 + x^2$ e a área da base será $b = -x^2 + x$ que é o denominador da divisão. Começaremos pela construção da base. Veja a Figura 4.29:

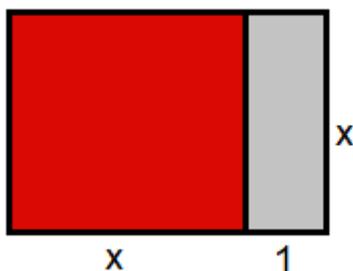


Figura 4.29: Base do prédio $\frac{-x^3 + x^2}{-x^2 + x}$

Para construir o prédio com peças que representem o polinômio do numerador da divisão, utilizaremos uma peça vermelha de volume x^3 e uma peça cinza de volume x^2 . Veja na Figura 4.30:

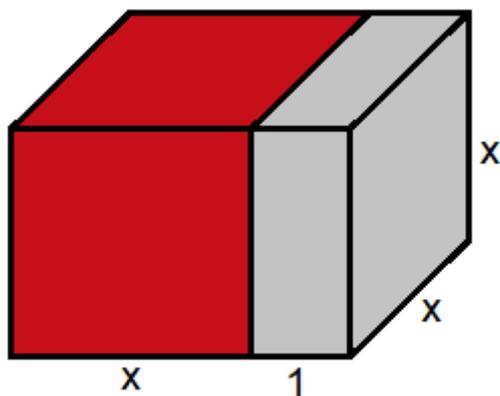


Figura 4.30: Prédio $\frac{-x^3 + x^2}{-x^2 + x}$

Como a altura encontrada é x , temos que o resultado da divisão $\frac{-x^3 + x^2}{-x^2 + x}$ é igual à x .

Exemplo 4.5.2. Seja a divisão $\frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$. Queremos construir um prédio utilizando peças que totalizem um volume igual à $x^3 + 2$ cuja área da base seja igual à $x^2 + 1$. Observe, na Figura 4.31, que não é possível que a base do prédio seja um retângulo de área $x^2 + 1$ sem o acréscimo de outras peças:

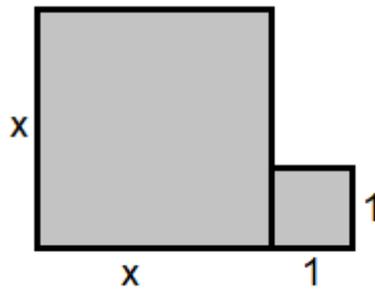


Figura 4.31

O prédio não seria um prisma retangular reto nessa situação. Então, acrescentaremos peças de cor cinza e vermelho para obter um retângulo como mostra a Figura 4.32:

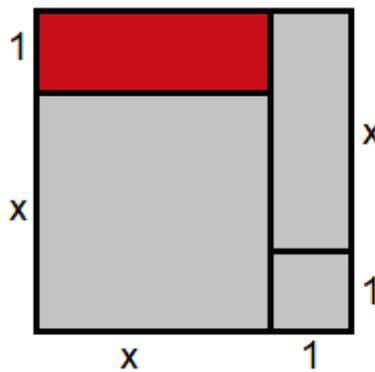


Figura 4.32: Base do Prédio $\frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$

A Figura 4.32 mostra como será a base do prédio. A altura deve ser pelo menos x , pois utilizaremos uma peça cinza de volume x^3 , uma peça cinza de volume x , uma peça cinza de volume x^2 e uma peça vermelha de volume x^2 na construção do prédio. Como o total de peças deve ser $x^3 + 2$ e já temos $x^3 + x^2 - x^2 + x$ nesse edifício, sobrar \grave{a} $-x + 2$ para chegar num volume indicado pelo numerador $x^3 + 2$ da divis \tilde{a} o:

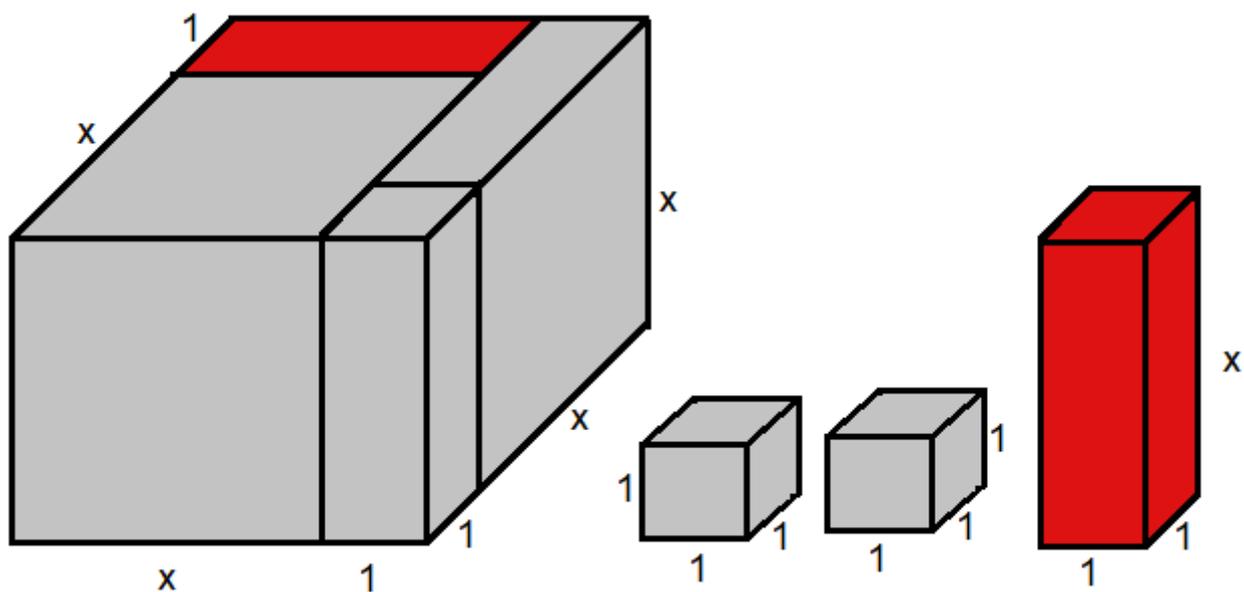


Figura 4.33: Prédio $\frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$

Como a altura encontrada do prédio construído é igual à x e sobram duas peças de cor cinza de volume 1 e uma peça vermelha de volume x . Temos que $\frac{x^3 + 2}{x^2 + 1} = x$ com resto $-x + 2$.

Espera-se que o jogo "Monte seu prédio" apresentado acima seja um facilitador do ensino e torne a aprendizagem significativa possibilitando ao aluno, bem como ao professor, manipular os abjetos matemáticos e integrar a Álgebra e a Geometria.

Capítulo 5

Considerações Finais

Esta dissertação objetivou restabelecer a relação entre Álgebra e Geometria no ensino de polinômios na educação básica por meio de materiais manipuláveis geometricamente. Sugerimos a utilização, na sala de aula, do quebra cabeça "Monte seu prédio" a fim de conseguirmos trabalhar polinômios, áreas de retângulos, volumes de prismas retangulares retos, bem como o raciocínio lógico, além de melhorar as habilidades da noção espacial, caso o professor compartilhe as planificações dos prismas com o intuito dos próprios alunos montarem as peças a serem utilizadas, como sugerido.

De acordo com Lorenzato:

Os conceitos evoluem com o processo de abstração; a abstração ocorre pela separação mental das propriedades inerentes a objetos (DAVIDOV, 1982, p. 332). Esse processo começa com o apoio dos nossos sentidos e, assim, ele é aparentemente paradoxal porque, para se chegar no abstrato, é preciso partir do concreto. (Lorenzato)

Tendo em vista não ser fácil caracterizar objetos sem antes os termos vistos, por exemplo, não há como caracterizar uma garrafa, uma caixa ou uma caneta sem ter, pelo menos, um prévio conhecimento visual acerca deles. Pensando nisso, trouxemos o jogo como uma maneira de visualizar a Álgebra e dar oportunidade aos alunos de obterem esse prévio conhecimento visual, possibilitando a absorção dos conhecimentos mediados pelo professor, em especial, os Polinômios. Portanto, com base no recorte acima, trabalhar com o jogo "Monte seu prédio" permite que os alunos manipulem a matemática por intermédio de materiais concretos, aguçando os sentidos por meio dessa manipulação e, finalmente, alcançando a abstração matemática, ou seja, compreendendo o conteúdo trabalhado em sala de aula. Segundo Moura,

O jogo na educação matemática parece justificar-se ao introduzir uma linguagem matemática que pouco a pouco será incorporada aos conceitos matemáticos formais, ao desenvolver a capacidade de lidar com informações e ao criar significados culturais para os conceitos matemáticos e o estudo de novos conteúdos. (MOURA, 1994, p. 24).

Desde a antiguidade problemas algébricos eram tratados como problemas de áreas retangulares e volumes de paralelepípedos. Logo, trazer essa visão relacionando as duas áreas da Matemática possibilita, inclusive, introduzir a História da Matemática em sala de aula. Expondo aos alunos o surgimento de elementos matemáticos, os porquês das formas e das suas funções, torna o aprendizado matemático objetivo e de maior compreensão.

Trazendo algumas experiências que tive em salas de aula do Ensino Fundamental Anos Finais, posso compartilhar o encantamento dos alunos ao, na introdução de determinado conteúdo, falar da História da Matemática: da interação da Matemática com a Filosofia, do surgimento dos números, da evolução da Matemática acompanhando a evolução das civilizações, a relação cultural que há com a Matemática, o impacto causado pelas Guerras no avanço das pesquisas Matemáticas, entre outros tantos exemplos.

Sendo assim, vemos cada vez mais a importância de relacionar os conteúdos matemáticos em sala de aula, concretizar a abstração natural que existe nas Ciências Exatas e tornar o aprendizado significativo, que é o objetivo de todo professor. Esperamos que o jogo "Monte seu prédio" seja mais uma boa ferramenta a ser utilizada em sala de aula e alcance o objetivo a que foi sugerido: permitir a associação da Álgebra e da Geometria, o aprendizado significativo e a manipulação do conteúdo trabalhado, os Polinômios.

Referências

- [1] BOYER, Carl B. **História da matemática**, 1968.
- [2] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.
- [3] DAVIDOV, V.V. (1982). Tipos de generalización en la enseñanza. 2. reimpressão. Ciudad de La Habana, Editorial Pueblo y Educación.
- [4] LAUNAY, Mickaël. **A fascinante história da matemática: da pré-história aos dias de hoje**, 2019.
- [5] LORENZATO, Sérgio. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**, 2012.
- [6] MALUTA, Thais Pariz. O Jogo nas Aulas de Matemática: Possibilidades e Limites. Orientador: Profa. Dra. Cármen Lúcia Brancaglioni Passos. 2007. TCC (Graduação) – Pedagogia, Departamento de Metodologia de Ensino, Universidade Federal de São Carlos. Disponível em URL: <<https://livrozilla.com/doc/854135/o-jogo-nas-aulas-de-matem%C3%A1tica-possibilidades-e-limites>>. Acesso em: 23 de Janeiro de 2021.
- [7] MOREIRA, Marco Antônio (1999). Aprendizagem significativa. Brasília: Editora Universidade de Brasília.
- [8] MOURA, M. O. A séria busca no jogo: do Lúdico na Matemática. Em: A Educação Matemática em Revista. São Paulo: SBEM– SP, 1994. 17-24 p.
- [9] SILVA, Jairo José da. **Filosofias da matemática**, 2007.