Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Números binomiais: aplicações ao ensino e extensões

Gabriella da Silva Barros

Goiânia

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[**X**] Dissertação   [ ] Tese

2. Nome completo do autor

Gabriella da Silva Barros

3. Título do trabalho

Números Binomiais: aplicações ao ensino e extensões

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM   [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **GABRIELLA DA SILVA BARROS**, **Discente**, em 26/08/2021, às 09:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Tiago Moreira Vargas**, **Professor do Magistério Superior**, em 26/08/2021, às 09:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2305661** e o código CRC **8ECDF622**.

Referência: Processo nº 23070.041202/2021-16 SEI nº 2305661

Gabriella da Silva Barros

Números binomiais: aplicações ao ensino e extensões

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.
Orientador: Prof. Dr. Tiago Moreira Vargas.

Goiânia

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Barros, Gabriella da Silva
Números binomiais: aplicações ao ensino e extensões [manuscrito] / Gabriella da Silva Barros. - 2021.
XCVIII, 98 f.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Moreira Vargas.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2021.
Bibliografia.
Inclui tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Coeficientes binomiais. 2. Triângulo de Pascal. 3. Binômio de Newton. 4. Ensino médio. I. Vargas, Tiago Moreira, orient. II. Título.

CDU 51

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 29 da sessão de Defesa de Dissertação de **Gabriella da Silva Barros,** que confere o título de Mestra em Matemática, **na área de concentração em Matemática do Ensino Básico.**

Ao vigésimo quarto dia do mês de agosto do ano de dois mil e vinte um, a partir das dez horas e zero minutos, através de web-vídeo-conferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Números Binomiais: aplicações ao ensino e extensões".** Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Tiago Moreira Vargas - IME/UFG com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Valdivino Vargas Júnior - IME/UFG membro titular interno, Professora Doutora Thaynara Arielly de Lima - IME/UFG membro titular interno e o Professor Doutor Hugo Leonardo da Silva Belisário - IFG/GOIÂNIA, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Tiago Moreira Vargas - IME/UFG, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, vigésimo quarto dia do mês de agosto do ano de dois mil e vinte um.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Números Binomiais: aplicações ao ensino e extensões

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Hugo Leonardo da Silva Belisário**, **Usuário Externo**, em 24/08/2021, às 11:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Thaynara Arielly De Lima**, **Professora do Magistério Superior**, em 24/08/2021, às 11:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Tiago Moreira Vargas**, **Professor do Magistério Superior**, em 24/08/2021, às 11:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Valdivino Vargas Júnior**, **Professor do Magistério Superior**, em 24/08/2021, às 13:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2255842** e o código CRC **640FC52A**.

Referência: Processo nº 23070.041202/2021-16 SEI nº 2255842

Dedico este trabalho à minha mãe, ao meu namorado e a todos os meus familiares, pelo apoio e incentivo nesta caminhada.

Agradecimentos

A Deus por me conceder força, sabedoria e saúde para superar todas as dificuldades encontradas e conseguir realizar meus sonhos.

À minha mãe, pelo amor incondicional, por sempre acreditar em mim e ser minha base.

Ao meu namorado, por todo apoio, companheirismo e incentivo.

À toda minha família e amigos pelo apoio.

Ao professor Dr. Tiago Moreira Vargas, que me orientou, obrigada pelo conhecimento e dedicação.

Aos professores do PROFMAT/UFG, que ministraram disciplinas durante os dois anos, pelo comprometimento e conhecimento oportunizado. Aos demais professores que contribuíram para minha formação até aqui.

À toda minha turma de mestrado, que tem pessoas incríveis que sempre estão dispostas a ajudar. Em especial à Patrícia, Eber, Suzany e Mylena.

Aos professores da minha banca, por gentilmente terem aceito o convite e contribuírem com esta dissertação.

Por fim, a todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram com esta jornada, meus sinceros agradecimentos.

Resumo

Neste trabalho, abordamos os coeficientes binomiais, que são vistos no ensino básico na 2ª série do ensino médio, quando são apresentados aos alunos os conteúdos de análise combinatória. Ao serem apresentados os coeficientes binomiais os alunos estudam a definição e o surgimento destes coeficientes no Triângulo de Pascal e no Binômio de Newton. Com o objetivo de expor os coeficientes binomiais, apresentamos e demonstramos algumas de suas relevantes propriedades e algumas de suas extensões. Inicialmente, apresentamos os princípios de contagem, após expomos a definição dos coeficientes binomiais e suas propriedades, apresentamos também a relação desses coeficientes com a sequência de Fibonacci e o Teorema de Lucas. Além disso, propomos algumas atividades que podem ser utilizadas pelo professor de matemática do ensino médio que utilizam os coeficientes binomiais assim como suas propriedades. Finalizamos com uma construção do Triângulo de Pascal e do desenvolvimento do Binômio de Newton no Geogebra que pode ser utilizado pelo professor durante a apresentação destes conteúdos.

Palavras-chave: Coeficientes binomiais. Triângulo de Pascal. Binômio de Newton. Ensino médio.

Abstract

In this work, we approach the binomial coefficients, which are seen in basic education in the 2nd grade of high school, when students are presented with the contents of combinatorial analysis. When binomial coefficients are presented, students study the definition and emergence of these coefficients in the Triangle of Pascal and Newton's Binomial. In order to expose the binomial coefficients, we present and demonstrate some of their relevant properties and some of their extensions. Initially, we present the counting principles, after exposing the definition of the binomial coefficients and their properties, we also present the relationship of these coefficients with the Fibonacci sequence and the Lucas Theorem. In addition, we propose some activities that can be used by the high school mathematics teacher that use the binomial coefficients as well as their properties. We finish with a construction of the Pascal Triangle and the development of the Newton Binomial in the Geogebra that can be used by the teacher during the presentation of these contents.

Keywords: Binomial coefficients. Pascal's triangle. Newton's binomial. High school.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

A contagem sempre esteve presente na vida do homem. Em relação aos números de contagem, temos os coeficientes binomiais ou números binomiais que estão presentes em conteúdos de análise combinatória como triângulo de Pascal, binômio de Newton e em outras áreas da matemática como probabilidade, teoria dos números, entre outras. Este conteúdo é enriquecedor devido as suas inúmeras propriedades.

O primeiro contato dos alunos da educação básica com a definição dos coeficientes binomiais acontece no ensino médio, quando são apresentados para os alunos os conteúdos de análise combinatória. Tais conteúdos são mencionados por professores da educação básica em uma matéria da revista Cáculo - matemática para todos [13], como um dos assuntos que menos gostam de ensinar. Precisamos mudar este pensamento a respeito dos conteúdos de análise combinatória e torná-los um assunto que desperta o interesse e a imaginação dos alunos.

Desta maneira, o objetivo geral do presente trabalho é apresentar os coeficientes binomiais, expondo algumas de suas propriedades e propor algumas atividades para o ensino médio.

Para tal, foram delineados os seguintes objetivos específicos: listar as principais técnicas de contagem para as demonstrações combinatórias; apresentar os números binomiais; demonstrar algumas das propriedades dos coeficientes binomiais; expor a expansão binomial e multinomial; relatar algumas extensões dos coeficientes binomiais e apresentar atividades sobre este tema.

Desta forma, o trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo, são apresentados os conceitos básicos da análise combinatória e retratamos as definições para os princípios de contagem, apresentando exemplos para melhor compreensão. No segundo capítulo, abordamos a definição dos coeficientes binomiais, realizamos demonstrações por argumento combinatório que consiste em provarmos que os dois lados de uma igualdade contam a mesma quantidade, por definição algébrica e pelo método do princípio de indução finita, algumas propriedades binomiais clássicas. Ilustramos tais propriedades no triângulo de Pascal, apresentamos o desenvolvimento do Binômio de Newton e expomos os coeficientes multinomiais e o teorema multinomial.

No terceiro capítulo, expomos sobre os números de Fibonacci e a sequência de Fibonacci relacionando com os coeficientes binomiais e o aparecimento desta sequência no triângulo de Pascal. Demonstramos o Teorema de Lucas no qual temos uma conexão entre duas grandes áreas da Matemática a Análise Combinatória e a Teoria dos

Números. Este teorema nos auxilia calcular, coeficientes binomiais módulo primo por meio do produto de coeficientes binomiais formados pelos dígitos da expansão em base do número primo e ao considerarmos os coeficientes binomiais dispostos no triângulo de Pascal módulo 2 conseguimos visualizar o surgimento de um interessante padrão.

No quarto capítulo, apresentamos como os conteúdos que envolvem os coeficientes binomiais estão inseridos nas diretrizes curriculares, e propomos algumas atividades a serem aplicadas no ensino médio que utilizam os coeficientes binomiais. Finalizamos com uma construção do Triângulo de Pascal e o desenvolvimento do Binômio de Newton utilizando o software Geogebra.

1 Análise Combinatória

A Análise Combinatória visa desenvolver métodos e técnicas para solucionar problemas relacionados a contagem, estabelecendo um estudo das combinações e possibilidades por meio de um conjunto de elementos. "De maneira mais geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas" ([8] p. 1). Além de ser uma parte fundamental da Matemática Discreta, ela tem uma grande relevância para o desenvolvimento da probabilidade. Atualmente a Análise Combinatória possui diversas aplicações práticas e teóricas em jogos, economia, biologia, química e outras áreas do conhecimento.

Nesta seção abordamos os princípios básicos da contagem que serão válidos para as demonstrações nas seções seguintes tais como: princípio aditivo e multiplicativo, arranjo, permutação, combinação, permutação com elemento repetido, permutação circular e combinação completa.

1.1 Princípios de Contagem

A contagem de elementos é realizada desde os primórdios de forma direta e indireta, de acordo com [8] o primeiro contato das pessoas com a Matemática sucedeu através das técnicas de contagem. Desde cedo as crianças aprendem a enumerar os números e depois começam a identificar a relação de ordem existente neles, e por meio dos problemas de contagem conhecem as operações aritméticas. Dois princípios básicos de contagem bastante utilizados são intitulados como Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo.

1.1.1 Princípio Aditivo

A primeira técnica básica de contagem é conhecida como Princípio Aditivo, que pode ser enunciado da seguinte forma:

"Sejam A e B dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$), com r e s elementos, respectivamente. Então $A \cup B$ possui $r + s$ elementos ($|A \cup B| = |A| + |B|$)."

Este princípio é bastante aplicado em problemas que podem ser divididos em casos distintos, conforme podemos ver no exemplo a seguir:

Exemplo 1.1. *No refeitório há 7 salgados diferentes e 4 tipos de bolos diferentes. De quantas maneiras uma pessoa pode escolher somente uma quitanda de lanche para comprar?*

Solução: A pessoa pode escolher um tipo de salgado ou um tipo de bolo e como há 7 possibilidades na escolha do salgado e 4 possibilidades na escolha do bolo, segue que uma pessoa tem $7+4 = 11$ maneiras de escolher um lanche para comprar no refeitório.

O Princípio Aditivo pode ser generalizado para um número finito de conjunto desde que sejam disjuntos:

"Considere os conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$, disjuntos dois a dois, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$ com $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ elementos respectivamente. Então o número de maneiras de escolher um elemento de um dos conjuntos é o número de elementos da união desses conjuntos $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \sum_{i=1}^{m} |A_i|$ elementos."

Exemplo 1.2. *Considere que numa biblioteca há 3 livros diferentes de geografia, 6 livros diferentes de história e 5 livros diferentes de matemática. Um aluno tem a permissão para pegar emprestado exatamente um livro. De quantas formas poderá um aluno escolher qual livro irá pegar emprestado?*

Solução: Como o aluno pode escolher apenas um livro, então ele pode escolher um de geografia, ou um de história ou um de matemática. Como na biblioteca há 3 possibilidades de escolha para o livro de geografia, 6 possibilidades para o livro de história e 5 possibilidades para o livro de matemática, a escolha de exatamente um livro pode ser feita de $3 + 6 + 5 = 14$ maneiras.

1.1.2 Princípio Multiplicativo

Princípio Multiplicativo também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem, é enunciado por [8] da seguinte maneira:

"Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$."

Este princípio é utilizado em problemas onde as tarefas podem ser realizadas separadamente. O exemplo a seguir ilustra o princípio multiplicativo:

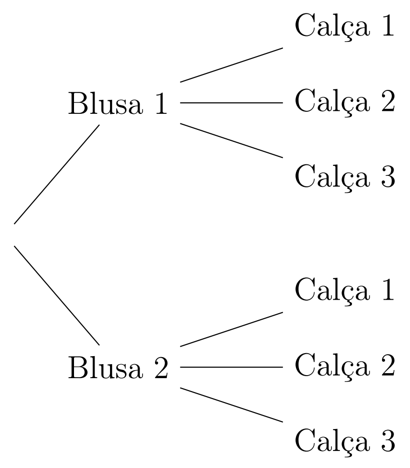
Exemplo 1.3. *De quantas maneiras pode-se vestir uma pessoa que tenha duas blusas e três calças?*

Solução: Para que a pessoa possa se vestir há duas ações a serem realizadas, a primeira escolher uma blusa e a segunda escolher uma calça, para escolher uma blusa tem-se 2 possibilidades e para escolher uma calça 3 possibilidades, sendo assim pelo princípio multiplicativo esta pessoa possui $2 \cdot 3 = 6$ maneiras para se vestir.

Um método que mostra com clareza todas as opções possíveis num problema de contagem é chamado **diagrama de árvore de decisão**. Nele temos de forma estruturada e enumerada todas as decisões possíveis para um problema de escolha. [10]

A Figura 1 mostra um exemplo de árvore de decisão com relação ao Exemplo 1.3.

Figura 1: Diagrama de árvore de decisão



Fonte: Elaboração própria

O diagrama de árvore começa no nível zero onde não é tomada nenhuma decisão, no primeiro nível é apresentado as possibilidades que há para a primeira escolha ser tomada, que neste caso do exemplo é escolher entre duas blusas, uma para se vestir e no segundo nível, independente da escolha feita na primeira decisão é apresentado as possibilidades de realizar a segunda ação que é a escolha da calça. O último nível evidencia o total de possibilidades de escolhas possíveis para se realizar a atividade solicitada. Este método é mais viável em problemas com poucas possibilidades, pois quando o número de possibilidades é elevado, construir um diagrama de árvore se torna exaustivo.

O princípio multiplicativo pode ser generalizado para um número finito qualquer de ações a serem executadas:

"Ao realizar uma atividade que pode ser dividida em P_m ações, tendo cada ação P_i, com $1 \leq i \leq m$ podendo ser feitas de q_i maneiras, independente das escolhas que foram feitas nas P_h ações anteriores, com $1 \leq h < i \leq m$ então há $q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_m$ maneiras de executar a atividade."

Exemplo 1.4. *O novo modelo de placas instituído no Brasil conhecido como Placas Mercosul, seguem um novo padrão, tendo uma sequência estabelecida de 3 letras, 1 número, 1 letra e 2 números. De quantas formas podemos escolher os símbolos de uma placa, de acordo com este novo modelo?*

Solução: Para escolher os símbolos de uma placa Mercosul precisamos fazer ações independentes, primeiramente temos que escolher 3 letras, depois 1 número, novamente 1 letra e por fim 2 números. Há 26 possibilidades de escolha para as letras e 10 possibilidades para os números, temos assim pelo princípio multiplicativo um total de $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 456.976.000$ formas para escolher os símbolos de uma placa Mercosul.

Outra forma de ilustrar o príncipio multiplicativo é atráves da linguagem de conjuntos:

"Sejam A e B dois conjuntos não vazios com cardinalidade x e y respectivamente. O produto cartesiano $A \times B$ é formado pelos pares ordenados (r, s) tais que $r \in A$ e $s \in B$. Assim $|A \times B| = |A| \cdot |B| = x \cdot y$."

Este mesmo raciocínio pode ser estendido para n conjuntos finitos:

"Sejam conjuntos finitos não vazios $A_1, A_2, \ldots, A_n$, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$ é o conjunto formado pelas n-uplas ordenadas $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ tais que $a_i \in A_i$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Temos assim: $|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot \ldots \cdot |A_n|$."

Exemplo 1.5. *Quantas Placas Mercosul poderiam ser formadas caso fosse proibido a repetição de letras e números?*

Solução: Como neste caso não pode haver repetição, para escolher as três primeiras letras temos: 26 possibilidades de escolha para a primeira, 25 possibilidades para a segunda e 24 possibilidades para a terceira letra, pela sequência a próxima escolha é para um número no qual temos 10 possibilidades e depois escolhemos mais um letra, como já foram feitas 3 escolhas para as letras e não pode haver repetição, temos 23 escolhas possíveis para escolher esta letra e para escolher os dois números temos 9 possibilidades para o primeiro e 8 para o segundo. Assim temos um total de $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 23 \cdot 9 \cdot 8 = 258.336.000$ placas.

1.2 Arranjo

A seguir, enunciamos a fórmula para cálculo do número de sequências ordenadas de elementos de um determinado conjunto. Por exemplo, ao criarmos uma senha de 3 dígitos, as senhas 123 e 321 são consideradas duas senhas diferentes.

Antes de apresentá-la definimos o fatorial de um número natural. Temos que dado um número natural n o fatorial de n simbolizado por $n!$ é o produto de todos os números naturais de 1 até n, portanto $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Por definição, $0! = 1$. [8]

Definição 1.1. *Seja A um conjunto não vazio com n elementos. Denomina-se arranjo simples dos n elementos tomados p a p com $1 \leq p \leq n$, cada agrupamento ordenado de p elementos diferentes escolhidos entre os n elementos distintos.*

O número de arranjo simples é dado pela seguinte fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Iremos deduzir essa fórmula atráves do princípio multiplicativo para caracterizar o arranjo simples. Consideremos a seguinte situação:

Exemplo 1.6. *Quantas filas de p lugares é possível organizar tendo n elementos distintos?*

Solução: Neste problema temos n elementos com os quais queremos preencher p lugares, para resolvê-lo iremos dividir em etapas:

1ª etapa: escolher o elemento para ocupar a 1ª posição da fila, nesta etapa temos n elementos disponíveis para está escolha, portanto, temos n maneiras diferentes de escolher o elemento.

2ª etapa: iremos escolher o elemento para ocupar a 2ª posição da fila, como já foi feita uma escolha de elemento para ocupar a 1ª posição da fila, temos $n-1$ possibilidades de escolha para essa etapa.

3ª etapa: após o preenchimento da 2ª posição da fila, temos que há $n-2$ possibilidades de escolhas para a 3ª posição da fila.

Analogamente, iremos continuar com este mesmo raciocínio até a p-ésima etapa, onde iremos escolher o p-ésimo elemento, como temos n elementos para serem organizados na fila e $p-1$ elementos já foram escolhidos nas etapas anteriores, há $n-(p-1)$ possibilidades, ou seja, temos $n-p+1$ maneiras de escolher o elemento que ocupará a p-ésima posição da fila.

Pelo princípio multiplicativo temos que as posições na fila podem ser organizadas de $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$ maneiras diferentes, assim:

$$A_{n,p} = n.(n-1).(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Multiplicando e dividindo o segundo menbro da igualdade por $(n-p)!$, temos:

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

A seguir, temos alguns exemplos para ilustrar a técnica de contagem mencionada acima.

Exemplo 1.7. *Quantos números de quatro algarismos, podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?*

Solução: Temos que escolher ordenadamente 4 algarismos distintos entre os 9 algarismos disponíveis, ou seja, temos 9 elementos para serem arranjados 4 a 4. Pela fórmula do arranjo simples temos:

$$A_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5}!}{\cancel{5}!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3.024$$

números de 4 algarismos diferentes que podem ser escritos com os algarismos de 1 a 9.

Exemplo 1.8. *Uma corrida de rua realizada todos os anos tem premiação para os três primeiros colocados. No ano de 2019 houveram 60 participantes. De quantas maneiras distintas podemos obter as três primeiras classificações para a corrida que aconteceu em 2019, sabendo que não houve empate?*

Solução: Dentre os 60 participantes da corrida apenas os 3 primeiros irão ganhar premiação, temos assim:

$$A_{60,3} = \frac{60!}{(60-3)!} = \frac{60!}{57!} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot \cancel{57!}}{\cancel{57!}} = 60 \cdot 59 \cdot 58 = 205.320$$

maneiras possíveis para os 3 primeiros colocados.

1.3 Permutação

Permutação é uma técnica de contagem que é decorrência do arranjo. Cada permutação dos n elementos consite em um arranjo simples dos n elementos, tomados n a n. De acordo com [12] uma permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, representado por P_n. O número de permutações simples dos n objetos, é dado por

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Exemplo 1.9. *De quantas maneiras podemos ordenar numa fila 8 pessoas, sendo 3 mulheres e 5 homens, supondo que as mulheres devem ficar no ínicio da fila?*

Solução: Inicialmente devemos ordenar as mulheres que ficarão no ínicio da fila. Isso pode ser feito de $P_3 = 3! = 6$. Em seguida devemos ordenar os homens. Isso pode ser feito de $P_5 = 5! = 120$ maneiras. Assim, pelo princípio multiplicativo existem $P_3 \cdot P_5 = 6 \cdot 120 = 720$ maneiras de ordenar uma fila como pedido no enunciado.

Denomina-se *anagrama* qualquer palavra obtida permutando as letras de uma palavra original, não precisando ter um significado na língua portuguesa, sendo esta palavra considerada como qualquer sequência de letras. Toda palavra é tida como um anagrama dela mesma, pois na permutação as letras podem ficar na mesma ordem que estavam orginalmente. Quando temos uma palavra formada por n letras distintas a quantidade de anagramas dessa palavra será $P_n = n!$. [8]

Exemplo 1.10. *Qual o número de anagramas da palavra CONTAGEM?*

Solução: A palavra CONTAGEM é formada por 8 letras distintas, deste modo a quantidade de anagramas dessa palavra é $P_8 = 8! = 40.320$.

1.4 Combinação

Combinação é uma técnica de contagem que surge como consequência dos arranjos e permutações. Aqui, contamos o número de subconjuntos de p elementos distintos que podem ser formados a partir de um conjunto com n elementos distintos ($p \leq n$). Na combinação a ordem dos elementos não é relevante, ou seja, trocar a ordem dos elementos não estabelece outra combinação. Por exemplo, duplas formadas a partir de um grupo de pessoas, João e Maria ou Maria e João, são consideradas a mesma dupla. [12]

$C_{n,p}$ representa a quantidade de combinações de n elementos tomados p a p, com $0 \leq p \leq n$. A fórmula para calcular $C_{n,p}$, é dada por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplo 1.11. *Um professor elaborou uma prova contendo 15 questões sobre o conteúdo estudado e na hora da prova informou aos alunos que poderiam escolher 10 questões para responder. De quantas maneiras um aluno pode escolher quais questões irá responder?*

Solução: O aluno tem que escolher 10 questões entre as 15 questões dadas, que corresponde a

$$C_{15,10} = \frac{15!}{10!(15-10)!} = \frac{15!}{10! \cdot 5!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!} \cdot 5!} = \frac{360360}{120} = 3.003$$

maneiras.

Exemplo 1.12. *(ENQ-PROFMAT - 2016/2) De quantas maneiras distintas podemos escolher três números do conjunto $I_{40} = \{x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq 40\}$, de modo que a sua soma seja:*

a) Um número ímpar?

b) Um múltiplo de 3?

Solução: a) Há duas possibilidades para que a soma de 3 números do conjunto I_{40} dê um número ímpar:

i) Os três números serem ímpares;

ii) Apenas um número é ímpar.

O conjunto I_{40} possui 20 números ímpares, logo para escolhermos três números ímpares distintos temos: $C_{20,3} = \dfrac{20!}{3!(20-3)!} = \dfrac{20!}{3!17!} = 1.140$ possibilidades.

Agora, para escolhermos apenas um número ímpar e dois números pares temos 20 números ímpares e precisamos selecionar 1, ou seja, $C_{20,1} = \dfrac{20!}{1!19!} = 20$ maneiras e o conjunto I_{40} possui 20 números pares no qual precisamos selecionar 2, assim temos $C_{20,2} = \dfrac{20!}{2!(20-2)!} = \dfrac{20!}{2!18!} = 190$. Logo, pelo princípio multiplicativo temos, $20 \cdot 190 = 3.800$ maneiras de escolher um número ímpar e dois pares no conjunto I_{40}.

Portanto, pelo princípio aditivo, existem $1140 + 3800 = 4.940$ possibilidades de escolher 3 números do conjunto I_{40} cuja soma é um número ímpar.

Solução: b) Para obtermos um múltiplo de 3, somando três números do conjunto I_{40}, temos 4 possibilidades:

i) Três múltiplos de 3;

ii) Três números da forma $3k + 1$;

iii) Três números da forma $3k + 2$;

iv) Três números de formas distintas $3k, 3k + 1$ e $3k + 2$.

O conjunto I_{40} possui 13 números múltiplos de 3 que são: $\{3, 6, 9, \ldots, 36, 39\}$. Para selecionarmos três números múltiplos de 3, temos $C_{13,3} = 286$ maneiras.

O conjunto I_{40} possui 14 números da forma $3k + 1$ que são: $\{1, 4, 7, \ldots, 37, 40\}$, para selecionarmos 3 números dessa forma, temos $C_{14,3} = 364$ maneiras.

O conjunto I_{40} possui 13 números da forma $3k + 2$ que são: $\{2, 5, 8, \ldots, 35, 38\}$, para selecionarmos 3 números dessa forma, temos $C_{13,3} = 286$ maneiras.

Para selecionarmos os três números de formas distintas $3k, 3k + 1$ e $3k + 2$, temos pelo princípio multiplicativo $13 \cdot 14 \cdot 13 = 2366$ possibilidades.

Portanto, pelo princípio aditivo, existem $286 + 364 + 286 + 2366 = 3.302$ maneiras possíveis de escolher três números do conjunto I_{40} cuja soma seja um múltiplo de 3.

1.5 Permutação com elementos repetidos

Uma permutação com elementos repetidos acontece quando desejamos contar uma lista de elementos, em que alguns desses elementos podem aparecer mais de uma vez. Aqui, queremos calcular o número de permutações de n objetos sendo n_1 objetos do tipo 1, n_2 objetos do tipo 2, ..., n_k objetos do tipo k, com $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. O número de permutações desse tipo é dado pela quantidade:

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

O denominador $n_1! \cdot \ n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!$ corresponde ao número de maneiras de permutar os objetos de cada tipo.

Exemplo 1.13. *[8] Qual o número de anagramas da palavra MATEMATICA?*

Solução: A palavra MATEMATICA tem 10 letras, sendo que a letra M é repetida 2 vezes, a letra A é repetida 3 vezes, e a letra T é repetida 2 vezes. Assim, o número de anagrama da palavra é dado por:

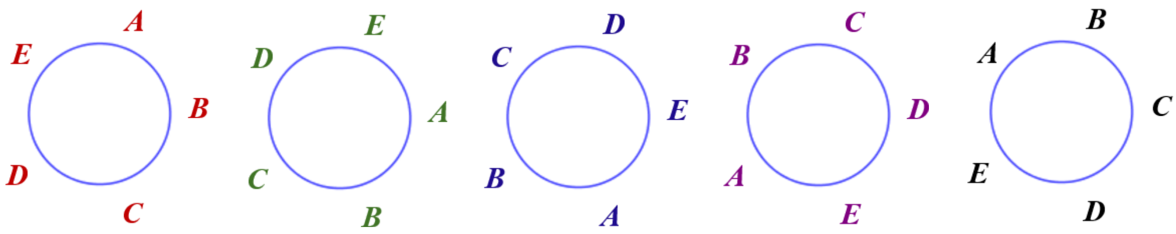
$$P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2! \cdot \ 3! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2! \cdot \ \cancel{3!} \cdot 2!} = \frac{604800}{4} = 151.200$$

1.6 Permutação Circular

Algumas ações são realizadas em estruturas do tipo circular. Por exemplo, uma artesã que confecciona pulseiras de miçangas, dispõe de 4 tipos diferentes de miçangas e deseja saber quantas pulseiras diferentes ela pode fabricar utilizando as miçangas disponíveis; ou ainda, uma pessoa deseja saber de quantas formas pode formar uma roda de ciranda com 6 crianças. Para responder estes tipos de questionamentos utilizamos as permutações circulares que se diferenciam das permutações simples, pois nas permutações circulares o que importa é a posição relativa dos objetos entre si e não os lugares que os objetos ocupam. [8]

Considere 5 pessoas que iremos representá-las por A, B, C, D e E. Caso essas 5 pessoas se sentem em um fila, temos $P_5 = 5! = 120$ maneiras de serem organizadas. Na fila cada posição como essas: (A, B, C, D, E), (E, A, B, C, D), (D, E, A, B, C), (C, D, E, A, B), (B, C, D, E, A) são consideradas de formas diferentes. Já essas mesmas configurações em uma mesa circular como podemos observar na Figura 2, são consideradas idênticas, pois elas são apenas uma rotação de uma mesma configuração.

Figura 2: Mesa circular



Fonte: Elaboração própria

O número de permutações circulares é representado por PC_n. A quantidade de permutações simples distintas que ocasiona permutações circulares iguais é n, pois se não fosse considerado iguais as disposições que coincidem por rotação, teríamos $n!$ disposições, desse modo temos que a quantidade de permutação circular é dada pela seguinte fórmula:

$$PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Exemplo 1.14. *[8] De quantos modos 5 meninas e 5 meninos podem formar uma roda de ciranda de modo que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?*

Solução: Primeiro vamos fazer uma permutação circular com as 5 meninas, isto é, $PC_5 = 4!$ modos de formar uma roda com as meninas. Depois disso, os 5 meninos devem ser postos nos lugares entre as meninas, o que pode ser feito de $5!$ modos. Assim o modo de formar uma ciranda com 5 meninas e 5 meninas de modo que as pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas é $4! \cdot 5! = 2.880$.

1.7 Combinação Completa

A combinação completa ou com repetição é utilizada em problemas de contagem, no qual temos que escolher p objetos dentre os n objetos dados ($p \leq n$), podendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez, isto é o que difere a combinação completa da combinação simples.

Na combinação simples escolhemos p objetos distintos entre n objetos distintos dados, já a combinação completa é o número de modos de escolhemos p objetos distintos ou não entre n objetos distintos dados. A combinação completa pode também ser exposta como o número de soluções inteiras não-negativas da equação linear da forma $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = p$. O número de combinações completas é representado por $CR_{n,p}$ [8]. O exemplo a seguir ilustra o caso geral para calcular o número de soluções inteiras não negativas:

Exemplo 1.15. *Quantas são as soluções inteiras não-negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = p$, onde n e p são números inteiros positivos dados?*

Solução: As soluções desta equação são dadas pelas maneiras de escolher p elementos, dentre n elementos permitindo haver repetições. Cada solução será representada por uma fila contendo dois símbolos, que serão mais $(+)$ e barra $(|)$. O símbolo de $+$ representa os valores das incógnitas e a $|$ é utilizada para separar as incógnitas.

O primeiro grupo dos símbolos de mais corresponde ao valor x_1, o segundo grupo corresponde ao valor de x_2 e assim até o n-ésimo grupo que corresponde ao valor de x_n. Para separarmos os n grupos devemos ter $n-1$ barras e temos de ter um total de p sinais de mais. Assim é feita a correspondência biunívoca entre as disposições dos sinais de mais e das barras com as soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = p$.

Deste modo, temos um total de $[p + (n-1)] = n + p - 1$ posições para colocar p sinais de mais $(+)$, ou seja, basta escolher p dentre os $n + p - 1$ lugares para colocar os sinais de mais $(+)$. Assim, a quantidade de filas formadas seguindo esta regra é:

$$C_{(n+p-1,p)} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Desta forma, há $C(n+p-1, p)$ soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = p$. Assim,

$$CR_{n,p} = C_{n+p-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Exemplo 1.16. *(ENQ-PROFMAT - 2019/2)*
a) Determine o número de soluções inteiras não negativas da equação $x+y+z+t = 98$.
b) Determine o número de soluções inteiras não negativas da inequação $x+y+z \leq 98$.

Solução: a) Cada solução da equação $x + y + z + t = 98$ pode ser representada por um fila de 98 sinais $+$ e 3 sinais de $|$ que separam as incógnitas e a quantidade de $+$ indica o valor númerico de cada incógnita, cada fila desta forma corresponde a uma solução da equação. Dessa maneira, a solução (29, 37, 0, 32) corresponde a seguinte fila: $\underbrace{++++\cdots+}_{29}|\underbrace{++++\cdots+}_{37}||\underbrace{++++\cdots+}_{32}$. Para contar a quantidade de tais filas, basta escolher 98 dentre os $98 + 3 = 101$ lugares para colocar os sinais de $+$. Isso pode ser feito de $C_{101,98}$ maneiras, ou seja, $\dfrac{101!}{98!3!} = 166.650$ são as soluções da equação $x + y + z + t = 98$.

Solução: b) Em cada solução inteira não negativa de $x + y + z \leq 98$ definimos a folga da solução por $t = 98 - (x + y + z)$. Assim, existe uma correspondência biunívoca entre as soluções inteiras não negativas de $x + y + z \leq 98$ e as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + t = 98$. Portanto, o número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z \leq 98$ é igual a 166.650.

2 Coeficientes Binomiais

Nesta seção discorremos sobre os coeficientes binomiais, triângulo de Pascal, demonstramos algumas das importantes identidades binomiais, apresentamos o Binômio de Newton e sua generalização, o Teorema Multinomial.

Os coeficientes binomiais ou números binomiais representam a quantidade de escolhas de p elementos entre n elementos distintos. Eles são representados pela seguinte notação: $\binom{n}{p}$ que foi "introduzida pelo matemático e físico alemão Barão Andreas von Ettinghausen (1796-1878)"([4], p.14). A leitura desta notação é combinação de n termos tomados p a p, onde n representa a ordem e p a classe do número binomial, com $n \geq p$ e $n, p \in \mathbb{N}$, assim temos:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Pela definição dada, temos a seguir alguns números binomiais:

i. $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{0! \cdot n!} = 1.$

ii. $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \dfrac{n \cdot (n-1)!}{1! \cdot (n-1)!} = n$, para $n \geq 1$.

iii. $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Os números binomiais possuem a mesma definição da combinação simples, ou seja, $C_{n,p} = \binom{n}{p}$, deste modo pode-se utilizar a notação entre parênteses para representar uma combinação simples, entretanto os livros didáticos do ensino básico no Brasil utlizam mais a notação $C_{n,p}$. Já a notação $\binom{n}{p}$ é muito utilizada nos livros de ensino superior. [9]

Evidenciaremos os resultados dos números binomiais apresentados acima utilizando o argumento combinatório. Seja um conjunto A com n elementos a quantidade de subconjuntos com p elementos do conjunto A que teremos é:

- Considerando $p = 0$, temos um subconjunto sem elementos do conjunto A, ou seja, um subconjunto vazio.

- Considerando $p = 1$, temos n subconjuntos com 1 elemento do conjunto A, ou seja, n subconjuntos unitários.

- Considerando $p = n$, temos um subconjunto com n elementos do conjunto A, ou seja, o subconjunto é o próprio conjunto A.

A seguir enfatizamos um triângulo muito importante, que tem várias finalidades na matemática, ele é conhecido por diferentes nomes ao redor do mundo como: Triângulo de Yang Hui, Triângulo de Tartaglia, Triângulo de Tartaglia-Pascal ou Triângulo de Pascal. Através dele discutimos algumas propriedades dos coeficientes binomiais.

2.1 Triângulo de Pascal

Triângulo de Pascal é um triângulo aritmético infinito formado por uma tabela constituída pelos coeficientes binomiais $\binom{n}{p}$ onde n representa a linha e p a coluna. Ele recebe esse nome em homenagem ao matemático francês Blaise Pascal devido o desenvolvimento e aplicações que ele fez de várias propriedades do triângulo, e por ter sido considerado por vários anos o idealizador do triângulo arirmético, mas ele não foi o primeiro a descobrir, pois alguns séculos antes os chineses já haviam o desenvolvido. Em 1665 Pascal publicou uma obra intitulada *"Traité di Triangle Arithmétique"* onde enuncia e demonstra propriedades do triângulo aritmético. [5]

Há duas formas de representar o Triângulo de Pascal que pode ser de forma assimétrica sem colunas verticais e de forma simétrica com as colunas verticais, a Tabela 1 a seguir, apresenta o Triângulo de Pascal com coeficientes binomiais de forma assimétrica.

Tabela 1: Triângulo de Pascal de coeficientes binomiais

	0	1	2	3	4	5	6	7	...	$p-1$	p	$p+1$	...
0	$\binom{0}{0}$												
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$											
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$										
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$									
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$								
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$							
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$						
7	$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						...				...
$n-1$	$\binom{n-1}{0}$	$\binom{n-1}{1}$	$\binom{n-1}{2}$			...				$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$	$\binom{n-1}{p+1}$	
n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$			...				$\binom{n}{p-1}$	$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$	...
$n+1$	$\binom{n+1}{0}$	$\binom{n+1}{1}$	$\binom{n+1}{2}$			...				$\binom{n+1}{p-1}$	$\binom{n+1}{p}$	$\binom{n+1}{p+1}$	
$\vdots$		...		...					...				...

Fonte: Elaboração própria

De acordo com a tabela acima a construção do Triângulo de Pascal é feita com a seguinte configuração:

- A primeira coluna (vertical) da tabela representa a ordem das linhas e a primeira linha (horizontal) da tabela representa a ordem das colunas, sempre iniciadas no número 0, sendo assim escreve-se o coeficiente binomial $\binom{n}{p}$ na n-ésima linha e p-ésima coluna.

- Os coeficientes binomais de mesmo numerador ocupam a mesma linha e os de mesmo denominador ocupam a mesma coluna, desta forma a linha $n+1$ representa todos os coeficientes binomiais a começar de $\binom{n+1}{0}$ até $\binom{n+1}{p+1}$.

A seguir, temos a Tabela 2 que apresenta o Triângulo de Pacal de valores numéricos, onde cada coeficiente binomial é calculado através da definição já apresentada dos números binomiais.

Tabela 2: Triângulo de Pascal de valores numéricos

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$\vdots$		...			...					...

Fonte: Elaboração própria

Para facilitar a contrução do Triângulo de Pascal de valores numéricos, apresentamos algumas características importantes:

- O primeiro e o último elemento de cada linha é sempre 1, pois seja qual for a linha, o primeiro elemento é do tipo $\binom{n}{0} = 1$ e o último elemento exceto o da primeira linha é do tipo $\binom{n}{n} = 1$.
- Cada elemento com exceção do primeiro e último a partir da 3ª linha é obtido através da soma de dois elementos da linha anterior, sendo o elemento que esta imediatamente acima dele e o elemento que esta localizado à esquerda.
- Em uma mesma linha, dois coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais.
- Uma linha n do Triângulo de Pascal possui $n+1$ termos.

Enfatizamos a seguir, algumas identidades dos coeficientes binomiais fazendo suas demonstrações através do argumento combinatório e em algumas delas faremos também a demonstração pelo método algébrico, essas identidades são muito relevantes para a construção do Triângulo de Pascal.

2.1.1 Binomiais Complementares

Uma das características que já vimos do Triângulo de Pascal é que em uma linha, dois coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais. Esses coeficientes binomiais recebem o nome de binomiais complementares.[8]

Proposição 2.1. *Sejam n e p números inteiros, tais que $0 \leq p \leq n$. Então:*

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Demonstração. Escolhermos p elementos dentre um conjunto com n elementos disponíveis para formar um subconjunto, é equivalente a escolhermos $n-p$ elementos dentre n elementos que não farão parte do subconjunto, desta forma há uma correspondência biunívoca de subconjuntos com p elementos e $n-p$ elementos.

Algebricamente temos: $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-p)! \cdot p!} = \binom{n}{n-p}$ ■

Podemos visualizar essa proposição no Triângulo de Pascal da Tabela 3 a seguir:

Tabela 3: Coeficientes Binomiais Complementares

(a) Triângulo de Pascal Coeficientes Binomiais

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\binom{0}{0}$						
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$

(b) Triângulo de Pascal de Valores

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Fonte: Elaboração própria

Nas tabelas apresentadas anteriormente temos dois Triângulo de Pascal, no qual podemos observar na Tabela (a) que na linha 5 os coeficientes binomiais das colunas 1 e 4 satisfazem a Proposição 2.1, sendo assim eles são coeficientes binomiais complementares. Para uma melhor visualização, eles estão destacados na cor rosa escuro. Na mesma linha, temos os coeficientes binomiais complementares nas colunas 2 e 3 que estão descatados de amarelo, de modo consequente, temos na linha 6 alguns pares de coeficientes binomiais complementares destacados.

Na Tabela (b) temos os valores dos coeficientes binomiais nos quais podemos perceber que na linha 5 os elementos das colunas 1 e 4 são iguais, equidistantes dos extremos e estão destacados na mesma cor dos respectivos coeficientes binomiais da Tabela (a). Nesta mesma linha, temos os elementos das colunas 2 e 3 que também são iguais e equidistantes dos extremos.

Mediante a Proposição 2.1 podemos perceber a existência de uma simetria dos coeficientes binomiais no Triângulo de Pascal, visto que em uma mesma linha a distribuição deles da direta para a esquerda é equivalente da esquerda para a direita.

2.1.2 Relação de Stifel

A relação de Stifel é uma identidade muito importante que auxilia na construção do Triângulo de Pascal, facilita na resolução de problemas e pode ser usada para definir recursivamente os coeficientes binomiais. Ela evidencia que a soma de dois coeficientes binomiais adjacentes em uma mesma linha, resulta no coeficiente binomial da próxima linha abaixo do último coeficiente somado. [10]

Proposição 2.2. *(Relação de Stifel) Sejam n e p números inteiros tais que $p \leq n$, vale que*

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Demonstração. Pela definição dos coeficientes binomiais, temos que $\binom{n}{p}$ determina a quantidade de subconjuntos com p elementos que podemos formar de um conjunto com n elementos. Podemos contar a quantidade destes subconjuntos de outra maneira, dividindo eles em dois casos distintos e olhando para um elemento a específico do conjunto de n elementos. Dessa forma, temos os seguintes grupos:

A = Os subconjuntos que contém o elemento a.

B $=$ Os subconjuntos que não contém o elemento a.

O grupo A terá o elemento a em todo subconjunto formado, logo restam $p-1$ elementos para serem escolhidos, dentre $n-1$ elementos disponíveis para formar o subconjunto e isso pode ser feito de $\binom{n-1}{p-1}$ maneiras.

O grupo B não terá o elemento a nos subconjuntos formados, assim temos $n-1$ elementos disponíveis para formar p subconjuntos e isso pode ser feito de $\binom{n-1}{p}$ maneiras.

Pelo princípio aditivo temos: $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

Portanto, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ ■

Algebricamente temos:

$$\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{p! \cdot (n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)! \cdot (n \cancel{-1} - p \cancel{+1})!} =$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot (p-1)! \cdot (n-p)! + (n-1)! \cdot p! \cdot (n-1-p)!}{p! \cdot (n-1-p)! \cdot (p-1)! \cdot (n-p)!}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot \cancel{(p-1)!} \cdot (n-p)! + (n-1)! \cdot p \cdot \cancel{(p-1)!} \cdot (n-1-p)!}{p! \cdot (n-1-p)! \cdot \cancel{(p-1)!} \cdot (n-p)!}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot (n-p) \cdot \cancel{(n-p-1)!} + (n-1)! \cdot p \cdot \cancel{(n-p-1)!}}{p! \cdot \cancel{(n-p-1)!} \cdot (n-p)!}$$

$$= \frac{(n-1)![n-p+p]}{p! \cdot (n-p)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{p! \cdot (n-p)!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = \binom{n}{p}$$

Na Tabela 4 a seguir, podemos verificar a relação de Stifel no Triângulo de Pascal, ela da a base para um arranjo geométrico dos coeficientes binomiais em forma de triângulo.

Tabela 4: Relação de Stifel

(a) Triângulo de Pascal Coeficientes Binomiais

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\binom{0}{0}$						
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}+$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}+$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$=\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$

(b) Triângulo de Pascal de Valores

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6 +	4	1		
5	1	5 +	10	10	5	1	
6	1	6	=15	20	15	6	1

Fonte: Elaboração própria

Nas tabelas acima temos destacados duas relações de Stifel, na linha 4 (destacado de verde) temos a soma dos coeficientes binomiais das colunas 2 e 3, que resulta no coeficiente binomial da linha 5 coluna 3 e na linha 5 (destacado de azul), temos a soma dos coeficientes binomiais das colunas 1 e 2, que resulta no coeficiente binomial da linha 6 coluna 2. A partir da segunda linha, através da relação de Stifel a contrução do Triângulo de Pascal torna-se mais fácil e prática, sem termos a necessidade de decorar todos os seus termos.

Em seguida, temos um exemplo de resolução de exercício utilizando a relação de Stifel.

Exemplo 2.1. *(IME/2016 - Adaptado) Qual o valor da soma abaixo?*

$$\binom{2016}{5}+\binom{2017}{5}+\binom{2018}{5}+\binom{2019}{5}+\binom{2020}{5}+\binom{2016}{6}$$

Solução: Iremos fazer uso extensivo da relação de Stifel: $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}$.

$$\underbrace{\binom{2016}{5}+\binom{2016}{6}}+\binom{2017}{5}+\binom{2018}{5}+\binom{2019}{5}+\binom{2020}{5}=$$

$$=\underbrace{\binom{2017}{6}+\binom{2017}{5}}+\binom{2018}{5}+\binom{2019}{5}+\binom{2020}{5}$$

$$= \underbrace{\binom{2018}{6} + \binom{2018}{5}} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5}$$

$$= \underbrace{\binom{2019}{6} + \binom{2019}{5}} + \binom{2020}{5}$$

$$= \binom{2020}{6} + \binom{2020}{5} = \binom{2021}{6}$$

2.1.3 Teorema das Linhas

O Teorema das Linhas apresenta uma forma muito eficiente de calcularmos a soma dos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal, no qual a soma de todos os elementos da linha n do Triângulo de Pascal é igual a 2^n. [8]

Proposição 2.3. *Sejam n e p números inteiros, tais que $0 \leq p \leq n$. Então:*

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Demonstração. Consideremos um conjunto com n elementos. Para formar subconjuntos desse conjunto, temos que cada elemento a qualquer tem duas possibilidades: o elemento a pode estar no subconjunto ou o elemento a pode não estar no subconjunto. Assim cada elemento tem 2 possibilidades e pelo princípio multiplicativo temos $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$ maneiras distintas.

Podemos determinar de outro modo o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos. Sabemos que $\binom{n}{p}$ é o número de maneiras de escolhermos p elementos dentre n elementos de um conjunto. Dividindo em casos distintos a quantidade de subconjuntos temos:

- Escolher um subconjunto vazio temos $\binom{n}{0}$ maneiras.
- Escolher um subconjunto com 1 elemento temos $\binom{n}{1}$ maneiras.
- Escolher um subconjunto com 2 elemento temos $\binom{n}{2}$ maneiras.
- Escolher um subconjunto com 3 elemento temos $\binom{n}{3}$ maneiras.

E, assim sucessivamente, até escolhermos um subconjunto com n elementos dentre os n elementos disponíveis, ou seja, teremos $p = n$ e isso pode ser feito de $\binom{n}{n}$ maneiras.

Pelo princípio aditivo, temos

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n}$$

subconjuntos. Portanto em um conjunto com n elementos temos um total de 2^n subconjuntos distintos. ■

Fazendo a demonstração dessa proposição atráves do Princípio de Indução Finita, temos:

Demonstração.

i) A igualdade é válida para $n = 0$, pois

$$\binom{0}{0} = 1 = 2^0$$

ii) Suponhamos que o resultado seja válido para algum n, isto é

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

iii) Demonstraremos que o resultado é válido para $n + 1$.

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{4} + \ldots + \binom{n+1}{n+1}$$

Pela Relação de Stifel (Proposição 2.2), temos que

$$\binom{n+1}{1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}$$

$$\binom{n+1}{2} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n+1}{n} = \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Temos assim,

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{4} + \ldots + \binom{n+1}{n+1} =$$

$$\binom{n+1}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] + \ldots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] + \binom{n+1}{n+1}$$

Pelo fato de $\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0}$ e $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n}$ podemos reescrever a igualdade acima da seguinte forma

$$\binom{n}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] + \ldots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] + \binom{n}{n} =$$

$$2\underbrace{\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}\right]}_{HI} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Logo, o teorema vale para a linha $n + 1$. Portanto, por indução, vale para qualquer linha. ■

Podemos verificar na Tabela 5 o Teorema das Linhas no Triângulo de Pascal.

Tabela 5: Teorema das Linhas

(a) Triângulo de Pascal Coeficientes Binomiais

	0	1	2	3	4	5
0	$\binom{0}{0}$					
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
3	$\binom{3}{0}$ +	$\binom{3}{1}$ +	$\binom{3}{2}$ +	$\binom{3}{3}$	$= 2^3$	
4	$\binom{4}{0}$ +	$\binom{4}{1}$ +	$\binom{4}{2}$ +	$\binom{4}{3}$ +	$\binom{4}{4}$	$= 2^4$
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$

(b) Triângulo de Pascal de Valores

	0	1	2	3	4	5	
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1 +	3 +	3 +	1 =	8		
4	1 +	4 +	6 +	4 +	1 =	16	
5	1	5	10	10	5	1	

Fonte: Elaboração própria

Podemos observar que o teorema das linhas vale para todas as linhas do triângulo de Pascal, destacamos duas para melhor averiguação, na Tabela (a) temos a soma dos números binomais resultando em potência de dois e na Tabela (b) temos os valores dos coeficientes binomiais já calculado e sua soma resultando no valor correspondente da potência de 2.

Exemplo 2.2. *(Unificado - Adaptado) Resolva a equação a seguir na variável n:*

$$\sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} = 1022$$

Solução: Utilizando o Teorema das Linhas, temos que

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} = 1022$$

Pelos somatórios acima, temos

$$\binom{n}{0} + 1022 + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$1 + 1022 + 1 = 2^n$$

$$1024 = 2^n$$

$$2^{10} = 2^n$$

$$n = 10$$

2.1.4 Teorema das Colunas

O Teorema das Colunas, possibilita somarmos uma quantidade finita dos primeiros elementos de uma coluna. A soma dos $n+1$ primeiros elementos de uma coluna n do Triângulo de Pascal resulta, no elemento da próxima linha que está avançado uma coluna em relação ao último elemento somado [8].

Proposição 2.4. *Sejam n e p números inteiros com $0 \leq p \leq n$. Então a soma dos $n+1$ primeiros elementos da coluna n é:*

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \ldots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

Demonstração. Considere um conjunto A de números naturais, com $n+p+1$ elementos, onde o primeiro elemento é o número 1, o segundo o número 2 e assim sucessivamente até o $(n+p+1)$-ésimo elemento que é o número o $n+p+1$.

Para formar subconjuntos do conjunto A com $n+1$ elementos temos $\binom{n+p+1}{n+1}$ maneiras.

Iremos contar de outra forma a quantidade de subconjuntos com $n+1$ elementos do conjunto A. Tomemos a como o maior elemento do subconjunto de $n+1$ elementos, temos que a varia de $n+1$ até $n+p+1$. Para contar todos os subconjuntos formados por $n+1$ elementos analisaremos essa situação em casos distintos:

- Escolher os n elementos restantes para formar o subconjunto, de modo que o maior elemento seja o elemento $n+1$ do conjunto. Desta forma não podemos escolher elementos maiores que $n+1$. Assim temos $\binom{n}{n}$ maneiras.
- Escolher os n elementos restantes para formar o subconjunto, de modo que o maior elemento seja o elemento $n+2$ do conjunto. Temos $\binom{n+1}{n}$ maneiras.
- Escolher os n elementos restantes para formar o subconjunto, de modo que o maior elemento seja o elemento $n+3$ do conjunto. Temos $\binom{n+2}{n}$ maneiras.

E, assim sucessivamente, até escolhermos os n elementos para formar o subconjunto, com o maior elemento do conjunto sendo $n+p+1$. Temos assim $\binom{n+p}{n}$ maneiras. Pelo princípio aditivo, temos

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}$$

Portanto,

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

$\blacksquare$

Fazendo a demonstração dessa proposição atráves do Princípio de Indução Finita sobre p, temos:

Demonstração.

i) A igualdade é válida para $p=0$, pois

$$\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1$$

ii) Suponhamos que o resultado seja válido para p, ou seja,

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

iii) Demonstraremos que o resultado é válido para $p+1$, temos que

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}+\binom{n+p+1}{n}=$$

$$\underbrace{\left[\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}\right]}_{HI}+\binom{n+p+1}{n}=$$

$$\binom{n+p+1}{n+1}+\binom{n+p+1}{n}$$

Pela relação de Stifel, temos

$$\binom{n+p+1}{n+1}+\binom{n+p+1}{n}=\binom{n+p+2}{n+1}$$

O que mostra que o resultado vale para $p+1$. Portanto, por indução, vale para todo p. ■

Na Tabela 6 a seguir, podemos certificar o Teorema das Colunas no Triângulo de Pascal.

Tabela 6: Teorema das Colunas

(a) Triângulo de Pascal Coeficientes Binomiais

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\binom{0}{0}$						
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$

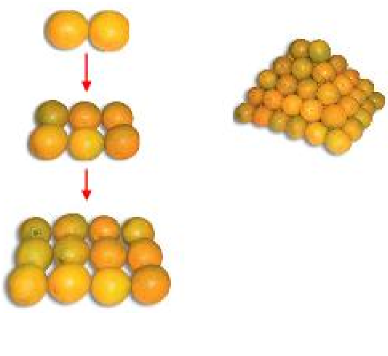
(b) Triângulo de Pascal de Valores

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Fonte: Elaboração própria

Destacado de vermelho está a soma dos 5 primeiros termos da coluna 1 do Triângulo de Pascal, no qual o resultado é o coeficiente binomial da linha 6 e coluna 2. O Teorema das Colunas só pode ser utilizado quando a soma inciar com o primeiro elemento da coluna selecionada.

Exemplo 2.3. *(UERJ/2006 - Adaptado) Em uma barraca de frutas, as laranjas são arrumadas em camadas retangulares, obedecendo à seguinte disposição: a primeira camada contêm duas laranjas, uma segunda camada contêm seis laranjas, a terceira camada contêm doze laranjas e assim por diante, conforme a figura a seguir. Calcule o número total de laranjas que compõem quinze camadas.*



Solução: Cada camada de laranja é da forma $(k+1)k$, para $k \in \mathbb{N}$. Como queremos a soma das quinze camadas, temos assim $\sum_{k=1}^{15}(k+1)k$, multiplicando e dividindo por 2, temos:

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{(k+1)k}{2}2 = 2\sum_{k=1}^{15}\frac{(k+1)k}{2}$$

Podemos reescrever cada termo dessa soma como sendo um número binomial, teremos assim um somatório de binomiais consecutivos, todos de mesma coluna

$$2\sum_{k=1}^{15}\frac{(k+1)k}{2} = 2\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{16}{2}\right]$$

Aplicando o Teorema das Colunas, temos

$$2\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{16}{2}\right] = 2\binom{17}{3} = 2\cdot 680 = 1360.$$

Como já vimos, para aplicar o Teorema das Colunas é necessário que a soma inicia-se com o primeiro elemento de uma coluna n do Triângulo de Pascal, entretanto podemos obter a soma de coeficientes binomais consecutivos que não se iniciam com o primeiro elemento de uma coluna, aplicando duas vezes o Teorema das Colunas, conforme o exemplo a seguir:

Exemplo 2.4. *Calcule o valor de A:*

$$A = \binom{12}{5}+\binom{13}{5}+\binom{14}{5}+\ldots+\binom{21}{5}$$

Solução: Consideremos

$$B = \binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\ldots+\binom{21}{5}$$

e

$$C = \binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\ldots+\binom{11}{5}$$

Temos que $A = B - C$. Pelo Teorema das Colunas $B = \binom{22}{6}$ e $C = \binom{12}{6}$. Portanto,

$$A = \binom{22}{6} - \binom{12}{6} = 74.613 - 924 = 73.689.$$

2.1.5 Teorema das Diagonais

O Teorema das Diagonais viabiliza somarmos os elementos de uma diagonal qualquer do Triângulo de Pascal, iniciando pelo primeiro elemento da diagonal. A soma dos elementos da diagonal será igual ao elemento que está logo abaixo da última parcela somada, posicionado na mesma coluna deste [8].

Proposição 2.5. *Sejam p, n e k números inteiros tais que $0 \leq k \leq p$. Então:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \ldots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$

Demonstração. Aqui, analisamos a seguinte situação:

De quantas maneiras diferentes é possível distribuir p canetas idênticas para $n+2$ pessoas?

Neste problema temos que distribuir p canetas iguais para $n+2$ pessoas, podendo cada pessoa receber mais de uma vez a mesma caneta, temos assim um problema de combinação completa ou com repetição. Como já vimos anteriormente (seção 1.7), podemos representar esta solução por uma sequência de p sinais de mais $(+)$ e $p+[(n+2)-1] = p+n+1$ sinais de barra $(|)$ representando assim as posições para colocar os sinais de mais, ou ainda, podemos obter a resposta desta situação calculando as soluções inteiras e não-negativas da equação linear $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} = p$, que pode ser feito de

$$\binom{n+2+p-1}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$

maneiras de distribuir p canetas para $n+2$ pessoas.

Agora, contamos a quantidade de maneiras de distribuir p canetas iguais para $n+2$ pessoas, dividindo em casos distintos e utilizando novamente a combinação completa ou com repetição. Consideremos que as pessoas estejam numeradas de 1 até $n+2$.

- Distribuir p canetas para a $(n+2)$-ésima pessoa e distribuir 0 caneta para as $n+1$ primeiras pessoas. Isso pode ser feito de $\binom{n+1+0-1}{0} = \binom{n}{0}$ maneiras.
- Distribuir $p-1$ canetas para a $(n+2)$-ésima pessoa e distribuir uma caneta para as $n+1$ primeiras pessoas. Isso pode ser feito de $\binom{n+1+1-1}{1} = \binom{n+1}{1}$ maneiras.

- Distribuir $p-2$ canetas para a $(n+2)$-ésima pessoa e distribuir 2 canetas para as $n+1$ primeiras pessoas. Isso pode ser feito de $\binom{n+1+2-1}{2} = \binom{n+2}{2}$ maneiras.

- Distribuir $p-3$ canetas para a $(n+2)$-ésima pessoa e distribuir 3 canetas para as $n+1$ primeiras pessoas. Isso pode ser feito de $\binom{n+1+3-1}{3} = \binom{n+3}{3}$ maneiras.

E, assim sucessivamente, até a $(p+1)$-ésima situação, que se refere a distribuir $p-p=0$ canetas para a $(n+2)$-ésima pessoa e distribuir p canetas para as $n+1$ primeiras pessoas. Que pode ser feito de $\binom{n+1+p-1}{p} = \binom{n+p}{p}$ maneiras.

Portanto, pelo princípio aditivo, temos

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \ldots + \binom{n+p}{p}$$

maneiras de distribuir p canetas idênticas para $n+2$ pessoas.

Logo,

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \ldots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$

■

Há uma equivalência entre o Teorema das Colunas e o Teorema das Diagonais, deste modo uma outra maneira de demonstrarmos o Teorema das Diagonais é através do Teorema das Colunas, ou vice-versa. Para isso utilizaremos a Proposição 2.1 (binomiais complementares). Assim, temos que cada termo do lado esquerdo do Teorema das Colunas é igual aos termos do lado esquerdo do Teorema das Diagonais:

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0}$$

$$\binom{n+1}{n} = \binom{n+1}{1}$$

$$\binom{n+2}{n} = \binom{n+2}{2}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n+p}{n} = \binom{n+p}{p}$$

Analogamente, o termo do lado direito dos dois teoremas também são iguais

$$\binom{n+p+1}{n+1} = \binom{n+p+1}{p}$$

Desta maneira, o Teorema das Colunas é válido se, e somente se, o Teoremas das Diagonais também for válido. Na Tabela 7 a seguir, podemos visualizar o Teorema das Diagonais no Triângulo de Pascal.

Tabela 7: Teorema das Diagonais

(a) Triângulo de Pascal Coeficientes Binomiais

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\binom{0}{0}$						
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$

(b) Triângulo de Pascal de Valores

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Fonte: Elaboração própria

Temos destacado acima a soma dos quatro primeiros elementos da diagonal, que tem o primeiro elemento situado na coluna 0 da segunda linha do Triângulo de Pascal, tendo como resultado desta soma o elemento que está situado na linha 6 coluna 3.

Exemplo 2.5. *Calcule o valor da soma a seguir:*

$$\binom{6}{0} + \binom{7}{1} + \binom{8}{2} + \binom{9}{3} + \binom{10}{4}$$

Solução: Pelo Teorema das Diagonais, temos

$$\binom{6}{0}+\binom{7}{1}+\binom{8}{2}+\binom{9}{3}+\binom{10}{4}=\binom{6+4+1}{4}=\binom{11}{4}=330.$$

2.1.6 Algumas outras identidades dos coeficientes binomiais

Os coeficientes binomiais possuem várias identidades, demonstraremos mais algumas.

Proposição 2.6. *Sejam n e p números inteiros, tais que $0 \leq p \leq n$ e $n \geq 1$. Então:*

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-...+(-1)^p\binom{n}{n}=0$$

Demonstração. Seja um conjunto A com n elementos e $x \in A$. Consideremos q o total de subconjuntos de A com número par de elementos e r o total de subconjuntos de A com número ímpar de elementos, temos assim

$$q=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+...$$

e

$$r=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\binom{n}{7}+...$$

Para obter o subconjunto q, podemos dividir em dois casos distintos: os subconjuntos que possuem o elemento x e os subconjuntos que não possuem o elemento x.

- No primeiro caso, como o elemento x pertence aos subconjuntos, temos então que escolher um número ímpar de elementos dentre os $n-1$ elementos restantes do conjunto A.
- No segundo caso, como o elemento x não pertence aos subconjuntos, temos que escolher um número par de elementos dentre os $n-1$ elementos do conjunto A.

Pelo princípio aditivo, temos

$$q=\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{5}+...+\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{4}+...=$$

$$=\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{4}+...$$

Analogamente, para calcular os subconjuntos de r, dividiremos também nos dois casos distintos:

- No primeiro caso, como o elemento x pertence aos subconjuntos, temos então que escolher um número par de elementos dentre os $n-1$ elementos restantes do conjunto A.

- No segundo caso, como o elemento x não pertence aos subconjuntos, temos então que escolher um número ímpar de elementos dentre os $n-1$ elementos do conjunto A.

Pelo princípio aditivo, temos:

$$r = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{4} + ... + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{3} + ... =$$

$$= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4} + ...$$

Logo, $q = r$.

Portanto,

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - ... + (-1)^p\binom{n}{n} = q - r = 0$$

■

Através dessa proposição, temos que ao somarmos uma linha do Triângulo de Pascal com os sinais alternados o resultado será sempre zero, como podemos verificar na Tabela 8, a seguir:

Tabela 8: Soma com sinais alternados das linhas do Triângulo de Pascal

(a) Triângulo de Pascal Coeficientes Binomiais

	0		1		2		3		4		5
0	$\binom{0}{0}$										
1	$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$								
2	$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$						
3	$\binom{3}{0}$	-	$\binom{3}{1}$	+	$\binom{3}{2}$	-	$\binom{3}{3}$	$= 0$			
4	$\binom{4}{0}$	-	$\binom{4}{1}$	+	$\binom{4}{2}$	-	$\binom{4}{3}$	+	$\binom{4}{4}$	$= 0$	
5	$\binom{5}{0}$		$\binom{5}{1}$		$\binom{5}{2}$		$\binom{5}{3}$		$\binom{5}{4}$		$\binom{5}{5}$

(b) Triângulo de Pascal de Valores

	0		1		2		3		4		5
0	1										
1	1		1								
2	1		2		1						
3	1	-	3	+	3	-	1	$= 0$			
4	1	-	4	+	6	-	4	+	1	$= 0$	
5	1		5		10		10		5		1

Fonte: Elaboração própria

A próxima identidade é conhecida como identidade de Vandermonde, pelo fato de ter sido descoberda por Alexandre-Théophile Vandermonde, que foi um matemático do século XVIII. [10]

Proposição 2.7. *(Identidade de Vandermonde) Sejam r, s e n números inteiros não-negativos, tais que $r \geq n \geq 0$ e $s \geq n \geq 0$. Então:*

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{r}{p}\binom{s}{n-p} = \binom{r+s}{n}$$

Demonstração. Analisamos a seguinte situação:

Suponhamos que em uma turma há r mulheres e s homens. De quantas maneiras podemos formar um grupo composto por n pessoas dessa turma?

Primeiramente, escolhe-se n pessoas dessa turma dentre as r mulheres e os s homens, isso pode ser feito de $\binom{r+s}{n}$ maneiras distintas.

Agora, contamos de outra forma a quantidade de obtermos um grupo de n pessoas dentre as r mulheres e os s homens, dividindo em casos distintos:

- Escolher 0 mulher e n homens para formar o grupo. Isso pode ser feito de $\binom{r}{0}\binom{s}{n}$ maneiras distintas.

- Escolher uma mulher e $n-1$ homens para formar o grupo. Isso pode ser feito de $\binom{r}{1}\binom{s}{n-1}$ maneiras distintas.
- Escolher duas mulheres e $n-2$ homens para formar o grupo. Isso pode ser feito de $\binom{r}{2}\binom{s}{n-2}$ maneiras distintas.

E, assim sucessivamente, até o $(n+1)$-ésimo caso, no qual será escolher n mulheres e 0 homens para formar o grupo. Isso pode ser feito de $\binom{r}{n}\binom{s}{0}$ maneiras distintas.

Pelo princípio aditivo, temos

$$\binom{r}{0}\binom{s}{n} + \binom{r}{1}\binom{s}{n-1} + \binom{r}{2}\binom{s}{n-2} + ... + \binom{r}{n}\binom{s}{0} = \sum_{p=0}^{n}\binom{r}{p}\binom{s}{n-p}$$

Portanto,

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{r}{p}\binom{s}{n-p} = \binom{r+s}{n}$$

■

A próxima identidade é conhecida como Identidade de Lagrange, ela é um colorário que diz respeito a Identidade de Vandermonde.

Corolário 2.1. *Seja n um número inteiro não-negativo. Então:*

$$\binom{2n}{n} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}^2$$

Demonstração. Consideremos $r = s = n$ na Identidade de Vandermonde, obtemos no lado direito desta identidade

$$\binom{r+s}{n} = \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}$$

Pelo lado esquerdo, obtemos

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{r}{p}\binom{s}{n-p} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\binom{n}{n-p}$$

Pela Proposição 2.1 (Binomiais Complementares), temos que

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\binom{n}{n-p} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}^2$$

Portanto,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$$

■

A identidade seguinte é conhecida como Relação de Fermat.

Proposição 2.8. *(Relação de Fermat) Sejam n e p números inteiros não-negativos, com $0 \leq p \leq n$. Então:*

$$\binom{n}{p}\frac{n-p}{p+1} = \binom{n}{p+1}$$

Demonstração. Analisamos a seguinte situação:

Uma turma de estudantes formada por n alunos, deseja criar uma diretoria composta por $p+1$ alunos dessa turma, sendo 1 presidente e p conselheiros. De quantos modos pode-se formar essa diretoria?

Podemos contar de duas formas diferentes as maneiras de formar essa diretoria.

- Primeira forma: Escolher $p+1$ alunos dentre os n alunos dessa turma, que pode ser feito de $\binom{n}{p+1}$ maneiras e em seguida escolher o presidente dessa diretoria dentre as $p+1$ pessoas, que pode ser feito de $(p+1)$ maneiras, restanto assim p conselheiros. Dessa forma, pelo princípio multiplicativo temos $(p+1)\binom{n}{p+1}$ maneiras distintas de formar a diretoria.

- Segunda forma: Escolher primeiramente os p conselheiros dentre os n alunos dessa turma, que pode ser feito de $\binom{n}{p}$ maneiras e em seguida escolher o presidente dentre os $n-p$ alunos restantes, que pode ser feito de $(n-p)$ maneiras. Dessa forma, pelo princípio multiplicativo temos $(n-p)\binom{n}{p}$ maneiras distintas de formar a diretoria.

Logo,

$$(p+1)\binom{n}{p+1} = (n-p)\binom{n}{p}$$
$$\binom{n}{p+1} = \frac{n-p}{p+1}\binom{n}{p}$$

■

2.2 Binômio de Newton

O Binômio de Newton expressa a n-ésima potência de um binômio $(x+y)$, recebe esse nome em homenagem ao físico e matemático Isaac Newton. O Binômio de Newton além de ser muito útil na matemática também é muito utilizado na genética. [10]

Proposição 2.9. ***Teorema Binomial*** - *Sejam x e y números reais, n e p números inteiros não-negativos, então*

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p}y^p = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

Demonstração. Analisamos a seguinte situação:

Uma prova de matemática é composta por x questões de análise combinatória e y questões de probabilidade. De quantas maneiras n alunos poderão escolher uma questão cada, da prova para responder?

Neste problema temos n alunos para escolher uma questão dentre as x questões de análise combinatória e y questões de probabilidade, desse modo temos que:

- O primeiro aluno poderá escolher uma questão para responder das $x+y$ questões disponíveis.
- O segundo aluno também poderá escolher uma questão para responder das $x+y$ questões disponíveis.
- O terceiro aluno também poderá escolher uma questão para responder das $x+y$ questões disponíveis.

E, assim sucessivamente, até o n-ésimo aluno, que poderá escolher uma questão para responder das $x+y$ questões disponíveis.

Pelo princípio multiplicativo, temos

$$(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot \ldots \cdot(x+y) = (x+y)^n$$

maneiras diferentes de escolher uma questão da prova para responder.

Agora, contamos a quantidade de maneiras diferentes que n alunos poderão escolher uma questão da prova para responder dentre as x questões de análise combinatória e y questões de probabilidade, dividindo em casos distintos.

Consideremos p a quantidade de alunos que preferem escolher para responder questões de probabilidade, com $0 \leq p \leq n$. Desta forma temos $n - p$ alunos que optarão por responder questões de análise combinatória. Então:

- No caso de $p = 0$, nenhum aluno escolherá questões de probabilidade. Sendo assim n alunos escolherão questões de análise combinatória para resolver, que pode ser feito de $\binom{n}{0}x^n y^0$ maneiras distintas, dado que o primeiro aluno tem x maneiras de escolher questões de análise combinatória, o segundo aluno também tem x maneiras de escolher e, assim sucessivamente, até o n-ésimo aluno que tem também x maneiras de escolher essas questões.

- No caso de $p = 1$, um aluno escolherá questões de probabilidade, que pode ser feito de $\binom{n}{1}$ maneiras e este aluno terá y formas de escolha. Sendo assim $n - 1$ alunos restantes escolherão questões de análise combinatória para resolver, que pode ser feito de $\binom{n}{1}x^{n-1}y^1$ maneiras distintas, dado que cada aluno terá x maneiras de escolher questões de análise combinatória.

- No caso de $p = 2$, dois alunos escolherão questões de probabilidade, que pode ser feito de $\binom{n}{2}$ maneiras e cada aluno terá y formas de escolha. Sendo assim $n - 2$ alunos restantes escolherão questões de análise combinatória para resolver, que pode ser feito de $\binom{n}{2}x^{n-2}y^2$ maneiras distintas, dado que cada aluno terá x maneiras de escolher questões de análise combinatória.

E, assim sucessivamente, até a $(n + 1)$-ésima situação no qual todos os n alunos escolherão responder questões de probabilidade e nenhum aluno escolherá questões de análise combinatória, que pode ser feito de $\binom{n}{n}x^0 y^n$ maneiras distintas.

Pelo princípio aditivo, temos

$$\binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + ... + \binom{n}{n}x^0 y^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}x^{n-p}y^p$$

Portanto,

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}x^{n-p}y^p = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + ... + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

■

Iremos fazer a demonstração deste teorema utilizando o Princípio de Indução Finita, temos:

Demonstração.

i) A igualdade é válida para $n = 0$, pois

$$(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$$

Para $n = 1$ também é válida, pois

$$(x+y)^1 = x + y = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1$$

ii) Suponhamos que o resultado seja válido para algum n, isto é

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} y^p.$$

Aqui, temos a hipótese de Indução.

iii) Demonstraremos que o resultado é válido para $n+1$.

Partindo da hipótese de indução, multiplicando ambos os lados da igualdade por $(x+y)$, temos

$$(x+y)^{n+1} = (x+y) \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} y^p$$

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n+1-p} y^p + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} y^{p+1}$$

Calculando e retirando o 0-ésimo termo do primeiro somatório, calculando e retirando o n-ésimo termo do segundo somatório e depois redefinindo a variável p para $p-1$, temos

$$x^{n+1} + y^{n+1} \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} x^{n+1-p} y^p + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p-1} x^{n-p+1} y^p$$

Colocando o termo $x^{n+1-p}y^p$ em evidência, temos

$$x^{n+1}+y^{n+1}+\sum_{p=1}^{n}\left[\binom{n}{p}+\binom{n}{p-1}\right]x^{n+1-p}y^p$$

Pela Proposição 2.2 - Relação de Stifel, temos que $\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p}$, deste modo obtemos

$$x^{n+1}+y^{n+1}+\sum_{p=1}^{n}\binom{n+1}{p}x^{n+1-p}y^p$$

Inserindo o 0-ésimo termo $\binom{n+1}{0}x^{n+1}$ e o $(n+1)$-ésimo termo $\binom{n+1}{n+1}y^{n+1}$, no somatório obtemos

$$(x+y)^{n+1}=\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}x^{n+1-p}y^p$$

Logo, o teorema é válido para $n+1$. Portanto, por indução, é válido para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Desenvolver expressões do tipo $(x+y)^n$ para $n=0$ e $n=1$ são triviais, para $n=2$ e $n=3$ é mais comum utilizar conceitos de produtos notáveis, fazendo uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, para $n \geq 4$, pode-se utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e o agrupamento de termo semelhantes. Entretanto, através do Binômio de Newton temos uma forma mais rápida de desenvolver expressões desse tipo.

Utilizando a fórmula do Binômio de Newton, para expandir algumas potências do binômio $(x+y)$, temos

$$(x+y)^0=\binom{0}{0}x^0y^0$$

$$(x+y)^1=\binom{1}{0}x^1y^0+\binom{1}{1}x^0y^1$$

$$(x+y)^2=\binom{2}{0}x^2y^0+\binom{2}{1}x^1y^1+\binom{2}{2}x^0y^2$$

$$(x+y)^3=\binom{3}{0}x^3y^0+\binom{3}{1}x^2y^1+\binom{3}{2}x^1y^2+\binom{3}{3}x^0y^3$$

$$(x+y)^4=\binom{4}{0}x^4y^0+\binom{4}{1}x^3y^1+\binom{4}{2}x^2y^2+\binom{4}{3}x^1y^3+\binom{4}{4}x^0y^4$$

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0}x^5y^0 + \binom{5}{1}x^4y^1 + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}x^1y^4 + \binom{5}{5}x^0y^5$$

Calculando os valores dos coeficientes binomiais, obtemos

$(x+y)^0 = 1x^0y^0$

$(x+y)^1 = 1x^1y^0 + 1x^0y^1$

$(x+y)^2 = 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2$

$(x+y)^3 = 1x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1x^0y^3$

$(x+y)^4 = 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4$

$(x+y)^5 = 1x^5y^0 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + 1x^0y^5$

Observe que:

- O desenvolvimento de $(x+y)^n$ possui $n+1$ termos.
- Os coeficientes do desenvolvimento do Binômio de Newton (destacados de vermelho acima) são os coeficientes binomiais dispostos na linha n do Triângulo de Pascal.
- A diferença entre o numerador e denominador do coeficiente binomial correspondente, equivale a cada expoente de x e o demoninador do coeficiente binomial correspondente, equivale a cada expoente de y.
- Os expoentes de x decrescem de n até 0 e os expoentes de y crescem de 0 até n.
- A soma dos expoentes das variáveis em cada termo corresponde a n.

Utilizando o Binômio de Newton, podemos facilmente demonstrar as identidades dos coeficientes binomiais, como podemos observar no exemplo a seguir, em que temos uma outra demonstração do Teorema das Linhas, aplicando o Binômio de Newton.

Exemplo 2.6. *Seja n um número inteiro não-negativo. Então:*

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Demonstração. Aplicando a fórmula do Binômio de Newton, considerando $x = 1$ e $y = 1$, temos que

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^{n-p}1^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$$

$\blacksquare$

Exemplo 2.7. *Seja n um número inteiro não-negativo. Demonstre a seguinte identidade:*

$$\sum_{p=0}^{n} 2^p \binom{n}{p} = 3^n$$

Demonstração. Considerando $x = 1$ e $y = 2$ na expansão do Binômio de Newton, obtemos

$$3^n = (1+2)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^{n-p} 2^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p$$

$\blacksquare$

2.2.1 Termo geral do Binômio de Newton

O termo geral do Binômio de Newton é uma expressão que nos fornece qualquer termo do desenvolvimento do binômio, sem termos a necessidade de escrevermos todos os termos do desenvolvimento. Este termo é dado pela seguinte expressão:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} y^p$$

Exemplo 2.8. *Calcule o sexto termo do desenvolvimento do binômio* $\left(\frac{x}{2}+3\right)^8$

Solução: Pelo termo geral do binômio de Newton, temos $p = 5$

$$T_{5+1} = \binom{8}{5} \left(\frac{x}{2}\right)^{8-5} 3^5$$

$$T_6 = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{3} \cdot 3^5$$

$$T_6 = 56 \cdot \frac{x^3}{8} \cdot 243$$

$$T_6 = 1701x^3$$

2.3 Coeficientes Multinomiais

Os coeficientes multinomiais ou números multinomiais são uma generalização dos coeficientes binomiais. Denotado por $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_p}$, o coeficiente multinomial representa a quantidade de divisões de um conjunto de n elementos distintos em p subconjuntos distintos de tamanho $n_1, n_2, \ldots, n_p$, respectivamente, com $p \geq 2$ e $n_1, n_2, \ldots, n_p$ inteiros não-negativos, tais que $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$ [11]. Assim,

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_p} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_p!}.$$

Considere a seguinte situação:

Um conjunto A com n elementos distintos, deve ser dividido em p subconjuntos de tamanhos $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_p$, nesta ordem, de modo que $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_p = n$. De quantas maneiras podemos formar esses p subconjuntos de A?

Solução: Analisamos separadamente cada modo de formar subconjuntos do conjunto A.

- Para o primeiro subconjunto que terá n_1 elementos, temos n elementos disponíveis do conjunto A, deste modo há $\binom{n}{n_1}$ maneiras distintas de formar este subconjunto.

- Para o segundo subconjunto que terá n_2 elementos, temos $n - n_1$ elementos disponíveis do conjunto A, deste modo há $\binom{n-n_1}{n_2}$ maneiras distintas de formar este subconjunto.

- Para o terceiro subconjunto que terá n_3 elementos, temos $n - n_1 - n_2$ elementos disponíveis do conjunto A, deste modo há $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ maneiras distintas de formar este subconjunto.

Repetimos esse processo até o p-ésimo subconjuto que terá n_p elementos, havendo $n - n_1 - n_2 - n_3 - \ldots - n_{p-1}$ elementos disponíveis do conjunto A, deste modo há $\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{p-1}}{n_p}$ maneiras distintas de formar este subconjunto.

Pelo princípio multiplicativo, obtemos

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdot\ldots\cdot\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{p-1}}{n_p} =$$

$$\frac{n!}{(n-n_1)!n_1!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!}\cdot\frac{(n-n_1-n_2)!}{(n-n_1-n_2-n_3)!n_3!}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{p-1})!}{0!n_p!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdot\ldots\cdot n_p!} = \binom{n}{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_p}$$

maneiras de formar os p subconjuntos de A.

2.4 Teorema Multinomial

Teorema Multinomial, polinômio de Leibniz ou fórmula do multinômio de Newton é uma generalização do Binômio de Newton, que nos permite escrever a expansão de uma expressão do tipo $(x_1 + x_2 + ... + x_p)^n$, em que p e n são inteiros positivos.

Proposição 2.10. ***Teorema Multinomial*** - *Se n é um número inteiro não-negativo, então:*

$$(x_1+x_2+...+x_p)^n = \sum_{n_1,n_2,...,n_p} \binom{n}{n_1, n_2, ..., n_p} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p}, \text{ em que } n_1+\dots+n_p = n.$$

Demonstração. Note que

$$(x_1 + x_2 + ... + x_p)^n = \underbrace{(x_1 + x_2 + ... + x_p) \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_p) \cdot ... \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_p)}_{n fatores}$$

Cada termo do produto acima é obtido escolhendo uma variável de cada fator, de forma que a variável x_i seja escolhida precisamente n_i vezes (para cada i de 1 até p) e, em seguida, multiplicando os elementos escolhidos. Deste modo, se escolhermos x_1 em n_1 fatores, escolhermos x_2 em n_2 fatores e, assim sucessivamente, até escolhermos x_p em n_p fatores, de modo que $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$. Obtemos, multiplicando os n elementos escolhidos, o resultado $x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_p^{n_p}$. Assim, somando os termos semelhantes, temos que o coeficiente em cada um dos termos gerados é exatamente o número de maneiras de escolhermos os n elementos que formam o termo. Essa quantidade é dada por

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot ... \cdot \binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{p-1}}{n_p}$$

maneiras, em que

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot ... \cdot \binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{p-1}}{n_p} = \binom{n}{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_p}$$

Assim,

$$(x_1 + x_2 + ... + x_p)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_p=n} \binom{n}{n_1, n_2, ..., n_p} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p}$$

■

3 Coeficientes Binomiais: extensões

Nesta seção abordamos os números de Fibonacci, no qual temos que cada um desses números podem ser expressos como uma soma de coeficientes binomiais, e o Teorema de Lucas que atráves dele obtemos o resto da divisão de um coeficiente binomial por um número primo.

3.1 Números de Fibonacci

Considerado o mais talentoso matemático da Idade Média, Leonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa, nasceu em Pisa na Itália, concedeu grandes contribuições para a matemática, obtendo um grande reconhecimento em uma sequência númerica que leva o seu nome, a sequência de Fibonacci. Essa sequência é formada pelos números de Fibonacci que foram introduzidos no livro intitulado *Liber abaci* publicado em 1202, onde além de outras coisas Fibonacci apresentou os números hindu-arábicos e descrevou um problema sobre a reprodução dos coelhos [5]. No qual temos a seguir:

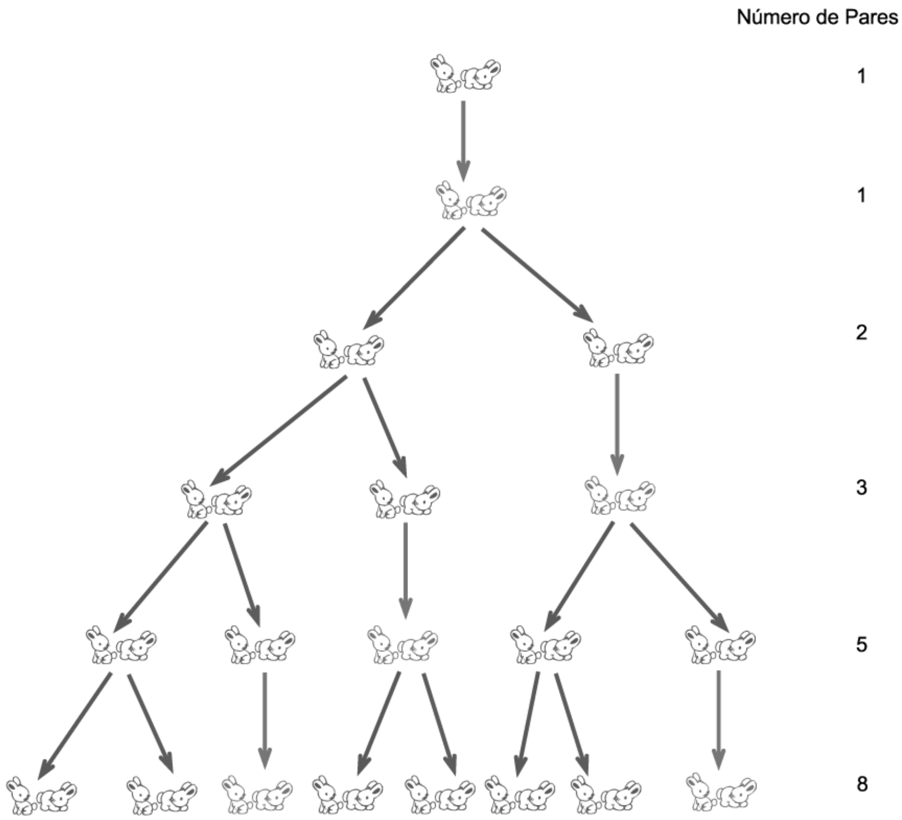
"Um homem colocou um casal de coelhos em um curral cercado por todos os lados por uma parede. Quantos pares de coelhos este casal pode dar à luz em um ano, se for conhecido que todo mês, a partir do segundo, cada par de coelhos dá à luz um par?"

Solução:

- No primeiro mês, temos um par de coelhos;
- Como demora 2 meses para haver a primeira reprodução até os coelhos estarem adultos, temos que no segundo mês continua tendo o mesmo par de coelhos;
- No terceiro mês, a femêa deu a luz a um par de coelhos, tendo assim dois pares;
- No quarto mês, temos 3 casais de coelhos, sendo os dois do segundo mês e mais um que foi gerado pelo primeiro casal;
- No quinto mês, temos 5 casais de coelhos, sendo os 3 do terceiro mês e um par de coelhos gerado pelo primeiro casal e mais um par de coelhos gerado pelo segundo casal;
- E, assim por diante.

Na Figura 3 a seguir, podemos verificar um esquema que representa a quantidade de pares de coelhos até o sexto mês. Desta forma, este problema descreve a seguinte sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...)$ que é conhecida como sequência de Fibonacci e cada número que compõe essa sequência é denomidado número de Fibonacci.

Figura 3: Quantidade de pares de coelho



Fonte: sites.google.com/site/leonardofibonacci7/o-problema-dos-coelhos.

A sequência de Fibonacci é infinita, e cada número seguinte com exceção dos dois primeiros é sempre a soma dos dois números imediatamente anteirores. A notação F_n representa o n-ésimo número de Fibonacci. Aqui, os termos decorrentes de uma sequência de Fibonacci com $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$ podem ser encontrados através da seguinte relação de recorrência:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Esta sequência aparece em vários contextos e fenômenos da natureza como, por exemplo nos girassóis, numa colmeia de abelhas, nas conchas de moslucos, entretanto, aqui, damos ênfase no aparecimento dessa sequência no Triângulo de Pascal.

3.1.1 Relação entre os Números de Fibonacci e os Coeficientes Binomiais

Podemos encontrar os números de Fibonacci no Triângulo de Pascal, havendo assim uma relação com os coeficientes binomiais. As somas ao longo das diagonais crescentes do Triângulo de Pascal são os números de Fibonacci.

Proposição 3.1. *Seja $n \geq 0$. Então:*

$$\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-p}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + ... = F_{n+1}$$

Onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior número inteiro menor ou igual a x.

Temos dois casos:

- Se n for par, temos que

$$\sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-p}{p} = F_{n+1}$$

- Se n for ímpar, temos que

$$\sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-p}{p} = F_{n+1}$$

Demonstramos essa proposição atráves do Princípio de Indução Finita, temos:
Demonstração.

i) A igualdade é válida para $n = 0$, pois

$$\binom{0}{0} = 1 = F_1$$

Para $n = 1$, temos que também é válida

$$\binom{1}{0} = 1 = F_2$$

ii) Suponha que o resultado seja válido para algum n, tal que $n \leq p$.

$$\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-p}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + ... = F_{n+1}$$

iii) Demonstramos que o resultado é válido para $n+1$.

Pela hipótese de indução

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + ...$$

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + ...$$

Pela recorrência de Fibonacci $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, sucede

$$F_{n+2} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + ... + \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + ...$$

Através da relação de Stifel, obtemos

$$F_{n+2} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + ...$$

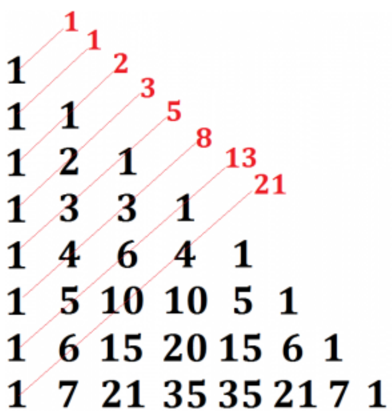
Pelo fato de que $\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0}$ então

$$F_{n+2} = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + ...$$

Assim, a identidade vale para $n+1$. Portanto, por indução, vale para todo n. ∎

Podemos verificar na Figura 4, a soma das diagonais crescente do Triângulo de Pascal, que resulta nos números de Fibonacci, formando assim a sequência de Fibonacci.

Figura 4: Triângulo de Pascal e os números de Fibonacci



Fonte: https://sabermatematica.com.br/sequencia-de-fibonacci.html

Proposição 3.2. *Seja* $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}F_p$, *com* $F_p = \dfrac{\alpha^p - \beta^p}{\alpha - \beta}$. *Então:*

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}F_p = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = F_{2n}$$

Demonstração. Temos que

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}F_p = \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\alpha^p - \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\beta^p\right]$$

Pela fórmula do Binômio de Newton, temos $(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^{n-p}y^p$. Considerando $x = 1$, concluímos que $(1+y)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}y^p$. Assim, podemos reescrever como:

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}F_p = \frac{1}{\alpha - \beta}\left[(1+\alpha)^n - (1+\beta)^n\right],$$

no entanto $1 + \alpha = \alpha^2$ e $1 + \beta = \beta^2$.

Portanto,

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}F_p = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = F_{2n}$$

■

Exemplo 3.1. *Verifique que:* $\sum_{p=0}^{5}\binom{5}{p}F_p = F_{10}$.

Solução:

$$\sum_{p=0}^{5}\binom{5}{p}F_p = \binom{5}{0}F_0 + \binom{5}{1}F_1 + \binom{5}{2}F_2 + \binom{5}{3}F_3 + \binom{5}{4}F_4 + \binom{5}{5}F_5$$

$$= 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 5$$

$$0 + 5 + 10 + 20 + 15 + 5 = 55 = F_{10}$$

3.2 Teorema de Lucas

O matemático francês François Édouard Anatole Lucas deu grandes contribuições para a matemática, principalmente na área de Teoria dos Números. É o criador de um jogo muito conhecido: a torre de Hanoi. Em 1878 François Édouard Anatole Lucas provou um interessante teorema, no qual leva o seu nome, o Teorema de Lucas que caracteriza as paridades dos coeficientes binomiais através do resto da divisão desses coeficientes por um número primo [7]. Antes de apresentarmos o Teorema de Lucas, fizemos uma breve introdução sobre mudança de base númerica para números inteiros positivos.

Quando escrevemos um número inteiro utilizamos a base decimal, onde temos que cada algarismo possui um peso que lhe é atribuído em função da posição ocupada por ele no número. Este peso sempre em potência de 10 ocorre da seguinte maneira: o último algarismo da direita tem peso um, o próximo algarismo sempre da direita para esquerda tem peso 10, o próximo tem peso 100, e assim por diante [6]. Por exemplo, o número 1250 na base decimal é a representação de: $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$.

Utilizando o Lema 3.1, podemos converter qualquer número de base decimal para outra base qualquer:

Lema 3.1. *Sejam dados os números inteiros n e b, com $n > 0$ e $b > 1$, existe uma única maneira de escrever n como uma soma*

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + a_{k-2} b^{k-2} + \ldots + a_1 b + a_0$$

com $0 \leq a_i \leq p - 1$ e $a_k \neq 0$. Dizemos que $a_k a_{k-1} \ldots a_0$ é a representação de n em base b, e escrevemos $n = [a_k a_{k-1} \ldots a_0]_b$.

Esta representação é denominada de expansão relativa à base b, para determinar a expansão de um número qualquer em relação à base b aplicamos sucessivamente o algoritmo de divisão euclidiana.

Exemplo 3.2. *Vamos representar o número 356 na base 7.*

Solução: Por divisões euclidianas sucessivas, temos

$$356 = 50 \cdot 7 + 6$$

$$50 = 7 \cdot 7 + 1$$

$$7 = 1 \cdot 7 + 0$$

$$1 = 0 \cdot 7 + 1$$

Pelos restos obtidos temos que: $356 = 1 \cdot 7^3 + 0 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 6 = [1016]_7$

Para obter mais esclarecimento sobre este assunto, consulte HEFEZ [6] Capítulo 4. Em HEFEZ [6] Capítulo 9, obtemos informações e explicações sobre congruência entre dois números inteiros, em que seja a e b inteiros congruentes escrevemos como $a \equiv b \mod m$, quando a e b possuem o mesmo resto na divisão euclidiana por m.

Após essa breve explanação, apresentamos o Teorema de Lucas:

Teorema 3.1. ***(Teorema de Lucas)*** *Seja p um número primo e sejam* $m = [m_k m_{k-1} \dots m_2 m_1 m_0]_p$ *e* $n = [n_k n_{k-1} \dots n_2 n_1 n_0]_p$ *dois números inteiros representados relativamente à base p. Tem-se que:*

$$\binom{m}{n} \equiv \binom{m_k}{n_k} \cdot \binom{m_{k-1}}{n_{k-1}} \cdot \dots \cdot \binom{m_2}{n_2} \cdot \binom{m_1}{n_1} \cdot \binom{m_0}{n_0} \ mod\ p.$$

Antes de demonstrarmos este Teorema, provamos alguns lemas auxiliares.

Lema 3.2. *Seja p primo e* $1 \leq k < p$ *então:* $\binom{p}{k}$ *é sempre divisível por p.*

Demonstração. Quando $k = 0$, temos

$$\binom{p}{0} = 1, \text{ logo } \binom{p}{0} \not\equiv 0 \mod p.$$

Pelo mesmo racíocinio, quando $k = p$, temos

$$\binom{p}{p} = 1, \text{ logo } \binom{p}{p} \not\equiv 0 \mod p.$$

Para $1 \leq k < p$ sabemos que

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot ... \cdot (p-k+1)}{k!}$$

$$\binom{p}{k} = p\left(\frac{(p-1) \cdot (p-2) \cdot ... \cdot (p-k+1)}{k!}\right)$$

Como $k < p$ e pela definição de um número primo, não há número menor que ele que possa dividi-lo, assim não existe nenhum fator em $k!$ que divida p em absoluto, então $\binom{p}{k}$ é múltiplo de p.

Portanto, $\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$, quando $1 \leq k < p$. ■

Lema 3.3. *Seja p primo, então:* $(1 + X)^p \equiv 1 + X^p$ *mod p.*

Demonstração.

$$(1+X)^p \equiv \binom{p}{0}X^0 + \binom{p}{1}X^1 + \binom{p}{2}X^2 + \ldots + \binom{p}{p}X^p \bmod p$$

Pelo fato de $\binom{p}{0} = \binom{p}{p} = 1$, temos

$$(1+X)^p \equiv 1 + \binom{p}{1}X^1 + \binom{p}{2}X^2 + \ldots + X^p \bmod p$$

Pelo Lema 3.2, temos que

$$(1+X)^p \equiv 1 + 0 \cdot X^1 + 0 \cdot X^2 + \ldots + X^p \bmod p$$

Portanto,

$$(1+X)^p \equiv 1 + X^p \bmod p.$$

■

Lema 3.4. *Seja p primo e n um número inteiro não negativo, então:* $(1+X)^{p^n} \equiv 1 + X^{p^n}$

Demonstração. Pelo Lema 3.3, temos que $(1+X)^p \equiv 1 + X^p \bmod p$.

Suponhamos que $(1+X)^{p^k} \equiv 1 + X^{p^k} \bmod p$, então

$$(1+X)^{p^{k+1}} \equiv \left((1+X)^{p^k}\right)^p \bmod p$$

$$\equiv \left(1 + X^{p^k}\right)^p \bmod p$$

$$\equiv \binom{p}{0} + \binom{p}{1}x^{p^k} + \binom{p}{2}x^{2p^k} + \ldots + \binom{p}{p-1}x^{(p-1)p^k} + \binom{p}{p}x^{p^{k+1}} \bmod p$$

$$\equiv 1 + X^{p^{k+1}} \bmod p$$

■

De posse dos Lemas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, segue a demonstração do Teorema de Lucas.

Demonstração. Temos, o seguinte somatório

$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} X^n \bmod p$$

$$\equiv \binom{m}{0}X^0 + \binom{m}{1}X^1 + \binom{m}{2}X^2 + \ldots + \binom{m}{m}X^m \bmod p$$

$$\equiv (1+X)^m \bmod p$$

Representando m em termos da expansão em base p, obtemos

$$m = m_0 + m_1 p + m_2 p^2 + \ldots + m_k p^k = \sum_{i=0}^{k} m_i p^i$$

Substituindo m em $(1+X)^m \bmod p$, escrevemos

$$(1+X)^m \bmod p = (1+X)^{m_0 + m_1 p + m_2 p^2 + \ldots + m_k p^k} \bmod p$$

$$\equiv (1+X)^{m_0} \cdot (1+X)^{m_1 p} \cdot (1+X)^{m_2 p^2} \cdot \ldots \cdot (1+X)^{m_k p^k} \bmod p$$

$$\equiv \prod_{i=0}^{k} (1+X)^{m_i p^i} \bmod p$$

$$\equiv \prod_{i=0}^{k} \left((1+X)^{p^i}\right)^{m_i} \bmod p$$

Aplicando o Lema 3.4, temos

$$\equiv \prod_{i=0}^{k} \left(1+X^{p^i}\right)^{m_i} \bmod p$$

Considerando $X^{p^i} = Y$, escrevemos

$$\equiv \prod_{i=0}^{k} (1+Y)^{m_i} \bmod p$$

Pelo Teorema Binomial sabemos que $(1+Y)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} Y^p$

$$\equiv \prod_{i=0}^{k} \left(\sum_{n=0}^{m_i} \binom{m_i}{n} Y^n \right) \bmod p$$

Como m_i é o digíto de m na base p, então $0 \leq m_i < p$, portanto $p-1 \geq m_i$, segue

$$\sum_{n=0}^{m_i} \binom{m_i}{n} Y^n = \sum_{n=0}^{p-1} \binom{m_i}{n} Y^n$$

Observe que apenas o limite superior da soma mudou de m_i para $p-1$, como resultado, novos termos serão adicionados as expansões polinomiais, podemos assumir com segurança este resultado, pois quando $n > m_i$ temos $\displaystyle\binom{m_i}{n} = 0$.

$$\equiv \prod_{i=0}^{k}\left(\sum_{n=0}^{p-1}\binom{m_i}{n}Y^n\right) \bmod p$$

Aqui, transformamos o produto do somatório no somatório do produto. Antes disso, substituímos, Y por X^{m_i}.

$$\equiv \prod_{i=0}^{k}\left(\sum_{n=0}^{p-1}\binom{m_i}{n}X^{m_i n}\right) \bmod p$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{p-1}\binom{m_0}{n}X^n \cdot \sum_{n=0}^{p-1}\binom{m_1}{n}X^{P^1 n} \cdot \ldots \cdot \sum_{n=0}^{p-1}\binom{m_k}{n}X^{p^k n} \bmod p$$

Damos a cada soma uma variável única.

$$\equiv \sum_{n_0=0}^{p-1}\binom{m_0}{n_0}X^n \cdot \sum_{n_1=0}^{p-1}\binom{m_1}{n_1}X^{P^1 n} \cdot \ldots \cdot \sum_{n_k=0}^{p-1}\binom{m_k}{n_k}X^{p^k n} \bmod p$$

Seja Z seja um conjunto, tal que $Z = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$. Convertemos o produto da soma em soma do produto.

$$\equiv \sum_{n_0, n_1, \ldots n_k \in Z}\left(\prod_{i=0}^{k}\binom{m_i}{n_i}X^{p^i n_i}\right) \bmod p$$

$$\equiv \sum_{n_0, n_1, \ldots n_k \in Z}\left(\prod_{i=0}^{k}\binom{m_i}{n_i}\prod_{i=0}^{k}X^{p^i n_i}\right) \bmod p$$

Temos que $\prod_{i=0}^{k} X^{p^i n_i} = X^{\sum_{i=0}^{k} p^i n_i}$, onde $\sum_{i=0}^{k} p^i n_i$ é um número na base p, portanto podemos dizer que $X^{\sum_{i=0}^{k} p^i n_i} = X^n$, onde $0 \leq n < L$. L é o maior número que podemos fazer ao escolher o valor de n_i a partir de $n_0, n_1, \ldots, n_k \in Z$. O maior valor que podemos agregar é escolher cada valor de n_i como $p-1$. Assim $L = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \ldots + (p-1)p^k$. Isso significa $L \geq m$.

Assim, podemos reescrever $\equiv \sum_{n_0, n_1, \ldots n_k \in Z}\left(\prod_{i=0}^{k}\binom{m_i}{n_i}\prod_{i=0}^{k}X^{p^i n_i}\right) \bmod p$ como

$$\equiv \sum_{n_0, n_1, \ldots n_k \in Z}\left(\prod_{i=0}^{k}\binom{m_i}{n_i}X^n\right) \bmod p, \text{ em que } n = n_0 + n_1 p + \ldots + n_k p^k$$

Observe que qualquer combinação única de $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k$ cria um valor único para l, que varia de 0 para L.

$$\equiv \sum_{n=0}^{L} \left(\prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} X^n \right) \text{ mod } p.$$

Assim, n_i são os dígitos de n em termos da expansão em base p e m_i são os dígitos de m em termos da expansão em base p. Se, $n > m$, então deve haver um dígito n_i que é maior que m_i para um i particular. Se for esse o caso, então $\binom{m_i}{n_i}$ será 0 desde que $n_i > m_i$. Portanto quando $n \leq L$, podemos reescrever a equação $\equiv \sum_{n_0, n_1, \ldots n_k \in Z} \left(\prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} X^n \right)$ mod p, como:

$$\equiv \sum_{n=0}^{m} \left(\prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} X^n \right) \text{ mod } p$$

Comparando o ponto inicial e final, chegamos a

$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} X^n \equiv \sum_{n=0}^{m} \left(\prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} X^n \right) \text{ mod } p$$

Como os dois polinômios são equivalentes, seus coeficientes devem ser equivalentes. Portanto,

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \text{ mod } p$$

em que m_i são dígitos de m e n_i são dígitos de n em base p. ■

Outra demonstração é através do princípio de indução finita, no qual utilizaremos o seguinte lema:

Lema 3.5. *Seja p primo, $m = cp + a$ e $n = dp + b$ para inteiros não negativos a, b, c, d com a e b entre 0 e $p - 1$, então:*

$$\binom{m}{n} \equiv \binom{c}{d} \binom{a}{b} \textit{ mod } p$$

Demonstração. Pelo Lema 3.3, temos que

$$(1 + x)^p \equiv 1 + x^p \text{ mod } p$$

Pelo Lema 3.2, temos que p divide cada coeficiente binomial $\binom{p}{k}$ com $1 \leq k < p$, assim

$$\begin{aligned}(1+x)^m = (1+x)^{cp+a} &= ((1+x)^p)^c(1+x)^a \\ &\equiv (1+x^p)^c(1+x)^a \bmod p\end{aligned}$$

O coeficiente de x^n na expansão de $(1+x)^m$ é $\binom{m}{n}$, pelo que tem de ser congruente módulo p com o coeficiente de x^n no produto da direita. Utilizando o teorema binomial, temos que o produto da direita é:

$$(1+x^p)^c(1+x)^a = \left(\sum_{i=0}^{c}\binom{c}{i}x^{ip}\right)\left(\sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}x^j\right)$$

Sendo $0 \leq j \leq a < p$ a única maneira de obter $x^n = x^{dp+b}$ é nesta expressão considerarmos $i = d$ e $j = b$. Assim temos que o coeficiente será $\binom{c}{d}\binom{a}{b}$.

Portanto,

$$\binom{m}{n} \equiv \binom{c}{d}\binom{a}{b} \bmod p$$

■

Demonstração do Teorema de Lucas, por indução:

Demonstração. Por indução em k, temos que:

Para $k = 1$, temos

$m = m_1p + m_0 = [m_1m_0]_p$ e $n = n_1p + n_0 = [n_1n_0]_p$ deste modo temos

$$\binom{m}{n} = \binom{m_1p+m_0}{n_1p+n_0}$$

Pelo Lema 3.5, temos que

$$\binom{m_1p+m_0}{n_1p+n_0} \equiv \binom{m_1}{n_1}\binom{m_0}{n_0} \bmod p.$$

Consideremos que o teorema seja válido para k.

Provaremos que é válido para $k+1$.

Se $m = [m_{k+1}m_k \ldots m_1m_0]_p$ e $n = [n_{k+1}n_k \ldots n_1n_0]_p$

Então $m = m'p + m_0$ e $n = n'p + n_0$, onde $m' = [m_{k+1}m_k \ldots m_1]_p$ e $n' = n_{k+1}n_k \ldots n_1]_p$

Pelo Lema 3.5, temos

$$\binom{m}{n} \equiv \binom{m'}{n'}\binom{m_0}{n_0} \bmod p$$

Pelo fato de m' e n' têm expansões à base p um dígito mais curta, podemos aplicar a hipótese de indução. Assim temos,

$$\binom{m}{n} \equiv \binom{m_k}{n_k} \cdot \binom{m_{k-1}}{n_{k-1}} \cdot \ldots \cdot \binom{m_2}{n_2} \cdot \binom{m_1}{n_1} \cdot \binom{m_0}{n_0} \bmod p.$$

Logo, o teorema é válido para $k+1$. Portanto, por indução, é válido para todo k. ■

3.2.1 Aplicações do Teorema de Lucas

Uma aplicação direta do Teorema de Lucas é resolver o seguinte problema: Qual é o resto de um coeficiente binomial quando dividido por um número primo?

Exemplo 3.3. *[6] Encontre o resto da divisão de* $\binom{2300}{1044}$ *por* 7.

Solução: Primeiramente escrevemos 2300 e 1044 em termos da expansão em base 7, temos assim

$2300 = 6 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 4 = [6464]_7$

$1044 = 3 \cdot 7^3 + 0 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 1 = [3021]_7$

Pelo Teorema de Lucas, temos

$$\binom{2300}{1044} \equiv \binom{6}{3}\binom{4}{0}\binom{6}{2}\binom{4}{1} = 20 \cdot 1 \cdot 15 \cdot 4$$

$$\equiv 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = 24 \equiv 3 \bmod 7$$

Logo, o resto é 3.

Exemplo 3.4. *Uma pirâmide formada por latas, contem uma lata no topo, 2 latas na segunda camada, 3 latas na terceira e assim por diante até a base que tem 200 latas. Este grande lote de latas será distribuido em caixas contendo 11 latas cada. Quantas latas permanecerão sem distribuição?*

Solução: Podemos escrever a quantidade de latas como:

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \ldots + \binom{200}{1}$$

Pelo Teorema das Colunas, obtemos

$$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\ldots+\binom{200}{1}=\binom{201}{2}$$

Escrevendo 201 e 2 em termos da expansão em base 11, temos:
$201=[173]_{11}$ e $2=[2]_{11}$
Utilizando o Teorema de Lucas, temos

$$\binom{201}{2}\equiv\binom{1}{0}\binom{7}{0}\binom{3}{2}\equiv 3 \bmod 11$$

Portanto, sobrará 3 latas sem serem distribuídas em caixas.

Através do Teorema de Lucas podemos descobrir quantos números pares há numa linha n do Triângulo de Pascal.

Corolário 3.1. *Para todo m, n inteiros não negativos e todo p primo, p divide $\binom{m}{n}$ se e só se algum dos dígitos da expansão de n em base p for maior que o dígito na posição correspondente da expansão base p de m.*

Demonstração. Para que p possa dividir $\binom{m}{n}$, pelo Teorema de Lucas tem que dividir

$$\binom{m_k}{n_k}\cdot\binom{m_{k-1}}{n_{k-1}}\cdot\ldots\cdot\binom{m_2}{n_2}\cdot\binom{m_1}{n_1}\cdot\binom{m_0}{n_0}$$

onde m e n são expansões na base p, tal que $m=[m_km_{k-1}...m_2m_1m_0]_p$ e $n=[n_kn_{k-1}...n_2n_1n_0]_p$.

Como p é primo, isso significa que para algum i, p tem de dividir $\binom{m_i}{n_i}$. Se $n_i\leq m_i$ temos que p divide $\binom{m_i}{n_i}=\dfrac{m_i!}{n_i!\cdot(m_i-n_i)!}$ o que implica que p divide $m_i!$, o que é impossível pelo fato de p ser primo e maior que m_i. Logo temos de ter $n_i>m_i$ o que implica $\binom{m_i}{n_i}=0$, que é divisível por p. ∎

Exemplo 3.5. *Quantos números da linha 2021 do Triângulo de Pascal são pares?*

Solução: Queremos saber quantos números da forma $\binom{2021}{k}$ são pares. Para isso contamos quantos números dessa forma são ímpares e subtraímos do total de elementos da linha 2021 do Triângulo de Pascal. Utilizando o Teorema de Lucas, temos que 2021 na base 2 é $2021=[11111100101]_2$. Se $k=[k_{11}k_{10}k_9...k_1k_0]_2$, então:

$$\binom{2021}{k}\equiv\binom{1}{k_{11}}\binom{1}{k_{10}}\binom{1}{k_9}\binom{1}{k_8}\binom{1}{k_7}\binom{1}{k_6}\binom{0}{k_5}\binom{0}{k_4}\binom{0}{k_3}\binom{1}{k_2}\binom{0}{k_1}\binom{1}{k_0} \bmod 2$$

Pelo Corolário 3.1, temos que isto é diferente de zero se e só se cada k_i estiver entre 0 e o número acima dele no coeficiente binomial. Temos assim $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2$ escolhas possíveis para os k_i o que resulta em 256 valores de k tais que 2 não divide $\binom{n}{k}$. Como vimos na seção 2, uma linha n do Triângulo de Pascal possui $n+1$ termos, desta forma há 2.022 elementos na linha 2021 do Triângulo de Pascal, portanto $2.022 - 256 = 1.766$ números desta linha que são pares.

Podemos generalizar este exemplo, percebendo que o número das entradas da linha n do Triângulo de Pascal que não são divísiveis por p é:

$$(n_k+1)\cdot(n_{k-1}+1)\cdot\ldots(n_1+1)\cdot(n_0+1)$$

Pois, seja $n = [n_k n_{k-1} \ldots n_1 n_0]_p$ e $m = [m_k m_{k-1} \ldots m_1 m_0]_p$. Temos que $\binom{n}{m}$ não é divisível por p se e somente se $m_i \leq n_i$ para $0 \leq i \leq k$. Assim existe $n_i + 1$ escolha para cada m_i.

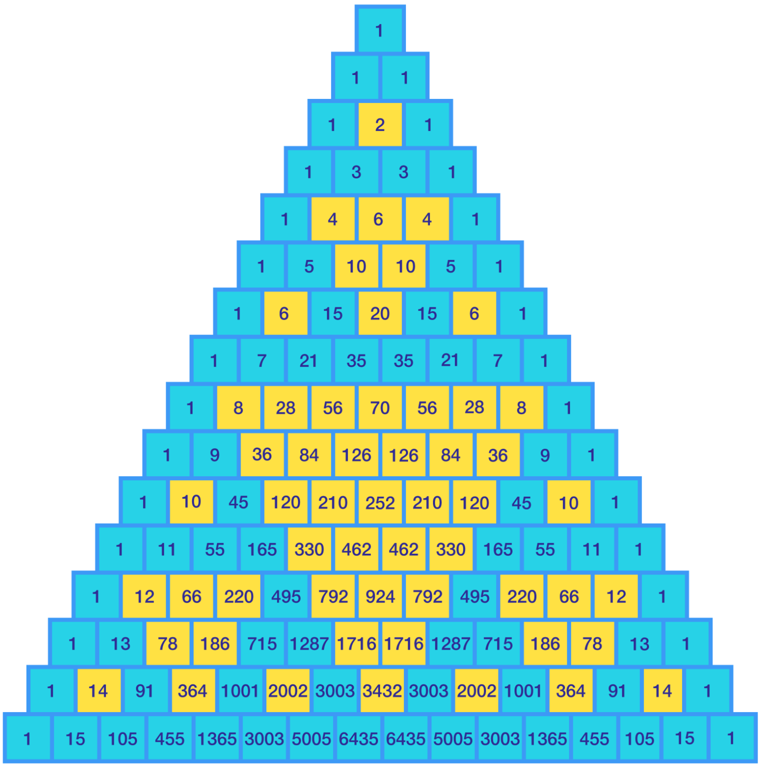
Exemplo 3.6. *Quantos números da linha* 15 *do Triângulo de Pascal são ímpares?*

Solução: Verificaremos a quantidade de elementos da linha 15 do Tirângulo de Pascal que não são divisíveis por 2, temos que $15 = [1111]_2$ assim a quantidade de elementos que não são divisíveis por 2 são $2\cdot2\cdot2\cdot2 = 16$, logo 16 números da linha 15 do Triângulo de Pascal são ímpares, ou seja, não há nenhum número par nesta linha.

Se construímos um Triângulo de Pascal tomando as pariedades dos coeficientes binomiais módulo 2 e pintarmos os elementos pares e ímpares de cores diferentes, obtemos o mesmo padrão do Triângulo de Sierpinskie[1]. Na Figura 5 a seguir, podemos verificar um Triângulo de Pascal módulo 2 até à linha 15, onde temos de azul os números ímpares e de amarelo temos os números pares.

[1]Figura geométrica obtida através de um processo recursivo.

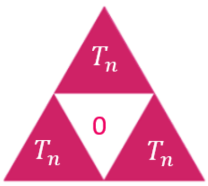
Figura 5: Triângulo de Pascal



Fonte: https:brilliant.org/wiki/lucas-theorem/.

Através do Teorema de Lucas, podemos explicar essa estrutura recursiva, que aparece no Triângulo de Pascal quando calculamos os coeficientes binomiais módulo 2.

Proposição 3.3. *Seja T_n o Triângulo de Pascal até a linha $2^n - 1$ considerando as entradas módulo 2. Para $n \geq 1$, T_{n+1} tem como estrutura:*



Demonstração. As primeiras $2^n - 1$ linhas, equivalem às linhas de T_n, evidenciando assim o T_n em cima. A segunda parte do padrão condiz da linha 2^n a $2^{n+1} - 1$, são as linhas da forma $2^n + i$ com $i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$. Iremos fixar um desses $i's$.

Temos que, a expansão à base 2 de $2^n + i$ é igual a expansão à base 2 de i tendo um dígito 1 acrescentado na posição $n+1$ e possivelmente alguns zeros.

Pelo Teorema de Lucas para $k = 0, 1, \ldots, i$, como $k \leq i$, temos

$$\binom{i}{k} \equiv \binom{i+2^n}{k} \bmod 2,$$

isto explica o T_n do lado esquerdo, e por simetria explica também o T_n do lado direito, que ocorre para $k = 2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^n + i$.

Agora, provamos que entre os dois T_n as entradas são zeros, ou seja, as entradas correspondem a elementos pares.

Se $i < k < 2^n$, então como $i < k$ algum dígito da expansão na base 2 de k precisa ser maior que o dígito correspondente de i. Como $k < 2^n$ este precisa estar antes da posição $n+1$, pelo que ainda é maior que o dígito correspondente da expansão de 2^n+i, logo pelo Teorema de Lucas, temos que $\binom{2^n+i}{k} \equiv 0 \bmod 2$. ■

4 Coeficientes binomiais no ensino médio

No ensino médio, os alunos têm contato com os coeficientes binomiais ao ser abordado o conteúdo de análise combinatória, no qual eles estudam o conceito dos números binomiais para inteiros não negativos, verificam no triângulo de Pascal algumas propriedades e realizam cálculos envolvendo o Binômio de Newton, desta forma esse capítulo tem por objetivo propor algumas atividades, que envolva a utilização dos coeficientes binomiais no ensino médio.

De acordo com os Parâmetros Curricular Nacionais - Ensino Médio (PCN) a matemática do ensino médio deve ser vista como uma ciência que possui características específicas, através de seu ensino. "É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas"([2] p.40). Assim, os conteúdos que abordam os coeficientes binomiais podem ser aplicados no ensino médio verificando quais conceitos podem ser explorados.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (PCN+) que são orientações educacionais complementares aos PCN, temos que a matemática no ensino médio precisa ser desenvolvida de modo que contribua para o exercício da cidadania, preparando o aluno para o mundo do trabalho e para continuação dos estudos, os PCN+ trazem como uma das metodologias a resolução de problemas, que é considerada como "peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios"([3] p. 112).

Os conteúdos de matemática nos PCN+ são sistematizos em três eixos ou três temas estruturadores que são: 1. Álgebra: números e funções; 2. Geometria e medidas; 3. Análise de dados. O eixo Análise de dados é organizado em três unidades temáticas: Estatística, Contagem e Probabilidade. Na unidade temática contagem podemos relacionar o conteúdo que envolve os coeficientes binomiais, embora não há citação direta sobre os conteúdos triângulo de Pascal e binômio de Newton podemos considerá-los separados na parte flexível do currículo que é permitido nos PCN+, visto que estes conteúdos se articulam.

A BNCC do Ensino Médio na área de Matemática e suas tecnologias, possui competências específicas da área no qual cada competência possui habilidades a serem desenvolvidas, assim na BNCC não há citação direta de conteúdos a serem aplicados no currículo, mas sim as habilidades que devem ser alcançadas, estas habilidades são apresentadas sem a indicação de seriação, permitindo assim a flexibilização dos currículos de cada unidade escolar. [1]

A habilidade que contribue para o desenvolvimento dos conteúdos que envolve os coeficientes binomiais é: "(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore"([1] p. 537).

Esta habilidade esta relacionada com a competência específica 3:

> "Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente"([1] p. 535).

Esta competência, relaciona a resolução e formulação de problemas que sejam significativos para o aluno, fazendo com que ele seja capaz de reconhecer e identificar os procedimentos matemáticos necessários para resolver algum problema, e assim consiga aplicar e executar tal procedimento. Ao abordar um conteúdo, de acordo com a BNCC este pode envolver várias habilidades dependendo da forma que for apresentado, assim os conteúdos que envolve os coeficientes binomiais podem atingir outras habilidades e competências, conforme for desenvolvido pelo professor.

4.1 Sugestões de atividades

Os conteúdos de análise combinatória no currículo referência da rede estadual de educação de Goiás, estão inseridos na 2ª série do ensino médio no 3° bimestre. Para as atividades propostas consideramos que os alunos já tenham conhecimento sobre os conteúdos de análise combinatória como: princípio multiplicativo e aditivo, fatorial, arranjo, permutação e combinação simples. Fica a critério do professor estipular o número de aulas necessárias para a realização das atividades, visto que cada turma tem suas pecularidades.

4.1.1 Atividade 1

Esta atividade é um exercício adaptado da referência [8], pode ser introduzida como um incentivo para a apresentação do Teorema das Linhas, levando assim os alunos a desenvolver habilidades referentes ao pensamento númerico, após a apresentação da resolução feita pelos alunos o professor pode relacionar este problema com o Teorema das Linhas, no qual a soma de todas as combinações de n é igual a 2^n.

Série: $2^{\underline{a}}$ série do ensino médio.

Conteúdo: Coeficientes binomiais, Teorema das Linhas.

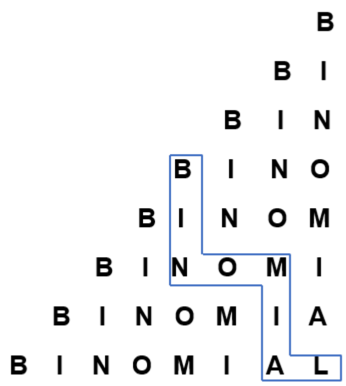
Unidade temática: Números e operações.

Objetivo: Conhecer e utilizar o Teorema das Linhas.

Atividade proposta: De quantas maneiras podemos obter a palavra BINOMIAL, no quadro a seguir, podendo ir sempre para baixo ou para direita?

							B
						B	I
					B	I	N
				B	I	N	O
			B	I	N	O	M
		B	I	N	O	M	I
	B	I	N	O	M	I	A
B	I	N	O	M	I	A	L

Na figura a seguir, temos um exemplo de possibilidade formar a palavra BINOMIAL, partindo de B e indo para baixo e para direita.



Observando esta figura, temos que a maneira de formarmos a palavra BINOMIAL começando com o quarto B (da direita para esquerda) é $\binom{7}{3}$, pois temos 7 passos para formar a palavra desejada e em três momentos precisamos mover para a direita.

Solução: Começando com o primeiro B (da direita para esquerda), temos $\binom{7}{0}$ possibilidade de formar a palavra BINOMIAL, pois iremos escolher 0 passos para avançarmos para direita. Para o segundo B (da direita para esquerda), temos $\binom{7}{1}$ possibilidades, pois em algum momento precisamos escolher um passo para a direita. Com o terceiro B, temos $\binom{7}{2}$ possibilidades, pois precisamos escolher dois passos para irmos para direita, de maneira análoga, temos $\binom{7}{3}$ possibilidades para o quarto B, $\binom{7}{4}$ possibilidades para o quinto B, $\binom{7}{5}$ possibilidades para o sexto B, $\binom{7}{6}$ possibilidades para o sétimo B. E, para o último B, temos $\binom{7}{7}$ possibilidades, pois todos os passos serão para direita.

Pelo príncipio aditivo, temos

$$\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}$$

Pelo Teorema das Linhas, obtemos

$$\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}=2^7=128$$

maneiras de obtermos a palavra BINOMIAL de acordo com o enunciado.

4.1.2 Atividade 2

Esta atividade tem o intuito de desenvolver as habilidades algébricas dos alunos, levando a reconhecer uma outra propriedade dos coeficientes binomiais a Relação de Fermat, através dela temos um outro modo de obter os termos de uma linha do Triângulo de Pascal.

Série: 2ª série do ensino médio.

Conteúdo: Coeficientes binomiais.

Unidade temática: Números e operações.

Objetivo: Conhecer a Relação de Fermat.

Atividade proposta: Utilizando a definição dos coeficientes binomiais prove que

$$\frac{\binom{n}{p+1}}{\binom{n}{p}} = \frac{n-p}{p+1}$$

Solução:

$$\frac{\binom{n}{p+1}}{\binom{n}{p}} = \frac{\dfrac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}}{\dfrac{n!}{p!(n-p)!}} =$$

$$\frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \cdot \frac{p!(n-p)!}{n!} = \frac{n!p!(n-p)(n-p-1)!}{(p+1)!(n-p-1)!n!}$$

$$\frac{p!(n-p)}{(p+1)p!} = \frac{(n-p)}{(p+1)}$$

Ao multiplicarmos cruzado $\frac{\binom{n}{p+1}}{\binom{n}{p}} = \frac{n-p}{p+1}$ obtemos a Relação de Fermat $\binom{n}{p+1} = \frac{n-p}{p+1}\binom{n}{p}$, após os alunos fazerem a demonstração algébrica o professor pode mostrar como obter os termos das linhas do Triângulo de Pascal sem conhecer os termos da linha anterior, utilizando a Relação de Fermat.

Por exemplo, a linha 12 do Triângulo de Pascal começa com o termo 1 e depois 12, para calcular o próximo termo utilizando a Relação de Fermat, temos que multiplicar o termo anterior por $\dfrac{n-p}{p+1}$, no qual $n = 12$ e $p = 1$, assim obtemos:

$$\frac{12-1}{1+1} = \frac{11}{2} \cdot 12 = \frac{132}{2} = 66$$

que é o termo da linha 12 e coluna 2, o próximo termo basta multiplicarmos 66 por $\dfrac{12-2}{2+1}$

$$\frac{10}{3} \cdot 66 = \frac{660}{3} = 220$$

Continuando calcular os termos, temos

$$\frac{9}{4} \cdot 220 = \frac{1980}{4} = 495$$

$$\frac{8}{5} \cdot 495 = \frac{3960}{5} = 792$$

$$\frac{7}{6} \cdot 792 = \frac{5544}{6} = 924$$

Pela simétria do Triângulo de Pascal, basta repetirmos os termos em ordem decrescente, obtendo assim todos os termos da linha 12 do Triângulo de Pascal.

4.1.3 Atividade 3

Através desta atividade os alunos podem perceber que resolver um problema utilizando as propriedades dos coeficientes binomiais, como a relação de Stifiel e os coeficientes binomiais complementares, torna a resolução mais simples.

Série: 2ª série do ensino médio.

Conteúdo: Coeficientes binomiais.

Unidade temática: Números e operações.

Objetivos: Utilizar as propriedades dos coeficientes binomiais.

Atividade proposta: (PUC-SP) No saguão de um teatro, há um lustre com 10 lâmpadas, todas de cores distintas entre si. Como medida de economia de energia elétrica, o gerente desse teatro estabeleceu que só deveriam ser acesas, simultaneamente, de 4 a 7 lâmpadas, de acordo com a necessidade. Nessas condições, de quantos modos distintos podem ser acesas as lâmpadas desse lustre?

Solução: Como só deve acender 4, 5, 6 ou 7 lâmpadas simultaneamente temos:

$$\binom{10}{4}+\binom{10}{5}+\binom{10}{6}+\binom{10}{7}$$

Pela relação de Stifel, temos que $\binom{10}{4}+\binom{10}{5}=\binom{11}{5}$ e $\binom{10}{6}+\binom{10}{7}=\binom{11}{7}$

Pela propriedade dos binomiais complementares, temos que $\binom{11}{7}=\binom{11}{4}$

Assim,

$$\binom{10}{4}+\binom{10}{5}+\binom{10}{6}+\binom{10}{7}=\binom{11}{5}+\binom{11}{4}=\binom{12}{5}=\frac{12!}{5!7!}=792$$

4.1.4 Atividade 4

Esta atividade irá relacionar a propriedade de simetria dos coeficientes binomiais de uma linha do triângulo de Pascal. Será necessário que os alunos relembrem como se resolve uma equação do 2° grau. É preciso utilizar a relação de Stifel para encontrar a alternativa correta.

Série: 2ª série do ensino médio.

Conteúdo: Coeficientes binomiais, triângulo de Pascal, equação do 2° grau.

Unidade temática: Números e operações.

Objetivos: Reconhecer a simetria dos termos de uma linha do Triângulo de Pascal.
Utilizar a relação de Stifel para encontrar a alternativa correta.

Atividade proposta: A soma dos três primeiros elementos de uma linha n do triângulo de Pascal com os três últimos elementos dessa linha resulta em 344. Qual o maior termo desta linha?

a) $\binom{17}{6}+\binom{16}{6}+\binom{16}{7}$

b) $\binom{17}{7}+\binom{16}{7}+\binom{16}{8}$

c) $\binom{17}{8}+\binom{16}{8}+\binom{16}{9}$

d) $\binom{17}{11}+\binom{16}{11}+\binom{16}{12}$

Solução: Uma linha n do triângulo de Pascal começa com o termos 1 depois n e o próximo termo é $\binom{n}{2}$. Pela simetria deste triângulo, os 3 últimos termos são iguais aos três primeiros, temos assim que

$$\begin{gathered}1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{2}+n+1=344\\ 2+2n+2\cdot\binom{n}{2}=344\\ 2+2n+2\cdot\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}=344\\ 2+2n+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=344\\ 2+2n+n(n-1)=344\\ 2+2n+n^2-n=344\\ n^2+n-342=0\end{gathered}$$

Temos uma equação do 2° grau, utilizando a fórmula de Bhaskara, obtemos

$$\begin{gathered}n=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-432)}}{2}\\ n=\frac{-1\pm\sqrt{1369}}{2}\\ n=\frac{-1\pm 37}{2}\\ n=\frac{36}{2}=18\end{gathered}$$

Como $n>0$, temos que a linha do Triângulo de Pascal é a linha 18, agora iremos calcular o maior termo desta linha. A linha 18 possui 19 termos, assim pela simétria do Triângulo de Pascal o maior termos desta linha é $\binom{18}{9}$. Agora, analisaremos as alternativas:

Na letra a) temos $\binom{17}{6}+\binom{16}{6}+\binom{16}{7}$

Pela relação de Stifel, obtemos $\binom{17}{6}+\binom{17}{7}=\binom{18}{7}$

Na letra b) temos $\binom{17}{7}+\binom{16}{7}+\binom{16}{8}$

Pela relação de Stifel, obtemos $\binom{17}{7}+\binom{17}{8}=\binom{18}{8}$

Na letra c) temos $\binom{17}{8}+\binom{16}{8}+\binom{16}{9}$

Pela relação de Stifel, obtemos $\binom{17}{8}+\binom{17}{9}=\binom{18}{9}$

Na letra d) temos $\binom{17}{11}+\binom{16}{11}+\binom{16}{12}$

Pela relação de Stifel, obtemos $\binom{17}{11}+\binom{17}{12}=\binom{18}{12}$

Assim, resposta correta é a letra C.

4.1.5 Atividade 5

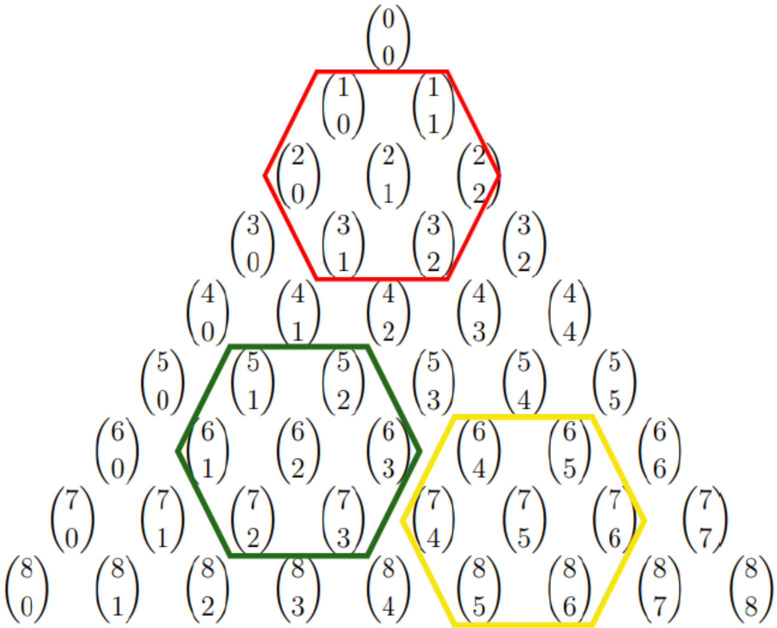
Série: 2ª série do ensino médio.

Conteúdo: Triângulo de Pascal.

Unidade temática: Números e operações.

Objetivos: Explorar a propriedade hexagonal do triângulo de Pascal.
Relacionar geometria com análise combinatória.

Uma propriedade dos coeficientes binomiais é a propriedade hexagonal. Aqui, quando formamos um hexágono em qualquer parte do Triângulo de Pascal e multiplicamos os coeficientes binomiais que formam os vértices não adjacentes, obtemos o mesmo resultado da multiplicação dos coeficientes binomiais restantes, como podemos observar na figura a seguir.



Calculando alternadamente os coeficientes binomiais que formam o hexágono da cor vermelha, temos

$$\binom{1}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{1}=\binom{1}{1}\binom{3}{2}\binom{2}{0}$$

$$1\cdot 1\cdot 3=1\cdot 3\cdot 1$$

$$3=3$$

Calculando alternadamente os coeficientes binomiais que formam o hexágono da cor verde, temos

$$\binom{5}{1}\binom{6}{3}\binom{7}{2}=\binom{5}{2}\binom{7}{3}\binom{6}{1}$$

$$5\cdot 20\cdot 21=10\cdot 35\cdot 6$$

$$2100=2100$$

Calculando alternadamente os coeficientes binomiais que formam o hexágono da cor amarela, temos

$$\binom{6}{4}\binom{7}{6}\binom{8}{5}=\binom{6}{5}\binom{8}{6}\binom{7}{4}$$

$$15\cdot 7\cdot 56=6\cdot 28\cdot 35$$

$$5880=5880$$

A propriedade que relaciona os coeficientes binomiais que formam um hexágono no triângulo de Pascal é a seguinte:

Seja $n \geq 1$ e $1 \leq p \leq n$. Então:

$$\binom{n-1}{p-1}\binom{n}{p+1}\binom{n+1}{p} = \binom{n-1}{p}\binom{n+1}{p+1}\binom{n}{p-1}$$

Demonstração.

$$\binom{n-1}{p-1}\binom{n}{p+1}\binom{n+1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \cdot \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)(n-p-1)!}\frac{n!\mathbf{(n{+}1)}}{(p+1)!(n-p-1)!\mathbf{(n{+}1)}}\frac{(n+1)n!}{p(p-1)!(n+1-p)!} =$$

$$\frac{\mathbf{p}(n-1)!}{\mathbf{p}(p-1)!(n-p)(n-p-1)!}\frac{(n+1)!\mathbf{(n\text{-}p)}}{(p+1)!(n-p-1)!(n+1)\mathbf{(n\text{-}p)}}\frac{(n+1)n!}{p(p-1)!(n+1-p)!} =$$

$$\frac{(n-1)!p}{p!(n-p-1)!(n-p)}\frac{(n+1)!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!(n+1)}\frac{(n+1)n!}{p(p-1)!(n+1-p)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}\frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!}\frac{n!}{(p-1)!(n+1-p)!} = \binom{n-1}{p}\binom{n+1}{p+1}\binom{n}{p-1}$$

■

Atividade proposta: Em um triângulo de Pascal desenhe um hexágono:

a) Verifique a propriedade hexagonal para o hexágono ilustrado.

b) Calcule o número de diagonais desse polígono utilizando a definição dos coeficientes binomiais.

Solução b) Seja um polígono com n lados. Para formar um segmento neste polígono precisamos de dois vérticies, assim temos $\binom{n}{2}$, na contagem desses segmentos temos tanto as diagonais quanto os lados do polígono. Retirando os n lados, temos que a quantidade de diagonais desse polígono é:

$$D_n = \binom{n}{2} - n$$

Calculando a quantidade de diagonais de um hexágono, temos

$$D_6 = \binom{6}{2} - 6 = \frac{6 \cdot 5}{2} - 6 = 15 - 6 = 9$$

4.1.6 Atividade 6

O Binômio de Newton pode ser utilizado para calcular exercícios sobre juros compostos. A fórmula para calcular juro composto é: $M = C \cdot (1 + i)^t$ o termo $(1 + i)^t$ é um binômio, e para calculá-lo podemos utilizar o teorema Binomial, que nos dá uma reposta aproximada, facilitando os cálculos quando não temos uma calculadora por perto. O conteúdo juro composto é apresentado aos alunos na 3ª série do ensino médio, sendo assim esta atividade é adequada para esta seriação.

Série: 3ª série do ensino médio.

Conteúdo: Juros compostos, binômio de Newton.

Unidade temática: Números e operações.

Objetivo: Utilizar o binômio de Newton para calcular exercícios sobre juros compostos.

Atividades propostas: 1) Um capital de R$ 12000,00 foi aplicado a uma taxa de 2% ao mês, no regime de juros compostos, durante 6 trimestres. Calcule o valor do montante, utilizando a fórmula do binômio de Newton para calcular uma aproximação para o valor do binômio.
Solução: Como o tempo é 6 trimestres, temos $6 \cdot 3 = 18$ meses. Pela fórmula dos juros compostos, obtemos

$$M = 12000 \cdot (1 + 0,02)^{18}$$

Utilizando o binômio de Newton, temos

$$(1+0,02)^{18} = \binom{18}{0} 1^{18}(0,02)^0 + \binom{18}{1} 1^{17}(0,02)^1 + \binom{18}{2} 1^{16}(0,02)^2 + \binom{18}{3} 1^{15}(0,02)^3 +$$

$$\ldots + \binom{18}{18} 1^0 (0,002)^1 8.$$

Calculando o desenvolvimento do binômio para os quatro primeiros termos conseguimos uma boa aproximação, desta forma temos

$$(1+0,02)^{18} \approx 1,42$$

Calculando o valor do montante, temos

$$M = 12000 \cdot 1,42$$

$$M \approx 1704$$

2) (UFRJ) Um capital é aplicado por 12 anos e 6 meses a juros compostos de meio por cento ao mês. Ao final desse período, o rendimento acumulado será igual, inferior ou superior a 100%? Justifique.

Solução: 12 anos e 6 meses = 150 meses

Pela fórmula dos juros compostos, temos

$$M = C \cdot (1+0,005)^{150}$$

$$M = C \cdot (1,005)^{150}$$

Precisamos verificar se $(1,005)^{150}$ é maior que 2, menor que 2 ou igual a 2.

Iremos reescrever $(1,005)^{150}$, como

$$(1,005)^{150} = (1+0,005)^{150} = \left(1+\frac{1}{200}\right)^{150}$$

Pela expansão do Binômio de Newton,

$$\left(1+\frac{1}{200}\right)^{150} = \binom{150}{0}1^{150}\left(\frac{1}{200}\right)^{0} + \binom{150}{1}1^{149}\left(\frac{1}{200}\right)^{1} + \binom{150}{2}1^{148}\left(\frac{1}{200}\right)^{2} +$$

$$\ldots + \binom{150}{150}1^{0}\left(\frac{1}{200}\right)^{150}$$

Calculando os 3 primeiros termos, temos

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 150 \cdot 1 \cdot \frac{1}{200} + 11175 \cdot 1 \cdot \frac{1}{40000}$$

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{447}{1600}$$

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{447}{1600} \approx 2,029$$

Logo, ao final dos 150 meses o rendimento será supeiror a 100%.

4.2 Construção do Triângulo de Pascal utilizando o Geogebra

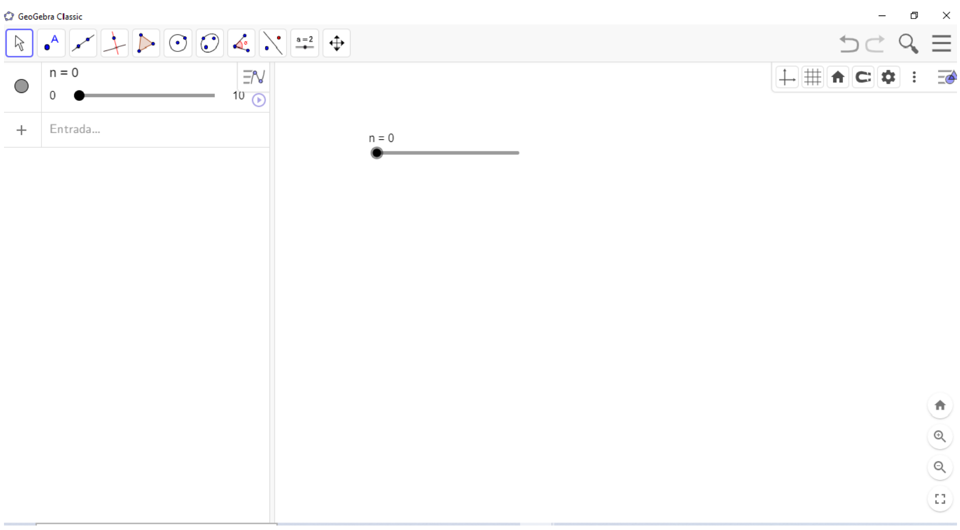
Devido a pandemia do COVID-19, as aulas da rede estadual de educação de Goiás durante este período pandêmico estão acontecendo através do Regime Especial de Aulas Não Presenciais - REANP. Nestas aulas os recursos digitais são bastante utilizados. Sendo assim, apresentamos os passos para que o professor de matemática possa construir o Triângulo de Pascal e o desenvolvimento do Binômio de Newton utilizando o Geogebra[2].

Através de uma videochamada ou no ambiente escolar utilizando-se de um projetor, o professor pode apresentar o Triângulo de Pascal feito no geogebra e discutir com os alunos as propriedades existentes, mostrando também a relação dos coeficientes binomiais com o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.

Para realizar a construção do Triângulo de Pascal no Geogebra precisamos seguir os seguintes passos:

- **1º Passo:** Construa um controle deslizante n, indo de 0 a 10 e incremento 1, este controle deslizante vai determinar a quantidade de linhas do Triângulo de Pascal.

Figura 6: Janela do Geogebra com o controle deslizante



- **2º Passo:** Na barra entrada, construa uma sequência com o seguinte comando:

[2]Software de matemática dinâmica gratuito.

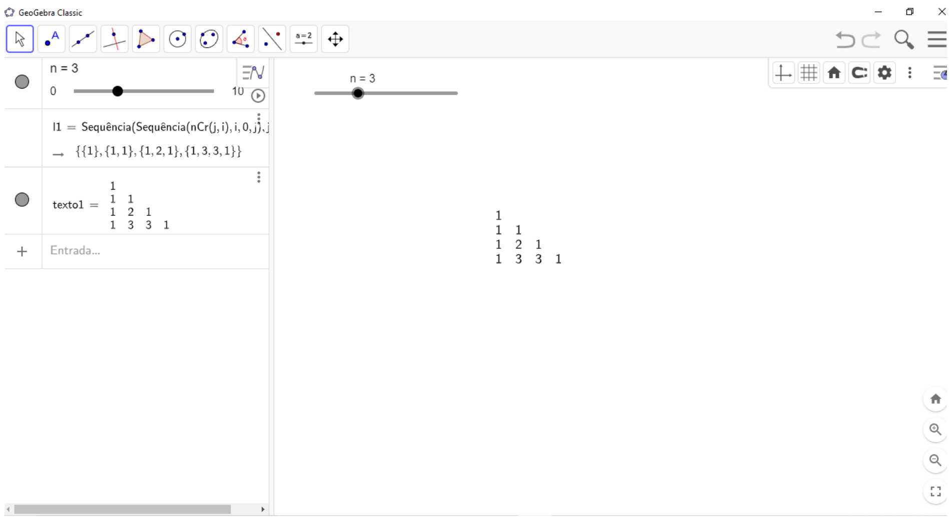
l1=Sequência(Sequência(nCr(j, i), i, 0, j), j, 0, n)

Esta sequência irá formar os termos das linhas do Triângulo de Pascal.

- **3º Passo:** Construa uma tabela de texto com a sequência que criamos. Na barra entrada digite: TabelaDeTexto(l1)

  Esta tabela de texto irá apresentar os termos das linhas do Triângulo de Pascal, construindo assim um Triângulo de Pascal até a décima linha.

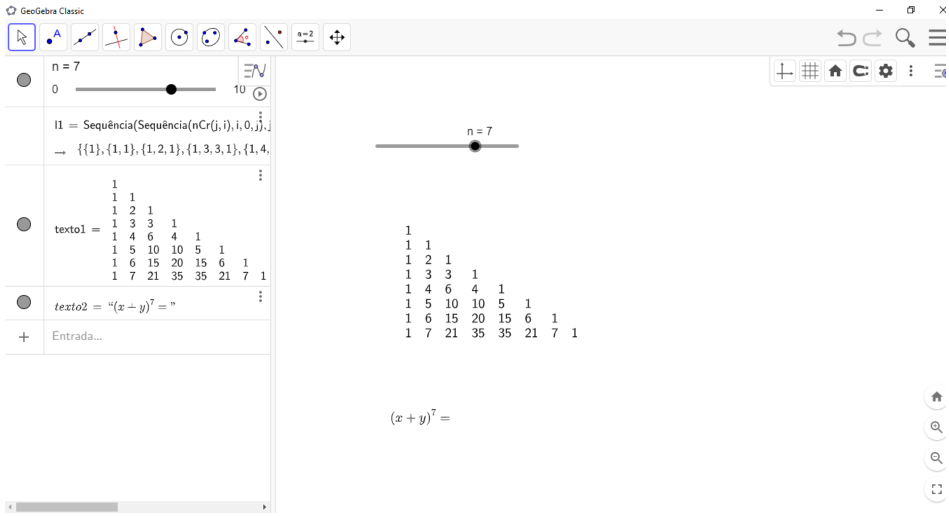
Figura 7: Janela do Geogebra com o Triângulo de Pascal construído



Iremos acrescentar o desenvolvimento de $(x+y)^n$ para que assim os alunos possam ter uma melhor visualização que os termos das linhas do Triângulo de Pascal são os mesmos termos do desenvolvimento do binômio. Para isso precisamos continuar com os seguintes passos:

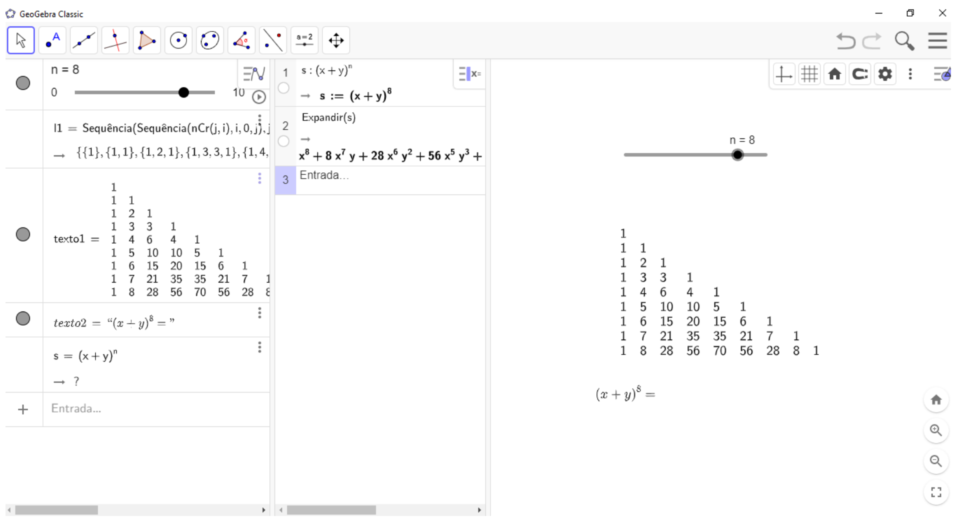
- **4º Passo:** Nas ferramentas da décima janela selecione texto e insira: $(x+y)^n =$ atividando as caixas Serif e Fórmula $\LaTeX$.

Figura 8: Janela do Geogebra com os comandos do passo 4



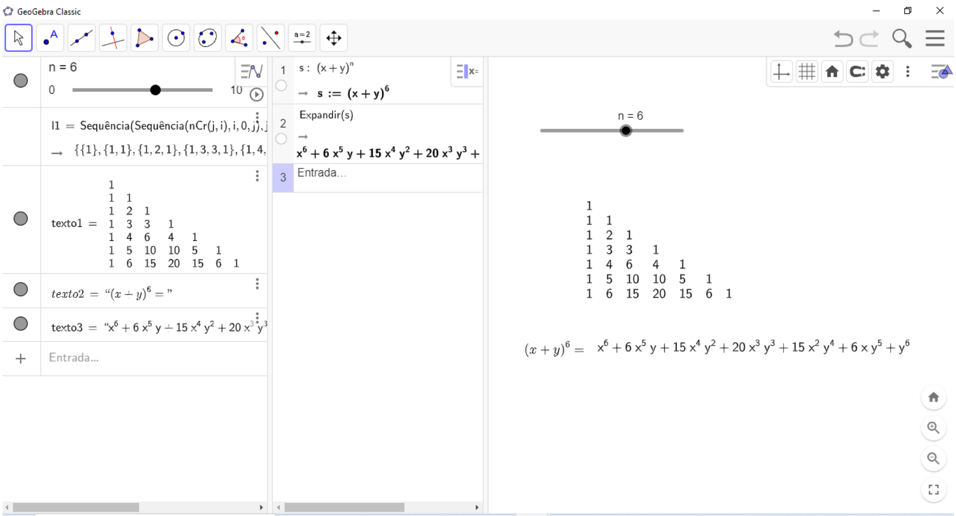
- **5º Passo:** Iremos realizar a expansão dos binômios, para isso utilizaremos a Janela CAS. No canto direito do Geogebra clique nos três pontos e selecione: Cálculo Simbólico (CAS) para abrir a janela CAS, insira na primeira cédula: $s : (x + y)^n$, na segunda cédula insira: Expandir(s). Este comando irá realizar os cálculos da expansão do binômio de Newton.

Figura 9: Janela do Geogebra com os comandos do passo 5



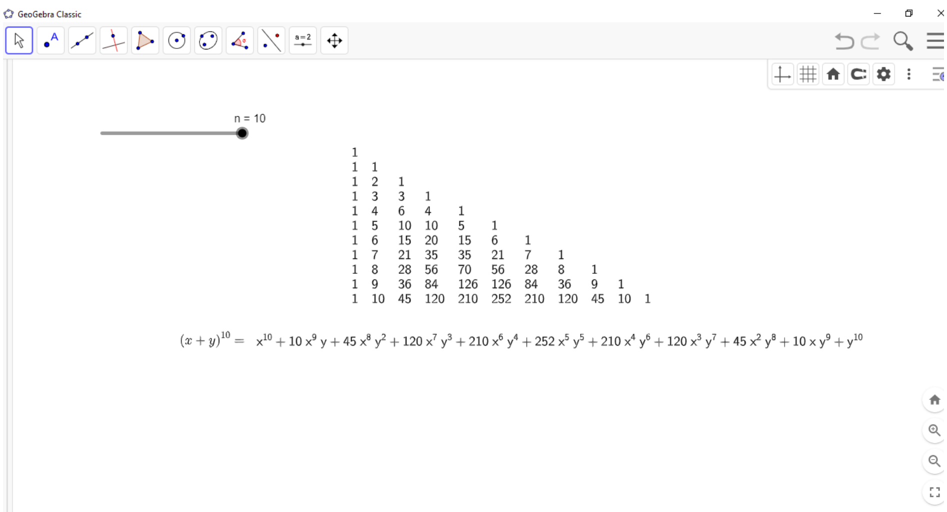
- **6º Passo:** Na barra entrada, insira o comando: texto3=LaTeX($2). Este comando irá fazer com que apareca na janela de visualização do Geogebra as epansões do binômio de Newton.

Figura 10: Janela do Geogebra com o Triângulo de Pascal e a expansão do binômio



Assim está finalizado a nossa contrução, o professor pode ocultar a janela de álgebra e a janela do CAS, clicar com o lado direito do mouse em cima do controle deslizante e selecionar animar ou ir movendo o controle deslizante manualmente.

Figura 11: Janela do Geogebra com o Triângulo de Pascal e a expansão do Binômio de Newton



Conforme for movendo o controle deslizante irá aparecer as linhas do Triângulo de Pascal e o desenvolvimento do Binômio de Newton, facilitando assim para que o aluno possa perceber que os coeficientes do desenvolvimento do binômio de Newton são os termos da respectiva linha do triângulo de Pascal.

Considerações finais

Os coeficientes binomiais representam a quantidade de combinações de n elementos tomados p a p, conhecidos também por serem os elementos que compõem o triângulo de Pascal e os coeficientes do desenvolvimento do binômio de Newton. Eles possuem várias propriedades que auxiliam nos cálculos que envolvem as somas de combinações.

Neste trabalho, apresentamos um material conciso a respeito dos coeficientes binomiais, abordando e demonstrando suas propriedades, expondo exemplos, algumas curiosidades como a sequência de Fibonacci e o Teorema de Lucas, além de propormos atividades para serem aplicadas em sala de aula.

Nas atividades propostas expomos algumas com o objetivo de relacionarmos os coeficientes binomiais com outros conteúdos da Matemática além da Análise Combinatória, para que assim possamos reforçar os conhecimentos nesta vasta área. Embora não tenhamos aplicado em sala de aula as atividades devido a pandemia do COVID-19, acreditamos que a execução das mesmas será bastante positiva, visto que para resolver as atividades os alunos atingirão habilidades propostas pela BNCC e ampliarão a compreensão dos números binomiais, reconhecendo suas propriedades, contribuindo assim para a contrução do conhecimento matemático e para o desenvolvimento da capacidade de argumentação.

A apresentação do triângulo de Pascal construído no Geogebra corrobora também com a BNCC pelo fato de atribuir a importância da utilização dos recursos tecnológicos, estimulando deste modo o desenvolvimento computacional por meio da interpretação.

Por tudo exposto, esperamos que este trabalho possa contribuir para uma aprendizagem mais significativa e enriquecedora. E que possa estimular o professor a dar mais ênfase nestes conteúdos no ensino básico.

Referências

[1] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base – Ensino Médio.** *Brasília,* 2018.

[2] BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, *Brasília: MEC, SEMTEC,* 2000. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em 06 de junho 2021.

[3] BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, *Brasília: MEC, SEMTEC,* 2002. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em 06 de junho 2021.

[4] CORÉS, Fernando Cunha. **Argumentos combinatórios para identidades envolvendo números binomiais, de Fibonacci e de Lucas**, Dissertação de Mestrado - UnB, *Profmat*, 2014.

[5] EVES, Howard **Introdução à história da matemática**, tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: *Editora da Unicamp*, 2011.

[6] HEFEZ, Abramo **Aritmética**, (Coleção PROFMAT) - Rio de Janeiro: *SBM*, 2016.

[7] MESTROVIC, Romeo **Lucas' Theorem: Its Generalizations, extensions and applications (1878–2014)**, arXiv: 1409.3820v1 - [math.NT], 6 sep 2014. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1409.3820.pdf. Acesso em 18 de março 2021.

[8] MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**, Rio de Janeiro: *SBM*, 1991.

[9] MORGADO, A. C. CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**, (Coleção PROFMAT) - Rio de Janeiro: *SBM*, 2015.

[10] ROSEN, Kenneth H. **Matemática Discreta e suas Aplicações.** Tradução: Helena Castro, João Giudice. - 6ªed. Porto Alegre: *AMGH*, 2010.

[11] ROSS, Sheldon **Probabilidade: um curso moderno com aplicações**, Porto Alegre: *Bookman*, 2010.

[12] SANTOS, José Plínio O. et al. **Introdução à Análise Combinatória**, Rio de Janeiro: *Editora Ciência Moderna Ltda.*, 2007.

[13] VIANA, A. **Eu não gosto de ensinar esse tópico**, *Revista Cálculo - Matemática para todos, Edição - 32, Ano - 3*, Setembro 2013.