



UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT

FERNANDA DOS PASSOS RIBEIRO ARAUJO

**POLIEDROS REGULARES: desmistificando conceitos matemáticos e
aplicações em Ciências**

JUAZEIRO – BA

2021

FERNANDA DOS PASSOS RIBEIRO ARAUJO

**POLIEDROS REGULARES: desmistificando conceitos matemáticos e
aplicações em Ciências**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, campus Juazeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Evando Santos Araújo.

JUAZEIRO – BA

2021

A663p Araújo, Fernanda dos Passos Ribeiro.
Poliedros regulares: desmistificando conceitos matemáticos e aplicações em Ciências / Fernanda dos Passos Ribeiro Araújo. – Juazeiro, 2021.
xviii; 113 f.: il.; 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, 2021.

Orientador: Prof. Dr. Evando Santos Araújo.

1. Matemática - Ensino. 2. Poliedros regulares. 3. Área e volume de sólidos. I. Título. II. Araújo, Evando Santos. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF

Bibliotecário: Renato Marques Alves- CRB 5/1458

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT

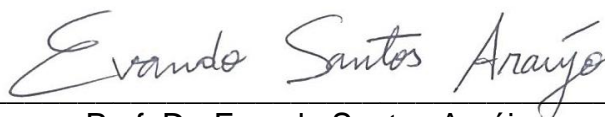
FOLHA DE APROVAÇÃO

**POLIEDROS REGULARES: desmistificando conceitos matemáticos e
aplicações em Ciências**

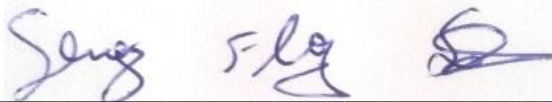
Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, campus Juazeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 08 de outubro de 2021.

Banca Examinadora



Prof. Dr. Evando Santos Araújo
Orientador. PROFMAT/UNIVASF



Prof. Dr. Sergio Floquet Sales
Examinador Interno. PROFMAT/UNIVASF



Prof. Dr. Marcelo Reis dos Santos
Examinador Externo. CCINAT/UNIVASF

Dedico às cuidadoras e professoras da Educação Infantil.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida, pela saúde e por não me deixar desistir apesar das adversidades.

Agradeço ao meu filho Gabriel pela inspiração para continuar aprendendo Matemática, ao meu esposo Plínio Franklin pelo amor e compreensão durante todo o mestrado, aos meus pais Euclides e Maria de Lourdes, minhas irmãs Amanda, Luanda e Samanda pelo apoio e incentivo em toda minha vida, sobretudo em tempos difíceis de pandemia. Agradeço à minha sogra Maria Goretti pela leitura desse trabalho.

Agradeço ao meu orientador prof. Dr. Evando Santos Araújo pela paciência e valiosa contribuição para realização desse trabalho.

Agradeço também a todos os professores do PROFMAT que compartilham o seu saber e nos motivam a estudar sempre mais. Em especial, agradeço ao prof. Dr. Edson Leite Araújo, prof. Me. Damião Silva, prof. Dr. Beto Rober Bautista Saavedra, prof. Dr. Lino Marcos da Silva, prof. Dr. Alexandre Ramalho Silva, prof. Dr. Alison Marcelo Van Der Laan Melo e prof. Me. Fábio Henrique de Carvalho.

Registro também meu agradecimento a Manoel Pereira, secretário do PROFMAT, que sempre prestou todo suporte ao longo do curso e agradeço aos membros da banca pelas contribuições significativas para melhoria do trabalho final.

Agradeço aos professores Me. Aristóteles Alves Feitosa e Me. Everaldo dos Santos Gonçalves que disponibilizaram suas turmas para realização de pesquisa de campo que, infelizmente, não foi possível em virtude da suspensão das aulas presenciais no IF Sertão Pernambucano Campus Petrolina e IFBA Campus Juazeiro.

Agradeço aos colegas de turma Fabiana, Layane, Gysmenia, Gonçalo, Alberto, Renato, Pablo, Jamerson, Edinalva, Edmarcos, Douglas, Pedro, Jurandir, Luciano, Tiago, João, Guedes, Rinaldo e Valnei que tornaram essa caminhada mais fácil e, em alguns momentos, até divertida.

Agradeço às amigas Emanuely, Quelle, Ariadne, Daniela, Juliana, Ilka, Luana, Kaíla e Naimith pela amizade e carinho de sempre.

Agradeço aos colegas de trabalho Everaldo, Maria Lair, Amenaíde, Filypi, João Paulo, Ubirajara e William pelo incentivo para conclusão do mestrado.

Por fim, a todas as pessoas que contribuíram para realização desse trabalho, muito obrigada!

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Elementos geométricos primitivos: ponto (a); reta (b) e plano (c).	25
Figura 2. Ilustração de linha poligonal aberta (a) e fechada (b).....	26
Figura 3. Ilustração de polígono (a) e região poligonal (b).	27
Figura 4. Ilustração de polígono convexo (a) e polígono não-convexo (b).....	28
Figura 5. Representação do plano α (a) e os semiplanos α_1 e α_2 (b).....	29
Figura 6. Ilustração de semiplanos em um polígono convexo (a) e semiplanos em um polígono não-convexo (b).....	29
Figura 7. Polígonos regulares.....	30
Figura 8. Alguns exemplos de poliedros.....	31
Figura 9. Ilustração dos elementos do poliedro: face (a), aresta (b) e vértice (c).	32
Figura 10. Ilustração segundo definição de Lima et al. (2004) para poliedro convexo (a) e poliedro não-convexo (b).	34
Figura 11. Ilustração da diagonal de uma face (a) e diagonal de um poliedro (b). ...	34
Figura 12. Ilustração de ângulo triédrico (a), ângulo tetraédrico (b) e ângulo pentaédrico (c).	35
Figura 13. Ilustração de poliedros eulerianos não-convexos.....	36
Figura 14. Ilustração de um poliedro euleriano convexo (a) e um poliedro euleriano não-convexo (b).	37
Figura 15. Da esquerda para a direita, os poliedros regulares: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.	39
Figura 16. Associação dos poliedros regulares proposta por Platão.....	39
Figura 17. Poliedros semirregulares obtidos por truncaduras em poliedros regulares.	41
Figura 18. Poliedros semirregulares obtidos por snubificação em poliedros regulares.	41
Figura 19. Poliedros regulares e seus duais.....	42
Figura 20. Poliedros regulares desenhados por Leonardo Da Vinci.....	43
Figura 21. Alguns poliedros semirregulares desenhados por Leonardo Da Vinci. ...	43
Figura 22. Modelo de Kepler do sistema solar (a) e esfera inscrita no tetraedro regular do modelo de Kepler do sistema solar (b).	44

Figura 23. Acima os poliedros de Platão formados por polígonos regulares. Abaixo alguns poliedros de Platão que não são formados por polígonos regulares.	46
Figura 24. Poliedros regulares formados com triângulos equiláteros: tetraedro regular (a), octaedro regular (b) e icosaedro regular (c).....	50
Figura 25. Poliedro regular formado com quadrados: faces (a) e hexaedro regular (b).	50
Figura 26. Poliedro regular formado com pentágonos regulares: faces (a) e dodecaedro regular (b).....	51
Figura 27. Polígonos regulares formando os vértices dos poliedros regulares.	52
Figura 28. Hexágonos regulares formando uma figura plana.....	52
Figura 29. Algumas diagonais dos poliedros regulares.	55
Figura 30. Poliedros regulares inscritos em uma esfera.....	56
Figura 31. Poliedros regulares circunscritos a uma esfera.	57
Figura 32. Poliedros regulares circunscritos a uma esfera e inscritos em outra esfera.	57
Figura 33. Altura (AP) do tetraedro regular (a) e relação entre altura (AP) do tetraedro e raio da esfera circunscrita (AO) e raio da esfera inscrita (OP) (b).....	58
Figura 34. Baricentros dos triângulos equiláteros BCD (a) e ABC (b).....	59
Figura 35. Semelhança entre os triângulos APM E ASO.	60
Figura 36. Aresta do hexaedro regular em relação ao raio da esfera circunscrita (a), aresta do octaedro regular em relação ao raio da esfera circunscrita (b), aresta do octaedro regular em relação ao raio da esfera inscrita (c), triângulo retângulo ONE (d), hexaedro regular inscrito em um dodecaedro regular (d) e diagonal de um pentágono regular (e).....	61
Figura 37. Circunferência circunscrita ao pentágono regular (a) e ângulo DÂB (b)..	62
Figura 38. Relação entre raio da circunferência circunscrita (x) ao pentágono regular, raio da esfera circunscrita (R) ao dodecaedro regular e raio da esfera inscrita (r) ao dodecaedro regular.	63
Figura 39. Seção em um icosaedro regular (a) e triângulo AEK. (b).	64
Figura 40. Raio da esfera inscrita ao icosaedro regular (a), baricentro do triângulo equilátero ABC (b) e Relação entre segmento (AP) do triângulo equilátero, raio da esfera circunscrita (R) e raio da esfera inscrita (r) ao dodecaedro regular (c).	64

Figura 41. Superfície poliédrica dos poliedros regulares: tetraedro (a), hexaedro (b), octaedro (c), dodecaedro (d) e icosaedro (f).....	66
Figura 42. Pentágono regular inscrito em uma circunferência (a) e apótema do pentágono regular (b).....	67
Figura 43 – Ângulo CÂB (a) e ângulo DÂB (b).	68
Figura 44. Decomposição do tetraedro regular (a), hexaedro regular (b), octaedro regular (c), dodecaedro regular (d) e icosaedro regular (e).....	71
Figura 45: Hexaedro regular com aresta de 1 m de comprimento (a), aresta de 0,5m de comprimento (b) e aresta de 0,25m de comprimento (c).....	76
Figura 46 – Esquema de estrutura atômica e suas partículas fundamentais.	80
Figura 47 – Representação de substância simples como H ₂ (a) e substância composta como H ₂ O.....	81
Figura 48 – Representação da molécula de cloreto de sódio (NaCl) (a) e da molécula de água H ₂ O (b).	82
Figura 49 – Truncamento de um tetraedro.	83
Figura 50 – Poliedros gerados a partir de um octaedro (a) e icosaedro (b).	83
Figura 51 – Dois poliedros semirregulares com simetria octaédrica e 24 vértices: hexaedro truncado (a) e octaedro truncado (b).	84
Figura 52 – Poliedro Frank-Kasper de 16 vértices correspondendo ao Cu ₁₂ Mg ₄ (a) e sua decomposição como um composto de um Cu ₁₂ tetraedro truncado e um Mg ₄ tetraedro (b).....	85
Figura 53 – Adamantano como um composto de um tetraedro e um octaedro: esqueleto carbonáceo (átomos de carbono terciários e secundários em vermelho e preto, respectivamente) (a), arranjo tetraédrico dos átomos de carbono terciários (b) e arranjo octaédrico dos átomos de carbono secundários (c).	85
Figura 54 – Estrutura de alguns fulerenos, da esquerda para a direita: Si ₂₀ , Si ₂₄ , Ge ₂₈ , C ₆₀ , C ₇₀ , C ₈₀	86
Figura 55 – Estruturas alótropas do carbono: grafite (a), diamante (b), fulereno (c), nanotubo de carbono de parede simples (d), nanotubo de carbono de parede múltipla (e) e grafeno (f).	86
Figura 56 – Icosaedro truncado de Arquimedes (a) e truncamento do icosaedro regular (b).....	88

Figura 57 – Representação do fulereno C ₆₀ , destacando os átomos (a) e as ligações interatômicas e estruturas tipo pentágono e hexágono (b).	88
Figura 58 – Representação do fulereno C ₂₀	89
Figura 59 – Representação da estrutura de fulerenos com materiais manipuláveis: C ₅₀ (a), C ₆₀ (b) e C ₇₀ (c).	90
Figura 60 – Configurações iniciais usadas nas simulações de dinâmica molecular: um icosaedro (2869 átomos) (a), um cuboctaedro (2869 átomos) (b), um aglomerado esférico de 2899 átomos (c), um tetraedro perfeito de 2925 átomos (d), um tetraedro com ápice superior deslocado para um dos vértices da base com 2856 átomos (e), e um tetraedro com seu ápice superior deslocado para uma das faces laterais com 2925 átomos (f).	93
Figura 61 – Morfologia de nanopartículas metálicas: octaédrica (a), octaédrica truncada (b), cuboctaédrica (c), icosaédrica (d), decaédrica (e), inodocaédrica (f) e marks decaédrica (g).	94
Figura 62 – Diferentes formas de nanomaterial: cilíndrica (a), icosaédrica (b), fio (c), esférica (d), hexaédrica (e), octaédrica (f) e tetraédrica (g).	95
Figura 63 – Imagens de minerais pirita (a), galena (b) e fluorita (c).	97
Figura 64 – Principais características físicas do diamante da Serra do Espinhaço. .	97
Figura 65 – Imagem de cristal de diamante de hábito octaédrico (a) e cristal de diamante de hábito cúbico (b).	98
Figura 66 – Representação do (a) octaedro de ferro, (b) polimerização pelo ápice, (c) aresta e (d) face.	98
Figura 67 – Representação da célula unitária de Fe ₂ O ₃ , ressaltando o cluster de FeO ₆	99
Figura 68 – Estrutura do solo segundo a forma dos agregados: laminar (a), prismática (b), colunar (c), bloco angular (d) e granular (f).	100
Figura 69 – Escala de arredondamento (esfericidade) e angularidade.	101
Figura 70 – Radiolária Aulonia hexagona e uma micrografia eletrônica de um grão de pólen de uma convulvullaceae com um diâmetro de cerca de 120nm.	103
Figura 71 – Hexapodus inflatus – Octahedral (a), Ovulus coralli – Octahedral (b), Pseudoglobulus footballi – dodecaédrico (c), Braarudosphaera bigelowii - dodecaedro perfeito (d), Braarudosphaera pentagonica (e), Tentaculus gigantiucs - dodecaédrico	

(esferas em cantos) (f), Icosaédrica (stellated) (g), <i>Metamorphosus lucidus</i> – Icosaédricos (h), <i>Tentaculus minimus</i> - dodecaédrico (com esferas em cantos) (i), <i>Curvata Astrosphera</i> - <i>Circogonia icosahedra</i> - perfeito icosaedro (j), <i>Dictyochophyceae</i> – <i>Silicoflagellates</i> (k).	104
Figura 72 – O icosaedro e a geometria pentagonal do DNA: visão de cima para baixo (a), vista lateral 1 (b), vista lateral 2 (c), visão de cima para baixo sobreposto a um gráfico de dispersão de DNA (d), espiral de discos pentagonais sobrepostos (icosaedra incompleta), vista de cima para baixo (e), espiral de discos pentagonais sobrepostos (icosaedra incompleta), vista de cima para baixo, sobreposto ao gráfico de dispersão do DNA (com dodecaedros internos – faces numeradas identificam as posições do dNTP).....	105
Figura 73 – Capsídeos icosaédricos centrados em um eixo duplo: forma esquemática de um capsídeo (a) e vírus dos satélites do mosaico do tabaco (b).....	106
Figura 74 – Micrografia eletrônica de alguns vírus representativos de animais, plantas, fungos e bactérias.	106
Figura 75 – Representação de vírions mostrando seus tamanhos (20-400 nm) e formas (esféricas, poliédricas, elípticas, em forma de bastão, etc.).	107
Figura 76 – Formação de capsídeo icosaédrico com anéis de cinco subunidades (pentâmeros) ou seis subunidades (hexâmetros) nos vértices de cada uma das faces.	108
Figura 77 – Montagem de um capsídeo icosaédrico (T=1) de um vírus esférico. ..	108
Figura 78 – Apresentação esquemática para formação de capsídeos icosaédricos T=1 (subunidade A), T=3 (subunidades A, B e C) e T=4 (subunidade A, B, C e D).	109
Figura 79 – Exemplos de capsídeos icosaédricos correspondentes a números diferentes T.	109
Figura 80 – Simetria cúbica dos poliedros regulares (a) e capsídeos icosaédricos com número de triangulação diferente com princípio de eixos de simetria (b).	110
Figura 81 – Vírus esféricos com capsídeos icosaédricos. PAV: Parvovírus; CMV: Citomegalovírus; NV: Norovírus; HBV: vírus da hepatite B; 29 1: bacteriófago; SARS-CoV-2: vírus-2 da síndrome respiratória aguda grave; BTV: vírus da língua azul; SV40:	

vírus Simian 40; HSV-1: vírus Herpes simplex; MLV: vírus da leucemia murina; HIV-1: Vírus da imunodeficiência humana-1; Influenza: vírus da influenza.....	111
Figura 82 – Os engenheiros Caner Copperrider e Ken Lee trabalham no protótipo do robô tetwalker no Goddard Flight Center da NASA.....	112
Figura 83 – Simulação de movimento do tetwalker.	113
Figura 84 – Etapas do movimento do mecanismo móvel na forma de hexaedro. ..	113
Figura 85 – Representações planas e esféricas poliedros regulares, da esquerda para a direita: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.	114
Figura 86 – Discretização da esfera usando um hexaedro.	114
Figura 87 – Malha primal (em azul) e diagrama de Voronoi para malhas icosaédricas com 12 geradores (em preto) (a) e malha primal (em azul) e diagrama de Voronoi para malhas icosaédricas com 42 geradores (em preto) (b).	115
Figura 88 – Grade icosaédrica usada no modelo OLAM (a), refinamento das grades horizontais (b), modelo OLAM, cobertura vegetal e domínio das grades global e acoplada para a América do Sul (c).	117
Figura 89 – Globo terrestre transformado em icosaedro regular (a) e projeção de Buckminster Fuller (b).	117
Figura 90 – Plataforma de Observação em Bottrop-Batenbrock.	118
Figura 91 – Atomium em vista inferior (a) e vista aérea (b).	119
Figura 92 – Pirâmide de entrada do Museu do Louvre.....	119
Figura 93 – Bosque da Esperança em vista inferior (a) e vista aérea (b).	120
Figura 94 – Biosfera de Montreal.	120

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Nomenclatura de alguns polígonos.....	28
Tabela 2 – Nomenclatura de alguns poliedros.....	33
Tabela 3 – Nomes dos poliedros de Platão.	48
Tabela 4 – Possibilidades para construção de poliedros regulares.	53
Tabela 5 – Possibilidades para número de lados (p) e arestas que concorrem em cada vértice (q) em um poliedro regular.....	54
Tabela 6 – Quantidade de diagonais em um poliedro regular.	56
Tabela 7 – Comprimento das arestas dos poliedros regulares em função do raio da esfera circunscrita e do raio da esfera inscrita.	65
Tabela 8 – Área da superfície poliédrica em função do comprimento da aresta.....	69
Tabela 9 – Área da superfície dos poliedros regulares em função do comprimento da aresta, do raio da esfera circunscrita e do raio da esfera inscrita.	69
Tabela 10 – Volume dos poliedros regulares em função do comprimento da aresta, do raio da esfera circunscrita e do raio da esfera inscrita.	73
Tabela 11 – Área de superfície específica dos poliedros regulares em função do comprimento da aresta, do raio da esfera circunscrita e do raio da esfera inscrita...	74
Tabela 12 – Área da face, área de superfície, volume e área de superfície específica dos poliedros regulares.	75
Tabela 13 – Área de superfície específica dos poliedros regulares e da esfera circunscrita.	77
Tabela 14 – Área de superfície específica dos poliedros regulares e da esfera inscrita.	78

LISTA DE SIGLAS

ASE - Área de Superfície Específica

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

CAD - Projeto/Desenho Auxiliado por Computador

DNA - Ácido Desoxirribonucleico

LDB - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

OCDE - Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico

OLAM - *Ocean-Land Atmosphere Model* (Modelo de atmosfera oceano-terra)

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

RNA - Ácido Ribonucleico

“Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim preparar a mente para pensar.”

Albert Einstein

RESUMO

O conhecimento explanado de forma interdisciplinar representa uma importante ferramenta para a busca de uma aprendizagem significativa em Matemática, com vistas à contextualização e aplicações dos conceitos matemáticos em outras áreas do saber. Nesse contexto, os regimentos educacionais oficiais da área de Matemática e suas Tecnologias defendem a construção de uma visão mais integrada da Matemática e de sua relação com a Ciência. Entre as habilidades destacadas para o ensino significativo de Matemática no Ensino Básico está o conhecimento e a aplicação de conceitos de poliedros regulares no entendimento de fenômenos da natureza e solução de situações-problemas. Embora se tenha o conhecimento da importância desse tema de estudo para a melhoria do ensino-aprendizagem de Matemática, conceitos básicos como área superficial e volume, bem como temáticas interdisciplinares envolvendo a significação do estudo de poliedros regulares ainda são pouco explorados na literatura e até mesmo no ambiente escolar. Diante do exposto, o objetivo principal deste trabalho é desmistificar os conceitos matemáticos dos poliedros regulares e suas aplicações na modelagem de fenômenos e situações-problema em áreas da Ciência básica e aplicada. Nesse sentido, foi realizada uma revisão da literatura, com os objetivos específicos de revisar conceitos básicos de geometria plana e espacial; reconhecer os poliedros regulares, seus elementos e suas relações com poliedros platônicos e outras estruturas geométricas tridimensionais; determinar a área superficial e o volume desses sólidos; reconhecer e relacionar os conceitos matemáticos dos poliedros regulares aplicados à modelagem de fenômenos em áreas da Ciência. Com os resultados da pesquisa, espera-se oferecer especialmente ao professor de Matemática do Ensino Básico, uma visão diferenciada de sua formação inicial, com vista ao seu desenvolvimento profissional, com consequência na melhoria do seu fazer pedagógico e no ensino-aprendizagem de Matemática.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem de Matemática. Poliedros regulares. Área e volume de sólidos. Aprendizagem significativa. Ciência básica e aplicada.

ABSTRACT

Interdisciplinary knowledge represents an important tool to seek meaningful learning in Mathematics, with a view to contextualizing and applying mathematical concepts in other scientific areas. In this context, the official educational regulations in the Mathematics and its Technologies area defend the construction of a more integrated view of Mathematics and its relationship with Science. Among the developed abilities for the meaningful teaching of Mathematics in Basic Education are knowing and applying concepts from regular polyhedra in understanding phenomena and solving problem-situations. Although the importance of this topic of study is known to improve the teaching-learning of Mathematics, basic concepts such as surface area and volume, as well as interdisciplinary themes involving the significance of the study of regular polyhedra are still little explored in the literature and in the school environment. Given the above, the main objective of this work is to demystify the mathematical concepts of regular polyhedra and their applications in modeling phenomena and problem-situations in areas of basic and applied science. In this sense, a literature review was proposed, with the specific objectives of reviewing basic concepts of plane and spatial geometry; recognize regular polyhedra, their elements and their relationships with Platonic polyhedra and other three-dimensional geometric structures; determine the surface area and volume of these solids; recognize and relate the mathematical concepts of regular polyhedra applied to the modeling of phenomena in Science areas. With the results of this research, it is expected to offer, especially to the Basic Education Mathematics teacher, a differentiated view of their graduation level training, with a view to their professional development, with the consequent improvement of their pedagogical practice and teaching-learning of Mathematics.

Keywords: Teaching-learning of Mathematics. Regular polyhedral. Area and volume of solids. Meaningful learning. Basic and applied science.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	18
2 METODOLOGIA	23
3 CONCEITOS MATEMÁTICOS	25
3.1 DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS	25
3.2 POLIEDROS DE PLATÃO E POLIEDROS REGULARES.....	38
3.2.1 Diferenças conceituais entre poliedros regulares e poliedros de Platão	45
3.2.2 Diagonais dos poliedros regulares	54
3.2.3 Poliedros regulares inscritos e circunscritos na esfera	56
3.2.4 Área de superfície	65
3.2.5 Volume	70
3.2.6 Área de superfície específica	73
4 APLICAÇÕES EM CIÊNCIA BÁSICA E APLICADA	80
4.1 QUÍMICA, CIÊNCIA DOS MATERIAIS, NANOTECNOLOGIA	80
4.2 MINERALOGIA, GEOTECNIA E TECNOLOGIA DO CONCRETO	96
4.3 BIOLOGIA E BIOINFORMÁTICA	102
4.4 ROBÓTICA E MOVIMENTO.....	112
4.5 METEOROLOGIA E CARTOGRAFIA.....	113
4.6 ARQUITETURA E ENGENHARIA	118
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS	122
REFERÊNCIAS	

1 INTRODUÇÃO

A utilização majoritária de metodologias tradicionais para ensinar Matemática no ensino básico brasileiro, centradas apenas no conhecimento formal de definições, técnicas e demonstrações pode estar relacionada com os baixos índices de aprendizagem e com o desinteresse do aluno pelo entendimento de conceitos matemáticos essenciais para o desenvolvimento de suas competências e solução de problemas reais.

Entretanto, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9394/96) é bastante clara com essa questão, quando define como objetivos do ensino médio, o aprimoramento do educando como ser humano, sua formação ética, o desenvolvimento de sua autonomia intelectual e de seu pensamento crítico, sua preparação para o trabalho e o desenvolvimento de competências para continuar seu aprendizado (BRASIL, 1996). Assim, a função social da escola deve ser caracterizada especialmente como formadora de cidadãos conscientes e capazes de interagir socioeconomicamente na sociedade, preparando o aluno para os desafios atuais no mundo do trabalho ou no ensino superior.

Nessa discussão, é importante que o professor leve em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Nesse aspecto, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

Espera-se que ao final do ensino médio, os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreender que a Matemática é uma ciência com características próprias; que se organiza via teoremas e demonstrações; perceber a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; e saber apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p.69).

Além disso, para que estes objetivos possam ser alcançados, Rocha (2018) destaca que o professor não deve ignorar os avanços tecnológicos, nem sua capacidade de se adaptar e de aprender, bem como seu potencial pedagógico e sua importância na sociedade. Souza (2018, p.100) destaca também que “a educação deve ser repensada como um todo, o estudo da inovação pedagógica deve ser intensificado nas escolas enfatizando a desmistificação de conceitos, o resgate da

dimensão do humano neste processo e o respeito aos direitos do cidadão”. Portanto, cabe ao professor conhecer os recursos disponíveis, analisar e avaliar de forma criteriosa para escolher quais instrumentos utilizar, bem como definir local, momento e metodologia adequados ao seu contexto escolar.

Dessa forma, a interdisciplinaridade pode ser uma metodologia alternativa para a busca de uma aprendizagem significativa em Matemática com contextualização e aplicações práticas dos conceitos matemáticos em outras áreas do conhecimento. Segundo Terradas (2011, p. 99) “a interdisciplinaridade é a atitude que se deve tomar para superar todo e qualquer enfoque fragmentado que ainda mantemos de nós mesmos, do mundo e da realidade que nos cerca”. Silva, Cruz e Silva (2020) também defendem que ao dar oportunidade para que os estudantes realizem associações dos conceitos trabalhados nos livros didáticos com situações mais reais, a compreensão será facilitada por meio da visualização na prática.

Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), prevista na LDB define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, organizadas por áreas do conhecimento. Segundo esse documento de caráter normativo, no Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias além de consolidar os conhecimentos desenvolvidos na Educação Infantil e na Educação Fundamental e agregar novos conhecimentos, “os estudantes devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade” (BRASIL, 2017).

Entre as habilidades destacadas como resultado do aprendizado significativo de Matemática no Ensino Básico está o conhecimento e a aplicação de conceitos de geometria espacial no entendimento e solução de situações-problemas. A geometria espacial é o ramo da Matemática que estuda figuras tridimensionais no espaço. Borsoi (2016) destaca que “no estudo da Geometria Espacial, em específico, o aluno é convidado a ampliar sua capacidade de abstração e surge mais fortemente a necessidade de mobilizar as habilidades de visualização espacial, pois nem tudo que compõe um objeto está visível em primeiro plano”. Alguns destaques envolvem a planificação e os elementos dessas estruturas espaciais, suas propriedades e seu uso na modelagem e solução de problemas.

No contexto do estudo de geometria espacial, os poliedros regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro) têm recebido bastante atenção pelas inúmeras relações de suas formas tridimensionais com elementos de interesse de estudo em outras áreas do conhecimento. O estudo dos poliedros regulares se justifica pela possibilidade de modelagem matemática e explicação de diversas situações do cotidiano, de fenômenos da natureza e do entendimento das relações existentes entre essas geometrias e outras áreas de interesse da ciência básica e aplicada tais como em Biologia, Química, Ciências dos Materiais, Nanotecnologia, Meteorologia, Cartografia, Robótica, Arquitetura e Engenharia, entre outras (ATIYAH; SUTCLIFFE, 2003; BHATT E KUMAR, 2017; GHASEMI et al., 2020; MCKENNA, 2009; PARVEZ, 2020; PEIXOTO, 2013).

A geometria desses poliedros pode ser detectada, por exemplo, nos vírus. Muitos vírus têm um capsídeo viral, uma concha de proteína que protege e envolve o genoma viral, na forma de um icosaedro. Nesse caso, o icosaedro representa uma ótima geometria para a formação de um invólucro protetor do genoma a partir de subunidades idênticas, pois segundo Rivero (n.d) a estrutura icosaédrica é a maior estrutura que pode acomodar 60 subunidades assimétricas. É possível encontrar, por exemplo, a geometria do icosaedro e do dodecaedro no estudo da zoologia das diatomáceas, que são espécies de algas microscópicas que vivem tanto em água doce e salgada e representam uma parte essencial da cadeia alimentar nos oceanos.

Em Química, a idealização de estruturas moleculares associa as posições de um conjunto de átomos aos vértices de um poliedro regular. Por exemplo, uma molécula de hexafluoreto de enxofre (SF_6), um gás muito utilizado na indústria como isolante elétrico, é composta por seis átomos de flúor (F) que estão dispostos simetricamente em torno de um átomo de enxofre (S) central, a partir de seis pares de ligações de elétrons de F e S. Os átomos de F estão posicionados nos vértices de um octaedro regular e essa geometria molecular garante a estabilidade química dessa substância à temperatura ambiente. Atiyah e Sutcliffe (2003) ainda relataram que pesquisas em Física, Química e Matemática abordam estudos sobre a energia de partículas pontuais, as quais se apresentavam em estado de equilíbrio quando dispostas nos vértices desses poliedros. O Fulereno (C_{60}), forma alotrópica do carbono, com diversas aplicações em ciência dos materiais (produção de células

solares, supercapacitores, filmes finos e em catálise), tem seus sessenta átomos localizados nos vértices de um icosaedro truncado e suas ligações são representadas pelas arestas desse poliedro (NIERENGARTEN, 2004).

Em Mineralogia, por exemplo, a geometria dos poliedros regulares é utilizada para modelar a morfologia superficial dos agregados, sua esfericidade e angularidade. Esses parâmetros influenciam diretamente as propriedades físicas e o comportamento mecânico dos solos (CHAVES, 1997; COSTA, 2011; GARCÍA-MONGE *et al.*, 2010; PEREIRA, 2010). Estudos recentes revelam que o pressuposto da esfericidade das partículas dos agregados perde validade à medida que se considera partículas cada vez menores e defendem a substituição da suposição de uma forma esférica por poliedros regulares para melhorar a precisão da estimativa de área superficial específica das partículas e calcular a demanda de água para dosagem de argamassas e concreto (GHASEMI, EMBORG E CWIRZEN, 2019; GHASEMI *et al.*, 2020; MARTINS, 2020; MULAZZANI E GUBIANI, 2016; NUNES, TEIXEIRA E SARAIVA, 2021).

Na Meteorologia a noção de poliedros regulares inscritos em uma esfera pode ser utilizada para a modelagem de fenômenos atmosféricos e oceânicos. A modelagem do tipo icosaédrica é a mais utilizada nos grupos de estudos e o modelo OLAM com refinamento das malhas geodésicas possibilita a simulação dos fenômenos em escala local e global, viabilizando estudos com grande importância científica e econômica, social e política (PEIXOTO, 2013; SILVA *et al.*, 2009; SILVA, 2014).

Contudo, embora se tenha o conhecimento da importância de se mostrar a significação do estudo de conceitos matemáticos dos poliedros regulares para a melhoria do ensino-aprendizagem de Matemática (como é o caso das discussões de seus elementos, do cálculo de área superficial e volume e de suas relações com outras formas geométricas tridimensionais para a modelagem em ciências, trabalhos relativos a essa temática em Ensino e Educação Matemática ainda são escassos na literatura.

Diante do exposto, o objetivo principal deste trabalho é desmistificar os conceitos matemáticos dos poliedros regulares e suas aplicações na modelagem de fenômenos e situações-problema em áreas da Ciência. Nesse contexto, foi realizada

uma revisão da literatura com os objetivos específicos de revisar conceitos básicos de geometria plana e espacial; reconhecer os poliedros regulares, seus elementos e suas relações com poliedros platônicos e outras estruturas geométricas tridimensionais; determinar a área superficial e o volume de poliedros regulares; reconhecer e relacionar os conceitos matemáticos dos poliedros regulares aplicados à modelagem de fenômenos em áreas da ciência básica e aplicada.

Essas ações podem auxiliar os professores de Matemática e de Ciências do Ensino Básico, no desenvolvimento e execução de atividades pedagógicas interdisciplinares envolvendo o estudo de poliedros regulares. Com os resultados da pesquisa, espera-se oferecer ao professor de Matemática uma visão diferenciada de sua formação inicial, com vista ao seu desenvolvimento profissional, com consequência na melhoria do ensino-aprendizagem de Matemática.

2 METODOLOGIA

Este trabalho de dissertação se caracteriza como um estudo de revisão da literatura, de caráter exploratório-descritivo, com o objetivo de desmistificar definições e conceitos matemáticos relacionados aos poliedros regulares, bem como suas aplicações em Ciências. O trabalho foi executado a partir das etapas de investigação e de análise explicativa das soluções e de síntese integradora (LIMA; MIOTO, 2007; MARCONI; LAKATOS, 2003).

Na etapa de investigação das soluções, usou-se as bases de dados *Scopus* e Google Acadêmico para a busca de trabalhos acadêmicos/científicos como teses, dissertações, livros, capítulos de livro e artigos científicos relativos ao objetivo geral da pesquisa. Como critério semântico de busca, as palavras-chave “ensino de Matemática” “poliedros regulares”, “conceitos”, “aplicações” e “modelagem” foram utilizadas de forma combinada para iniciar a pesquisa bibliográfica (LIMA; MIOTO, 2007).

A pesquisa exploratória levou em consideração os trabalhos publicados entre os anos de 1990 e 2021 e retornou cento e dezessete (117) e cento e vinte e nove (129) trabalhos acadêmicos nos idiomas português e inglês, respectivamente, no Google Acadêmico; e cinquenta e oito (58) e cento e onze (111) trabalhos, em português e em inglês, respectivamente, na base *Scopus*. A maior parte das pesquisas encontradas dataram dos últimos dez anos (2012-2021) e foram comuns às duas bases de dados científicas elencadas.

Na etapa de análise explicativa das soluções, as contribuições dos diversos autores e trabalhos retornados da pesquisa inicial foram organizadas e, em seguida, setenta e um (71) trabalhos foram selecionados com base na significação do dado estudo para a discussão e interpretação dos resultados (LIMA; MIOTO, 2007). A apresentação dos resultados também foi organizada com o auxílio de tabelas e figuras.

As figuras ilustrativas de autoria própria foram produzidas nos programas computacionais AutoCad e Geogebra. Os valores numéricos disponíveis nas tabelas para fins de comparativo de comprimento, área, volume e área de superfície específica das geometrias estudadas foram calculados usando o Microsoft Excel.

Na etapa de síntese integradora foi desenvolvido um estudo exploratório-

descritivo, no formato de revisão da literatura, com as principais contribuições científicas para a obtenção dos objetivos propostos. Estas reflexões foram relacionadas com os conceitos e definições matemáticas, usando uma linguagem adequada ao público-alvo (LIMA; MIOTO, 2007).

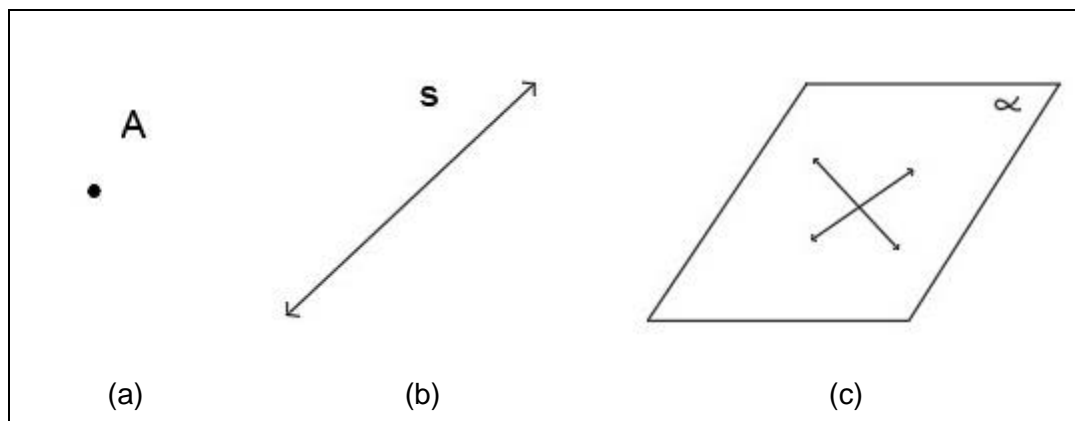
3 CONCEITOS MATEMÁTICOS

Esse Capítulo apresenta alguns conceitos e definições matemáticas que são base para o conhecimento e entendimento das características geométricas dos poliedros regulares.

3.1 DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS

Os conceitos, entes ou termos que compõem as noções geométricas são apresentados por meio de definições. O ponto, a reta e o plano (**Fig. 1**) são elementos matemáticos que fundamentam a Geometria e por isso são chamados de noções primitivas. Entretanto, como esses conceitos primitivos ou noções primitivas não possuem definição, Dolce e Pompeo (1993) explicam que de cada um desses entes temos conhecimento intuitivo, decorrente da experiência e observação.

Figura 1. Elementos geométricos primitivos: ponto (a); reta (b) e plano (c).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

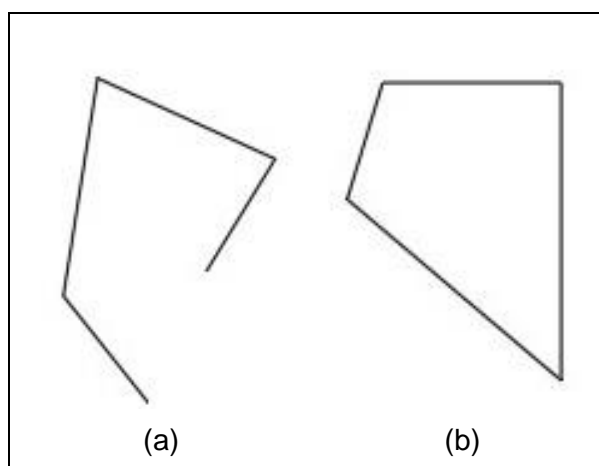
Por outro lado, Lima *et al.* (2004) considera também que “o fato de ponto, reta, plano e espaço serem noções primitivas da Geometria não significa que não se possa reforçar a intuição do aluno a respeito dessas noções”. Nessa perspectiva, para Leonardo (2016), “um ponto não tem dimensão, nem massa, nem volume. Uma reta não tem espessura, nem começo, nem fim. Um plano não tem espessura nem fronteiras”. Além disso, para Dolce e Pompeo (1993, p. 1) e Paiva (2015, p. 171) “o espaço é conjunto de todos os pontos”.

Uma definição mais abrangente de espaço considerando as coordenadas dos pontos de acordo com os eixos cartesianos x , y e z é dada por Steinbruch e Winterle (1987). Esses autores consideram que o conjunto $R^3 = R \times R \times R = \{(x, y, z) / x, y, z \in R\}$ é interpretado como o espaço cartesiano tridimensional O_{xyz} .

Partindo da compreensão intuitiva das *noções primitivas* de ponto e reta, Dolce e Pompeo (1993) definiram segmento de reta como a reunião de dois pontos distintos com o conjunto de pontos que estão entre eles. Quando a extremidade de um segmento de reta coincide com a extremidade de outro segmento de reta, diz-se que os segmentos de reta são consecutivos.

Reis (2013) chamou de linha poligonal, a linha formada por segmentos de reta, e de vértices da poligonal, as extremidades dos segmentos de reta que compõem a poligonal. Essa linha poligonal é dita fechada quando cada vértice é partilhado por exatamente dois segmentos, caso contrário, é dita aberta, conforme ilustrado na **Fig. 2**.

Figura 2. Ilustração de linha poligonal aberta (a) e fechada (b).



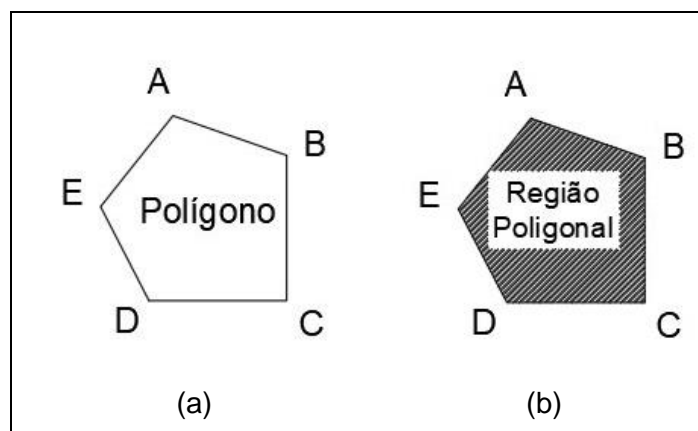
Fonte: Arquivos da autora (2021).

Paiva (2015) destaca que a extremidade de cada um dos segmentos que compõem a linha poligonal fechada é extremidade de dois e apenas dois segmentos dessa linha poligonal fechada. Além disso, na linha poligonal fechada dois segmentos consecutivos quaisquer não são colineares entre si e dois segmentos não consecutivos quaisquer não tem ponto em comum entre si. Para esse autor a reunião da linha que separa o plano em duas regiões, das quais uma é limitada, com essa

região limitada é uma superfície plana denominada polígono, do grego *polús*, “muitos”, e *gonos*, “ângulo”.

Contudo, para Leonardo (2016) um polígono divide o plano que o contém em duas regiões distintas, uma interna e outra externa. A figura formada pela união do polígono como ilustrado na **Fig. 3a** com sua região interna é denominada superfície poligonal ou região poligonal (**Fig. 3b**).

Figura 3. Ilustração de polígono (a) e região poligonal (b).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Diante da divergência entre definições adotadas por alguns autores, para os objetivos desse trabalho, considera-se a definição de polígono dada por Dolce e Pompeo (1993, p. 132):

Dada uma sequência de pontos de um plano (A_1, A_2, \dots, A_n) com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1 , assim como A_n, A_1 e A_2 , chama-se polígono à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$. Os pontos A_1, A_2, \dots, A_n são os vértices do polígono, os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ são os lados do polígono, e desta forma, um polígono de n vértices possui n lados e n ângulos.

A nomenclatura de um polígono é dada de acordo com sua quantidade de lados ou vértices, como exemplificado na **Tab. 1**.

Os polígonos podem ser classificados em polígonos convexos ou não-convexos. Para Balestri (2016) um polígono é convexo quando todo segmento de reta \overline{AB} , que une dois pontos A e B quaisquer pertencentes à sua região poligonal, está

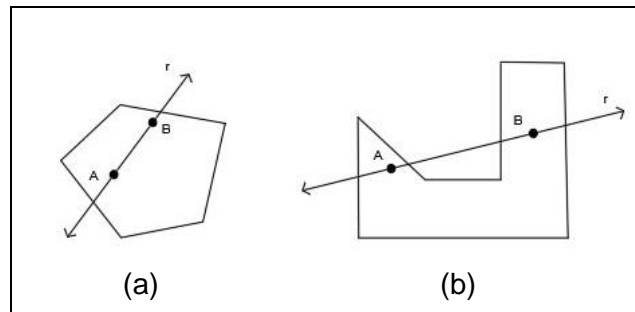
inteiramente contido na região poligonal (**Fig. 4a**). Pode se dizer também que um polígono é convexo quando qualquer reta r que passa pela sua região interna intercepta seu contorno em apenas dois pontos (**Fig. 4a**). De forma análoga, o polígono é dito não-convexo (ou côncavo) quando existir dois pontos A e B quaisquer pertencentes à sua região poligonal, unidos por um segmento de reta que não está completamente inserido na sua região poligonal (**Fig. 4b**) ou quando a reta r que passa pela sua região interna intercepta seu contorno em três pontos ou mais. (**Fig. 4b**).

Tabela 1 – Nomenclatura de alguns polígonos.

Número de lados (ou vértices)	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Eneágono
10	Decágono
12	Dodecágono
20	Icoságono

Fonte: Arquivos da autora.

Figura 4. Ilustração de polígono convexo (a) e polígono não-convexo (b).

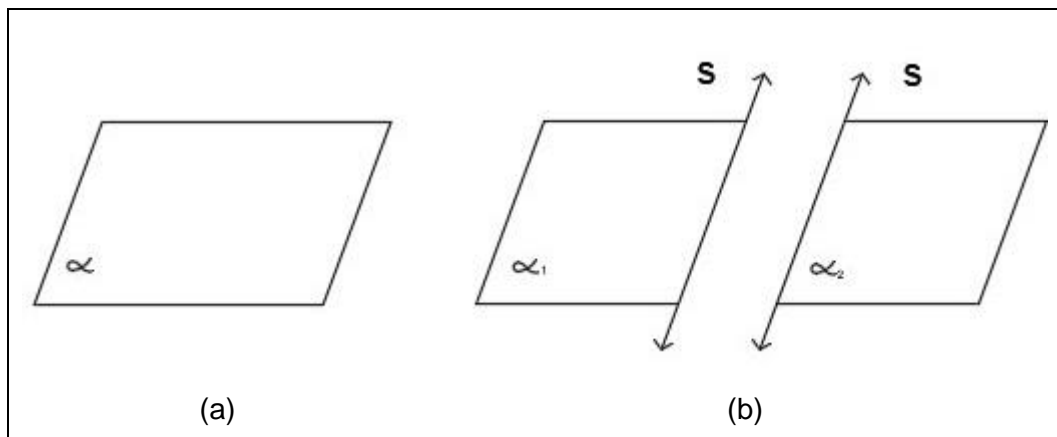


Fonte: Arquivos da autora (2021).

Outra maneira de determinar se o polígono é convexo observando que, em um plano α (**Fig. 5a**) a reunião de uma reta s com qualquer uma das duas regiões (α_1 e α_2 , **Fig. 5b**) separadas por ela é chamada de semiplano de origem s , foi descrita por

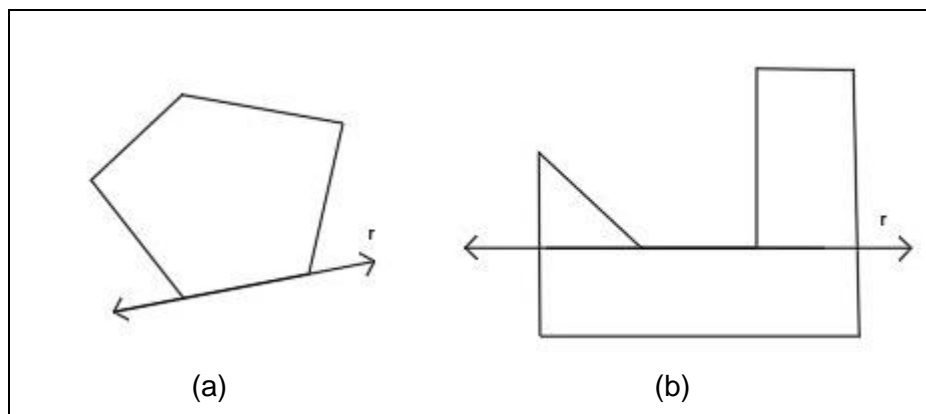
Paiva (2015). O autor afirmou que um polígono é convexo se, e somente se, a reta r que contém qualquer um de seus lados deixa o polígono contido em um mesmo semiplano de origem r (**Fig. 6a**). Caso contrário, o polígono é não convexo ou côncavo. (**Fig. 6b**).

Figura 5. Representação do plano α (a) e os semiplanos α_1 e α_2 (b).



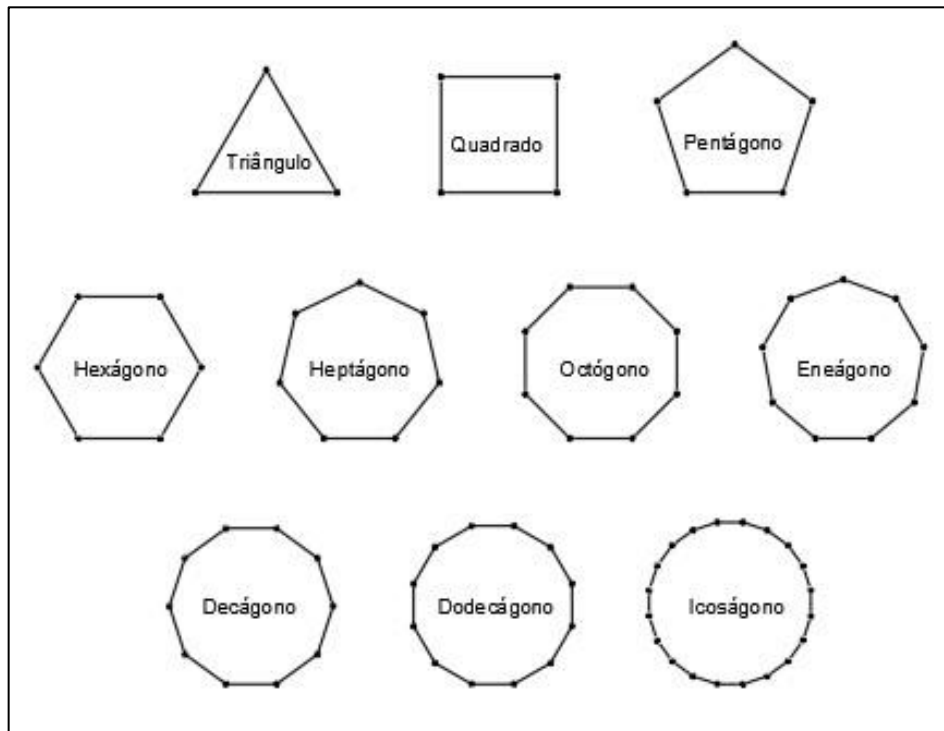
Fonte: Arquivos da autora (2021).

Figura 6. Ilustração de semiplanos em um polígono convexo (a) e semiplanos em um polígono não-convexo (b).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Além disso, Paiva (2015) descreve que um polígono convexo que possui todos os lados e ângulos internos congruentes entre si é chamado de polígono regular. Os polígonos citados na **Tab. 1** também podem ser regulares. Estes exemplos de polígonos convexos regulares são ilustrados na **Fig. 7**.

Figura 7. Polígonos regulares.

Fonte: Arquivos da autora (2021).

A partir dos conceitos matemáticos e das figuras geométricas de duas dimensões representadas no plano pode-se estudar figuras geométricas e suas propriedades no espaço tridimensional, como os poliedros (do grego *poly*, “muitas, várias”, e *hedro*, “face”) ilustrados na **Fig. 8**. Entretanto, Lima *et al.* (2004, p. 161) destaca que “o grande desafio em ensinar Geometria a alunos do 2º grau é fazer a transição do plano para o espaço”.

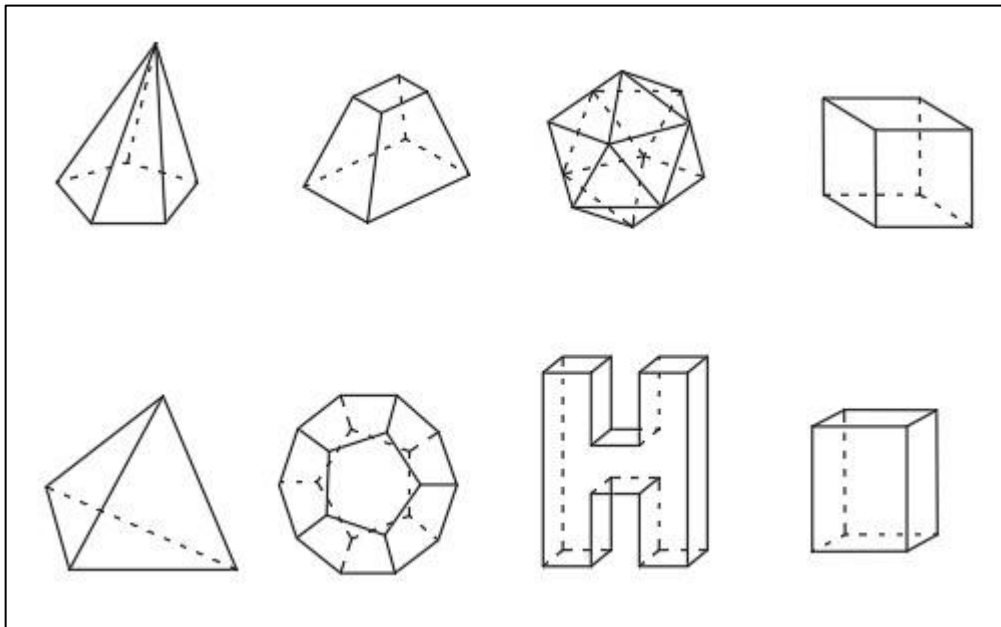
Nesse sentido, a ideia apresentada por Lima *et al.* (2004, p. 231) para definir poliedros é que “poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono”.

Segundo Dante (2000) cada poliedro é formado por regiões poligonais e pela região do espaço limitada por elas. Outra definição dada por Muniz Neto (2013) define poliedro como um conjunto fechado e limitado do espaço, com interior não vazio e cuja fronteira consiste na união de um número finito de polígonos. De acordo com Leonardo (2016, p. 104) “poliedro é o sólido geométrico formado pela reunião de uma

superfície poliédrica fechada com todos os pontos do espaço delimitados por ela”.
Para Paiva (2015, p. 188):

Considerando um conjunto G obtido pela reunião de n polígonos, com $n \geq 4$, tais que: quaisquer dois desses polígonos que tenham um lado em comum não são coplanares; cada lado de qualquer um desses polígonos é lado de dois e apenas dois deles. O conjunto G é chamado de superfície poliédrica fechada. Essa superfície separa o espaço em duas regiões, sendo uma delas limitada. A reunião da superfície G com essa região limitada no espaço é chamada de poliedro.

Figura 8. Alguns exemplos de poliedros.



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Destaca-se que as definições apresentadas por Dante (2000), Muniz Neto (2013), Leonardo (2016) e Paiva (2015) consideram que o poliedro é um sólido formado pela superfície poliédrica e seu interior, mas Mialich (2013) observou que utilizar o termo poliedro para descrever o corpo sólido ou a sua casca (denominada superfície poliédrica) é um abuso similar ao de usar a palavra polígono para descrever tanto o contorno como o contorno e sua região interna (denominada região poligonal).

Diante disso, Lima *et al.* (2004) lembrou que muitos matemáticos tiveram dificuldade em demonstrar teoremas sobre poliedros em virtude da imprecisão na definição de poliedro e destacou a importância da apresentação cuidadosa de

conceitos matemáticos com definição adequada para o nível de estudo que se pretende. Nesse sentido, Richeson (2015, p. 39) citou Henri Poincaré:

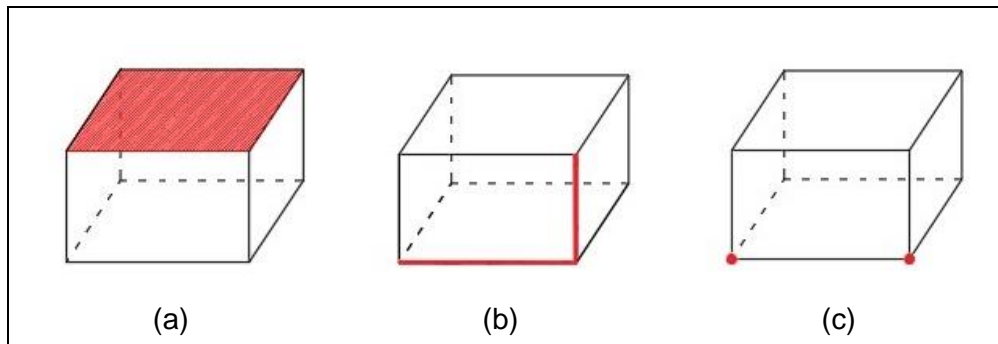
Os objetos com que os matemáticos se ocupam estiveram durante muito tempo mal definidos; pensávamos que os conhecíamos bem porque os representávamos com os nossos sentidos ou com a imaginação, mas tínhamos deles apenas uma imagem aproximada, e não um conceito preciso sobre o qual o raciocínio se poderia basear.

Dito isso, para os objetivos desse trabalho será adotada a definição dada por Lima *et al.* (2004, p. 232) transcrita a seguir:

Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde: Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono. A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia; Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro; É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas). Todo poliedro (no sentido da definição acima) limita uma região do espaço chamada de interior desse poliedro.

Na definição acima foram apresentados os elementos principais dos poliedros. Face (**Fig. 9a**) é o nome dado a cada uma das regiões poligonais que compõem a superfície poliédrica. Aresta (**Fig. 9b**) é o lado comum dos polígonos adjacentes que delimitam duas faces do poliedro. O vértice (**Fig. 9c**) é o ponto comum a três ou mais arestas que corresponde também aos vértices dos polígonos das faces. (BALESTRI; 2016; DANTE; 2000; LEONARDO, 2016).

Figura 9. Ilustração dos elementos do poliedro: face (a), aresta (b) e vértice (c).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

A nomenclatura dos poliedros é dada de acordo com a quantidade de suas faces ou vértices, exemplificada na **Tab. 2**.

Tabela 2 – Nomenclatura de alguns poliedros.

Número de faces	Nome do poliedro
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro (ou cubo)
7	Heptaedro
8	Octaedro
12	Dodecaedro
20	Icosaedro

Fonte: Arquivos da autora (2021).

Os poliedros também podem ser classificados como convexos ou não convexos. Partindo da definição de polígonos convexos, Dolce e Pompeo (1993, p. 124) definiram poliedros convexos:

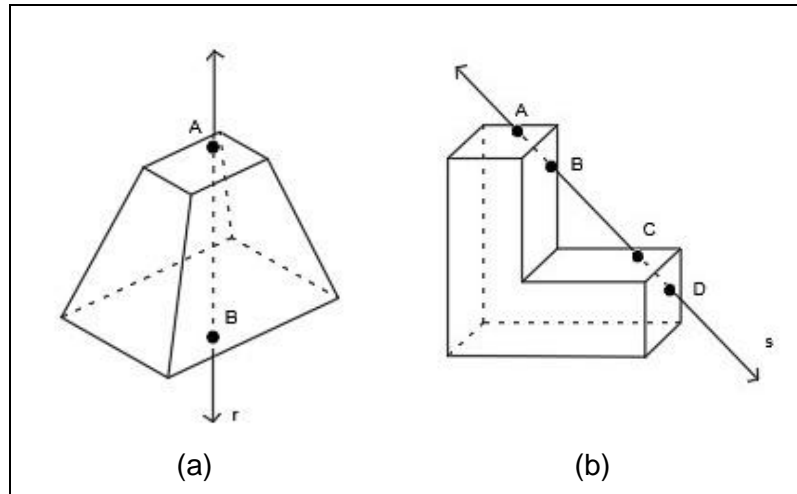
Considerando um número finito n ($n \geq 4$) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que: dois polígonos não estão num mesmo plano; cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos; o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semiespaço. Nessas condições ficam determinados n semiespaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção dos semiespaços é chamado poliedro convexo.

Para Lima *et al.* (2004) um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos (**Fig. 10a**). Caso contrário, o poliedro é denominado não convexo (ou côncavo) (**Fig. 10b**).

Além das faces, arestas e vértices, Paiva (2015) destaca outros elementos dos poliedros convexos: as diagonais da face (**Fig. 11a**) e as diagonais do poliedro (**Fig. 11b**). São chamadas diagonais da face os segmentos de reta que ligam dois vértices não adjacentes dos polígonos que delimitam as faces do poliedro. As diagonais dos

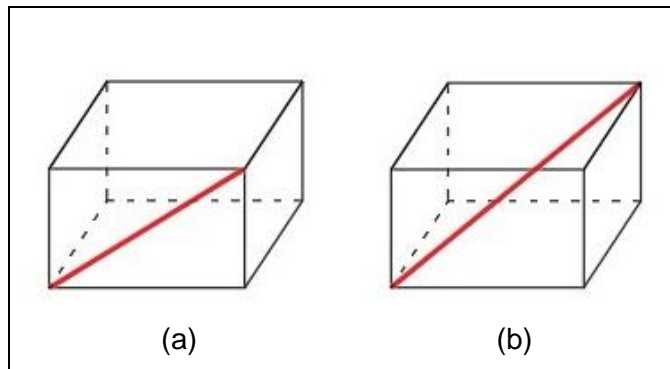
poliedros, por sua vez, são segmentos de reta cujos extremos são dois vértices que não pertencem a uma mesma face.

Figura 10. Ilustração segundo definição de Lima et al. (2004) para poliedro convexo (a) e poliedro não-convexo (b).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

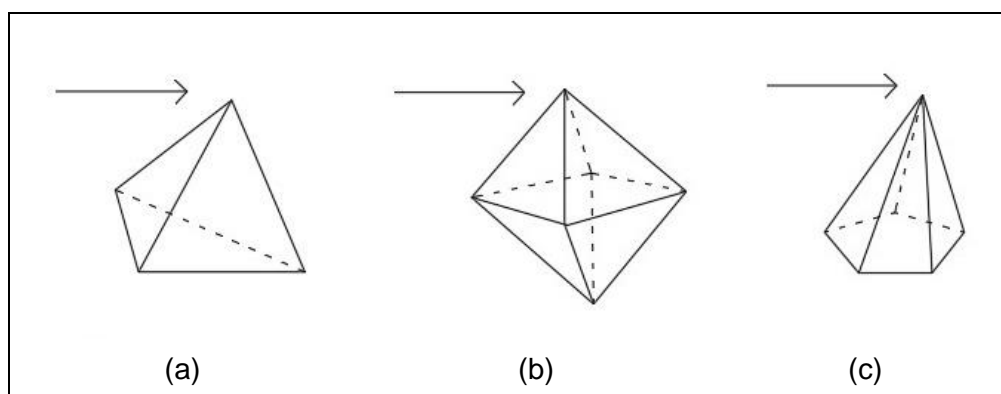
Figura 11. Ilustração da diagonal de uma face (a) e diagonal de um poliedro (b).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Para Paiva (2015, p. 189), “a porção do espaço cuja superfície é a reunião dos ângulos das faces que têm um mesmo vértice em comum é chamada de ângulo poliédrico”. Esses ângulos são classificados de acordo com a quantidade de arestas que partem do mesmo vértice. Por exemplo, um ângulo poliédrico com 3 arestas é chamado de ângulo triédrico (**Fig. 12a**). De forma semelhante, os ângulos poliédricos com 4 e 5 arestas são chamados de ângulo tetraédrico (**Fig. 12b**) e ângulo pentaédrico (**Fig. 12c**), respectivamente.

Figura 12. Ilustração de ângulo triédrico (a), ângulo tetraédrico (b) e ângulo pentaédrico (c).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Além do estudo das propriedades métricas dos poliedros para determinar comprimento de lados, diagonais, ângulos, áreas das faces e volume dos poliedros, existe uma relação entre o número de faces, arestas e vértices. Em 1758, o matemático suíço Leonarhd Euler publicou um artigo o qual apresentava uma relação aritmética simples e elegante, o Teorema de Euler, que relaciona o número de faces (F), número de arestas (A) e número de vértices (V) dos poliedros: $V - A + F = 2$ (LIMA *et al.*, 2004). Nesse contexto, Lima (1991, p. 73) também destacou:

Assim como “polígono” em Geometria Plana pode significar tanto o contorno como a região plana por ele limitada, também “poliedro” às vezes significa um corpo sólido e às vezes sua casca. No que tange ao Teorema de Euler, o sólido é irrelevante e poliedro é um ente bidimensional, formado por vértices, arestas e faces.

Euler verificou que essa relação é válida em vários casos especiais como poliedros convexos e alguns poliedros não convexos também, mas não apresentou uma demonstração com rigor matemático de que a fórmula é válida para todos os poliedros. (RICHESON, 2015). Desse modo, é possível a partir dos exemplos de poliedros convexos e não convexos mostrados na **Fig. 10** testar a veracidade desta relação particular. Note que no exemplo mostrado na **Fig. 10a** (poliedro com $V=8$, $A=12$ e $F=6$) a característica de Euler do poliedro é igual a 2, o que o caracteriza como convexo. Já no exemplo da **Fig. 10b** (poliedro com $V=12$, $A=17$ e $F=8$), esta característica não é observada.

Ressalta-se que, a recíproca da Relação de Euler não é verdadeira. Isso significa dizer que em alguns casos a relação numérica é válida, mas não é possível

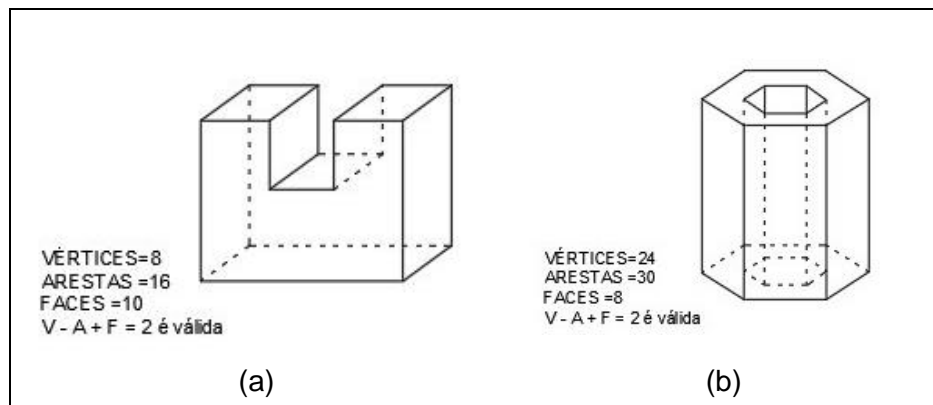
construir o poliedro com a quantidade de vértices (V), arestas (A) e faces (F) que satisfaz a relação. Por exemplo, dados três números, $V=1$, $A=3$ e $F=4$ a relação $V - A + F = 2$ é válida, mas o poliedro com essas características não existe.

Além disso, muitas demonstrações sobre a aplicação do Teorema de Euler foram desenvolvidas com falhas devido a definição inicial de poliedro como comentado anteriormente. Segundo Richeson (2015) a primeira demonstração com rigor matemático foi dada em 1794, por Adrien-Marie Legendre. Contudo, Lima (1991) destacou que essa demonstração de Legendre com base na Geometria Esférica é válida apenas para poliedros convexos, assim como a demonstração de Azambuja em 1983. Dessa forma, como as demonstrações citadas partem do pressuposto que os poliedros são convexos, elas são limitadas tendo em vista que a Relação de Euler também é válida para poliedros não convexos, conforme ilustrado na **Fig. 13**.

Dito isso, Dolce e Pompeo (1993) enunciaram que todo poliedro convexo é euleriano (**Fig. 14a**), ou seja, satisfaz a Relação de Euler, mas nem todo poliedro euleriano é convexo (**Fig. 14b**).

Além disso, embora o Teorema de Euler tenha sido originalmente proposto para poliedros, ele pode ser estendido, por exemplo, para superfícies (CAMPOS, 2015). Nesse aspecto, a demonstração mais divulgada desse Teorema é devida a Augustin-Louis Cauchy, em 1813, que considerava a superfície convexa de um poliedro, pois diferentemente das demonstrações anteriores, nesta prova os poliedros são ocos e não sólidos, marcando o nascimento da teoria dos grafos e da topologia (LIMA, 1991; RICHESON, 2015).

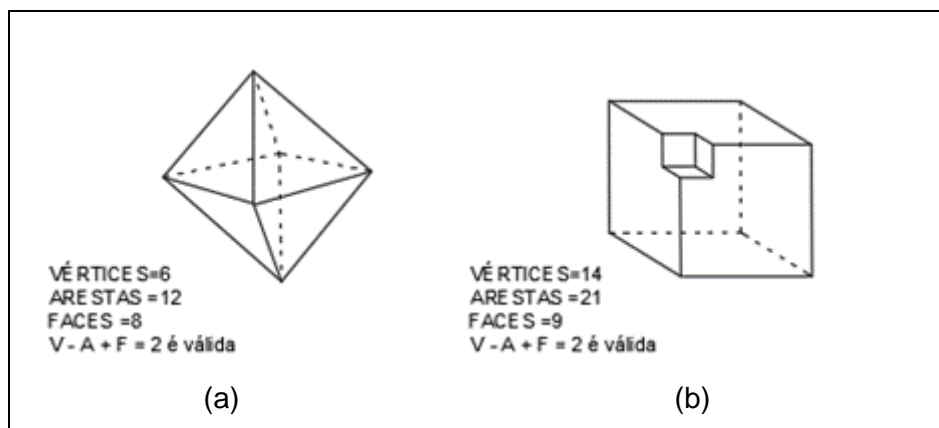
Figura 13. Ilustração de poliedros eulerianos não-convexos.



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Lima (1991) também ressaltou que Cauchy demonstrou o Teorema apenas para poliedros homeomorfos a esfera. Essa definição de homeomorfismo pode ser elucidada considerando que se um dado poliedro fosse feito de material plástico, ao ser inflado com ar continuamente, se o poliedro se transformar em uma esfera pode se dizer que esse poliedro é homeomorfo à esfera. Fazendo essa mesma suposição, os poliedros ilustrados na **Fig. 14** são homeomorfos a esfera e o poliedro ilustrado na **Fig. 13b** é homeomorfo ao toro que tem o formato aproximado de uma câmara de pneu. O toro também pode ser definido como lugar geométrico tridimensional formado pela rotação de uma superfície circular plana de raio r , em torno de uma circunferência de raio R com $R > r$. Com isso, exemplifica-se que existem alguns poliedros que atendem ao Teorema de Euler, mas não são homeomorfos a esfera.

Figura 14. Ilustração de um poliedro euleriano convexo (a) e um poliedro euleriano não-convexo (b).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Diante do exposto, a busca de uma prova definitiva da validade do Teorema de Euler marca o início do período de transição da Geometria para a Topologia, pois apenas com o desenvolvimento dessa nova área da Matemática, Poincaré e outros matemáticos modernos conseguiram generalizar o Teorema que relacionava elementos de dimensão zero (vértices), elementos unidimensionais (arestas) e elementos bidimensionais (faces) para elementos de qualquer dimensão (RICHESON, 2015).

Campos (2015, p. 20) também destacou que “a Topologia estuda propriedades das figuras geométricas que permanecem invariantes sob transformações topológicas ou homeomorfismos”. Nesse sentido, quando a relação de Euler é preservada por homeomorfismo em uma figura geométrica diz-se que é um invariante topológico da superfície.

Lima (1991, p. 70) afirmou que “Poincaré foi o primeiro matemático a compreender o Teorema de Euler como um teorema de Topologia, e não de Geometria, ao notar que $V - A + F$ é um invariante topológico do poliedro P ”. Desse modo, denotando $X(P)$ um invariante topológico de P , o número dado pela expressão $X(P) = V - A + F$ tornou-se conhecido como característica de Euler-Poincaré do poliedro P , que no caso dos poliedros convexos é igual a 2.

3.2 POLIEDROS DE PLATÃO E POLIEDROS REGULARES

Na seção anterior foram apresentados os elementos geométricos primitivos, os polígonos convexos e não convexos, os polígonos regulares e suas nomenclaturas, os poliedros, seus elementos (faces, arestas e vértices) e suas nomenclaturas, os tipos convexos e não convexos, diagonais das faces, diagonais dos poliedros, ângulos poliédricos e o Teorema de Euler para possibilitar o estudo detalhado dos poliedros regulares, ilustrados na **Fig. 15**.

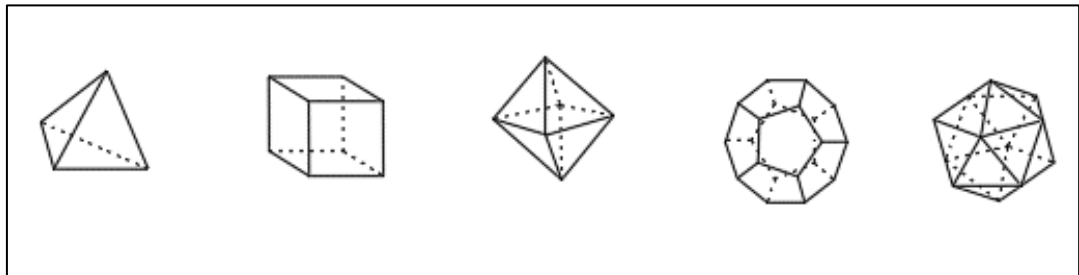
Segundo DeHovitz (2016) os poliedros regulares teriam sido discutidos pela primeira vez por Platão, por volta de 360 a.C., que associou os poliedros regulares a cada um dos quatro elementos fundamentais da natureza e ao universo: o hexaedro foi associado à Terra, o tetraedro ao fogo, o octaedro ao ar, o dodecaedro ao universo e o icosaedro a água, como ilustrado na **Fig. 16**.

Devido a essa primeira associação os poliedros regulares também são conhecidos como poliedros de Platão, poliedros platônicos ou sólidos platônicos, mas isso não significa que foram descobertos por Platão, como esclarece Boyer (1974, p. 63):

Platão pôs suas ideias sobre sólidos regulares num diálogo intitulado *Timaeus*, presumivelmente do nome de um pitagórico, que serve como principal interlocutor. Não se sabe se Timaeus de Locri realmente existiu ou se Platão o inventou como um personagem através do qual enunciou as ideias pitagóricas que ainda eram influentes no que hoje é o sul da Itália. Os poliedros regulares frequentemente foram chamados “corpos cósmicos” ou “sólidos platônicos” devido à maneira

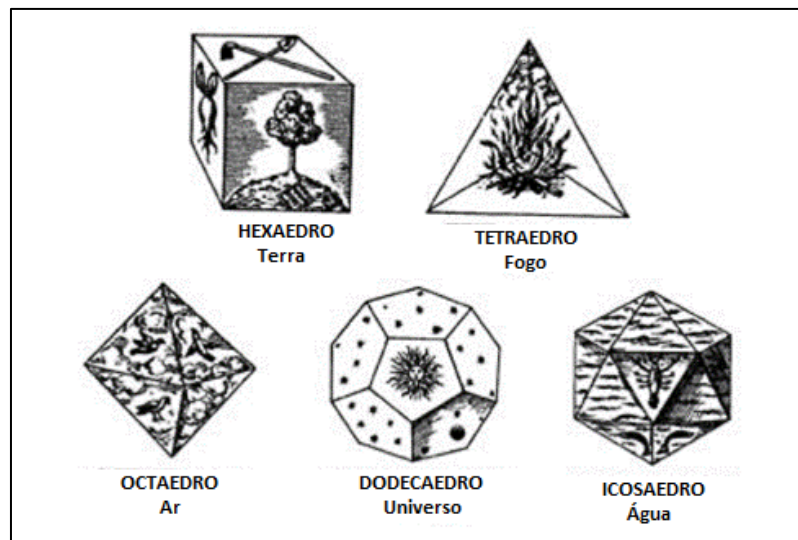
pela qual Platão no *Timaeus* os aplicou à explicação de fenômenos científicos. Embora esse diálogo, escrito provavelmente quando Platão estava perto dos setenta anos, seja mais antiga evidência definida da associação dos quatro elementos com os sólidos regulares, muito dessa fantasia deve-se aos pitagóricos. Proclus atribui a construção das figuras cósmicas à Pitágoras; mas o escoliasta Scridas relatou que o amigo de Platão, Teagetus, nascido em 414 a.C. aproximadamente e filho de um dos mais ricos patrícios da Ática foi o primeiro sobre eles. Um escólio (de data incerta) ao Livro XIII De *Os elementos* de Euclides afirma que somente três dos cinco sólidos regulares eram devidos aos pitagóricos e que foi através de Teagetus que o octaedro e o icosaedro se tornaram conhecidos. Parece provável que, em qualquer caso, Teagetus tenha feito um dos estudos mais extensos dos cinco sólidos regulares e a ele provavelmente se deve o teorema que diz que há cinco e somente cinco poliedros regulares. Talvez seja também o responsável pelos cálculos, que se encontram em *Os elementos*, das razões das arestas dos sólidos regulares para o raio da esfera circunscrita.

Figura 15. Da esquerda para a direita, os poliedros regulares: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Figura 16. Associação dos poliedros regulares proposta por Platão.



Fonte: Adaptado de DeHovitz (2016).

Nesse sentido, Richenson (2015, p. 53) destaca que “Apesar da discordância sobre quem teria sido o primeiro a descobrir cada um dos cinco sólidos regulares, não há dúvida de que Teeteto foi o primeiro a elevar o estudo dos sólidos a uma teoria completa e rigorosa”.

Segundo Richenson (2015) Teeteto conseguia construir os cinco poliedros regulares geometricamente, compreendeu a regularidade como característica comum entre eles e provou que esses poliedros são os únicos poliedros regulares. Essas construções e demonstrações das provas apareceram mais tarde, por volta de 300 a. C., no livro XIII dos Elementos de Euclides. Além disso, Richeson (2015, p. 53) destaca que “muitos historiadores argumentam que toda a matemática contida nos livros X e XIII dos Elementos é devida a Teeteto”.

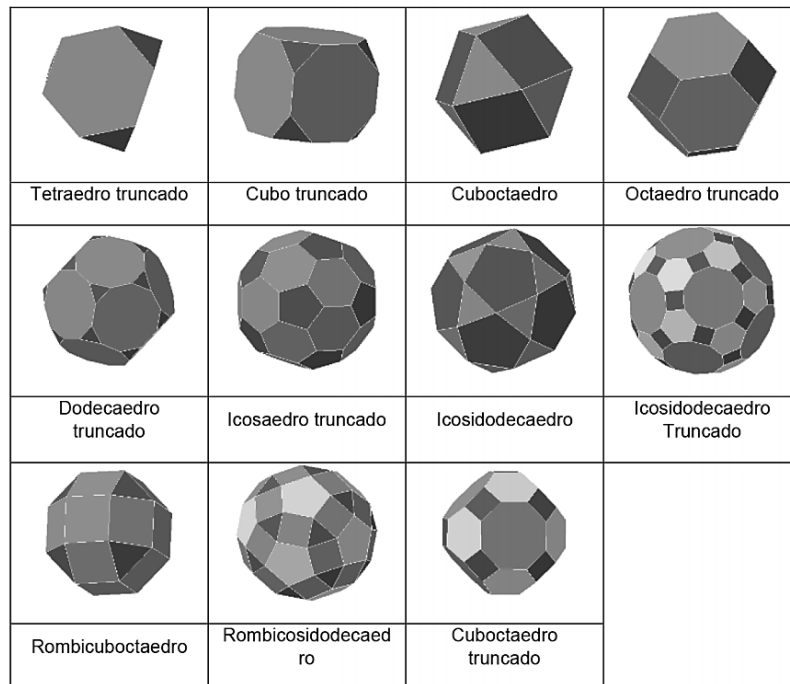
Segundo Almeida (2015), as proposições de 13 a 17 do livro XIII dos Elementos de Euclides descrevem as construções dos poliedros regulares e Euclides calcula a razão entre o diâmetro da esfera circunscrita e o comprimento da aresta de cada poliedro. Na proposição 18, ele demonstra que não existem outros poliedros regulares.

Em seguida, atribui-se a Arquimedes de Siracusa, que segundo Boyer (1974, p. 89) “provavelmente nasceu em 287 a. C.” a descoberta dos poliedros semirregulares. Boyer (1974, p. 89) afirma que:

É certo que nem todas as obras de Arquimedes chegaram até nós, pois comentário de época posterior sabemos (por Pappus) que Arquimedes descobriu todos os treze possíveis sólidos ditos semi-regulares. Ao passo que um poliedro regular tem faces que são polígonos regulares do mesmo tipo, um sólido semi-regular é um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares mas não todos do mesmo tipo.

Existem ao todo 13 poliedros semirregulares também conhecidos como poliedros arquimedianos que são obtidos por meio de transformações sobre os 5 poliedros regulares. Por meio da operação de truncamento, que consiste em dividir as arestas do poliedro em partes iguais e construir nesses pontos novos vértices, obtêm-se os seguintes poliedros semirregulares: tetraedro truncado, cuboctaedro, cubo truncado, octaedro truncado, rombicuboctaedro, cuboctaedro truncado, icosidodecaedro, dodecaedro truncado, icosaedro truncado, rombicoidodecaedro, icosidodecaedro truncado, ilustrados na **Fig. 17**.

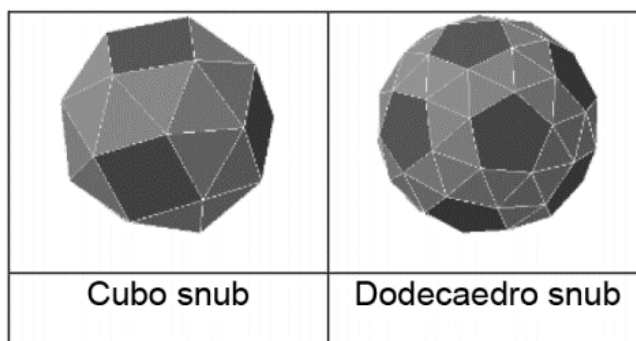
Figura 17. Poliedros semirregulares obtidos por truncaduras em poliedros regulares.



Fonte: Mohr e Britto (2016).

Por meio da operação de snubificação, que segundo Veloso (1998) *apud* Almeida (2010, p. 127) é uma “operação que consiste em afastar todas as faces do poliedro, rodar as mesmas um certo ângulo (normalmente 45°) e preencher os vazios resultantes com polígonos”, obtêm-se os seguintes poliedros semirregulares: cubo snub e dodecaedro snub, ilustrados na **Fig. 18**.

Figura 18. Poliedros semirregulares obtidos por snubificação em poliedros regulares.

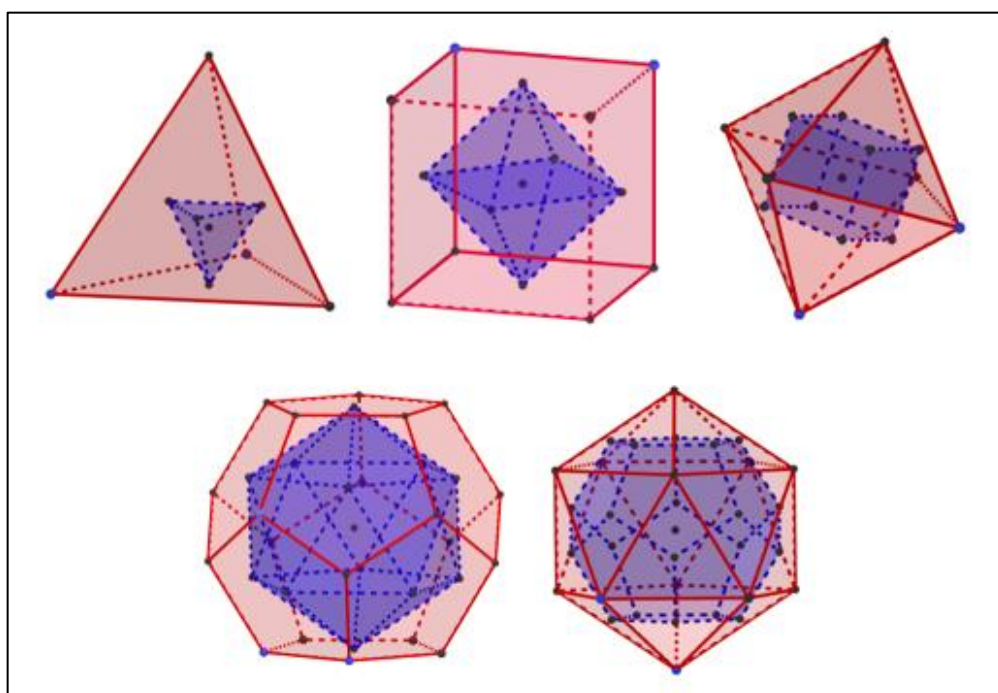


Fonte: Mohr e Britto (2016).

No século VI d.C., segundo Correia e Ferreira (2007, p. 4) Pappus da Alexandria analisou a projeção dos poliedros regulares na superfície esférica e, Isodoro de Mileto, demonstrou que o número de faces de um poliedro regular é igual ao número de vértices do seu dual, estabelecendo assim o princípio da dualidade entre eles.

Além disso, sabendo que o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos das faces de um poliedro regular (incentro) é o ponto central de cada uma das faces, os vértices do poliedro dual inscrito estão localizados no ponto central de cada uma das faces do poliedro dual circunscrito como ilustrado na **Fig. 19**. Sendo assim, o tetraedro é autodual, o hexaedro e octaedro são duais, e, o dodecaedro e icosaedro são duais.

Figura 19. Poliedros regulares e seus duais.

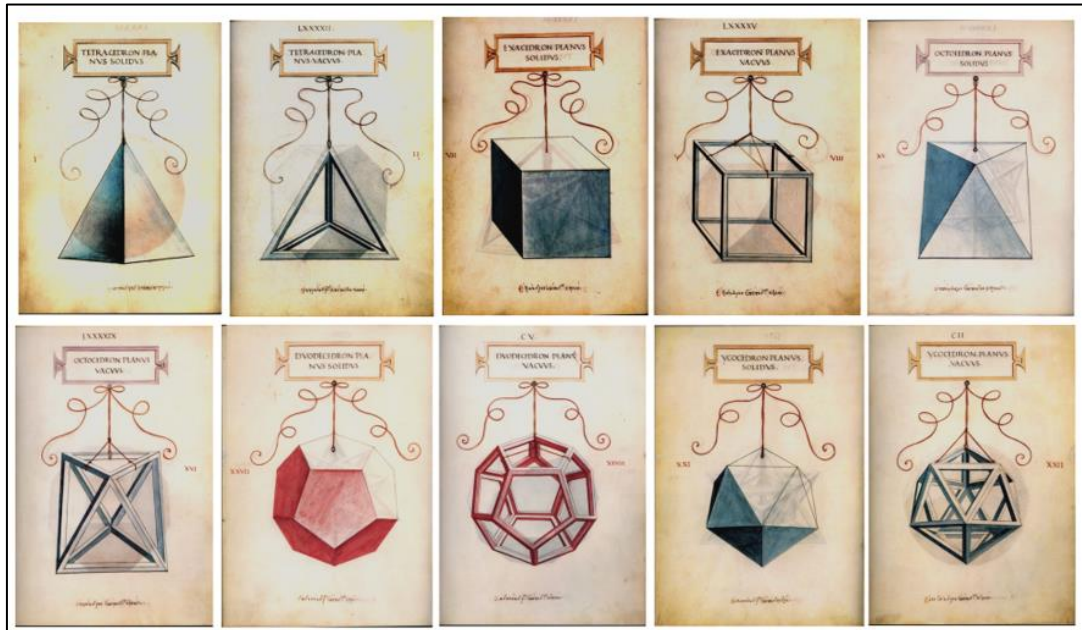


Fonte: Arquivos da autora (2021).

Luca Pacioli no seu livro *De Divina Proportione*, publicado em 1509, trata da razão áurea denominada como Divina Proporção. Segundo Bertato (2008), a obra *De Divina Proportione* contém um sumário das proposições dos Elementos de Euclides relacionados com a razão áurea, um estudo das propriedades dos poliedros regulares e a descrição de vários poliedros, como cinco poliedros semirregulares. As descrições

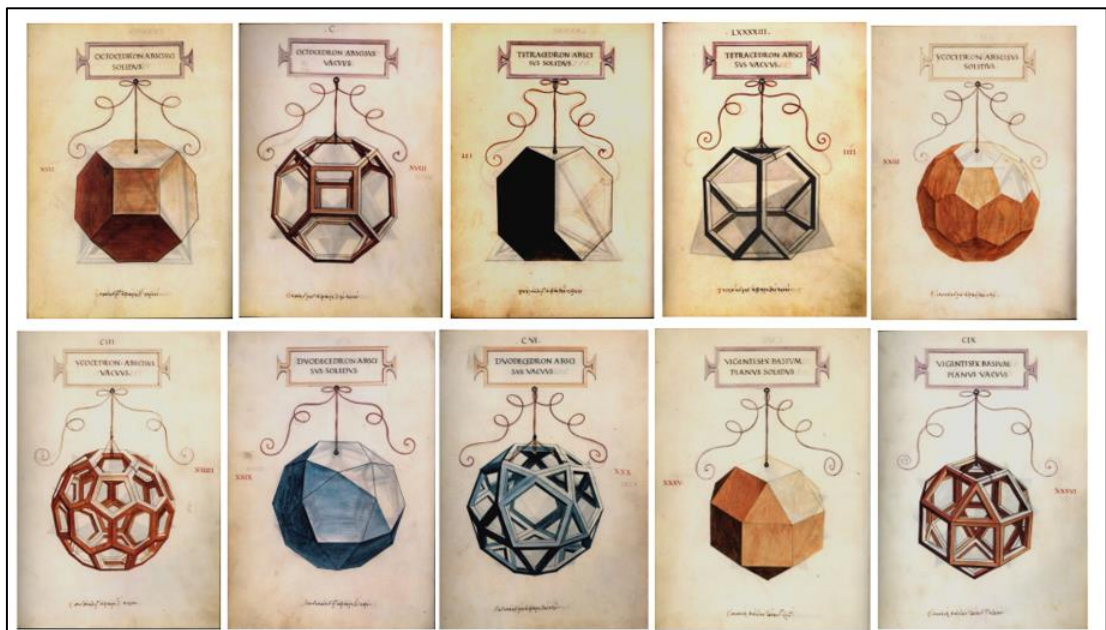
são acompanhadas de enumeração correspondente às ilustrações feitas por Leonardo Da Vinci e são encontradas na parte final do livro, como apresentado na **Fig. 20** e na **Fig. 21**.

Figura 20. Poliedros regulares desenhados por Leonardo Da Vinci.



Fonte: Bertato (2008).

Figura 21. Alguns poliedros semirregulares desenhados por Leonardo Da Vinci.



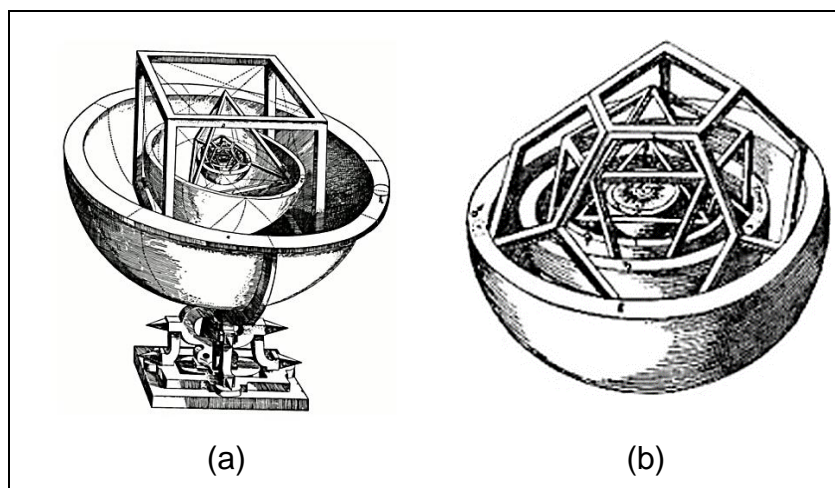
Fonte: Bertato (2008).

Segundo Bertato (2008), Pacioli recomendava ao leitor de sua obra o uso dos *Elementos* de Euclides como “guia indispensável” e apresentava as demonstrações de Euclides de que não pode haver mais do que cinco poliedros regulares e de como construir cada um desses poliedros inscritos em uma esfera. Além disso, Pacioli também apresentou detalhes sobre as inscrições de poliedros regulares uns nos outros e demonstrou que todos os demais poliedros regulares podem ser inscritos no dodecaedro.

Em 1525, segundo Correia e Ferreira (2007, p. 4), “Albrecht Dürer planificou os poliedros regulares e utilizou a projeção ortogonal para representá-los, projetando-os segundo os seus eixos de simetria”.

De acordo com DeHovitz (2016), de modo semelhante a Platão o astrônomo alemão Johannes Kepler também fez associações entre os poliedros regulares e o mundo natural. No modelo publicado em 1596, como ilustrado na **Fig. 22**, no seu livro de astronomia, *Mysterium Cosmographicum*, a órbita de cada planeta em torno do Sol era associada a uma esfera, sendo que a esfera mais externa representava a órbita de Saturno.

Figura 22. Modelo de Kepler do sistema solar (a) e esfera inscrita no tetraedro regular do modelo de Kepler do sistema solar (b).



Fonte: Dehovitz (2016); Jreige (2015).

Já que nessa época eram conhecidos apenas cinco planetas (Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno) além da Terra, as esferas concêntricas das órbitas dos planetas circunscreviam e inscreviam cada um dos cinco poliedros regulares inseridos

por Kepler da seguinte forma: entre Saturno e Júpiter, um hexaedro; entre Júpiter e Marte, um tetraedro (**Fig. 22a**); entre Marte e Terra, um dodecaedro; entre Terra e Vênus, um icosaedro e, por fim, entre Vênus e Mercúrio um octaedro (**Fig. 22b**).

3.2.1 Diferenças conceituais entre poliedros regulares e poliedros de Platão

A história da descoberta, geometria e aplicações dos poliedros regulares é muito rica, mas a fim de evitar confusão sobre a nomenclatura dada a esses poliedros, tendo em vista que na literatura encontra-se muitas referências aos poliedros de Platão, poliedros platônicos ou sólidos platônicos como sinônimo de poliedros regulares, discute-se a seguir as definições e demonstrações matemáticas para poliedros de Platão e poliedros regulares.

Dolce e Pompeo (1993, p. 130) afirmaram que “existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão”. Os mesmos autores também afirmaram que um poliedro é poliedro de Platão se, e somente se, todas as faces têm o mesmo número de arestas, todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas e a relação de Euler é válida.

Dessa forma, observa-se que essa definição dos poliedros de Platão não determina que todas as faces sejam iguais. Portanto, existem poliedros de Platão em que suas faces são formadas por polígonos regulares (**Fig. 23a**) e poliedros de Platão em que suas faces são formadas por polígonos regulares irregulares. (**Fig. 23b**).

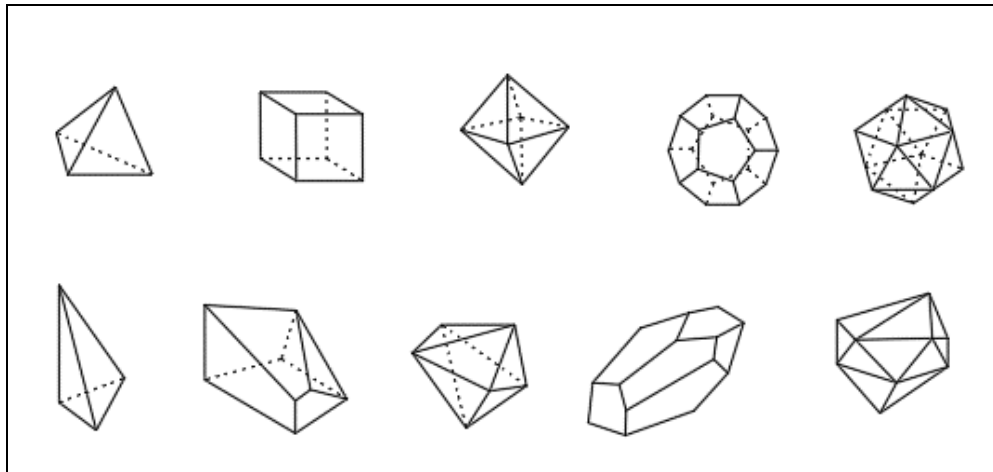
Por outro lado, Dolce e Pompeo (1993, p. 132) definiram os poliedros regulares como aqueles nos quais “a) suas faces são polígonos regulares e congruentes; b) seus ângulos poliédricos são congruentes”.

Nesse sentido, a pesquisa de Radin (2018) observou a distinção entre poliedros regulares e poliedros de Platão. O autor exemplificou que ao reduzir a altura de um octaedro regular, os triângulos das faces do poliedro passarão a ser isósceles, contudo, o octaedro com altura reduzida não é regular, mas continua sendo um poliedro platônico.

Mohr e Jelinek (2020) também ressaltaram que os poliedros de Platão não são apenas os cinco tipos de poliedros regulares tendo em vista que, por exemplo um prisma reto de base quadrada satisfaz a todas as condições apresentadas, sendo,

portanto, um poliedro de Platão. Porém, se todas as suas faces não forem quadradas, ele não pode ser considerado um poliedro regular.

Figura 23. Acima os poliedros de Platão formados por polígonos regulares. Abaixo alguns poliedros de Platão que não são formados por polígonos regulares.



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Diante disso, Dolce e Pompeo (1993, p. 133) observaram que “todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é regular”. De maneira equivalente, pode-se dizer que o conjunto dos poliedros regulares é um subconjunto dos poliedros de Platão.

Como poliedros de Platão são poliedros convexos nos quais todas as faces do poliedro são delimitadas por polígonos que tem a mesma quantidade de lados, regulares ou não, a notação utilizada para associar a classe de cada poliedro de Platão é dada por (p, q) . Nessa notação, p representa o número de arestas de cada face, ou seja, número de lados dos polígonos que delimitam as faces dos poliedros, e q representa o número de arestas que concorre em cada vértice (DEHOVITZ, 2016).

Utilizando a notação apresentada, DeHovitz (2016), Dolce e Pompeo (1993) aplicaram o Teorema de Euler para demonstrar que “existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão” conforme segue.

Inicialmente, sabendo que no Teorema de Euler A representa o número total de arestas do poliedro, F representa o número de faces do poliedro e V representa o número de vértices ou ângulos poliédricos, p representa o número de arestas de cada face e q representa o número de arestas que concorre em cada vértice, cada uma das

F faces do poliedro de Platão tem p arestas ($p \geq 3$), e como cada aresta está em duas faces:

$$pF = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{p} \quad \text{Eq. 1}$$

Cada um dos V vértices do poliedro ou ângulos poliédricos tem q arestas ($q \geq 3$), número de arestas que concorrem em um vértice, e como cada aresta contém dois vértices:

$$qV = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{q} \quad \text{Eq. 2}$$

Substituindo as Equações 1 e 2 na relação de Euler e depois dividindo por $2A$:

$$\frac{2A}{q} - A + \frac{2A}{p} = 2 \Rightarrow \frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} = \frac{1}{A} \quad \text{Eq. 3}$$

Sabe-se que $p \geq 3$ e $q \geq 3$. Contudo, se p e q fossem simultaneamente maiores que 3 teríamos:

$$\left. \begin{array}{l} q > 3 \Rightarrow q \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{q} \leq \frac{1}{4} \\ p > 3 \Rightarrow p \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{p} \leq \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \leq 0 \quad \text{Eq. 4}$$

O que contraria a igualdade (Eq. 3), pois A é um número positivo. Conclui-se então que, nos poliedros de Platão, $q = 3$ ou $p = 3$. Isto significa que um poliedro de Platão possui, obrigatoriamente, ângulo triédrico ou triângulo:

- I. Para $q = 3$ (supondo ângulo triédrico ou 3 arestas concorrem em um vértice). Substituindo na Equação 3:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{1}{6} \Rightarrow p < 6$$

Então, como p representa o número de arestas de cada face, para $p = 3$ têm-se face triangular, $p = 4$ têm-se face quadrada e $p = 5$ têm-se face pentagonal.

- II. Para $p = 3$ (supondo que as faces são triangulares). Substituindo na Equação 3:

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{q} > \frac{1}{6} \Rightarrow q < 6$$

Dessa forma, para $q = 3$ têm-se ângulos triédricos (3 arestas concorrem em um vértice), para $q = 4$ têm-se ângulos tetraédricos (4 arestas concorrem em um vértice) e para $q = 5$ têm-se ângulos pentaédricos (5 arestas concorrem em um vértice).

Com os resultados encontrados em I e II a partir das definições de p e q , conclui-se que os poliedros de Platão são determinados pelos pares (p, q) : (3,3), (4,3), (3,4), (5,3) e (3,5) sendo, portanto, cinco, e somente cinco, as classes de poliedros de Platão.

Dolce e Pompeo (1993) e DeHovitz (2016) também apresentaram como consequência dessa demonstração a possibilidade de calcular a quantidade de faces de cada um desses poliedros apenas substituindo os valores de p e q na Equação 3, e utilizando as Equações 1 e 2 em seguida. Observou-se também que conhecidos os números de faces dos poliedros pode-se nomear os poliedros de Platão, conforme detalhado na **Tab. 3**.

Além disso, como já visto anteriormente (Seção 2.2), o tetraedro é autodual, o hexaedro é dual do octaedro e o dodecaedro é dual do icosaedro. Na **Tab. 3** é possível notar que o número de faces de um poliedro é igual ao número de vértices do seu dual.

Tabela 3 – Nomes dos poliedros de Platão.

p (Número de arestas de cada face)	q (Número de arestas que concorrem em um vértice)	V (Vértices do poliedro)	A (Arestas do poliedro)	F (Faces do poliedro)	$V - A + F$	Nome do poliedro
3	3	4	6	4	$4 - 6 + 4 = 2$	Tetraedro
4	3	8	12	6	$8 - 12 + 6 = 2$	Hexaedro
3	4	6	12	8	$6 - 12 + 8 = 2$	Octaedro
5	3	20	30	12	$20 - 30 + 12 = 2$	Dodecaedro
3	5	12	30	20	$12 - 30 + 20 = 2$	Icosaedro

Fonte: Arquivos da autora (2021).

Considerando agora os poliedros de Platão regulares, ou seja, os poliedros convexos em que todas as suas faces são polígonos regulares (iguais ou congruentes

entre si) e em todos os vértices concorrem (partem) o mesmo número de arestas, segundo Dolce e Pompeo (1993, p. 133) “existem cinco, e somente cinco, *tipos* de poliedros regulares”. Demonstrações geométricas dessa afirmação também foram discutidas nos trabalhos de Costa, Santos e Souza (2018), Jelinek, Mohr e Silva (2020) e Melo e Rheinheimer (2015).

Segundo Richeson (2015, p. 21) “parte do mistério que envolve estes cinco poliedros reside em serem poucos - nenhum outro poliedro, para além destes cinco, satisfaz os rigorosos requisitos de regularidade”.

Sendo assim, considerando que a medida de um ângulo interno de um polígono regular de p lados é dada por $180 \left(\frac{p-2}{p} \right)$, se o poliedro tiver q arestas que concorrem em um vértice, a soma das medidas dos ângulos em torno de cada vértice será dada por $q \left[180^\circ \left(\frac{p-2}{p} \right) \right]$.

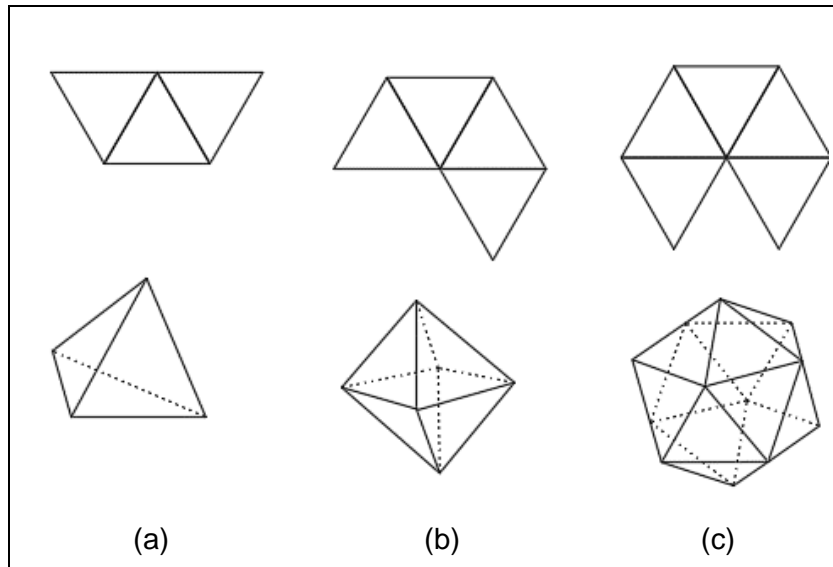
Além disso, de acordo com Mohr e Prado (2014, p. 6) no Livro XI de Os Elementos de Euclides, a proposição 21 diz que “a soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada vértice de um poliedro é sempre menor do que 360° ”. Verifica-se que se a soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada vértice for igual a 360° todas essas faces estariam em um mesmo plano, criando uma superfície plana e não uma figura espacial. DeHovitz (2016) observou também que se a soma dos ângulos for maior que 360° , algum plano delimitador entrará necessariamente no interior do sólido e, portanto, não será um poliedro convexo.

Observando essas definições e propriedades, considerando o caso em que as faces de um poliedro regular são triângulos equiláteros ($p = 3$), então cada ângulo interno mede $180 \left(\frac{3-2}{3} \right) = 60^\circ$. As possibilidades para construção de um poliedro com $q \left[180^\circ \left(\frac{p-2}{p} \right) \right] < 360^\circ$, ou seja $q < 6$, portanto, $q = 3$, $q = 4$ ou $q = 5$, são ilustradas na **Fig. 24**. Dessa forma, seja q o número de arestas que concorre em cada vértice, para $q = 3$ têm-se tetraedro, para $q = 4$ têm-se octaedro e para $q = 5$ têm-se icosaedro.

Da mesma forma, considerando o caso em que as faces de um poliedro regular são quadradas (ou seja, $p = 4$), então cada ângulo interno mede $180 \left(\frac{4-2}{4} \right) = 90^\circ$. A possibilidade para construção de um poliedro com $q \left[180^\circ \left(\frac{p-2}{p} \right) \right] < 360^\circ$, ou seja $q <$

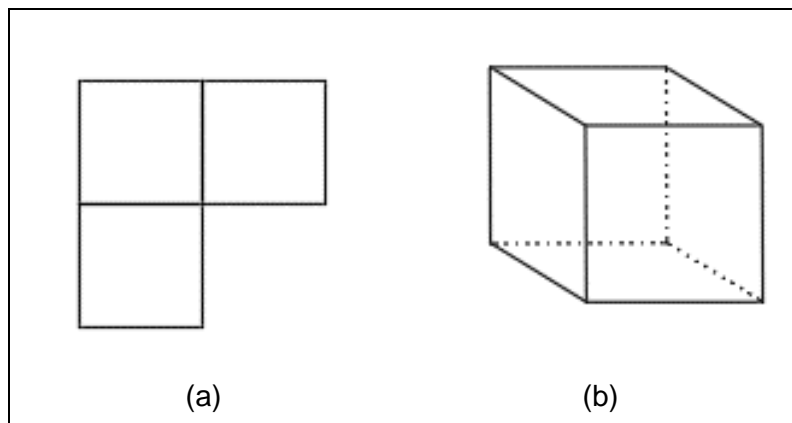
4, portanto, $q = 3$ é ilustrada na **Fig. 25**. Dessa forma, seja q o número de arestas que concorre em cada vértice, para $q = 3$ têm-se hexaedro.

Figura 24. Poliedros regulares formados com triângulos equiláteros: tetraedro regular (a), octaedro regular (b) e icosaedro regular (c).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Figura 25. Poliedro regular formado com quadrados: faces (a) e hexaedro regular (b).

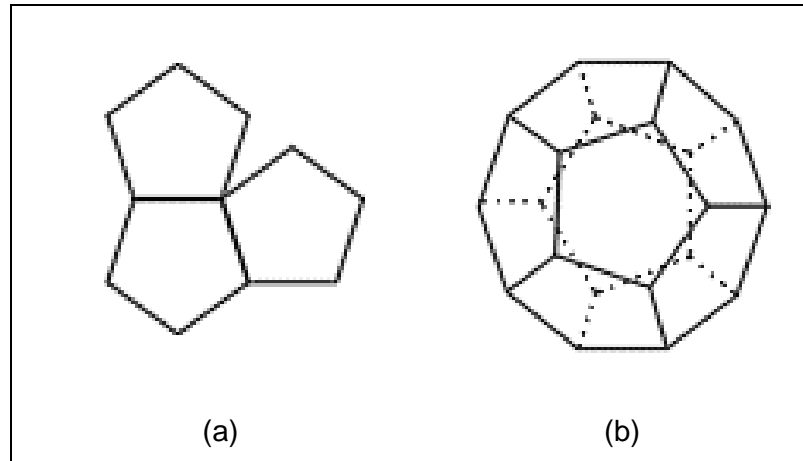


Fonte: Arquivos da autora (2021).

Dando continuidade, considerando o caso em que as faces de um poliedro regular são pentágonos regulares e como p representa o número de arestas de cada face, $p = 5$, então cada ângulo interno mede $180 \left(\frac{5-2}{5} \right) = 108^\circ$, a possibilidade para construção de um poliedro com $q \left[180^\circ \left(\frac{p-2}{p} \right) \right] < 360^\circ$, ou seja $q < \frac{360}{108}$, portanto, $q =$

3 é ilustrada na **Fig. 26**. Dessa forma, seja q o número de arestas que concorre em cada vértice, para $q = 3$ têm-se dodecaedro.

Figura 26. Poliedro regular formado com pentágonos regulares: faces (a) e dodecaedro regular (b).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

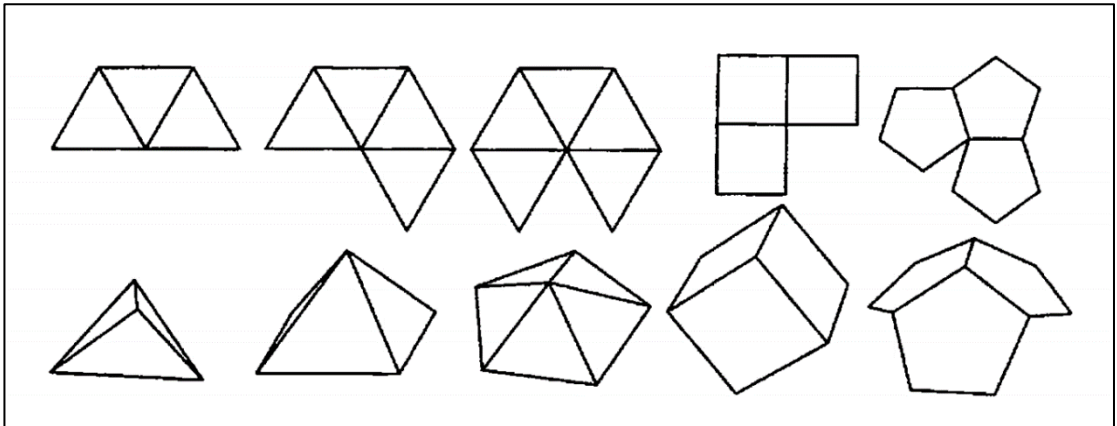
Com base no exposto, a **Fig. 27** sintetiza a formação dos vértices dos poliedros regulares observando a soma dos ângulos dos polígonos regulares em torno de cada vértice.

Por fim, considerando o caso em que as faces de um poliedro regular são hexágonos regulares, p representa o número de arestas de cada face, $p = 6$, então cada ângulo interno mede $180 \left(\frac{6-2}{6} \right) = 120^\circ$, a única possibilidade para construção de um poliedro com $q \left[180^\circ \left(\frac{p-2}{p} \right) \right] < 360^\circ$, ou seja $q < 3$, portanto, $q = 2$.

Entretanto, como q representa o número de arestas que concorre em cada vértice e o número de arestas que concorrem em um vértice deverá ser pelo menos 3 ($q \geq 3$), e com $q = 3$ a soma dos ângulos internos é igual a 360° , não é possível construir um poliedro regular com polígonos regulares de 6 faces. (**Fig. 28**).

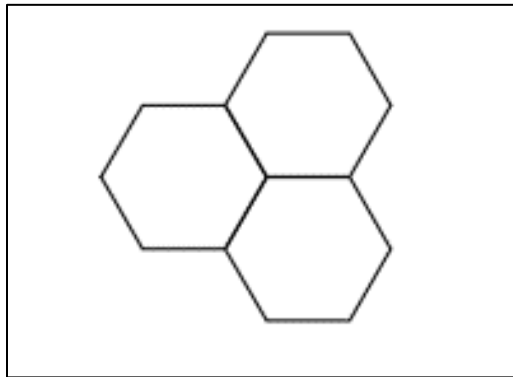
Dessa forma, não é possível construir poliedros com faces limitadas por polígonos regulares com $p > 5$, de modo que as possibilidades apresentadas para $p = 3$ (triângulos equiláteros), $p = 4$ (quadrados) e $p = 5$ (pentágonos regulares) foram sintetizadas na **Tab. 4**.

Figura 27. Polígonos regulares formando os vértices dos poliedros regulares.



Fonte: Richeson (2015).

Figura 28. Hexágonos regulares formando uma figura plana.



Fonte: Arquivos da autora (2021).

De forma complementar, apresenta-se uma demonstração analítica da existência de apenas 5 tipos de poliedros regulares (BALESTRI, 2016; DANTE, 2000; DEHOVITZ, 2016; DOLCE e POMPEO, 1993; LIMA *et al.*, 2004, RICHESON, 2015). Destaca-se também que, como p representa o número de arestas de cada face, $p > 2$, já que todo polígono deve ter pelo menos 3 lados, e como q representa o número de arestas que concorrem em um vértice, $q > 2$, pois são necessárias pelo menos 3 arestas que concorrem em um vértice de um poliedro, têm-se:

$$q \left[180^\circ \left(\frac{p-2}{p} \right) \right] < 360^\circ$$

$$q \left(\frac{p-2}{p} \right) < 2$$

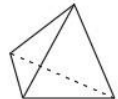
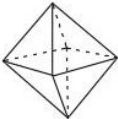
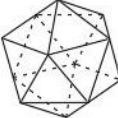
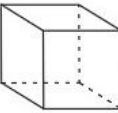
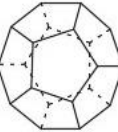
$$qp - 2q - 2p < 0$$

$$qp - 2 - 2q + 4 < 4$$

$$(p - 2)(q - 2) < 4$$

Eq. 5

Tabela 4 – Possibilidades para construção de poliedros regulares.

Polígonos regulares das faces	Medida dos Ângulos internos dos polígonos regulares das faces	Quantidade de arestas que concorrem em um vértice do Poliedro Regular	Soma dos ângulos internos em torno de cada vértice do poliedro regular	Poliedro regular	Representação do poliedro regular
Triângulos equiláteros	60°	3	180°	Tetraedro Regular	
Triângulos equiláteros	60°	4	240°	Octaedro Regular	
Triângulos equiláteros	60°	5	300°	Icosaedro Regular	
Triângulos equiláteros	60°	6	360°	Não existe	-
Quadrados	90°	3	270°	Hexaedro Regular	
Quadrados	90°	4	360°	Não existe	-
Pentágonos regulares	108°	3	324°	Dodecaedro Regular	
Pentágonos regulares	108°	4	432°	Não existe	-
Hexágonos regulares	120°	3	360°	Não existe	-

Fonte: Arquivos da autora (2021).

Entretanto, caso tivéssemos, por exemplo, $p = 4$ e $q = 4$, substituindo em (Eq. 5) têm-se $(p - 2)(q - 2) = 4$ e não atende à Equação 5. Da mesma forma, para $p = 5$, $q = 4$, substituindo em (5) têm-se $(p - 2)(q - 2) > 4$ que também não atende à Equação 5. Sendo assim, Dante (2000) e DeHovitz (2016) mostraram que para $p > 2$ e $q > 2$, as únicas possibilidades que satisfazem (Eq. 5) são apresentadas na **Tabela 5**.

Tabela 5 – Possibilidades para número de lados (p) e arestas que concorrem em cada vértice (q) em um poliedro regular.

p	q	$p - 2$	$q - 2$	$(p - 2)(q - 2)$	Nome do poliedro
3	3	1	1	1	Tetraedro regular
3	4	1	2	2	Octaedro regular
3	5	1	3	3	Icosaedro regular
4	3	2	1	2	Hexaedro regular
5	3	3	1	3	Dodecaedro regular

Fonte: Arquivos da autora (2021).

3.2.2 Diagonais dos poliedros regulares

Assim como nos demais poliedros convexos, o segmento de reta que une dois vértices que não pertencem a uma mesma face é denominado diagonal do poliedro regular como ilustrado na **Fig. 29**.

O tetraedro regular não possui diagonais, pois todos os segmentos de reta que unem dois vértices são arestas desse poliedro, ou seja, pertencem a duas de suas faces. Na **Fig. 29** as diagonais são representadas pelos segmentos de reta (linhas na cor preta): as três diagonais do octaedro regular, as quatro diagonais do hexaedro regular, assim como são exemplificadas algumas das diagonais do dodecaedro regular e icosaedro regular.

Para calcular a quantidade de diagonais em cada poliedro regular considerando dois vértices distintos A e B (o segmento \overline{AB} é igual ao segmento \overline{BA} , já que a ordem dos elementos não altera o resultado), o número total de segmentos de reta que podem ser construídos a partir da união de dois vértices quaisquer do poliedro regular

é dado pela combinação simples do número de vértices do poliedro regular, tomados 2 a 2. No entanto, essa combinação abrange também os segmentos de reta que são chamados de arestas do poliedro regular (ou lados dos polígonos das faces) e as diagonais das faces do poliedro regular. Portanto, seja V o número de vértices do poliedro regular, A o número de arestas, F o número de faces e S o número de diagonais das faces, o número de diagonais do poliedro regular (D) é:

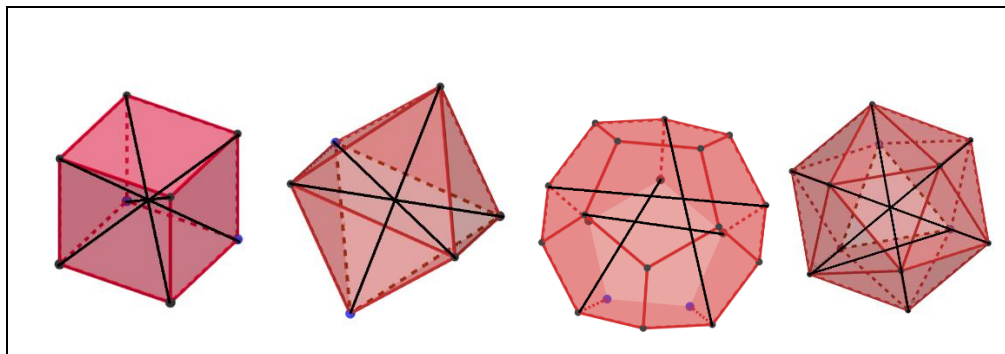
$$D = C_{V,2} - A - FS \quad \text{Eq. 6}$$

Mantendo a notação adotada anteriormente para identificar o poliedro como (p,q) , onde p representa o número de arestas de cada face e q é o número de arestas que concorrem em um vértice, p também pode representar o número de lados do polígono regular, já que se referem ao mesmo elemento com denominações diferentes para polígonos e poliedros. Sendo assim, o número de diagonais de cada uma das faces (S) do poliedro regular é:

$$S = \frac{p(p-3)}{2} \quad \text{Eq. 7}$$

Fazendo os cálculos com base nos dados de cada poliedro regular, obtemos o número de diagonais em cada poliedro regular, ressaltando-se, contudo, que o tetraedro regular não possui diagonais, conforme mostrado na **Tab. 6**.

Figura 29. Algumas diagonais dos poliedros regulares.



Fonte: Arquivos da autora (2021).

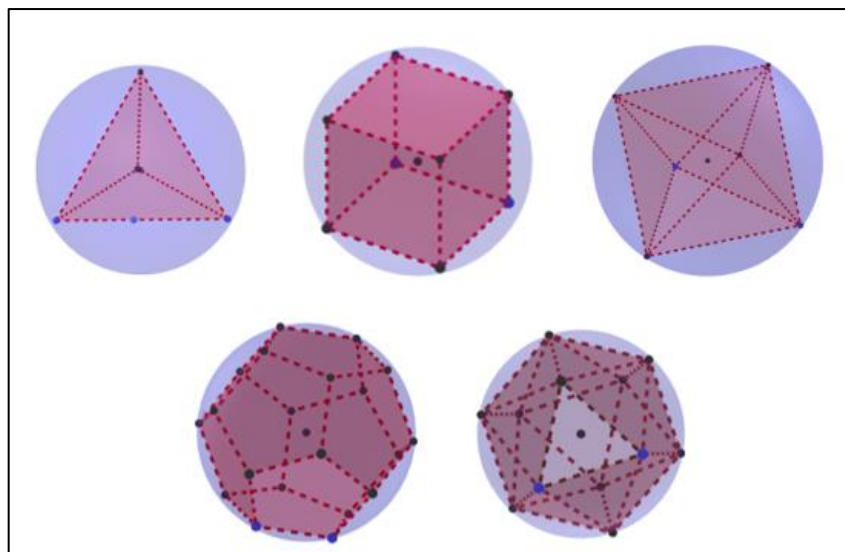
Tabela 6 – Quantidade de diagonais em um poliedro regular.

Poliedro regular	p (número de arestas de cada face)	F (FACES do poliedro)	A (Arestas do poliedro)	V (Vértices do poliedro)	$C_{V,2}$	S (Diagonais das faces)	Diagonais do poliedro regular $C_V^2 - A - FS$
Tetraedro	3	4	6	4	6	0	$6 - 6 - 4 \times 0 = 0$
Hexaedro	4	6	12	8	28	2	$28 - 12 - 6 \times 2 = 4$
Octaedro	3	8	12	6	15	0	$15 - 12 - 8 \times 0 = 3$
Dodecaedro	5	12	30	20	190	5	$190 - 30 - 12 \times 5 = 100$
Icosaedro	3	20	30	12	66	0	$66 - 30 - 20 \times 0 = 36$

Fonte: Arquivos da autora (2021).

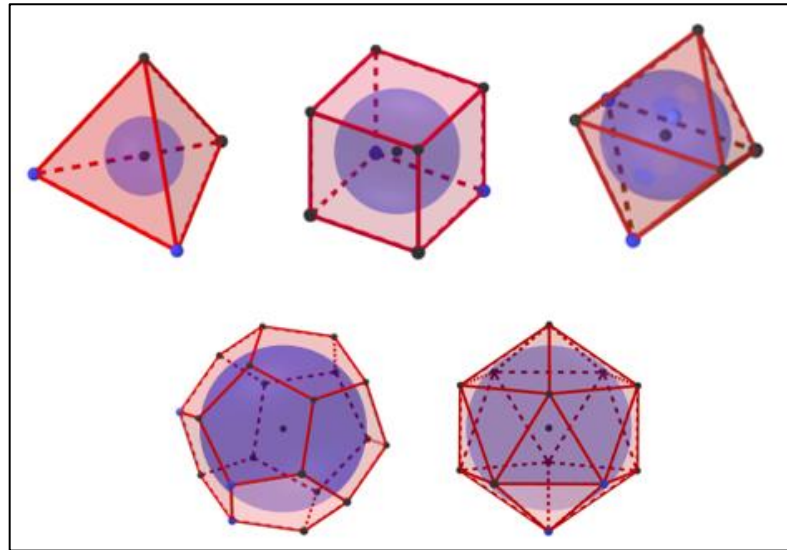
3.2.3 Poliedros regulares inscritos e circunscritos na esfera

Assim como os polígonos regulares podem ser inscritos e circunscritos em uma circunferência, os poliedros regulares também podem ser inscritos em uma esfera, (**Fig. 30**), e circunscritos a uma esfera (**Fig. 31**). Ressalta-se ainda que quando o poliedro regular é inscrito na esfera pode-se dizer também que a esfera é circunscrita ao poliedro regular. Analogamente, quando o poliedro regular é circunscrito à esfera pode-se dizer que a esfera é inscrita no poliedro regular.

Figura 30. Poliedros regulares inscritos em uma esfera.

Fonte: Arquivos da autora (2021).

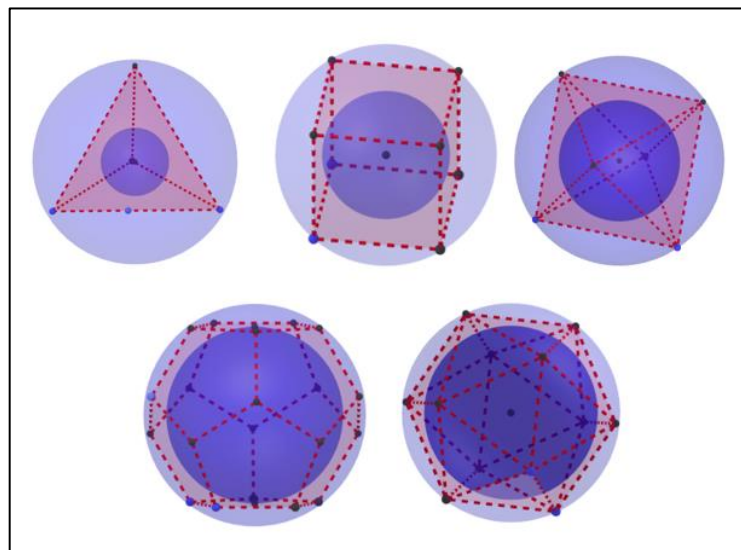
Figura 31. Poliedros regulares circunscritos a uma esfera.



Fonte: Arquivos da autora (2021).

A **Fig. 30** permite observar que a distância do centro da esfera circunscrita aos vértices de cada um dos poliedros regulares equivale ao raio dessa esfera. No caso da esfera inscrita nos poliedros regulares (**Fig. 31**), a distância do centro da esfera inscrita a cada uma das faces dos poliedros regulares equivale ao raio dessa esfera. Na **Fig. 32** observa-se também que o centro da esfera circunscrita e o centro da esfera inscrita correspondem ao mesmo ponto.

Figura 32. Poliedros regulares circunscritos a uma esfera e inscritos em outra esfera.



Fonte: Arquivos da autora (2021).

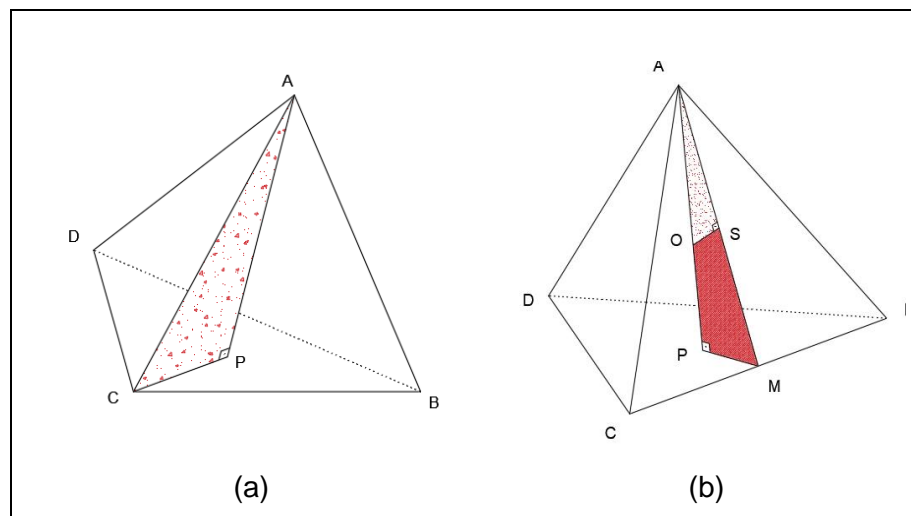
Dessa forma, é possível estabelecer uma relação entre o comprimento das arestas, área de superfície e volume dos poliedros regulares em função do raio da esfera circunscrita aos poliedros regulares, denotado por R , e em função do raio da esfera inscrita nos poliedros regulares, denotado por r .

Além disso, como os cinco poliedros regulares serão inscritos em uma esfera de raio R e serão circunscritos a uma esfera de raio r , para evitar o entendimento de que as arestas de cada poliedro regular teriam o mesmo comprimento (l), o que seria um equívoco, o comprimento das arestas será nomeado de forma distinta para cada poliedro regular, a saber: l_T para o tetraedro, l_H para o hexaedro, l_O para o octaedro, l_D para o dodecaedro e l_I para o icosaedro.

Na **Fig. 33a** o triângulo APC é retângulo, pois o segmento \overline{AP} é a altura do tetraedro regular (h_T) referente à base BCD. Usando o teorema de Pitágoras pode-se calcular o valor da altura do tetraedro em função da aresta do tetraedro: $\overline{AC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PC}^2$, ou seja, $l_T^2 = h_T^2 + \left(\frac{l_T\sqrt{3}}{3}\right)^2$. Então, $h_T = \frac{l_T\sqrt{6}}{3}$.

Por outro lado $\overline{AP} = \overline{AO} + \overline{OP}$. Dessa forma, o segmento \overline{AP} , que é a altura do tetraedro regular (h_T) referente à base BCD, é igual a soma do raio da esfera circunscrita ($\overline{AO} = R$) com o raio da esfera inscrita ($\overline{OP} = r$), ou seja, $\overline{AP} = R + r$ (**Fig. 33b**).

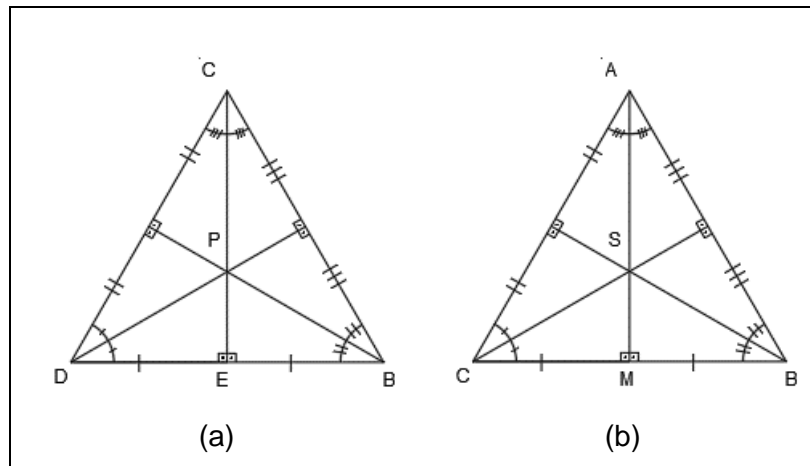
Figura 33. Altura (AP) do tetraedro regular (a) e relação entre altura (AP) do tetraedro e raio da esfera circunscrita (AO) e raio da esfera inscrita (OP) (b).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Além disso, sabendo que em um tetraedro regular as faces são triângulos equiláteros cujos lados têm comprimento l_T , e que nesses polígonos a altura, bissetriz e mediana são coincidentes, o comprimento do segmento \overline{DM} corresponde à altura do triângulo BCD, como ilustrado na **Fig. 34a**, é dado por $\overline{DM} = \frac{l_T\sqrt{3}}{2}$. Como \overline{DM} também é mediana e P é o baricentro (ponto de encontro das medianas) do triângulo BCD, $\overline{PM} = \frac{1}{3}\overline{DM}$, donde segue que $\overline{PM} = \frac{l_T\sqrt{3}}{6}$. Da mesma forma, o ponto S é o baricentro triângulo ABC (**Fig. 34b**), então $\overline{AS} = \frac{2}{3}\overline{AM}$, donde segue que $\overline{AS} = \frac{l_T\sqrt{3}}{3}$.

Figura 34. Baricentros dos triângulos equiláteros BCD (a) e ABC (b).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

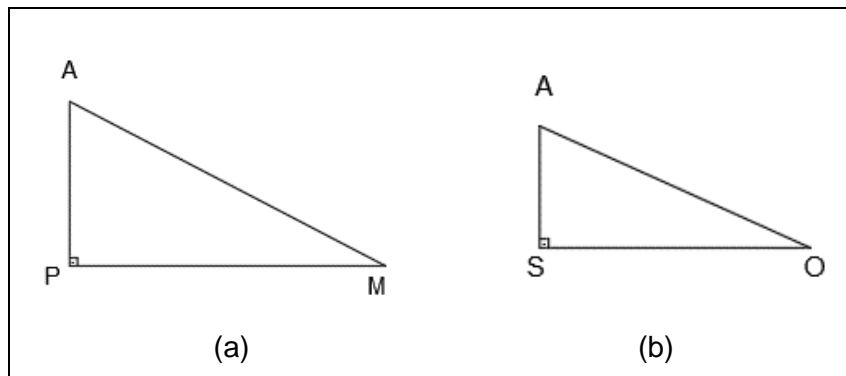
Como os triângulos retângulos APM e ASO (**Fig. 35**) são semelhantes (caso AA), $\frac{\overline{AP}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{OS}}$. Fazendo as substituições, $\frac{\frac{l_T\sqrt{6}}{3}}{\frac{l_T\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{l_T\sqrt{3}}{3}}{r}$, têm-se que $r = \frac{l_T\sqrt{6}}{12}$. Isolando l_T obtêm-se a relação entre o comprimento da aresta do tetraedro regular e o raio da esfera inscrita nesse poliedro, portanto, $l_T = 2r\sqrt{6}$.

Como $h_T = R + r$ e $h_T = \frac{l_T\sqrt{6}}{3}$, têm-se que $\frac{l_T\sqrt{6}}{3} = R + \frac{l_T\sqrt{6}}{12}$. Isolando l_T obtêm-se a relação entre o comprimento da aresta do tetraedro regular e o raio da esfera circunscrita a esse poliedro, portanto, $l_T = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$.

Em um hexaedro regular cujo comprimento de aresta é l_H inscrito em uma circunferência de raio R , como ilustrado na **Fig. 36a**, o triângulo CAE é retângulo em

A. Sabendo que $\overline{CE} = 2R$, $\overline{AE} = l_H$ e $\overline{AC} = l_H\sqrt{2}$ aplicando o teorema de Pitágoras tem-se que $\overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AC}^2$. Fazendo as devidas substituições e isolando l_H obtêm-se a relação entre o comprimento da aresta do hexaedro regular e o raio da esfera circunscrita a esse poliedro, portanto, $l_H = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Figura 35. Semelhança entre os triângulos APM E ASO.



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Por outro lado, na **Fig. 31** pode-se observar que o comprimento da aresta do hexaedro corresponde ao diâmetro da esfera inscrita nesse poliedro, então têm-se que $l_H = 2r$.

Os quatro vértices centrais do octaedro formam um quadrado inscrito em uma circunferência de raio R , de modo que o comprimento das diagonais desse quadrado é igual $2R$ (**Fig. 36b**). Sabendo que a diagonal de um quadrado de lado l_0 é $l_0\sqrt{2}$. Sendo assim, $l_0\sqrt{2} = 2R$ então, $l_0 = R\sqrt{2}$.

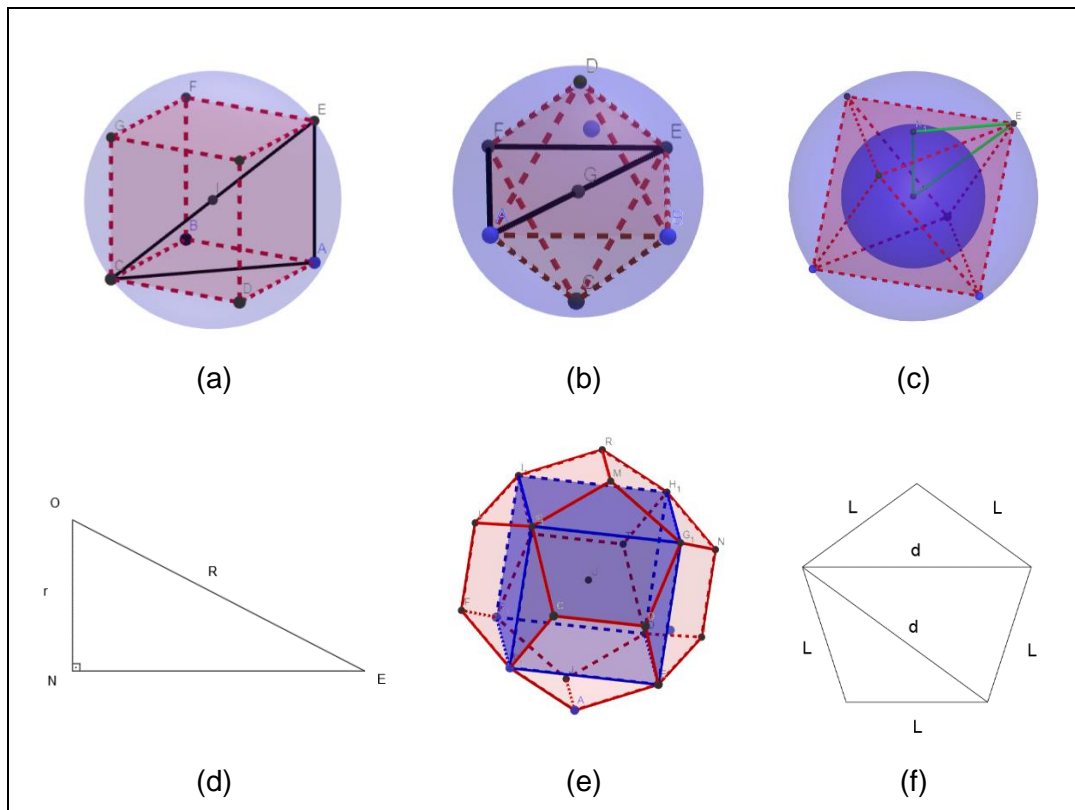
Na **Fig. 36c** pode-se relacionar o raio da esfera circunscrita (R), o raio da esfera inscrita (r) ao octaedro e o segmento \overline{NE} . Como ponto N é o baricentro dessa face triangular do octaedro regular, então $\overline{NE} = \frac{l_0\sqrt{3}}{3}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras já que o triângulo ONE é retângulo em N (**Fig. 36d**), têm-se $R^2 = \overline{NE}^2 + r^2$. Como demonstrado anteriormente, $l_0 = R\sqrt{2}$ então $R = \frac{l_0\sqrt{2}}{2}$ Fazendo as devidas substituições têm-se que $\left(\frac{l_0\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{l_0\sqrt{3}}{3}\right)^2 + r^2$, então $l_0 = r\sqrt{6}$.

Sabendo que é possível inscrever um hexaedro regular em um dodecaedro regular, como ilustrado na **Fig. 36e**. Analogamente como demonstrado anteriormente

para o hexaedro, cujo comprimento de aresta é l_H , o comprimento da sua diagonal é igual a $l_H\sqrt{3}$. Como o hexaedro está inscrito na esfera de raio R , as suas diagonais têm comprimento igual a $2R$. Sendo assim, $l_H\sqrt{3} = 2R$ então, $l_H = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Observa-se que o comprimento da aresta desse hexaedro (l_H) é igual ao comprimento da diagonal do pentágono regular, denominada por d , como ilustrado na **Fig. 36f**.

Figura 36. Aresta do hexaedro regular em relação ao raio da esfera circunscrita (a), aresta do octaedro regular em relação ao raio da esfera circunscrita (b), aresta do octaedro regular em relação ao raio da esfera inscrita (c), triângulo retângulo ONE (d), hexaedro regular inscrito em um dodecaedro regular (d) e diagonal de um pentágono regular (e).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

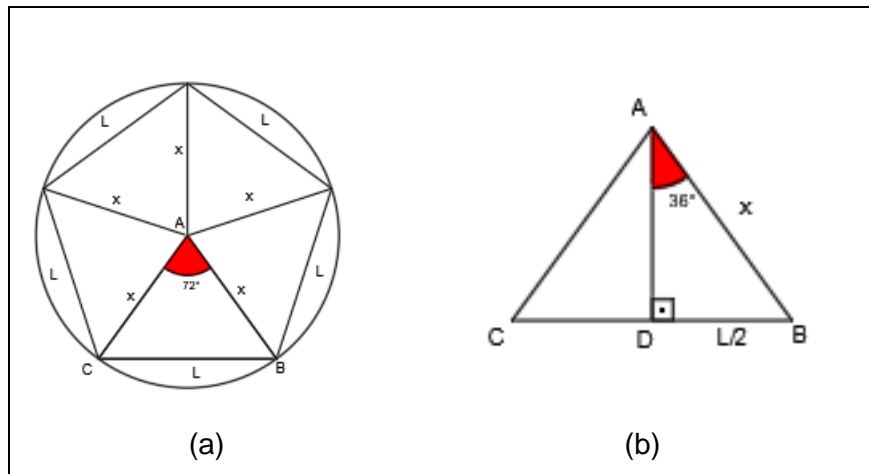
Sabendo que razão entre a diagonal e o lado do pentágono regular é $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, seja l_D o comprimento da aresta do dodecaedro regular (igual ao comprimento da aresta da face, que é um pentágono regular), pode-se dizer que a diagonal do pentágono, denominada por d , é dada por $d = l_D \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Como $d = l_H$, $l_H = l_D \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Por outro lado, como $l_H = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$, igualando as duas expressões, tem-se que $l_D \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Isolando l_D obtêm-se a relação entre o comprimento da aresta do dodecaedro regular e o raio da esfera circunscrita a esse poliedro, portanto, $l_D = \frac{R(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{3}$.

Pode-se calcular o raio da circunferência circunscrita (x) ao pentágono regular em relação ao lado do pentágono regular que é igual comprimento da aresta do dodecaedro regular (l_D), como ilustrado na **Fig. 37a**.

Na **Fig. 37b** observa-se também que o ângulo $\widehat{DAB} = 36^\circ$. Sabendo que $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, usando o seno do ângulo \widehat{DAB} e aplicando a relação trigonométrica $\sin \widehat{DAB} = \frac{(l_D/2)}{R}$, têm-se que $x = \frac{2l_D}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$.

Figura 37. Circunferência circunscrita ao pentágono regular (a) e ângulo \widehat{DAB} (b).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

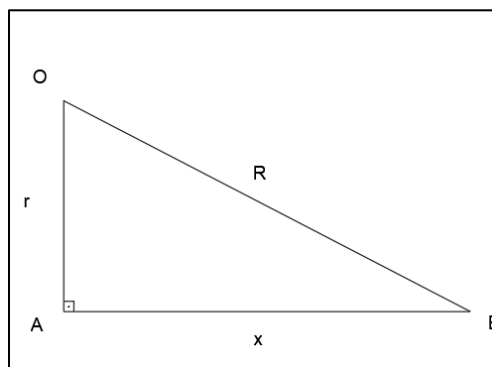
Por outro lado, para o cálculo do raio da esfera inscrita (r) ao dodecaedro regular, sabendo que o triângulo OAB é retângulo em A, como ilustrado na **Fig. 38**, pode-se aplicar o teorema de Pitágoras, $R^2 = r^2 + x^2$.

Como demonstrado anteriormente, $l_D = \frac{R(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{3}$, então o raio da esfera circunscrita (R) ao dodecaedro regular é dado por $R = \frac{l_D(\sqrt{3}+\sqrt{15})}{4}$. Fazendo as devidas substituições e operações matemáticas, $\left(\frac{l_D(\sqrt{3}+\sqrt{15})}{4}\right)^2 = (r)^2 + \left(\frac{2l_D}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right)^2$, então $r =$

$\frac{l_D \sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}$. Isolando l_D obtêm-se a relação entre o comprimento da aresta do dodecaedro regular e o raio da esfera inscrita nesse poliedro, portanto,

$$l_D = \frac{r \sqrt{250-110\sqrt{5}}}{100}.$$

Figura 38. Relação entre raio da circunferência circunscrita (x) ao pentágono regular, raio da esfera circunscrita (R) ao dodecaedro regular e raio da esfera inscrita (r) ao dodecaedro regular.



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Sabendo que ao seccionar o icosaedro regular com um plano que contenha 5 de seus vértices obtêm-se um pentágono regular cujo comprimento do lado é igual ao comprimento da aresta do icosaedro (l_I), como ilustrado na **Fig. 39a**.

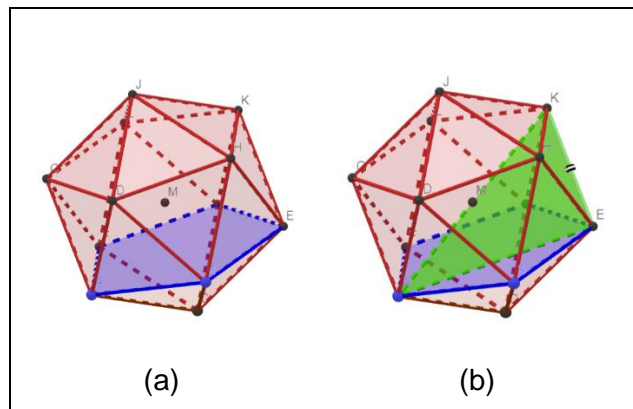
A diagonal desse pentágono (d) tem comprimento igual a $d = l_I \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Observando o triângulo AEK ilustrado na **Fig. 39b**, $\overline{AK} = 2R$, e como \overline{AE} é perpendicular a \overline{EK} , o triângulo AEK é retângulo em E. Aplicando o teorema de Pitágoras, $(2R)^2 = (l_I)^2 + \left(l_I \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2$. Então, $l_I = \frac{R\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5}$.

Para o cálculo do raio da esfera inscrita (r) ao icosaedro regular (**Fig. 40a**), sabendo que o triângulo OPA é retângulo em P, como ilustrado na **Fig. 40b**, pode-se aplicar o teorema de Pitágoras, $R^2 = r^2 + \overline{AP}^2$.

Como demonstrado anteriormente, $l_I = \frac{R\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5}$, então o raio da esfera circunscrita (R) ao icosaedro regular é dado por $R = \frac{l_I \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. Além disso, sabendo que em um icosaedro regular as faces são triângulos equiláteros cujos lados têm

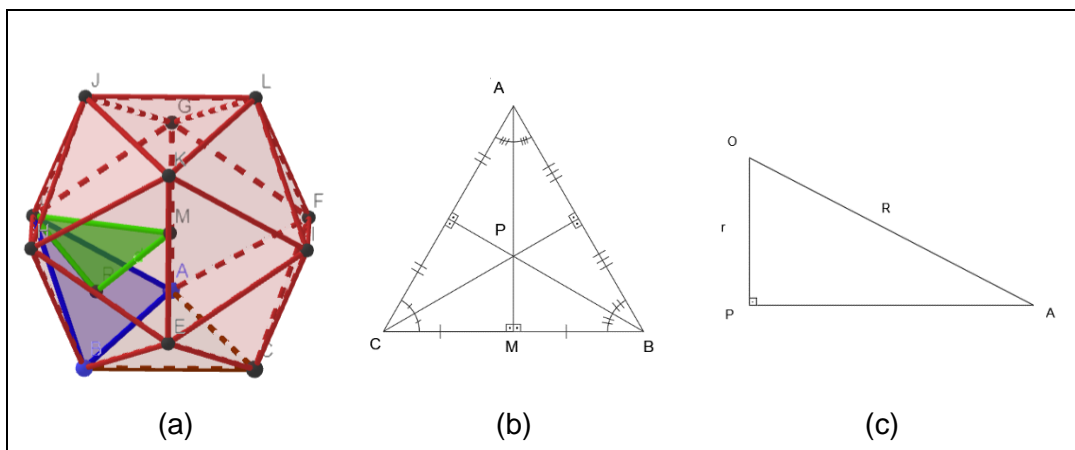
comprimento l_I , e que nesses polígonos a altura, bissetriz e mediana são coincidentes, o comprimento do segmento \overline{AM} correspondente à altura do triângulo ABC, como ilustrado na **Fig. 40c**, é dado por $\overline{AM} = \frac{l_I\sqrt{3}}{2}$. Como \overline{AM} também é mediana e P é o baricentro (ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC, $\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AM}$, donde segue que $\overline{AP} = \frac{l_I\sqrt{3}}{3}$.

Figura 39. Seção em um icosaedro regular (a) e triângulo AEK. (b).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Figura 40. Raio da esfera inscrita ao icosaedro regular (a), baricentro do triângulo equilátero ABC (b) e Relação entre segmento (AP) do triângulo equilátero, raio da esfera circunscrita (R) e raio da esfera inscrita (r) ao dodecaedro regular (c).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Fazendo as devidas substituições e operações matemáticas, $\left(\frac{l_I\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2 = (r)^2 + \left(\frac{l_I\sqrt{3}}{3}\right)^2$, então $r = \frac{l_I\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12}$. Além disso, sejam A e B números racionais positivos e diferentes de zero ($A, B \in \mathbb{Q}_+$), $A^2 > B$, $A^2 - B$ não é um quadrado perfeito e B não é quadrado perfeito, sabe-se que $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$, então $\sqrt{42+18\sqrt{5}} = 3\sqrt{3} + \sqrt{15}$ e $r = \frac{l_I(3\sqrt{3} + \sqrt{15})}{12}$. Isolando l_I obtêm-se a relação entre o comprimento da aresta do icosaedro regular e o raio da esfera inscrita nesse poliedro, portanto, $l_I = r(3\sqrt{3} - \sqrt{15})$.

A **Tab. 7** apresenta o comprimento das arestas dos poliedros regulares em função do raio da esfera circunscrita (R) e do raio da esfera inscrita (r).

Tabela 7 – Comprimento das arestas dos poliedros regulares em função do raio da esfera circunscrita e do raio da esfera inscrita.

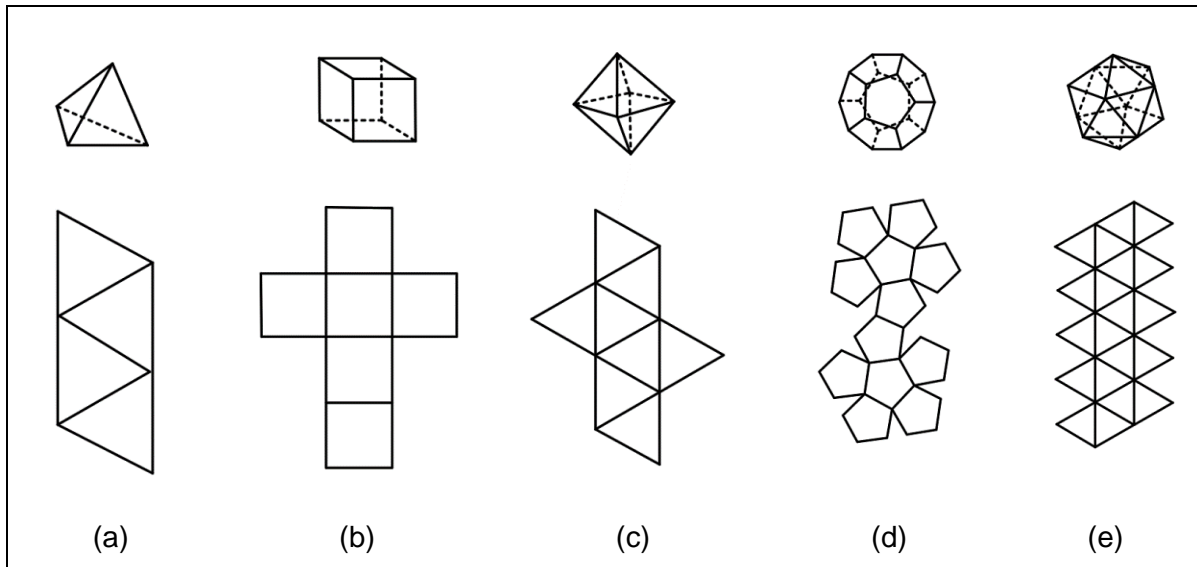
Poliedro regular	Comprimento da aresta	Comprimento da aresta em função de R	Comprimento da aresta em função de r
Tetraedro	l_T	$l_T = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$	$l_T = 2r\sqrt{6}$
Hexaedro	l_H	$l_H = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$	$l_H = 2r$
Octaedro	l_O	$l_O = R\sqrt{2}$	$l_O = r\sqrt{6}$
Dodecaedro	l_D	$l_D = \frac{R(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{3}$	$l_D = \frac{r\sqrt{250 - 110\sqrt{5}}}{100}$
Icosaedro	l_I	$l_I = \frac{R\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{5}$	$l_I = r(3\sqrt{3} - \sqrt{15})$

Fonte: Arquivos da autora (2021).

3.2.4 Área de superfície

Na definição adotada nesse trabalho os poliedros limitam uma região do espaço chamada de interior desse poliedro. Dessa forma, a superfície poliédrica com exemplos de planificação dos poliedros regulares é apresentada na **Fig. 41**.

Figura 41. Superfície poliédrica dos poliedros regulares: tetraedro (a), hexaedro (b), octaedro (c), dodecaedro (d) e icosaedro (f).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Considerando que a aresta de cada poliedro tenha comprimento l , a área da superfície poliédrica pode ser determinada pelo produto da quantidade de faces pela área de cada uma das faces do poliedro regular.

No caso do tetraedro regular, octaedro regular e icosaedro regular cujas faces são delimitadas por triângulos equiláteros com área igual a $A = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, a área de superfície do tetraedro regular é $A_{Tetraedro} = 4 \left(l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = l^2 \sqrt{3}$, a área de superfície do octaedro regular é $A_{Octaedro} = 8 \left(l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 2l^2 \sqrt{3}$, e a área de superfície do icosaedro regular é $A_{Icosaedro} = 20 \left(l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 5l^2 \sqrt{3}$.

No hexaedro regular (cubo), as faces são delimitadas por quadrados com área igual a l^2 , o produto do número de faces pela área de cada face corresponde a área do hexaedro regular igual a $A_{hexaedro} = 6l^2$.

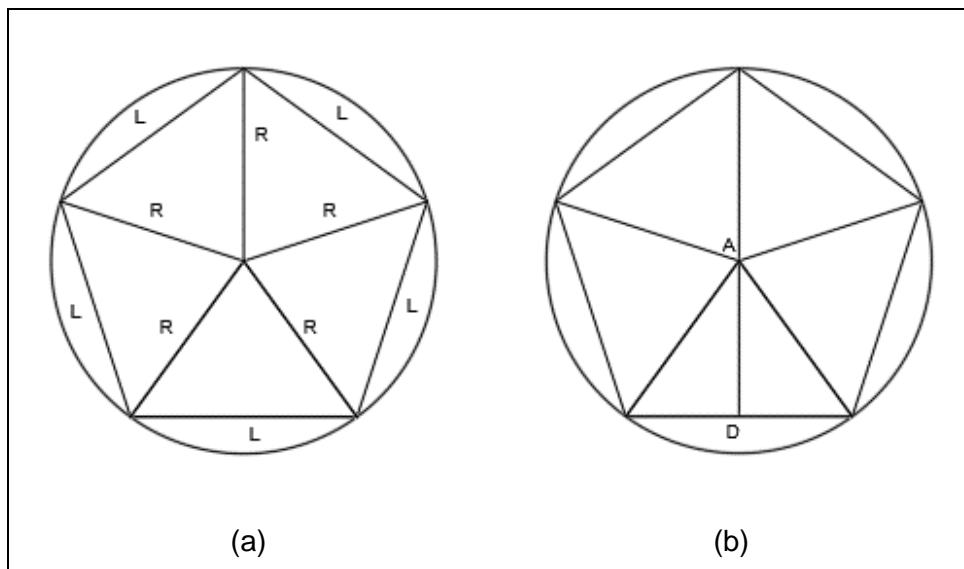
No caso do dodecaedro regular, em que suas faces são delimitadas por pentágonos regulares, o cálculo da área superficial não é tão simples tendo em vista que o cálculo da área desse polígono exige algumas manipulações algébricas.

Sabendo que todo o polígono regular de p lados pode ser inscrito em uma circunferência de raio R e que esses polígonos podem ser divididos em triângulos

isósceles, o pentágono pode ser dividido em 5 triângulos isósceles conforme ilustrado na **Fig. 42a**.

Para calcular a área de cada triângulo, basta determinar o valor do apótema do triângulo (segmento de reta com extremidades no centro da circunferência circunscrita ao polígono e em um lado do polígono regular, tal que esse segmento seja perpendicular a esse lado) e utilizar a fórmula conhecida para determinar a área do triângulo conhecendo um lado e a altura do triângulo relativa a esse lado, que nesse caso equivale à medida do apótema, ilustrado na **Fig. 42b** como o segmento \overline{AD} .

Figura 42. Pentágono regular inscrito em uma circunferência (a) e apótema do pentágono regular (b).



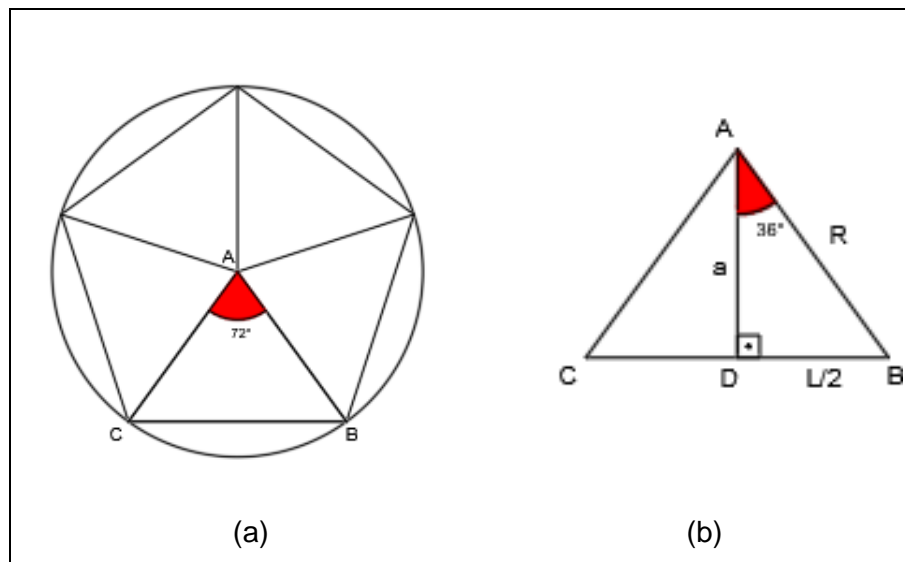
Fonte: Arquivos da autora (2021).

O ângulo central de 360° foi dividido por 5, então o ângulo \widehat{CAB} equivale a 72° (**Fig. 43a**). Como o triângulo ABC é triângulo isósceles, o apótema (\overline{AD}) também é bissetriz do ângulo \widehat{CAB} , de modo que \widehat{DAB} é igual a 36° e o triângulo ABD é retângulo (**Fig. 38b**).

Sabendo que $\text{tg } 36^\circ = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, para calcular o apótema a podemos usar a tangente do ângulo \widehat{DAB} e aplicar a relação trigonométrica $\text{tg } \widehat{DAB} = \frac{(l/2)}{a}$. Desenvolvendo e igualando ao valor da tangente de 36° , tem-se o valor do apótema $a = \frac{l}{10} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$. A área do triângulo será dada por $A_{\text{Triângulo}} =$

$\frac{l}{2} \left(\frac{l}{10} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \right)$, portanto $A_{\text{Triângulo}} = \frac{l^2}{20} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$. Em seguida, para determinar a área do pentágono basta multiplicar a área do triângulo equilátero por 5 $A_{\text{Pentágono}} = \frac{l^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$, e já que o dodecaedro regular tem 12 faces pentagonais, para determinar a área superficial desse poliedro deve-se multiplicar a área do pentágono por 12. Por fim, $A_{\text{Dodecaedro}} = 3l^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$.

Figura 43 – Ângulo CÂB (a) e ângulo DÂB (b).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

As áreas das faces e áreas das superfícies de cada poliedro regular calculadas em função do comprimento da aresta, estão sintetizadas na **Tab. 8**.

A **Tab. 9** apresenta da área da superfície dos poliedros regulares após substituição nas expressões de área de superfície apresentadas na **Tab. 8** do comprimento das arestas dos poliedros regulares (l) pelo comprimento das arestas dos poliedros regulares em função do raio da esfera circunscrita (R) e do raio da esfera inscrita (r), conforme demonstrado anteriormente e sintetizado na **Tab. 7**.

Tabela 8 – Área da superfície poliédrica em função do comprimento da aresta.

Poliedro regular	Comprimento da aresta	Área da Face	Área da superfície poliédrica
Tetraedro	l	$l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$	$l^2 \sqrt{3}$
Hexaedro	l	l^2	$6l^2$
Octaedro	l	$l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$	$2l^2 \sqrt{3}$
Dodecaedro	l	$\frac{l^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$	$3l^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$
Icosaedro	l	$l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$	$5l^2 \sqrt{3}$

Fonte: Arquivos da autora (2021).

Tabela 9 – Área da superfície dos poliedros regulares em função do comprimento da aresta, do raio da esfera circunscrita e do raio da esfera inscrita.

Poliedro regular	Comprimento da aresta	Área da superfície poliédrica em função de l	Área da superfície poliédrica em função de R	Área da superfície poliédrica em função de r
Tetraedro	l_T	$l_T^2 \sqrt{3}$	$\frac{8R^2 \sqrt{3}}{3}$	$24r^2 \sqrt{3}$
Hexaedro	l_H	$6l_H^2$	$8R^2$	$24r^2$
Octaedro	l_O	$2l_O^2 \sqrt{3}$	$4R^2 \sqrt{3}$	$12r^2 \sqrt{3}$
Dodecaedro	l_D	$3l_D^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$	$2R^2 \sqrt{50 - 10\sqrt{5}}$	$30r^2 \sqrt{130 - 58\sqrt{5}}$
Icosaedro	l_I	$5l_I^2 \sqrt{3}$	$2R^2 (5\sqrt{3} - \sqrt{15})$	$30r^2 \sqrt{7\sqrt{3} - 3\sqrt{15}}$

Fonte: Arquivos da autora (2021).

3.2.5 Volume

Como dito anteriormente, nesse trabalho considera-se que os poliedros limitam uma região do espaço chamada de interior desse poliedro. Dessa forma, a superfície poliédrica e a região interna do poliedro constituem um objeto maciço ou sólido geométrico que no caso dos poliedros platônicos regulares podem ser chamados de sólidos platônicos regulares (**Fig. 15**), ou apenas sólidos regulares.

Observando que o tetraedro regular é uma pirâmide de base triangular, seja A_b área da base e h altura do tetraedro regular, como demonstrado anteriormente, o seu volume é dado por $V_{Tetraedro} = \frac{A_b \times h}{3}$.

Como $A_b = l_T^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ e $h_T = \frac{l_T \sqrt{6}}{3}$, efetuando as substituições têm-se que o volume do tetraedro regular é $V_{Tetraedro} = \frac{l_T^3}{12} \sqrt{2}$.

O volume do tetraedro regular também poderia ser determinado sabendo que esse poliedro pode ser decomposto em 4 pirâmides de base triangular com comprimento de aresta igual ao comprimento da aresta do tetraedro e altura igual ao raio da esfera inscrita, como ilustrado na **Fig. 44a**.

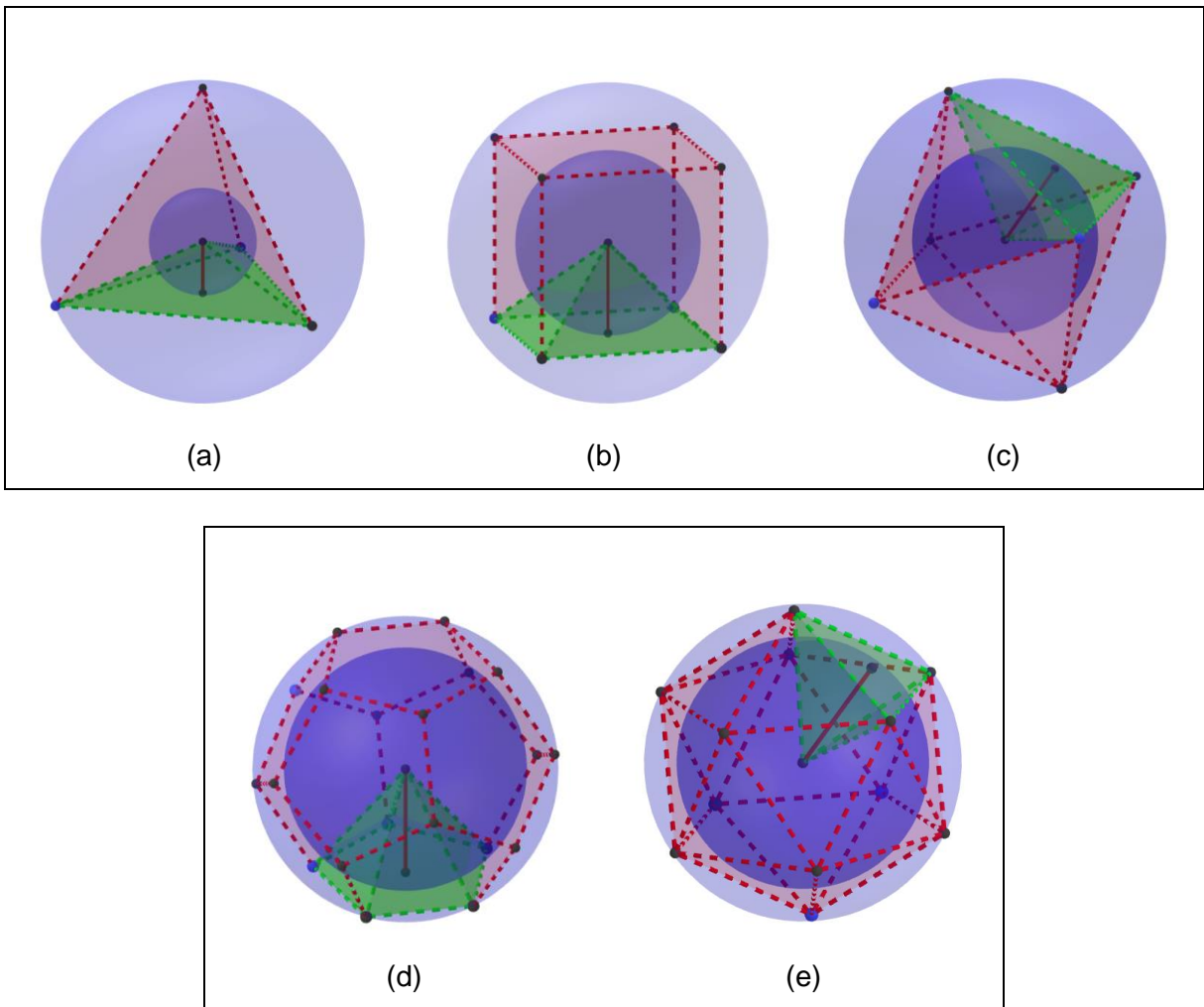
Como o hexaedro regular é um prisma de base quadrada, seja A_b área da base e h altura do hexaedro regular, o seu volume é dado por $V_{Hexaedro} = A_b \times h$. Como $A_b = l_H^2$ e $h = l_H$, efetuando as substituições têm-se que o volume do hexaedro regular é $V_{Hexaedro} = l_H^3$.

O volume do hexaedro regular também poderia ser determinado sabendo que esse poliedro pode ser decomposto em 6 pirâmides de base quadrada com comprimento de aresta igual ao comprimento da aresta do hexaedro e altura igual ao raio da esfera inscrita, como ilustrado na **Fig. 44b**.

O octaedro regular pode ser dividido em 2 pirâmides de base quadrada, então seu volume é dado por $V_{Octaedro} = 2 \times \frac{A_b \times h}{3}$, onde A_b é a área da base e h é a altura dessas pirâmides. Como $A_b = l_0^2$ e h é igual ao raio da esfera circunscrita, e sabendo que $h = R = l_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$ como demonstrado anteriormente, efetuando as substituições têm-se que o volume do octaedro regular é $V_{Octaedro} = \frac{l_0^3 \sqrt{2}}{3}$.

O volume do octaedro regular também poderia ser determinado sabendo que esse poliedro pode ser decomposto em 8 pirâmides de base triangular com comprimento de aresta igual ao comprimento da aresta do octaedro e altura igual ao raio da esfera inscrita, como ilustrado na **Fig. 44c**.

Figura 44. Decomposição do tetraedro regular (a), hexaedro regular (b), octaedro regular (c), dodecaedro regular (d) e icosaedro regular (e).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Analogamente, o dodecaedro regular pode ser dividido em 12 pirâmides de base pentagonal (**Fig. 44d**), então seu volume é dado por $V_{Dodecaedro} = 12 \times \frac{A_b \times h}{3}$, onde A_b é a área da base e h é a altura de cada uma das pirâmides pentagonais.

A altura de cada uma das pirâmides pentagonais (h) é igual ao raio da esfera inscrita (r) ao dodecaedro, como demonstrado anteriormente, $h = r = \frac{l_D \sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}$. Portanto, seja $V_{Dodecaedro} = 12 \times \frac{A_b \times h}{3}$, $A_b = \frac{l_D^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$ e $h = \frac{l_D \sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}$, o volume do dodecaedro regular é $V_{Dodecaedro} = \frac{l_D^3 (15+7\sqrt{5})}{4}$.

Por sua vez, o icosaedro regular pode ser dividido em 20 pirâmides de base triangular (**Fig. 44e**), seja A_b área da base e h altura de cada uma das pirâmides, o seu volume é dado por $V_{Icosaedro} = 20 \times \frac{A_b \times h}{3}$.

A altura de cada uma das pirâmides de base triangular (h) é igual ao raio da esfera inscrita ao icosaedro, como demonstrado anteriormente, $h = r = \frac{l_I (3\sqrt{3} + \sqrt{15})}{12}$. Por fim, seja $V_{Icosaedro} = 20 \times \frac{A_b \times h}{3}$, Como $A_b = l_I^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ e $h = \frac{l_I (3\sqrt{3} + \sqrt{15})}{12}$, o volume do icosaedro regular é $V_{Icosaedro} = \frac{5l_I^3 (3 + \sqrt{5})}{12}$.

Assim como relacionou-se a área da superfície poliédrica em função do raio da esfera circunscrita e do raio da esfera inscrita, fazendo as devidas substituições obtêm-se o volume dos poliedros regulares em função do raio da esfera circunscrita (R) e em função do raio da esfera inscrita (r). A descrição das leis de formação para o cálculo do volume dos poliedros regulares é apresentada na **Tab. 10**.

De forma genérica, como os poliedros regulares podem ser decompostos em pirâmides retas com base igual a face do poliedro regular e altura igual ao raio da esfera inscrita em cada um dos poliedros regulares, o volume desses poliedros corresponde a um terço do produto da área da superfície poliédrica pelo raio da esfera inscrita em cada poliedro regular.

Tabela 10 – Volume dos poliedros regulares em função do comprimento da aresta, do raio da esfera circunscrita e do raio da esfera inscrita.

Poliedro	Comprimento da aresta	Volume em função de l	Volume em função de R	Volume em função de r
Tetraedro	l_T	$\frac{l_T^3}{12}\sqrt{2}$	$\frac{8R^3\sqrt{3}}{27}$	$8r^3\sqrt{3}$
Hexaedro	l_H	l_H^3	$\frac{8R^3\sqrt{3}}{9}$	$8r^3$
Octaedro	l_O	$\frac{l_O^3\sqrt{2}}{3}$	$\frac{4R^3}{3}$	$4r^3\sqrt{3}$
Dodecaedro	l_D	$\frac{l_D^3(15+7\sqrt{5})}{4}$	$\frac{2R^3(5\sqrt{3}+\sqrt{15})}{9}$	$10r^3\sqrt{130-58\sqrt{5}}$
Icosaedro	l_I	$\frac{5l_I^3(3+\sqrt{5})}{12}$	$\frac{2R^3(\sqrt{10+2\sqrt{5}})}{3}$	$10r^3\sqrt{7\sqrt{3}-3\sqrt{15}}$

Fonte: Arquivos da autora (2021).

3.2.6 Área de superfície específica

A relação entre área de superfície e volume é conhecida como área de superfície específica (ASE) e, de acordo com essa relação, quanto menor o volume maior a área de superfície específica.

$$\text{Área de superfície específica} = \frac{\text{Área de superfície}}{\text{Volume}} \quad (\text{Eq. 6})$$

No caso dos poliedros regulares para os quais demonstrou-se as leis de formação para determinação de área de superfície e volume em função do raio da esfera circunscrita (R) e raio da esfera inscrita (r), a relação entre área de superfície e volume será do tipo $\frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}$ ou $\frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$. Dessa forma, pode-se observar que quanto menor o raio das esferas, menor a área de superfície e o volume do poliedro regular inscrito ou circunscrito, de modo que quando o raio das esferas tende a zero a área de superfície específica tende a infinito. Geometricamente, quando o raio das esferas tende a zero pode-se dizer que o poliedro regular que é um elemento tridimensional se aproxima de um ponto.

Com base nas expressões para área de superfície e volume apresentadas anteriormente nas **Tabelas 9 e 10**, determinou-se a área de superfície específica de cada um dos poliedros regulares em função do comprimento da aresta, em função do raio da esfera circunscrita (R) e em função do raio da esfera inscrita (r). A descrição das leis de formação é apresentada na **Tab. 11**.

A **Tab. 11** permite observar que a área de superfície específica dos poliedros regulares em função do raio da esfera circunscrita R é igual para os poliedros duais (hexaedro-octaedro e dodecaedro-icosaedro). Na **Tab. 11** observa-se também que a área de superfície específica em função do raio da esfera inscrita (r) é igual para todos os poliedros regulares, confirmando o que foi dito anteriormente que volume dos poliedros regulares corresponde a um terço do produto da área da superfície poliédrica pelo raio da esfera inscrita em cada poliedro regular.

Tabela 11 – Área de superfície específica dos poliedros regulares em função do comprimento da aresta, do raio da esfera circunscrita e do raio da esfera inscrita.

Poliedro	Comprimento da aresta	Área de superfície específica em função de l	Área de superfície específica em função de R	Área de superfície específica em função de r
Tetraedro	l_T	$\frac{6\sqrt{6}}{l_T}$	$\frac{9}{R}$	$\frac{3}{r}$
Hexaedro	l_H	$\frac{6}{l_H}$	$\frac{3\sqrt{3}}{R}$	$\frac{3}{r}$
Octaedro	l_O	$\frac{3\sqrt{6}}{l_O}$	$\frac{3\sqrt{3}}{R}$	$\frac{3}{r}$
Dodecaedro	l_D	$\frac{3\sqrt{50 - 22\sqrt{5}}}{l_D}$	$\frac{3\sqrt{15 - 6\sqrt{5}}}{R}$	$\frac{3}{r}$
Icosaedro	l_I	$\frac{3(3\sqrt{3} - \sqrt{15})}{l_I}$	$\frac{3\sqrt{15 - 6\sqrt{5}}}{R}$	$\frac{3}{r}$

Fonte: Arquivos da autora (2021).

A **Tab. 12** apresenta os valores numéricos para área da face, área de superfície, volume e área de superfície específica considerando o comprimento unitário das arestas de cada um dos poliedros regulares. Considerando o mesmo comprimento de aresta para cada um dos poliedros regulares, observa-se que o tetraedro apresenta menor área de superfície, menor volume e maior área de superfície específica e que o dodecaedro apresenta a maior área de superfície, maior volume e menor área de superfície específica.

Tabela 12 – Área da face, área de superfície, volume e área de superfície específica dos poliedros regulares.

POLIEDRO REGULAR	COMPRIMENTO DA ARESTA	AREA DA FACE	QUANTIDADE DE FACES	ÁREA DE SUPERFÍCIE	VOLUME	ÁREA DE SUPERFÍCIE ESPECÍFICA
TETRAEDRO	1,00	0,43	4	1,73	0,12	14,70
HEXAEDRO	1,00	1,00	6	6,00	1,00	6,00
OCTAEDRO	1,00	0,43	8	3,46	0,47	7,35
DODECAEDRO	1,00	1,72	12	20,65	7,66	2,69
ICOSAEDRO	1,00	0,43	20	8,66	2,18	3,97

Fonte: Arquivos da autora (2021).

Assim como nos poliedros regulares, a forma e o tamanho de um objeto ou partícula definem a sua área de superfície e o seu volume influenciando a sua área de superfície específica. Além disso, Zarbin e Oliveira (2013) salientam que “Abaixo de um determinado tamanho crítico, sempre na ordem de alguns nanômetros, as propriedades de um determinado material se tornam diferenciadas daquelas observadas para o mesmo material em escala macroscópica”.

Com isso, o estudo da área de superfície específica em escala nanométrica tem grande relevância para pesquisadores em diversas aplicações como catalisadores, fotocatalisadores, sensores, biosensores, células solares, etc., uma vez que nesses casos uma maior razão área superficial / volume contribui para a

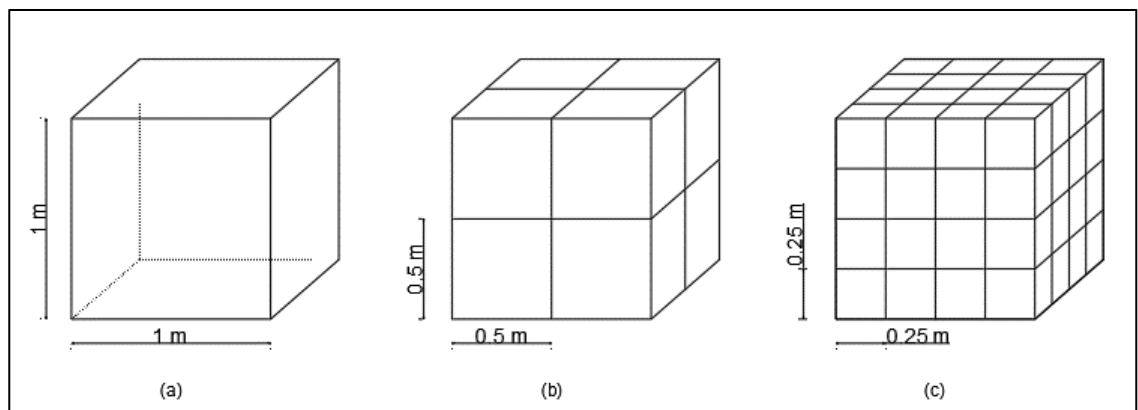
otimização de propriedades quando se comparado com razões maiores. (COELHO, 2020; PASTRANA-MARTINEZ *ET AL.*, 2013; PEREIRA, 2012; ZARBIN E OLIVEIRA, 2013).

Para exemplificar essa observação, escolhendo-se um poliedro cuja área e cujo volume são conhecidos, como um hexaedro regular cuja aresta tem comprimento l , a sua área de superfície é dada por $6l^2$ e o seu volume é dado por l^3 , o hexaedro regular com aresta de 1 m de comprimento (**Fig. 45a**), terá área de superfície de 6 m^2 e volume de 1 m^3 . A área de superfície específica desse hexaedro regular será $6 \text{ m}^2/\text{m}^3$.

Ao dividir esse hexaedro em oito hexaedros regulares menores, cada um com aresta de 0,5 m (**Fig. 45b**), área de superfície de $1,5 \text{ m}^2$, volume de $0,125 \text{ m}^3$, a área de superfície específica passará a ser $12 \text{ m}^2/\text{m}^3$ ($1,5 / 0,125$).

Dividindo novamente cada um desses hexaedros regulares menores em oito (**Fig. 45c**), tem-se 64 hexaedros regulares cada um com aresta de 0,25 m, área de superfície de $0,375 \text{ m}^2$, volume de $0,015625 \text{ m}^3$ e área de superfície específica de $24 \text{ m}^2/\text{m}^3$ ($0,375 / 0,015625$).

Figura 45: Hexaedro regular com aresta de 1 m de comprimento (a), aresta de 0,5m de comprimento (b) e aresta de 0,25m de comprimento (c).



Fonte: Arquivos da autora (2021).

No exemplo ilustrado acima, em escala macroscópica, pode-se observar também que, apesar do hexaedro inicial ter o mesmo volume que os 64 hexaedros menores juntos, a área de superfície do hexaedro inicial (6 m^2) é inferior a área de superfície de cada um dos 64 hexaedros menores (24 m^2). Contudo, essa propriedade é válida para objetos e partículas independentemente da sua forma geométrica e,

inclusive, em proporções muito menores de tamanho como na escala nanométrica, o que possibilita grandes aplicações em diversas áreas do conhecimento.

Além disso, assim como demonstrado nas seções anteriores, pode-se comparar a área de superfície, volume e área de superfície específica dos poliedros regulares com a área de superfície, volume e área de superfície específica de uma esfera de raio R circunscrita a esses poliedros.

Desse modo, sabendo que a área da superfície da esfera de raio R é dada por $A_{Esfera} = 4\pi R^2$ e que o volume é dado por $V_{Esfera} = \frac{4\pi R^3}{3}$, utilizando as relações de área da superfície poliédrica e volume dos poliedros regulares em função do raio (R) da esfera circunscrita a esses poliedros, apresentadas na **Tab. 9** e na **Tab. 10**, e considerando uma esfera de raio unitário, pode-se observar numericamente na **Tab. 13** que o dodecaedro e o icosaedro são os poliedros que mais se aproximam da esfera circunscrita, tanto em termos de área de superfície quanto de volume e área de superfície específica.

Tabela 13 – Área de superfície específica dos poliedros regulares e da esfera circunscrita.

SÓLIDO	RAIO DA ESFERA CIRCUNSCRITA	COMPRIMENTO DA ARESTA	ÁREA DA FACE	QUANTIDADE DE FACES	ÁREA DE SUPERFÍCIE	VOLUME	ÁREA DE SUPERFÍCIE ESPECÍFICA
TETRAEDRO REGULAR	1,0000	1,6330	1,1547	4	4,6188	0,5132	9,0000
HEXAEDRO REGULAR	1,0000	1,1547	1,3333	6	8,0000	1,5396	5,1962
OCTAEDRO REGULAR	1,0000	1,4142	0,8660	8	6,9282	1,3333	5,1962
DODECAEDRO REGULAR	1,0000	0,7136	0,8762	12	10,5146	2,7852	3,7752
ICOSAEDRO REGULAR	1,0000	1,0515	0,4787	20	9,5745	2,5362	3,7752
ESFERA	1,0000				12,5664	4,1888	3,0000

Fonte: Arquivos da autora (2021).

Na **Tab. 13** também é possível notar que a área de superfície específica do hexaedro é equivalente a área de superfície específica do octaedro, assim como a

área de superfície específica do dodecaedro é equivalente a área de superfície específica do icosaedro.

Observa-se também que a razão entre o volume do poliedro regular e seu dual é a mesma que a proporção da área de superfície do sólido e seu dual. Com base nos valores da **Tab. 13**, volume hexaedro / volume octaedro = $1,5396 / 1,3333 = 1,1547$ e área de superfície do hexaedro / área de superfície do octaedro = $8 / 6,9282 = 1,1547$, volume do dodecaedro / volume do icosaedro = $2,7852 / 2,5362 = 1,0981$ e área de superfície do dodecaedro / área de superfície do icosaedro = $10,5146 / 9,5745 = 1,0981$). Segundo Weisstein (n.d) essa propriedade foi observada pela primeira vez por Apolônio para o dodecaedro e o icosaedro.

Por outro lado, também pode-se comparar a área de superfície, volume e área de superfície específica dos poliedros regulares com a área de superfície, volume e área de superfície específica de uma esfera de raio r inscrita nesses poliedros. Considerando que a esfera inscrita tem raio unitário, pode-se observar numericamente na **Tab. 14** que a área de superfície específica de todos os poliedros regulares é igual a área de superfície específica da esfera de raio r inscrita em cada um desses poliedros que correspondente ao triplo do inverso do raio dessa esfera, como demonstrado anteriormente.

Tabela 14 – Área de superfície específica dos poliedros regulares e da esfera inscrita.

SÓLIDO	RAIO DA ESFERA INSCRITA	COMPRIMENTO DA ARESTA	ÁREA DA FACE	QUANTIDADE DE FACES	ÁREA DE SUPERFÍCIE	VOLUME	ÁREA DE SUPERFÍCIE ESPECÍFICA
TETRAEDRO REGULAR	1,0000	4,8990	10,3923	4	41,5692	13,8564	3,0000
HEXAEDRO REGULAR	1,0000	2,0000	4,0000	6	24,0000	8,0000	3,0000
OCTAEDRO REGULAR	1,0000	2,4495	2,5981	8	20,7846	6,9282	3,0000
DODECAEDRO REGULAR	1,0000	0,8981	1,3876	12	16,6509	5,5503	3,0000
ICOSAEDRO REGULAR	1,0000	1,3232	0,7581	20	15,1622	5,0541	3,0000
ESFERA	1,0000				12,5664	4,1888	3,0000

Fonte: Arquivos da autora (2021).

Considerando uma mesma esfera de raio r inscrita em cada um dos poliedros regulares, na **Tab. 14** observa-se também que o tetraedro apresenta maior área de superfície, maior volume e que o icosaedro apresenta a menor área de superfície e menor volume.

Por fim, destaca-se que dentre os poliedros regulares o dodecaedro apresenta maior aproximação entre área de superfície e volume da esfera circunscrita, assim como o icosaedro apresenta maior aproximação entre área de superfície e volume da esfera inscrita.

4 APLICAÇÕES EM CIÊNCIA BÁSICA E APLICADA

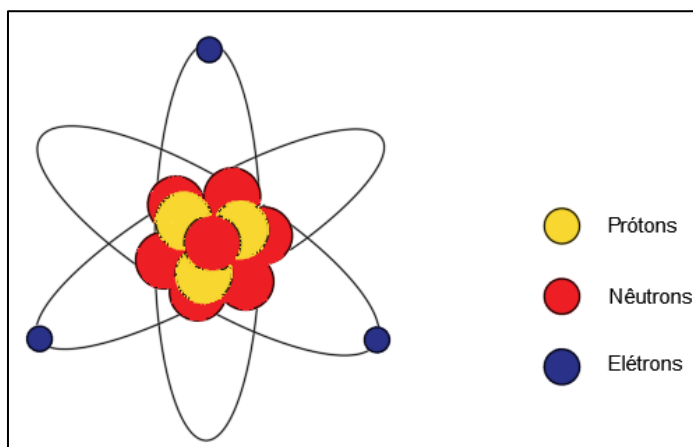
Nesse capítulo serão apresentadas algumas aplicações dos poliedros regulares nas Ciências. Essas aplicações em algumas áreas do conhecimento, em diferentes escalas de comprimento desde o nível subatômico até nível macroscópico, justificam a importância de conhecer as propriedades matemáticas e geométricas dos poliedros regulares apresentadas na seção anterior e incentivam a utilização de uma proposta de ensino para estudantes do ensino médio envolvendo essa temática.

4.1 QUÍMICA, CIÊNCIA DOS MATERIAIS, NANOTECNOLOGIA

A ciência que estuda a composição, estrutura, propriedades da matéria e as mudanças sofridas por ela é a Química e a Estereoquímica é um dos ramos da Química que estuda os aspectos tridimensionais das moléculas. Dessa forma, o estudo da geometria molecular aproxima essas duas ciências da Matemática.

Desde a antiguidade filósofos e estudiosos estudam a composição da matéria, que pode ser definida como qualquer coisa que possui massa e ocupa lugar no espaço. Hoje, sabe-se que a matéria é constituída por átomos e pode se apresentar em três estados físicos: o estado sólido, o estado líquido e o estado gasoso. A estrutura atômica é formada por três partículas fundamentais: prótons, nêutrons e elétrons, como ilustrado na **Fig. 46**.

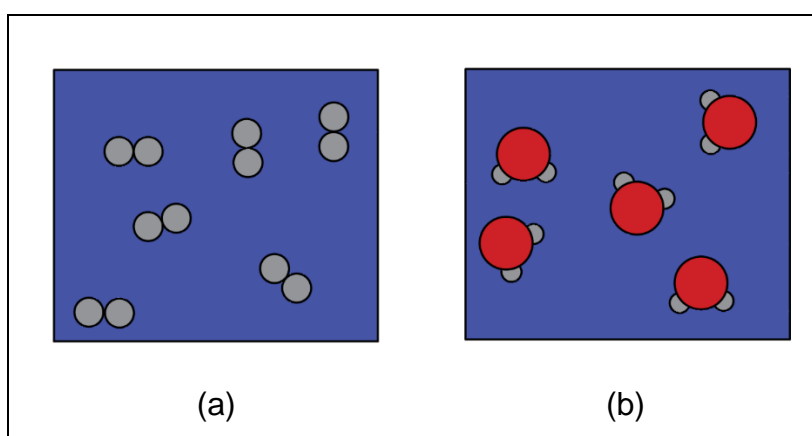
Figura 46 – Esquema de estrutura atômica e suas partículas fundamentais.



Fonte: Arquivos da autora (2021).

Os átomos pertencem a diferentes tipos de elementos químicos e podem se agregar formando moléculas que constituem substância elementar ou substância simples (átomos de um único tipo de elemento químico, **Fig. 47a**) ou compostos químicos (átomos de dois ou mais tipos de elementos químicos ou duas ou mais substâncias elementares, **Fig. 47b**).

Figura 47 – Representação de substância simples como H_2 (a) e substância composta como H_2O .



Fonte: Arquivos da autora (2021).

As propriedades físicas e químicas das substâncias químicas dependem da sua estrutura, ou seja, dependem da maneira como os átomos dos elementos que as constituem estão arranjados no espaço e dependem, também, do tipo de ligação que mantém estes átomos unidos.

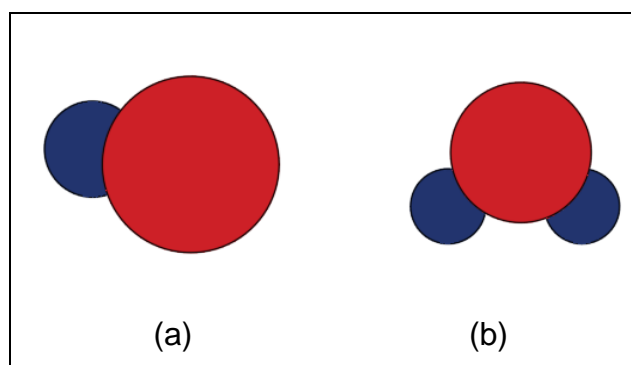
Como ilustrado na **Fig. 48** e segundo Feitosa, Barbosa e Forte (2016, p. 71):

Alguns compostos químicos são constituídos de íons, que são átomos que perderam ou ganharam elétrons, tornando-se eletricamente carregados, como o cloreto de sódio ($NaCl$), formado pelos íons Na^+ e Cl^- . Outros compostos químicos são constituídos por moléculas, que são as menores unidades de uma substância que mantém as características químicas e de composição do composto, como a água, que é constituída por moléculas de H_2O (dois átomos de hidrogênio para cada átomo de oxigênio).

As ilustrações apresentadas são exemplos de como a representação de estruturas químicas e o conhecimento das suas características geométricas pode

facilitar a compreensão das propriedades físicas e químicas das substâncias químicas.

Figura 48 – Representação da molécula de cloreto de sódio (NaCl) (a) e da molécula de água H₂O (b).



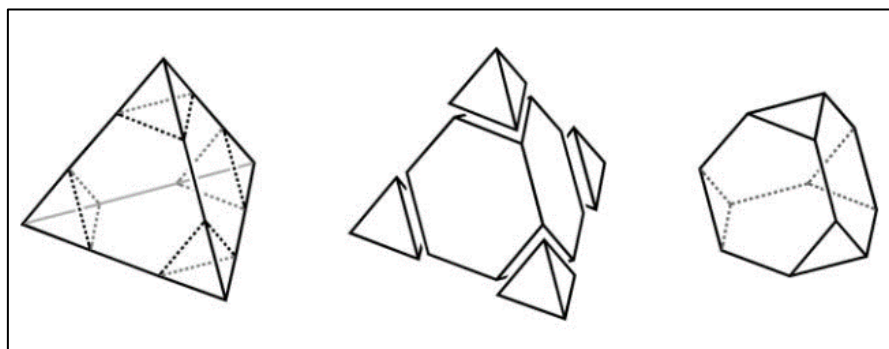
Fonte: Arquivos da autora (2021).

Atiyah e Sutcli (2003) discutiram e apresentaram exemplos de estudo de representação de elétrons em uma esfera, estrutura de átomos de carbono, a determinação de simetria e arranjos de mínima energia e problemas relativos à configuração de partículas pontuais, observando também o ponto de vista geométrico ao relacionar com poliedros, em especial os poliedros regulares.

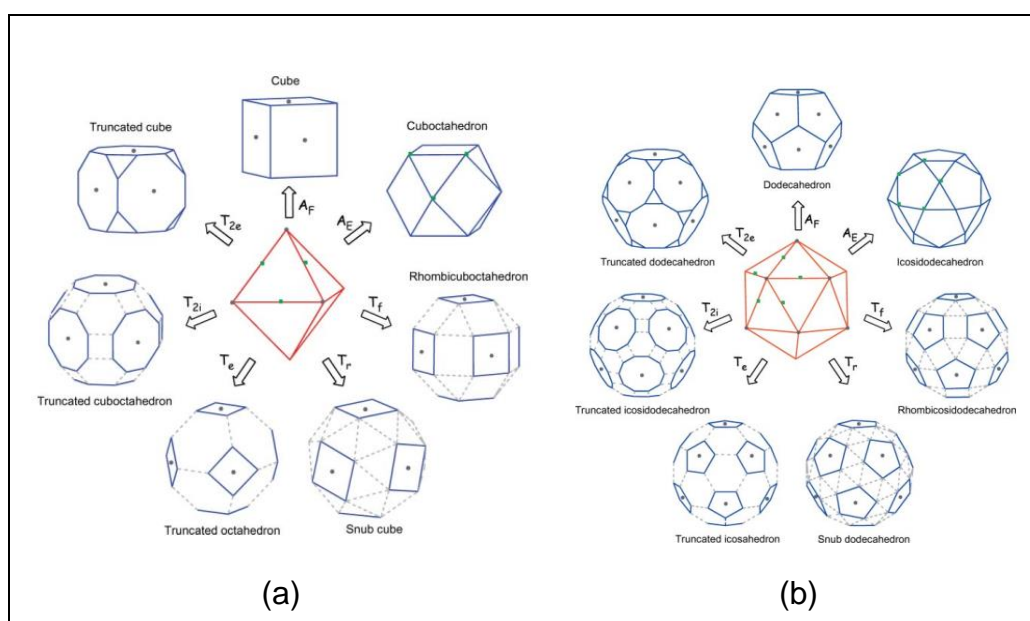
Alvarez (2005) afirmou que o tetraedro e octaedro são os modelos estruturais mais comuns na química do metal de transição molecular e são considerados como as unidades estruturais básicas da maioria dos sólidos inorgânicos.

Alvarez e Echeverría (2010) relataram que representar gráficos de dispersão das medidas de forma de famílias de compostos em relação a dois poliedros ideais, assim chamados os poliedros cujas arestas têm o mesmo comprimento ou suas faces são polígonos regulares, é útil para a análise estereoquímica. No entanto, os autores também destacaram que os poliedros regulares e semirregulares nos fornecem apenas um número limitado de formas ideais de modo que se deve ter em mãos outros conjuntos de poliedros menos regulares.

Diante disso, Alvarez (2005) esclareceu e apresentou algumas operações geométricas com poliedros regulares para construir poliedros semirregulares que podem ser utilizados para ilustrar a representação de estruturas químicas, como ilustrado na **Fig. 49** na **Fig. 50**.

Figura 49 – Truncamento de um tetraedro.

Fonte: Alvarez (2005).

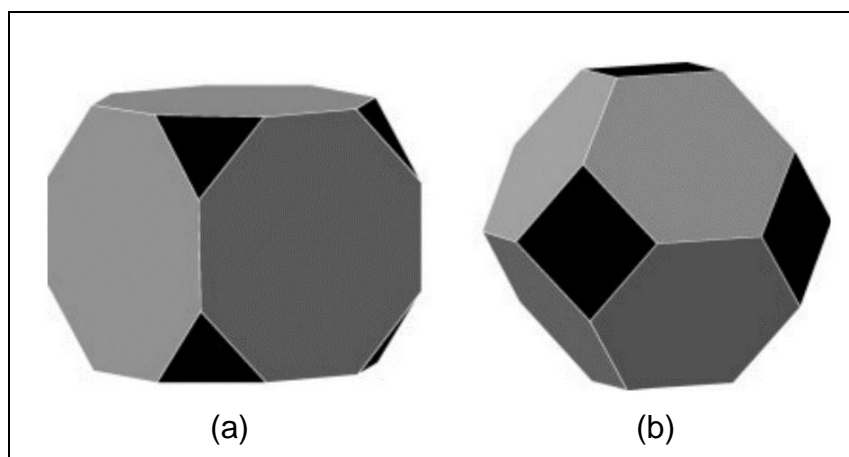
Figura 50 – Poliedros gerados a partir de um octaedro (a) e icosaedro (b).

Fonte: Alvarez (2005).

Sobre a forma das moléculas, Alvarez e Echeverría (2010) esclarecem que duas moléculas têm a mesma forma se diferirem apenas em tamanho, posição ou orientação no espaço. Dito de outra forma, duas moléculas têm a mesma forma se elas podem ser sobrepostas por combinações de translações, rotações e escala isotrópica. Além disso, duas moléculas têm a mesma simetria se permanecerem indistinguíveis após a aplicação do mesmo conjunto de operações de simetria. Dessa forma, os autores concluem que duas moléculas com formas diferentes podem ter a

mesma simetria, indicando que a forma é um critério mais rigoroso do que a simetria, conforme ilustrado pelos exemplos na **Fig. 51**.

Figura 51 – Dois poliedros semiregulares com simetria octaédrica e 24 vértices: hexaedro truncado (a) e octaedro truncado (b).



Fonte: Alvarez e Echeverría (2010).

Alvarez e Echeverría (2010) ressaltam ainda que, existem, no entanto, alguns casos em que forma e simetria são equivalentes, e correspondem precisamente aos poliedros regulares, pois, por exemplo, todos os quatro poliedros de vértices com simetria tetraédrica têm a mesma forma, e o mesmo acontece para o octaedro, o cubo, o dodecaedro e o icosaedro.

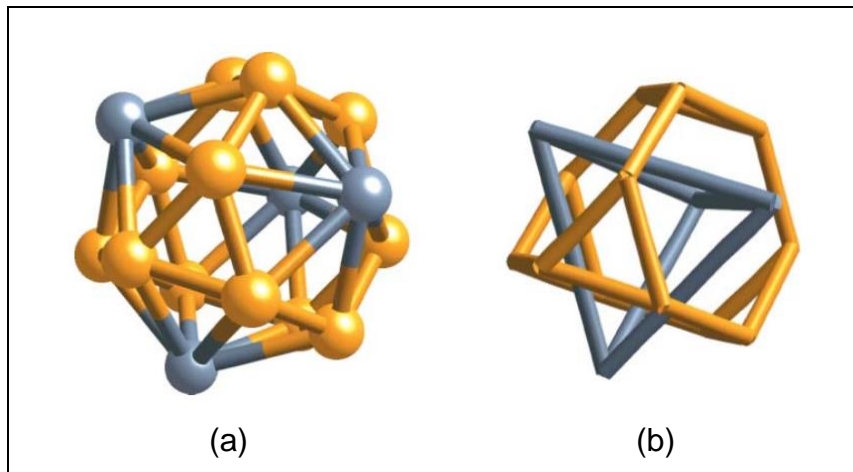
Na mesma perspectiva de utilizar a geometria como ferramenta útil para a representação de estruturas químicas na estereoquímica, Alvarez (2005) apresentou uma descrição sistemática de poliedros com vários graus de regularidade ilustrando com exemplos de estruturas químicas, principalmente de diferentes campos da Química Inorgânica como ilustrado na **Fig. 52**, na **Fig. 53** e na **Fig. 54**.

Além dos aspectos de tamanho e forma das substâncias químicas, é importante destacar que alguns elementos químicos como o Carbono, Oxigênio, Fósforo e Enxofre podem originar duas ou mais substâncias simples diferentes que são chamadas de alótropos. A diferença entre essas substâncias se deve à quantidade de átomos ou arranjo espacial dos átomos, como exemplo, pode-se citar que o oxigênio pode formar o gás oxigênio (O_2) e o ozônio (O_3). A **Fig. 55** apresenta algumas

estruturas alótropas do carbono conhecidas atualmente: grafite, diamante, fulereno, nanotubos e grafeno.

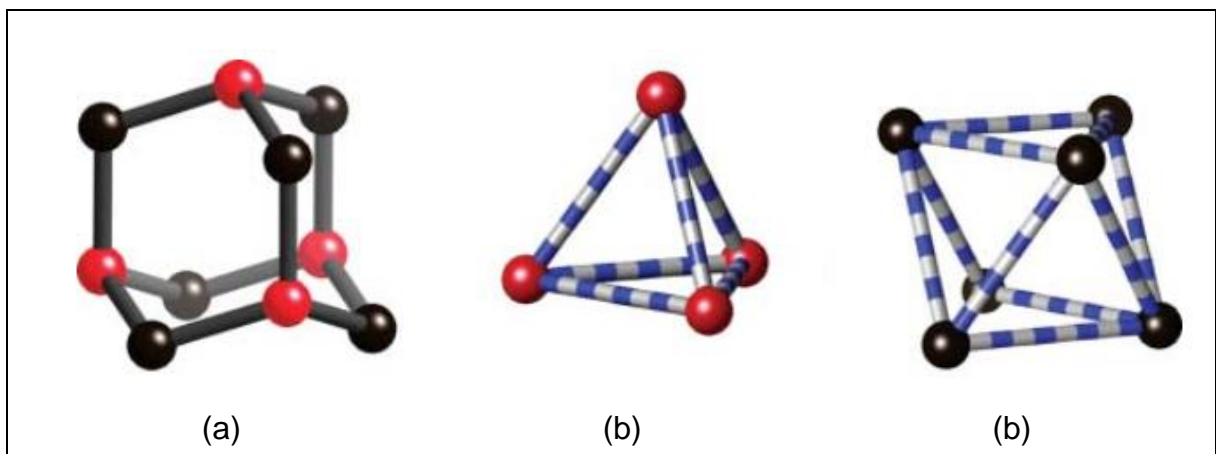
Cabe ressaltar que os fulerenos foram descobertos em 1985 por Robert F. Curl Jr., Sir Harold Kroto e Richard E. Smalley (prêmios Nobel de Química em 1996), os nanotubos de carbono foram observados em 1991 por Sumio Iijima, e o grafeno, foi isolado e identificado em 2004 por André Geim e Konstantin Novoselov (prêmios Nobel de Física em 2010).

Figura 52 – Poliedro Frank-Kasper de 16 vértices correspondendo ao $\text{Cu}_{12}\text{Mg}_4$ (a) e sua decomposição como um composto de um Cu_{12} tetraedro truncado e um Mg_4 tetraedro (b).



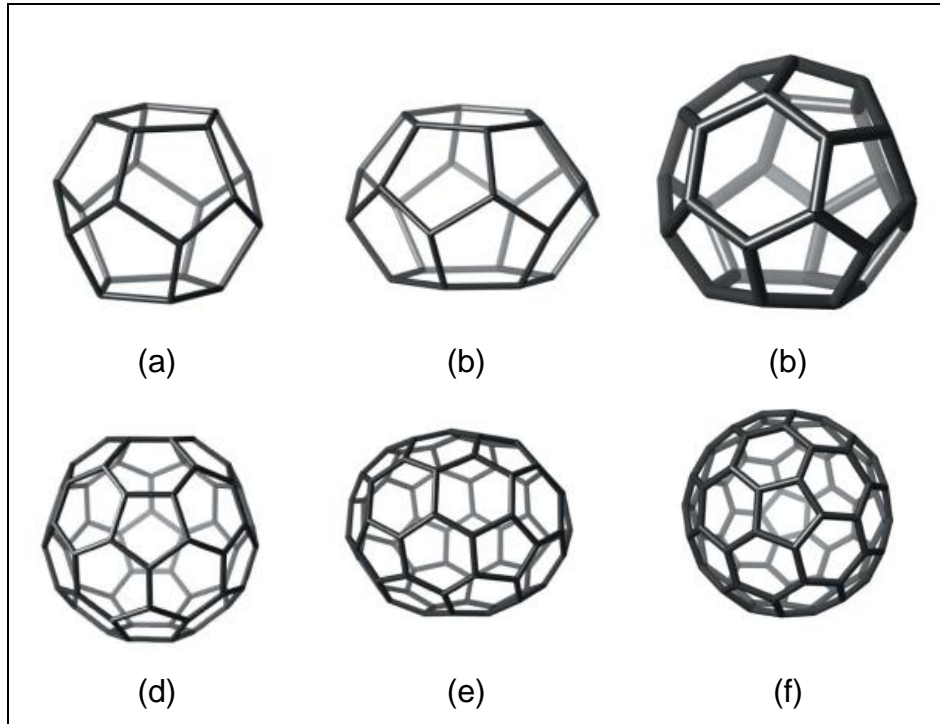
Fonte: Alvarez (2005).

Figura 53 – Adamantano como um composto de um tetraedro e um octaedro: esqueleto carbonáceo (átomos de carbono terciários e secundários em vermelho e preto, respectivamente) (a), arranjo tetraédrico dos átomos de carbono terciários (b) e arranjo octaédrico dos átomos de carbono secundários (c).



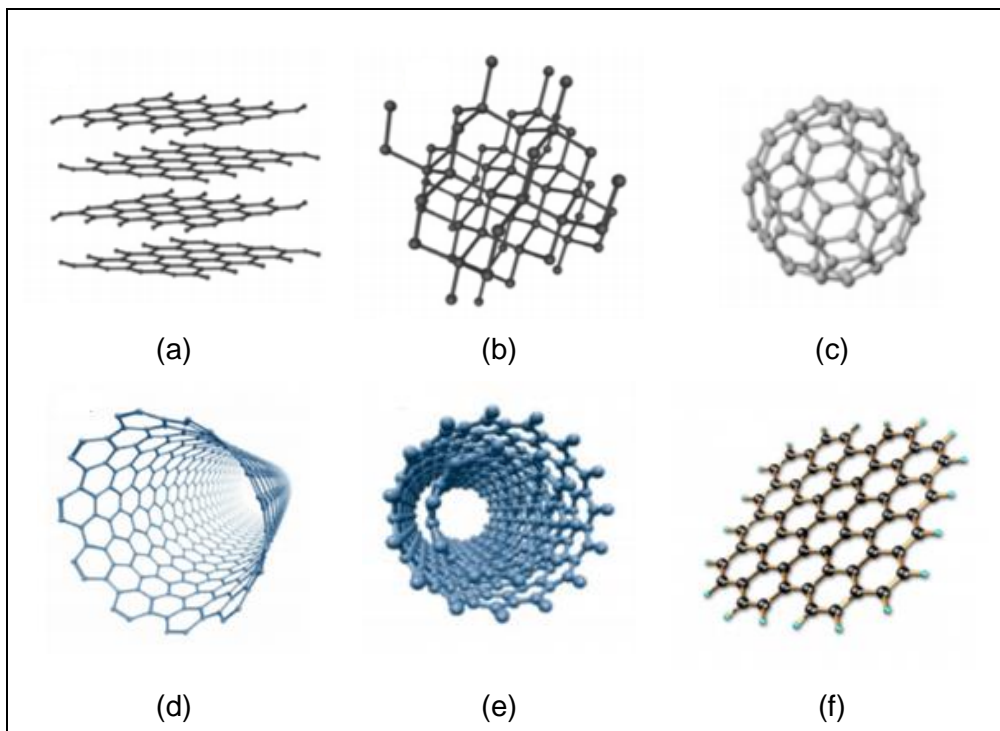
Fonte: Alvarez (2005).

Figura 54 – Estrutura de alguns fulerenos, da esquerda para a direita: Si_{20} , Si_{24} , Ge_{28} , C_{60} , C_{70} , C_{80} .



Fonte: Alvarez (2005).

Figura 55 – Estruturas alótropas do carbono: grafite (a), diamante (b), fulereno (c), nanotubo de carbono de parede simples (d), nanotubo de carbono de parede múltipla (e) e grafeno (f).



Fonte: Zarbin e Oliveira (2013).

Das formas alotrópicas do carbono apresentadas na **Fig. 55** a estrutura do fulereno chama atenção pois essa molécula possui a sua estrutura de acordo com Pereira (2012, p. 270) é “esférica e tridimensional, de forma fechada em si, em forma de ‘gaiolas’ ou ‘esferas ocas’ em uma rede altamente simétrica de hexágonos ligados por pentágonos, que dão a curvatura de esfera da molécula”. Segundo SANTOS *et al.* (2010):

Embora desde 1966 cálculos teóricos demonstrassem a possibilidade da existência de “gaiolas” estáveis formadas exclusivamente por átomos de carbono, somente em 1985 um experimento realizado por Kroto *et al.* comprovou experimentalmente a existência de tais compostos. Nesse experimento, uma placa de grafite foi submetida a um laser pulsado de alta frequência e os agregados gerados no plasma foram analisados por espectrometria de massas.

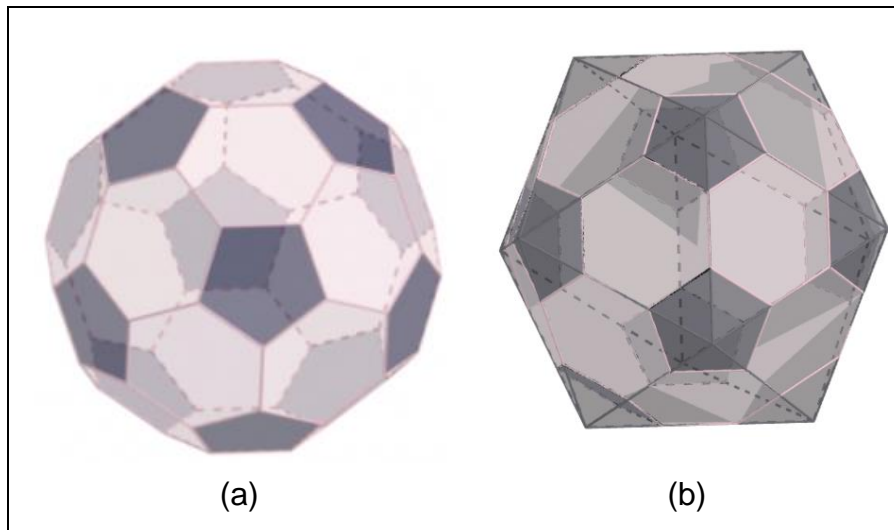
Em virtude de suas características de simetria e estabilidade, essas moléculas foram chamadas inicialmente de *buckminsterfullerenos* e depois *fulerenos* em homenagem ao arquiteto americano Richard Buckminster Fuller (1895-1983). A molécula do fulereno também é conhecida como *buckyball* (SANTOS *et al.*,2010; PEREIRA, 2012).

Medeiros (2004) *apud* Pereira (2012) destacou que os fulerenos possuem quantidades diferentes de átomos de carbono, podendo ser formados por 20, 60, 70, 100, 180, 240 e até 540 desses átomos. Contudo, Santos *et al.* (2010, p. 680) afirmou que “sob condições específicas para a formação destes agregados, o espectro de massas apresentou o pico do C₆₀ como principal.”

A geometria da molécula do fulereno C₆₀ é formada por 60 átomos de carbono onde cada um desses átomos está ligado a três outros e têm a forma do icosaedro truncado de Arquimedes (**Fig. 56a**). Esse poliedro tem 12 faces pentagonais regulares, 20 faces hexagonais regulares, 60 vértices e 90 arestas, e é obtido pelo truncamento do icosaedro regular (**Fig. 56b**) que é um poliedro formado por 30 arestas, 12 vértices e 20 faces triangulares equiláteras.

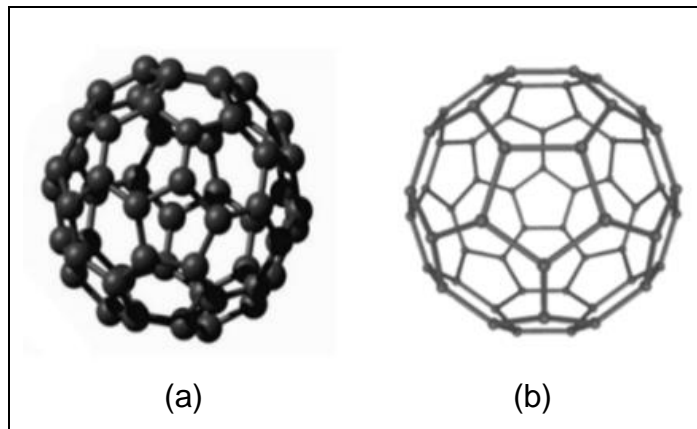
A **Fig. 57a** representa a molécula do fulereno C₆₀ destacando os 60 átomos de carbono nos vértices do poliedro e a **Fig. 57b** representa a molécula do fulereno C₆₀ destacando as 90 ligações químicas nas arestas do poliedro.

Figura 56 – Icosaedro truncado de Arquimedes (a) e truncamento do icosaedro regular (b).



Fonte: Nietto e Martins (2019).

Figura 57 – Representação do fullereno C_{60} , destacando os átomos (a) e as ligações interatômicas e estruturas tipo pentágono e hexágono (b).



Fonte: Andrade (2016).

Melo (2003) fez uma contextualização histórica e um comparativo dos aspectos geométricos da molécula do C_{60} e a bola de futebol, já que ambas têm a forma do icosaedro truncado de Arquimedes, constatando a validade do Teorema de Euler $V - A + F = 2$ para esse poliedro. A partir dessa relação o autor demonstrou que todo poliedro convexo que contenha somente faces hexagonais e pentagonais possui exatamente 12 faces pentagonais.

Na demonstração apresentada por Rocha Filho (1996), seja P é o número de pentágonos e H o número de hexágonos, o número de faces numa molécula fullerênica é:

$$F = P + H \quad (\text{Eq. 8})$$

Observando que no caso dos fulerenos, como cada átomo está ligado a três outros, em cada vértice há o encontro de três arestas (cada uma ligada a dois vértices), assim:

$$V = \left(\frac{2}{3}\right)A \quad (\text{Eq. 9})$$

Ao contar as arestas para todas as faces, sendo cada aresta compartilhada por duas faces, cada aresta é contada duas vezes; assim, numa molécula fullerênica:

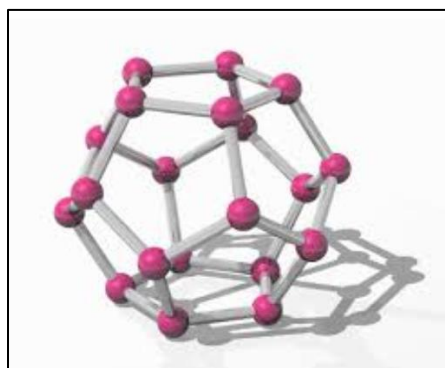
$$A = \left(\frac{1}{2}\right)(5P + 6H) \quad (\text{Eq. 10})$$

Substituindo a Eq. 10 na Eq. 9 tem-se:

$$V = \left(\frac{5}{3}\right)P + 2H \quad (\text{Eq. 11})$$

Substituindo as equações 8, 10 e 11 na Relação de Euler $F + V = A + 2$, tem-se que $P = 12$. A menor molécula de fulereno, o C_{20} , tem a forma do dodecaedro regular, poliedro com 20 vértices, 30 arestas, 12 faces pentagonais e nenhuma face hexagonal como ilustrado na **Fig. 58**. Os átomos da molécula são representados pelos vértices e as ligações químicas pelas arestas do dodecaedro.

Figura 58 – Representação do fulereno C_{20} .



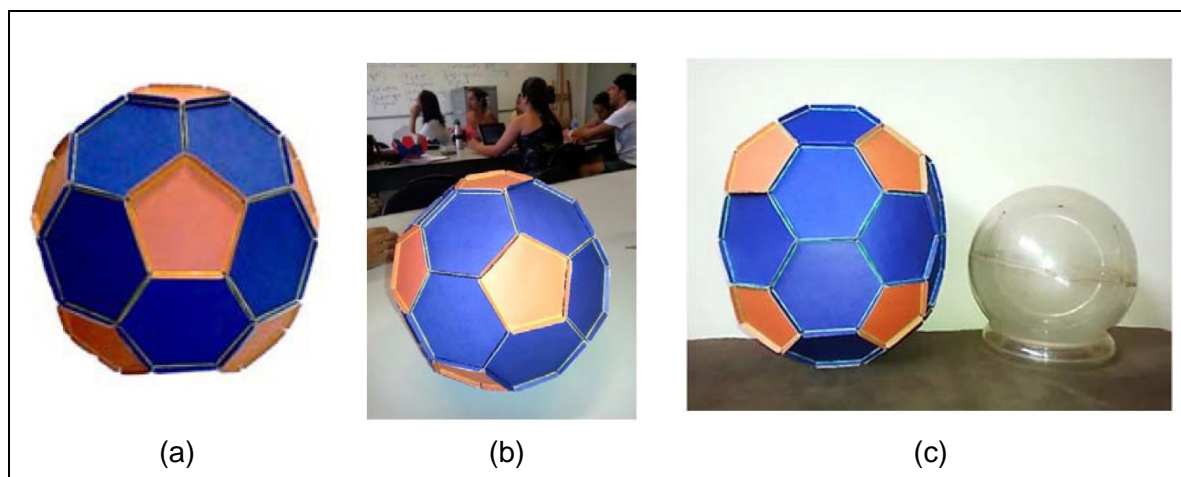
Fonte: Cavalcante (2015).

Rocha Filho (1996) observou também que:

No caso do C_{60} , cada pentágono está rodeado por um colar de cinco hexágonos. Se o número desses colares ao redor de cada pentágono for aumentado para 2, 3 ou mais, obtém-se uma família de fulerenos gigantes que começa com C_{240} e C_{540} (a família é dada por C_{60n^2} , onde $n = 1, 2, 3$ etc.). Essas moléculas, à medida que se tornam maiores, ficam menos esféricas.

A importância de estudar a forma geométrica do fulereno permite evidenciar a relação Matemática-Química das estruturas e discutir a interpretação da geometria molecular e suas propriedades sob a ótica da Geometria/Topologia. Nesse sentido, Correa e Reis (2017) realizaram uma oficina para construção de representação da estrutura de fulerenos com uso de materiais manipuláveis com estudantes do curso de Licenciatura em Química da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como ilustrado na **Fig. 59**.

Figura 59 – Representação da estrutura de fulerenos com materiais manipuláveis: C_{50} (a), C_{60} (b) e C_{70} (c).



Fonte: Correa e Reis (2017).

2): Retomando o estudo das propriedades da matéria, segundo Calister (2002, p.

A Ciência dos Materiais investiga as relações entre as estruturas e as propriedades dos materiais. Com base nas correlações entre estrutura-propriedade, a Engenharia de Materiais consiste no projeto ou engenharia da estrutura de um material para produzir um conjunto predeterminado de propriedades.

Entretanto, as propriedades da matéria dependem não só da sua composição e estrutura. Como visto anteriormente na seção sobre conceitos matemáticos, a forma e tamanho de um objeto ou partícula influenciam a sua área de superfície específica, que é a relação entre área de superfície e volume.

Coelho (2020, p. 7) ressalta ainda que “na nanoescala os materiais tendem a apresentar propriedades muito especiais ao interagir com uma fonte de luz e, como possuem alta relação superfície/volume, a reatividade química é muito elevada”. Segundo Pastrana-Martinez *et al.* (2013, p. 21) nos materiais à escala nanométrica (1-100 nanómetros) “os efeitos quânticos tornam-se mais pronunciados, possuem novas propriedades e os elementos químicos exibem padrões distintos de reatividade”.

Dessa forma, como a relação entre área de superfície e volume se acentua na escala nanométrica, a área de superfície específica é uma importante propriedade, pois quanto maior a área de superfície específica maior a eficiência de catalisadores, fotocatalisadores, sensores, biosensores, células solares, etc.

Nesse aspecto, Santos *et al.* (2019) fizeram um estudo de revisão bibliográfica acerca de utilização de nanopartículas de óxido de ferro no tratamento de água e citaram aplicações ambientais da nanotecnologia no tratamento de água e remediação, sensoriamento, detecção e controle de poluição. Os autores destacaram que:

A utilização de óxidos de ferro nanoestruturados vem sendo profundamente estudada devido às vantagens que este material apresenta frente a outros materiais em escala nanométrica. Seu baixo custo, facilidade na separação por meio da utilização de campos magnéticos externos (devido à propriedade ferromagnética), elevada área superficial, alta capacidade de adsorção de poluentes e eficiente ação como fotocatalisador nas reações de degradação de poluentes orgânicos e redução de poluentes metálicos, assim como na inativação de vírus em meios aquáticos, mostram o potencial do uso deste material para despoluição de água residuais (AMBASHTA; SILLANPAA, 2010; GOYAL; JOHAL; RATH, 2011; GUO *et al.*, 2013; AHMED *et al.*, 2014; MOHAMMED *et al.*, 2017 *apud* SANTOS *et al.*, 2019).

Coelho (2020, p. 7) também destacou que “a última década testemunhou o desenvolvimento de uma variedade de tipos de nanoformulações para as mais diversas aplicações na agricultura e indústria de alimentos”.

Além disso, Leopoldo e Del Vichio (2020) citaram que a nanotecnologia está sendo empregada em computação, na produção de roupas mais resistentes tais como coletes a prova de balas, farmácia, cosmética, medicina no tratamento de câncer e até na detecção do novo coronavírus (Sars-CoV-2). Os autores ainda citaram

pesquisas com nanorrobôs que poderão navegar na corrente sanguínea humana para monitorar, detectar, com incrível precisão, qualquer anomalia, e enviar dados da saúde do usuário em tempo real a um computador, alertando os médicos responsáveis pelo paciente.

Nesse contexto, Costa e Silva (2017) relataram que as características físicas e químicas das nanopartículas que incluem tamanho, carga, forma e propriedades de superfície individuais são importantes no transporte e distribuição de ativos para interagir com biomoléculas como enzimas, anticorpos e receptores, tanto na superfície como no interior da célula. Dessa forma, a superfície das nanopartículas pode ser modificada e revestida com moléculas bioativas para detecção seletiva e na terapia não invasiva do câncer.

Diante do exposto, Gracia-Pinilla *et al.* (2008) destacaram a importância do desenvolvimento de novos nanomateriais para aplicações em medicina, catálise, eletrônica, óptica e plasmônica e estudaram modelos de geometria dos poliedros regulares para nanopartículas de prata que têm propriedades antibacterianas e antivirais.

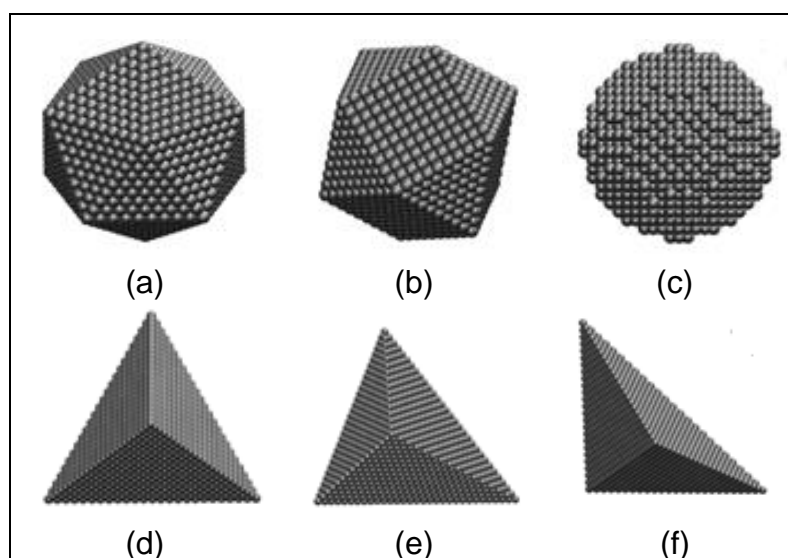
Os autores utilizaram resultados de simulações de dinâmica molecular para comparar o comportamento estrutural e energético dessas geometrias e utilizaram seis estruturas iniciais diferentes de tetraedro, icosaedro e cuboctaedro (**Fig. 60**) a fim de comparar a caracterização de forma e estrutura cristalina das nanopartículas de prata, por meio de microscopia de força atômica, e prever as condições termodinâmicas necessárias para a estabilidade dessas estruturas.

Mckenna (2009) reforçou a importância de realizar uma pesquisa minuciosa das configurações atômicas possíveis para encontrar a mais estável com base no grande número de estudos de sistemas nanopartículas metálicas. Segundo o autor, pequenos aglomerados (com número de átomos menor que 20) podem adotar uma variedade de geometrias incomuns, incluindo configurações planas, anéis e tubos. Nanopartículas maiores podem adotar estruturas semelhantes ilustradas na **Fig. 61**.

A identificação das estruturas que são mais termodinamicamente estáveis para uma dada temperatura e pressão é feita a partir do cálculo da energia livre de várias configurações de nanopartículas diferentes, observando o equilíbrio entre as nanopartículas e o ambiente para cada configuração. A análise topológica das

nanopartículas também é realizada a fim de obter o número de átomos de cada configuração. McKenna (2009) observou que a tendência geral é que ao aumentar o tamanho de nanopartículas, a morfologia preferida para nanopartículas de ouro no vácuo segue a seguinte ordem: decaédrica - icosaédrica - *marks* decaédrica - octaédrica truncada. O autor também destacou que em alta pressão, as moléculas de CO são adsorvidas em quase todos os átomos da superfície e isso faz com que morfologias das nanopartículas com área de superfície maior sejam preferencialmente estabilizadas.

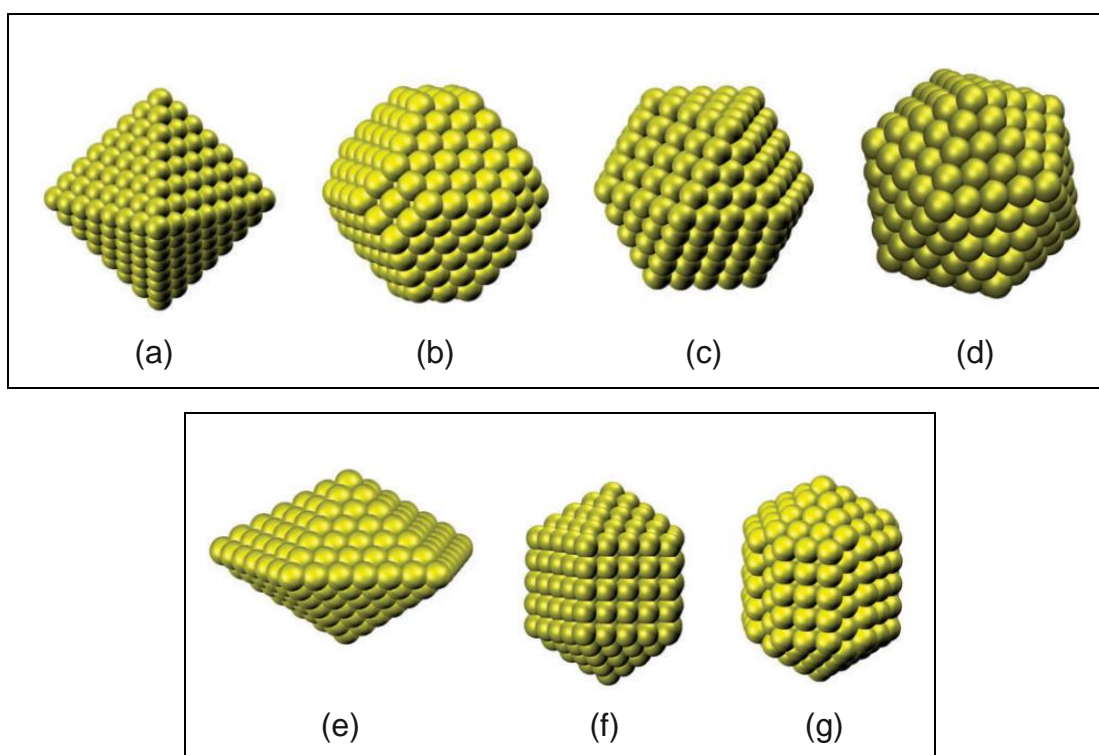
Figura 60 – Configurações iniciais usadas nas simulações de dinâmica molecular: um icosaedro (2869 átomos) (a), um cuboctaedro (2869 átomos) (b), um aglomerado esférico de 2899 átomos (c), um tetraedro perfeito de 2925 átomos (d), um tetraedro com ápice superior deslocado para um dos vértices da base com 2856 átomos (e), e um tetraedro com seu ápice superior deslocado para uma das faces laterais com 2925 átomos (f).



Fonte: Gracia-Pinilla *et al.* (2008).

Bhatt e Kumar (2017) defendem que é muito útil entender o comportamento de fusão dos nanomateriais durante suas aplicações em alta temperatura. Sabe-se que a temperatura de fusão das nanopartículas metálicas, orgânicas e semicondutoras é menor em comparação com os mesmos materiais em escala macroscópica (materiais volumétricos). Mas, segundo os autores, muitos modelos tentaram explicar que a temperatura de fusão é dependente do tamanho com base no fato de que as nanopartículas são esferas ideais.

Figura 61 – Morfologia de nanopartículas metálicas: octaédrica (a), octaédrica truncada (b), cuboctaédrica (c), icosaédrica (d), decaédrica (e), inodcaédrica (f) e marks decaédrica (g).

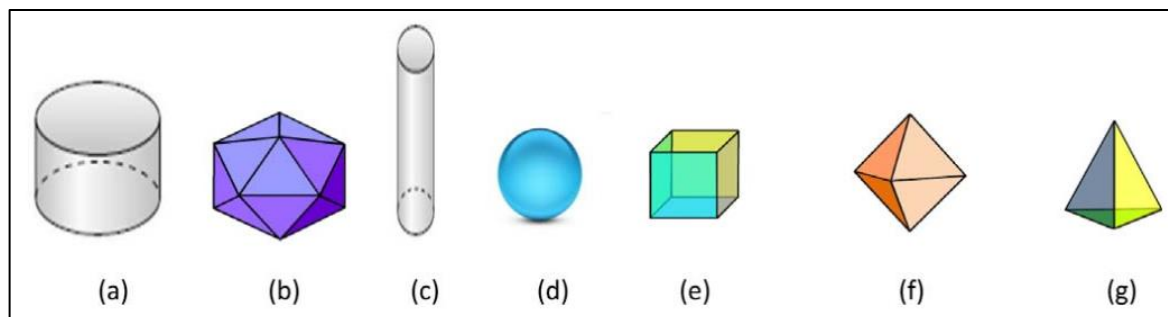


Fonte: Mckenna (2009).

Contudo, como o tamanho e a forma das nanopartículas influenciam diretamente seu volume e sua área de superfície, a diferença entre a área de superfície específica para nanopartículas de formas diferentes é muito grande. Diante disso, Bhatt e Kumar (2017) generalizaram as aplicações do modelo de energia de ligação para estudar o efeito do tamanho na temperatura de derretimento de nanosólidos independentes (Ag, Au, Al e Zn) e nanopartículas incorporadas (Pb e Ag) em formas diferentes: cilíndrica, icosaédrica regular, fio, esférica, hexaédrica regular, octaédrica regular e tetraédrica regular (**Fig. 62**). Esses materiais foram escolhidos para viabilizar a comparação com dados experimentais disponíveis em outras publicações.

Os resultados de Bhatt e Kumar (2017) demonstram que a temperatura de fusão dos nanossólidos Ag, Au, Al e Zn diminui com a diminuição do tamanho e é mais alta para forma cilíndrica e é mais baixa para tetraédrico entre as diferentes formas consideradas no trabalho, e que diminuem continuamente na seguinte ordem decrescente: cilíndrica, icosaédrica, fio, esférica, octaédrica e por fim, tetraédrica.

Figura 62 – Diferentes formas de nanomaterial: cilíndrica (a), icosaédrica (b), fio (c), esférica (d), hexaédrica (e), octaédrica (f) e tetraédrica (g).



Fonte: Bhatt e Kumar (2017).

Os autores verificaram também que o efeito de forma para superaquecimento de nanopartículas de Pb e Ag indica que a temperatura de fusão aumenta com a diminuição do tamanho das partículas, e é maior para a forma tetraédrica e mínima para forma cilíndrica e diminui na seguinte ordem decrescente: tetraédrica, octaédrica, esférica, fio, icosaédrica e então cilíndrica.

Bhatt e Kumar (2017) observaram que ao diminuir o tamanho das nanopartículas o número total de átomos e átomos de superfície diminui, mas a área de superfície específica aumenta. Como a área de superfície específica também depende da forma, os autores observaram que ela é mínima para a forma icosaédrica e máxima para a forma tetraédrica. Estes dados estão de acordo com os resultados de área de superfície específica dos poliedros regulares demonstrados anteriormente na Seção 2.2.6.

Além disso, verificou-se que a relação entre o número de átomos de superfície e o número total de átomos das nanopartículas é a mesma para as formas esférica e hexaédrica, e que resultados semelhantes foram obtidos para nanopartículas icosaédricas e em forma de fio. Com isso, Bhatt e Kumar (2017) concluíram que o comportamento de derretimento e superaquecimento dos nanomateriais é devido ao aumento da razão entre área de superfície por volume (área de superfície específica) com a redução no tamanho de partícula para formas diferentes, e dessa forma, é essencial levar em consideração o efeito de forma durante o desenvolvimento dos modelos teóricos.

Nesse aspecto, Gonzalez *et al.* (2018) observaram que o desempenho catalítico de nanopartículas metálicas relativo à atividade e seletividade em relação à

reação alvo, dependem das especificidades da sua superfície, em função da natureza de sua forma, além do tamanho e composição dessas nanopartículas. Os autores relatam a necessidade de refinamento dos métodos que permitem a síntese de nanopartículas observando essas características (composição, tamanho e forma) para desenvolver um catalisador e auxiliar na solução de desafios em química sustentável e desenvolvimento de energia.

Diante disso, métodos experimentais e computacionais foram combinados por Gonzalez *et al.* (2018) para obter resultados eletroquímicos relatados sob diferentes concentrações de citrato e condições de pH para constatar que, em meios neutros, o citrato usado como agente de cobertura na água origina nanopartículas de platina (eletrocatalisador) de forma tetraédrica e octaédrica na água.

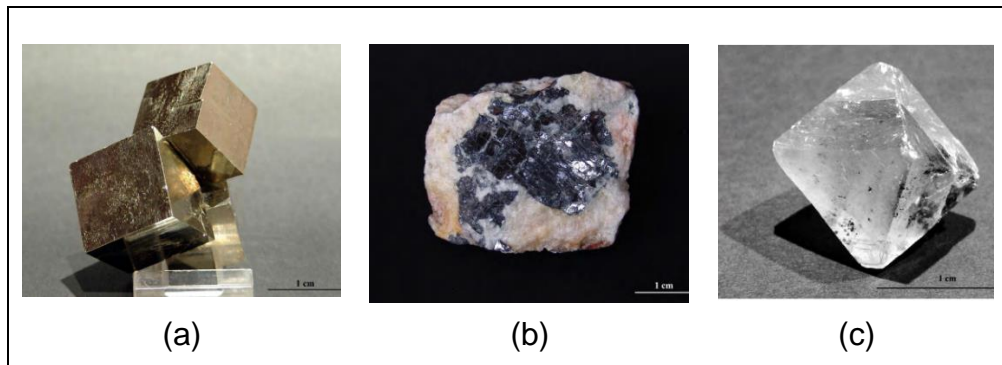
Os autores esclareceram as características geométricas das nanopartículas, tendo em vista que as propriedades de adsorção são, em geral, bastante dependentes da especificação da superfície local, e que o átomo recém-depositado na superfície da nanopartícula se move até atingir uma posição onde a energia é minimizada.

Por fim, ressalta-se que a compreensão desses fenômenos e a geração de produtos com o desenvolvimento da Nanociência e Nanotecnologia possibilita aplicações em potencial em todos os ramos da atividade humana: energia, agricultura, meio ambiente, bens de consumo, saúde e medicina, manufatura, construção civil, transporte, eletrônica, tecnologia da informação, cosméticos, têxteis, entretenimento, comunicação, lazer, etc.

4.2 MINERALOGIA, GEOTECNIA E TECNOLOGIA DO CONCRETO

Exemplificando os estudos em Mineralogia, García-Monge *et al.* (2010) apresentaram uma prática básica para iniciar o reconhecimento visual de minerais observando propriedades físicas como cor, forma, brilho, densidade e dureza. A pirita possui forma semelhante a cubos ou hexaedros (**Fig. 63a**), a octaedro e a pentagonododecaedro. A galena tem como forma de apresentação mais comum o hexaedro com bordas chanfradas (arestas com corte oblíquo/diagonal) ou vértices truncados (**Fig. 63b**). A fluorita tem cristais bem formados em forma de cubo ou octaedro, como ilustrado na **Fig. 63c**.

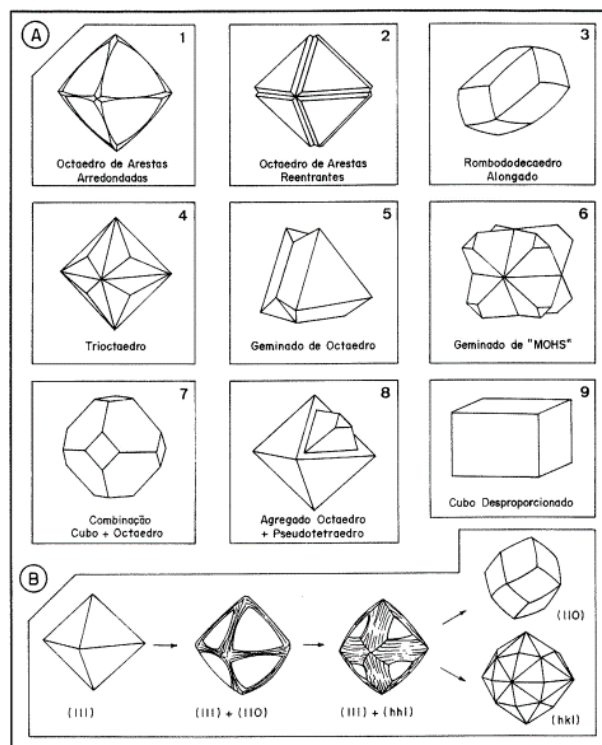
Figura 63 – Imagens de minerais pirita (a), galena (b) e fluorita (c).



Fonte: García-Monge *et al.* (2010).

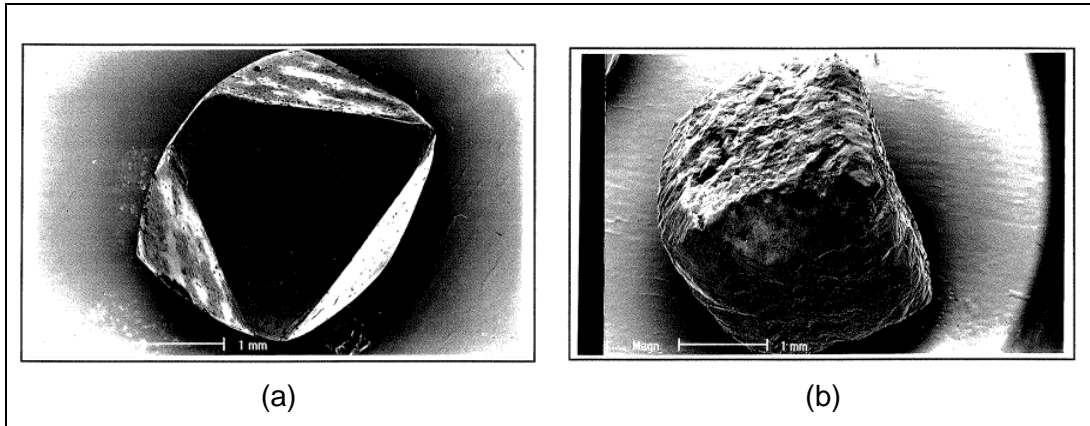
Um dos objetivos da tese de Chaves (1997) foi a classificação de campo das principais características físicas do diamante da Serra do Espinhaço (Minas Gerais – Brasil). O autor destacou que, em termos gerais, na maioria das vezes o aspecto dos cristais de diamante é octaédrico ou dodecaédrico, algumas vezes cúbico e, em raríssimas situações lembrando a forma tetraédrica e que são comuns os cristais de faces encurvadas, como ilustrados nas **Fig. 64** e **Fig. 65**.

Figura 64 – Principais características físicas do diamante da Serra do Espinhaço.



Fonte: Chaves (1997).

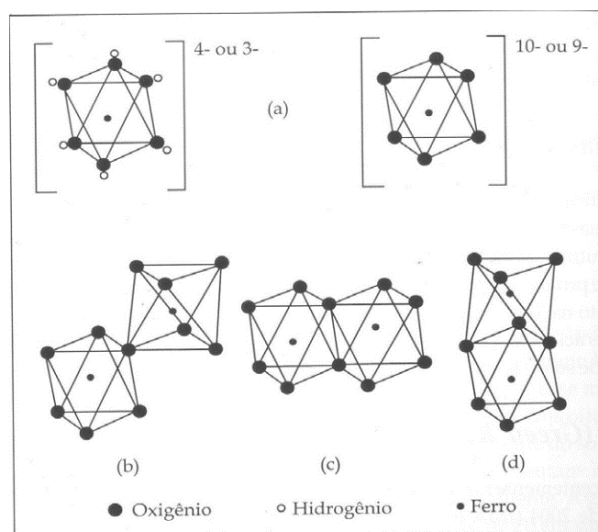
Figura 65 – Imagem de cristal de diamante de hábito octaédrico (a) e cristal de diamante de hábito cúbico (b).



Fonte: Chaves (1997).

Pereira (2010) desenvolveu um trabalho experimental para caracterização de óxidos de ferro e de inclusões fluidas em estruturas de rochas. Segundo a autora “a estrutura básica de um óxido de ferro é de um octaedro, no qual cada átomo de ferro (2^+ ou 3^+) é rodeado por seis O^{2-} ou por seis OH^- . A polimerização destes octaedros em arranjos compactos, em que essas unidades podem interagir por meio de 3 seus ápices, arestas ou faces, forma a estrutura cristalina de todos os minerais deste grupo”. A **Fig. 66** ilustra a representação do octaedro de ferro.

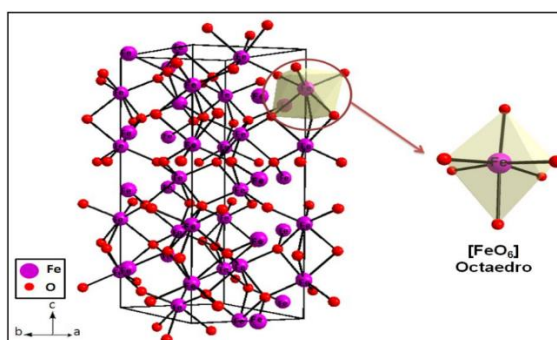
Figura 66 – Representação do (a) octaedro de ferro, (b) polimerização pelo ápice, (c) aresta e (d) face.



Fonte: Pereira (2010).

Costa (2011) esclareceu que cada octaedro FeO_6 compartilha suas arestas com outros três octaedros, no mesmo plano, e uma face é comum com um octaedro no plano adjacente. Essa estrutura ilustrada na **Fig. 76** está de acordo com os modelos reportados na literatura.

Figura 67 – Representação da célula unitária de Fe_2O_3 , ressaltando o cluster de FeO_6 .



Fonte: Costa (2011).

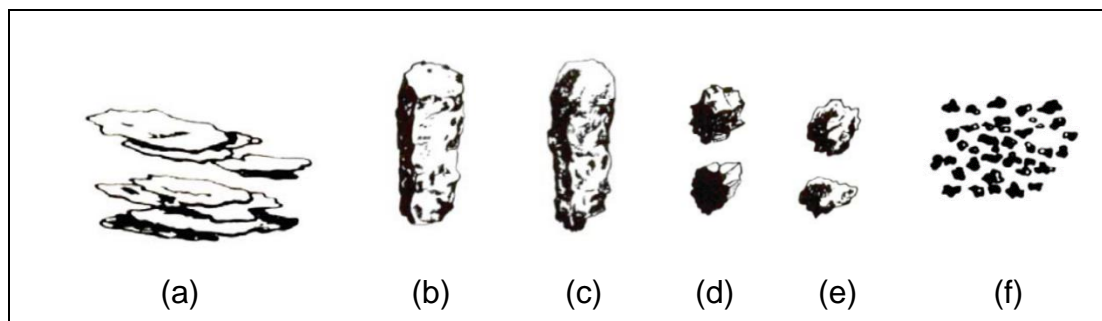
Além disso, fragmentos minerais ou fragmentos rochosos contidos em depósitos sedimentares formam as partículas dos solos e a morfologia compreende o estudo da forma das partículas ou geometria geral de uma partícula.

Segundo Martins (2020) a forma das partículas é uma característica inerente ao solo que desempenha um papel importante nas propriedades físicas e no comportamento mecânico dos solos. Por essa razão, a caracterização dessas partículas possibilita a melhor seleção de agregados utilizados nas obras de engenharia.

Por outro lado, Riva (2010) destaca a grande irregularidade na forma das partículas do solo e que é comum utilizar a esfera como forma-padrão de comparação, pois ela possui a menor área de superfície se comparada a qualquer outro objeto tridimensional de mesmo volume.

Entretanto, baseado nos estudos de mineralogia do solo, a forma de suas partículas tende a ser laminar quanto menor for o seu tamanho (DIXON & WEED, 1989; MELO *et al.*, 2002 *apud* MULAZZANI E GUBIANI, 2016). A **Fig. 68** ilustra a classificação da estrutura do solo segundo a forma dos agregados.

Figura 68 – Estrutura do solo segundo a forma dos agregados: laminar (a), prismática (b), colunar (c), bloco angular (d) e granular (f).



Fonte: Riva (2010).

Além disso, para Nunes, Teixeira e Saraiva (2021) a caracterização da morfologia dos agregados relativo à textura superficial, esfericidade e angularidade é importante para analisar como essas características afetam as propriedades do concreto no estado fresco, como trabalhabilidade e fluidez, e no estado endurecido, como resistência à compressão ou módulo de elasticidade.

De forma sucinta, a textura superficial ou rugosidade é uma propriedade que está relacionada com a superfície das partículas; a esfericidade ou arredondamento, por sua vez, compara a forma da partícula com uma esfera, relacionando o diâmetro da maior esfera inscrita nessa partícula com o diâmetro da menor esfera circunscrita à partícula, e, além disso, observando uma esfera com o mesmo volume de uma determinada partícula, pode-se comparar a área de superfície dessa esfera com a área de superfície da partícula; e a angularidade ou circularidade, dependendo da escala em que as características de superfície são observadas, está relacionada com as irregularidades e saliências das partículas como cantos e arestas. (MARTINS, 2020; RIVA, 2010).

Na **Fig. 69** é apresentada a escala de arredondamento de Powers (1953) que, segundo Riva (2010), mostra a diferenciação entre arredondamento ou esfericidade e angularidade, refletindo uma distinção geométrica entre a forma global da partícula e a rugosidade de sua superfície.

Como a área de superfície específica das partículas do solo e agregados influenciam suas propriedades dos solos e argamassas, Mulazzani e Gubiani (2016) realizaram um trabalho para estimar a área superficial específica por meio da curva granulométrica. No modelo proposto e avaliado pelos autores observou-se que a área

superficial específica (ASE) obtida experimentalmente foi maior que a área superficial específica estimada sendo necessário utilizar um fator de escala para obter estimativa mais precisa. Segundo os autores:

Esse resultado indica que o pressuposto da esfericidade das partículas perde validade à medida que se considera partículas cada vez menores. A esfera é a forma geométrica com menor superfície em relação ao volume (ou massa para uma mesma densidade), por isso, se considerarmos uma mesma quantidade de massa, quanto menos esférica for a forma da partícula maior será sua superfície, portanto maior será a ASE. Isso explica porque a ASE obtida experimentalmente foi maior que a ASE estimada, mesmo que fosse estimada considerando partículas com diâmetro de 0,4 nm (MULAZZANI E GUBIANI, 2016, p. 3).

Figura 69 – Escala de arredondamento (esfericidade) e angularidade.

	Bem Arredondado	Arredondado	Sub-Arredondado	Sub-Angular	Angular	Muito Angular
Baixa Esfericidade						
Alta Esfericidade						

Fonte: Adaptado de Riva (2010).

Nesse contexto referente ao tamanho e forma das partículas, Ghasemi, Emborg e Cwirzen (2019) estudaram a relação entre a área superficial específica dos constituintes em argamassas e a consistência da argamassa e exploraram uma hipótese sobre a dependência da trabalhabilidade das argamassas com a densidade de empacotamento e a área superficial de seus constituintes.

Os autores esclareceram que a trabalhabilidade das argamassas depende da distribuição granulométrica e forma das partículas constituintes que interfere na densidade de empacotamento e na demanda de água das argamassas já que um empacotamento mais denso leva a menos vazios entre as partículas que podem ser preenchidas.

Além disso, destacaram também que a demanda de água está relacionada com a área superficial dos ingredientes da mistura pois argamassas com agregados que

possuem maior área superficial específica e formato angular exigem mais água para mesma quantidade de cimento.

Devido à complexidade para caracterizar a distribuição de tamanho das partículas, assume-se por simplificação matemática que as partículas têm forma esférica. Contudo, estudos citados pelos autores demonstraram erros da ordem de 20-30% na estimativa de área superficial específica do material triturado, justificando a proposição de nova metodologia que utiliza dodecaedros e hexaedros (cubos) como formas uniformes de modelo em vez de esferas para melhorar a estimativa de área superficial específica e distinguir entre agregados naturais e agregados triturados.

Os autores ressaltaram que o cálculo da área superficial específica não levou em consideração os efeitos de forma, rugosidade e textura dos agregados que afeta o momento das partículas, suas características de rotação e possíveis intertravamentos.

De forma semelhante, Ghasemi *et al.* (2020) comparou os valores de área superficial específica calculados para diferentes poliedros regulares cujo comprimento de aresta foi definido com relação ao raio de esferas intermediárias tomadas com base na distribuição granulométrica obtidas no método de peneiramento a seco.

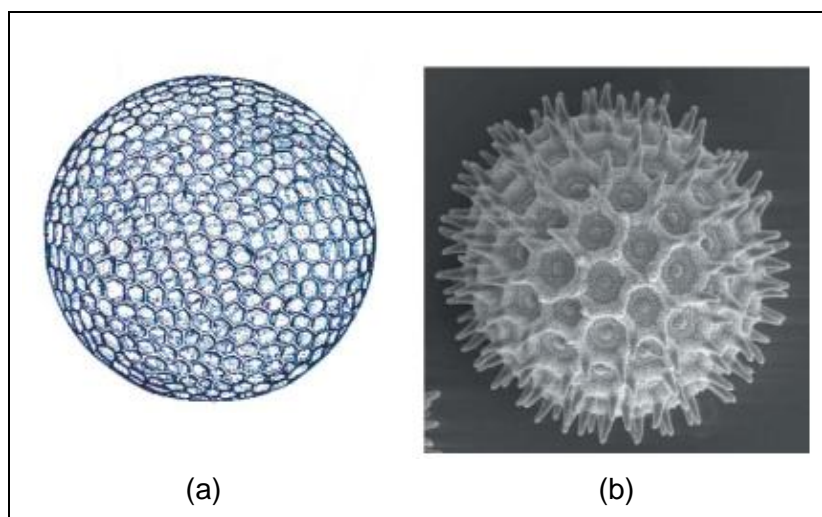
Para os autores, a importância de uma melhor estimativa da área de superfície específica (razão entre a área de superfície das partículas e seu volume) se deve a possibilidade de definir a forma quantitativamente e fornecer informações sobre a graduação e o módulo de finura do agregado amostrado. Dessa forma, explorou-se a possibilidade de substituir a suposição de uma forma esférica pela forma de poliedros regulares para melhorar a precisão da estimativa de área superficial específica das partículas de mistura de concreto e classificação de agregados com base em sua angularidade, forma representativa e demanda de água para dosagem de argamassas e concreto.

4.3 BIOLOGIA E BIOINFORMÁTICA

Buscando relacionar a estrutura e a forma dos poliedros regulares com a forma similar de organismos vivos, Alvarez (2005) destacou a radiolária e um grão de pólen como ilustrado na **Fig. 70**. A geometria de diatomáceas e radiolária (**Fig. 71**) que são pequenos protozoários (0,1 - 0,2 milímetros) encontrados como o zooplâncton na

forma solitária e em colônias, foi divulgada pelo biólogo alemão Ernst Haeckel (1834-1919) em *Formas de Arte na Natureza*, em 1904.

Figura 70 – Radiolária *Aulonia hexagona* e uma micrografia eletrônica de um grão de pólen de uma convulvullaceae com um diâmetro de cerca de 120nm.

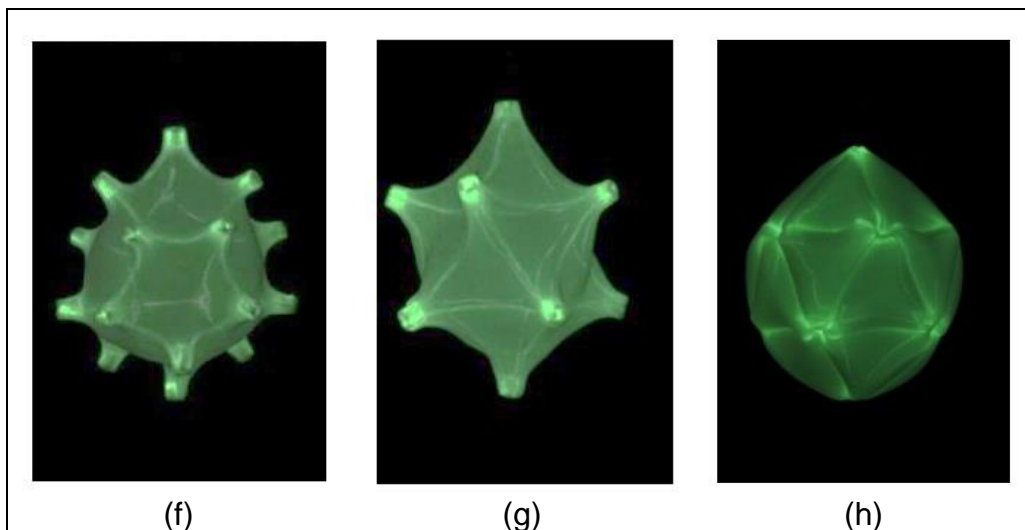
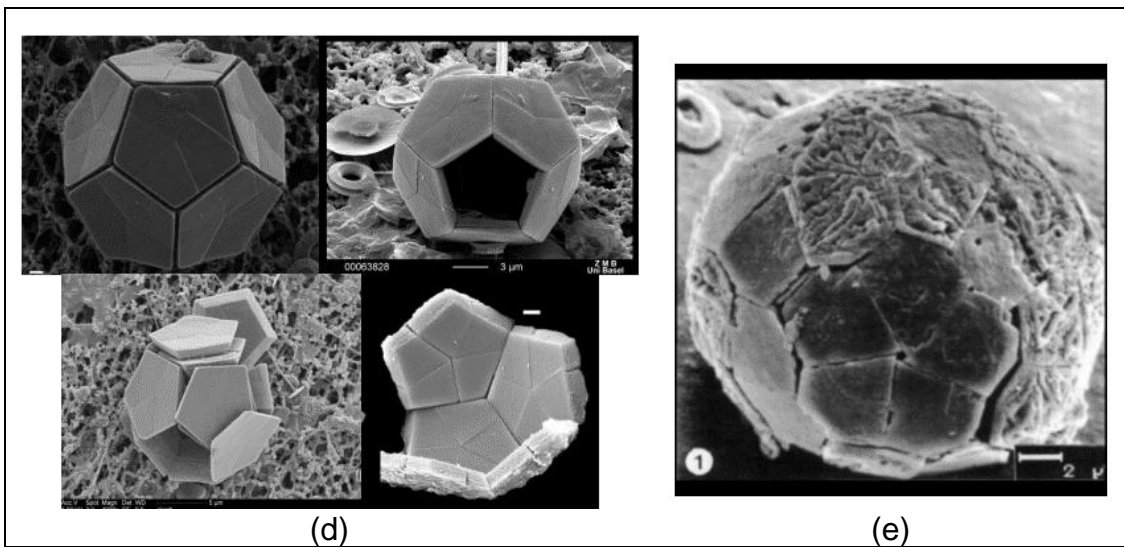
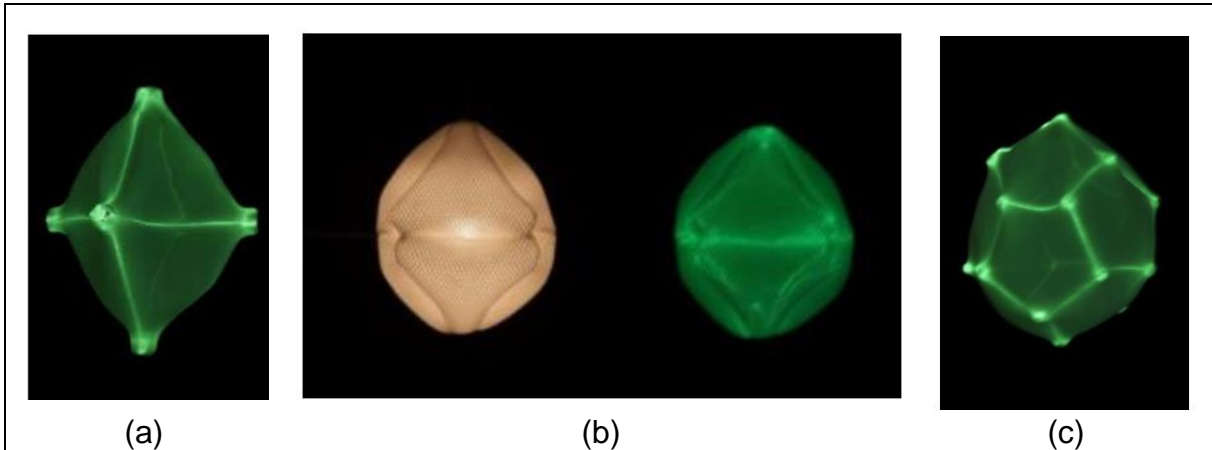


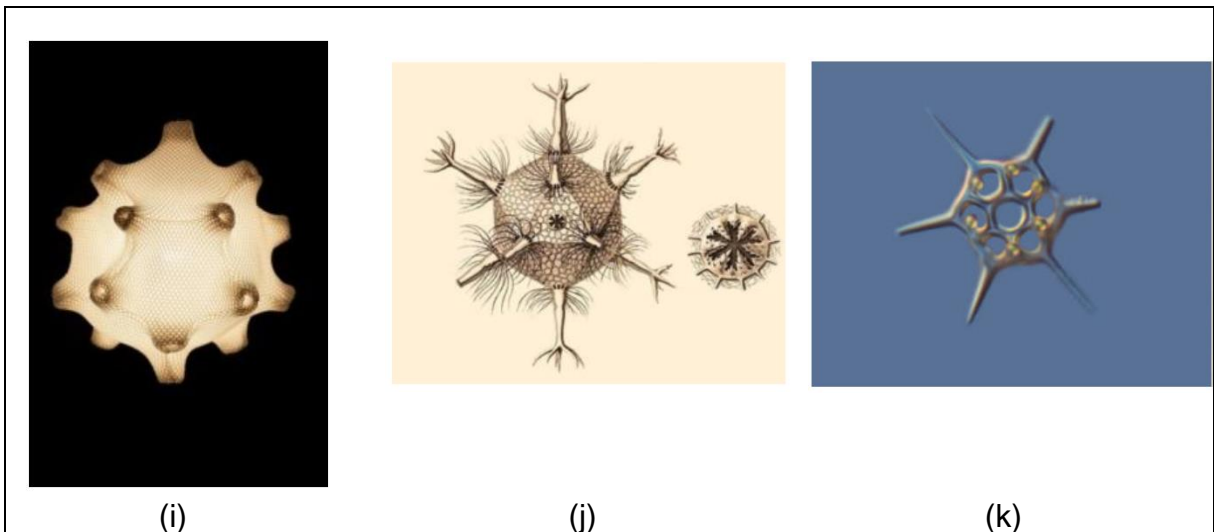
Fonte: Alvarez (2005).

Os radiolários são protozoários que fazem parte do plâncton marinho presente em todos os oceanos e que apresentam esqueletos siliciosos externos com formas poliédricas e como os cocólitos, minúsculas plaquetas de carbonato de cálcio secretadas por certos protozoários ou algas no plâncton que formam colônias (coccolitóforos) com uma variedade de formas, entre as quais se pode encontrar *Braarudosphaera bigelowii* (**Fig. 71c**) com um formato de dodecaedro (ALVAREZ, 2005).

Além disso, Hill e Rowlands (2008) apresentaram aplicações de estruturas matemáticas, tanto algébricas quanto geométricas (**Fig. 72**), assim como sistemas organizados em outras escalas, em particular, a física, na construção de códigos da natureza considerando a sua complexidade e tridimensionalidade para representação de conceitos biológicos como tradução, transcrição, replicação do código genético, DNA/RNA nos quais a estrutura dos aminoácidos que constituem as proteínas de acordo com suas propriedades químicas apresenta formato de poliedros regulares (tetraedro, hexaedro, icosaedro, dodecaedro e icosaedro).

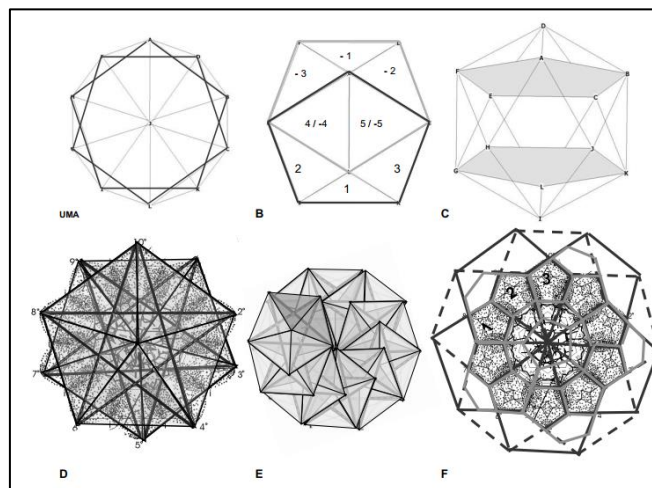
Figura 71 – *Hexapodus inflatus* – Octahedral (a), *Ovulus coralli* – Octahedral (b), *Pseudoglobulus footballi* – dodecaédrico (c), *Braarudosphaera bigelowii* - dodecaedro perfeito (d), *Braarudosphaera pentagonica* (e), *Tentaculus giganteus* - dodecaédrico (esferas em cantos) (f), Icosaédrica (stellated) (g), *Metamorphosus lucidus* – Icosaédricos (h), *Tentaculus minimus* - dodecaédrico (com esferas em cantos) (i), *Curvata Astrosphaera* - *Circogonia icosahedra* - perfeito icosaedro (j), *Dictyochophyceae* – *Silicoflagellates* (k).





Fonte: Haeckel (1904).

Figura 72 – O icosaedro e a geometria pentagonal do DNA: visão de cima para baixo (a), vista lateral 1 (b), vista lateral 2 (c), visão de cima para baixo sobreposto a um gráfico de dispersão de DNA (d), espiral de discos pentagonais sobrepostos (icosaedra incompleta), vista de cima para baixo (e), espiral de discos pentagonais sobrepostos (icosaedra incompleta), vista de cima para baixo, sobreposto ao gráfico de dispersão do DNA (com dodecaedros internos – faces numeradas identificam as posições do dNTP).

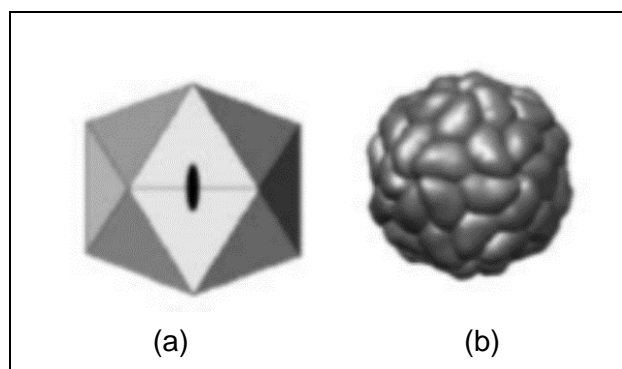


Fonte: Hill e Rowlands (2008).

Alvarez (2005) afirmou que se pode encontrar uma molécula de DNA de fita simples dobrada em um octaedro oco, bem como outros poliedros de DNA como o tetraedro, o cubo e o octaedro truncado, e que estruturas icosaédricas têm sido amplamente reproduzidas para os capsídeos dos vírus. Segundo Rivero (n.d) o capsídeo é uma estrutura que protege o genoma dos vírus e pode ter diferentes

formas como icosaédrica, a exemplo do adenovírus, e helicoidal, como o vírus do mosaico do tabaco (**Fig. 73**).

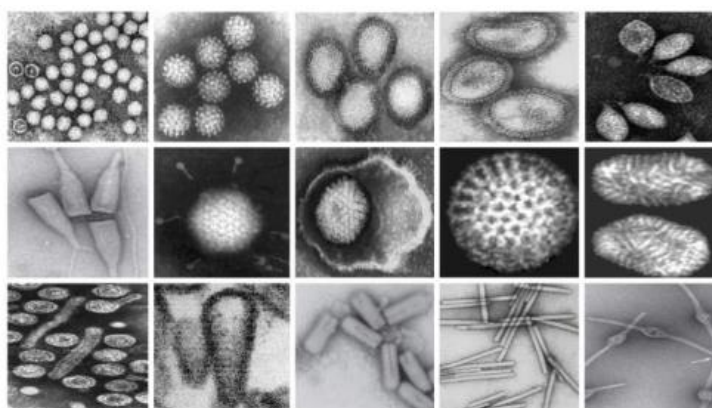
Figura 73 – Capsídeos icosaédricos centrados em um eixo duplo: forma esquemática de um capsídeo (a) e vírus dos satélites do mosaico do tabaco (b).



Fonte: Rivero (n.d).

Parvez (2020) informou que os vírus envelopados icosaédricos e helicoidais são muito comuns em animais e raros em plantas e bactérias. Esse autor também apresentou a diversidade estrutural e morfológica dos vírus com diferenças notáveis em suas formas, tamanhos, composições moleculares e organizações, como ilustrado na **Fig. 74** e na **Fig. 75**.

Figura 74 – Micrografia eletrônica de alguns vírus representativos de animais, plantas, fungos e bactérias.

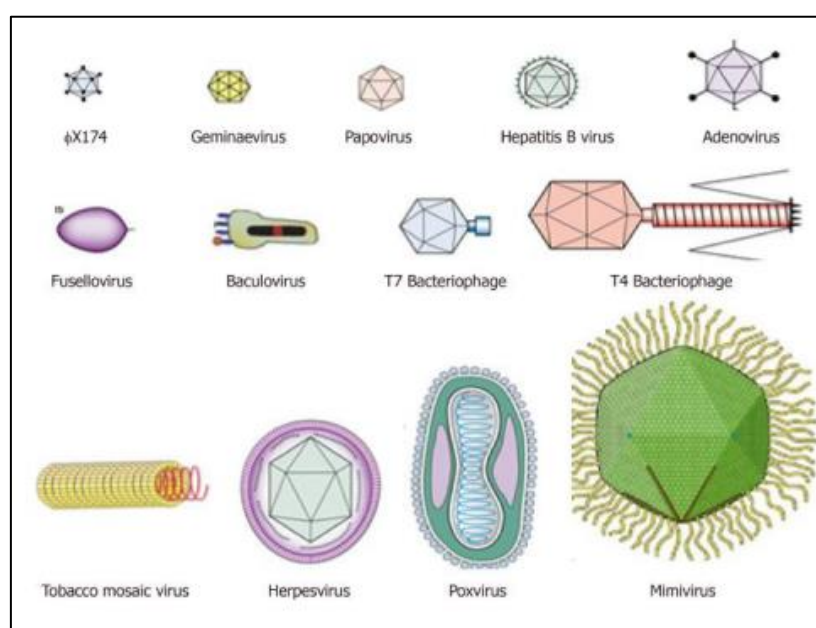


Fonte: Parvez (2020).

Rivero (n.d) destacou que a estrutura icosaédrica é a maior estrutura que pode acomodar 60 subunidades assimétricas feitas de proteínas e, além disso, maximiza a

quantidade de volume por unidade de área. Entretanto, estudos citados pelo autor mostraram que a mesma simetria era compatível com capsídeos compostos por diferentes números de subunidades. Essas unidades proteicas fundamentais, chamadas capsômeros que compõem o capsídeo, podem ser constituídas por uma ou mais proteínas do mesmo tipo, ou mesmo por proteínas de diferentes tipos.

Figura 75 – Representação de vírions mostrando seus tamanhos (20-400 nm) e formas (esféricas, poliédricas, elípticas, em forma de bastão, etc.).



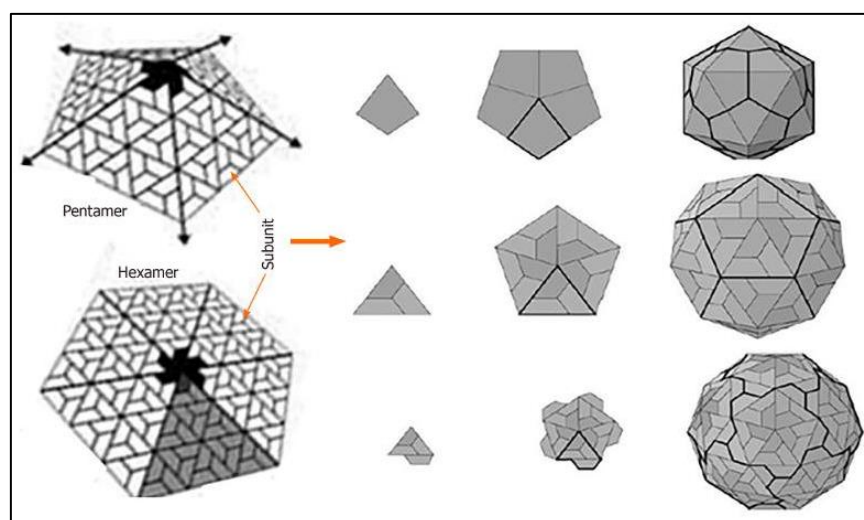
Fonte: Parvez (2020).

Parvez (2020) também observa que as subunidades da proteína do capsídeo são assimétricas e dessa forma, o número máximo de interações entre as subunidades pode ser estabelecido apenas quando elas são organizadas simetricamente.

Além disso, Peeters e Taormina (2008) relatam que os capsômeros se agrupam em grupos de cinco (pentâmeros) em torno de doze revelações equidistantes correspondendo aos vértices de um icosaedro, e em grupos de seis (hexâmeros) em torno de pontos na interseção do capsídeo com eixos globais de simetria 3 vezes e/ou 6 vezes locais do mesmo icosaedro. Dito de outra forma, Rivero (n.d) esclarece que quando os capsômeros são circundados por seis capsômeros vizinhos, devido ao formato hexagonal são chamados hexâmetros. Analogamente, quando os

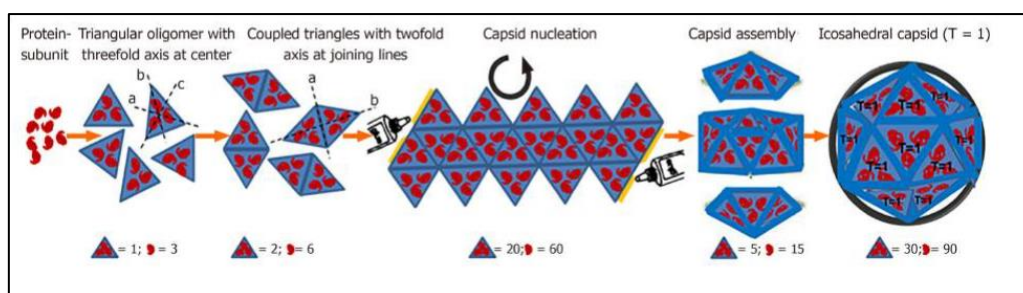
capsômeros são circundados por cinco capsômeros vizinhos, devido ao formato pentagonal são chamados pentâmeros. Nesse sentido, Parvez (2020) apresentou as **Figs. 76, 77 e 78** ilustrando a formação de capsídeo icosaédrico.

Figura 76 – Formação de capsídeo icosaédrico com anéis de cinco subunidades (pentâmeros) ou seis subunidades (hexâmeros) nos vértices de cada uma das faces.



Fonte: Adaptado de Parvez (2020).

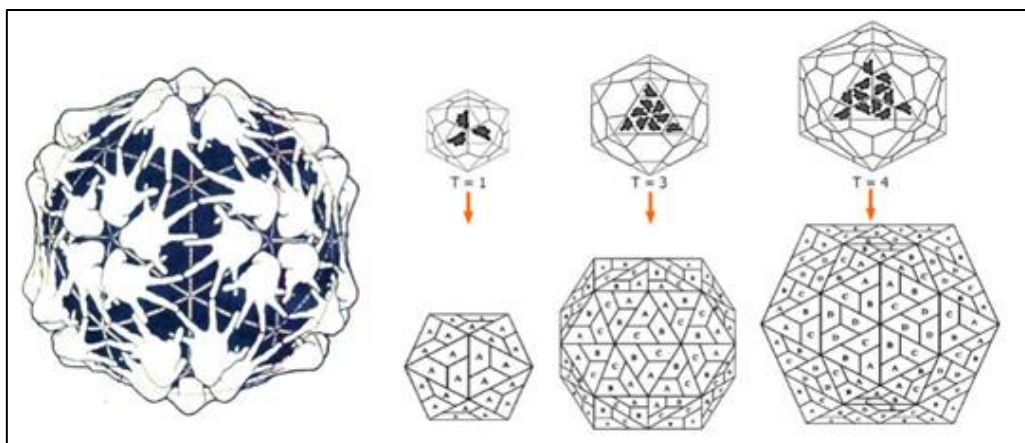
Figura 77 – Montagem de um capsídeo icosaédrico (T=1) de um vírus esférico.



Fonte: Adaptado de Parvez (2020).

Diante disso, Rivero (n.d) destaca que existem maneiras contadas de formar um capsídeo icosaédrico com base no modelo de Caspar e Klug proposto em 1962. Ao substituir 12 hexâmeros por 12 pentâmeros forma-se uma superfície fechada e a quantidade de formas que podemos usar para criar capsídeo icosaédrico está relacionada ao número de triangulação T.

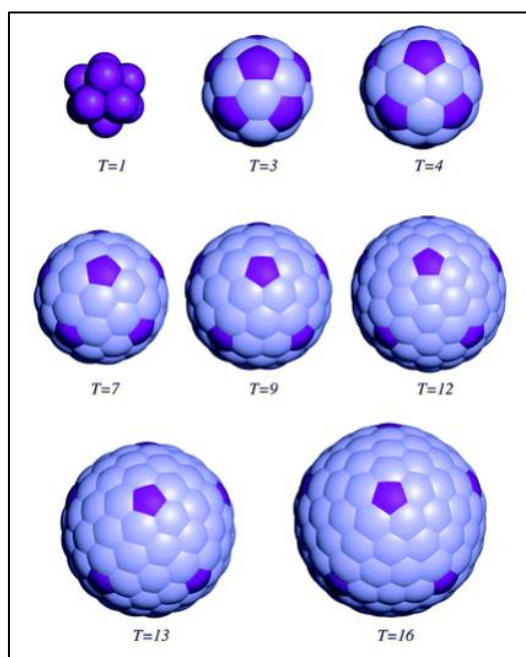
Figura 78 – Apresentação esquemática para formação de capsídeos icosaédricos T=1 (subunidade A), T=3 (subunidades A, B e C) e T=4 (subunidade A, B, C e D).



Fonte: Parvez (2020).

O número de proteínas em um capsídeo ou o número total de capsômeros em um capsídeo depende do número de triangulação T . Segundo Rivero (n.d) cada uma das estruturas com um número de triangulação diferente pode ser encontrada em vários vírus, como o picornavírus, que tem número de triangulação $T=3$, ou herpevírus, com número de triangulação $T=16$, como ilustrado na **Fig. 79**.

Figura 79 – Exemplos de capsídeos icosaédricos correspondentes a números diferentes T .

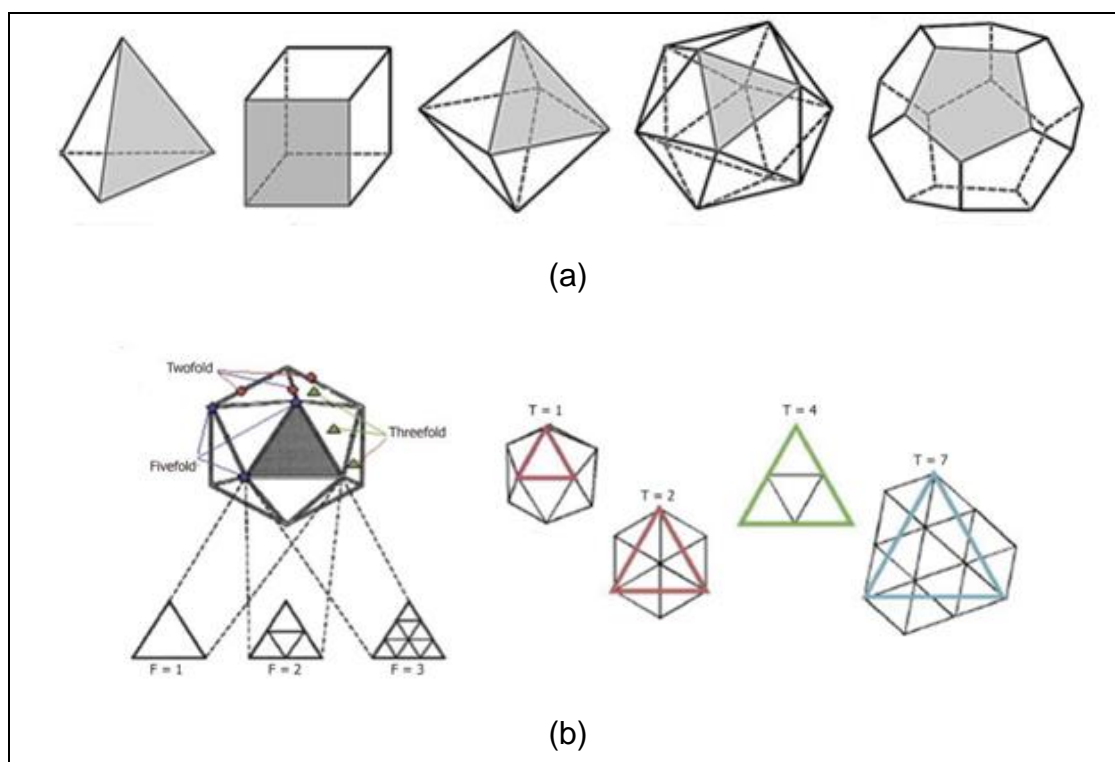


Fonte: Rivero (n.d).

Com relação à simetria, segundo Peeters e Taormina (2008) o modelo proposto por Caspar e Klug explora eixos coordenados bem escolhidos em uma rede hexagonal plana para rotular os vírus de acordo com o número de proteínas do capsídeo que exibem possibilitando a classificação de capsídeos icosaédricos dos vírus.

Por outro lado, Parvez (2020) ressalta que um capsídeo estável deve estar em perfeita simetria e com a menor energia livre possível, pois a simetria geométrica do capsídeo contribui muito para sua estabilidade e equilíbrio entre a estrutura do genoma empacotado (ácido desoxirribonucléico/DNA ou ácido ribonucléico/RNA) e/ou o envelope lábil que deve derreter em um citoplasma em um local e tempo precisos. Com isso o autor mencionou em seu trabalho a simetria cúbica dos poliedros regulares e exemplificou capsídeos icosaédricos com número de triangulação diferente com princípio de eixos de simetria na **Fig. 80**.

Figura 80 – Simetria cúbica dos poliedros regulares (a) e capsídeos icosaédricos com número de triangulação diferente com princípio de eixos de simetria (b).



Fonte: Adaptado de Parvez (2020).

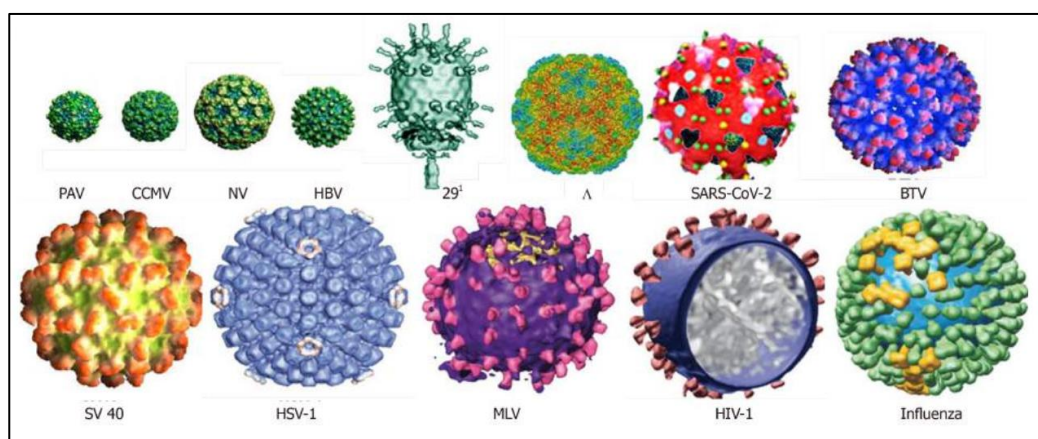
Dessa forma, estudo da estrutura em nível atômico de vários vírus com imagem 3D detalhada obtida por meio de cristalografia de raios-X de alta resolução,

microscopia crioeletrônica e simulações moleculares elucidam as suas características morfológicas e possibilita o desenvolvimento de medicamentos antivirais (MISHRA, 2020; PARVEZ, 2020).

Segundo Peeters e Taormina (2008) o conhecimento das propriedades dinâmicas dos capsídeos virais permite interferir mecânica e quimicamente em sua montagem ou, de forma mais geral, em seu ciclo de replicação. Para Parvez (2020) esse conhecimento estrutural detalhado possibilita a compreensão dos mecanismos de montagem/desmontagem do capsídeo, antigenicidade, interação com os receptores de células hospedeiras e desenvolvimento de estratégias terapêuticas.

Parvez (2020) destacou que sobretudo na pandemia da doença SARS-CoV-2 (COVID-19) é necessária a compreensão estrutural de novos vírus emergentes em relação ao desenvolvimento de tratamento e intervenções eficazes. Nesse sentido, o autor relatou que uma estrutura cristalina recentemente determinada do nucleocapsídeo SARS-CoV-2 revelou sua arquitetura e automontagem muito semelhantes às do SARS-CoV-1 e do vírus da síndrome respiratória do Oriente Médio (MERS-CoV)", como ilustrado na **Fig. 81**.

Figura 81 – Vírus esféricos com capsídeos icosaédricos. PAV: Parvovírus; CMV: Citomegalovírus; NV: Norovírus; HBV: vírus da hepatite B; 29¹: bacteriófago; SARS-CoV-2: vírus-2 da síndrome respiratória aguda grave; BTV: vírus da língua azul; SV40: vírus Simian 40; HSV-1: vírus Herpes simplex; MLV: vírus da leucemia murina; HIV-1: Vírus da imunodeficiência humana-1; Influenza: vírus da influenza.



Fonte: Parvez (2020).

Por fim, Mishra (2020) esclarece que é necessário um estudo matemático da estrutura dos vírus, pois a simetria é usada como uma ferramenta em virologia para

entender e classificar os vírus, tendo em vista que os medicamentos antivirais são concebidos de forma a interferir ou bloquear a montagem viral, interferindo com a estrutura de simetria do vírus para torná-lo inativo.

4.4 ROBÓTICA E MOVIMENTO

Segundo Carmichael e Gifford (2007) o robô *tetwalker*, (**Fig. 82**) foi projetado na NASA Goddard Flight Center (GSFC) para exploração espacial sendo capaz de manobrar suavemente em terreno rochoso e difícil com estabilidade já que seu apoio se dá em apenas três pontos.

Figura 82 – Os engenheiros Caner Copperrider e Ken Lee trabalham no protótipo do robô *tetwalker* no Goddard Flight Center da NASA.



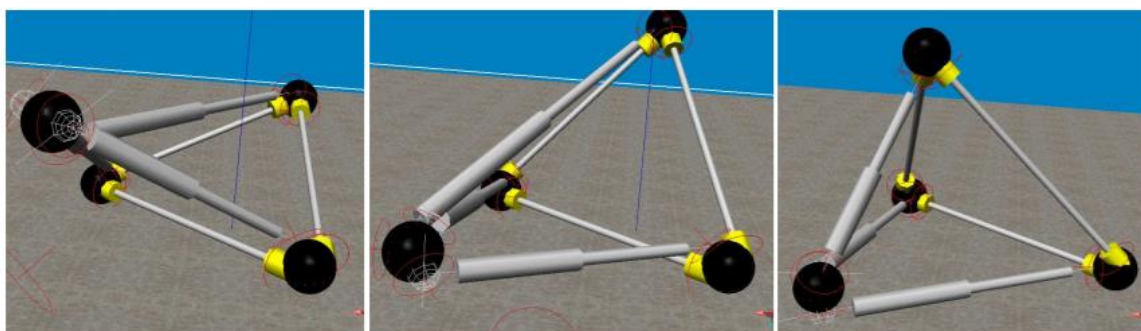
Fonte: Wong (2005).

O *tetwalker* é um tetraedro com suportes telescópicos e nós. Ele tomba pela paisagem, deformando-se, pois, o topo do tetraedro se move na direção desejada, enquanto a borda posterior se move na mesma direção (**Fig. 83**). Com isso, seu centro de gravidade muda e o robô “cai”. O processo se repete conforme o robô continua a girar em direção ao seu local final (WONG, 2005).

Com base nos robôs andadores baseados em tetraedros, Ding e Yao (2013) propõem um método para a construção de um mecanismo móvel hexaedro implantável. Esse mecanismo pode ser considerado uma estrutura implantável que pode se expandir em seis direções independentemente devido à sua configuração completamente simétrica. A análise de estabilidade e simulação dinâmica do andar e

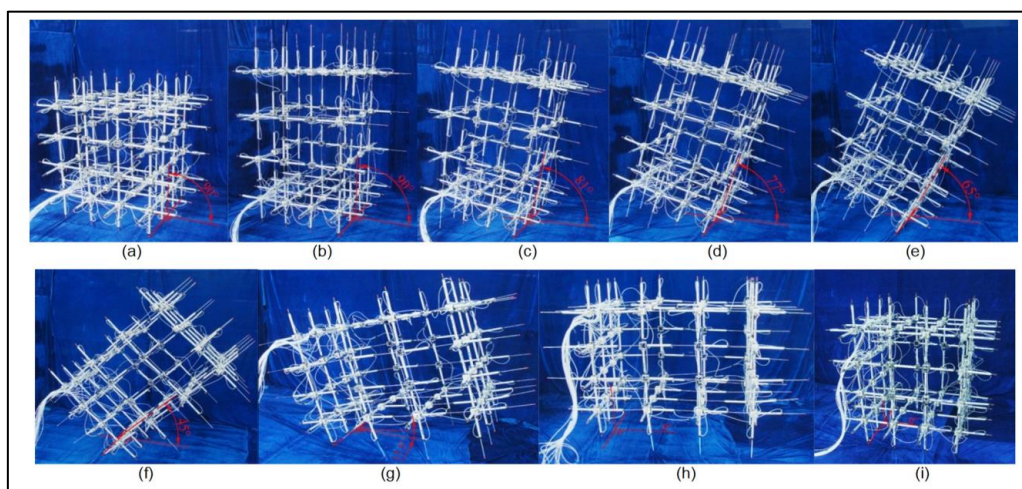
rolar foram realizadas e um protótipo foi fabricado para verificar e validar resultados experimentais das funções de caminhar e tombar, ilustrado na **Fig. 84**.

Figura 83 – Simulação de movimento do tetwalker.



Fonte: Carmichael e Gifford (2007).

Figura 84 – Etapas do movimento do mecanismo móvel na forma de hexaedro.



Fonte: Ding e Yao (2013).

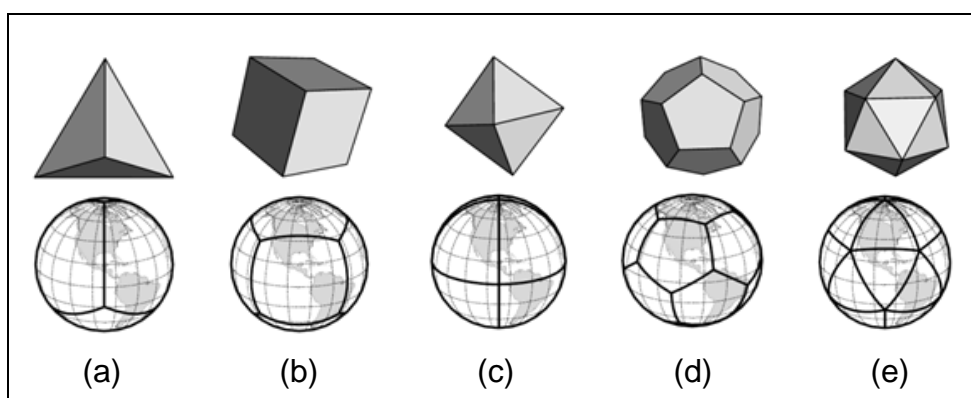
4.5 METEOROLOGIA E CARTOGRAFIA

A modelagem de fenômenos atmosféricos globais é de grande importância científica, econômica, social e política. Na Meteorologia, assim como em diversas áreas do conhecimento, a esfera é utilizada como base para a estudos de previsão do tempo e de modelagem oceânica, por exemplo. Contudo, os poliedros regulares também podem servir de base para o desenvolvimento de malhas quase uniformes já que eles podem ser inscritos em uma esfera e suas faces podem ser projetadas na

superfície de modo que as projeções das suas arestas para a esfera resultam em arestas geodésicas na esfera, como ilustrado na **Fig. 85**. Esse tipo de malha é denominado malha geodésica para a esfera (PEIXOTO, 2013).

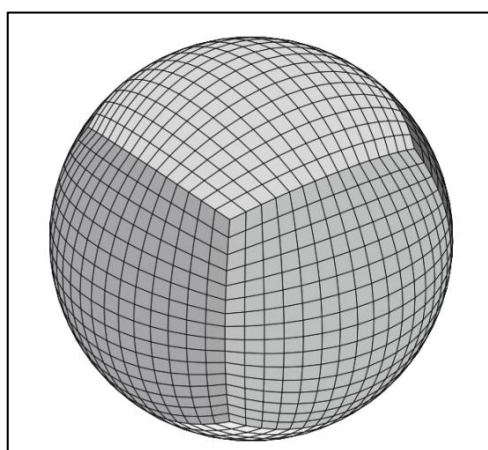
Peixoto (2013) destaca que por meio do processo de discretização é possível refinar uma malha base como ilustrado na **Fig. 85** até a resolução desejada pelo processo de discretização. A discretização da esfera usando um hexaedro como referência (**Fig. 85b**) é feita repartindo cada quadrado esférico (projeções dos lados do hexaedro na esfera) uniformemente em novos quadrados esféricos para obter uma malha com espaçamento de grade adequado à representação da esfera como apresentado na **Fig. 86**.

Figura 85 – Representações planas e esféricas poliedros regulares, da esquerda para a direita: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.



Fonte: Peixoto (2013).

Figura 86 – Discretização da esfera usando um hexaedro.

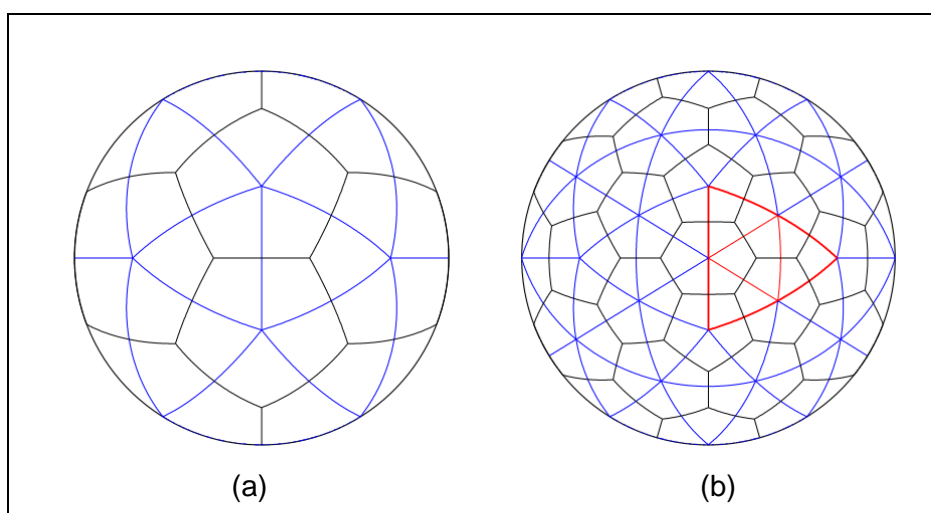


Fonte: Peixoto (2013).

As malhas geodésicas obtidas por meio da projeção das arestas dos poliedros regulares na superfície da esfera circunscrita são uniformes e não apresentam concentração de pontos em torno dos polos como as malhas latitude-longitude. Diante disso, Silva (2014) destacou que, recentemente, diversos modelos atmosféricos estão sendo desenvolvidos utilizando essas malhas e Peixoto (2013) afirmou que “certamente a que vem ganhando mais espaço dentro dos grupos de estudos de modelagem meteorológica é a do tipo icosaédrica”.

Nessa malha geodésica, os vértices do icosaedro regular inscrito em uma esfera são pontos da malha geodésica e são conectados por arcos geodésicos formando uma malha triangular composta por 20 triângulos geodésicos correspondentes às 20 faces do icosaedro regular projetadas na superfície esférica. A partir da conexão dos circuncentros dos 20 triângulos geodésicos dessa malha triangular, denominada malha primal, constrói-se a malha dual. (PEIXOTO, 2013; SILVA, 2014). A representação da malha primal com 12 pontos geradores e seu respectivo diagrama de Voronoi é ilustrada na **Fig. 87a**

Figura 87 – Malha primal (em azul) e diagrama de Voronoi para malhas icosaédricas com 12 geradores (em preto) (a) e malha primal (em azul) e diagrama de Voronoi para malhas icosaédricas com 42 geradores (em preto) (b).



Fonte: Silva (2014).

Como exemplificado anteriormente utilizando o hexaedro, essa malha pode ser sucessivamente refinada acrescentando-se novos pontos nos pontos médios das arestas geodésicas e os conectando até se obter o espaçamento entre pontos

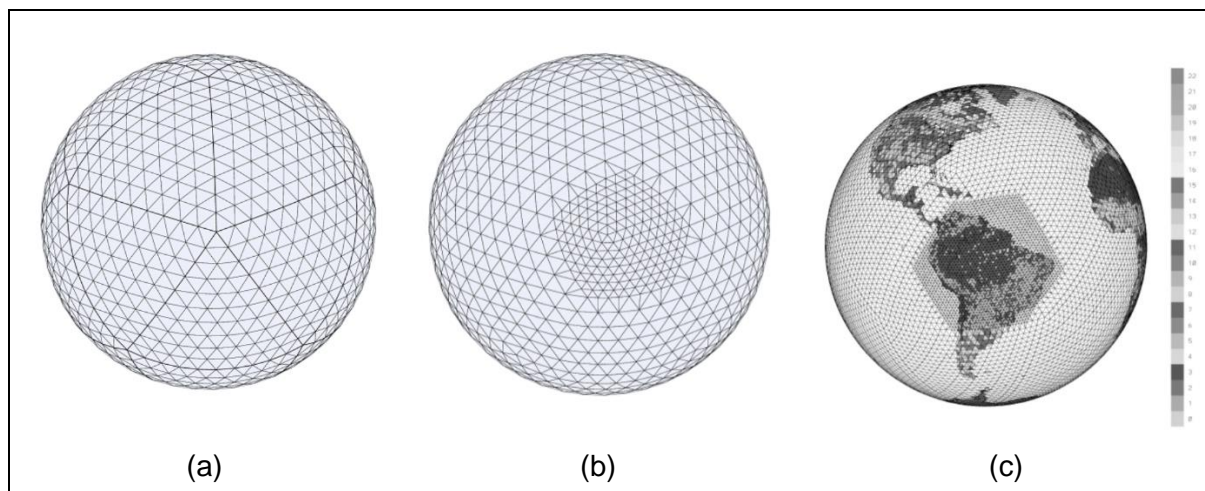
desejado. Inicialmente obtêm-se quatro triângulos no interior de cada um dos 20 triângulos do icosaedro como pode-se observar em vermelho na **Fig. 87b**. A **Fig. 87b** também apresenta um refinamento da malha triangular com 12 vértices, formando assim uma malha triangular com 42 vértices que são os geradores do diagrama de Voronoi, constituído de polígonos esféricos pentagonais ou hexagonais, associado a esta triangularização. Cada região de Voronoi é chamada de célula da malha.

No processo de refinamento da malha geodésica icosaédrica até obter a resolução desejada, Silva (2014) destaca que o diagrama de Voronoi será composto por exatamente 12 pentágonos associados aos vértices do icosaedro e um número determinado de hexágonos. Segundo esse mesmo autor, para um nível q de resolução da malha, a quantidade de hexágonos depende da quantidade de triângulos da malha primal e é igual 2^{2q} triângulos no interior de cada um dos 20 triângulos do icosaedro.

Segundo Walko e Avissar, 2008 *apud* Silva *et al.* (2009) um novo modelo denominado Modelo de Atmosfera Terra e Oceano (*Ocean Land Atmosphere Model – OLAM*) representa uma nova geração de modelos meteorológicos capaz de representar simultaneamente fenômenos meteorológicos de escala global, e com o acoplamento de grades refinadas consegue representar de forma mais acurada os fenômenos de escala local e estimar o clima regional, foi desenvolvido recentemente na Universidade Duke – EUA. Esse modelo utiliza uma grade do tipo não estruturada, em que as células possuem um formato triangular na direção horizontal, como uma malha geodésica icosaédrica (**Fig. 88a**).

Silva *et al.* (2009) também explicam que nesse modelo o aumento da resolução espacial de alguma região de interesse pode ser obtido através da divisão das grades triangulares mantendo na mesma localidade as faces do triângulo original da grade de menor resolução como ilustrado na **Fig. 88b**. Os mesmos autores destacam ainda que aumentar a resolução espacial de forma ilimitada por meio do refinamento da malha, que pode ser feito simultaneamente em regiões distintas, facilita o entendimento de processos meteorológicos e climáticos de dessas regiões. A **Fig. 88c** ilustra a localização de uma grade mais refinada inserida no domínio global e as respectivas características de superfície.

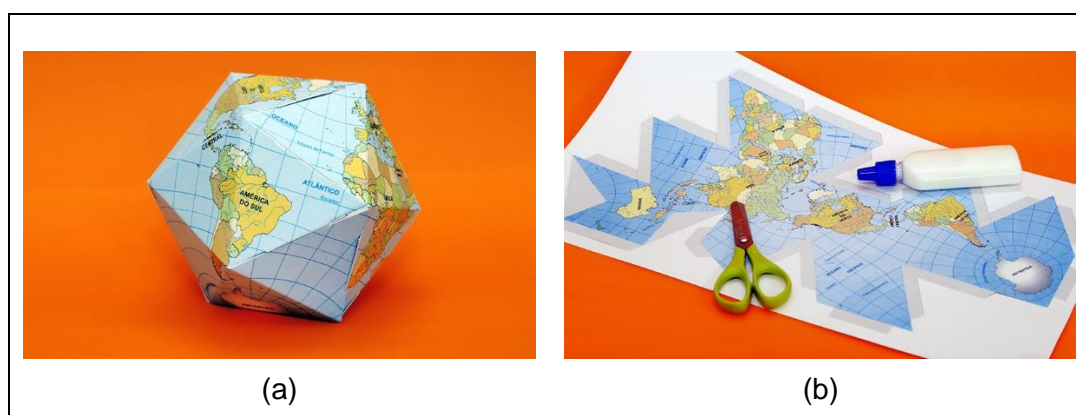
Figura 88 – Grade icosaédrica usada no modelo OLAM (a), refinamento das grades horizontais (b), modelo OLAM, cobertura vegetal e domínio das grades global e acoplada para a América do Sul (c).



Fonte: Silva *et al.* (2009).

As características geométricas dos poliedros regulares também possibilitam a sua utilização em cartografia. Nesse sentido, devido à dificuldade de representar o globo terrestre em uma superfície plana reduzindo as distorções de área, forma e ângulos existem vários tipos de projeções cartográficas. Um dos sistemas de projeção do Mapa Mundial divide a esfera em 20 triângulos esféricos equiláteros, que são então achatados para formar o icosaedro é conhecido como projeção de Buckminster Fuller ou projeção Dymaxion (**Fig. 89**).

Figura 89 – Globo terrestre transformado em icosaedro regular (a) e projeção de Buckminster Fuller (b).



Fonte: IBGE (2021).

Este método compreende uma projeção realizada por intermédio da representação do mundo na superfície de um poliedro e resulta em um mapa com distorção menos visível do tamanho e área dos continentes. Entretanto, apesar das poucas distorções em sua representação da superfície terrestre, não é possível observar as distâncias entre os continentes, o que impossibilita a sua utilização nos sistemas de navegação.

4.6 ARQUITETURA E ENGENHARIA

Nota-se facilmente a presença de poliedros como prismas e pirâmides no meio ambiente construído. Além disso, muitas obras arquitetônicas utilizaram como inspiração os poliedros regulares por sua geometria singular com regularidade e simetria que favorece a estabilidade das estruturas e beleza dessas obras, conforme exemplificado a seguir.

A Plataforma de Observação em Bottrop-Batenbrock (**Fig. 90**), localizada na área industrial da cidade de Bottrop-Batenbrock na Alemanha, foi idealizada pelo arquiteto Wolfgang Christ em 1995, tem a forma de um tetraedro e possui 60 metros de altura.

Figura 90 – Plataforma de Observação em Bottrop-Batenbrock.



Fonte: Bortolossi (2009).

A Atomium (**Fig. 91**), localizada em Bruxelas, na Bélgica, foi idealizada pelo engenheiro André Waterkeyn é um hexaedro regular (cubo) que representa um cristal elementar de ferro composto por nove átomos.

Figura 91 – Atomium em vista inferior (a) e vista aérea (b).



Fonte: Landgraf (2004).

A pirâmide de entrada do Museu do Louvre (**Fig. 92**), em Paris, na França, foi projetada pelo arquiteto Leoh Ming Pei e inaugurada em 1989. Essa pirâmide de base quadrada juntamente com o seu reflexo forma um octaedro.

Figura 92 – Pirâmide de entrada do Museu do Louvre.



Fonte: Fotomat (n.d)

O Bosque da Esperança (**Fig. 93**), localizado nas favelas de Soacha, próximo à cidade de Bogotá, na Colômbia, e projetado por Giancarlo Mazzanti é um espaço para a prática de diversos esportes e atividades recreativas pela comunidade carente da região. A sua cobertura é feita de dodecaedros, módulos com 12 superfícies de material translúcido.

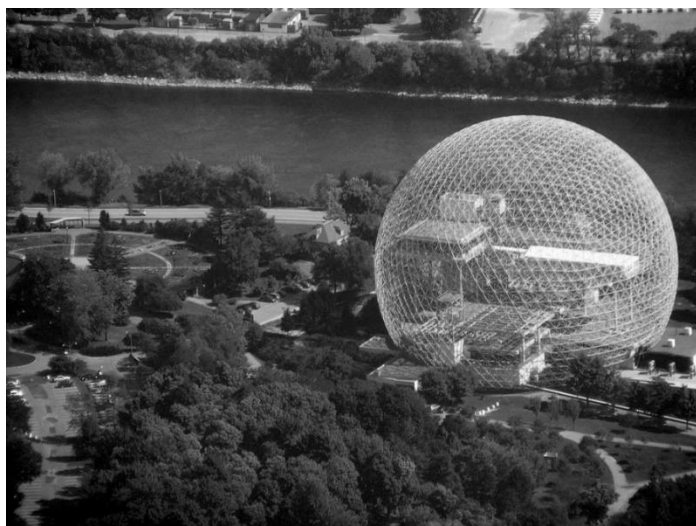
Figura 93 – Bosque da Esperança em vista inferior (a) e vista aérea (b).



Fonte: Serafini (n.d).

A Biosfera de Montreal (**Fig. 94**), localizada na cidade de mesmo nome no Canadá, foi projetada pelo arquiteto Buckminster Fuller para o pavilhão dos Estados Unidos na Feira Mundial de 1967, a Expo 67, em Montreal.

Figura 94 – Biosfera de Montreal.



Fonte: Langdon (2016).

O arquiteto criou esse tipo de estrutura conhecida como domo geodésico ou cúpula geodésica a partir da divisão dos triângulos que compõem as faces de um icosaedro que é o poliedro que mais se aproxima da esfera.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Diante do exposto, foram introduzidos os conceitos básicos de geometria plana e espacial a fim de desmistificar os elementos dos poliedros regulares como faces, arestas, vértices, diagonais, e esclarecer a diferença conceitual entre poliedros regulares e poliedros de Platão ou poliedros platônicos.

A importância da História da Matemática referente à descoberta e estudo das características dos poliedros regulares também foi destacada, como por exemplo, na associação feita por Platão aos quatro elementos fundamentais da natureza e ao universo, na criação do Modelo de Kepler do sistema solar, na demonstração do Teorema de Euler e no nascimento da Topologia.

Nesse trabalho também foram realizadas demonstrações para determinação das diagonais das faces, das diagonais dos poliedros, dos ângulos poliédricos, da existência de apenas cinco poliedros regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), assim como foram apresentadas as transformações sobre os cinco poliedros regulares para obtenção dos treze poliedros semirregulares também conhecidos como poliedros arquimedianos.

Ademais, foi apresentado o princípio da dualidade entre os poliedros regulares e a construção dos poliedros regulares inscritos e circunscritos em uma esfera de modo a relacionar o comprimento das arestas de cada poliedro ao comprimento do raio da esfera inscrita e ao comprimento do raio da esfera circunscrita.

Dessa forma, além de demonstrar o cálculo da área de cada uma das faces e área de superfície poliédrica com apresentação de exemplos de planificação dos poliedros regulares, também foi demonstrado o cálculo do volume e da área de superfície específica desses poliedros em função do comprimento de suas arestas, bem como em função do comprimento do raio da esfera inscrita e em função do raio da esfera circunscrita, de modo a possibilitar uma comparação numérica entre características dos poliedros regulares em relação à esfera inscrita e esfera circunscrita.

Por fim, com o objetivo de reconhecer e relacionar os conceitos matemáticos dos poliedros regulares aplicados à modelagem de fenômenos em áreas da ciência, foram apresentadas algumas aplicações em Química, Física, Ciências dos Materiais, Nanotecnologia, Biologia, Engenharias, Meteorologia, Cartografia, Robótica e

Arquitetura. Os trabalhos retornados mostraram que o tema de pesquisa abordado é atual e se mostra como potencial para o desenvolvimento de trabalhos futuros na área.

Diante disso, destaca-se a importância do desenvolvimento de trabalhos com essa temática e a realização de atividades interdisciplinares com recursos variados para tornar a disciplina de Matemática mais atraente e mais contextualizada, tendo em vista que as aulas meramente expositivas e apresentação de fórmulas prontas dificultam a curiosidade dos estudantes e pouco contribuem para uma aprendizagem ativa e significativa. A escolha dos conteúdos que serão vivenciados e a metodologia que será utilizada pelo professor devem ser adequadas ao contexto educacional, destacando o papel do professor como mediador no processo de ensino-aprendizagem.

Como perspectivas, espera-se que essa pesquisa possa auxiliar no desenvolvimento de propostas didáticas que utilizem a temática da interdisciplinaridade no ensino de geometria, bem como a utilização de geometria dinâmica e de materiais manipuláveis no ensino para a melhoria da percepção e visualização espacial com construção da aprendizagem por meio de formação de imagens mentais e associações que relacionem os conceitos do mundo real com os conteúdos abordados em sala de aula.

Assim, conclui-se essa dissertação ressaltando a importância de se estudar os conceitos de Geometria Espacial, em especial os poliedros regulares, resgatando a História da Matemática, viabilizando a interdisciplinaridade com outras áreas do conhecimento e reconhecendo a aplicação da Matemática à realidade como normatiza os documentos regulatórios educacionais para o Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, T. C. S. **Sólidos arquimedianos e Cabri 3D**: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento. 2010. 185 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2010.
- ALMEIDA, C. R. M. **Sólidos de Platão e seus duais**: construção com material concreto e representações por Geogebra. 2015. 236 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2015.
- ALVAREZ, S. **Polyhedra in (inorganic) chemistry**. Dalton Transactions, n. 13, p. 2209-2233, 2005.
- ALVAREZ, S.; Echeverría, J. **New perspectives on polyhedral molecules and their crystal structures**. Journal of Physical Organic Chemistry, v. 23, p.1080-1087, 2010.
- ATIYAH, M.; SUTCLIFFE, P. **Polyhedra in Physics, Chemistry and Geometry**. Milan Journal of Mathematics, v. 71, n. 1, p. 33-58, 2003.
- BALESTRI, R. **Matemática: interação e tecnologia**. v. 3, 2. ed., São Paulo: Leya, 2016.
- BERTATO, F. M. **“De Divina Proportione” de Luca Pacioli – Tradução anotada e comentada**. 2008. 322 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. Campinas, 2008.
- BHATT, S.; KUMAR, M. **Effect of size and shape on melting and superheating of free standing and embedded nanoparticles**. Journal of Physics and Chemistry of Solids, v. 106, p. 112-117, 2017.
- BORSOI, C. **Geogebra 3D no Ensino Médio: uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial**. XX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Matemática. Curitiba, 2016.
- BORTOLOSSI (2009). Disponível em: http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/eja/recurso-multimidiaprofessor/matematica/novaeja/m3u01/Recursos_Multimedia/1_Recursos_Atividade_Solidos_Platonicos_offline/platonicos-html/tetraedro-br.html#:~:text=A%20Plataforma%20de%20Observa%C3%A7%C3%A3o%20em,Observe%20os%20octaedros%20da%20estrutura. Acesso em: 24 jan. 2021. il. color.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017. Disponível em: <

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_sit e.pdf >. Acesso em: 21 abr. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **LDB - Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília: Ministério da Educação, 1996.

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2006.

CALLISTER, W.D. **Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução**. 5ª ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2002.

CAMPOS, L. R. **Noções de Topologia e o Teorema de Euler**. 2015. 60 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2015.

CARMICHAEL, B.L.; GIFFORD, C.M. **Modeling and Simulation of the Seismic TETwalker Concept**. Technical Report CReSIS TR 134. University of Kansas. 2007.

CAVALCANTE, E. **Aspectos geométricos da molécula de fulereno em referenciais não-inerciais**. 2015 105 f. Tese (Doutorado em Física). Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2015.

CHAVES, M.L.S.C. **Geologia e mineralogia do diamante da Serra do Espinhaço em Minas Gerais**. 1997. 309 f. Tese (Doutorado em Mineralogia e Petrologia). Universidade de São Paulo. São Paulo, 1997.

COELHO, M. B. **Técnicas nanotecnológicas para a agricultura e pecuária: um enfoque em controle de pragas e doenças, nutrição e saúde animal**. Embrapa Gado de Corte. Campo Grande, 2020.

CORREIA, A. M. A.; FERREIRA, B.L. **Poliedros Platônicos: dualidade simétrica**. Gráfica, Curitiba:2007.

CORREA, T.H.B.; REIS, J.D.S. **Estruturas de fulerenos: estabelecendo interfaces no ensino de Matemática e Química em nível superior**. Química Nova, v. 40, n. 8, p. 963-969, 2017.

COSTA, A.E.J; SANTOS, Y.P.S; SOUSA, G.C. **Uma investigação histórica bibliográfica de Porquês matemáticos sobre poliedros regulares**. Revista Prática Docente (RPD). ISSN: 2526-2149. Instituto Federal de Mato Grosso - Campus Confresa Revista Prática Docente. v. 3, n. 1, p. 19-31, jan/jun 2018.

COSTA, A.M.; SILVA, V.V. **Estratégias nanotecnológicas para diagnóstico e tratamento do câncer**. Revista Saúde e Meio Ambiente – RESMA, Três Lagoas, v, 5, n.2, p. 1-13, agosto/dezembro. 2017. ISSN: 2447-8822.

COSTA, C.D. **Hematita**: um novo método de síntese para a indústria. 2011. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Química). Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2011.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. Volume único. São Paulo, Editora Ática, 2000.

DEHOVITZ, D. C. **The Platonic Solids an Exploration of the Five Regular Polyhedra and the Symmetries of Three-Dimensional Space**. Departamento de Matemática Whitman College Walla Walla, Washington, 2016.

DING, W.; YAO, Y. **A Novel Deployable Hexahedron Mobile Mechanism Constructed by Only Prismatic Joints**. Journal of Mechanisms and Robotics. 5. 041016. 10.1115/1.4025410. 2013.

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos da Matemática Elementar**. 5ª edição. São Paulo: Editora Atual, 1993.

FOTOMAT (n.d). Disponível em: <http://www.fotomat.es/octaedro/>. Acesso em: 10 abr. 2021. il. color.

GARCÍA-MONGE, J.M.A.; LÓPEZ-ANDRÉS, S.; MOLERO, C.V.; CATENA, E.V. **Geología de Grado en Química. Prácticas 1. Reconocimiento de visu de minerales y rocas Reduca (Geología)**. Serie Fundamentos de Geología. v. 2, n.4, p. 1-35, 2010.

GISBERT-GONZÁLEZ, J. M.; FELIU, J. M.; FERRE-VILAPLANA, A.; HERRERO, E. **Why Citrate Shapes Tetrahedral and Octahedral Colloidal Platinum Nanoparticles in Water**. Journal of Physical Chemistry C, v. 122, n. 33, p. 19004-19014, 2018.

GHASEMI, Y.; EMBORG, M.; CWIRZEN, A. **Exploring the relation between the flow of mortar and specific surface area of its constituents**. Construction and Building Materials, v. 211, p. 492-501, 2019.

GHASEMI, Y.; RAJCZAKOWSKA, M.; EMBORG, M.; CWIRZEN, A. **Shape-dependent calculation of specific surface area of aggregates versus X-ray microtomography**. Magazine of Concrete Research, v. 72, n. 2, p. 88-96, 2020.

GRACIA-PINILLA, M. Á.; PÉREZ-TIJERINA, E.; GARCÍA, J. A.; et al. **On the structure and properties of silver nanoparticles**. Journal of Physical Chemistry C, v. 112, n. 35, p. 13492-13498, 2008.

HAECKEL, E. (1904). Disponível em: <https://www.cosmic-core.org/free/article-190-zoology-part-1-the-geometry-of-diatoms-radiolaria/>. Acesso em: 17 set. 2019. il. color.

HILL, V. J.; ROWLANDS, P. **Nature's code**. AIP Conference Proceedings, v. 1051, n. March, p. 117–126, 2008.

IBGE (2021). Disponível em: <https://educa.ibge.gov.br/criancas/brincadeiras-2/19588-icosaedro.html>. Acesso em: 10 abr. 2021. il. color.

JREIGE, R. E. **A Resolução de Problemas Aplicada à Modelagem de Áreas e Volumes dos Poliedros de Platão**. 117 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso. Cuiabá, 2015.

LANDGRAF, F.J.G. (2004). Disponível em: <http://www.pmt.usp.br/ACADEMIC/landgraf/atomium.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2021. il. p&b e color.

LANGDON, D. "Clássicos da Arquitetura: Biosfera de Montreal / Buckminster Fuller" [AD Classics: Montreal Biosphere / Buckminster Fuller] 26 Set 2016. ArchDaily Brasil. (Trad. Souza, Eduardo). Disponível em: <https://www.archdaily.com.br/br/796023/classicos-da-arquitetura-biosfera-de-montreal-buckminster-fuller>. ISSN 0719-8906. Acesso em: 10 abr. 2021. il. p&b.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. Editora Moderna; 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LEOPOLDO, C.J.; DEL VECHIO, G.H. **Nanotecnologia e suas aplicações**: uma revisão quanto aos seus conceitos, potencial de uso, riscos e tendências. Interface Tecnológica -v. 17 n. 2. 2020.

LIMA, E. L. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro, 1991.

LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. **A Matemática do Ensino Médio**. v. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

LIMA, T. C. S.; MIOTO, R. C. T. **Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico**: a pesquisa bibliográfica. Revista katálysis, v. 10, 2007, 37-45.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MARTINS, C.V.M. **Análise granulométrica e distribuição dos parâmetros de forma e textura de areias através do processamento de imagens digitais**. 2020. 90 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil — Especialização em Geotecnia). Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Porto, 2020.

MCKENNA, K.P. **Gold nanoparticles under gas pressure**. Phys. Chem. Chem. Phys., 2009, 11, 4145–4151.

MELO, L.F. **Fulerenos e Futebol**: aplicações da Fórmula de Euler. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 52, 2003. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/52/4.htm>. Acesso em: 20 mar. 2021.

MELLO, L. I. P.; RHEINHEIMER, J. M. **Por que apenas 5 poliedros de Platão?** Revista Eletrônica da Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul. REMAT, Caxias do Sul, v. 1, n. 2, 2015.

MIALICH, Flávia Renata. **Poliedros e Teorema de Euler**. 2013. 81 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, 2013.

MISHRA, K. G. **Combating epidemics-pandemics mathematically**. Science Reporter. n. November, p. 24-26, 2020.

MOHR, A. R. R.; PRADO, A. V. S. **Construção dos sólidos regulares utilizando um circuito de aprendizagem por meio de materiais diversificados**. XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul. Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS: 2014.

MOHR, A. R. R.; BRITTO, S. L. M. **Sólidos arquimedianos**: um estudo sobre truncaduras e suas construções no Ensino Médio. Universo Acadêmico, v. 9, n. 1, Taquara: 2016.

MOHR, A. R. R.; JELINEK, K. R.; SILVA, P. L. **O ensino de geometria utilizando o objeto matemático poliedros duais**. Hipátia v. 5, n. 2, p. 308-324, 2020.

MULAZZANI, R. P.; GUBIANI, P. I. **Modelo de estimativa da área superficial específica do solo por meio da curva granulométrica**. XI Reunião Sul-Brasileira de Ciência do Solo. Qualidade do Solo & Ambiente de Produção. Frederico Westphalen (RS), 2016.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. 1. ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NIERENGARTEN, J. F. **Chemical modification of C60 for materials science applications**. New Journal of Chemistry, v. 28, p. 1177-1191, 2004.

NIETTO, S.; MARTINS, R.M. 2019. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~apmat/solidos-arquimedianos-2/>. Acesso em: 6 jan. 2021. il. color.

NUNES, J. J. B. de C.; TEIXEIRA, A. M. A. J.; SARAIVA, R. M. D. de C. **Caracterização morfológica do agregado leve de argila expandida brasileira com utilização do AIMS**. Ambiente Construído, Porto Alegre, v. 21, n. 3, p. 213-227, jul./set. 2021. ISSN 1678-8621 Associação Nacional de Tecnologia do Ambiente Construído. <http://dx.doi.org/10.1590/s1678-86212021000300547>.

PAIVA, M. **Matemática**. v. 1. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

PARVEZ, M. K. **Geometric architecture of viruses**. World Journal of Virologia. v. 9, n. 2, p. 5-18, 2020.

PASTRANA-MARTINEZ, L.M.; MORALES-TORRES, S.; GOMES, H.T.; SILVA, A.M.T. **Nanotubos e grafeno: os primos mais jovens na família do carbono**. QUÍMICA. 128, p. 21-27, 2013.

PEETERS, K.; TAORMINA, A. **Group theory of icosahedral virus capsid vibrations: A top-down approach**. Journal of Theoretical Biology, v. 256, n. 4, p. 607-624, 2008.

PEIXOTO, P. S. **Análise de discretizações e interpolações em malhas icosaédricas e aplicações em modelos de transporte semi-lagrangianos**. 2013. 241 f. Tese (Doutorado em Ciências). Universidade de São Paulo. São Paulo, 2013.

PEREIRA, A. R. P. **Formação e transformação químico-mineralógica da hematita em um geodomínio do quadrilátero ferrífero, Minas Gerais**. 2010. 106 f. Tese (Doutorado em Ciências – Química). Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2010.

PEREIRA, J. A. M. **Fulerenos: uma breve revisão**. Exacta, v. 10, n. 2, p. 269-280, 2012.

REIS, E. A. **Os Poliedros de Platão**. 2013. 35 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2013.

RICHESON, D. S. **Euler's gem: the polyhedron formula and the birtlz of topology**. Princeton University Press, 2008. Tradução Carlos Florentino. 1ª ed. Lisboa, 2015.

RIVA, R. D. D. **Efeitos das propriedades físicas dos grãos da fração areia de solos arenosos e de agentes de cimentação no comportamento de sistemas empacotados**. 2010. 180 f. Tese (Pós-graduação em Engenharia Civil). Universidade Federal de Viçosa. Viçosa, 2010.

RIVERO, A.B.R. **Propiedades Físicas de las Cápsides Virales Icosaédricas: Modelos de Potenciales de Interacción y Constantes de Fuerza**. Facultad de Ciencias, Universidad de La Laguna. (n.d).

ROCHA, L. V. **Uma aplicação da tecnologia de impressão 3D no ensino da matemática: construindo instrumentos didáticos para a sala de aula**. 2018. 108 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Teófilo Otoni, 2018.

ROCHA FILHO, R. C. **Os Fulerenos e sua Espantosa Geometria Molecular**. Química Nova na Escola, v. 4, p. 7-11, 1996.

SANTOS, J. L. DOS; ROCHA, G. P.; ALVES, R. B.; FREITAS, R. P. DE. **Fulereo [C60]: Química e aplicações**. Química Nova. v. 33, n. 3, p. 680-693, 2010.

SANTOS, T.R.T.; MATEUS, G.A.P.; SILVA, M.F.; BERGAMASCO, R. **Aplicação da nanotecnologia no tratamento de água: uma revisão**. Rev. UNINGÁ Review, Maringá, v. 34, n. 2, p. 51-72, abr./jun. 2019.

SAVCHENKO, M.; DIAGO, L. A.; SAVCHENKO, V.; EGOROVA, O. **Mesh Segmentation Using the Platonic Solids**. Transaction of the Japan Society for Simulation Technology. Vol.3, No.1, pp.1-10, 2011.

SERAFINI, T. (n.d). Disponível em: <https://cataclismaterial.wordpress.com/2012/01/06/o-bosque-esportivo-de-shakira-na-colombia/>. Acesso em: 10 abr. 2021. il. color.

SILVA, R. R. S.; DIAS, P.L.S.; MOREIRA, D.S.; SOUZA, E.B. **Modelo OLAM (Ocean-Land-Atmosphere-Model):** descrição, aplicações, e perspectivas. Revista Brasileira de Meteorologia, v.24, n.2, 144-157, 2009.

SILVA, M. I. **Estudo de métodos multigrid para solução de equações do tipo Poisson em malhas esféricas geodésicas icosaédricas**. 2014. 86 f. Dissertação (Mestrado em Ciências). Universidade de São Paulo. São Paulo, 2014.

SOUZA, M.G.A. **As práticas pedagógicas no contexto do ProJovem Urbano em Escola Municipal de Petrolina**. 2018. 122 p. Dissertação (Mestrado em Ciências da Educação - Inovação Pedagógica). Universidade da Madeira, Funchal, 2018.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1987.

TERRADAS, R. D. **A importância da interdisciplinaridade na Educação Matemática**. Revista da Faculdade de Educação. Ano IX nº 16 (Jul./Dez. 2011).

WEISSTEIN, E. W. "Dual Polyhedron." De MathWorld - Um recurso da Web do Wolfram. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/DualPolyhedron.html>. Acesso em: 3 jun. 2021.

WONG, William. **Shape-shifting pyramid robot may eventually move on mars**. Electronic Design, vol. 53, n. 9, 28 abr. 2005, p. 26. Disponível em: link.gale.com/apps/doc/A132123783/AONE?u=capes&sid=bookmark-AONE&xid=33bc47ed. Acesso em: 5 jun. de 2021.

ZARBIN, A.J.G.; OLIVEIRA, M.M. **Nanoestruturas de carbono (nanotubos, grafeno): quo vadis?** Química. Nova, Vol. 36, n. 10, 1533-1539, 2013.