UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, PROFMAT

JEFFERSON CARRARO

RAZÃO ÁUREA COMO FACILITADOR NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO
2021

JEFFERSON CARRARO

RAZÃO ÁUREA COMO FACILITADOR NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Golden ratio as a facilitator in the teaching-learning process

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Profmat da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Orientador: Moisés Aparecido do Nascimento

PATO BRANCO
2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Pato Branco

JEFFERSON CARRARO

RAZÃO ÁUREA COMO FACILITADOR NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Profissional Em Matemática Para A Escola Básica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área deconcentração: Matemática.

Data de aprovação: 30 de Agosto de 2021

Prof Moises Aparecido Do Nascimento, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Jose Luciano Santinho Lima, Doutorado - Instituto Federal de São Paulo

Prof Romel Da Rosa Da Silva, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

À Deus, minha mãe Maria Romilda e minha filha Tainá.

AGRADECIMENTOS

Desejo agradecer inicialmente a Deus pelo dom da vida e saúde que me possibilitaram não desistir e percorrer essa árdua caminhada.

A Talita Cristina Moreira Moraes e nossa filha, amores e razões da minha vida, pelo incentivo, força, companheirismo, paciência, compreensão e apoio que formaram alicerce para a concretização desse sonho.

` À minha família pelas orações e apoio.

Ao Professor Dr. Moises Aparecido do Nascimento pelos ensinamentos, conselhos, paciência, incentivo e tempo dispensados à confecção desse trabalho.

Aos colegas pela amizade, troca de conhecimentos e apoio durante a jornada.

RESUMO

A busca por entender o processo de compreensão dos estudantes e os objetivos propostos pela Base Nacional Comum Curricular leva ao desafio de utilizar procedimentos didáticos que relacionem o cotidiano e os conceitos matemáticos, facilitando assim o processo de ensino-aprendizagem. O Número de Ouro e o fascínio que o cerca, representado neste trabalho por construções geométricas, pela sequência de Fibonacci, corpo humano, natureza e arte, pode ser um agente facilitador na absorção dos conteúdos por parte dos estudantes. Objetivou-se nesse trabalho, utilizando-se da Razão Áurea e sua constante presença na vida humana, apresentar duas sequências didáticas, que podem ser instrumentos extremamente relevantes para o processo de ensino-aprendizagem, tornando o saber matemático, que por conta de sua exatidão é mistificado como complexo, mais atrativo e de fácil entendimento e fixação por parte dos educandos durante sua vivência escolar. Após utilização das sequências propostas, o aluno deve ser capaz de relacionar os conceitos matemáticos estudados com o cotidiano.

Palavras chave: Ensino-Aprendizagem. Número de Ouro. Razão Áurea. Sequência Didática.

ABSTRACT

The search for conceptualizing and understanding the students' cognition process and the proposed objectives by Common Core National Standards (Base Nacional Comum Curricular – BNCC) leads to the challenge of using tools that relate the daily routine to mathematical concepts, thus, facilitating the teaching-learning process. The golden mean with the fascination which surrounds it, represented in this research by geometrical constructions, the Fibonacci sequence, the human body, the nature, and the art, can be a facilitator agent in the retention of contents by the students. This study which used the Golden Mean and its constant presence in the human life had as objective to present two didactic sequences that can be extremely relevant tools in the teaching-learning process, making the mathematical knowledge, which is mystified as complex due to its accuracy, more attractive through an easier understanding and better retention of the content by the students during their school lives. After using the proposed sequences, the student should be able to relate the mathematical concepts studied to everyday life.

Keywords: Teaching-learning. Golden mean. Golden Ratio. Didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática está presente em diversas situações do dia a dia e seus conceitos são essenciais no processo de formação do cidadão. Desde o início da civilização conceitos geométricos, processos de contagem e proporção, dentre outros, fazem parte da vida do homem.

Cada vez mais os recursos tecnológicos estão presentes na sociedade, recursos estes que tem como base a lógica matemática. Tais recursos não dispensam a necessidade de conhecimentos básicos de matemática, pelo contrário, ter propriedade de tais conceitos é essencial para inserção do indivíduo no mercado de trabalho e na realização de tarefas simples e rotineiras como ir ao mercado, plantar e colher alimentos ou simplesmente deslocar-se com segurança entre os milhares de carros e edificações que fazem parte da paisagem das cidades.

A Razão Áurea é considerada, por muitos que a estudam, símbolo de harmonia e perfeição, sendo atribuída a ela uma relação/condicionante para que algo possa ser considerado belo. Existem, da mesma maneira, alguns estudos que buscam desmitificar tais relações. Nesse trabalho nos ateremos aos estudos que buscam utilizar o Número de Ouro como agente participante da arquitetura, do crescimento de plantas e outras situações na natureza, bem como da sua presença em partes do corpo humano.

Relacionar teoria e prática, citar exemplos práticos e presentes na realidade dos alunos talvez seja a melhor maneira de despertar o prazer de aprender. O professor necessita alicerçar seu trabalho não somente na sala de aula, é essencial ter fortes estruturas de ligação entre o abstrato e o real, o imaginário e o visual, a teoria e a prática, permitindo que o aluno se envolva diretamente no processo de ensino-aprendizagem e relacione situações reais e “palpáveis” aos conceitos apresentados pelo docente.

Tal proporção, como agente facilitador e criador de interesse, é muito importante para o ensino de razão e proporção, noções de geometria, equações de 2º grau e sequências numéricas nos colégios de Ensino Médio. Partindo de conceitos geométricos e algébricos demonstrar como foi descoberto o Número de Ouro (ou razão áurea), relacionar a história, a arte, a natureza são maneiras de manter o interesse e incentivar a busca pela Razão Aurea e, consequentemente, obter melhores resultados no processo de ensino-aprendizagem.

Este trabalho motiva-se na necessidade em discutir o cotidiano dos alunos, na tentativa de entendê-lo e tornar o ensino mais atraente, de modo a facilitar o aprendizado. Relacionar os conteúdos apresentados a aplicações práticas é uma maneira interessante de tornar as aulas mais aprazíveis aos alunos e, consequentemente, facilitar o processo de aprendizagem significativa.

Para que a aprendizagem significativa aconteça, o material que deve ser estudado é o que Ausubel define como potencialmente significativo. Sendo assim, o material precisa ser relacionável, ou incorporável, à estrutura cognitiva do educando de maneira não arbitrária e não literal. Para Ausubel:

> *[...] a essência do processo de aprendizagem significativa é que ideias simbolicamente expressas sejam relacionadas de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária ao que o aprendiz já sabe, ou seja, a algum aspecto de sua estrutura cognitiva especificamente relevante para a aprendizagem dessas ideias. Este aspecto especificamente relevante pode ser, por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito, uma proposição já significativo. (AUSUBEL, citado por MOREIRA, 1999, p. 155).*

Considera-se neste trabalho como ensino tradicional de matemática àquele encontrado com grande frequência nas salas de aula, onde o professor limita-se a apresentar as fórmulas e procedimentos aos alunos e o processo de aprendizagem é baseado, quase que exclusivamente, na aplicação e repetição dos algoritmos anteriormente vistos. As necessidades contemporâneas não permitem mais que o ensino se limite a práticas apenas de sala de aula, progressivamente o ensino deve estar direcionado ao cotidiano, inserindo o aluno em um processo de construção com significado, envolvendo o discente, sob vários ângulos, com a realidade global para que no futuro ele seja capaz de analisar as situações com olhar crítico.

Com a infinidade de recursos e conhecimento que as mídias proporcionam, cada vez mais o homem se relaciona com o mundo que o cerca e gera a necessidade de conhecimentos matemáticos não apenas para compreensão de códigos, mas como condição de subsistência. Ao mesmo passo que a necessidade de adquirir conhecimentos se torna maior, as ferramentas e possibilidades de relacionar abstrato x concreto se multiplicam frente aos olhos e não podem mais ser ignoradas. Barbosa (1999, p. 30) faz um apontamento sobre os métodos tradicionais de ensino:

> *Eles são caracterizados por um sistema fechado e o processo de aquisição de conteúdos é visto como algo exterior ao indivíduo. A partir de então, esses métodos fazem uma análise racional dos seus elementos, partindo de aspectos simples para os complexos.*

O processo mecanizado relatado pelo autor é comumente encontrado nos ambientes escolares e preocupa-se apenas com a sequência de métodos, ou no caso da matemática em aplicação de fórmulas, sem considerar a real compreensão dos educandos e sua aplicabilidade na construção do mundo, conhecimentos e utilização na vida moderna. O conhecimento transmitido nas escolas carrega muitos significados e sua compreensão é base fundamental para uma aprendizagem expressiva por parte dos alunos.

Conforme define HOUAISS (2001), contexto é uma inter-relação de circunstâncias que acompanham uma situação ou fato e contextualizar tem o significado de colocar em contexto, interpor ou incluir em um texto, adicionar algo em um contexto.

Contextualizar os conteúdos é uma ferramenta pedagógica com grande potencial para melhora na aprendizagem da matemática, para que se obtenha sucesso, porém, é necessário que o conhecimento seja construído de maneira a ficarem evidente aos alunos os propósitos e utilização do que está sendo estudado.

Obviamente não se trata de tarefa fácil dar significado ao termo contexto quando falamos em matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCNs, enfatizam a necessidade de aceitar que a relação objeto e sujeito é ponto de partida para a contextualização dos conteúdos a serem ensinados.

> *A ideia de contextualização entrou em pauta com a reforma do ensino médio, a partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação, LDB, de 1996, que orienta para a compreensão dos conhecimentos de uso cotidiano. Tem origem nas diretrizes que estão definidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que são guias para orientar a escola e os professores na aplicação do novo modelo. De acordo com esses documentos, orienta-se para uma organização curricular que, entre outras coisas, trate os conteúdos de ensino de modo contextualizado, aproveitando sempre as relações entre conteúdos e contexto para dar significado ao aprendido, estimular o pratagonismo do aluno e estimulá-lo a ter autonomia intelectual. (MENEZES, 2002)*

Considerando toda a evolução que se espera da escola está cada vez mais evidente que processos repetitivos ou meramente mecânicos não atendem às necessidades dos educandos, sendo necessária uma pedagogia próxima do cotidiano, um ensino contextualizado.

> *A contextualização dos objetos matemáticos pode estimular os alunos para que se sintam motivados a aprender, principalmente quando envolve um contexto diferente do puramente matemático - tão enfatizado pela perspectiva formalista. Outro aspecto possibilitado pela contextualização consiste em saciar determinados questionamentos presentes no âmbito escolar, tais como: Por que é importante aprender isto? Em que situações cotidianas eu vou utilizar o que estou aprendendo? O que tem a ver isto que estou estudando em Matemática com a minha vida? (LUCCAS, 2010, p. 9)*

Os conteúdos matemáticos são considerados por grande parte dos alunos como o grande desafio do ambiente escolar, os problemas encontrados no processo de ensino-aprendizagem, durante a vida escolar, se acentuam com a dificuldade dos educandos em relacionar a teoria aprendida nas salas de aula ao seu cotidiano.

Nossas perguntas de pesquisa são:

- Os aspectos históricos e o fascínio causado pelo Número de Ouro podem despertar o interesse nos alunos?
- Como utilizar a Razão Áurea no ensino de razão e proporção, noções de geometria, equações de 2º grau e sequências numéricas nas escolas de Ensino Médio?

Nessa perspectiva, propõe-se um estudo sobre como a Razão Áurea pode ser aproveitada pelos professores na construção do conhecimento e como fator gerador de interesse aos alunos. O modo como é encontrada na arte, arquitetura, natureza, corpo humano e sua relação com a sequência de Fibonacci são elementos que podem ser utilizados para relacionar os conteúdos com elementos do cotidiano e tornar o aprendizado mais prazeroso e interessante aos educandos.

O Número de Ouro possui aplicação em diversas outras áreas e, consequentemente, possui uma enorme diversidade interdisciplinar sendo fácil relacioná-lo a diversas situações do dia a dia do aluno, além de ser considerado por muitos um símbolo de harmonia. Tais fatos aliados a sua relação com diversos conteúdos matemáticos levaram à sua escolha para realização desse estudo.

Conforme nos afirma Chaves (2013), existe a possibilidade de relacionar harmoniosamente Razão Áurea na natureza e na sala de aula:

> *A possibilidade da utilização harmoniosa das relações entre a matemática, a arte e a natureza, com objetivo de levantar conhecimentos, que envolvem de um lado a Razão Áurea na natureza e de outro, a Razão Áurea como conhecimento a ser desenvolvido no processo de ensino e aprendizagem da matemática.*

Mas de que maneira podemos utilizar a Razão Áurea? Qual a melhor maneira de introduzi-lo como agente facilitador no processo de ensino-aprendizagem? Com o intuito de encontrar respostas às perguntas postas visamos propor sequências didáticas para utilização do Número de Ouro.

A utilização de sequências didáticas implica na confecção de um conjunto de práticas pedagógicas interligadas, pensadas de maneira a ensinar determinados conceitos passo a passo. A aplicação desta metodologia permite ao docente acompanhar e orientar os educandos a explorar o conteúdo estudado de diversas maneiras. Dessa maneira, os discentes gradualmente vão adquirindo domínio sobre os conceitos apresentados, sendo capazes de assimilar os ensinamentos e construir o conhecimento sobre o conteúdo estudado.

2 O ENSINO

2.1 ENSINO-APRENDIZAGEM

A educação contemporânea deve pautar-se em um contexto de alfabetização onde a prática esteja direcionada de forma a garantir ao aluno assimilar de forma eficaz os conteúdos dados em sala de aula.

Logo, se faz necessário que o ensino e sua aprendizagem resultem da verdadeira compreensão. Envolver o aluno com a realidade onde vive, sob as mais variadas perspectivas, é de fundamental importância para que possamos criar um processo de construção de sentido possibilitando que no futuro o mesmo tenha a capacidade de usar de conceitos para construção de sua visão crítica de mundo.

A rede mundial de computadores e a tecnologia tornaram de fácil acesso muitos recursos interativos, o que acarreta num maior relacionamento do homem com o mundo que o cerca, tornando necessário a todas as pessoas a exigência de que o conhecimento não seja baseado simplesmente na decifração de códigos, mas como verdadeira condição para a sobrevivência e conquista da cidadania.

O processo de globalização que vivenciamos tem posto em cheque os métodos tradicionais de ensino. De forma crescente e há algum tempo o mercado de trabalho dos países mais desenvolvidos exigem mão de obra cada vez mais qualificada, o que implicava nos usos funcionais da leitura e escrita, que a alfabetização tradicional, pela sua natureza, não consegue alcançar de maneira satisfatória. Na verdade, educação tradicional concebida apenas no domínio de códigos, já não tem mais lugar quando se verifica a crescente necessidade de entendimento real nos meios e nas relações sociais.

É necessário ao professor adaptar-se aos variados assuntos para obter um resultado satisfatório. Segundo Marques (2013), expor aos alunos a construção matemática das diferentes civilizações ajuda os alunos a compreenderem novos conteúdos, procedimentos e conceitos matemáticos.

A utilização de aspectos históricos é uma alternativa para o ensino de conteúdos matemáticos, saber “De onde veio?”, “Por que foi criado?”, “Onde aplico esse conhecimento?”, podem ser respostas importantes não apenas para despertar o interesse do educando, mas também para facilitar o processo de ensino-aprendizagem. Os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN (Brasil, 2005) nos dizem que:

> *Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente dar respostas a alguns "porquês" e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento (Brasil, 2005).*

Ao permitir que o sujeito interprete, divirta-se, seduza, sistematize, confronte, induza, documente, informe, oriente-se, reivindique, e garanta a sua memória, o efetivo uso dos conteúdos garante-lhe uma condição diferenciada na sua relação com o mundo, um estado não necessariamente conquistado por aquele que apenas domina o código (SOARES,1998).

Essencialmente a evolução humana aconteceu por conta da curiosidade ou necessidade de resolver algum problema do cotidiano, a procura de alternativas que possibilitassem o alcance de objetivos e metas foi o combustível que levou o homem a desenvolver novos métodos de cultivo, de convivência social, de desenvolvimento de tecnologias e todos demais avanços da humanidade. Com a matemática não foi diferente, pois foi buscando solução para os problemas que o homem aprimorou e adquiriu conhecimentos, conforme afirma Sousa (2004).

O ensino tradicional de matemática, como definido anteriormente, não busca considerar a aplicabilidade e utilizar-se da relação abstrato x real nas práticas educacionais. Para D'Ambrósio (1989), o resultado desse método é criar nos alunos a crença de que a matemática não passa de um apanhado de fórmulas e algoritmos, consequentemente cria-se a cultura de que fazer matemática é simplesmente aplicar regras.

Buscamos desmitificar a matemática ou, minimamente, descontruir alguns pré-conceitos embutidos em nossos alunos nas fases iniciais da vida escolar. As aulas podem ser prazerosas, os conteúdos fáceis e claramente aplicáveis no cotidiano, para que o aluno veja a matemática com esse olhar são necessárias algumas mudanças e o principal agente dessa transformação é o professor.

O currículo escolar impõe aos professores o cumprimento de determinados conteúdos durante o ano letivo, a falta de planejamento, o número de aulas semanais de matemática, o grande número de alunos nas salas de aula, os aspectos culturais, entre outros fatores acabam por obrigar o docente a trabalhar muito superficialmente alguns conteúdos. O foco do professor acaba sendo o cumprimento da maior parte dos conteúdos programáticos e não que os alunos tenham o maior aproveitamento possível acerca dos conteúdos trabalhados (D'Ambrósio, 1989).

Sendo assim, o educador deve valer-se dos mais variados métodos em todas as áreas de ensino, pois é comum que os alunos não consigam concentrar-se numa atividade pelo tempo necessário para assimilar os conceitos. Logo, cabe ao professor aplicar as mais variadas metodologias para tornar a aula dinâmica, prendendo a atenção dos educandos, criando um maior nível de interesse e, consequentemente, melhor aproveitamento do conteúdo.

Obviamente o processo de ensino-aprendizagem não acontece somente dentro da sala de aula, os indivíduos estão em constante coleta de informações e experiências que, unidas aos conhecimentos apresentados no ambiente escolar, acabam por completar o desenvolvimento da cidadania. Conforme Libâneo (2002):

> *Um caminho bastante estimulante para a compreensão do fenômeno educativo é tomá-lo como ingrediente dos processos práticos - práxis - de relação ativa dos indivíduos com o meio natural e social, entendido esse meio como "culturalmente organizado".*

Ou seja, quanto mais o aluno observar no seu dia a dia situações onde possa aplicar os conhecimentos apresentados em sala de aula, ou circunstâncias onde visualize que foram utilizados os conceitos e conteúdos discutidos no ambiente escolar, mais fácil será a sua assimilação e, consequentemente, melhores serão os resultados obtidos pelo docente.

Diante dos avanços tecnológicos, o aluno da era da informação e tecnologia tem uma grande possibilidade de evoluir mais precocemente. Sob essa óptica é de fundamental importância ter conhecimento das características do educando, para saber quais são as potencialidades que estão sendo mais esquecidas e nas quais ele possui um maior nível de desenvolvimento, quais os problemas que esse desequilíbrio pode causar na formação do indivíduo e qual melhor maneira de estimulá-lo para o processo ensino-aprendizagem.

Considerando esse cenário, o educador tem enorme responsabilidade no que diz respeito a renovação das práticas escolares e, por consequência, na formação dos indivíduos, na medida em que é o professor que aprimora as metodologias educativas visando novas possibilidades de formação. Desse modo, o professor é o maior responsável pela evolução no processo de ensino-aprendizagem, sendo sua responsabilidade criar novas práticas didáticas que permitam aos educandos um nível melhor de aprendizado.

2.2 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A Base Nacional Comum Curricular, BNCC, é um documento que determina os conhecimentos essenciais que todos os alunos da Educação Básica, devem receber, a cada ano, não importando o local onde residam ou estudem se situados dentro do território nacional. Todos os currículos de todas as redes públicas e particulares do país deverão conter esses conteúdos.

O objetivo é definir os conhecimentos essenciais para todas as etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio) e tem caráter obrigatório. Busca-se diminuir as desigualdades de aprendizado, oportunizando a todos os alunos, independentemente de classe social ou região de residência, aprender o que é fundamental e essencialmente mínimo ao seu desenvolvimento como cidadão.

A BNCC é criada em um processo democrático e colaborativo, liderado pelo Ministério da Educação, MEC. Dentre os processos de criação é analisada por gestores, professores e alunos de todos os estados, em seminários organizados pelo Conselho Nacional de Secretários de Educação, Consed. Por fim, o Conselho Nacional de Educação, CNE, emite parecer e encaminha o documento para homologação.

No decorrer da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais, que devem fortalecer, no aspecto pedagógico, os direitos de desenvolvimento e aprendizagem.

Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Além do disposto na Constituição Federal de 1988, onde fica determinado que "a educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho", a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB, em seu artigo 26, relaciona o que é básico-comum e o que é diverso do seguinte modo:

> *Os currículos da Educação Infantil, do Ensino Fundamental e do Ensino Médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos.*

É importante percebermos a importância de serem elaboradas práticas pedagógicas que levem em consideração os interesses e possibilidades dos estudantes nas suas mais variadas identidades linguísticas, étnicas e culturais, pois o Brasil é um país caracterizado pela autonomia de suas Unidades Federativas, grande diversidade cultural e enormes desigualdades sociais.

Sendo assim, diferenças regionais, como cultura e aspectos de linguagem devem ser respeitados e cada município deve definir seu currículo. A BNCC trará o essencial que todos os currículos, de todas as redes, deverão ensinar. Cada rede poderá incluir, além do que determina a BNCC, os conhecimentos regionais que julgarem pertinentes.

Vale lembrar que a Base orienta os currículos com o que ensinar, ou seja, os conhecimentos e habilidades essenciais para todos os brasileiros O como ensinar fica a cargo de cada rede e cada unidade escolar. Assim, o direito a um aprendizado de qualidade para todos fica garantido, e as diversidades regionais e a autonomia do professor também.

Dentre as habilidades e competências o indivíduo deve ser capaz de compreender durante e após sua formação escolar é a ideia de razão entre as partes e delas com o todo, conforme determinado pela BNCC:

> *(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.*

Existem diversas maneiras e ferramentas para que os docentes consigam alcançar de modo satisfatório o processo de ensino-aprendizagem, obviamente que existe toda a diferença cultural e social que são comuns em um país de dimensões continentais como o Brasil. Pensando nisso, elementos visuais e experiências sensoriais devem ser incluídas nesse processo, buscando uma maior fixação dos conteúdos e interesse por parte dos alunos.

A Base Nacional Comum Curricular (2018) determina, dentre outras várias habilidades, que os alunos sejam capazes de resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade e grandezas em contextos socioculturais e ambientais, conforme segue:

> *(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.*

Considerando as disposições da BNCC e todas as dificuldades que fazem parte do processo de ensino-aprendizagem, é essencial que sejam utilizadas as mais variadas ferramentas para uma abordagem completa e satisfatória de todas as competências e habilidades que devem fazem parte da formação dos alunos. Sendo assim, os mais diversos conteúdos e conceitos serão fixados e relacionados as situações do cotidiano, passando a integrar a vida do aluno não só no período escolar, mas como meios de resoluções de problemas.

2.3 RAZÃO E PROPORÇÃO

Conforme determinado pelos PCNs (1997), levar o aluno a compreender e a transformar o mundo à sua volta, sendo capaz de estabelecer relações de quantidade e qualidade, comunicar-se matematicamente, solucionar situações-problema, estabelecer ligações de outros conteúdos com a matemática, autoconfiança e interação com seus colegas são alguns dos objetivos do ensino fundamental.

> *O ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico e favoreçam*

> *a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia, advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios (BRASIL, 1997, p. 26).*

Podemos considerar todos os temas matemáticos como importantes para a formação do cidadão, sendo que alguns podem ser destacados dos demais por sua abrangência e importância relação com situações reais e palpáveis, dentre eles encontra-se a razão e proporcionalidade. Realmente, esses conteúdos possuem um grande contexto prático, servindo de ligação entre os diversos campos da matemática e das outras áreas do conhecimento, auxiliando tanto na resolução de problemas no âmbito escolar como no cotidiano. Como afirmam Lesh, Post e Behr (1995):

> *O fato de muitos aspectos de nosso mundo funcionar de acordo com regras de proporcionalidade faz com que a faculdade de raciocinar com proporções seja extremamente útil na interpretação dos fenômenos do mundo real (LESH; POST; BEHR, 1995, p. 90).*

Tal tema constitui uma das bases da Matemática elementar, sendo essencial não só no momento escolar de seu aprendizado, mas durante toda a vivência de sala de aula relacionada a área de exatas. A forte relação com outras áreas de conhecimento e as contribuições no desenvolvimento cognitivo, acabam por definir os conteúdos de razão e proporção como um dos alicerces do ensino de Matemática.

O estudo de proporcionalidade tem contribuição significativa para a formação de estruturas cognitivas facilitando, assim, a compreensão de outros conceitos matemáticos. A proporcionalidade é muito presente no cotidiano das pessoas e permite várias aplicações e contextualização com situações reais (ao realizar a leitura de um gráfico, analisar alguma fonte estatística, verificar um mapa, ao calcular uma probabilidade, ampliar uma foto, etc.), não só em temas relacionados a Matemática mas de várias outras áreas do conhecimento como geografia, física, ou química, por exemplo.

Dada sua importância e abrangência, o problema não se resume em simplesmente ensinar razão e proporção, mas, especialmente, em como ensinar. Comumente, os conceitos de razões e proporções são apresentados aos alunos durante o ensino fundamental; porém, é necessário pensar como tem sido a abordagem pedagógica desse conteúdo tem sido realizada e a contribuição de forma efetiva para o seu aprendizado.

> *O conceito de proporcionalidade precisa ser ensinado e não pode limitar-se à transmissão de regras e algoritmos para serem memorizados. Daí a preocupação com o ensino de proporções visando oferecer condições para que o aluno vivencie experiências que o conduzam à formação mental do conceito de proporcionalidade e a partir disso estabelecer regras e fórmulas" (RUIZ e CARVALHO, 1990, p. 102).*

Ainda segundo Ruiz e Carvalho (1990), deve-se ter preocupação com possíveis inconvenientes ao basear o ensino de Matemática em algoritmos, pois se ao darmos demasiada importância às técnicas pode criar um grande número de pessoas desenvolvidas abaixo de seu próprio potencial. É de fundamental importância que a memorização seja substituída pelo entendimento do aluno, relacionando conteúdo e aplicações reais, de modo que a compreensão da importância dos conceitos seja a base e o objetivo do docente.

3 A RAZÃO ÁUREA

3.1 CONTEXTO HISTÓRICO

A Razão Áurea, também conhecida como Proporção Áurea, Seção Áurea, Número de Ouro, Número Áureo, Proporção Divina, Razão de Ouro, Média e Extrema Razão, Proporção em Extrema Razão, Divisão de Extrema Razão ou Proporção de Ouro, está presente em quase tudo que nos cerca e pode ser observada nas medidas do corpo humano, edificações antigas, obras de arte, botânica, entre outras situações e é vista por muitos matemáticos, pintores e arquitetos como sinônimo de beleza e harmonia. Por sua presença constante no cotidiano dos educandos, pelos mistérios que o cercam e o fascínio que provoca naqueles que trabalham com ele é ferramenta importante a ser utilizada pelos professores.

Muitos estudiosos da antiguidade se apropriaram intensamente acerca dos estudos dessa razão, suas propriedades e aplicabilidade. Dentre eles pode-se citar Euclides, Pitágoras, Leonardo de Pisa também conhecido como Fibonacci e Johannes Kepler, que se encantaram com sua harmonia, através da busca constante pela proporção perfeita, dando uma qualidade estética agradável às obras dos artistas, ao som dos acordes dos músicos e à beleza do corpo.

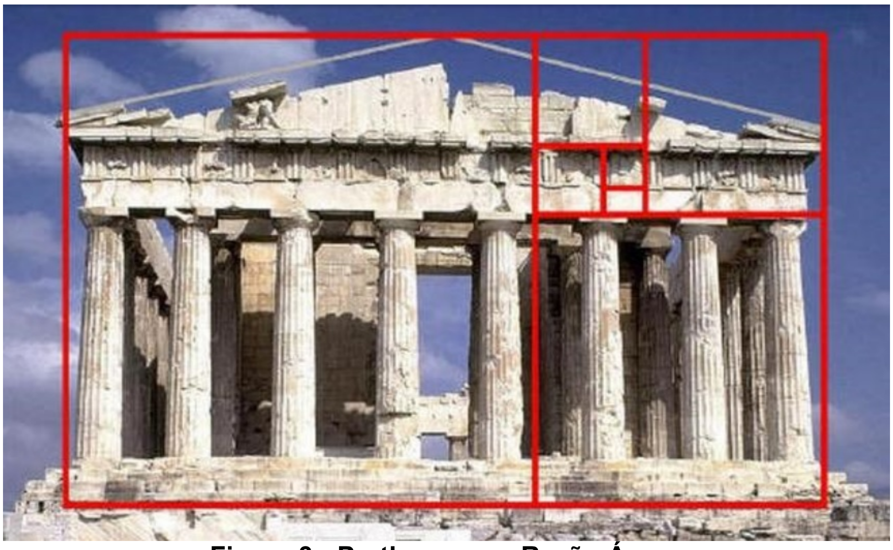

Figura 3 - Parthenon e a Razão Áurea
Fonte: Matemática e estatística (2016)

Trata-se de um número irracional representado pela letra grega Φ (Phi maiúsculo). Segundo Belini (2015), a letra Φ começou a ser usada para representar o Número de Ouro somente no século XX, pelo matemático Mark Barr, que recebeu esse nome em homenagem a *Fídias*, famoso arquiteto e escultor grego que viveu em Atenas e foi o responsável pela construção e ornamentação do Parthenon. Para que a obra, projetada em homenagem a Deusa Atena, fosse considerada bela e harmônica *Fídias* utilizou-se de uma proporção específica entre várias de suas partes.

Conforme afirma Neto (2013), o escritor grego Euclides de Alexandria, na obra “Os Elementos” escrita por volta de 300 a.C., foi o primeiro a definir a Razão Áurea, chamada por ele de “razão extrema e média”. Para Euclides a divisão de um segmento em duas partes será harmoniosa, se a razão entre todo o segmento e o lado maior da divisão for igual a razão entre o lado maior e o lado menor.

Em sua obra, o matemático grego que ficou conhecido como o “Pai da Geometria” não aborda apenas conteúdos de geometria, mas também de teoria dos números e álgebra elementar (geométrica). “Os Elementos” são um apanhado de 465 (quatrocentos e sessenta e cinco) proposições distribuídas em treze capítulos (livros). Destes, os seis primeiros tratam de geometria plana elementar, os capítulos sete, oito e nove versam sobre a teoria dos números, o livro dez trata de incomensuráveis e os três restantes discutem sobre geometria no espaço.

Segundo Euclides, se ao tomarmos um segmento de reta $\overline{AB}$, o mesmo estará dividido pela Razão Áurea se, ao arbitrar um ponto C entre os pontos A e B, tendo $\overline{AC} > \overline{BC}$, ao dividir $\overline{AC}$ por $\overline{BC}$ obter-se o mesmo valor que o resultado da divisão $\overline{AB}$ por $\overline{AC}$. Conforme figura abaixo:

Figura 4 - Segmento de reta dividido em Proporção Áurea
Fonte: Elaborado pelo autor

Ou seja,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

Por sua vez, considerando $\overline{AC} = x$ e $\overline{BC} = y$, tem-se que:

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$$

Fazendo as manipulações algébricas convenientes obtemos $x^2 - xy - y^2 = 0$ e aplicando a Fórmula de Bhaskara podemos concluir que:

$$\frac{x}{y} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Considerando que segmentos de retas e não podem assumir valores negativos tem-se que:

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi = 1{,}6180339887 \ldots$$

3.2 O NÚMERO DE OURO E A GEOMETRIA

No estudo da Geometria encontramos diversas figuras consideradas Áureas. Por possuírem a Razão Áurea são consideradas figuras perfeitas e completamente harmoniosas, podemos citar como exemplos o triângulo isósceles áureo, o retângulo áureo, o pentagrama regular, o decágono regular, o dodecaedro regular e o icosaedro.

Existem vários polígonos que podem ser construídos utilizando a razão áurea, o primeiro que vamos conhecer será o retângulo áureo.

3.2.1 O Retângulo Áureo

O Retângulo Áureo é o retângulo onde a proporção entre comprimento e sua altura é de aproximadamente 1,618033..., ou seja, o Número de Ouro. Seguindo os passos a seguir é possível construí-lo.

Etapas da construção:

1. Dado o segmento AB, construir um quadrado ABCD.

2. Determinar o ponto médio E do segmento AB.

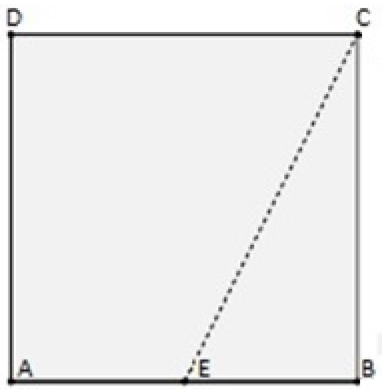

Figura 3 – Construção Retângulo Áureo 1

Fonte: Elaborado pelo autor

3. Usando o segmento EF como raio, marcar o ponto F sobre a semirreta $\overline{AB}$, tal que $\overline{EC} = \overline{EF}$.

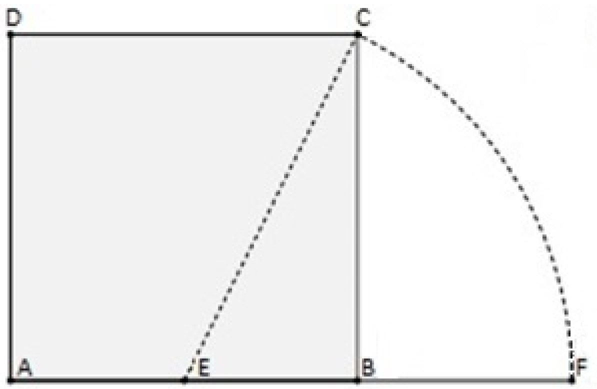

Figura 4 – Construção Retângulo Áureo 2

Fonte: Elaborado pelo autor

4. Marcar o ponto G, perpendicular a CD pelo ponto F.

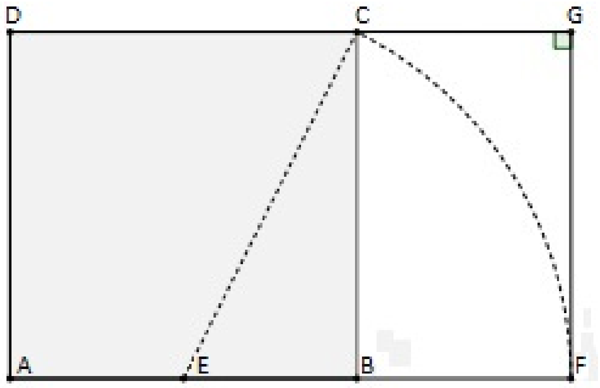

Figura 5 – Construção Retângulo Áureo 3

Fonte: Elaborado pelo autor

3.2.2 O Ângulo Áureo

Outra relação interessante relacionada a Razão Áurea é o ângulo de divergência ou ângulo ideal (também conhecido como Ângulo Áureo). O Ângulo Áureo é abundantemente encontrado na botânica em arranjo de pétalas de rosas e flósculos de girassóis, entre outros. Um ângulo ideal distribuirá as folhas ou os ramos de uma planta para que eles recebam o máximo da exposição à luz solar vertical.

Vamos a construção, considere inicialmente um segmento dividido em razão extrema e média.

Figura 6 – Segmento razão extrema e média

Fonte: Elaborado pelo autor

O Ângulo Áureo, que é de aproximadamente 137,5 graus. O segmento AB, Figura 6, que é dividido em razão extrema e média pelo ponto C, forma a circunferência de centro D, o ângulo formado pelo arco circular BC (em azul) mede 137,5º e corresponde exatamente ao Ângulo Áureo.

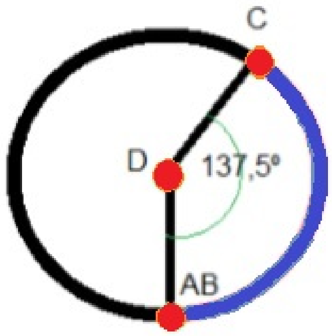

Figura 7 – Ângulo Ideal

Fonte: Elaborado pelo autor

3.2.3 Triângulo Áureo

Um segmento dividido em média e extrema razão será o ponto inicial para a construção de um triângulo isósceles áureo, cujo ângulo oposto a base tem medida igual a 36º.

Etapas da construção:

1) Determinar um ponto C, tal que AC seja segmento áureo do segmento AB;

Figura 8 – Construção Triângulo Áureo 1

Fonte: Elaborado pelo autor

2) Construir uma circunferência com centro em C e raio CA;

3) Construir uma circunferência com centro em B e raio CA;

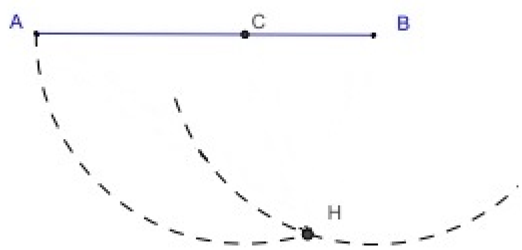

Figura 9 – Construção Triângulo Áureo 2

Fonte: Elaborado pelo autor

4) Denominar uma das interseções dessas circunferências de H.

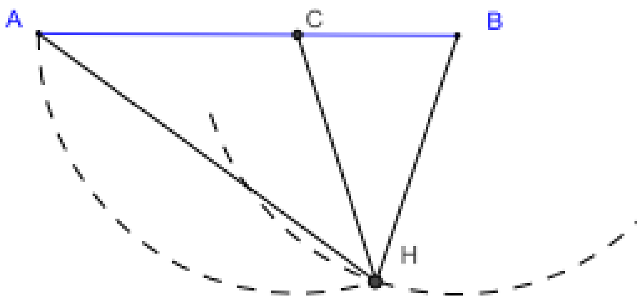

Figura 10 – Construção Triângulo Áureo 3

Fonte: Elaborado pelo autor

O triângulo ΔHAB da Figura 6 é isósceles e (∠HAB) = 36º. Notemos que os triângulos ΔAHB e ΔBCH são isósceles e semelhantes. Como temos que AC é segmento áureo do segmento AB, portanto,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

como AC = BH, tem-se:

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}$$

.

Segue então que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

.

Como CH = BH temos que o triângulo ΔBCH é isósceles. Portanto, pelo critério lado-ângulo-lado tem-se que o triângulo ΔABH é semelhante ao triângulo ΔCBH e também isósceles. A razão entre a base e a medida de um dos lados congruentes do triângulo ΔABH resulta em Φ.

As etapas a seguir constituem na construção de triângulos áureos semelhantes.

1. Construir um triângulo isósceles ΔABD, com base BD e (∠DAB) = 36º.
2. Marcar o ponto C no segmento AB, tal que C seja interseção do segmento AB com a bissetriz de ∠BDA.

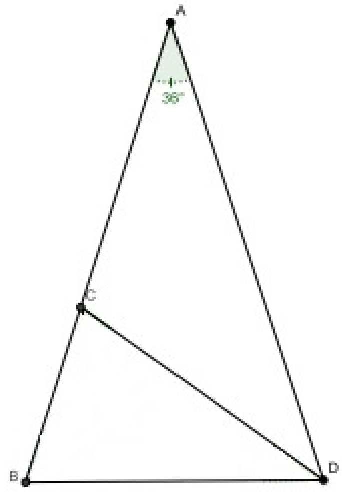

Figura 11 – Construção Triângulos Áureos Semelhantes 1

Fonte: Elaborado pelo autor

3. Marcar o ponto E no segmento CD, tal que E seja interseção do segmento CD com a bissetriz de ∠CBD.

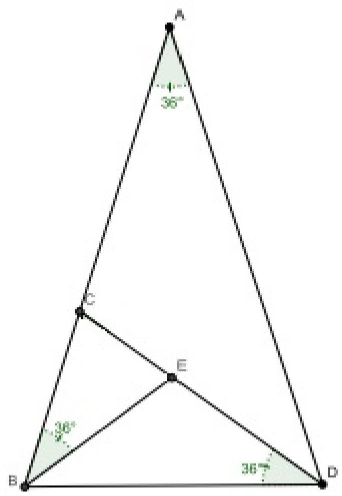

Figura 12 – Construção Triângulos Áureos Semelhantes 2

Fonte: Elaborado pelo autor

4. Repetir o processo anterior para marcar os pontos F, G e H.

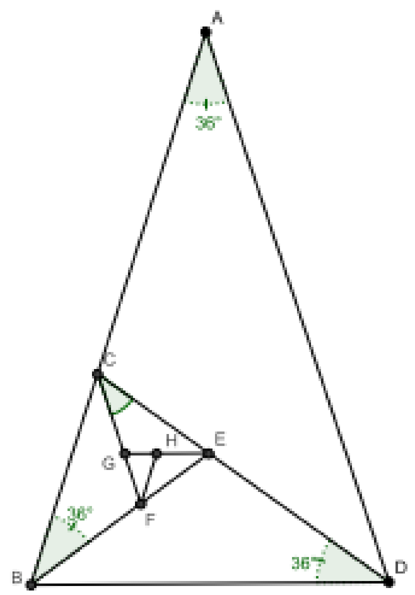

Figura 13 – Construção Triângulos Áureos Semelhantes 3

Fonte: Elaborado pelo autor

É importante notar que os triângulos ΔABD, ΔDCB e ΔCFE da Figura 7 são isósceles e o ângulo oposto a base é de 36º. Logo, os triângulos formados são semelhantes ao triângulo ΔABH da Figura 6 e, por consequência, áureos.

A manipulação e divisão dessas formas resultam em outras figuras com propriedades áureas, que podem também ser consideradas perfeitas. Dentre elas destaca-se a espiral de ouro.

3.2.4 Espiral de Ouro

As espirais estão muito presentes em nosso cotidiano, podem ser encontradas em movimentos, objetos e também na natureza. Como exemplo, podemos citar o Náutilo[1], o voo realizado pelos gaviões quando em direção à sua presa, no brócolis romanesco, entre outros.

[1] Náutilo ou nautilus,é o nome popular de um animal marinho, que ocorre no sudoeste do oceano Pacífico. São nadadores ativos e possuem uma concha formada por câmaras separadas que se comunicam por meio de pequenos orifícios.

Figura 14 - Brócolis Romanesco

Fonte: http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/galeria/detalhe.php?foto=89

Baseado na construção de triângulos áureos semelhantes realizado nas Figuras 11, 12 e 13 é possível traçar a Espiral de Ouro.

As etapas a seguir constituem na construção de uma espiral.

1. Com centro em D traçar o arco AB.

2. Com centro em E traçar o arco BC.

3. De forma análoga às etapas 1 e 2 deve-se continuar como traçado da espiral.

Observe que podemos repetir esse processo infinitamente, e obter um ponto limite, pólo de uma espiral logarítmica.

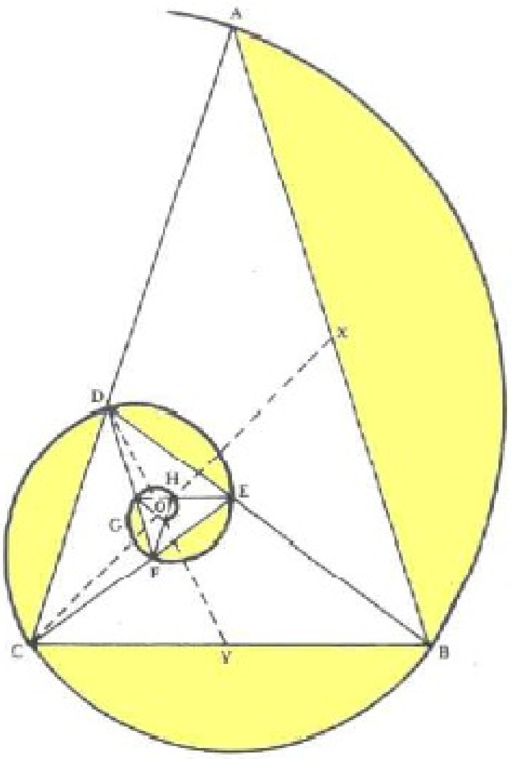

Figura 15 - Espiral de Ouro a partir de Triângulos Isósceles Áureos

Fonte: Desenho Geométrico (2016)

A Espiral de Ouro também pode ser obtida a partir do Retângulo de Ouro, para tanto devemos dividi-lo em um quadrado e um retângulo, o novo retângulo é também de ouro. Se este processo for repetido sucessivamente e os cantos dos quadrados gerados forem unidos obtém-se a espiral de ouro.

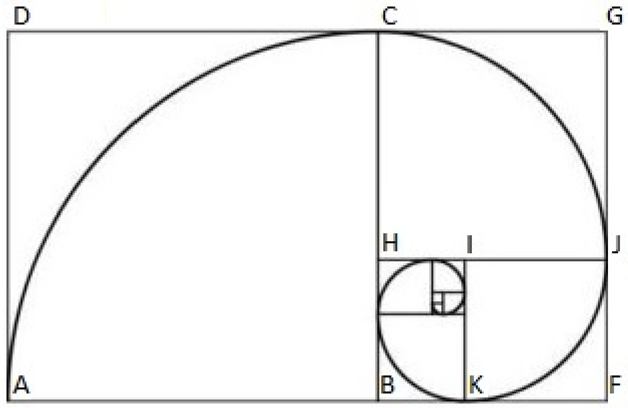

Figura 16 - Espiral de Ouro a partir de Retângulos Áureos

Fonte: Elaborado pelo autor

3.2.5 Pentágono Regular e a Razão Áurea

Do mesmo modo que nas figuras construídas anteriormente, o pentágono regular possui relações com a razão áurea. Vamos descrever sua construção partindo de uma circunferência de raio AB qualquer.

1. Traçar um circunferência de raio AB, com centro em A.
2. Sobre a circunferência marcar um ponto D, de modo que DA seja perpendicular a AB.
3. Encontre C, que é o ponto médio do segmento AB.
4. Com centro em C e raio CD marcar um ponto E sobre a reta AB

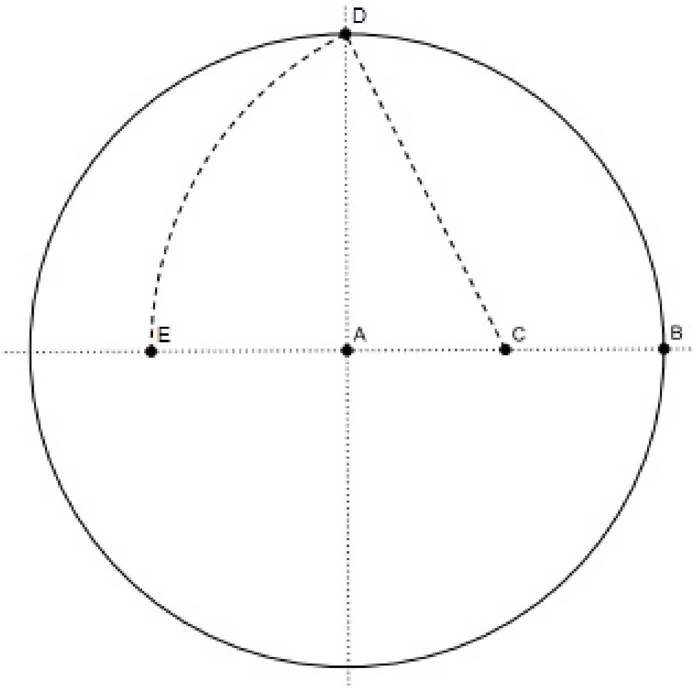

Figura 17 – Construção do Pentágono Regular 1

Fonte: Elaborado pelo autor

5. Com centro em D e raio DE marcar os pontos G e H, que são interseções com a circunferência.

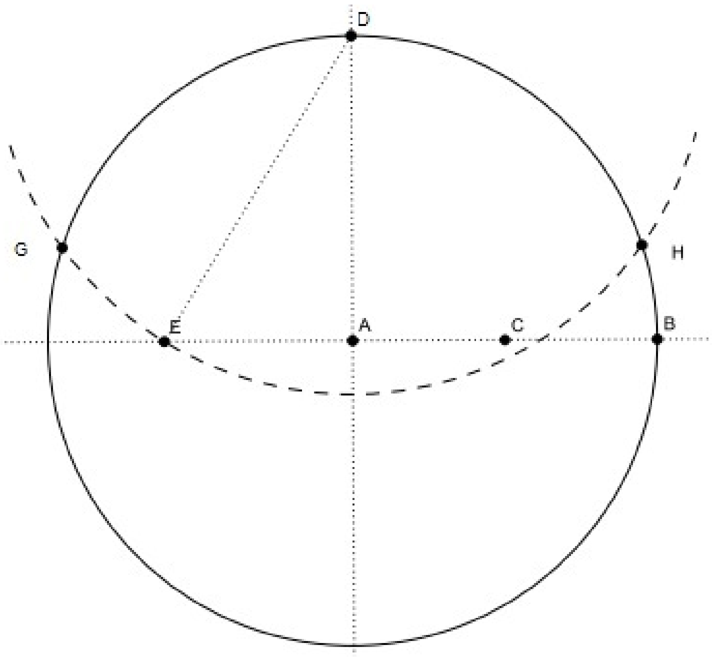

Figura 18 – Construção do Pentágono Regular 2

Fonte: Elaborado pelo autor

6. Com centro em H e raio DH, marcar sobre a circunferência o ponto I.

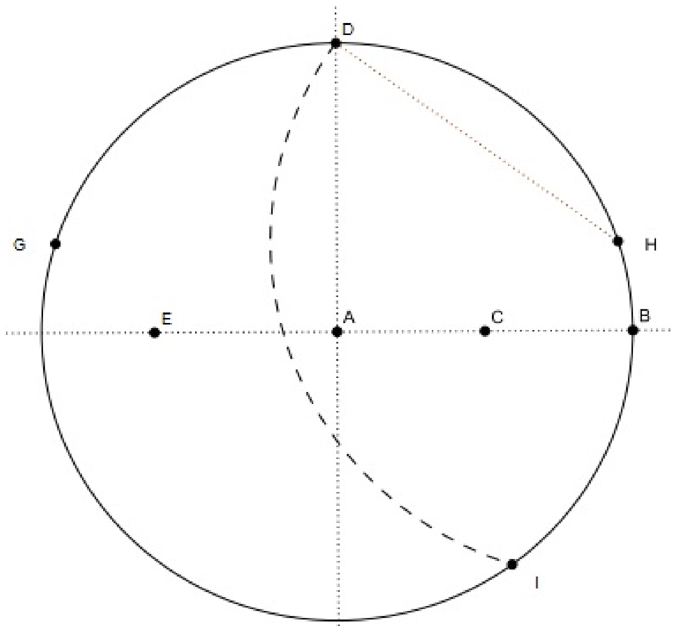

Figura 19 – Construção do Pentágono Regular 3

Fonte: Elaborado pelo autor

7. Com centro em G e raio GD, marcar sobre a circunferência o ponto J.

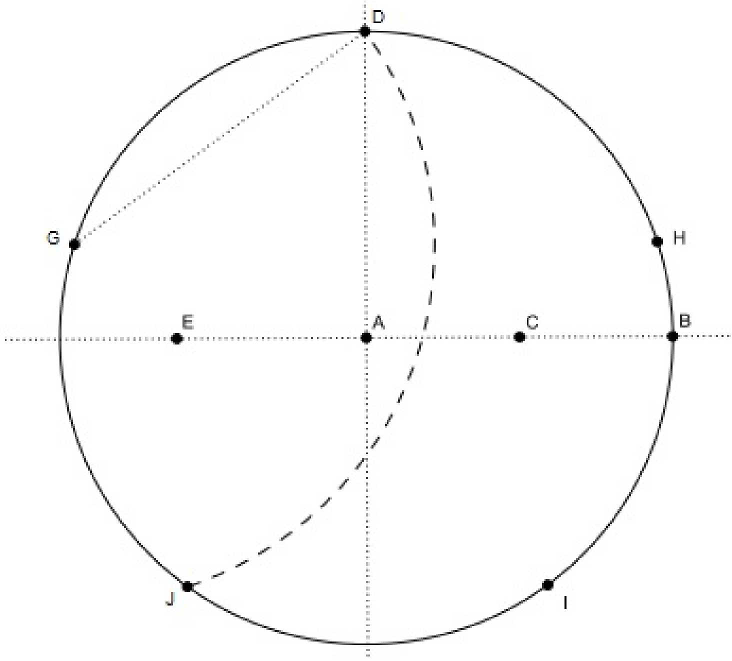

Figura 20 – Construção do Pentágono Regular 4

Fonte: Elaborado pelo autor

8. Ligando os pontos D, G, J, I e H obteremos um pentágono.

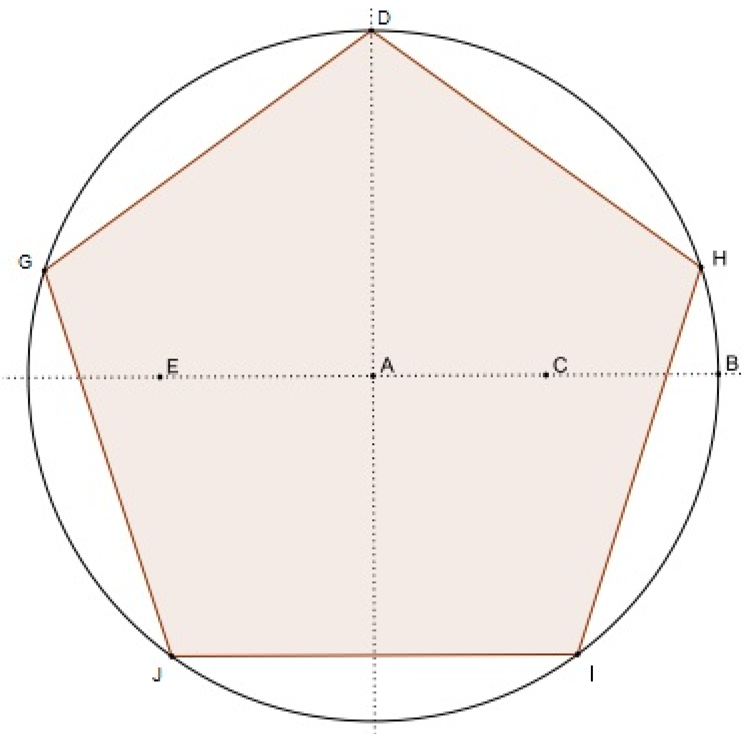

Figura 21 – Construção do Pentágono Regular 5

Fonte: Elaborado pelo autor

Para que possamos comprovar que o pentágono construído é regular vamos considerar o segmento AB inicial como segmento unitário.

Pelo método de construção temos que AB = AD = 1. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ΔDAC temos:

$$\overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 = \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{5}{4}$$

Logo, $\overline{DC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. E pelo método de construção temos que $\overline{DC} = \overline{EC} = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Considerando agora o ΔDAE e aplicando o Teorema de Pitágoras temos:

$$\overline{DE}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AD}^2 = (\overline{CE} - \overline{AC})^2 + \overline{AD}^2$$

$$\overline{DE}^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5 - 2\sqrt{5 + 1 + 4}}{4} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\overline{DE} = \sqrt{\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Pelo método de construção (passos 5, 6 e 7) temos que os segmentos DE, DG, DH, HI e GJ são congruentes, por consequência todos os lados do polígono criado possuem a mesma medida. Ao analisarmos a figura 21 podemos notar que os pontos D, H, I, J e G fazem parte da mesma circunferência, logo, esse pentágono é inscritível e, portanto, regular.

2.3 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO

Um estudioso que teve contribuição valiosa para o desenvolvimento utilização do Número de Ouro foi Leonardo de Pisa ou Leonardo Pisano, que viveu entre os anos 1170-1250, o apelido que dá nome a famosa sequência se deve ao fato de ser filho Bonacci, logo Fibonacci. Leonardo de Pisa era envolvido com a atividade de comerciante desenvolvida por seu pai, onde aprendeu técnicas matemáticas até então não difundidas no ocidente. Sua curiosidade e a percepção de que operações com algarismos arábicos eram mais práticas e eficientes do que com algarismos romanos o levaram a abandonar os negócios de seu pai e viajar para vários outros países do mediterrâneo (entre eles Grécia, Egito e Síria), buscando aprimorar e desenvolver seus conhecimentos.

A descoberta da Sequência de Fibonacci aconteceu por meio de Leonardo Pisano, que teve um papel marcante no crescimento da matemática no mundo, sendo tratado, por muitos, como o mais importante matemático da Idade Média. É atribuído como de sua responsabilidade, também, a introdução dos algarismos árabicos na Europa.

Figura 22 – Leonardo de Pisa (Fibonacci)

Fonte: sciencephoto.com/2020

Fibonacci escreveu o Liber Abaci no ano de 1202 e voltou a publicá-lo, após realizar algumas revisões, em 1228. O livro é composto de quinze capítulos e traz questões de cálculos de juros, raiz quadrada e cúbica, leitura e escrita indo-árabe no sistema decimal, conversões de medidas e monetárias e uma enorme quantidade de problemas. Dentre esses, a questão da Reprodução de Coelhos, cuja solução é a Sequência de Fibonacci

Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse

> *par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá a luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês? (FIBONACCI, 1202 apud LÍVIO, 2007, p.116).*

Num primeiro momento o problema nos parece simples. Contudo, suas aplicações e importância deram notoriedade e fama a esse matemático, sendo considerada uma descoberta muito importante para a matemática.

O processo tem início com um par de coelhos jovens, findado o primeiro mês esse par já está adulto e fértil. Sendo assim, no segundo mês o primeiro par dá a luz a um novo par, totalizando dois pares.

No terceiro mês, o par de filhotes torna-se fértil e o par adulto gera um novo casal, nesse momento temos então 3 pares.

Já no quarto mês os dois casais adultos geram um novo par cada e o jovem par torna-se fértil.

A seguir demonstramos, através de uma tabela, como os coelhos se reproduzem até o 12º mês.

Tabela 1 – Problema da Reprodução dos Coelhos

Mês	Nº recém nascidos	Nº de adultos	Total de coelhos
Início	1	0	1
Primeiro mês	0	1	1
Segundo mês	1	1	2
Terceiro mês	1	2	3
Quarto mês	2	3	5
Quinto mês	3	5	8
Sexto mês	5	8	13
Sétimo mês	8	13	21
Oitavo mês	13	21	34
Nono mês	21	34	55
Décimo mês	34	55	89
Décimo primeiro mês	55	89	144
Décimo segundo mês	89	144	233

Fonte: Elaborado pelo autor

Se fizermos uma análise rápida somente nos pares de recém-nascidos podemos notar que, a partir do terceiro mês, o número em determinado mês é igual a soma dos dois meses anteriores. Tal regra aplica-se, também, ao número de adultos e a soma total de coelhos.

3.3.1 Definição da Sequência de Fibonacci

As sequências numéricas onde existe relação entre termos sucessivos e que pode ser determinada por uma equação matemática são chamadas de recursivas. No caso da Sequência de Fibonacci, que foi uma das primeiras deste tipo conhecidas na Europa, podemos notar que cada termo, a contar do terceiro, é igual a soma dos dois imediatamente anteriores. Sendo assim, considerando as condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, temos que a Sequência de Fibonacci pode ser determinada pela relação de recorrência:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2 \text{ (Sendo } F_0 = 0 \text{ e } F_1 = 1)$$

Se considerarmos a Sequência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... e calcularmos a razão de cada número pelo seu antecessor, obtemos uma nova sequência a_n que é definida pela razão de um termo de Fibonacci por seu antecessor, ou seja:

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

Pode-se notar que essa sequência converge para o Número de Ouro, pois:

- ➔ $a_1 = \frac{1}{1} = 1$
- ➔ $a_2 = \frac{2}{1} = 2$
- ➔ $a_3 = \frac{3}{2} = 1{,}5$
- ➔ $a_4 = \frac{5}{3} = 1{,}66\ldots$
- ➔ $a_5 = \frac{8}{5} = 1{,}600$
- ➔ $a_6 = \frac{13}{8} = 1{,}625$
- ➔ $a_7 = \frac{21}{13} = 1{,}615$
- ➔ $a_8 = \frac{34}{21} = 1{,}619$
- ➔ $a_9 = \frac{55}{34} = 1{,}617$

Tanto quanto maior for o termo a ser calculado, mais próximo seu resultado se aproximará do valor do Número de Ouro, $\Phi = 1,6180339887...$.

O que torna a Sequência de Fibonacci tão famosa e um marco para a matemática obviamente não se limita ao problema da Reprodução de Coelhos, sua presença e do número de Ouro é comum em outras construções matemáticas como a da espiral áurea, além de serem encontradas no corpo humano e na natureza, como exemplo podemos citar a árvore genealógica do zangão (abelha macho), o modo como crescem as folhas e os ramos de algumas plantas, nas sementes de girassol, pétalas de flores, no crescimento da concha nautilus, entre outros.

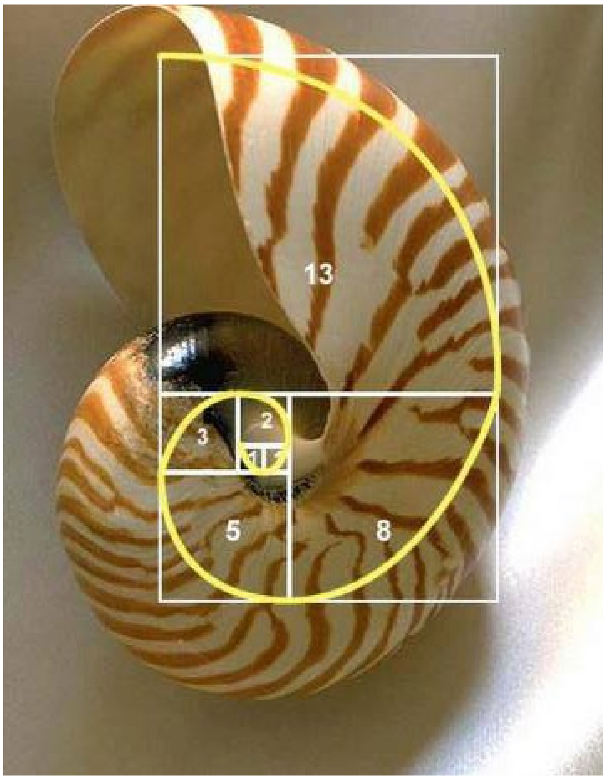

Figura 23 - Concha Nautilus

Fonte: A Sequência de Fibonacci e o Número Áureo (2016)

3.4 A RAZÃO ÁUREA NA ARTE E NO CORPO HUMANO

O Número de Ouro sempre foi associado à beleza, perfeição e harmonia. O homem está em constante busca pela perfeição e a Razão Áurea está presente em muito do que é considerado belo e harmonioso como obras de arte, projetos de arquitetura, música e até mesmo no corpo humano.

Existem vários trabalhos que teorizam que Leonardo da Vinci utilizou o Número de Ouro na produção de várias de suas obras, como exemplo podemos citar “A virgem dos rochedos” e “Mona Lisa”. Mas não é apenas nas obras de Da Vinci que é possível encontrar a Razão Áurea, “O Sacramento da Última Ceia”, de Salvador Dalí e “O Nascimento de Vênus” de Botticelli também trazem esse fascinante número em suas proporções.

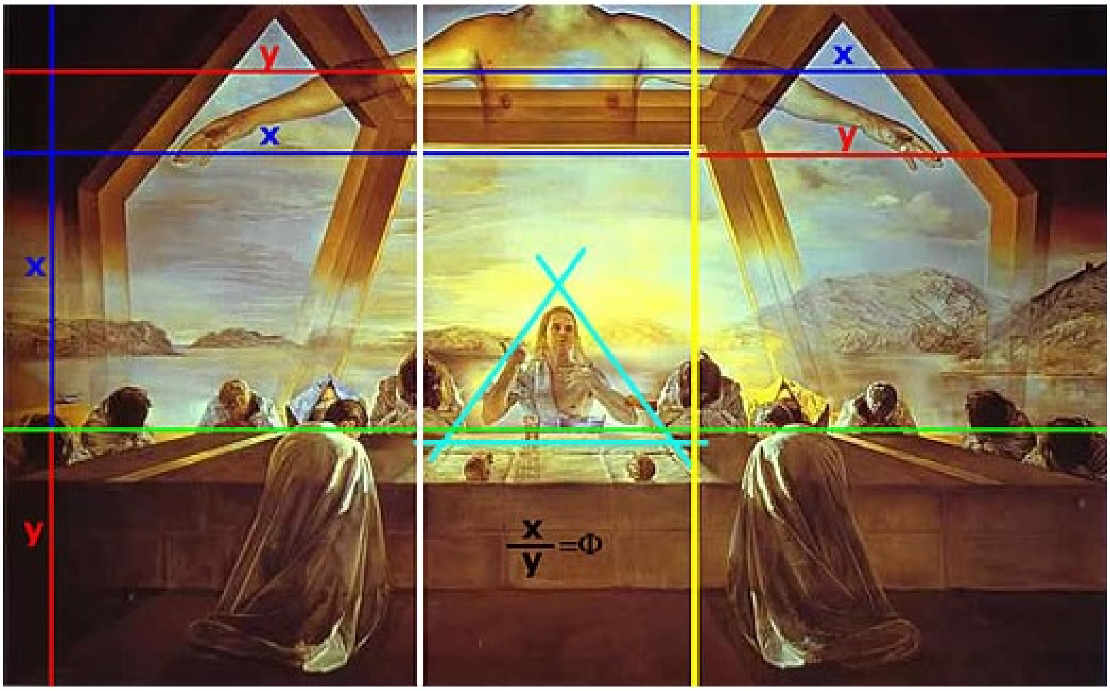

Figura 24 - O Sacramento da última ceia (Salvador Dalí)
Fonte: Um número muito especial VIII (2016)

O Número de Ouro está presente no corpo humano nas falanges dos dedos, nas orelhas, na razão entra a altura total da face e a distância entre os olhos e o queixo, na razão entra a altura total do corpo e a distância do umbigo até o chão, na razão entre os dentes, na razão entre a distância do ombro até a ponta do dedo e do cotovelo até a ponta do dedo, entre outros.

São comuns afirmações, mesmo nos tempos atuais, que a beleza do corpo humano está associada a sua harmonia e proporção, diversos pintores tinham como objetivo manter a Proporção Áurea nos rostos e corpos de suas obras buscando, desse modo, a beleza e a perfeição. Tal encantamento muitas vezes não é associado a existência de proporção, o fascínio pelo Número de Ouro está presente de maneira inconsciente e constante em nosso cotidiano.

Rostos e corpos harmoniosos, que parecem agradáveis aos nossos olhos, normalmente apresentam proporções que se aproximam do Número do Ouro Podemos tomar como exemplo os traços, medidas e proporções encontradas no rosto feminino (figura 25). Podemos observar a relação existente entre o comprimento do rosto e da testa da mulher, da mesma maneira é possível notar que entre a distância do queixo até os olhos e a distância do queixo até o nariz existe razão.

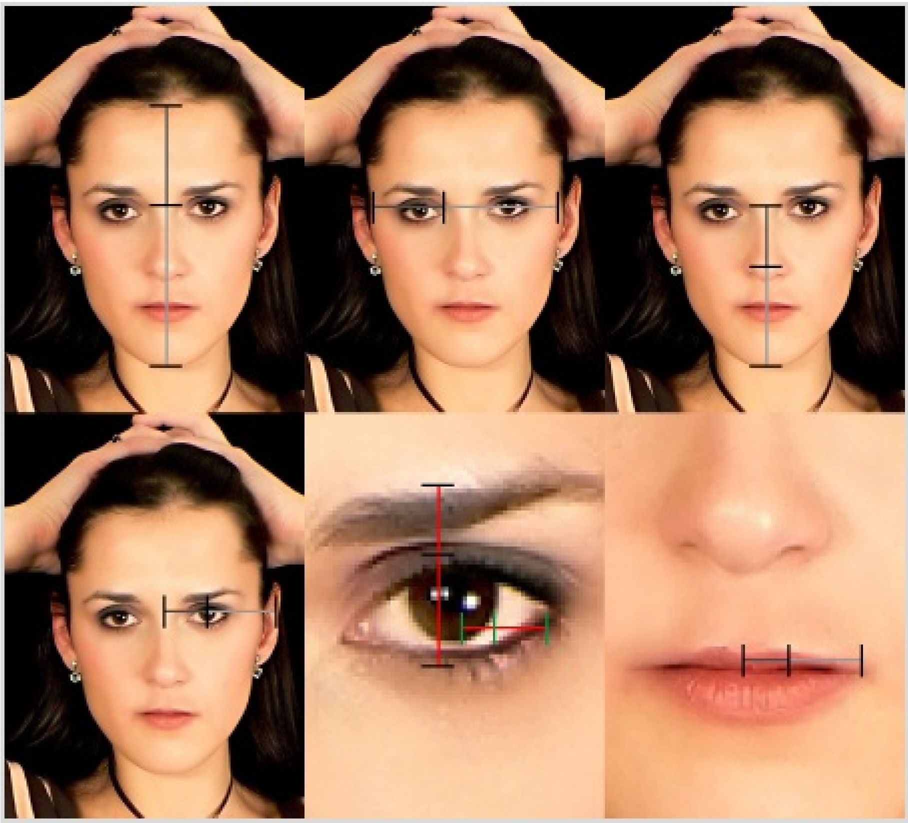

Figura 25 - Rosto humano e a Proporção Áurea
Fonte: Geometria sagrada (2016)

4 SEQUENCIA DIDÁTICA

4.1 O CONCEITO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O nome é sugestivo, mas não é raro encontrar pessoas que nunca pararam pra pensar, de fato, no seu significado. Sabemos que a palavra “sequência” indica a “ação de seguir”, deduz-se então que sequências didáticas são “ações contínuas” ou “conjuntos de atividades”, sobre determinado assunto, que objetiva transmitir o conhecimento de determinado assunto, passo a passo, ação por ação.

Sequência didática é uma expressão muito usada, principalmente na Educação Infantil, para definir um conjunto de ações em etapas com ligações entre si, que objetivam tornar o processo de ensino-aprendizagem mais eficiente e interessante.

Pode-se dizer também, que é uma maneira de organizar o trabalho pedagógico de maneira a permitir antecipação no que será trabalhado em determinado tempo, que pode variar em razão do que os alunos precisam aprender, da absorção dos conteúdos e interação, que serão observados durante o constante monitoramento realizado pelo docente, através de atividades de avaliação realizadas durante e ao final da sequência didática.

Toda e qualquer sequência didática pensada deve ser criada buscando atingir um objetivo e não estamos falando de um objetivo qualquer. O foco desse objetivo é atender as reais necessidades do aluno. Pois bem, se minha necessidade é ensinar determinado assunto para meu aluno é necessário que crie uma estratégia de passo a passo, tal ação deve ser agente facilitador para que ele seja capaz de assimilar o conteúdo que o educador lhe está oferecendo e por isso é de fundamental importância selecionar e pensar em sequências que possuam uma aplicação adequada à sala de aula.

O que diferencia a sequência didática de outras maneiras de apresentar conhecimento aos estudantes, enquanto ferramenta de melhoria do aprendizado dos alunos, é que as atividades são pensadas e desenvolvidas seguindo uma sequência lógica para compartilhamento e elevação do conhecimento. Com tal estratégia, os docentes buscam dar mais sentido ao processo de ensino e, paralelamente, aumentar o interesse dos alunos nas atividades a serem desenvolvidas, e, com isso, propiciar um melhor aprendizado.

Uma sequência didática deve ser elaborada em etapas, pensadas de modo a transmitir os conceitos pretendidos pelo professor, que ensinamentos ele tem a intenção de transmitir e que objetivos deve alcançar durante o ano letivo. Esse sistema pode ser usado em todas as disciplinas, pois ajuda o professor a organizar o trabalho de forma gradativa, partindo de conceitos que os alunos já tem conhecimento e com a intenção de alcançar os níveis que eles ainda precisam dominar.

A sequência didática consiste em um procedimento de ensino, em que determinados conceitos são abordados em parcelas ou etapas ligadas, objetivando tornar o processo de ensino mais eficiente. A organização das atividades em sequências lógicas e predefinidas tem o objetivo de oportunizar aos discentes e docentes os conteúdos de forma progressiva e pensada de maneira a facilitar o processo de aprendizagem.

Podemos pensar em sequência didática como um conjunto de atividades que nos levam a um local, um objetivo. É importante que os níveis de dificuldade e compreensão aumentem gradativamente a cada etapa, fazendo com que o educando vá construindo pouco a pouco seu conhecimento. Ou seja, uma sequência de aulas planejadas, distribuídas em alguns dias de acordo com a necessidade, onde os alunos são expostos a desafios cada vez maiores.

Tal ferramenta de trabalho permite trabalhos interdisciplinares, sendo que o professor pode recorrer a outras áreas e até mesmo outras disciplinas para a melhor compreensão do conteúdo a ser estudado. Desse modo, um assunto pode ser abordado de diversos pontos de interpretação diferentes de maneira articulada. Este modelo de ensino tem origem na didática francesa e tem como ponto principal que devem estar interligados a participação ativa do aluno no processo de ensino-aprendizagem e a contextualização do saber escolar.

> *Um dos objetivos da educação matemática é contribuir para que aluno possa desenvolver uma certa autonomia intelectual e que o saber escolar aprendido lhe proporcione condições para compreender e participar do mundo em que ele vive. (PAIS, 2002, p.67)*

Assim, de acordo com o nível cognitivo do aluno, o professor pode e deve buscar, baseado no currículo escolar, situações do cotidiano para serem transpostas em situações didáticas, pois sem um vinculo com a realidade a formação do saber fica prejudicada, principalmente em se tratando do saber matemático. No entanto, é necessária uma seleção e uma adaptação do conteúdo para ser utilizado em sala de aula, pois "um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar o lugar entre objetos de ensino" (Chevallard apud PAIS, 2002, p.19).

A didática francesa destaca ainda a importância da participação de três elementos na relação pedagógica: o professor, o aluno e o saber. As múltiplas relações entre esses elementos formam as situações didáticas.

Vamos elaborar duas propostas de Sequência Didática que levam em consideração a teoria que o "aluno deve construir o seu conhecimento" (THOMAZ NETO; COTA, 2006), de modo que o saber tenha alicerces sólidos e se fixe no aluno de forma mais eficaz, para tanto buscaremos usar como elementos principais o cotidiano onde os alunos estão inseridos, elementos visuais e experiências sensoriais. Além de considerar que o conteúdo deve possibilitar ao aluno a possibilidade de resolver problemas práticos do seu dia-a-dia, visando que o estudo da matemática se torne mais concreto aos olhos do aluno.

4.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA 1

4.2.1 Sequência Didática 1 - Etapa 1

O objetivo inicial é fazer com que os discentes notem as semelhanças geométricas que acontecem na natureza e reflitam se pode existir um padrão ou forma que possa ser considerada matematicamente perfeita. Para tanto, o aluno deve ser levado a construir e entender a secção áurea e seu conceito.

Inicialmente, o professor deve realizar um breve apanhado histórico e, utilizando um segmento em média e extrema razão, apresentar aos alunos o número de ouro e seu valor aproximado (Anexo I).

.

Figura 26 – Segmento razão extrema e média

Fonte: Elaborado pelo autor

Na sequência, utilizando-se de régua e calculadora os alunos devem tomar as medidas de objetos retangulares que façam parte do seu cotidiano escolar. Pode ser utilizada a tabela abaixo para que sejam informadas as medidas e realizados os cálculos necessários. Devem ser consideradas apenas as medidas de comprimento e largura dos objetos, descartando assim o valor correspondente a profundidade dos objetos.

Tabela 2 – Medidas de objetos de cotidiano escolar

Objeto	Comprimento (x)	Largura (y)	Razão (x/y)
Assento da cadeira			
Borracha (se retangular)			
Caderno (capa)			
Cartão de banco			
Carteira escolar			
Documento de identidade			
Janela			

Livro escolar ou apostila			
Monitor de computador			
Porta			
TV			

Fonte: Desenvolvido pelo autor

Após realizar as medidas de largura e comprimento dos objetos e realização dos cálculos de razão entre essas dimensões os estudantes devem comparar e averiguar quais dos itens verificados possui em suas dimensões a razão que mais se aproxima do número de ouro.

4.2.2 Sequência Didática 1 - Etapa 2

Novamente o professor deve iniciar a aula com a apresentação de contextos históricos, citando exemplos e relacionando matemática, natureza, artes e estética. Nesse momento o docente pode utilizar imagens de obras de artes, o rosto humano e flores para que seja mais fácil aos alunos compreender e visualizar os conceitos relatados (Anexo II).

Ao final dessa primeira explanação o professor deve questionar os alunos sobre a existência de alguma fórmula ou padrão que possibilite a criação de imagens que sejam consideradas perfeitas esteticamente. Dando prosseguimento, os alunos devem desenhar em uma folha do papel, podendo ou não utilizar régua, uma figura geométrica que lhes pareça perfeita. Em seguida os estudantes devem informar se a figura por eles desenhada possui, na natureza, alguma forma semelhante.

O objetivo de tal comparativo é que os discentes possam ser capazes de verificar, na natureza, as semelhanças e padrões geométricos e refletirem sobre a existência de uma forma que possa ser considerada, do ponto de vista da matemática, perfeita.

4.2.3 Sequência Didática 1 - Etapa 3

Objetiva-se nessa aula que o aluno possa ser capaz de realizar a construção do retângulo áureo a partir de um quadrado qualquer. É importante que, nesse momento, o docente não cite que será trabalho como assunto da aula a secção áurea para que o estudante possa, através de observação, notar a existência da proporção áurea nas figuras.

Dando início a construção os alunos devem realizar a construção de um quadrado qualquer ABCD e marcar, usando régua, o ponto médio E. Ligar o ponto encontrado a um dos vértices do lado oposto do quadrado.

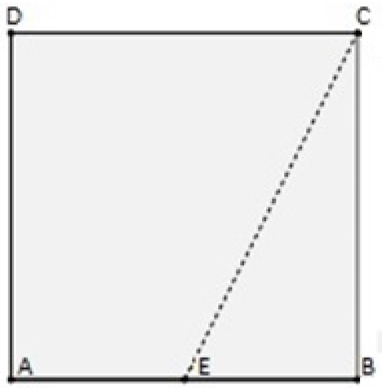

Figura 27 – Construção Retângulo Áureo 1

Fonte: Elaborado pelo autor

Na sequência deve-se marcar o ponto F sobre a semirreta $\overline{AB}$, tal que $\overline{EC} = \overline{EF}$

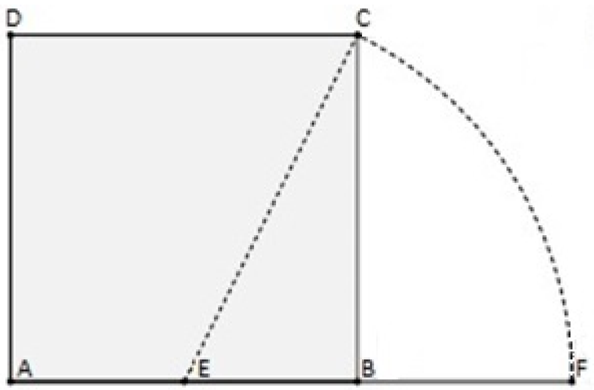

Figura 28 – Construção Retângulo Áureo 2

Fonte: Elaborado pelo autor

Traçar uma perpendicular a AB, passando pelo ponto F. Marcar o ponto G, que é a interseção da perpendicular traçada com o prolongamento de CD

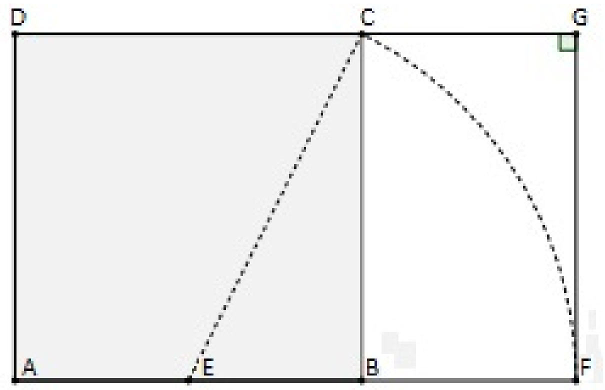

Figura 29 – Construção Retângulo Áureo 3

Fonte: Elaborado pelo autor

Finalizada essa construção os discentes devem ser levados ao entendimento de que trata-se de Retângulo Áureo e que essa tal tipo de quadrilátero pode ser gerado partindo de um quadrado qualquer e que a razão entre seus lados sempre será a mesma.

Em seguida, os estudantes devem, utilizando de régua, medir o lado DC do quadrado e do prolongamento CG. Da mesma maneira, deverão ser anotadas as medidas das laterais do retângulo, lado maior DG e lado menor GF.

Na sequência, utilizando de calculadora, efetuar a divisão de DG por DC e do lado maior do retângulo pelo seu lado menor, ou seja, DG por GF. O docente deve solicitar aos alunos que comparem os resultados encontrados nas divisões efetuadas e com os resultados obtidos pelos colegas que utilizaram quadrados de medidas diferentes.

Efetuando a comparação dos resultados, acompanhadas pelo docente, os alunos poderão notar que todos os valores obtidos se aproximam do número 1,62. O professor deve apresentar o valor do número de ouro 1,618033 e construir junto com os alunos o entendimento de que os valores obtidos são aproximações da Razão Áurea.

Como atividade de fixação o professor deve apresentar figuras como as do Parthenon, proporções do corpo humano, obras de arte e demais objetos do cotidiano onde está presente o Número de Ouro.

Ao final das atividades, buscando um maior entendimento de como os alunos assimilaram os conteúdos e conceitos propostos, bem como se a utilização da metodologia surgiu efeitos para uma melhor fixação dos conteúdos, o professor pode solicitar aos discentes que respondam as questões que apresentamos a seguir:

1. Na natureza é possível encontrar semelhanças e padrões matemáticos? Se sim, quais?

2. Qual o valor aproximado do Número de Ouro?

3. Cite três exemplos de onde podemos encontrar a Razão Áurea?

4. Qual medida deve ter os lados de um quadrado para que, a partir dele, possa ser gerado um retângulo áureo?

4.2.4 Sequência Didática 1 - Anexo I

Desde Euclides de Alexandria (300 a.C.) a curiosidade e paixão despertadas pelos elementos da natureza, que apresentam em suas formas padrões algébricos e/ou geométricos, atrai a atenção de arquitetos, artistas, estudiosos, estudantes e pessoas comuns, tal admiração persiste até os dias atuais e deve se fazer presente por muito tempo.

Muitos estudiosos da antiguidade se apropriaram intensamente acerca dos estudos dessa razão, suas propriedades e aplicabilidade. Dentre eles pode-se citar Euclides, Pitágoras, Leonardo de Pisa também conhecido como Fibonacci e Johannes Kepler, que se encantaram com sua harmonia, através da busca constante pela proporção perfeita, dando uma qualidade estética agradável às obras dos artistas, ao som dos acordes dos músicos e à beleza do corpo.

Tratada como conhecida como média áurea, proporção divina, razão áurea, regra de ouro, dentre outros, essa incrível medida pode ser obtida a partir de um segmento de reta, de modo que quando uma linha é dividida em duas partes e a parte mais longa (a) dividida pela parte menor (b) é igual à soma de (a) + (b) dividida por (a):

Figura 30 - Segmento Áureo

Fonte: Desenvolvido pelo autor

Ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \Phi$$

O resultado dessa expressão é uma constante chamada de **Razão Áurea, Proporção Áurea** ou **Número de Ouro**. A essa constante é atribuído como símbolo matemático a letra grega Φ (Phi) e tem valor aproximado de Φ = 1,6180339887.

Segundo Belini (2015), a letra Φ começou a ser usada para representar o Número de Ouro somente no século XX, pelo matemático Mark Barr, que recebeu esse nome em homenagem a *Fídias*, famoso arquiteto e escultor grego que viveu em Atenas e foi o responsável pela construção e ornamentação do Parthenon. Para que a obra, projetada em homenagem a Deusa Atena, fosse considerada bela e harmônica *Fídias* utilizou-se de uma proporção específica entre várias de suas partes.

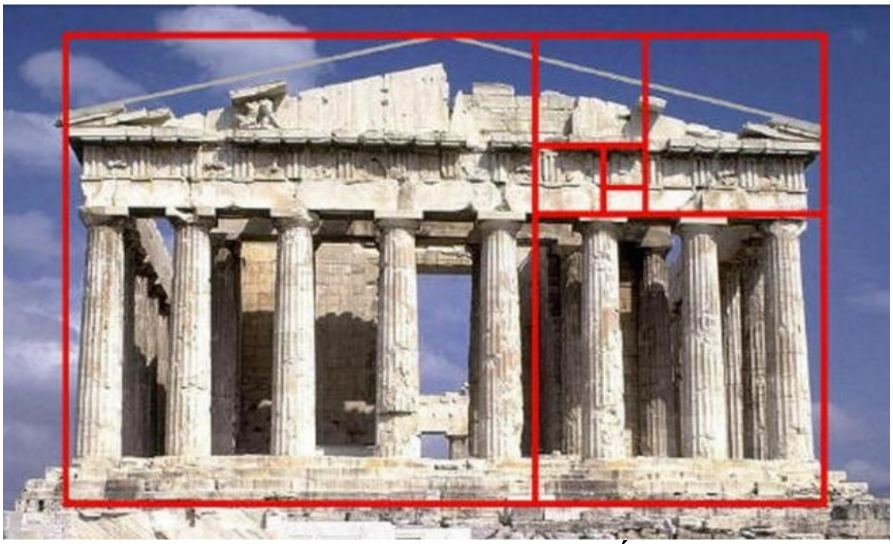

Figura 31 - Parthenon e a Razão Áurea
Fonte: Matemática e estatística (2016)

4.2.5 Sequência Didática 1 - Anexo II

O **Número de Ouro** pode ser encontrado nas mais diversas situações, ele está presente em vários elementos da natureza (no formato de uma concha, nas pétalas de uma flor), em obras de arte (O Nascimento de Vênus, Monalisa), na arquitetura (Sede da Onu, *Parthenon* grego) e até mesmo no corpo humano.

Figura 32 - Concha Nautilus

Fonte: https://www.infoescola.com/matematica/sequencia-de-fibonacci/

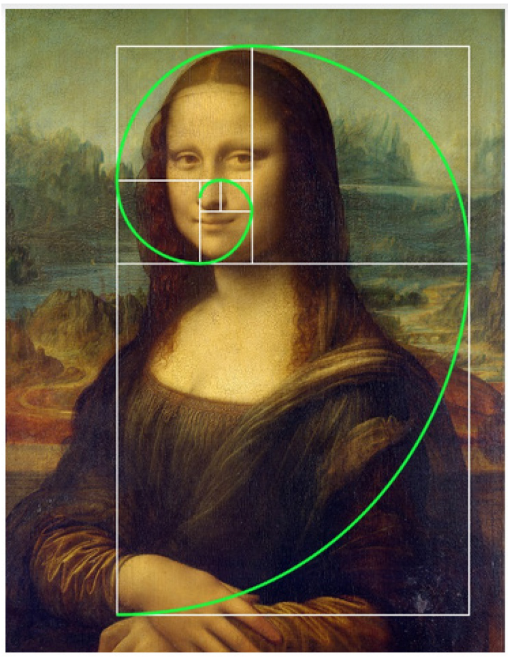

Figura 33 - Mona Lisa

Fonte: https://sabermatematica.com.br/numero-de-ouro.html

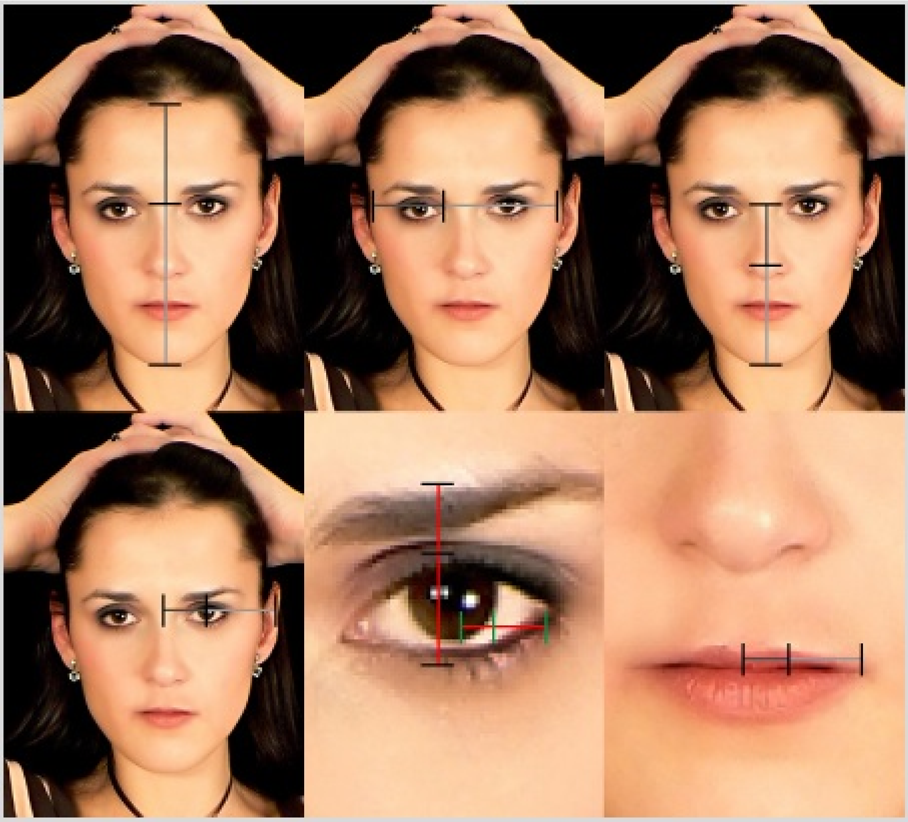

Figura 34 - Rosto humano e a Proporção Áurea

Fonte: Geometria sagrada (2016)

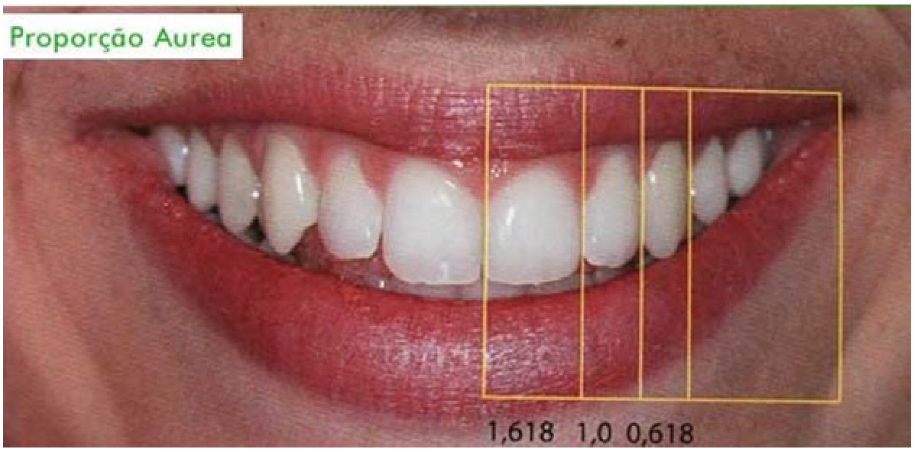

Figura 35 - Sorriso humano

Fonte: https://www.oxigenweb.com.br/artigos/a-proporcao-aurea-esta-em-tudo-na-natureza-na-vida-e-em-voce/

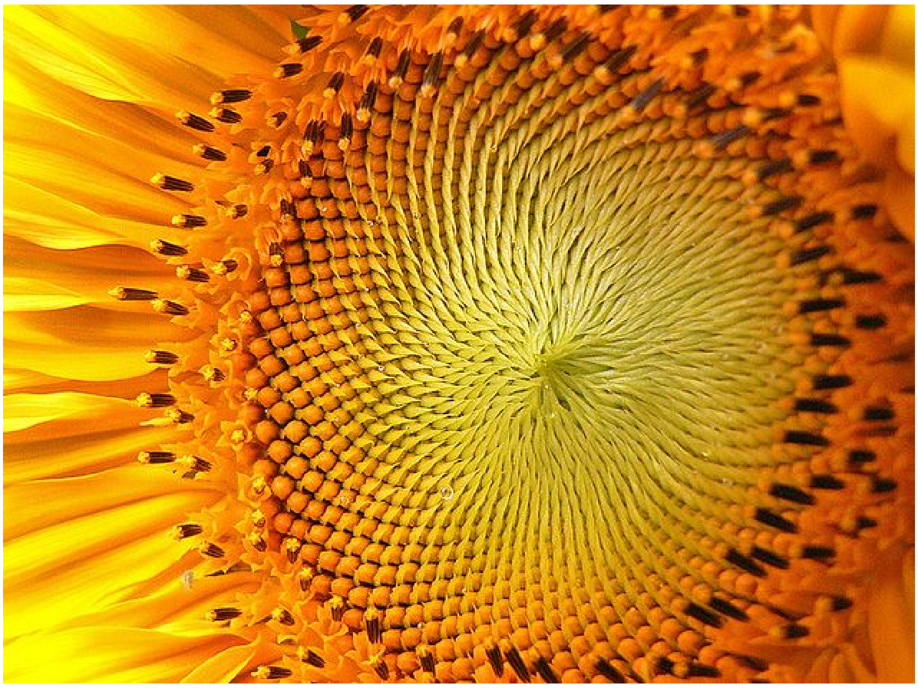

Figura 36 - Girassol

Fonte: https://super.abril.com.br/blog/supernovas/o-girassol-e-a-sequencia-de-fibonacci/#:~:text=O%20que%20talvez%20voc%C3%AA%20n%C3%A3o,seja%20um%20primor%20da%20matem%C3%A1tica.&text=Repare%20bem%3A%20se%20a%20flor,89%20apontar%C3%A3o%20para%20a%20outra.

A **Proporção Áurea** vai além da simples definição da palavra proporção, o cérebro humano parece reconhecer sua harmonia, já tendo sido motivo de vários estudos que apontaram que a maior parcela da população julga como mais belos objetos, estruturas arquitetônicas e até mesmo rostos que tem suas proporções mais próximas do **Número de Ouro.**

4.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA 2

4.3.1 Sequência Didática 2 - Etapa 1

Em um momento inicial, com o intuito de atrair o interesse dos educandos para os conceitos a serem desenvolvidos, deverá ser utilizada a animação: “Donald no País da Matemática” (DISNEY,1959). Dessa maneira, daremos início ao tema Números Irracionais, visto que o vídeo a ser apresentado trata de geometria.

Na sequência, os alunos devem ser conduzidos ao laboratório de informática do estabelecimento de ensino onde, em duplas, realizarão pesquisa sobre números irracionais, seu conceito e definição.

Na etapa seguinte, os pares de alunos devem realizar uma breve explanação sobre a pesquisa realizada. Durante as apresentações orais e discussões que porventura surgirem, o professor direcionará as abordagens de forma a definir, de forma única, o que é um número irracional, apresentando sua definição e o diferenciando de conjuntos numéricos já conhecidos. O professor então apresentará exemplos de números irracionais, dentre eles o Φ (phi).

Com o intuito de fixar os conceitos discutidos e a teoria sobre conjuntos numéricos, será proposta uma atividade onde os alunos deverão diferenciar números irracionais e racionais (Anexo III).

Como atividade de fixação, o docente deverá solicitar aos alunos que investiguem onde número Φ está presente em situações do cotidiano.

.

4.3.2 Sequência Didática 2 - Etapa 2

Nesse momento o foco do professor será de realizar a apresentação do retângulo de ouro, trazendo a mente dos discentes os conceitos de razão e proporção, bem como sua relação com o número de ouro. Para iniciar essa inserção o professor deve solicitar aos alunos a leitura no Anexo IV.

Após um momento de questionamentos e esclarecimentos acerca do texto o professor deverá solicitar que seja calculado pelos discentes (Anexo V) o comprimento do retângulo de ouro quando sua altura for igual a 1. Tal atividade tem como objetivo aplicar os conceitos da proporção áurea e encontrar como resultado o número de ouro.

Para solução da atividade proposta os alunos necessitarão utilizar-se de conceitos já estudados, no caso resolução de equações do 2º grau. O professor deve induzir os alunos a, fazendo uso de calculadora, utilizar uma casa decimal para encontrar o valor correspondente a $\sqrt{5}$ e, consequentemente para o cálculo de L. Depois duas casas e assim por diante, para que o aluno perceba que cada vez mais o valor de L corresponderá ao número de ouro

.

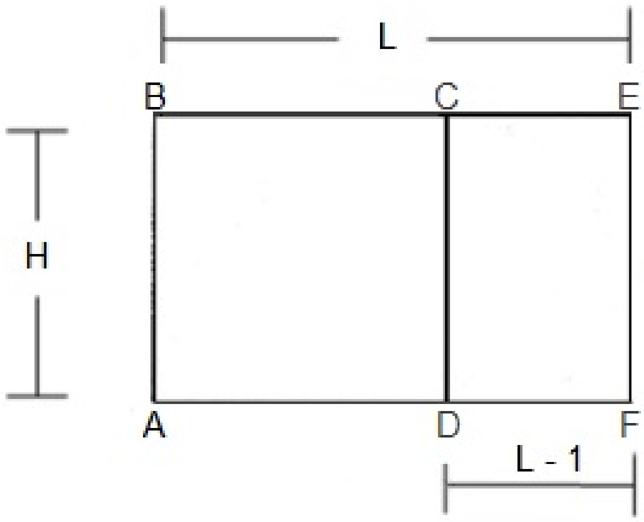

Figura 37 - Retângulo Áureo

Fonte: Desenvolvido pelo autor

4.3.3 Sequência Didática 2 - Etapa 3

Nessa aula o docente terá como objetivo que o Número de Ouro seja encontrado através da construção geométrica do Retângulo Áureo, para tanto serão utilizados régua e compasso.

O professor buscará atrair a atenção dos alunos apresentando situações onde o Retângulo de Ouro é encontrado na arquitetura, na arte e no corpo humano. Como exemplo, o Pathernon localizado na Grécia e na pintura de Da Vinci, Mona Lisa.

Figura 38 - Pathernon

Fonte: Matemática ensinada com arte

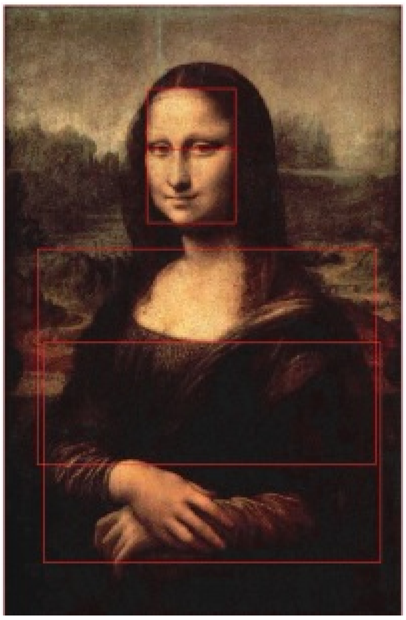

Figura 39 – Mona Lisa

Fonte: O número de ouro na arte, arquitetura e natureza

Utilizando a lousa o professor realizará, passo a passo, a construção objetivo da aula, solicitando que os alunos a reproduzam.

Passo 1: Construir o quadrado ABCD, com lado medindo ℓ.

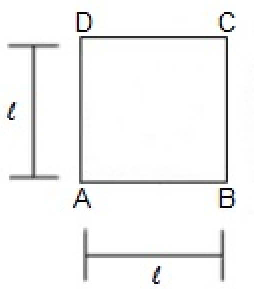

Figura 40 - Construção Retângulo de Ouro 1
Fonte: Desenvolvido pelo autor

Passo 2: Localizar o ponto médio do segmento AB.

Passo 3: Com a medida MF, fixar a ponta seca do compasso no ponto M e traçar o arco CE.

O ponto E é a intersecção entre o prolongamento da reta que contém o segmento AB e o arco com abertura MC.

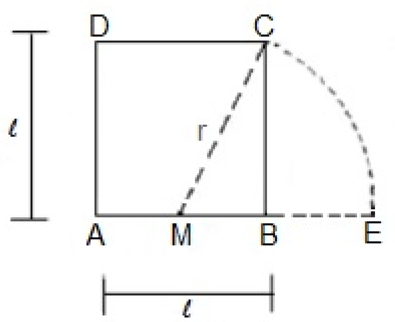

Figura 41 - Construção Retângulo de Ouro 2
Fonte: Desenvolvido pelo autor

Passo 4: Pelo ponto E , traçar uma reta perpendicular ao segmento AE.

A interseção entre o prolongamento da reta que contém CD e a perpendicular traçada resulta no ponto F.

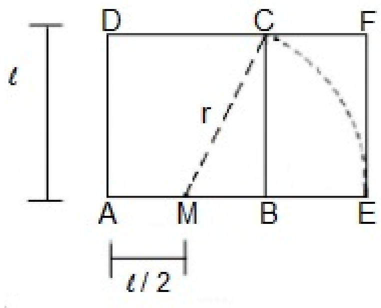

Figura 42 - Construção Retângulo de Ouro 3

Fonte: Desenvolvido pelo autor

Pelo método que foi construído podemos afirmar que o triângulo MBC é retângulo, aplicando o Teorema de Pitágoras temos que:

$$\overline{MC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{MB}^2$$

$$r^2 = \ell^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \sqrt{\ell^2 + \frac{\ell^2}{4}}$$

$$r = \frac{\ell\sqrt{5}}{2}$$

Para que o retângulo criado seja Áureo é necessário que a seguinte relação seja satisfeita:

$$\Phi = \frac{\overline{AE}}{\ell}$$

Temos então que:

$$\frac{\overline{AE}}{\ell}$$

$$\frac{\overline{AM} + \overline{ME}}{\ell}$$

$$\frac{\frac{\ell}{2} + r}{\ell}$$

$$\frac{\frac{\ell}{2} + \frac{\ell\sqrt{5}}{2}}{\ell}$$

$$\frac{\frac{\ell\left(1 + \sqrt{5}\right)}{2}}{\ell}$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Logo, o retângulo AEFD é Áureo. Do mesmo modo, BEFC é Áureo.

4.3.4 Sequência Didática 2 - Anexo III

Atividade: Diferenciado números Racionais e Irracionais

Identifique os números listados abaixo como racional ou irracional

a) $\sqrt{5}$

b) $\frac{7}{3}$

c) $\sqrt{9}$

d) - $\frac{1}{2}$

e) $\frac{3}{5}$

f) π

g) $\sqrt[3]{27}$

h) - $\sqrt{4}$

i) $\frac{1^3}{4}$

4.3.5 Sequência Didática 2 - Anexo IV

A curiosidade do ser humano com os elementos da natureza motivou inúmeras descobertas nos mais diversos campos de estudo, as proporções de alguns elementos motivos inúmeros pensadores e através deles tivemos a descoberta da **proporção áurea, também conhecida como Número de Ouro**. Desde Euclides de Alexandria (300 a.C.) a curiosidade e paixão despertadas pelos elementos da natureza, que apresentam em suas formas padrões algébricos e/ou geométricos, encanta arquitetos, artistas, estudiosos, estudantes e pessoas comuns, tal admiração persiste até os dias atuais e deve se fazer presente por muito tempo.

Tratada como conhecida como média áurea, proporção divina, razão áurea, regra de ouro, dentre outros, essa incrível medida pode ser obtida a partir de um segmento de reta, de modo que quando uma linha é dividida em duas partes e a parte mais longa (a) dividida pela parte menor (b) é igual à soma de (a) + (b) dividida por (a):

Figura 43 - Segmento Áureo
Fonte: Desenvolvido pelo autor

Ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \Phi$$

O resultado dessa expressão é uma constante chamada de **Razão Áurea, Proporção Áurea** ou **Número de Ouro**. A essa constante é atribuído como símbolo matemático a letra grega Φ (Phi), trata-se de um número irracional e tem valor aproximado de $\Phi = 1{,}6180339887$.

Além da reta, dividida em média e extrema razão, podemos encontrar o **Número de Ouro** nas mais diversas situações, ele está presente em vários elementos da natureza (no formato de uma concha, nas pétalas de uma flor), em obras de arte (O Nascimento de Vênus, Monalisa), na arquitetura (Sede da Onu, *Parthenon* grego) e até mesmo no corpo humano.

Figura 44 - Concha Nautilus

Fonte: https://www.infoescola.com/matematica/sequencia-de-fibonacci/

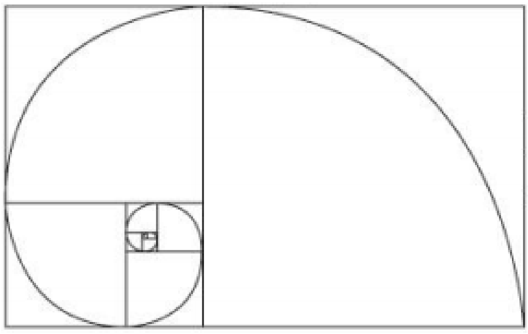

Figura 45 - Espiral

Fonte: Desenvolvido pelo autor

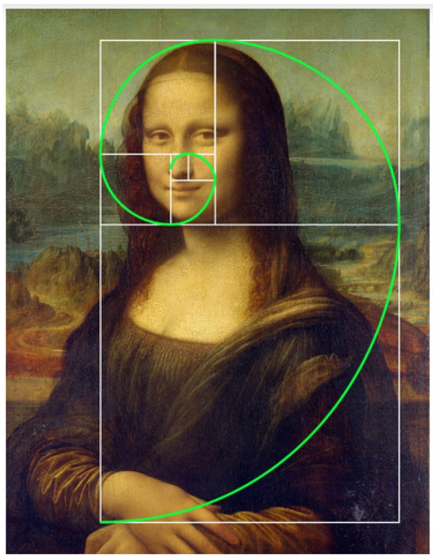

Figura 46 - Mona Lisa

Fonte: https://sabermatematica.com.br/numero-de-ouro.html

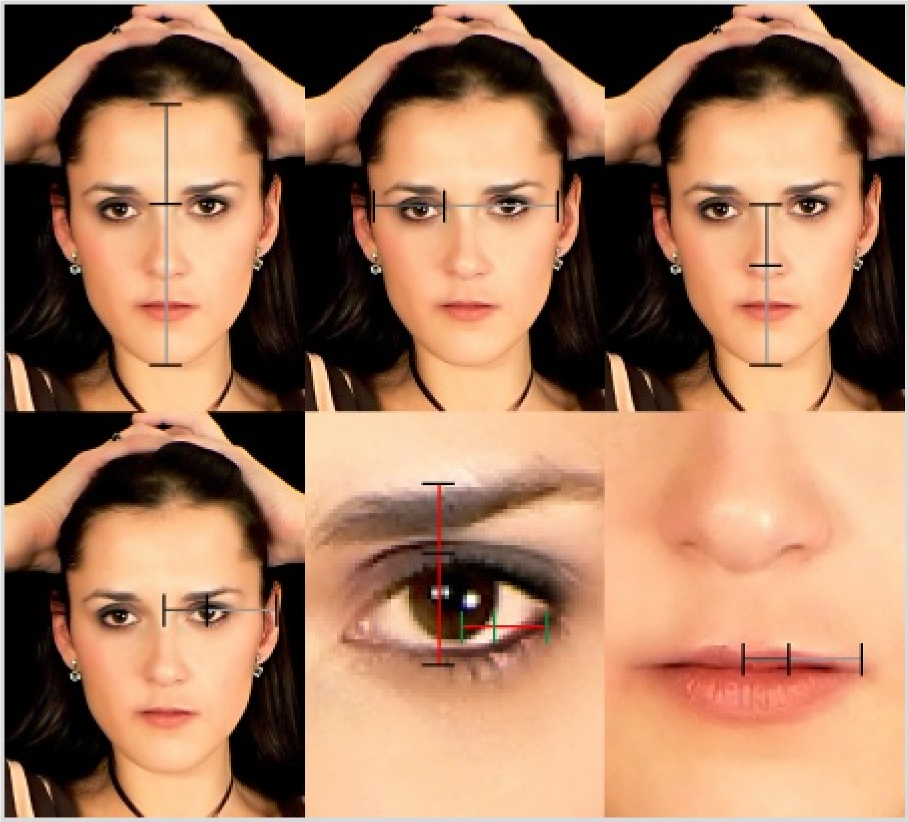

Figura 47 - Rosto humano e a Proporção Áurea

Fonte: Geometria sagrada (2016)

A **Proporção Áurea** vai além da simples definição da palavra proporção, o cérebro humano parece reconhecer sua harmonia, já tendo sido motivo de vários estudos que apontaram que a maior parcela da população julga como mais belos objetos, estruturas arquitetônicas e até mesmo rostos que tem suas proporções mais próximas do **Número de Ouro.**

4.3.6 Sequência Didática 2 - Anexo V

Atividade para fixação

Sabendo que os retângulos ABEF e DCEF são retângulos de ouro, calcule a medida do lado L, sabendo que o lado H tem medida igual a 1.

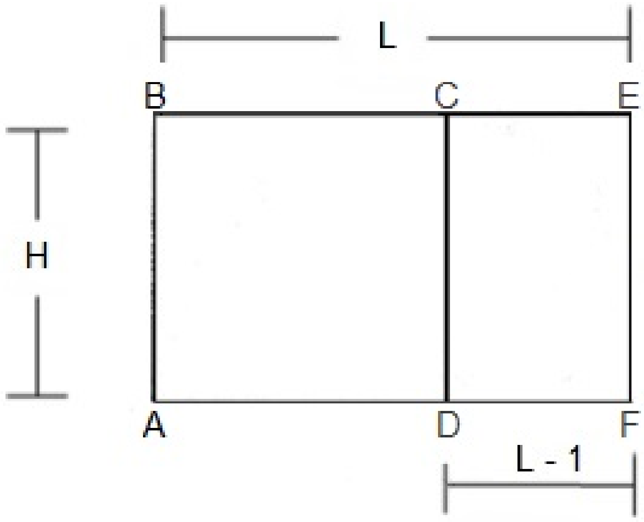

Figura 48 - Retângulo de Ouro
Fonte: Geometria sagrada (2016)

Resolução:

$$\frac{L}{H} = \frac{H}{L-H} \quad \rightarrow \quad \frac{L}{1} = \frac{1}{L-1} \quad \rightarrow \quad L^2 - L - 1 = 0$$

Como $\Delta = 5$, então:

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

O professor deve induzir o aluno a, fazendo uso de calculadora, utilizar uma casa decimal para o cálculo de L. Depois duas casas e assim por diante, para que o aluno perceba que quanto mais casas decimais utilizar, maior a aproximação do valor de L em relação ao número de ouro.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. J. **Alfabetização e Leitura**. São Paulo: Cortez, 1990.

BELINI, M. M. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci**. 2015. 86f. Dissertação (Mestrado). Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

BIEMBENGUT, M. S. **Número de Ouro e secção áurea: Considerações e sugestões para a sala de aula.** Blumenau/SC: Ed. da FURB, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Lei 9.394 de 20/12/1996. **Lei das Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB**. Brasília, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais de 5ª a 8ª. séries - Matemática.** Brasília, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 7 set 2021.

CHAVES, Adilson Silva; SABBA, Claudia Georgia. **O uso da Razão Áurea no Ensino da Matemática.** Anais do IX Colóquio de Pesquisa sobre Instituições Escolares, 2013. São Paulo. Disponível em: < http://docs.uninove.br/arte/ix_coloquio/trabalhos_completos.html>. Acesso em: 9 set 2021.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e debates. Brasília: SBEM, 1989.

DESENHO GEOMÉTRICO. **Proporção Áurea.** Disponível em: <http://www.uel.br/cce/mat/geometrica/php/dg/dg_4t.php>. Acesso em: 10 jun 2021.

DISNEY. **Donald e o País da Matemática**. 1959. Disponível em: <https://youtu.be/wbftu093Yqk>. Acesso em: 15 maio 2021.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6. Ed. São Paulo: Atlas, 2011.

HOUAISS, Antônio; VILLAR, Mauro de Salles; FRANCO, Francisco Manoel de Mello. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa.** Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. **Proportional reasoning.** In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), Number concepts and operations for the middle grades. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1988.

LIBÂNEO, J. C. **Organização e gestão na escola: teoria e prática**. Goiânia: Alternativa, 1994.

LÍVIO, Mário. **Razão áurea, a história de fi, um número surpreendente**. 2. edição, Rio de Janeiro-São Paulo: Record, 2007.

LUCCAS, Simone; BATISTA, Irinéia L. **A importância da contextualização e da descontextualização no ensino de matemática: uma análise epistemológica.** In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2010, Campo Grande. Disponível em: <http://www2.rc.unesp/eventos/matematica/ebrapem2008>. Acesso em: 31 ago 2021.

MARQUES, R. A. **Razão Áurea: Uma proposta para o ensino de números racionais**. 2013. 78f. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação <

MENEZES, Ebenezer Takuno de; SANTOS, Thais Helena dos. **Dicionário Interativo da Educação Brasileira – EducaBrasil.** São Paulo, Midiamix, 2001. Disponível em: <https://www.educabrasil.com.br/download/>. Acesso em: 6 set 2021.

MOREIRA, M. A. **Teorias de aprendizagem.** São Paulo: EPU, 1999.

NETO, P. R. de S. **A aplicação do Número de Ouro como Recurso Metodológico no Processo de Ensino-aprendizagem**. 2013. 109f. Dissertação (Mestrado). Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: Uma análise da influencia francesa**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS. Pró-Reitoria de Graduação. Sistema Integrado de Bibliotecas. **Orientações para elaboração de trabalhos científicos**: projeto de pesquisa, teses, dissertações, monografias, relatório entre outros trabalhos acadêmicos, conforme a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). 2. ed. Belo Horizonte: PUC Minas, 2016.

RUIZ, A. R. ; CARVALHO, A. M. P. **O conceito de proporcionalidade.** Revista da Faculdade de Educação - USP. Volume 16. São Paulo, 1990

SOARES, M. B. **Letramento: um tema em três gêneros.** Belo Horizonte, Autêntica, 1998.

SOUSA, A. do C. **Quando o lúdico faz parte do ensino de matemática.** IX Baú de matemática. Ermesinde/Valongo, Lisboa, 2004.

THOMAZ NETO, Mário; COTA, Shyrleny. **Explorando Conhecimentos Matemáticos por Meio de Atividades de Ensino com o Material dourado**. In: Anais do SIPEMAT. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2006.