UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EBER OLIVEIRA SILVA

Geometria Espacial na EJA: Uma Proposta de ensino à luz do Modelo van Hiele com auxílio do Software de Geometria Dinâmica GeoGebra

GOIÂNIA
2021

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese

2. Nome completo do autor

Eber Oliveira Silva

3. Título do trabalho

Geometria Espacial na EJA: Uma Proposta de ensino à luz do Modelo van Hiele com auxílio do Software de Geometria Dinâmica GeoGebra

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Elisabeth Cristina De Faria**, **Professora do Magistério Superior**, em 17/08/2021, às 11:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **EBER OLIVEIRA SILVA**, **Discente**, em 17/08/2021, às 15:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2284426** e o código CRC **1DBACB69**.

Referência: Processo nº 23070.041526/2021-54 SEI nº 2284426

EBER OLIVEIRA SILVA

Geometria Espacial na EJA: Uma Proposta de ensino à luz do Modelo van Hiele com auxílio do Software de Geometria Dinâmica GeoGebra

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.
Orientadora: Profa. Dra. Elisabeth Cristina de Faria.

GOIÂNIA

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Silva, Eber Oliveira
Geometria Espacial na EJA [manuscrito] : Uma Proposta de ensino à luz do Modelo van Hiele com auxílio do Software de Geometria Dinâmica GeoGebra / Eber Oliveira Silva. - 2021.
299 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Elisabeth Cristina de Faria.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2021.
Bibliografia. Anexos. Apêndice.
Inclui lista de figuras, lista de tabelas.

1. EJA. 2. GeoGebra. 3. Geometria Espacial. 4. Pensamento Geométrico. I. Faria, Elisabeth Cristina de, orient. II. Título.

CDU 51

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 30 da sessão de Defesa de Dissertação de **Eber Oliveira Silva**, que confere o título de Mestre em Matemática, **na área de concentração em Matemática do Ensino Básico.**

Ao décimo sexto dia do mês de agosto do ano de dois mil e vinte um, a partir das nove horas e zero minutos, através de web-vídeo-conferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Geometria Espacial na EJA: Uma Proposta de ensino à luz do Modelo van Hiele com auxílio do Software de Geometria Dinâmica GeoGebra".** Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora Elisabeth Cristina de Faria IME/UFG com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Marcelo Almeida de Souza- IME/UFG membro titular interno e a Professora Doutora Vanda Domingos Vieira - PUC-GO membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Elisabeth Cristina de Faria IME/UFG, a Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao décimo sexto dia do mês de agosto do ano de dois mil e vinte um.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Geometria Espacial na EJA: Uma Proposta de ensino à luz do Modelo van Hiele com auxílio do Software de Geometria Dinâmica GeoGebra

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Elisabeth Cristina De Faria**, **Professora do Magistério Superior**, em 16/08/2021, às 10:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **VANDA DOMINGOS VIEIRA**, **Usuário Externo**, em 16/08/2021, às 10:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Almeida De Souza**, **Professor do Magistério Superior**, em 16/08/2021, às 10:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Referência: Processo nº 23070.041526/2021-54 SEI nº 2259629

Eber Oliveira Silva é Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Especialista em Educação de Jovens e Adultos pelo Centro Universitário Barão de Mauá (Ribeirão Preto/SP). Professor efetivo de Matemática do Ensino Básico Técnico Tecnológico (EBTT) da Rede Federal de Ensino desde 2014.

Dedico esse trabalho à minha esposa Lucimar, aos meus pais Isac e Geralda, aos meus irmãos Tânia e Mirson e a todos os meus familiares e amigos, por todo o apoio e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela saúde, livramentos, sabedoria e disposição para superar as dificuldades que surgiram no decorrer dessa jornada e realizar mais esse sonho.

À minha esposa Lucimar pelo companheirismo, compreensão e paciência que dedicou a mim em todos os momentos, me motivando nos momentos de tensão e insegurança.

Aos meus pais Isac e Geralda, a meus irmãos Tânia e Mirson e a meus tios e primos, que compreenderam minha ausência em vários momentos importantes e me prestaram todo o apoio e incentivo que precisei ao longo dessa caminhada.

Aos meus colegas de curso, em especial aos colegas Américo, Andrey, Gabriella, Reinaldo, Murillo e Humberto, que se tornaram grandes amigos e parceiros.

À gestão e demais colegas do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia Goiano Campus Ceres, em especial aos professores Cleiton Mateus, Adriano Honorato, Iron Felisberto e Lucianne Andrade, por todo o apoio e incentivo que me impulsionou a concluir esse curso.

Aos todos os professores do IME, em especial aos professores Paulo Henrique, Geci José, José Hilário, Kélem Lourenço, Ole Peter e Jhone Caldeira, pelo acolhimento, conselhos, orientações e por toda a dedicação nos momentos difíceis do curso.

De uma maneira muito especial, à Professora Doutora Elisabeth Cristina de Faria, pelo aceite em me orientar na elaboração dessa Dissertação e por toda a dedicação, apoio, compreensão, paciência e incentivo que foram fundamentais para a conclusão dessa árdua, porém, prazerosa tarefa.

À Professora Doutora Vanda Domingos Vieira (PUC/GO) e ao Professor Doutor Marcelo Almeida de Souza (IME/UFG), por ter concedido a mim a honra do aceite em participar da Banca de Defesa dessa dissertação e pelas valiosas colaborações para o aperfeiçoamento desse trabalho e que serão guardadas na memória com muito carinho.

À coordenação, à secretaria do IME e a toda a equipe do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UFG, pela receptividade e comprometimento em proporcionar a mim e a meus colegas momentos de grande aprendizado.

Em tempo, agradeço ao IF Goiano por possibilitar, através da Editora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano (IF Goiano), a editoração e publicação do Produto Educacional.

Finalmente, minha gratidão a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desse sonho, me proporcionando grande evolução como pessoa e profissional.

... ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou a sua construção.

Paulo Freire

RESUMO

Esta dissertação é fruto de um estudo que tem como objetivo analisar os desafios e possibilidades para o ensino de geometria espacial na Educação de Jovens e Adultos (EJA), baseando-se em documentos oficiais, nas concepções de EJA, nas teorias de desenvolvimento do pensamento geométrico e nos recursos metodológicos adotados para esse ensino. O estudo se inicia com a análise dos aspectos legais da EJA e as peculiaridades dessa modalidade da Educação Básica, destacando-se algumas concepções, desafios e possibilidades para o ensino de jovens e adultos na atualidade. Na sequência, é feita uma abordagem da teoria de van Hiele, buscando compreender as fases desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno jovem e adulto e como os conceitos geométricos devem ser abordados no processo de ensino e aprendizagem. Como recurso auxiliar ao ensino de Geometria Espacial na EJA, é apresentada, aos professores da área, uma proposta de utilização do *software* GeoGebra, com aspectos pedagógicos para esse ensino. Na experiência do autor como professor de EJA, o que se percebe, a maioria das publicações que tratam do ensino de Geometria com o auxílio do GeoGebra, apesar das grandes contribuições para o ensino, não são motivadoras para o aluno da EJA, principalmente porque o vocabulário adotado e a forma de abordagem dos conteúdos não estão adequados à realidade desse aluno. Nesse sentido, este trabalho discute a necessidade de o professor olhar para as especificidades do ensino para o aluno jovem e adulto, considerando-se seus interesses, expectativas, potencialidades, níveis de pensamento geométrico e ritmos de aprendizagem. Buscando aporte teórico nos documentos oficiais da Educação Básica e em autores como D'Ambrosio (2012); Fonseca (2005); Freire (1996); Gadotti e Romão (2000); Kaleff *[et al]* (1994); Lorenzato (1995); Nunes, Carraher e Schliemann (2011); dentre outros, procura-se compreender os aspectos educacionais da EJA e propor alternativas para a melhoria do ensino de geometria, para que a aprendizagem ocorra de forma satisfatória, em cumprimento ao papel do professor e da escola em proporcionar ao aluno jovem e adulto uma educação de qualidade, como garantido na legislação vigente.

Palavras-chave: EJA. GeoGebra. Geometria Espacial. Pensamento Geométrico.

ABSTRACT

This dissertation is the result of a study that aims to analyze the challenges and possibilities for the teaching of spatial geometry in Youth and Adult Education (EJA), based on official documents, on EJA conceptions, on theories of thought development. geometric and methodological resources adopted for this teaching. The study begins with the analysis of the legal aspects of EJA and the peculiarities of this modality of Basic Education, highlighting some conceptions, challenges and possibilities for teaching young people and adults today. Next, an approach to van Hiele's theory is made, seeking to understand the development phases of geometric thinking in young and adult students and how geometric concepts should be approached in the teaching and learning process. As an auxiliary resource to the teaching of Spatial Geometry at EJA, a proposal for the use of the GeoGebra software is presented to the area's teachers, with pedagogical aspects for this teaching. In the author's experience as an EJA teacher, what can be seen is that most publications dealing with the teaching of Geometry with the help of GeoGebra, despite the great contributions to teaching, are not motivating for the EJA student, mainly because the vocabulary adopted and the way of approaching the contents are not adequate to the reality of this student. In this sense, this work discusses the need for the teacher to look at the specifics of teaching for young and adult students, considering their interests, expectations, potential, levels of geometric thinking and learning rhythms. Seeking theoretical support in official documents of Basic Education and in authors such as D'Ambrosio (2012); Fonseca (2005); Freire (1996); Gadotti e Romão (2000); Kaleff *[et al]* (1994); Lorenzato (1995); Nunes, Carraher e Schliemann (2011); among others, seeks to understand the educational aspects of EJA and propose alternatives to improve geometry teaching, so that learning occurs satisfactorily, in compliance with the role of the teacher and the school in providing quality education for young and adult students, as guaranteed by current legislation.

Keywords: EJA. GeoGebra. Spatial Geometry. Geometric Thinking.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Desde o início de minha vida escolar a Matemática foi minha disciplina preferida, na qual me sobressaía e sentia prazer em estudar. Cursei todo o Ensino Fundamental em uma escola pública municipal em uma comunidade rural, na qual tive excelentes professores e, apesar de me esforçar para obter bons rendimentos em todas as disciplinas, me dedicava mais ao estudo da Matemática, na qual obtinha os melhores resultados.

Ao concluir o Ensino Fundamental, tive a satisfação de me ingressar no Ensino Médio na modalidade EJA em uma escola estadual de Ceres, minha cidade natal e na qual resido. Apesar do esforço dos ótimos professores e da gestão escolar, as condições da escola deixavam muito a desejar em relação ao ensino e, por perceber esses déficits, procurava sempre complementar os estudos em casa, buscando em livros as respostas para meus questionamentos, mesmo sem acesso à rede de internet. Passava os finais de semana estudando para ter condições de ajudar os colegas.

Concluído o Ensino Médio, fui aprovado na primeira tentativa de vestibular e me ingressei no ano de 2003 no curso de Licenciatura Plena em Matemática no extinto Campus Rialma da Universidade Federal de Goiás (UFG). Tive ótimos professores e adquiri bons conhecimentos de geometria euclidiana plana, Geometria Espacial e Geometria Analítica. No entanto, a linguagem utilizada nos cursos superiores não é adequada aos alunos da EJA. Trabalhávamos ali demonstrações de teoremas nas quais predominava uma linguagem simbólica e que, não poucas vezes, superava meus níveis de pensamento geométrico. Somente com muito esforço e estudos posteriores consegui assimilar parte daqueles conteúdos, mas ainda há muito o que aprender.

Apesar da paixão pela Matemática e, mesmo estando em um curso de licenciatura, não imaginava seguir a carreira de professor. A princípio, meu anseio era simplesmente a formação superior em uma instituição federal de ensino, apenas para realização pessoal, e esse curso era minha única opção para alcança-lo. Contudo, me sentia muito feliz com o curso e, durante esse período nasceu o interesse por atuar na área. Esse desejo foi se intensificando à medida que ajudava os colegas de faculdade na preparação para as avaliações, simplesmente pelo prazer de vê-los crescer juntamente comigo.

Em 2007, recém formado, fui convidado para ministrar aulas de Matemática para o Ensino Médio em um colégio estadual da minha cidade e, no período de 2008 a 2012, trabalhei como autônomo informal, ministrando aulas particulares de reforço escolar e preparação para concursos. Mais tarde, em 2012, fui aprovado em um processo seletivo para professor substituto em um Instituto Federal de minha cidade, cumprindo um contrato de 23 meses e, em junho de 2014, solicitei a rescisão do contrato para ser empossado, na mesma instituição de ensino, no cargo de professor da Educação Básica Técnico Tecnológica (EBTT) em caráter efetivo, após aprovação em concurso público.

Atuando como professor de Matemática no Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos (Proeja) desde 2012, fui convidado e designado, em junho de 2016, como Coordenador de Cursos Técnicos na Modalidade EJA da instituição de ensino onde trabalho. Apesar da falta de experiência em gestão, foi uma experiência maravilhosa, na qual, por meio de uma gestão participativa, procurei atender às necessidades dos alunos e orientar os colegas que ainda não tinham experiência com EJA. As experiências como ex-aluno da EJA me auxiliaram muito no desenvolvimento desse trabalho.

Há muito sentia a necessidade de cursar um mestrado de qualidade, sonho que foi, por longos anos, adiado por falta de condições de fazê-lo. No entanto, dentre outras opções, tomei conhecimento do PROFMAT e decidi que era isso o que eu queria para minha vida, pois satisfazia meus anseios e se adequava ao meu perfil profissional. Na terceira tentativa de aprovação no Exame Nacional de Acesso (ENA), consegui me ingressar no ano de 2019. Foi quando conheci colegas e professores que me proporcionaram várias experiências e novos conhecimentos que, com certeza, me tornaram uma pessoa melhor e contribuirão para minha prática ao longo da minha vida profissional.

Na condição de ex-aluno e atual professor na EJA, tenho percebido a dificuldade dos estudantes em assimilar os conteúdos de geometria da forma como são ensinados na escola e também a dificuldade dos professores em ministrar tais conteúdos. Essa percepção sempre me causou muito incômodo e despertou em mim o desejo de contribuir de alguma forma para que essa lamentável situação seja revertida e o ensino dessa importante área da Matemática seja retomado nas escolas de forma significativa.

A esperança de que professores e alunos percebam a beleza da Geometria e se interessem em aprendê-la e ensiná-la com entusiasmo me impulsionaram a elaborar esse trabalho, fruto de uma criteriosa pesquisa bibliográfica, e desenvolver um produto educacional direcionado aos alunos, até mesmo porque, durante esse estudo, constatei a pouca quantidade de materiais especificamente elaborados como orientação e propostas didáticas para a EJA.

Avaliando as dificuldades encontradas pelos alunos de modo geral e, em particular, dentro das peculiaridades da EJA, estou convicto de que a descontextualização dos conteúdos e a adoção de metodologias inadequadas são alguns dos problemas percebidos como geradores da ineficiência do ensino da geometria escolar, uma vez que, principalmente na EJA, o desenvolvimento do pensamento geométrico é impulsionado pelas relações entre o conteúdo que se deseja ensinar e as experiências de vida dos alunos, de modo a tornar o estudo relevante e a aprendizagem significativa para esse aluno.

O professor precisa se preocupar com quais metodologias são adequadas para esse ensino, considerando a possibilidade de abandonar a zona de conforto e buscar novos desafios. Antes de tudo, é preciso conhecer os alunos, suas dificuldades, anseios e expectativas para, a partir daí, traçar as melhores estratégias de ensino para cada situação, dentro do contexto do aluno e da escola, com a consciência de que esta é quem precisa de adequar à realidade do aluno, e não o contrário. É preciso identificar os níveis de pensamento geométrico dos alunos para propor atividades adequadas ao seu estágio de desenvolvimento, conforme explica a teoria de van Hiele, assunto tratado nesse trabalho.

Refletindo sobre minhas próprias dificuldades e recordando as dificuldades relatadas por colegas de trabalho, embora não tenha sido possível levantar dados por meio de uma pesquisa de campo devido à indisponibilidade de tempo hábil para os trâmites legais, decidi estudar sobre o assunto e chego à conclusão de que a raiz desse problema está na formação do professor que, muitas das vezes, tenta ensinar o que não sabe ou simplesmente ignora certos conteúdos importantes por não ter o suporte necessário para ministrá-lo. Falta a nós, professores da EJA, uma boa formação acadêmica em Geometria e uma formação pedagógica específica para se trabalhar na EJA.

Nesse sentido, resta aos profissionais que, assim como eu, defendem a importância da EJA e desejam cumprir nossa missão de proporcionar aos jovens e adultos uma educação de qualidade que lhes é garantida pela legislação brasileira, buscar por conta própria o aprimoramento dos conhecimentos e propor metodologias que auxiliem colegas de profissão e alunos nesse processo de ensino e aprendizagem em Geometria.

É preciso romper com metodologias baseadas em processos tradicionais de ensino que acabam por tornar o ensino mecânico e sem sentido para o aluno e se preocupar em buscar meios para uma educação que respeite o ritmo de aprendizagem do aluno, leve em consideração os diferentes níveis de pensamento e agregue recursos diversos, de acordo com o contexto do grupo. Dada à diversidade da EJA, a escolha da metodologia não é uma tarefa das mais fáceis, pois, como diria o ilustre matemático e professor Ubiratan D’Ambrósio, “Uma das coisas mais notáveis com relação à atualização e ao aprimoramento de métodos é que não há uma receita.

Tudo o que se passa na sala de aula vai depender dos alunos e do professor, de seus conhecimentos matemáticos e, principalmente, do interesse do grupo" (D'AMBROSIO, 2012).

Diante da grande influência tecnológica à qual se submete a sociedade contemporânea, a utilização de softwares educativos tem se revelado uma alternativa importante para facilitar o aprendizado e despertar o interesse dos alunos.

Contudo, esse a eficiência desse recurso depende da mediação do professor, a quem deve ser dada autonomia para planejar ações e decidir sobre quais tecnologias adotar, quando e como introduzir esses recursos tecnológicos como apoio no processo de ensino e aprendizagem, de modo a promover o avanço gradativo nos níveis de pensamento do aluno.

Refletir sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno jovem e adulto e as possíveis contribuições dos ambientes de geometria dinâmica para o ensino de Geometria Espacial na EJA é um dos objetivos desse trabalho. Embora a ideia original se limitasse a desenvolver um tutorial de uso do GeoGebra na linguagem do aluno da EJA, as pesquisas direcionadas pela professora orientadora levaram o autor a conhecer o Modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico e se interessar por aprofundar o estudo nessa linha.

Trata-se, portanto, de um trabalho que busca uma sincronia entre, pelo menos, três temas muito importantes e que merecem estudos mais detalhados, a saber, EJA, pensamento geométrico e softwares de geometria dinâmica. Baseado na minha experiência como professor pesquisador em EJA e na busca de informações sobre os temas escolhidos para a elaboração desse trabalho, percebo a baixa produção de materiais de pesquisa disponíveis sobre o assunto, a exceção de alguns trabalhos que tratam um ou outro tema, mas de maneira isolada.

Nesse sentido, o objetivo desse trabalho é desenvolver uma proposta de trabalho fundamentada em uma pesquisa bibliográfica que nos possibilitou compreender aspectos relacionados ao ensino de geometria, ao ensino na EJA e às possibilidades de utilização do software GeoGebra como recurso didático. Para tal, nos orientamos pela seguinte questão norteadora: quais elementos são significativos para o ensino de geometria espacial para o aluno da EJA?

Procurando adequar esse trabalho às condições de isolamento social, optamos por uma metodologia de trabalho voltada para a pesquisa bibliográfica e a produção de um material que proporcione ao aluno da EJA o estudo de geometria espacial dentro da perspectiva de teoria e prática com o auxílio do GeoGebra. Embora a dissertação tenha sido redigida em uma linguagem mais apropriada para professores, elaboramos um Produto Educacional como recurso complementar a esse trabalho. Trata-se de um e-book o qual, com as mesmas atividades aqui propostas, porém, em uma linguagem direcionada ao aluno da EJA, será editorado e publicado em breve.

Com base no exposto, o primeiro capítulo versa sobre a realidade da EJA e algumas concepções, desafios e possibilidades para o ensino de Geometria nessa modalidade nos dias atuais, enfatizando a compreensão de como ocorre o desenvolvimento do pensamento geométrico de jovens e adultos, à luz da Teoria de van Hiele.

No segundo capítulo, serão apresentadas algumas possibilidades para o ensino de geometria na EJA, destacando-se as contribuições do uso das tecnologias educacionais, em particular, dos ambientes de geometria dinâmica. Destacando-se aspectos pedagógicos do *software* GeoGebra, propõe-se nesse capítulo a utilização desse recurso como instrumento complementar ao ensino de geometria espacial na EJA.

O terceiro capítulo apresenta alguns conceitos geométricos de acordo com os Guias de Referência e uma proposta para o ensino de sólidos geométricos para alunos da EJA, envolvendo a construção, manipulação e análise dos principais sólidos de interesse da geometria, de modo a facilitar a identificação de elementos, relações e propriedades e o desenvolvimento da abstração e do pensamento geométrico por meio de conjecturas e deduções.

O quarto e último capítulo traz considerações sobre o Produto Educacional, que se trata de um livro digital interativo (e-book) com uma proposta elaborada em consonância com o Modelo van Hiele, para o estudo de geometria espacial com o auxílio do software GeoGebra. Esse material, direcionado a alunos da EJA, deve passar pelo processo de editoração e ser publicado em breve, podendo ser explorado, também, por outras pessoas que tenham interesse em aprender geometria de uma forma dinâmica, envolvente e significativa.

1. A EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS E O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Essa seção traz algumas considerações importantes sobre a Educação de Jovens e Adultos (EJA) e o ensino de Geometria Espacial nessa modalidade. Para que se compreenda melhor o que é a EJA e alguns desafios enfrentados desde sua origem e que, apesar dos avanços, ainda perduram até os dias atuais, faz-se aqui uma abordagem dos aspectos legais da EJA como política pública de ensino e algumas possibilidades para o ensino de Geometria nessa modalidade da Educação Básica, à luz da teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, um importante modelo que contribui para a identificação dos níveis de pensamento e favorece os avanços para níveis superiores, facilitando a aprendizagem.

1.1 A Educação de Jovens e Adultos – EJA

A Educação de jovens e Adultos – EJA – é uma modalidade da Educação Básica, criada com o objetivo principal de promover a democratização do ensino no Brasil e destinada aos brasileiros que não tiveram condições de concluir o ensino fundamental ou o ensino médio na idade própria. Apesar das recorrentes quedas no número de matrículas na Educação Básica, o Censo Escolar 2020 aponta um total de 3.002.749 alunos matriculados na EJA sendo 1252.580 no Ensino Médio (BRASIL, 2021, p 27). Esse número bastante expressivo justifica a importância dessa modalidade para a educação brasileira, sob a perspectiva de um ensino de qualidade, ofertado como garantia, ainda que tardia, do direito à cidadania.

Importa destacar que na atualidade a EJA conta com um grande número de alunos jovens, na busca de uma formação rápida para o mercado de trabalho. São, de modo geral, trabalhadores com idade mínima para matrícula de 15 anos para o Ensino Fundamental e 18 anos para o Ensino Médio, não tendo limite máximo de idade para idosos.

Embora a EJA seja um direito garantido nos artigos 206 e 208 da Constituição Federal de 1988 (BRASIL, 1988), seu importantíssimo papel para a educação brasileira somente veio a alcançar maior reconhecimento a partir das efetivas mudanças pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB (BRASIL, 1996). No entanto, faltam ainda políticas públicas de incentivo e valorização dessa importantíssima modalidade, principalmente no tocante à formação docente, materiais didáticos e outros investimentos imprescindíveis como garantia das condições de permanência e êxito essenciais para o possível alcance dos reais objetivos para os quais a EJA foi concebida.

Na concepção de Fonseca (2005, p. 14), a EJA é “uma ação educativa dirigida a um sujeito de escolarização básica incompleta ou jamais iniciada e que acorre aos bancos escolares na idade adulta ou na juventude”. Para a autora, a possibilidade de inclusão ou de reinclusão na escolarização básica, do indivíduo adulto, vítima do impedimento de seu acesso à escolarização ou da interrupção da sua trajetória escolar é, em grande medida, condicionada por fatores inerentes a um amplo contexto de exclusão social e cultural que transcende os limites de um episódio isolado de negação do acesso a um serviço. Outrossim, nega-se aos alunos jovens e adultos o reconhecimento como “sujeitos de conhecimento e aprendizagem”.

Ao que se percebe, a marginalização e a opressão dos sujeitos pelas diferenças sociais estão muito mais explícitas quando se trata da pessoa adulta do que em relação as crianças e adolescentes. Tal situação tem transformado a EJA num campo árido para alunos e professores, seja pelo próprio sentimento de fracasso, abandono e impotência que o aluno adulto carrega em relação à educação escolar, seja pelas dificuldades que os professores encontram para lidar com a diversidade e peculiaridades que caracterizam esse público tão heterogêneo. Com relação às divergências conceituais que permeiam as propostas, realizações e avaliações da Educação de Jovens e Adultos, Fonseca salienta que

> A marca da exclusão definirá um jogo de tensões bastante mais acirrado do que as daquele, já não pouco conflituoso, que estabelece as propostas, as realizações e as avaliações na Educação Básica de crianças e adolescentes. Arroyo (2001) atribui esse acirramento ao cruzamento de interesses que determinam decisões e práticas pedagógicas na EJA, e que são, em geral, muito “menos consensuais do que na educação da infância e da adolescência, sobretudo quando os jovens e adultos são trabalhadores, pobres, negros, subempregados, oprimidos, excluídos”. (FONSECA 2005. pp. 14-15).

A situação parece controversa quando se avalia o amparo legal que a EJA vem conquistando, principalmente pós criação da LDB, em 1996. Desde então, a modalidade vem intensificando, embora de forma bastante tímida, a luta pelo espaço que lhe é de direito, como disposto na seção V, Art. 37º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional 9.394/96, que promove a EJA ao reconhecimento como modalidade específica da educação básica e atribui ao Poder Público a obrigação de promover ações no sentido de viabilizar e gerir políticas de incentivo ao acesso a uma educação gratuita e de qualidade àqueles que não tiveram condições de concluir seus estudos na idade própria, conforme mencionado:

> **Art. 37º.** A educação de jovens e adultos será destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos no ensino fundamental e médio na idade própria. **§ 1º**. Os sistemas de ensino assegurarão gratuitamente aos jovens e aos adultos, que não puderam efetuar os estudos na idade regular, oportunidades educacionais apropriadas, consideradas as características do alunado, seus interesses, condições de vida e de trabalho, mediante cursos e exames.
> **§ 2º.** O Poder Público viabilizará e estimulará o acesso e a permanência do trabalhador na escola, mediante ações integradas e complementares entre si. (BRASIL, 1996).

No entanto, a EJA ainda carece de maior atenção e políticas públicas de incentivo, sobretudo em relação à produção de materiais específicos, formação de professores e adequações metodológicas, como motivação para que jovens e adultos pouco escolarizados retomem os estudos, regatem sua autoestima e conquistem sua cidadania plena, favorecido pelas relações sociais estabelecidas na escola como um ambiente físico e humano que atenda às especificidades e peculiaridades desse público. Muito ainda falta para que o direito estabelecido no texto da lei se concretize através de práticas educacionais que tenham como personagem central o aluno jovem, adulto e idoso.

O tímido número de publicações que explicitam a importância, os avanços e o potencial educativo da EJA reforça o olhar preconceituoso que se encontra ainda arraigado na sociedade e revela o quanto essa modalidade carece de reconhecimento. Enquanto a educação de crianças e adolescentes é colocada em posição de destaque, pouco se sabe sobre a modalidade que oportuniza a jovens, adultos e idosos a realização do sonho de concluir seus estudos, conquistar melhores condições de trabalho e se sentirem capazes de promover as tão sonhadas transformações sociais. Além disso, pouca divulgação há sobre aqueles adultos que conseguiram, através da EJA, o ingresso e êxito em um curso superior.

O reduzido espaço que a Educação de Jovens e Adultos ocupa nos documentos oficiais da educação e o pequeno volume de publicações de obras científicas e materiais didáticos específicos para a modalidade explicitam a real situação da EJA. Se por um lado faltam políticas públicas efetivamente direcionadas para a oferta de um ensino de qualidade para jovens e adultos, por outro, existe um comodismo na sociedade em relação à manifestação dos anseios e expectativas em relação a se fazer valer do direito adquirido de reinserção do aluno jovem, adulto e idoso na trajetória escolar. As Diretrizes Curriculares Nacionais dão margem à intervenção da sociedade, ao ressaltarem que

> É a participação da comunidade que pode dar voz e vez às crianças, aos adolescentes e às suas famílias, e também aos que frequentam a Educação de Jovens e Adultos (EJA), criando oportunidades institucionais para que todos os segmentos envolvidos no processo educativo, particularmente aqueles pertencentes aos segmentos

> majoritários da população que encontram grande dificuldade de se fazerem ouvir e de fazerem valer os seus direitos, possam manifestar os seus anseios e expectativas e possam ser levados em conta, tendo como referência a oferta de um ensino de qualidade para todos. (BRASIL, 2013, p. 117)

Gadotti e Romão (2000), compartilham dessa convicção da importância da intervenção popular no enfrentamento aos problemas educacionais no Brasil, ao salientarem que

> A solução dos problemas educacionais não reside exclusivamente na escola. A história tem mostrado que nenhum país do mundo contemporâneo alcançou níveis elevados de alfabetização sem que suas populações tenham conquistado; simultaneamente, melhorias substanciais nas suas condições de vida e uma distribuição de renda mais equitativa (GADOTTI; ROMÃO, 2000, p. 108)

No cenário atual, a EJA carece da urgente implementação de uma política educacional inclusiva e permanente que priorize a universalização do ensino básico e o respeito às especificidades dos indivíduos e que necessariamente precisa estar vinculada a uma política global de desenvolvimento econômico, de combate às injustiças sociais e a má distribuição de renda, bens e serviços. É preciso que a população manifeste sua insatisfação com as políticas educacionais forjadas nos meandros dos programas de impacto propagandístico implementados pelos governos, denunciando sua ineficácia pela ausência de vínculo com políticas de promoção da melhoria das condições de vida para a maioria da população.

1.2 Concepções, desafios e possibilidades para a EJA na atualidade

A Educação de Jovens e Adultos carece de urgentes e efetivas transformações, visando atingir os fins educacionais propostos na LDB 9.394/96, em seu Art. 22, que dispõe que "a educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores" (BRASIL, 1996, p. 9). É necessário romper com os paradigmas da educação tradicional para admitir que "a lógica hoje é de uma escola flexível, que valorize e desenvolva as diferenças e compartilhe o desafio de aprender o que fazer e quais práticas adotar, atendendo às exigências atuais, adaptando-se aos alunos e não o inverso" (FANTINATO, 2014, p.11).

Um dos aspectos mais preocupantes com relação à educação básica e, em particular, da EJA no Brasil é, sem dúvida, a ausência de políticas efetivas de incentivo à formação continuada docente, ficando a cargo do professor cuidar da sua própria atualização e do seu aprimoramento profissional. Como reflexo da deficiência formativa do professor, a inovação das práticas educativas, configura-se em um constante e angustiante desafio, diante do qual o professor se defronta com as dificuldades na elaboração de um planejamento flexível, marcado pela instabilidade como efeito da diversidade, das necessidades, interesses e anseios de cada turma, além dos níveis de conhecimento e de pensamento matemático.

Nesse sentido, Gadotti e Romão (2000, p. 69) afirmam que a grande revolução na Educação Brasileira depende muito mais da conciliação do compromisso com as camadas oprimidas da população e com as estratégias arquitetadas a partir de uma leitura da realidade do que das alterações na legislação ou do próprio sistema. Pautado nos princípios de liberdade e equidade, o resgate da funcionalidade do saber escolar requer uma reflexão sobre questões do tipo "para quem estou ensinando", "por que planejei minhas aulas dessa forma" e "para que projeto de sociedade estou trabalhando". Esse seria o primeiro passo para o que esses autores chamam de "a grande Revolução Pedagógica". É importante politizar o ensino, porque

> A politização do ato pedagógico tem relação íntima com a questão da recuperação da funcionalidade do saber escolar, isto é, a recaptura da instrumentalidade do que é desenvolvido na sala de aula para o projeto de vida do aluno. É a perda dessa funcionalidade que provoca a evasão, a repetência, o desinteresse, a apatia do alunado, mormente entre os jovens e adultos que trazem para as relações pedagógicas uma série de experiências, vivências e saberes construídos na luta cotidiana pela sobrevivência, sem falar da incorporação da ideia de que os conteúdos e habilidades a serem adquiridos servem apenas para responder às avaliações propostas. (GADOTTI e ROMÃO, 2000, p. 69)

Diante do exposto, há de se considerar ainda que a trajetória da EJA, principalmente nas últimas décadas, revela que o perfil do aluno jovem e adulto da atualidade nem de longe se compara aos tempos que precedem à era da tecnologia e da informação. Isso principalmente porque as exigências do mercado de trabalho já não se encontram mais alinhadas ao modelo de ensino tradicional daquela época. Nesse sentido, verifica-se a necessidade de repensar a prática pedagógica da EJA, sobretudo porque há uma tendência em se nortear pelas diretrizes pensadas para o ensino regular, nesse contexto ineficientes, porque as recentes reformulações em quase nada contemplam as suas peculiaridades.

Nos documentos oficiais da educação brasileira, a Matemática do Ensino Médio tem como meta a formação de cidadãos éticos e autônomos, que tenham plenas condições de compreender os processos produtivos, se inserir no mercado de trabalho e interagir socialmente de forma positiva e transformadora. Quanto à EJA, embora o foco principal esteja no trabalho, não são raros os relatos de alunos que retornam aos estudos em idade avançada no anseio de uma realização pessoal de ingressar numa universidade e conquistar o tão sonhado diploma de curso superior. Nesse sentido, a Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional (BRASIL, 1996), dispõe em seu artigo 35, que as finalidades do Ensino Médio são:

> **I -** a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
> **II -** a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
> **III -** o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> **IV -** a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. (BRASIL, 1996, pp. 13-14).

Quanto à Geometria, a disciplina é apresentada nas Diretrizes Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998) como um dos conteúdos estruturantes para o Ensino Médio. Importa destacar que este é um ramo da Matemática cujo estudo é fundamental para a compreensão da composição das formas existentes no mundo real, constituindo-se num vasto campo de possibilidades de investigação, reflexão, interpretação e dedução. Por favorecer a análise de fatos e o estabelecimento de ligações e relações entre elementos, o estudo da Geometria Espacial promove o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia, além da capacidade de conjecturar, sintetizar, formalizar e aplicar o conhecimento matemático.

Na ausência de diretrizes curriculares específicas para a EJA, dentro de suas especificidades, professores que atuam nessa modalidade devem o fazer, via de regra, apoiados numa proposta de ensino flexível, respeitando as diferenças individuais e considerando os conhecimentos informais trazidos pelos alunos, dentro da perspectiva de que se trata, ou pelo menos assim o deveria, de uma educação que traz consigo, dentre outras possibilidades, o estabelecimento da mediação entre um referencial teórico e prático, relacionado aos saberes e competências construídos e apropriados não somente, mas também, fora do ambiente escolar.

No cenário atual, percebe é que há uma grande carência de educadores inclusivos que sejam capazes de adaptar as atividades e o currículo da modalidade às especificidades do aluno jovem e adulto, considerando-se seus níveis de pensamento, experiências socioculturais e seus modos de relacionar e aplicar o conhecimento matemático a situações do cotidiano. Tais considerações devem nortear as ações pedagógicas, a começar pela escolha dos conteúdos mais relevantes e dos recursos metodológicos a serem adotados.

Nesse sentido, o êxito escolar da EJA encontra-se, de certo modo, a mercê das necessárias e urgentes adequações metodológicas que devem ser constantemente desenhadas em diferentes contextos e que, por percorrerem universos e cenários tão distintos, se caracterizam pelo aprender fazendo e pelo fazer aprendendo em um ambiente potencialmente susceptível a imprevistos e incertezas. O que se espera de positivo nessa situação é que o professor esteja capacitado para, fora de sua zona de conforto, conduza seus alunos a um terreno fértil para o aprimoramento de saberes, novas ideias e concepções, significações, formalizações, construção e socialização de novos conhecimentos.

Importa ainda salientar que não se deve imputar ao aluno a responsabilidade de se adaptar ao ambiente escolar, mas a escola é quem deve se adequar às condições e interesses do seu alunado. Isso pode custar ao professor o abandono da sua zona de conforto, ao abrir mão das metodologias vivenciadas durante sua formação acadêmica para dar lugar ao desconhecido, incerto e, por vezes, inovador. Como sugere D'Ambrosio, "Uma das coisas mais notáveis com relação à atualização e ao aprimoramento de métodos é que não há uma receita. Tudo o que se passa na sala de aula vai depender dos alunos e do professor, de seus conhecimentos matemáticos e, principalmente, do interesse do grupo" (D'AMBROSIO, 2012. p. 89)

O planejamento do ensino de jovens e adultos está pedagogicamente bem fundamentado quando, mediado pela reflexão sobre o perfil dos alunos e suas peculiaridades, se alcança o equilíbrio entre as metodologias adotadas e os objetivos educacionais que se almeja alcançar. Nesse sentido, é de fundamental importância que o foco do processo educacional se desloque dos conteúdos para centrar-se nos sujeitos envolvidos na ação educativa. É inadmissível que o professor, ignorando a flexibilidade dos projetos pedagógicos, se prenda no formalismo e legalismo exagerado e priorize sua própria interpretação em detrimento dos níveis de pensamento e compreensões dos alunos.

Considerando-se as peculiaridades do público alvo da EJA, uma postura importante do educador é o respeito ao ritmo de desenvolvimento do aluno adulto, levando-se em consideração os possíveis traumas, frustrações, insucessos e injustiças sociais sofridas por ele ao longo da vida. Via de regra, a EJA busca um resgate histórico da autoestima e da motivação para retomada dos estudos, especialmente daqueles alunos que, por diversas razões, não conseguiram concluir os estudos na idade própria e se encontram afastados da sala de aula há longo período. É imprescindível que o professor procure interagir com seus alunos, conhecer o mundo deles, conquistar sua confiança e prezar pelo respeito mútuo.

Diante da ausência de materiais didáticos específicos para atender às peculiaridades da Educação de Jovens e Adultos, se faz urgente e necessário ao professor o afastamento da sua zona de conforto, dedicando-se a uma intensa e consciente busca por metodologias e recursos pedagógicos adequados ao ensino nessa modalidade, privando pela contextualização das atividades no sentido de tomar o conhecimento de senso comum como ponto de partida para inserção do aluno em um ambiente de aprimoramento e formalização de seus conhecimentos prévios. Importante lembrar que a contextualização transcende os limites dos saberes e vivências, contemplando também o diálogo com outras disciplinas.

Não se pode negar que atividades adequadamente contextualizadas despertam nos alunos da EJA o sentimento de pertinência ao mundo dos jovens e adultos, abrindo-lhes a porta para um novo mundo que lhes permite, na condição de descobridores e agentes ativos, empoderar do conhecimento científico e construir, com a mediação do professor, um elo entre o conhecimento prévio proveniente de sua vivência e o conhecimento formal sistematizado que lhe proporcione, desde a aquisição de um linguajar mais apropriado, até a mudança de hábitos e costumes necessários à sua ascensão social. Esse seria, com certeza, um passo importante para a permanência e êxito desse aluno na escola.

Nesse sentido, o educador Paulo Freire salienta que

> Todo ensino de conteúdos demanda de quem se acha na posição de aprendiz que, a partir de certo momento, vá assumindo a autoria também do conhecimento do objeto. O professor autoritário, que recusa escutar os alunos, se fecha a esta aventura criadora. Nega a si mesmo a participação neste momento de boniteza singular: o da afirmação do educando como sujeito de conhecimento. É por isso que o ensino dos conteúdos, criticamente realizado, envolve a abertura total do professor ou da professora, à tentativa legítima do educando para tomar em suas mãos a responsabilidade de sujeito que conhece. Mais ainda, envolve a iniciativa do professor que deve estimular aquela tentativa no educando, ajudando-o para que a efetive. (FREIRE, 1996, p. 64)

Em relação ao ensino de geometria espacial na Educação de Jovens e Adultos, é interessante destacar que o aluno adulto, escolarizado ou não, traz consigo sua matemática própria que ele, influenciado por suas vivências, tradições culturais e condição social vai, a seu modo, construindo e se apropriando ao longo da vida, visando a atender às suas necessidades individuais e coletivas. É admissível se deduzir que o adulto não escolarizado tenha um conhecimento razoável sobre diversas formas geométricas presentes no seu cotidiano, identificando, de modo próprio e informal, suas propriedades básicas. Contudo, a aplicação desses conhecimentos geométricos limita-se às exigências recorrentes do trabalho.

Nesse sentido, é imprescindível que o professor da EJA se disponha a valorizar e compreender essa matemática que o aluno já sabe como condição essencial à criação de estratégias metodológicas que possibilitem a sistematização desses saberes como veículo de aproximação entre a matemática informal do cotidiano e a matemática formal dos livros, de modo a oportunizar ao sujeito, por meio do domínio da escrita e da leitura da matemática formalizada, avançar para níveis mais elevados do conhecimento e desenvolver a capacidade de aplicar essa matemática, agora provida de sentido, para atender às suas necessidades, sobretudo, no mundo do trabalho.

Denunciando as consequências negativas do excesso de formalidades da escola em detrimento da preocupação devida com a harmonização dos conceitos matemáticos que se espera construir na escola e aqueles construídos no cotidiano, Nunes, Carraher e Schliemann (2011), ressaltam que

> Quando analisamos os invariantes de conceitos matemáticos aprendidos na escola e fora dela, é possível que, apesar das grandes diferenças nas situações, encontremos as mesmas propriedades como subjacentes ao raciocínio matemático dentro e fora da escola. Isso não significará que os conceitos sejam idênticos, pois a variedade de situações a que o conceito é aplicado pode não definir, para a aprendizagem escolar e para a aprendizagem informal, conceitos com a mesma extensão. [...] há no ensino escolar da matemática uma ênfase nas regras, na sintaxe, muito mais que no significado. (NUNES, CARRAHER e SCHLIEMANN, 2011, p. 169)

Com base no exposto, o fazer pedagógico do professor da EJA pressupõe um processo dialógico marcado pela aproximação e maior envolvimento entre professor e alunos, na busca pela compreensão dos problemas que esses alunos enfrentam dentro e fora da escola, bem como suas dificuldades e limitações, como norte para o planejamento estratégico de ações motivadoras que se traduzam no estímulo necessário e suficiente para a permanência e êxito desses alunos na escola. Além disso, o conhecimento do contexto social e cultural destes estudantes é peça fundamental para a criação de um real ambiente do aprimoramento e produção de novos conhecimentos visando uma aprendizagem de fato significativa.

As peculiaridades da EJA, sobretudo em relação ao sentimento de abandono e insegurança do aluno jovem, adulto e idoso explicitam, ainda mais que no ensino regular, o estabelecimento de uma relação de aproximação entre professor e aluno, pautada na liberdade, confiança, respeito e amizade, fundamentais para a boa relação humana. Esse posicionamento em defesa da valorização da relação afetiva saudável que o professor deve estabelecer com seus alunos é corroborado nas colocações do educador Paulo Freire, no sentido de que o professor deve abandonar o autoritarismo e se abrir para o rompimento de práticas pedagógicas que negam o respeito à dignidade e autonomia do educando, pois

> É a convivência amorosa com seus alunos e na postura curiosa e aberta que assume e, ao mesmo tempo, provoca-os a se assumirem enquanto sujeitos sócios-históricos-culturais do ato de conhecer, é que ele pode falar do respeito à dignidade e autonomia do educando. Pressupõe romper com concepções e práticas que negam a compreensão da educação como uma situação gnoseológica. A competência técnico científica e o rigor de que o professor não deve abrir mão no desenvolvimento do seu trabalho, não são incompatíveis com a amorosidade necessária às relações educativas. Essa postura ajuda a construir o ambiente favorável à produção do conhecimento onde o medo do professor e o mito que se cria em torno da sua pessoa vão sendo desvalados. É preciso aprender a ser coerente.
> De nada adianta o discurso competente se a ação pedagógica é impermeável à mudanças (FREIRE, 1996, p. 7).

Essa relação humana possibilita ao professor identificar os interesses individuais e coletivos do grupo e, diga-se de passagem, interesses, anseios e expectativas bastante diversificadas, expressos por essas pessoas batalhadoras, humildes, sensíveis e carentes de atenção, reconhecimento e respeito, na tentativa de atender, na medida do possível, suas expectativas. Através desse diálogo o professor estabelece uma relação mútua de respeito e confiança que lhe permite, numa ação investigativa e reflexiva, definir os conteúdos e recursos metodológicos mais apropriados para que, dentro dos limites permitidos pela flexibilização curricular, se crie reais condições para uma aprendizagem significativa.

Segundo Fonseca (2005), educadores matemáticos de jovens e adultos se desdobram na busca por materiais de cunho mais instrumental como complemento aos textos de reflexão teórica como subsídio para a discussão, elaboração e implementação de propostas pedagógicas para a EJA. Dentre as principais dificuldades enfrentadas pelo professor de Matemática da Educação de Jovens e Adultos da Escola Básica destaca-se, além da deficiência formativa para se trabalhar especificamente com jovens, adultos e idosos, a pequena produção de materiais didáticos elaborados especificamente para o ensino de Matemática nessa modalidade, restando aos educadores matemáticos não muito mais que

> ... recorrer a materiais que, embora elaborados originalmente visando o público adolescente ou mesmo infantil, podem ser adaptados ao trabalho com alunos adultos porque tratam de maneira adequada os conteúdos matemáticos (sob o ponto de vista conceitual, epistemológico, histórico, utilitário) e de maneira respeitosa o aprendiz. (FONSECA, 2005, p. 100)

Diante da indisponibilidade de material didático específico para a modalidade, fica a cargo do professor da Educação de Jovens e Adultos buscar em materiais elaborados para outras modalidades de ensino subsídios para nortear suas ações. Maior cuidado deve-se tomar aí para não infantilizar o ensino, criando um forte entrave à superação dos traumas e frustrações provenientes das experiências escolares negativas que provavelmente estão inculcados nesses alunos. Ademais, é imprescindível que o professor se empenhe na busca por metodologias inovadoras e potencialmente eficazes para o resgate da autoestima e da autoconfiança desses alunos como estímulo à permanência e êxito escolar.

Generalizando as considerações de Nunes, Carraher e Schliemann (2011), destaca-se a possibilidade de uma nova concepção sobre o fracasso escolar de jovens e adultos, caracterizada pela superação da visão de fracasso do aluno, para dar lugar ao reconhecimento de um fracasso da escola. Há certa coerência quando se nota a incapacidade do professor em reconhecer e explorar as reais potencialidades do aluno, lidar com e sobre os processos naturais que favorecem a aquisição do conhecimento e relacionar o conhecimento formal que se deseja transmitir ao conhecimento prévio produzido por meio de experiências anteriores vivenciada fora e/ou dentro do ambiente escolar.

> A evasão e o fracasso escolar aparecem hoje entre os problemas de nosso sistema educacional que são estudados de forma relativamente intensa. A concepção de fracasso escolar aparece alternativamente como fracasso dos indivíduos (Poppovic, Esposito e Campos, 1975), fracasso de uma classe social (Lewis, 1967, Hoggart, 1957) ou fracasso de um sistema social, econômico e político (Freitag, 1979; Porto, 1981) que pratica uma seletividade socio-econômica indevida. [...] pretende-se explorar uma outra alternativa: o fracasso escolar é o fracasso da escola. (NUNES; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2011, pp. 41-42)

Embora alguns estudiosos relacionem o fracasso escolar a deficiências de natureza cognitiva, afetiva e social provenientes da vivência em ambientes culturalmente deficitários e outros defendam a ideia de que esse fracasso é determinado predominantemente por fatores de ordem biológica, tais concepções não se sustentam diante da constatação de que muitos dos alunos que vivem essa mesma realidade têm bom rendimento escolar. Pode ser que esse fracasso tenha maior relação com a própria ação educativa, com o aspecto seletivo do sistema educacional e com as dificuldades de acesso da classe baixa à educação formal, “eliminando a possibilidade de que seus membros possam resolver por si próprios os problemas sociais e econômicos que enfrentam em decorrência da hiperurbanização” (PERLMAN, 1977 apud NUNES; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2011, p. 43).

Apesar dos inegáveis avanços nas políticas públicas voltadas para a Educação de Jovens e Adultos, principalmente a partir da última década do século passado, as menções presentes nos documentos oficiais da educação básica revelam o quanto essa modalidade ainda se mantém, por falta de incentivo governamental, relegada a um segundo plano. Esse descrédito ainda se agrava pela falta de interesse de docentes em compreender as especificidades do aluno adulto, adotar metodologias e elaborar materiais didáticos adequados, suprimindo assim a infantilização pela contextualização do ensino, de modo a contribuir para a construção do processo de conscientização crítica e conquista da cidadania.

Uma outra causa marcante da repetência e da evasão escolar na EJA é a ineficiência do processo avaliativo que, a exemplo do que ocorre no ensino regular, tem características muito mais classificatórias e punitivas que investigativas, sobre os avanços alcançados pelos alunos e as possíveis falhas metodológicas, como o deveria ser. A própria força do termo "avaliação" atribuída aos instrumentos formais de "verificação de aprendizagem" já reflete o caráter cruel desse processo e gera fortes tensões. Além do fato de que as questões ali elencadas não contemplam todo o conhecimento do aluno, os resultados produzidos em meio à essa instabilidade emocional não refletem fielmente a realidade do aluno.

É preciso romper com os paradigmas sobre a avaliação tradicional para aliviar a pressão psicológica que esse tipo de instrumento impõe sobre os alunos, superar seu caráter classificatório e dar a ela um corpo de investigação dos avanços alcançados pelos alunos, embora se admita que o professor adote parâmetros para avaliar os níveis de conhecimento, não para classificar, mas para tomar medidas necessárias ao preenchimento das principais lacunas do ensino. Avaliar o aluno jovem e adulto pressupõe se envolver em um processo contínuo, dialógico e desarraigado de certas formalidades. Para D'Ambrosio (2012), "a transparência dos esquemas de avaliação e a exposição de resultados são essenciais", mas

> Seria desnecessário dizer o quanto os modelos classificatórios de avaliação podem abrir espaço para a corrupção. [...] corrupção num sentido mais amplo e ainda mais grave, pois esses modelos levam os avaliados a se adaptar ao que é desejado pelos avaliadores. [...] Claramente, as avaliações como vêm sendo conduzidas, utilizando exames e testes, tanto de indivíduos como de sistemas, pouca resposta tem dado à deplorável situação dos nossos sistemas escolares. (D'AMBROSIO, 2012. p. 59)

Essa inovação no processo avaliativo, como dito, requer do professor o abandono do modelo ineficiente de avaliação elaborada para momentos específicos, visando respostas compatíveis com um resultado esperado, acabado e, muitas vezes único. Nesse processo o professor, avaliando enquanto ensina e aprendendo enquanto avalia, consegue identificar os avanços e as falhas de aprendizagem dos alunos e tomar ações corretivas constantemente e de forma consciente e intencional, longe das tensões daquele modelo de avaliação marcado por injustiças que culminam em um grande empecilho à permanência e êxito na EJA. Fora dessa concepção a avaliação não representa mais que mera formalidade, desprovida de sentido.

1.3 Geometria Espacial na EJA Ensino Médio

Dentre as principais causas do triste abandono do ensino de Geometria na escola destaca-se a deficiência formativa do professor que, sem deter o conhecimento geométrico necessário para realizar suas práticas pedagógicas, vive as tensões de tentar ensinar algo que não sabe ou, ainda pior, se abstém de ensiná-lo. A situação se agrava com a apresentação dos conteúdos geométricos quase sempre nos últimos capítulos do livro, ficando seu ensino refém das limitações do tempo letivo. Tal omissão custa à escola e à sociedade a ofuscação da visão de quão bela, rica, poderosa e importante a Geometria é para a formação do cidadão. Assim, um lugar prioritário dessa valorosa área nas instituições de ensino é digno de defesa.

> Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. (LORENZATO, 1995. p. 5)

No contexto da EJA, é evidente que o cidadão adulto, escolarizado ou não, conhece a geometria do cotidiano e exerce várias ações sobre ela. No entanto, esse conhecimento é fundamentado no empirismo e limitado às necessidades imediatas do indivíduo, o que o torna parcial e susceptível de conclusões equivocadas. Sem dúvidas, é no ambiente escolar que o conhecimento de senso comum se completa e se formaliza, falhas conceituais são corrigidas e novos conhecimentos produzidos, de modo a preparar antecipadamente o aluno para agir positivamente diante de situações inesperadas do seu cotidiano, com a autonomia necessária para, diante das adversidades, lutar pela conquista de seus interesses.

A abordagem adequada da Geometria Espacial fortalece a conexão preexistente entre os conteúdos geométricos escolares e o conhecimento de mundo do aluno adulto. Mas essa adequação requer um bom planejamento e a adoção de estratégias que possibilitem a esse aluno acompanhar as aulas de Geometria Espacial com autoconfiança e entusiasmo, sanar suas deficiências conceituais e avançar, gradativamente, para níveis mais elevados de pensamento geométrico. Nesse sentido, cabe-nos uma reflexão sobre o conhecimento de certas teorias de desenvolvimento do pensamento geométrico, como o modelo de van Hiele, aliado ao uso de ambientes de geometria dinâmica, como o software GeoGebra.

Convém observar que a conquista da autonomia e da capacidade de promover as transformações sociais almejadas pelo indivíduo e pelo grupo estão situadas em contextos tão diversos e distintos que demandam um Plano de Trabalho Docente dimensionado para além do aspecto burocrático e legalista. Isso porque, sem a intencional coerência com os objetivos e as condições de trabalho que se traduzem na percepção das limitações dos ambientes de aprendizagem e das potencialidades dos indivíduos envolvidos no processo, o sucesso que se prega para a Educação de Jovens e Adultos e por que não dizer, para a Educação de um modo geral não passaria, certamente, de mera utopia.

Dentro dessa perspectiva, o planejamento do professor deve estar imbuído de uma profunda reflexão sobre o conteúdo que se deve trabalhar, partindo de quatro premissas: “o que ensinar”, “por que ensinar”, “quando ensinar” e “como ensinar”. A resposta a esses questionamentos vai depender de fatores diversos e, inevitavelmente influenciados pelos anseios, necessidades e expectativas dos alunos. É claro que esses fatores devem se conectar a outros fatores inerentes ao próprio ambiente escolar, mas esses não podem se sobrepor àqueles. É por isso que o planejamento carece de certa desburocratização à medida que, por questões contextuais, tende a superar os limites da legalidade.

Na concepção de Freire (1996), é dever do professor:

> [...] não só respeitar os saberes com que os educandos, sobretudo os das classes populares, chegam a ela – saberes socialmente construídos na prática comunitária – mas também, como há mais de trinta anos venho sugerindo, discutir com os alunos a razão de ser de alguns desses saberes em relação com o ensino dos conteúdos. Por que não aproveitar a experiência que têm os alunos de viver em áreas da cidade descuidadas pelo poder público para discutir, por exemplo, a poluição dos riachos e dos córregos e os baixos níveis de bem-estar das populações, os lixões e os riscos que oferecem à saúde das gentes. Por que não há lixões no coração dos bairros ricos e mesmo puramente remediados dos centros urbanos? (FREIRE, 1996, p.16).

Contudo, uma das maiores dificuldades enfrentadas pelo docente, na visão do pesquisador, diz respeito à indisponibilidade de tempo para se trabalhar os conteúdos de forma contextualizada e entremeada por experiências práticas, sem afetar o cumprimento integral do currículo programado. Por outro lado, a aprendizagem avança por caminhos mais largos quando é dada ao estudante a oportunidade de participar ativamente do processo, sentindo-se valorizado e respeitado, capaz de contribuir para a construção do próprio conhecimento. Tais considerações são muito pertinentes no campo das reflexões acerca das inovações metodológicas, em particular, o uso de recursos tecnológicos em sala de aula.

A valorização do conhecimento prévio do aluno e o respeito à sua forma de pensar e se expressar são atitudes essenciais para o resgate da confiança e autoestima como meio da conquista da autonomia para agir positivamente diante de situações-problema, sejam elas fictícias, como as simulações propostas como atividade escolar, ou reais, como aquelas que frequentemente surgem no dia a dia. No entanto, um possível desequilíbrio gerado pelo contraste entre a linguagem materna e a linguagem escolar, entre o conhecimento de senso comum e o conhecimento escolar formalizado, podem culminar na resistência do aluno em aceitar certos vocabulários, procedimentos e conceitos apresentados pelo professor.

Segundo Nunes, Carraher e Schliemann (2011, pp. 66-67), pesquisas mostram que o desempenho na resolução de problemas da vida supera em muito o desempenho na resolução de problemas escolares, mesmo quando simuladas as mesmas situações. Isso mostra que, além da necessidade da contextualização dos conteúdos, principalmente, mas não somente, no contexto da EJA, existe um outro problema, que se trata das diferenças entre a comunicação oral e a comunicação escrita. Ao que se percebe, a desarmonia entre a linguagem materna e a linguagem formal adotada no ambiente escolar é uma barreira que precisa ser rompida para que a aprendizagem seja significativa.

De acordo com os mesmos autores, é difícil comparar os níveis de motivação do aluno para resolver problemas escolares e problemas do cotidiano, uma vez que as consequências do erro se diferem nas duas situações. No entanto, há divergências entre as relações pessoais que se desencadeiam na escola e aquelas relações estabelecidas fora dela. Nesse sentido, é possível que a grande diferença entre a eficiência escolar e o desempenho na resolução de problemas cotidianos não resulte necessariamente de fatores motivacionais nem das relações humanas, mas das diferenças nas estratégias cognitivas escolhidas para a resolução desses problemas e das diversas, amplas e conflitantes relações geradas em situações tão distintas.

Nesse sentido, Moreira e David (2007), fazem a seguinte consideração: “Se, por um lado, o conhecimento anterior do aluno pode servir de obstáculo para o avanço no aprendizado, por outro, é indiscutível que os processos de abstração e generalização se desenvolvem essencialmente em interação com esse conhecimento.” (MOREIRA; DAVID, 2007. p. 32). No campo da Geometria Espacial, o possível obstáculo que se observa diz respeito à resistência do aluno adulto em abandonar suas concepções fundamentadas no empirismo para dar lugar a novas formas de conceber propriedades e relações entre objetos.

Desse modo, é sensato associar as dificuldades de abstração observada no aluno adulto às metodologias tradicionais de ensino. Diante das experiências escolares negativas do passado, há de se compreender que esse aluno se desmotiva muito facilmente quando lhe são apresentadas fórmulas acabadas, sem demonstração prática daquilo que se pretende mostrar, ou simplesmente, quando o resultado diferente do esperado é desprezado ou considerado como erro. Valorizar a forma de pensar do aluno, contextualizar o ensino e adequar as metodologias aos interesses do aluno se constituem em um grande estímulo à efetivação do processo de ensino-aprendizagem e da universalização do acesso à educação básica.

Fazendo menção ao ensino de matemática na atualidade, D'Ambrosio (2012) chama a atenção para a incompreensão de muitos professores acerca da necessidade de se relacionar o conteúdo matemático com o mundo real, requisito fundamental na preparação para a cidadania. Para esse autor, alguns ainda preservam a visão de uma Matemática independente do contexto cultural e social, embora não contestem a contextualização de outras disciplinas. Particularmente, no tocante ao ensino de geometria na EJA, há evidências de que a contextualização dos conteúdos tem se revelado um importante elemento motivador e facilitador da aprendizagem, sobretudo diante das peculiaridades do aluno jovem e adulto.

Importa salientar que a contextualização do ensino de Matemática, além de levar em consideração o cotidiano do aluno, também vincula os conteúdos matemáticos a outras áreas de conhecimento. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) alertam sobre os riscos da interpretação equivocada de que contextualizar é abordar apenas o que se supõe fazer parte do cotidiano do aluno, pois sob essa concepção, "[...] muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata" (BRASIL, 1998, p. 23).

Na atualidade é inconcebível que o ensino da geometria formal na EJA se faça, como o tem sido tradicionalmente, sem referência ao conhecimento cotidiano do aluno jovem e adulto. Segundo Nunes, Carraher e Schliemann (2011), não deve haver distinção entre a Matemática formal e a Matemática enquanto atividade humana. Desse modo, o professor deve buscar alternativas metodológicas para fazer da sala de aula um ambiente atrativo para a expansão do conhecimento cotidiano, através da ação investigativa e da troca de experiências, de modo dinâmico e interessante para o aluno. Nesse ambiente de ensino contextualizado o aluno se motiva a aprender geometria de forma prazerosa e significativa.

Ensinar Geometria espacial na EJA a partir de figuras estáticas é um grande desafio, contudo, valendo-se dos conhecimentos empíricos que esses alunos já trazem, o professor pode lançar mão de recursos tecnológicos apropriados para a construção e manipulação de objetos similares àqueles que fazem parte do cotidiano do aluno respeitando seus níveis de pensamento geométrico. Segundo Giraldo, Caetano e Mattos (2012), o processo de construir uma representação para um objeto em um ambiente de geometria dinâmica leva o aluno a percepção e reflexão acerca das propriedades e relações matemáticas entre as inúmeras imagens que se sobrepõem, se articulam entre si e são manipuladas de forma interativa.

> Nesse ambiente, a garantia de validade das propriedades e relações matemáticas do objeto representado é incorporada concretamente no próprio processo de construção da representação. Dessa forma, as próprias experiências de construir representações em geometria dinâmica já constituem, por si só, exercícios que demandam um maior nível de conhecimento matemático dos objetos. Essas experiências podem ainda fornecer pistas sobre outras propriedades e relações dos objetos construídos, além daquelas que fazem parte de suas definições ou são dadas nos enunciados dos problemas, sugerindo porque estas são válidas (ou não válidas) e indicando caminhos para sua dedução. Assim, o processo de construção pode nos levar a perceber ou a conjecturar propriedades, que, evidentemente, deverão ser confirmadas ou refutadas por argumentos matemáticos. (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012, p. 114)

As potencialidades reconhecidas nos softwares de geometria dinâmica promovem o desenvolvimento da abstração matemática, uma vez que possibilitam a análise de relações e propriedades de objetos matemáticos e a formulação de conjecturas que, seguidas necessariamente de comprovações ou refutações por meio de argumentos matemáticos formais, auxiliam na expansão da concepção de uma representação geométrica de desenho, quando a imagem é vista como representação de um objeto isolado, para figura, quando essa mesma imagem é percebida como representação genérica de uma classe de objetos matemáticos, que compartilha um conjunto comum de propriedades.

Nas reflexões acerca da resistência de alguns professores ao uso de recursos tecnológicos como componentes facilitadores no processo de ensino e aprendizagem, não se deve ignorar que vivemos na era digital, em tempos modernos nos quais, além de outros atributos que lhe são peculiares, a tecnologia disponibiliza diversos aplicativos e ferramentas potencialmente eficientes na construção do conhecimento e no processo de aproximação entre alunos e professores, estreitando os laços de amizade fundamentais para uma educação humanizada capaz de, por meio dessa ação dialógica, dinâmica e colaborativa, promover significativas melhorias na qualidade do ensino de geometria na EJA.

Entretanto, não se deve admitir que os recursos tecnológicos se sobreponham às teorias educacionais, pois esses não surtirão nenhum efeito positivo se não houver um planejamento pautado na compreensão do pensamento do aluno, no desenvolvimento cognitivo e na capacidade de perceber, interpretar, planejar e agir sobre situações propostas pelo professor, visando a criação de um ambiente favorável ao aprimoramento dos conhecimentos prévios e à construção e socialização de novos conhecimentos. Apesar das inegáveis contribuições para o ensino, a eficácia educacional dos softwares de geometria dinâmica está condicionada à compreensão dos níveis de pensamento geométrico do aluno.

1.4 A Teoria de Van Hiele e o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico

Transcendendo os limites do saber e fazer, a aprendizagem significativa que miramos pressupõe a ação consciente que se apresenta na forma de aplicação do conhecimento de forma sistemática e ordenada na resolução de problemas, onde está imbuída e claramente expressa a compreensão do que se está fazendo, por que se está fazendo e qual o momento certo para o fazer. Nesse sentido, o professor deve propor, dentro do contexto do aluno, atividades que simulem situações não usuais, como estímulo ao desenvolvimento da capacidade de elaborar, consciente e deliberadamente, métodos e ações para solucionar esse problema fictício, como preparação para agir diante de uma possível situação real futura.

Quanto ao ensino de geometria, é imprescindível que o professor conheça os níveis de pensamento e conhecimento geométrico de seus alunos, pois é a partir desse conhecimento que se deve planejar as ações de modo que as atividades estejam dentro de um nível de resolução acessível para todos. É claro que para atingir seus objetivos educacionais o professor precisa colocar as atividades em um nível relativamente elevado, mas isso deve ocorrer de forma gradual para não se correr o risco de elevar o grau de dificuldade além do nível de pensamento geométrico do aluno. As ações devem ser sistematizadas, de modo a promover a elevação gradativa do aluno a níveis superiores do pensamento geométrico.

Nesse sentido, Kaleff [et al] (1994) observam que as deficiências na formação do pensamento abstrato em geometria, presente até mesmo entre alunos que cursam os últimos semestres dos cursos de graduação em matemática, decorrem da incapacidade de relacionar sistemas axiomáticos e das dificuldades em sistematizar o pensamento dentro da própria geometria euclidiana. Essa triste realidade pressupõe a necessidade de reflexão acerca de certas teorias sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico. Para tal, esse trabalho apresenta o importante Modelo desenvolvido pelo casal de professores holandeses Pierre van Hiele e Dina van Hiele, citado na literatura como guia para aprendizagem em geometria.

Diante da caótica situação do ensino da Geometria, decorrente de causas diversas, conforme mencionado por Lorenzato (1995), há de se considerar a forma como os conteúdos geométricos vêm sendo abordados, sem quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica, e, portanto, desprovida de significado para o aluno. Nesse sentido, propõe-se aqui uma análise criteriosa do desenvolvimento do pensamento geométrico, como princípio fundamental para que a aprendizagem ocorra e seja, de fato, significativa para os estudantes da Educação básica e, em particular, para alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA). Nesse trabalho, essas discussões têm aporte teórico no Modelo do casal van Hiele, tomado como norte para o planejamento de atividades para o estudo de geometria, buscando-se compreender os cinco níveis de compreensão que, segundo essa teoria, descrevem o estado e a evolução do pensamento geométrico, essenciais para a negociação de significados.

Segundo Kaleff [et all] (1994), embora as primeiras publicações dos resultados das investigações realizadas pelo casal de professores holandeses Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geldof sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico tenham ocorrido em 1959 e, no ano seguinte, esse modelo já tenha sido inserido no currículo de geometria nas escolas da então União Soviética, essa teoria só alcançou repercussão mundial em 1973, com a publicação do livro "Mathematics as an Educational Task", no qual o matemático holandês Hans Freudenthal destaca a importância desse trabalho, que ficou conhecido como Modelo de van Hiele e começou a ser divulgado em 1976, pelo professor americano Izaak Wirsup.

Sobre a construção de conceitos geométricos, van Hiele (1957 apud LIMA; SANTOS, 2020, p. 11), inspirado na teoria da evolução da inteligência segundo a ideia construtivista de Piaget, descreve cinco diferentes níveis de raciocínio e afirma que o desenvolvimento desses níveis é mais influenciado pelas metodologias adotadas do que pela maturação e idade dos sujeitos. Para eles, o aluno deve construir ativamente seu próprio conhecimento, passando necessariamente por níveis mais baixos de pensamento geométrico antes de alcançar os níveis mais altos. Para que isso ocorra, é preciso instigar o raciocínio do aluno, levá-lo a questionar, interpretar, raciocinar, conjecturar, argumentar, verificar e provar o que está sendo investigado.

Para Oliveira e Gazire (2012, p. 10), apesar de sua influência piagetiana, Van Hiele revela ser mais otimista que Piaget, pois acredita que o desenvolvimento cognitivo em geometria pode ser acelerado através de instruções adequadas. Segundo a autora, o modelo de van Hiele é composto de duas partes.

> [...] a primeira, totalmente "*descritiva*", procura explicar como se processa a evolução do raciocínio geométrico dos alunos através da descrição dos níveis de pensamento identificados; a segunda, "*prescritiva*", dá indicações de como um professor pode ajudar o seu aluno a alcançar um nível superior de raciocínio. (OLIVEIRA; GAZIRE, 2012, p. 10, grifo nosso)

Na literatura, os níveis de pensamento geométrico de van Hiele são enumerados e denominados de diferentes maneiras. Contudo, enumerar os níveis de 1 a 5 pode ser mais conveniente quando se considera que, apesar de, originalmente, a teoria indicar cinco níveis de pensamento geométrico (1- visualização; 2- análise; 3- dedução informal; 4- dedução formal; 5- rigor), algumas pesquisas (SENK, 1989; USISKIN, 1982, apud VIEIRA; ALLEVATO, 2015, p. 45) sugerem a existência de um nível mais básico que o primeiro nível (visualização). Seria concebível, então, considerar nível 0 aquele no qual não ocorre sequer o reconhecimento visual do objeto, mas esse possível nível não será abordado nesse trabalho.

O nível 1 – Visualização ou Reconhecimento – é caracterizado, segundo van Hiele (1999 apud VIEIRA; ALLEVATO, 2015, p. 45), pela compreensão das figuras de acordo com sua aparência, ou seja, pela capacidade de identificar e trabalhar com formas geométricas de acordo com a aparência global dessas formas. Nesse nível, o aluno reconhece as figuras, são capazes de representá-las como imagens mentais e utilizam-se de modelos visuais e de imagens conhecidas para identifica-las. Nesse sentido, por exemplo, o aluno pode reconhecer determinada figura como um cubo pela sua aparência com um dado, ou um prisma qualquer por se parecer com uma caixa. Não há ainda consciência das propriedades, nem de todos os elementos que compõem a figura.

Embora esse primeiro nível seja fortemente influenciado pela percepção, pressupondo que o professor proponha atividades de observação, manipulação, construção, separação, composição e decomposição, o aluno ainda não demonstra consciência das propriedades que determinam as formas. Além disso, tais propriedades não são abstraídas a partir da manipulação dessas formas, apesar de atividades dessa natureza auxiliarem o processo de transição para o estágio seguinte, que ocorre na fase de aprendizagem mais avançada para esse nível e marca o momento no qual os estudantes começam a associar figuras com características e propriedades comuns.

No nível 2 – Análise – o aluno, usando do raciocínio sobre conceitos geométricos, reconhece as figuras geométricas por meio de uma análise informal de suas partes e atributos através de observação e experimentação, ou seja, a partir da percepção de suas propriedades apreendidas experimentalmente, por meio de atividades de observação, de medição e desenhos. “Nesta fase o aluno começa a discernir as características e propriedades das figuras, mas não consegue, ainda, estabelecer relações entre essas propriedades e nem entende as definições ou vê inter-relações entre figuras”. (PEREIRA; SILVA; MOTTA JÚNIOR, 2005, p. 25 apud VIEIRA; ALLEVATO, 2015, p. 45).

Nesse estágio, o aluno começa a discernir características das figuras geométricas, a conceituar classes e formas a partir da combinação de suas propriedades e a apreciar que uma coleção de formas é composta devido às suas propriedades. No entanto, por não conseguir explicitar ainda as inter-relações entre figuras ou propriedades, esse aluno se encontra susceptível a uma série de equívocos. Desse modo, por exemplo, ele poderia apropriar-se da convicção de que determinada figura não é um prisma porque é um cubo.

O nível 3 – Dedução Informal ou Ordenação – é marcado pela capacidade para formar definições abstratas, distinguir entre a necessidade e a suficiência de um conjunto de propriedades no estabelecimento de um conceito geométrico, estabelecer inter-relações entre as propriedades nas figuras e até mesmo compreender algumas argumentações lógicas no domínio da Geometria. Desse modo, o aluno reconhece classes de figuras, entende a inclusão e interseção de classes e consegue classificar figuras seguindo uma hierarquia (ordenando as propriedades, por exemplo) e justificar suas classificações, ainda que seus argumentos sejam apresentados de maneira informal. Por exemplo, esse aluno consegue perceber que um cubo é um prisma porque é dotado de todas as propriedades do prisma.

O aluno nesse nível é capaz de descobrir propriedades geométricas por meio de deduções informais. Segundo van Hiele (1999 apud VIEIRA; ALLEVATO, 2015, p. 47), esse aluno, diante de suas descobertas, começa a se preocupar com as propriedades dos objetos geométricos e a sentir a necessidade de organizar essas propriedades e estabelecer relações entre elas. A partir da organização lógica dessas ideias, surgem as primeiras manifestações do verdadeiro pensamento dedutivo e, valendo-se das propriedades que já conhece, o aluno passa a formular definições e utilizá-las para justificar seu raciocínio.

O desenvolvimento do aluno nesse nível torna-o capaz de trabalhar com sentenças abstratas e, com o aprimoramento do conhecimento sobre as propriedades geométricas, estabelecer conclusões baseadas mais na lógica do que na intuição. Entretanto, esse aluno não compreende ainda o significado de uma dedução como um todo, ou o papel dos axiomas. Embora seja capaz de acompanhar provas formais, não consegue perceber como construir uma prova partindo-se de premissas diferentes, nem compreende que a dedução lógica é o método inicial para se estabelecer verdades geométricas.

O nível 4 – Dedução Formal – é caracterizado pela percepção da necessidade de um sistema lógico estruturado, no qual o aluno, ao examinar mais do que apenas as propriedades das formas, consegue construir racionalmente suas provas e demonstrações, e não apenas memoriza-las, valendo-se da sua capacidade de raciocinar formalmente no contexto de um sistema matemático completo, com termos indefinidos, com axiomas, com um sistema lógico subjacente, com definições e teoremas. “Neste estágio o aluno analisa e compreende o processo dedutivo e as demonstrações com o processo axiomático associado” (PEREIRA; SILVA; MOTTA JÚNIOR, 2005, p. 25 apud VIEIRA; ALLEVATO, 2015, p. 47). Além disso, percebe a possibilidade de desenvolver uma prova de mais de uma maneira e torna-se capaz de, deduzindo uma afirmação a partir de uma outra ou de outras, desenvolver sequências de afirmações que levem ao estabelecimento uma teoria geométrica.

O nível 5 – Rigor – é o nível mais elevado do modelo van Hiele, no qual vários sistemas dedutivos são avaliados com alto grau de rigor. “Os objetos de atenção são os próprios sistemas axiomáticos, não apenas as deduções dentro de um sistema” (VAN DE WALLE, 2009, p. 443 apud VIEIRA; ALLEVATO, 2015, p. 47). É caracterizado pela comparação entre diferentes sistemas axiomáticos no estudo de várias geometrias, incluindo as não euclidianas, sem a necessidade de modelos concretos e pelo aprofundamento na análise de propriedades de um sistema dedutivo, tais como consistência, independência e completude dos axiomas. É o nível menos abordado nas pesquisas, pois a Geometria escolar mal chega ao nível da dedução formal.

De acordo com Crowley apud Lindquist e Shulte (1994, p. 6), Kaleff (1994, pp. 6-7) e Alves e Sampaio (2010, p. 71), os van Hiele propuseram que cada nível de raciocínio engloba cinco fases sequenciais de aprendizagem: interrogação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. Eles afirmam que “o ensino desenvolvido de acordo com essa sequência favorece a aquisição de um nível de pensamento em um determinado tópico de geometria” (KALEFF, 1994, p. 6). A descrição das fases de aprendizagem pelos van Hiele é uma proposta de organização das atividades, que devem ser elaboradas gradativamente, respeitando-se o ritmo de desenvolvimento do aluno.

A fase 1 (Questionamento ou Informação) é caracterizada pelo diálogo entre professor e aluno sobre o material de estudo, momento no qual o professor faz observações, levanta questões e apresenta o vocabulário específico do nível a ser atingido. Nessa fase o professor percebe o grau de conhecimentos anteriores do aluno sobre o assunto e o aluno percebe que direção os estudos tomarão.

Na fase 2 (Orientação Direta) os alunos exploram o assunto a partir de materiais cuidadosamente selecionados pelo professor e executam atividades, normalmente em etapa única, que proporcionam respostas específicas e objetivas, favorecendo a familiarização gradual com as estruturas características desse nível.

A fase 3 (Explicitação) é marcada pela autonomia dada aos alunos para, expressando verbalmente suas opiniões emergentes sobre as estruturas que observam, trocarem experiências, confrontarem pontos de vista e analisarem individualmente suas ideias e buscarem um consenso, sem a intervenção do professor, que apenas atua como observador. A partir dessas manifestações espontâneas e coletivas, os alunos refinam o uso do seu vocabulário.

Na fase 4 (Orientação Livre) as tarefas são constituídas de múltiplas etapas, com a possibilidade de diversas respostas e diferentes formas de resolução, a fim de que o aluno ganhe experiência e autonomia na busca de sua forma individual de resolver as tarefas e sua própria orientação no caminho da descoberta de seus objetivos, de modo a tornar claras as relações entre os objetos de estudo.

Na fase 5 (Integração), o professor atua como mediador no processo de síntese, fornecendo ao aluno experiências e observações globais sem, contudo, apresentar novas ideias ou informações convergentes com as observadas nas fases anteriores. Ao superar essa fase o aluno está apto para avançar para o nível posterior.

De acordo com VIEIRA e ALLEVATO (2015), o modelo de van Hiele classifica o desenvolvimento do pensamento geométrico em níveis muito bem delimitados, seguindo uma hierarquia tal que é inconcebível que o aluno consiga atingir um nível de pensamento sem antes ter passado pelos níveis anteriores. Isso não significa que não possa ocorrer o contrário, pois, dependendo da metodologia adotada pelo professor, um aluno que se encontra em um determinado nível de pensamento pode regredir a níveis inferiores. Por isso é tão importante que o professor procure conhecer seus alunos e elaborar um planejamento à luz dessa teoria de desenvolvimento para que o ensino e a aprendizagem de geometria se concretizem.

Clements e Battista (1992 apud VIEIRA; ALLEVATO, 2015, p. 45), corroboram essa afirmação de que o avanço para um nível superior do pensamento geométrico pressupõe o domínio dos níveis precedentes e acrescentam que, além da possibilidade de que conceitos compreendidos implicitamente em um nível tornem-se explícitos no nível seguinte, uma relação admitida como correta em um nível pode revelar-se incorreta em outro, uma vez que cada nível possui sua linguagem própria, estabelecida por seus próprios símbolos e pelo conjunto de relações que conecta esses símbolos. Nesse sentido, percebe-se o caráter corretivo da evolução dos níveis de pensamento segundo van Hiele.

De acordo com Oliveira (2012, pp. 9-10) as principais propriedades dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele se resumem em quatro. A primeira delas é a "hierarquização e sequencialidade dos níveis", uma vez que um aluno não pode atingir o nível n sem ter passado pelo nível (n – 1); a segunda propriedade é a "adjacência", pois, em cada nível de pensamento, o que era intrínseco no nível precedente torna-se extrínseco no nível atual, isto é, o produto do nível n torna-se o objeto de estudo do nível (n + 1); a terceira propriedade é a "distinção", porque cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos e sua própria rede de relações conectando esses símbolos, ou seja, cada nível tem uma linguagem própria; a quarta e última propriedade é a "separação", caracterizada pela percepção de que duas pessoas que raciocinam em níveis diferentes não conseguem se entender. É o que muitas vezes ocorre na relação professor-aluno.

Com base no exposto, percebe-se o quanto o conhecimento das propriedades dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele pode ser determinante no planejamento do professor e no êxito do estudo da geometria escolar, principalmente no tocante à seleção dos conteúdos geométricos, escolha dos recursos didáticos e metodologia e percepção do momento adequado para se abordar cada conteúdo, tendo como referência o nível de desenvolvimento do aluno da EJA, respeitando seu ritmo de aprendizagem e explorando seus conhecimentos prévios e sua forma de se expressar. É preciso estar atento para o fato de que o vocabulário utilizado no diálogo entre professor e aluno é elemento primordial para a compreensão e, portanto, a linguagem deve estar adequada ao nível do aluno. Além disso, o avanço para níveis superiores deve ser gradual e sequencial, respeitando-se as fases para a aquisição de cada nível de pensamento geométrico.

A Tabela 1 apresenta algumas das habilidades característica de cada nível de van Hiele, segundo Dall'Alba (2015 apud ASSAD, 2017 pp. 45 - 46).

Tabela 1: Habilidades desenvolvidas nos níveis de van Hiele

Habilidades	Nível 1 Reconhecimento/ visualização	Nível 2 Análise	Nível 3 Dedução Informal	Nível 4 Dedução Formal	Nível 5 Rigor
Reconhecimento visual	Reconhecendo figuras pela sua aparência global, perceber uma figura como parte de outra maior.	Reconhecer inter-relações e propriedades comuns entre figuras distintas.	Valer-se de informações sobre uma figura para deduzir outras informações.	Compreender os diversos sistemas dedutivos e utilizar figuras para provar suposições.	Identificar todas as informações implícitas nas figuras geométricas que compõe um desenho.
Argumentação verbal	Compreender algumas definições de figuras e associar corretamente um nome a uma figura.	Perceber em detalhes as diversas propriedades de uma figura.	Dominando o vocabulário específico, elaborar expressões por meio de inter-relações entre as figuras.	Fazer distinção entre definições, axiomas e teoremas e identificar o que é apresentado e o que é solicitado para fazer numa atividade.	Explicar detalhadamente diversos sistemas dedutivos e elaborar expressões matemáticas para resultados presumidos.
	Criar esquemas de figuras a partir da correta identificação de seus elementos.	Esboçar o desenho de uma figura a partir de propriedades	A partir de figuras dadas, construir outras figuras	Desenhar com precisão uma figura a partir de informações prévias e	Conceber as limitações e oportunidades das diversas reproduções

Desenho ou gráfica		dadas e transpor para o desenho informações verbais.	pertinentes as essas.	decidir sobre a necessidade da utilização de elementos auxiliares para o desenho.	gráficas; descrever graficamente, em diferentes sistemas dedutivos, conceitos não formalizados.
Raciocínio lógico-geométrico	Perceber diferenças e semelhanças entre figuras e a preservação da forma de uma figura independente de sua posição.	Reconhecer as diferentes classificações das figuras geométricas e distinguir figuras pelas suas propriedades.	Compreender a inclusão de classes de figuras por meio de suas propriedades e reconhecer a importância de uma boa definição.	Desenvolver demonstrações valendo-se de propriedades e consequências decorrentes das relações entre figuras ou entre elementos de uma figura.	Compreender as limitações e aplicações dos modelos axiomáticos e identificar as características e classificação de um sistema axiomático.
Aplicação do conhecimento geométrico	Reconhecer formas geométricas presentes nos elementos da natureza ou transformados pelo homem.	Perceber propriedades geométricas nos elementos da natureza; reproduzir fenômenos físicos em um modelo ou no papel.	Compreender o conceito de um modelo matemático que retrata relações entre objetos geométricos.	Inferir propriedades dos objetos a partir de informações sobre as suas formas; solucionar problemas associados a objetos geométricos.	Retratar sistemas abstratos utilizando modelos matemáticos; estabelecer padrões matemáticos para representar fenômenos físicos.

Fonte: ASSAD (2017 pp. 45 – 46). Adaptado pelo autor

Diante da diversidade da EJA, há de se considerar que os alunos raciocinam em diferentes níveis e por isso, há divergências nas opiniões e constatações. É necessária a intervenção do professor no sentido de favorecer uma boa comunicação entre todos os envolvidos no processo, buscando também meios para os compreender e se fazer compreendido por eles. Com essa consciência, o professor deve incentivar a comunicação em sala de aula, sob a perspectiva de que alunos em níveis mais avançados são capazes de, a seu modo e com uma linguagem mais próxima da linguagem dos colegas, compartilhar suas ideias, contribuindo para o avanço de outros, de modo que, com a troca de conhecimentos e intervenção do professor, todos consigam se apropriar do conhecimento geométrico, tenham êxito escolar, desenvolvam sua autonomia e se tornem capazes de aplicar esses conhecimentos em situações cotidianas.

1.5 O Ensino de Geometria na EJA, à luz da teoria de van Hiele

Ao contrário do que tradicionalmente se prega, as dificuldades de aprendizagem atribuída à EJA não se explicam, necessariamente, pela falta de capacidade intelectual, muito menos pela idade cronológica do aprendiz. Ao que se percebe, essas dificuldades são reflexo de um planejamento equivocado que desconsidera o fato de que a aprendizagem humana é um processo sistemático que passa por níveis de desenvolvimento do pensamento humano. O professor precisa identificar em que nível o aluno se encontra em determinado conteúdo para, sem saltar etapas, planejar atividades que possibilitem o avanço de um determinado nível para níveis superiores de pensamento.

Superando o mito de que o desempenho escolar e a capacidade cognitiva estão condicionados à idade cronológica dos alunos da EJA, esses autores, baseados na teoria de van Hiele, salientam que "a progressão para um nível mais avançado depende mais da instrução (ação do professor e tipos de tarefas propostas) do que da idade biológica do indivíduo" (VIEIRA; ALLEVATO, 2015, p. 45). Nesse sentido, Crowley (apud LINDQUIST; SHULTE, 1994, p. 6) acrescenta que, do ponto de vista pedagógico, as preocupações devem estar mais centradas no método, na organização do curso, nos conteúdos e nos materiais e recursos didáticos utilizados do que na maturidade do aluno.

Corroborando essa concepção, Palácios (1995, apud FONSECA, 2005, p. 22), aponta para um redimensionamento das considerações sobre a natureza das condições que determinam as possibilidades de aprendizagem e construção de conhecimento na idade adulta, uma vez que não há evidências de sustentação na Psicologia para argumentos que atribuem à idade cronológica as eventuais dificuldades de aprendizagem do aluno adulto. Nesse sentido, o enfoque deve ser ampliado para a observação de uma série de fatores de natureza diversa que determinam o nível de competência cognitiva de pessoas com idade mais avançada e as possibilidades de aprendizagem e construção de conhecimento na idade adulta.

Quanto ao ensino de geometria no Brasil, as publicações destinadas a fins didáticos evidenciam que maior ênfase é dada às formas mais regulares e recorrentes nas observações do cotidiano do cidadão comum. Com efeito, formas assimétricas, ainda que ocasionalmente mencionadas, não se apresentam na literatura como elementos de estudos mais aprofundados. Contudo, o estudo das formas regulares nos permitem realizar cálculos sobre essas outras formas com relativa precisão e isso, ao que parece, já é suficiente para atender às necessidades da maioria dos brasileiros. Essa questão foi aqui elencada apenas para alertar sobre as limitações do conhecimento escolar diante das exigências do mundo real.

A beleza da geometria está na construção e ação investigatória sobre o objeto construído. No processo de construção o aluno aprende fazendo e faz aprendendo e ainda que de modo nem sempre intencional, vai compreendendo, a seu modo e tempo, a estrutura do objeto e as relações entre os elementos que o compõe. A manipulação do objeto observado, seja pelo uso de materiais concretos, seja com o auxílio dos softwares de geometria dinâmica, aguça a curiosidade do aluno investigador e revela propriedades importantes para a construção de significados e compreensão do mundo, uma vez que, dada à estaticidade de coisas que nos cercam, muitas dessas propriedades passam desapercebidas ao nosso sentido.

Apesar da falta de habilidade dos alunos da EJA com a geometria formalizada, seja pelo fato de nunca ter tido contato com ela, ou pelo longo período de interrupção dos estudos no ambiente escolar, o professor dessa modalidade conta com a vantagem de estar trabalhando com jovens e adultos que já tem uma boa noção visual de formas geométricas que fazem parte do mundo que os cerca. Tal fato sugere que muitos desses alunos provavelmente já desenvolveram seu pensamento geométrico para além do nível inicial. Contudo, não se deve desconsiderar a hipótese de que alguns alunos ainda se encontram estagnados no nível mais básico e necessitam de motivação e apoio para avançar para níveis superiores.

É claro que em um grupo tão heterogêneo como é o caso da EJA, os alunos se encontram em níveis de pensamento geométrico muito diversos e o professor deve se atentar aos ritmos de aprendizagem. Cada aluno tem seu tempo de aprender e se desenvolve de forma peculiar, por isso é importante o acompanhamento do professor, no sentido de buscar o equilíbrio entre o grau de dificuldade das atividades propostas e o nível de pensamento do aluno. A ação precisa ser replanejada constantemente para se elevar gradativamente o nível de dificuldade, de acordo com as condições do aluno. Ao saltar etapas, o professor incorre no erro de exigir do aluno algo que está além do seu nível de pensamento geométrico, fadando esse aluno ao fracasso escolar.

A importância atribuída aqui ao conhecimento do modelo de van Hiele se deve, sobretudo por possibilitar ao professor elaborar atividades a partir de ambientes de geometria dinâmica com vistas a favorecer a transição entre as fases de desenvolvimento do pensamento para que se alcance o nível de pensamento geométrico desejado. Importa ao professor a consciência de que nenhum recurso físico ou virtual é capaz de promover melhorias no ensino de Geometria se sua adoção não vier precedida de um planejamento pautado na compreensão e respeito aos níveis de pensamento geométrico.

2. POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NA EJA

Que o ensino de geometria no Brasil vem sendo, há muito, relegado a um segundo plano é uma constatação irrefutável. Parece óbvio que essa situação não mudará enquanto o professor e a escola permanecerem omissos a essa realidade. Em certa medida, é preciso que o professor tome para si a responsabilidade de buscar medidas urgentes de intervenção na organização curricular, propondo alternativas para a retomada dessa importante área da Matemática no ambiente escolar. Quando se trata da EJA, os conteúdos geométricos são abordados de forma muito superficial, descontextualizada e desmotivadora para o adulto que busca na escola um conhecimento de aplicação prática e imediata no seu cotidiano.

2.1 Contribuições dos Softwares de Geometria Dinâmica para o Ensino de Geometria

Em meio ao abandono das construções geométricas na escola, pouca menção se faz ao uso de materiais manipuláveis em sala de aula. Ao que se percebe, poucos são os professores que se aventuram a propor atividades dessa natureza, até mesmo porque as construções manuais exigem um tempo que o professor não dispõe para a realização desse tipo de tarefa. Além disso, a falta de habilidade no manuseio dos instrumentos para confecção manual, tais como régua, compasso, transferidor e tesoura, torna-se um fator desmotivador para muitos alunos. Nesse sentido, os ambientes de geometria dinâmica emergem como uma interessante alternativa complementar ao ensino.

Diante do acelerado avanço tecnológico e da facilidade de acesso às tecnologias de informação e comunicação, o aluno jovem, adulto e idoso da atualidade se vê, naturalmente, induzido a buscar o desenvolvimento de certas habilidades no manuseio de aparelhos celulares e computadores para atender às exigências do mercado de trabalho e outras demandadas sociais. Em meio a essa realidade emerge um ambiente propício para o uso de softwares de geometria dinâmica como estímulo ao estudo de geometria na EJA, justificado pelo fascínio do aluno ao vislumbrar a possibilidade de explorar minuciosamente representações visuais similares a objetos concretos do seu cotidiano, em um ambiente virtual.

Como salienta Scalabrin e Mussato (2020, pp. 129-130), com o advento das Tecnologias Digitais e a crescente aceleração das possibilidades de acesso e domínio dessas tecnologias, o cenário educacional é contemplado por novas alternativas para o ensino e aprendizagem, proporcionando aos professores possibilidades de ampliar os métodos de ensino, e ao aluno, possibilidades de buscar autonomia nos estudos e construir uma aprendizagem significativa para ele.

Nesse sentido, destaca-se a importância dos softwares de matemática dinâmica para o ensino, uma vez que

> [...] os ambientes de visualização e experimentação com software de matemática dinâmica têm grande destaque, no que se refere a compressão de processos relacionados à produção de significados e conhecimentos matemáticos. Além disso, é possível verificar a presença de várias características próprias dos softwares alojados nesse ambiente, tais como Calculadora Gráfica, Calculadora CAS, Calculadora Científica, Calculadora 3D, ferramentas de Geometria (plana, espacial e analítica), Planilhas, dentre outros (SCALABRIN e MUSSATO, 2020, p. 131)

Segundo Alves e Sampaio (2010), estudos indicam que alunos que passaram pela experiência de lidar com representações dinâmicas de figuras e propriedades geométricas melhoraram suas justificativas a determinadas indagações conceituais, demonstrando maior evolução em relação à compreensão e apreensão dos conceitos geométricos. Esses autores ressaltam ainda que, além de despertar o interesse e possibilitar melhorias no desempenho dos alunos, o uso de softwares de geometria dinâmica exige do professor um melhor planejamento das atividades, podendo assim trazer importantes contribuições para o ensino da Matemática da Educação Básica.

Preocupados com o abandono do ensino de geometria, os autores supracitados observam que os conteúdos geométricos vêm sendo historicamente ignorados por muitos professores e apontam o emprego do GeoGebra como uma tendência consideravelmente colaborativa para a retomada do ensino de geometria na escola. Destacam que a utilização do recurso computacional no ensino de geometria representa uma outra dinâmica para a aprendizagem, estimulado pela visualização e principalmente pela possibilidade de manipulação e execução do conhecimento adquirido pelo aluno. Na EJA, os ambientes de geometria dinâmica estreitariam as relações entre o cotidiano e a formalização de conceitos.

Atualmente o professor pode contar com uma grande diversidade de tecnologias na expectativa de facilitar seu trabalho, motivar os alunos e possibilitar um melhor atendimento às suas necessidades educativas. Contudo, é importante que se entenda que as tecnologias nem sempre se encontram atreladas à informática, pois, “todo instrumento a serviço da melhoria da qualidade dos serviços e do aprimoramento da ação humana é considerado uma tecnologia” Pirozzi (2013, p. 11). Embora não se possa negar a importância do computador, das mídias eletrônicas e dos softwares educativos no contexto educacional, não se deve atribuir aos recursos tecnológicos os fins da educação. Como afirma Moran,

> As tecnologias são meio, apoio, mas com o avanço das redes, da comunicação em tempo real e dos portais de pesquisa, transformaram-se em instrumentos fundamentais para a mudança na educação. Há uma primeira etapa, que é a definição de quais tecnologias são adequadas para o projeto de cada instituição. Depois, vem a aquisição delas. (...) Em seguida, vem o domínio técnico-pedagógico, saber usar cada ferramenta como ponto de vista gerencial e didático, isto é, na melhoria de processos administrativos e financeiros e no processo de ensino e aprendizagem. (MORAN, 2007, p. 90)

Quanto ao ensino da matemática, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2016, p.17 apud SCALABRIN; MUSSATO, 2020, p. 130) ressaltam que "as dimensões da inovação tecnológica permitem a exploração e o surgimento de cenários alternativos para a educação e, em especial, para o ensino de matemática". Nesse sentido, Scalabrin e Mussato (2020, p. 130) pontuam que o uso de recursos tecnológicos deve ser planejado para a criação de ambientes de aprendizagem que possibilitem novas formas de ensinar e aprender. É interessante que o professor busque alternativas para tornar as aulas de geometria mais atrativas para o aluno, mas isso deve ser cuidadosamente planejado de modo a não se distanciar das finalidades do ensino. Como afirmam Beltrão, Vitor e Barbosa,

> É possível que as aulas de matemática se tornem cada vez mais interessantes e atrativas aos alunos com o auxílio da tecnologia, desde que as ferramentas tecnológicas sejam utilizadas em prol do conhecimento do educando, e não simplesmente como distração, porém, para que esse fenômeno aconteça, faz-se necessário algumas mudanças nos paradigmas atuais vigentes, nos quais as aulas ministradas sejam cuidadosamente elaboradas como forma de desafio ou algum tipo de experiência de aprendizado profundo dos alunos, para que esses se sintam parte integrante das aulas no processo de construção do conhecimento (BELTRÃO; VITOR; BARBOSA, 2017, p. 140 apud SCALABRIN; MUSSATO, 2020, p. 130).

Ressaltando essa importância do uso de softwares educativos para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática como de outras disciplinas na atualidade, Bento (2010) defende a incorporação desses recursos tecnológicos ao processo de ensino e aprendizagem como ferramenta de mediação entre o indivíduo e o conhecimento. Ao defender a importância dos softwares de geometria dinâmica para o ensino, Bento (2010) salienta que

> [...] na Geometria, o recurso computacional é um instrumento para desenvolver, entre outras habilidades a de visualização, facilitando a movimentação das figuras com software de geometria dinâmica, promovendo maior exploração dos conceitos geométricos, para a aquisição e formalização dos mesmos. (BENTO, 2010, p. 20).

Diante do exposto, pode-se afirmar que o ensino de geometria espacial se torna mais eficiente e atrativo quando à análise do objeto de estudo são agregados os processos de construção e manipulação de figuras. Durante a construção de uma figura geométrica em um ambiente de geometria dinâmica, elementos e propriedades são percebidos e explorados de forma similar ao que ocorre quando se trabalha com materiais manipuláveis, com a vantagem de se obter maior perfeição e rapidez na construção desses objetos. As dificuldades no manuseio do computador não são maiores que aquelas ocasionadas pela falta de habilidade com instrumentos de desenho e construção manual de objetos manipuláveis.

De acordo com Borba, Scucuglia e Gadanidis (2016, apud SCALABRIN; MUSSATO, 2020, pp. 130-131), atividades que propõem a construção de objetos em um ambiente de geometria dinâmica, permitem traçar novos caminhos de investigação matemática e, por possibilitar uma análise imediata da construção, contribuem para o desenvolvimento dos conceitos geométricos. Complementando essa ideia, Girardo (2012, p. 39 apud SCALABRIN; MUSSATO, 2020, p. 130), destaca que a grande vantagem das construções geométricas reproduzidas na tela do computador em ambientes de matemática dinâmica sobre as desenvolvidas com lápis e papel é a praticidade com a qual se pode alterar alguns elementos com um simples arrastar do mouse, facilitando observar as modificações decorrentes dessa manipulação.

As importantes descobertas proporcionadas pelo dinamismo dos softwares de geometria dinâmica revelam seu aspecto heurístico e a amplitude das possibilidades de visualização, deduções, conjecturas e provas visuais que situam o aluno em um importante cenário para investigação, instigando-o a se aventurar em novas descobertas, na comparação de objetos, percepção das relações entre elementos e no reconhecimento de suas propriedades. Como afirma Pereira (2012), “As características do GeoGebra potencializam a constituição de cenários para investigação, nos quais o aluno é capaz de experimentar situações em um processo dinâmico” (PEREIRA, 2012, p. 32 apud SCALABRIN; MUSSATO, 2020, p. 131).

Apesar da importância dos softwares de geometria dinâmica, não se deve atribuir a esse recurso maior importância, em detrimento de tantos outros, tais como figuras, materiais manipuláveis, dobraduras, recursos de mídia, dentre outros, incluindo o próprio livro didático.

Não se pode esquecer que o GeoGebra é um recurso complementar e não deve, de modo algum, ser concebido como a solução de todos os problemas educacionais. Essa consciência não tira o mérito do recurso tecnológico no processo de ensino de Geometria. Apenas alerta para o risco de uma ênfase exagerada nesses recursos em detrimento da ação do professor e de suas escolhas.

Na concepção de Bonotto e Bisognin, (2015 apud SCALABRIN; MUSSATO, 2020)

> O desenvolvimento das tecnologias na educação surge como um meio de ensino e não como um fim, pois quando usados de maneira eficiente, a utilização desses recursos tecnológicos pode modificar as formas como os alunos aprendem e são ensinados. O grande desafio dos professores não é somente utilizar as tecnologias em sala de aula, mas sim, tornar a aula mais envolvente, interativa, criativa e capaz de produzir significados ao aluno por meio da utilização da tecnologia. (BONOTTO e BISOGNIN, 2015 apud SCALABRIN; MUSSATO, 2020, p. 130)

Com base no exposto, vale destacar que nem o computador por si só, nem tampouco os softwares educativos quando utilizados de maneira inadequada, surtem efeito positivo no processo de ensino e aprendizagem. Com a consciência de que mais importante que a metodologia em si é a prática consciente do professor, recomenda-se nesse trabalho a utilização do Geogebra como recurso complementar, desde que tudo seja feito de forma muito bem planejada.

Além da relativa facilidade para se construir objetos geométricos nos ambientes de geometria dinâmica, a diversidade de ferramentas disponíveis nesses ambientes permite que as características e propriedades desses objetos sejam percebidas visualmente durante cada fase da construção. Nesses ambientes as propriedades dos objetos se mantêm quando a imagem bi/tridimensional é colocada em movimento na tela do computador. As comparações entre um objeto construído e outros similares gerados a partir de alterações de parâmetros também auxiliam na compreensão das representações, criação de conjecturas, identificação de padrões e formalização de conceitos geométricos de real significado para o aluno adulto.

Certamente, uma das grandes preocupações ao se propor envolver os alunos da EJA na realização de atividades envolvendo o uso do computador em sala de aula é o nível de conhecimentos de informática que esses alunos detêm. Provavelmente a maioria deles nunca fez um curso básico da computação e possivelmente alguns não têm acesso a computadores em suas residências ou em seus locais de trabalho. Essa pode ser uma das causas da resistência dos professores em adotar os recursos tecnológicos em suas aulas. Contudo, há várias possibilidades para romper esses desafios, principalmente quando a instituição de ensino dispõe de um laboratório de informática adequadamente equipado para tal.

Interessante observar que a relativa simplicidade das ferramentas básicas do GeoGebra e a possibilidade de testar essas ferramentas e avaliar os resultados obtidos fazem da suposta falta de habilidade no manuseio do software, seja por parte do aluno ou mesmo ao professor, um fator de menor relevância no processo de escolha desse instrumento como recurso complementar ao ensino de Geometria, tornando-se, com algum esforço, um instrumento motivador para que esse aluno, desenvolvendo seu espírito investigativo, descubra empiricamente a funcionalidade de boa parte das ferramentas do GeoGebra e, explorando a riqueza e beleza da Geometria, conquiste gradativamente sua autonomia e autoconfiança na resolução de problemas geométricos.

2.2 O Software GeoGebra

Embora uma proposta pedagógica fundamentada na teoria de van Hiele possa perfeitamente ser implementada sem o uso dos recursos tecnológicos, convém refletir sobre a possibilidade de potencializar esse ensino com o auxílio de softwares de geometria dinâmica. Estudos revelam que os ambientes de geometria dinâmica, quando adequadamente explorados pelo professor, podem contribuir significativamente para a aprendizagem da geometria e para a investigação matemática. Nesse sentido, o reconhecimento das potencialidades do GeoGebra endossa as recomendações da utilização desse software nas aulas de geometria, sobretudo pelo fato de possuir características alinhadas à proposta pedagógica de van Hiele.

Uma das características interessantes do GeoGebra está relacionada à riqueza das possibilidades de visualização, uma vez que o reconhecimento visual, que leva à identificação do objeto, é o primeiro nível do pensamento geométrico segundo van Hiele. Além disso, muito mais que em instrumentos de representação estática, tais como livros, lousas e similares, um ambiente de geometria dinâmica, em particular, o GeoGebra 3D pode facilitar, através da construção, manipulação e visualização do objeto em movimento, a análise e o reconhecimento de suas propriedades, favorecendo a negociação de significados, a formalização de conceitos, o desenvolvimento de habilidades e a compreensão do mundo.

O GeoGebra é um software livre de matemática dinâmica indicado para todos os níveis de ensino. Reunindo ferramentas de Geometria, Álgebra, Estatística e Cálculo, numa interconexão prática, de fácil manuseio e de linguagem simples, esse ambiente vem se destacando como uma importante ferramenta complementar ao ensino em sala de aula, sendo indicada como um estímulo à criatividade e ao desenvolvimento do raciocínio lógico, facilitando a compreensão de conceitos, a criação de conjecturas e a comprovação visual de diversos resultados algébricos. Completando o trabalho com régua, compasso, transferidor e outros materiais manipuláveis, o GeoGebra dispõe de recursos similares muito práticos.

Dentre as versões para notebooks ou PCs, recomenda-se o GeoGebra Classic para Desktop, por ser a versão mais limpa e completa do GeoGebra. Quando executado em notebooks ou PCs, a velocidade de processamento durante a criação e edição de objetos, principalmente utilizando a ferramenta 3D, depende do processador e da memória RAM da máquina na qual o software está instalado, mas, em geral, trata-se de um software relativamente leve. Existe ainda a versão online, que não requer o armazenamento de dados permanentes na memória do computador, contudo, a versão para Desktop oferece a vantagem do trabalho offline em casos de indisponibilidade de rede.

A versão utilizada nesse trabalho é a 6.0.631.0-offline, atualizada em março de 2021. Vale destacar que, embora algumas versões apresentem semelhanças com relação ao layout, ferramentas e disposição dos ícones, a versão citada aqui difere em vários aspectos daquelas apresentadas em alguns tutoriais em forma de texto ou vídeo disponíveis há algum tempo na internet. Visando evitar frustrações, sugere-se ao professor que alerte seus alunos sobre a importância de uma análise crítica dos materiais consultados e da possibilidade de descobrir sozinho a funcionalidade de diversas ferramentas. Aconselha-se consultar documentos mais recentes e explorar o software para descobrir como as ferramentas funcionam.

Além da sua utilização de forma mais restrita, pensada para uso do professor em sala de aula e/ou para a prática dos alunos, o software ainda dispõe de ferramentas de desenvolvimento de atividades de maior abrangência, possibilitando a criação de materiais didáticos de acesso público, no formato de páginas web interativas, como, por exemplo, quiz e jogos educativos. No site oficial do GeoGebra estão disponíveis atividades interativas superinteressantes e com um grande potencial pedagógico envolvendo diversas áreas da matemática. Além disso, esse software dá ao professor autonomia para criar e publicar gratuitamente suas próprias atividades, de forma dinâmica, chamativa e envolvente.

Certamente o conhecimento básico do funcionamento de um software é pré-requisito para o domínio de qualquer ambiente que envolve tecnologia, mas a falta de habilidades mais avançadas no manuseio do GeoGebra, embora possa dificultar em certa medida o trabalho do professor, não deve ser vista como um fator limitador para a exploração desses recursos nas aulas de geometria. Por outro lado, não se pode admitir que o professor incorra no erro de priorizar o potencial do software e desprezar os níveis de pensamento de seus alunos. Portanto, é importante que a elaboração de atividades que integrem o GeoGebra como ferramenta complementar seja precedida da preocupação com os níveis de pensamento de van Hiele.

Ao se explorar figuras geométricas com o auxílio do software GeoGebra, o aluno desenvolve o espírito investigativo, faz conjecturas e se desdobra em esforços e esquemas mentais muito similares aos requisitados e aprimorados durante a resolução de problemas. Na verdade, seja no processo de construção, planificação ou investigação acerca de elementos de figuras geométricas através do software, essas manipulações podem ser consideradas como uma forma de se resolver geometricamente um problema, num processo onde o registro dos procedimentos, constatações e comprovações resultam numa forma de resolução algébrica. Esses aspectos são muito importantes para o desenvolvimento da autonomia de pensamento.

2.3 O GeoGebra 3D

Diante do abandono de geometria no Brasil, conforme observado por Lorenzato (1995, pp. 3-4), não é sensato esperar que o aluno da EJA, pouco ou nada familiarizado com a Geometria Espacial no formato como ele é ensinada nas escolas, identifique elementos, propriedades e relações nas representações de figuras geométricas tridimensionais apresentadas no plano de forma dura e estática, sobretudo quando se almeja uma resposta positiva em relação ao conhecimento das propriedades presentes nessas representações visuais e sua relação com objetos concretos encontrados no cotidiano.

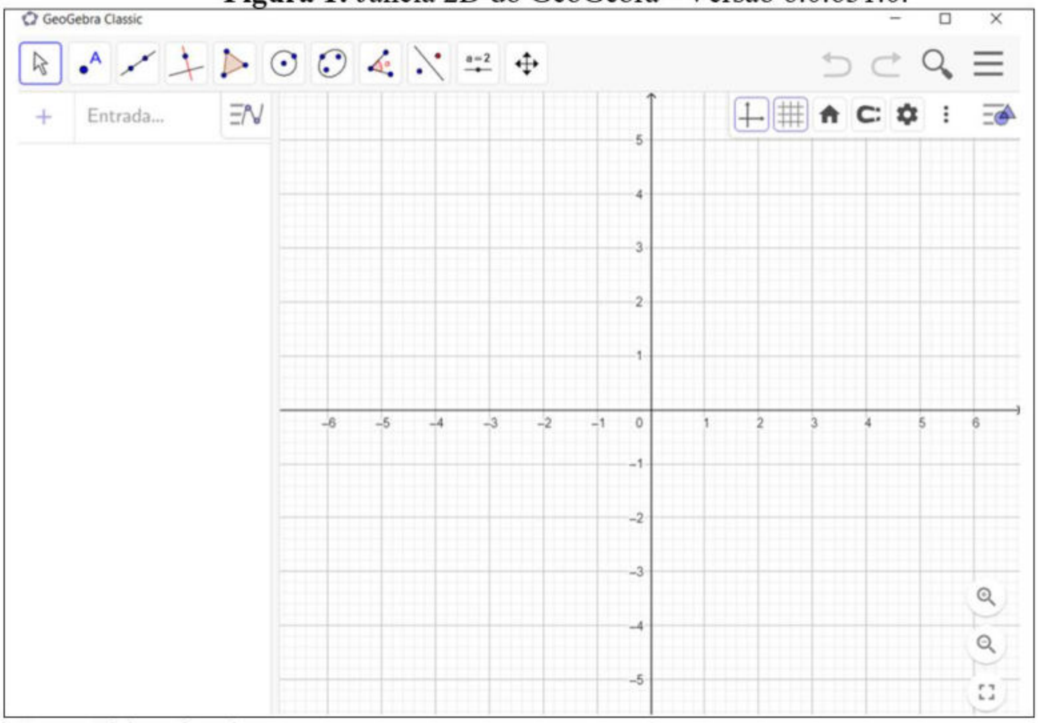
Nesse sentido, um ambiente virtual dinâmico, que possibilite construir e manipular representações geométricas tridimensionais, traria grandes contribuições para o ensino de Geometria Espacial na EJA, sobretudo quando adotado como recurso didático complementar ao livro didático, apostila e outros recursos como, por exemplo, os tão importantes materiais manipuláveis. Contribuindo em grande medida para o desenvolvimento da noção espacial, o GeoGebra 3D dispõe de ferramentas que permitem construir figuras tridimensionais e dar a elas movimentos translativos e rotativos no espaço virtual, favorecendo a análise de elementos que podem ser melhor explorados quando a figura é observada por diferentes ângulos de visualização.

Esse dinamismo faz do GeoGebra 3D uma valiosa ferramenta para o estudo dos objetos tridimensionais abordados nas aulas de geometria espacial, possibilitando a exploração de situações que, apesar de apresentadas em um ambiente virtual, despertam habilidades de visualização muito similares àquelas desenvolvidas por meio da manipulação de objetos 3D no espaço real. Essa interação dinâmica possibilita a visualização desses objetos sob diferentes ângulos, favorecendo a compreensão da sua estrutura e o processo de formação de imagens mentais fundamentais à abstração, à produção de sentidos e à compreensão dos conceitos geométricos.

A interface do Geogebra 3D exibe o Campo de Entrada, Janela de Álgebra e duas janelas de visualização, que podem estar dispostas lado a lado. A primeira janela de visualização é do Geogebra 2D, representando o plano xy e a segunda é do ambiente 3D, que representa o espaço xyz.

Ao abrir o GeoGebra Classic, versão 6.0.631.0, será apresentada uma tela como na Figura 1.

Figura 1: Janela 2D do GeoGebra - Versão 6.0.631.0.



Fonte: Elaborada pelo autor.

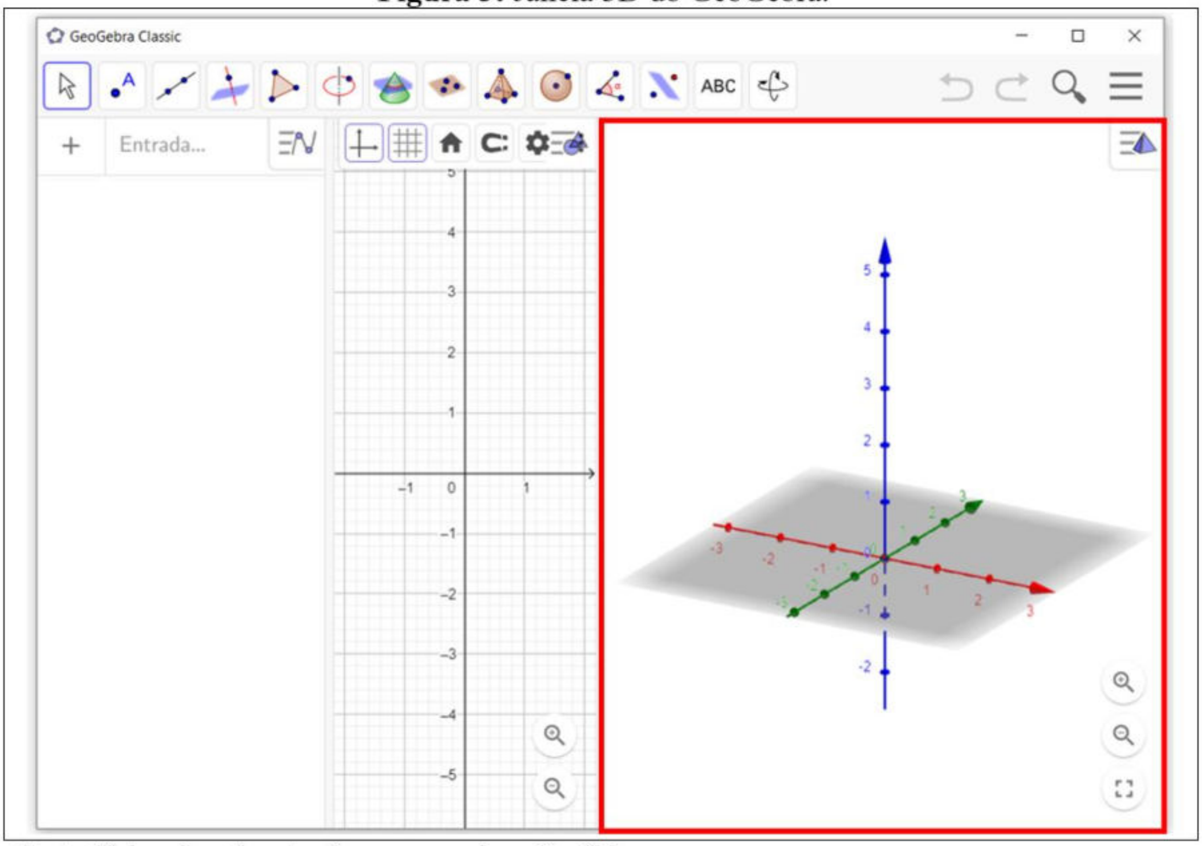
Para abrir a janela de visualização 3D, basta clicar nos três pontinhos que aparecem no canto superior direito, logo abaixo da lupa e, na caixa de diálogo que se abre, clicar na opção “Janela de Visualização 3D”, como indicado na Figura 2.

Figura 2: Caixa de diálogo para acesso à janela 3D do GeoGebra.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Fazendo isso, abrirá a tela a janela 3D do GeoGebra, que permitirá facilmente construir e manipular objetos tridimensionais, como é o caso dos sólidos abordados nesse trabalho, como na Figura 3.

Figura 3: Janela 3D do GeoGebra.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra.

Um simples clique em qualquer região da janela 2D ou 3D faz com que a barra de ferramentas da respectiva janela apareça, como na Figura 4.

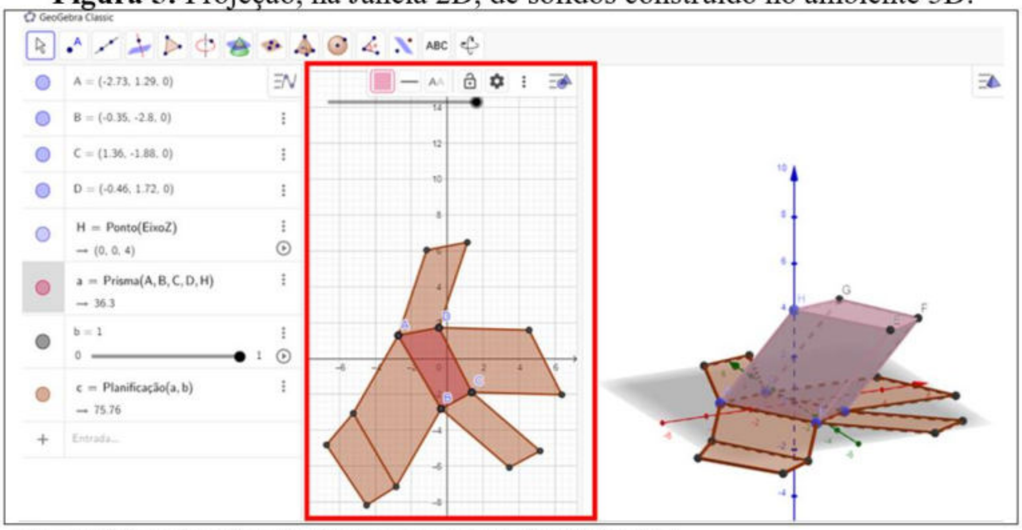
Figura 4: Barra de ferramentas das Janelas 2D e 3D, respectivamente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Manter as duas janelas abertas lado a lado permite ao usuário, durante o estudo de sólidos geométricos, observar o comportamento de alguns elementos planos desses sólidos. No entanto, é importante ressaltar que, por razões óbvias, as ferramentas da janela 2D não são as mesmas da janela 3D. É fácil verificar isso clicando alternadamente sobre as duas janelas e observando o que ocorre na barra de ferramentas, como mostram as figuras a seguir.

A base plana das construções feitas no ambiente 3D, assim como as planificações de sólidos geométricos, é automaticamente projetada no plano xy e aparecem na janela de visualização 2D, como apresentado na Figura 5.

Figura 5: Projeção, na Janela 2D, de sólidos construído no ambiente 3D.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Partindo desses atributos que fundamentam o caráter educativo do GeoGebra e, em particular, da sua janela 3D, é bastante interessante perceber a interrelação tecnologia/pensamento geométrico/aprendizagem sob a ótica do estabelecimento de uma sequência hierárquica de elementos metodológicos, na qual se propõe o GeoGebra como facilitador ao avanço para níveis superiores de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele com vistas à retomada do ensino e aprendizagem de geometria de forma significativa. Importa esclarecer que a ênfase nesses elementos deve estar, respectivamente, na aprendizagem significativa de geometria espacial, no modelo de van Hiele e no GeoGebra.

2.4 Aplicações do GeoGebra 3D no ensino de geometria espacial

Segundo Scalabrin e Mussato (2020, p. 131), uma das grandes contribuições do uso de softwares de matemática dinâmica nos processos de ensino e de aprendizagem dos conteúdos de geometria espacial está relacionada às várias possibilidades de visualização das figuras tridimensionais. Segundo esses autores, a capacidade de visualizar pode ser desenvolvida à medida que se forneça ao aluno material de apoio didático baseado em elementos concretos, representativos do objeto geométrico em estudo. A importância da visualização para o desenvolvimento cognitivo no campo da geometria é endossada por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2016), ao salientarem que

> A visualização envolve um esquema mental que representa a informação visual ou espacial. É um processo de formação de imagens que torna possível a entrada em cena das representações dos objetos matemáticos para que possamos pensar matematicamente. Ela oferece meios para que conexões entre representações possam acontecer. Assim, a visualização é protagonista na produção de sentidos e na aprendizagem matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2016, p. 53 apud SCALABRIN; MUSSATO, 2020, p. 131).

Como já mencionado nesse trabalho, a possibilidade de dar movimento às figuras na tela do computador, coloca o aluno em um ambiente interativo e investigativo, no qual ele consegue manipular objetos, identificar e comparar seus elementos, analisar suas propriedades, realizar conjecturas e observar suas regularidades. Dessa forma, o GeoGebra revela-se um excelente recurso complementar ao ensino de Geometria Espacial, sob a perspectiva da superação das dificuldades de aprendizagem inerentes ao estudo de figuras geométricas tridimensionais, sobretudo por auxiliar na compreensão de conceitos, relações e propriedades de interesse da Geometria Espacial.

De acordo com Andrade (2015, p. 36 apud SCALABRIN; MUSSATO, 2020, p. 132) o GeoGebra 3D facilita a construção de diversos sólidos geométricos, superfícies e curvas tridimensionais, assim como calcula com razoável exatidão comprimentos de segmentos, áreas e volumes, além de mostrar geométrica e algebricamente interseções entre figuras.

Do ponto de vista didático, o uso do GeoGebra 3D, desde que aliado a outros recursos, tais como o uso de materiais manipuláveis nas aulas de Geometria Espacial pode transformar a natureza do conhecimento matemático, por possibilitar ao professor modificar o tipo de atividades propostas em sala de aula, visando alcançar os alunos em diferentes níveis de compreensão, e aos alunos visualizarem os objetos construídos de maneira diferente do que estão habituados a observar nos livros didáticos.

2.5 Construções geométricas à luz da teoria de van Hiele

Uma análise realizada por Scalabrin e Mussato (2020) sobre atividades desenvolvidas para o ensino de Pirâmides revela que “o uso do software GeoGebra aliado as atividades propostas de cunho exploratório e investigativo, favoreceu para que o processo de aprendizagem dos alunos sobre os conceitos geométricos ocorresse de forma gradativa, partindo da informação visual dos objetos construídos e análise das propriedades, para a compreensão da lógica formal e elaboração de conjecturas” (SCALABRIN; MUSSATO, 2020, p. 142). Isso mostra que a visualização é o ponto de partida para a compreensão da lógica formal e que o desenvolvimento do pensamento geométrico é favorecido pelos ambientes de geometria dinâmica.

Essas observações estão em consonância com o que se lê na Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos, que dispõe que

> A compreensão das relações geométricas supõe ação sobre os objetos. Porém, para que os alunos se apropriem desse conhecimento, não basta mostrar-lhes objetos geométricos ou apresentar-lhes suas propriedades. Inicialmente, as figuras geométricas são reconhecidas pela sua aparência física e não pelas suas propriedades. Posteriormente, a partir de observações e experimentações, começa-se a perceber algumas características dessas figuras e as propriedades que conceituam as formas geométricas (BRASIL, 2001, p.147)

Desse modo, é interessante que o primeiro contato dos alunos com os conteúdos geométricos ocorra por meio da visualização de objetos concretos ou virtuais, e que o professor dialogue com seus alunos buscando identificar seus níveis de conhecimento sobre esses objetos, partindo do reconhecimento e identificação das formas pela aparência física e avançando para a percepção de seus elementos, relações e propriedades. Percebe-se, portanto, que o momento introdutório dos conteúdos tem mais um caráter investigativo, tanto por parte do professor, que investiga o quanto seus alunos dominam o conteúdo e a forma como eles pensam, como por parte dos alunos, que partem da visualização para a investigação dos elementos que compõem as formas geométricas.

A partir do reconhecimento das formas pela observação de suas características globais, os alunos devem ser instigados a descrever as propriedades comuns a essas figuras e separá-las em classes, de acordo com essas propriedades. Essa fase pode ser favorecida pela complementação dos conteúdos e atividades do livro didático e outros recursos através de representações dinâmicas e atividades experimentais, envolvendo a construção e manipulação de materiais concretos ou objetos virtuais explorados por meio do uso de softwares de geometria dinâmica. Atividades dessa natureza possibilitam a percepção e compreensão das características e propriedades que definem as formas geométricas, favorecendo a construção de significados e conceitos geométricos.

3. UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS PARA ALUNOS DA EJA

Diante da notável dificuldade que o aluno, não somente, mas também, da EJA encontra em compreender as representações bidimensionais de objetos tridimensionais apresentadas no livro didático, deve ser uma preocupação do professor buscar instrumentos de apoio para o estudo da Geometria Espacial, sobretudo no que se refere à qualidade da representação de objetos espaciais no plano, dada à importância da representação no processo de desenvolvimento do pensamento geométrico.

De acordo com Gutiérrez (1996 apud BORSOI, 2016, p. 31), a representação de um objeto, seja ela verbal ou gráfica, é um importante instrumento para expressar conhecimentos e ideias geométricas. Nesse sentido, a representação tem papel crucial em todos os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, ajudando a criar ou transformar imagens mentais e produzir o raciocínio visual. No entanto, toda representação plana de objetos espaciais é imperfeita, pois implica na perda de alguma informação. Para minimizar essas perdas, o GeoGebra 3D revela-se um importante instrumento de apoio, principalmente por possibilitar que, de maneira dinâmica, se explore as mais variadas representações de um mesmo objeto, a fim de que o aluno perceba elementos e se recupere o máximo de informações perdidas na representação plana estática.

Para melhor desempenho nas atividades com o GeoGebra 3D, é importante que o aluno consiga desenhar e reconhecer polígonos em 2D e tenha uma base sólida no campo da Geometria Plana. Nesse sentido, é importante que o professor, antes de falar de sólidos geométricos, verifique qual o nível de conhecimento de Geometria Plana que seus alunos detêm, sobretudo no que tange à classificação e elementos das formas poligonais, paralelismo, perpendicularismo e ângulos, pois esses são pré-requisitos para a compreensão dos elementos abordados no campo da Geometria Espacial.

Identificadas as dificuldades no campo da Geometria Plana, o professor deve fazer uma breve revisão desses conteúdos com seus alunos. Seria interessante apresentar definições e teoremas como os que se seguem e trabalhar com os alunos atividades que permitam reforçar, inicialmente com o auxílio do GeoGebra 2D, o que é apresentado em cada afirmação. Por partir daquilo que o aluno já conhece de figuras planas e avançando gradativamente para o campo espacial, com o cuidado de se manter a estrita relação com o conhecimento cotidiano, essa atividade preparatória possibilita o preenchimento das lacunas conceituais, a familiarização com as ferramentas do GeoGebra e o avanço na apropriação de novos conceitos, de modo que a aprendizagem ocorra de forma significativa para o aluno.

Adotando um vocabulário simples, porém, voltado para a compreensão do professor, serão apresentados aqui, como sugestão, alguns axiomas, definições e teoremas da geometria, com o objetivo de explicitar quais seriam os pré-requisitos para o estudo dos conteúdos de Geometria Espacial abordados nessa seção. Importa relembrar que todo esse trabalho está sendo construído à luz da teoria dos van Hiele e, além disso, levando-se em consideração a diversidade dos alunos da EJA e suas possíveis dificuldades de abstração ocasionadas pelo pouco contato com a geometria escolar.

Como pré-requisitos para o estudo dos poliedros, em especial poliedros platônicos, prismas e pirâmides, é importante que o aluno, além de conseguir desenhar polígonos com o GeoGebra 2D, tenha bem definido o que é um polígono, consiga classificar polígonos, estabelecer relações entre essas figuras planas, perceber suas principais propriedades e calcular sua área. Os pré-requisitos para o estudo de corpos redondos, como cilindro, cone e esfera, incluem conceitos como raio e diâmetro, além do domínio do cálculo da área do círculo.

Ao avançar no campo da Geometria Espacial, é importante que o professor cuide para que os alunos tenham bem claros certos conceitos de Geometria Plana, tais como aqueles referentes a ângulos, paralelismo e perpendicularidade entre retas no plano, além de dominar os cálculos de distâncias entre objetos no plano e áreas de figuras planas.

Para suavizar a transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial, propõe-se que sejam apresentadas aos alunos algumas definições, axiomas e teoremas, porém, sem apresentar nenhuma demonstração algébricas nesse primeiro momento. O objetivo é que os alunos explorem essas afirmações no GeoGebra e tentem, a partir da observação das figuras, compreender o significado dessa informação.

Vale relembrar que a simplicidade do vocabulário e a riqueza de detalhes, tanto no texto, quanto nas atividades com o GeoGebra, se deve à expectativa de que a presente proposta desperte interesses e alcance, além de outros leitores, também professores que não têm experiência em sala de aula com alunos da EJA, nem tampouco o domínio básico do software GeoGebra. A essência desse trabalho é uma proposta metodológica, sem nenhuma pretensão de ditar regras como se essa fosse a única e mais eficiente forma de se ensinar geometria na EJA. Longe dessas pretensões, a intenção é abrir portas para que o professor crie e desenvolva sua própria metodologia, com base nessas ideias, mas de modo conveniente, dentro da realidade de seus alunos e da instituição de ensino onde trabalha.

Tendo em mente os pré-requisitos básicos e outras informações importantes para esse estudo, sugere-se afirmações como os que se seguem, contudo, sem nenhuma demonstração, por considerar que esses alunos já passaram pelo estudo da Geometria Plana. A disposição dessas informações é apresentada como sugestão, e sua importância se deve ao fato de que o aluno da EJA, em casos não raros de esquecimento ou não assimilação dos conteúdos estudados anteriormente a essa fase, necessita ter onde recorrer para tirar suas dúvidas. Essas informações, com certeza, facilitarão para que novos conceitos façam sentido para esse aluno.

Seguem algumas afirmações, algumas elaboradas pelo próprio autor com base nos conhecimentos adquiridos ao longo dos anos e outras baseadas nas obras de Azevedo Filho (2015), Corrêa (2019) e Dante (2001).

Definição 3.1 (Segmento de reta) Sejam A e B dois pontos distintos sobre uma reta r. O conjunto de todos os pontos de r, localizados entre A e B, inclusive os próprios A e B, recebe o nome de segmento de reta e é denotado por segmento AB.

Definição 3.2 (Polígono) Chama-se polígono toda figura plana fechada formada por segmentos de reta que se encontram nos extremos e não se cruzam em nenhum ponto.

Definição 3.3 (Paralelismo) Duas retas r e s no plano são ditas paralelas se, e somente se, não têm nenhum ponto em comum. Em linguagem matemática, escreve-se r//s. Duas retas não paralelas denominam-se retas concorrentes.

Definição 3.4 (Perpendicularismo) Duas retas concorrentes no plano são perpendiculares se, e só se, o ângulo entre elas mede 90º.

Axioma 3.5 (Postulado de Euclides) Por um ponto A fora de uma reta r passa uma única reta t paralela à reta r.

Definição 3.6 (Paralelogramo) Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e só se, possui os lados opostos paralelos.

Proposição 3.7 Em todo paralelogramo os ângulos opostos são congruentes, ou seja, têm medidas iguais.

Proposição 3.8 Em um paralelogramo os pares de lados opostos são congruentes.

Definição 3.9. (Triângulo isósceles) Um triângulo é dito isósceles se tem dois lados congruentes.

Proposição 3.10 Em um triângulo isósceles os ângulos da base têm mesma medida.

Definição 3.11 (Triângulo equilátero) Um triângulo é dito equilátero se, e só se, os três lados e os três ângulos são congruentes.

Proposição 3.12 Em um triângulo equilátero os três ângulos internos medem 60º.

Definição 3.13 (Plano) Um plano é uma figura geométrica bidimensional formada pela reunião de infinitas retas, perpendiculares a uma reta dada, dispostas lado a lado.

Axioma 3.14 Cada reta contém pelo menos dois pontos distintos; todo plano contém no mínimo três pontos não colineares; o espaço contém pelo menos quatro pontos distintos entre si não coplanares e não colineares.

Axioma 3.15 Por três pontos não colineares passa um único plano.

Definição 3.16 (Paralelismo no espaço) Dados dois planos α e β, diz-se que esses planos são paralelos se existe uma reta r simultaneamente perpendicular aos dois.

Axioma 3.17 A interseção de dois pontos distintos não paralelos é uma reta.

Definição 3.18 (Distância entre dois planos) A distância entre dois planos paralelos α e β, denotada por $d(\alpha, \beta)$, é definida como sendo a distância de um ponto qualquer de um dos dois planos ao outro plano.

Definição 3.19 (Planificação) Planificar um poliedro consiste no processo de cortá-lo ao longo de algumas de suas arestas e abri-lo de modo que suas faces se apoiem totalmente sobre uma superfície plana, sem sobreposições ou deformações.

Para evitar as frustrações tão comuns entre os alunos da EJA, é importante que o professor dê a eles ciência de que a planificação de um poliedro pode ser feita corretamente de diferentes maneiras. Para se ter uma ideia, Bortolossi (2009 apud CORRÊA, 2019, p. 135) observa que o tetraedro regular possui duas planificações distintas, o cubo e o octaedro regular possuem 11 diferentes planificações, o icosaedro regular e o dodecaedro regular possuem 43380 planificações diferentes. Apesar dessa diversidade de modos de fazê-lo, as planificações abordadas nesse capítulo, fielmente tomadas do modo como são apresentadas no GeoGebra, são suficientes para esse estudo.

Partindo dos atributos que fundamentam o caráter educativo do GeoGebra e, em particular, da sua janela 3D, é bastante interessante perceber a interrelação tecnologia/pensamento geométrico/aprendizagem sob a ótica do estabelecimento de uma sequência hierárquica de elementos metodológicos, na qual se propõe o GeoGebra como facilitador ao avanço para níveis superiores de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele com vistas à retomada do ensino e aprendizagem de geometria de forma significativa. No entanto, importa esclarecer que a ênfase nesses elementos deve estar, respectivamente, na aprendizagem significativa dos conteúdos da Geometria Espacial, no Modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico e no software GeoGebra.

3.1 Conceitos geométricos de acordo com o Guia de Referência

No campo da Geometria do Ensino Médio, a versão experimental do Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás (2021, pp. 159-163) orienta que, dentro do eixo temático "Grandezas e Medidas", os conteúdos de Geometria Plana sejam trabalhados no 2º bimestre da 1ª série. Dentro do eixo temático "Espaço e Forma" devem ser trabalhados os conteúdos de Geometria Espacial, no 3º e 4º bimestres da 2ª série e os conteúdos de Geometria Analítica no 1º bimestre da 3ª série.

Dentro do eixo temático "Grandezas e medidas", os conteúdos de Geometria Plana devem ser abordados no 2º bimestre da 1ª série do Ensino Médio, com as seguintes expectativas de aprendizagem:

- Utilizar as fórmulas usadas em geometria, para o cálculo de perímetros e áreas de figuras planas;
- Resolver situações problemas envolvendo o cálculo de perímetros e áreas de figuras planas;

- Utilizar semelhança de triângulos para estabelecer as relações métricas;
- Deduzir as relações métricas no triângulo e aplicá-las;
- Aplicar o Teorema de Pitágoras e o Teorema de Tales na resolução de problemas;
- Resolver problemas relacionados a triângulos;
- Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas.

Para o 3º e 4º bimestres da 2ª série do Ensino Médio, os conteúdos de Geometria Espacial são propostos dentro do eixo temático Espaço e formas, tendo como expectativas de aprendizagem as seguintes:

- Compreender os conceitos primitivos da geometria espacial;
- Reconhecer as posições de retas e planos no espaço;
- Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas;
- Identificar e nomear os poliedros regulares.
- Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema (Relação de Euler);
- Reconhecer e nomear prismas e cilindros;
- Resolver problemas envolvendo o cálculo de área lateral e área total de prismas e cilindros;
- Resolver problemas envolvendo o cálculo do volume de prismas e cilindros;
- Reconhecer e nomear pirâmides e cones;
- Resolver problemas envolvendo o cálculo de área lateral e área total de pirâmides e cones;
- Resolver problemas envolvendo o cálculo do volume de pirâmides e cones;
- Compreender a definição de superfície esférica e de esfera;
- Resolver problemas utilizando o cálculo da área da superfície esférica e do volume de uma esfera.

No 1º bimestre da 3ª série, ainda seguindo o eixo temático Espaço e Forma, devem ser trabalhados os conteúdos de Geometria Analítica, tendo dentre outras expectativas de aprendizagem as seguintes:

- Compreender os conceitos de ponto, reta e plano;
- Calcular a distância entre dois pontos na reta orientada e no plano cartesiano;

- Resolver problemas utilizando o cálculo da distância entre dois pontos;
- Obter o ponto médio de um segmento de reta;
- Reconhecer e verificar a condição de alinhamento de três pontos;

Nesse sentido, os conteúdos de Geometria Espacial abordados nesse trabalho seriam trabalhados no 2º período da EJA, considerando-se a carga horária definida para essa modalidade que, no Ensino Médio é ofertada, normalmente, em três períodos semestrais à exceção do Proeja, um programa que integra a Educação Básica o ensino profissionalizante e que é ofertado, normalmente em instituições federais de ensino, em seis períodos semestrais. No Proeja os referidos conteúdos ficariam para o 4º período.

3.2 Prisma

Segundo propõe Souza (2013), a introdução ao estudo dos prismas pode ocorrer a partir da apresentação de sólidos geométricos de formas variadas dispostos sobre uma mesa, destacando-se, dentre esses sólidos, quais são prismas e quais não são. Dentro dessa proposta está a expectativa de que o aluno consiga construir uma noção intuitiva do objeto para depois estabelecer uma definição mais formal.

Nesse sentido, o estudo dos prismas deve englobar, além de conhecimentos geométricos, também operações e relações algébricas, como, por exemplo, noções de comprimento e do cálculo de áreas e volumes. Para que a aprendizagem se dê de forma significativa, é de fundamental importância que os principais resultados fornecidos pelo GeoGebra sejam verificados algebricamente pelo aluno. Essa é uma forma de motivação que, de certa forma, dá sentido às fórmulas apresentadas no livro didático, contribuindo para a construção e aprimoramento do conhecimento e, consequentemente, para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Considerando-se que o desenvolvimento do pensamento em Geometria Espacial segundo van Hiele se inicia pelo reconhecimento do objeto por meio da visualização de suas características globais, sugere-se que, antes mesmo de qualquer definição formal, o professor apresente aos alunos alguns materiais manipuláveis e figuras relacionadas para que os alunos, em um breve momento, manipulem e anotem suas observações. Durante essas discussões o professor deve apresentar, sutil e gradativamente, o vocabulário relacionado ao que se pretende trabalhar e, ao mesmo tempo, avalie o grau de conhecimento dos alunos sobre as formas e o vocabulário.

Na sequência, os alunos devem explorar o software GeoGebra para, além de realizar a construção e planificação de prismas, também valer-se do dinamismo do software para manipular as figuras, analisando-a atentamente por diferentes ângulos, uma ação importante para melhorar a compreensão da estrutura do objeto, facilitando a identificação de elementos e a percepção de propriedades e relações.

A comparação das figuras apresentadas com formas geométricas representadas e manipuladas no GeoGebra 3D torna o estudo ainda mais interessante, por permitir ao aluno relacionar as figuras aos materiais concretos e observar, além das características comuns a um grupo de sólidos geométricos, elementos e relações algébricas que provavelmente passariam desapercebidos durante as manipulações de materiais concretos.

Desse modo, um aluno que, inicialmente, se encontrava no nível 1 de van Hiele, reconhecendo a figura apenas pelo simples fato de possuir bases paralelas e faces laterais quadrangulares, avança para o nível 2, começando a perceber algumas propriedades, como por exemplo, que tipo de polígono forma as bases de cada prisma e a deduzir sobre o paralelismo dos planos que contêm essas bases.

Admitindo que esse seja o primeiro contato dos alunos com as representações de prismas, embora muitos desses sólidos façam parte do cotidiano deles, algumas das constatações que se espera nesse momento inicial de análise e comparações, são, em linguagem bem simples, que a parte de baixo é igual à parte de cima, as laterais são retângulos e não tem uma pontinha apontando para cima. Nesse momento é importante a mediação do professor no sentido de esclarecer que a parte de baixo e a parte de cima são chamadas, respectivamente, base inferior e base superior e que as laterais são sempre paralelogramos, de modo que os alunos elaborem uma definição simples, clara e precisa, como a seguinte, adaptada de Souza (2013, p. 27):

Definição 3.20-a (Prismas) Um prisma é um sólido geométrico que possui como base inferior e base superior figuras planas congruentes e paralelas entre si, tendo paralelogramos como faces laterais.

Parece óbvio que a simplicidade do vocabulário utilizado em definições como essa aproxima o aluno da EJA da compreensão das definições apresentadas no livro didático, naturalmente dotadas de um vocabulário mais rebuscado. No entanto, há de se considerar que o aluno da EJA possui uma linguagem própria e se esse aluno, ao final do estudo sobre prismas, conseguiu avançar, ao menos até o nível 3 (dedução informal) de van Hiele, é provável e suficientemente satisfatório que ele tenha conquistado sua autonomia para negociar significados, elaborar uma imagem mental e desenvolver argumentos explicativos diante da seguinte definição:

Definição 3.20-b (Prismas) Prisma é um poliedro composto por duas faces poligonais congruentes e paralelas contendo n lados que formam suas bases e uma quantidade n de paralelogramos que formam suas faces laterais.

Após as discussões iniciais sobre o assunto prismas diante da exposição de materiais como descrito no primeiro parágrafo desse tópico, sugere-se que o professor solicite aos alunos que abram o software GeoGebra e sigam os passos para que as janelas 2D e 3D fiquem dispostas lado a lado, como ilustrado na Figura 3, apresentada na página 57.

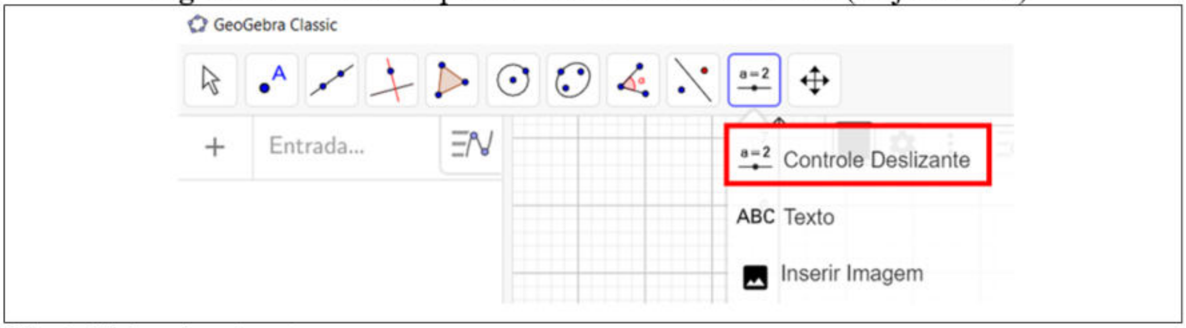
Nesse momento, o professor deve solicitar aos alunos que, usando as ferramentas do GeoGebra 3D construam prismas conforme as instruções que se seguem e registrem suas observações durante o processo de construção. Essa atividade deve ser dirigida e supervisionada, mas com o mínimo possível de intervenção do professor no momento das discussões. No entanto, alguns procedimentos devem ter o direcionamento do professor, focado sempre na sua intencionalidade de induzir seus alunos a uma boa investigação sobre a figura geométrica denominada prisma. Do contrário, os alunos podem se dispersar e não conseguir realizar a tarefa dentro do pouco tempo disponível para esse estudo.

O objetivo dessa atividade é envolver o aluno na construção de seis prismas distintos, na expectativa de que seja suficiente para que esse aluno perceba elementos, relações e propriedades, desenvolva imagens mentais e crie seu próprio conceito de prisma. Acredita-se que com essa metodologia favoreça a construção de conhecimentos fundamentais para que ocorra uma aprendizagem significativa sobre o tema abordado. Propõe-se que o professor oriente e acompanhe seus alunos durante o desenvolvimento desses passos, destacando que, em todas as atividades propostas nesse trabalho, o GeoGebra deve estar aberto com as janelas 2D e 3D dispostas lado a lado, como já indicado anteriormente nas figuras 2 e 3.

Para o estudo dos prismas no GeoGebra 3D, recomenda-se proceder conforme os passos a seguir.

1) Clicar na janela 2D para acionar sua barra de ferramentas, como já ilustrado na Figura 4 e criar um controle deslizante, clicando em controle deslizante, como mostra a Figura 6.

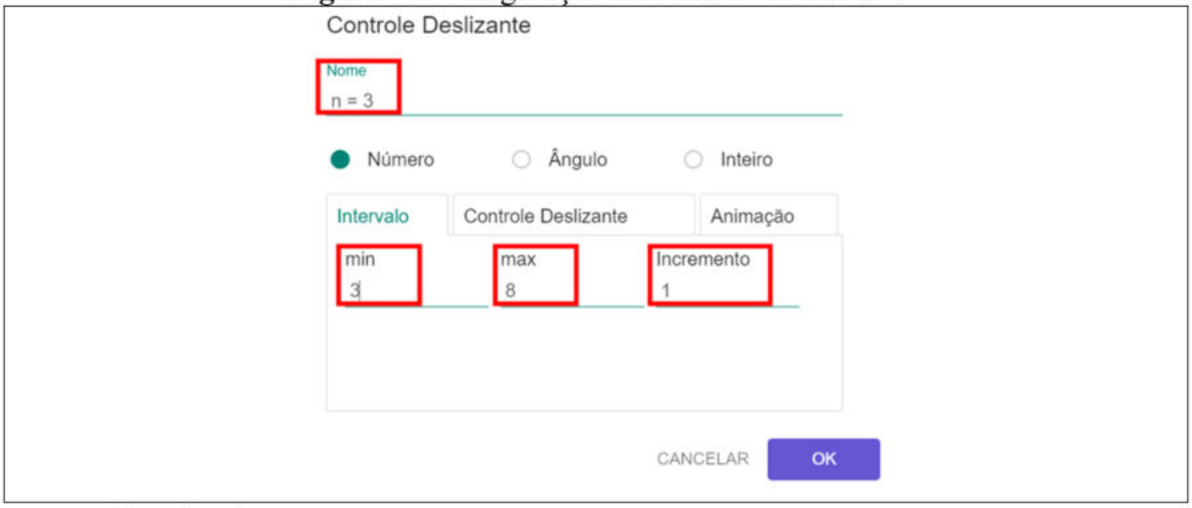
Figura 6: Ferramenta para criar o controle deslizante (na janela 2D).



Fonte: Elaborada pelo autor.

3) Clicando novamente na janela 2D, abrirá uma caixa de diálogo para configuração do controle deslizante. Como se pretende construir polígonos com n lados, é recomendado que se altere o nome do controle deslizante para "n = 3" e os demais valores de n para "min: 3", "max: 8" e "Incremento: 1", como na Figura 7. Feitas essas alterações, deve-se clicar em OK.

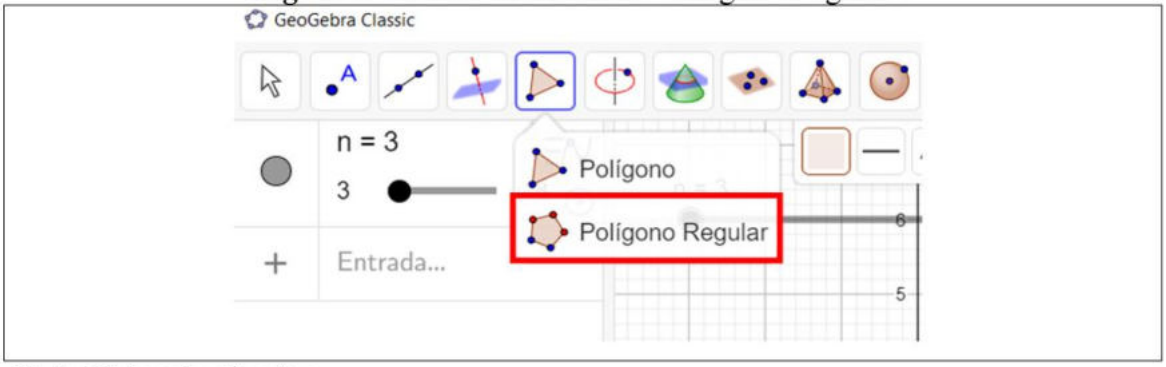
Figura 7: Configuração do controle deslizante.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5) Para se criar uma base regular para o prisma, deve-se clicar na janela 3D e, na barra de ferramentas, clicar na ferramenta "Polígono Regular", como na Figura 8. Nesse estágio, a escolha de uma base regular é adequada e não trará nenhum prejuízo para o estudo pretendido.

Figura 8: Acesso à ferramenta "Polígono Regular".

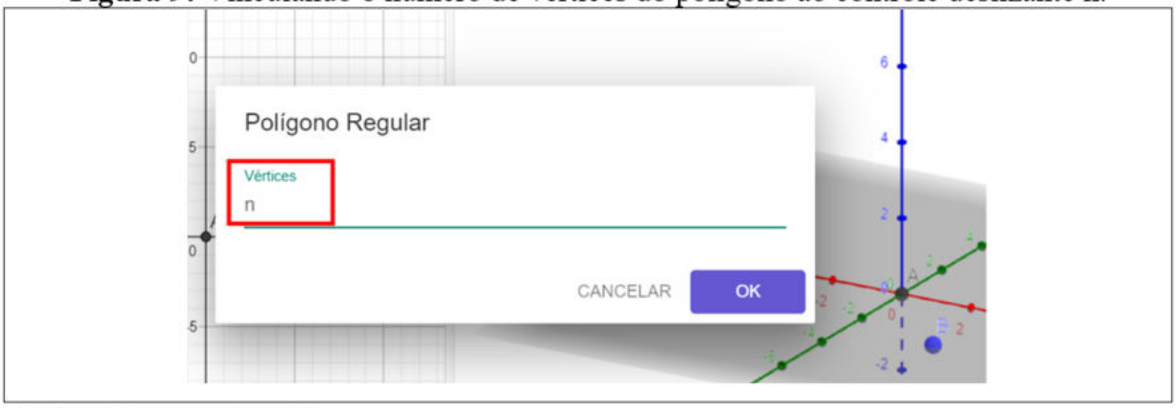


Fonte: Elaborada pelo autor.

6) Depois de clicar em "Polígono Regular", deve-se clicar em dois pontos quaisquer do plano xy. Essa ação determinará um dos lados do polígono regular que servirá de base para o prisma. Para facilitar a construção de um prisma reto usando essa ferramenta, sugere-se que um desses dois pontos seja a origem do espaço xyz, ou seja, no ponto (0, 0, 0). Do contrário, será gerado um prisma oblíquo.

Ao clicar nesses dois pontos, abre-se a caixa de diálogo ilustrada na Figura 9. Para vincular o número de lados do polígono ao controle deslizante, deve-se preencher o campo "Vértice" com o parâmetro "n" e clicar OK. Vincular a base do prisma ao controle deslizante possibilita a construção de diversos prismas, a partir da variação do parâmetro "n". Vale observar que o número de lados de um polígono é igual ao número de vértices, portanto, o campo vértices define também o número de lados.

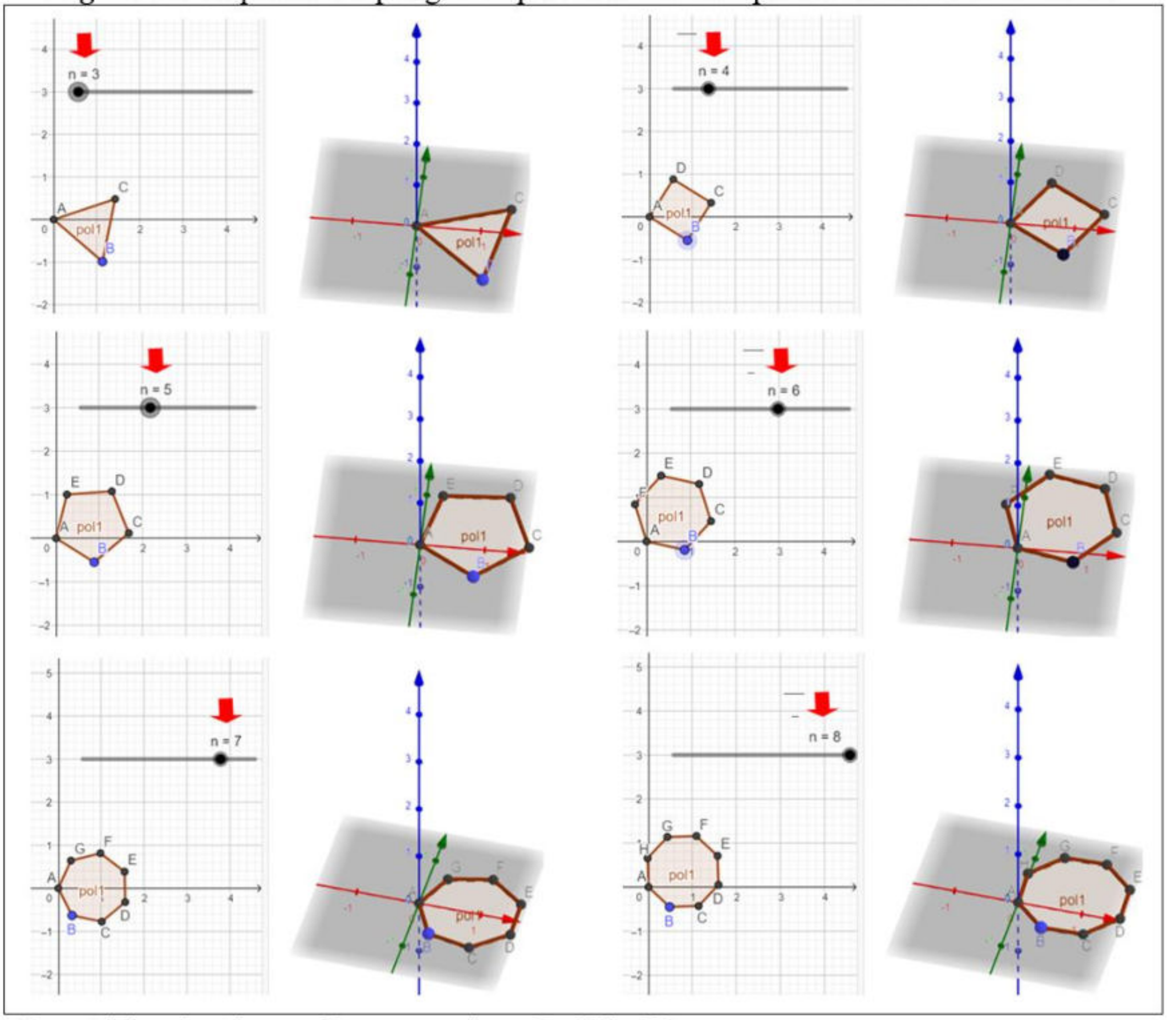
Figura 9: Vinculando o número de vértices do polígono ao controle deslizante n.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O primeiro polígono que surge imediatamente é o triângulo. Daí, como os valores de n variam de 3 a 8, os demais polígonos surgem na seguinte sequência: quadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono e octógono, conforme Figura 10.

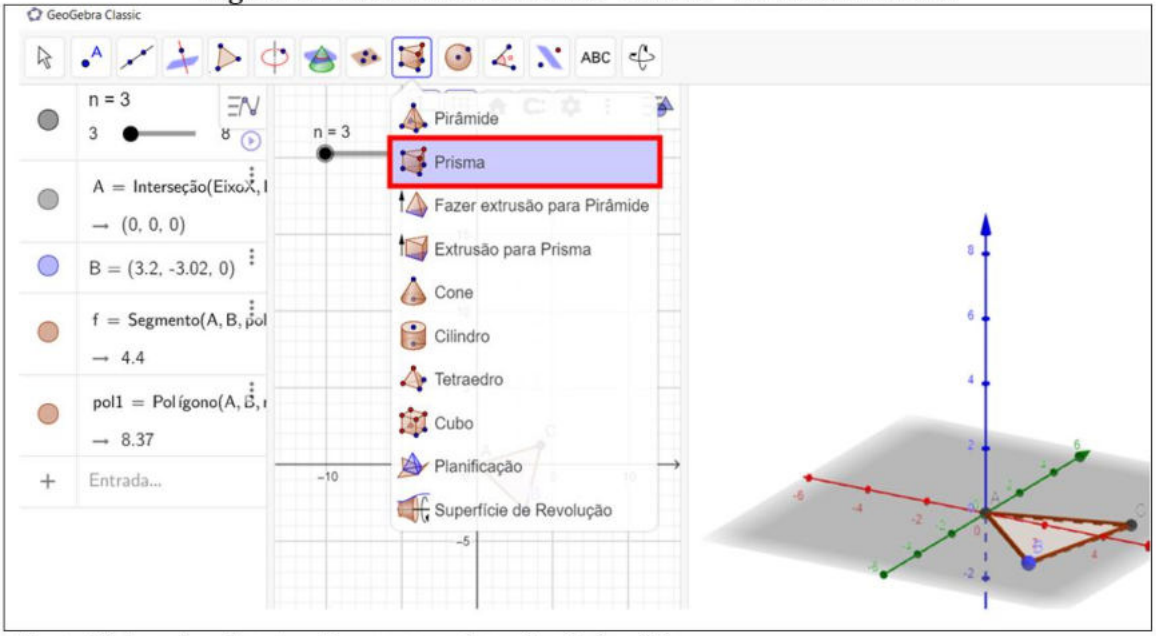
Figura 10: Sequência de polígonos que serão base dos prismas a serem construídos.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

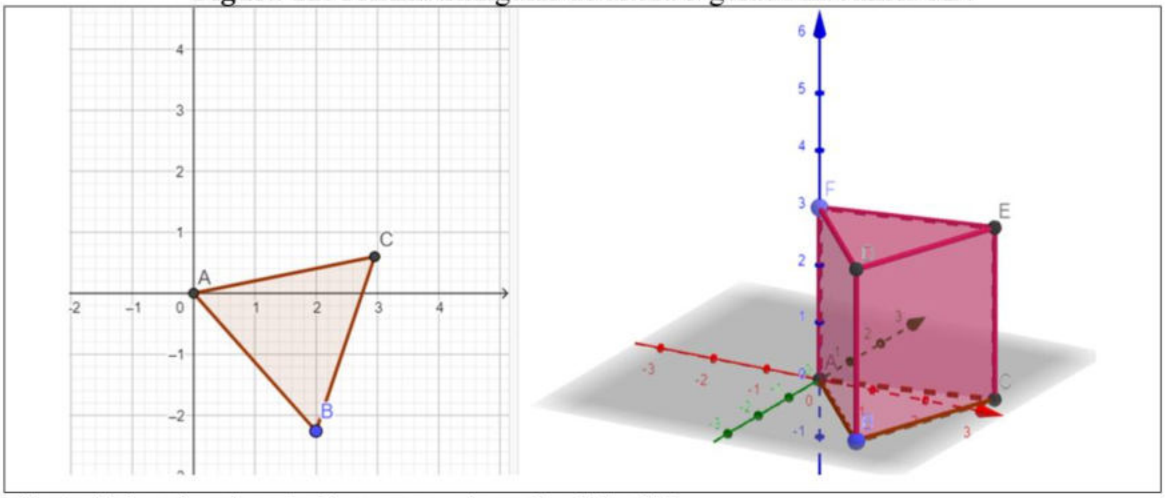
7) Com a base definida, clique na ferramenta prisma (Figura 11), em seguida, sobre o polígono da base e, finalmente, em algum ponto sobre o eixo perpendicular ao plano da base (plano xy), normalmente o eixo vertical. Esse ponto definirá a altura H do prisma e a base superior estará situada em um plano paralelo ao plano onde foi criada a primeira base, distando H unidades do plano da base inferior. Será gerado um prisma similar ao apresentado na Figura 12.

Figura 11: Acesso à ferramenta "Prisma" do GeoGebra 3D.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

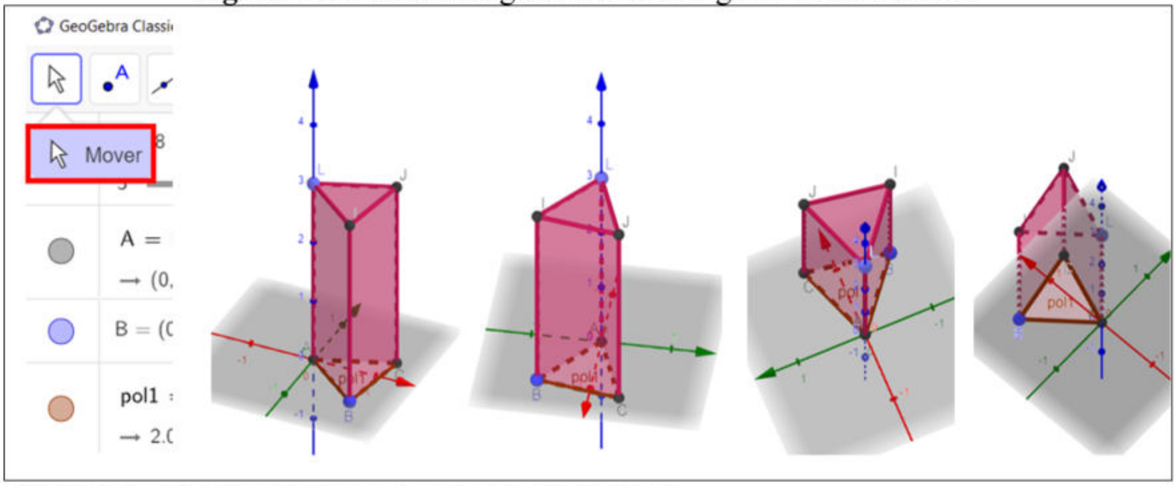
Figura 12: Prisma triangular de altura 3 gerado na Janela 3D.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Concluída a construção, o usuário pode dar movimento à figura, possibilitando visualizá-la por diferentes ângulos. Para isso, basta clicar na ferramenta "Mover" e em seguida, mantendo pressionado o botão auxiliar do mouse, clicar na Janela 3D e mover o cursor sobre essa janela, obtendo resultados como os apresentados na Figura 13.

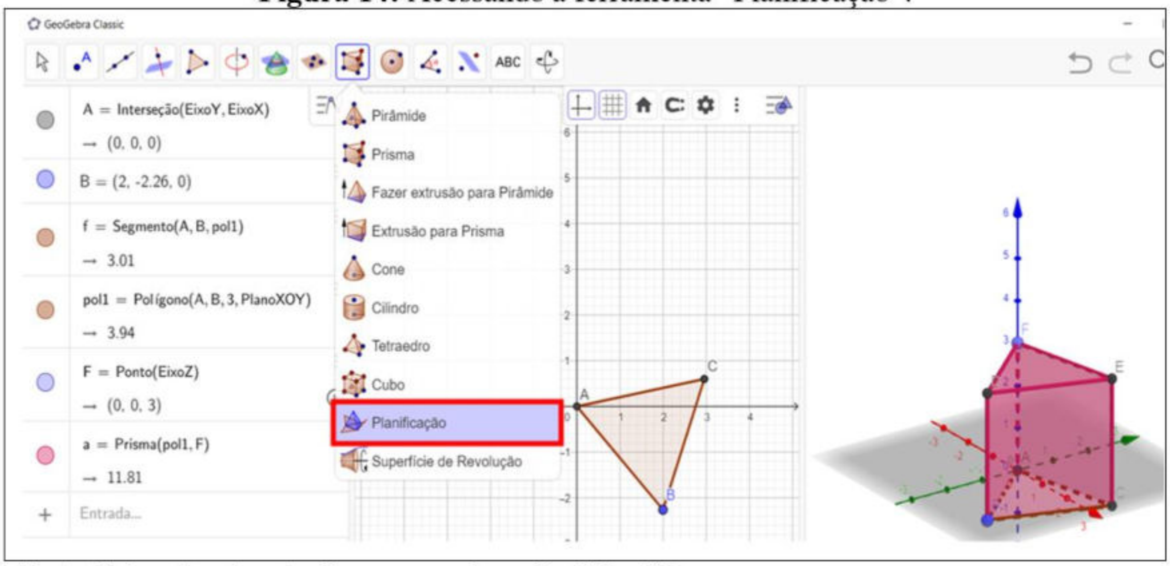
Figura 13: Prisma triangular de altura 3 gerado na Janela 3D.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

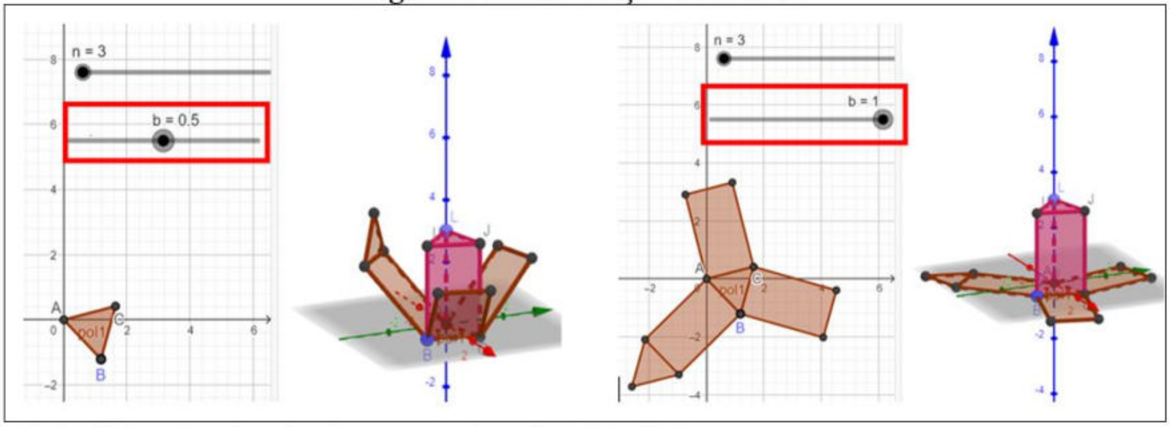
8) Do mesmo modo que a planificação de objetos manipuláveis é importante para a compreensão de sua estrutura, o GeoGebra 3D dispõe desse recurso para objetos virtuais. Para planificar um prisma, basta clicar na ferramenta "Planificação" (Figura 14) e em seguida sobre o prisma. Será criado automaticamente um controle deslizante "b" com os parâmetros de 0 a 1. Quando b = 1, o prisma estará totalmente planificado e só então terá todas as faces apresentadas nas duas janelas de visualização, como na Figura 14.

Figura 14: Acessando a ferramenta "Planificação".



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Figura 15: Planificação do Prisma.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

3.2.1 Elementos do prisma

Alguns elementos de um prisma podem ser facilmente percebidos durante as manipulações, como na Figura 15. A identificação dos vértices, faces e arestas, incluindo a identificação dos polígonos que formam as faces, sem se preocupar com suas propriedades, demonstra que o aluno está no nível 1 (visualização ou reconhecimento) de van Hiele. Quando o aluno percebe que as faces laterais são paralelogramos e começa a identificar outras pro propriedades, demonstra ter avançado para o nível 2 (análise). Com as observações da figura no GeoGebra, o avança, podendo perceber, por exemplo, que as diagonais de um prisma reto-retângulo estão implícitas na figura e suas medidas podem calculadas por meio do teorema de Pitágoras. Ao elaborar argumentos e raciocínios para calcular essas medidas, o aluno terá avançado para o nível 3 de van Hiele (dedução informal).

Uma vez identificados os elementos do prisma, sugere-se ao professor solicitar que os alunos preencham a Tabela 2 e, posteriormente, analisem esses dados e tentem identificar relações entre eles, na expectativa de que alguns consigam chegar a uma dedução informal da Relação de Euler.

Tabela 2: Registro sobre os elementos dos prismas

Polígono da Base	**Núm. de Faces**	**Núm. de Vértices**	**Núm. de Arestas**
Triângulo	5	6	9
Quadrilátero	6	8	12
Pentágono	7	10	15

Hexágono	8	12	18
Heptágono	9	14	21
Octógono	10	16	24

Fonte: Elaborada pelo autor

Após o preenchimento dos dados da Tabela 2, o professor deve motivar discussões sobre esses dados, na expectativa que os alunos percebam que a soma das duas primeiras colunas excede em duas unidades o valor da terceira, ou seja, em linguagem matemática, sendo F, V e A, respectivamente a quantidade de faces, vértices e arestas do prisma, vale a relação

$$F + V = A + 2 \quad \text{(Relação de Euler)}$$

3.2.2 Classificação dos prismas

Através das construções dinâmicas, fica mais fácil para o aluno compreender que os prismas podem ser classificados em retos e oblíquos e, por meio da ferramenta "Ângulos" verificar as medidas dos ângulos das arestas laterais em relação ao plano da base e tirar suas próprias conclusões. Manipulando as figuras, o aluno pode alterar os polígonos das bases do prisma (Figura 10, p. 73) e perceber as diferenças, tornando-se ainda capaz de classificar um prisma, de acordo com o polígono da base, como prisma triangular, quadrangular, pentagonal e assim por diante.

Com essas observações, o aluno certamente conseguirá compreender definições e observações como as que se seguem.

Definição 3. Um prisma é dito reto quando suas arestas laterais são perpendiculares à base e, consequentemente, suas faces laterais são retângulos.

É importante que o professor explique aos alunos que arestas adjacentes de um prisma reto estão contidas em um plano perpendicular aos planos das bases do prisma e que as faces laterais desse prisma estão contidas em planos distintos, ambos perpendiculares aos planos das bases. A veracidade dessas afirmações pode ser verificada com o auxílio de ferramentas do GeoGebra 3D.

Definição 4. Dois planos são perpendiculares se formam entre si um ângulo reto, ou seja, se o ângulo entre eles mede 90°.

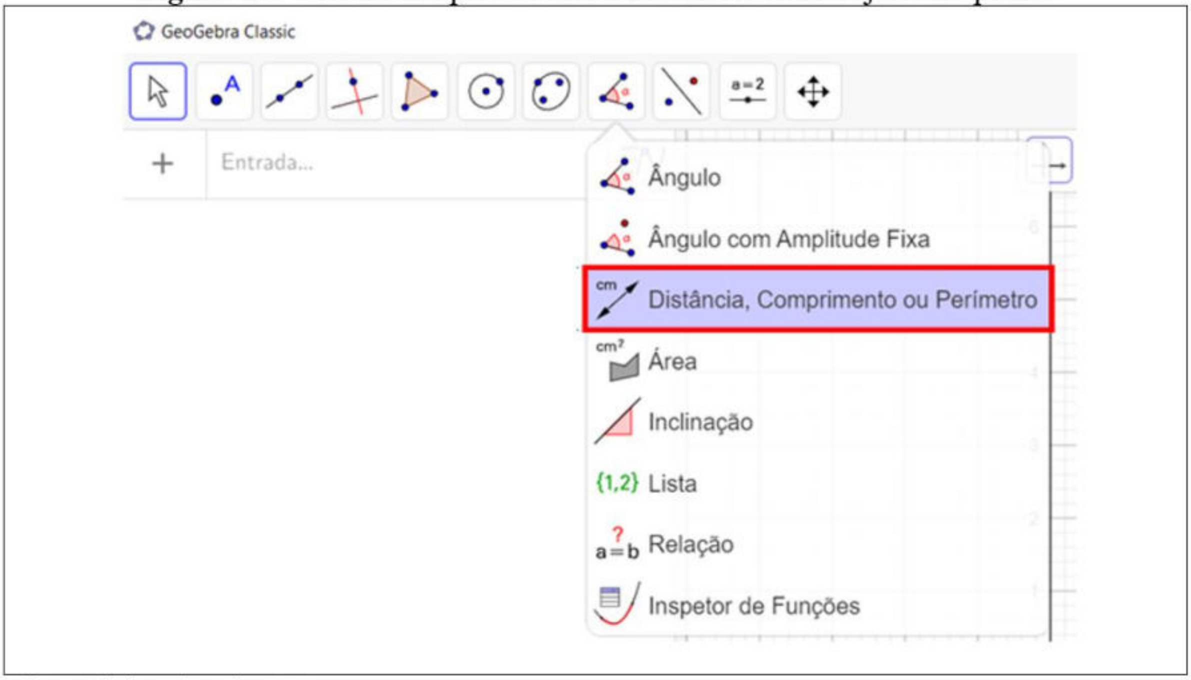
Definição 5. Um prisma oblíquo possui arestas laterais oblíquas à base. Nesse caso, as faces laterais são paralelogramos não retângulos.

Considerando-se a baixa carga horária disponibilizada para o estudo de geometria na EJA, é importante que o professor realize uma seleção de conteúdo direcionada às exigências mais práticas dos alunos. Diante dessas limitações, sugere-se que maior ênfase seja dada aos prismas regulares retos, por se tratar do caso mais recorrente em situações do cotidiano. O estudo desse caso em particular, além de já demandar um bom tempo, fornece ao aluno as bases necessárias para um posterior estudo dos demais casos. Para melhor compreensão da perpendicularidade entre os planos que contêm as arestas laterais e as bases do prisma, é interessante uma atividade com o auxílio do GeoGebra 3D, como a que segue.

3.2.3 Área lateral e área total do um prisma

Para calcular a área lateral de um prisma, o aluno precisa reconhecer os polígonos das faces e saber calcular a área de quadriláteros. Da forma como as figuras foram construídas no GeoGebra, o elemento altura está explícito, restando ao aluno determinar a medida da aresta da base, o que pode facilmente ser feito com auxílio da ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro”, disposta na barra de ferramentas da Janela 2D, como na Figura 16. Nesse sentido, o GeoGebra facilita a identificação das faces laterais, sua quantidade e forma poligonal, além de fornecer as medidas necessárias para os cálculos algébricos, favorecendo assim a valorização da importância da Álgebra no estudo da Geometria.

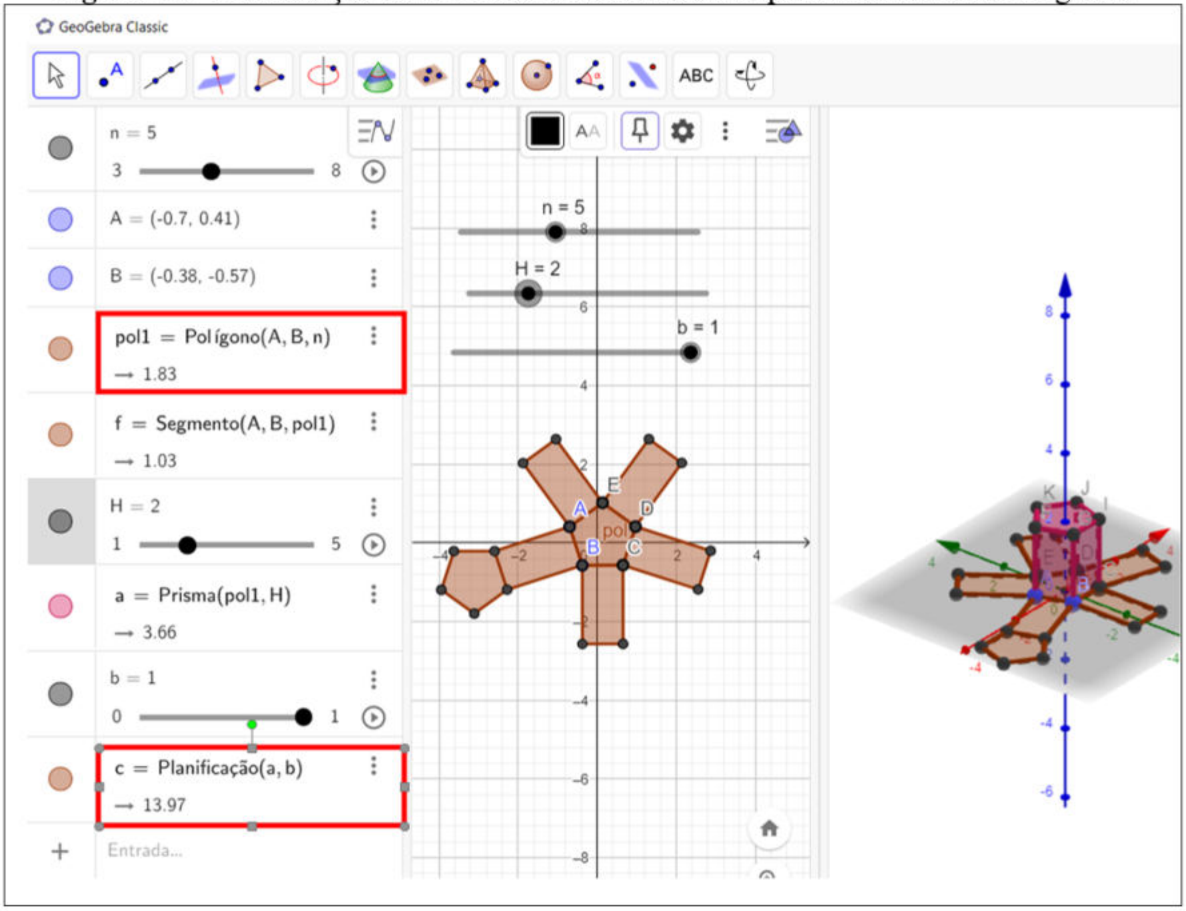
Figura 16: Ferramenta para se medir distâncias entre objetos no plano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Importante salientar que, em virtude da indisponibilidade de tempo, do nível de conhecimentos dos alunos e dos objetivos do estudo, há circunstâncias nas quais o professor pode julgar não haver necessidade de se prender em todos esses cálculos e, nesses casos, a área lateral pode ser calculada diretamente pelos dados fornecidos pelo software, bastando para isso, que o aluno calcular a diferença entre a área da planificação (área total da superfície do objeto) e o dobro da área do polígono da base, visto que a planificação fornece a área das duas bases do prisma. Uma vez realizada a planificação do prisma, a área da base (Polígono(A,B,n)) e a área total (Planificação(a,b)), apresentadas nessa ordem, encontram-se, ambas, disponíveis na Janela de Álgebra do GeoGebra, como se pode verificar na Figura 17.

Figura 17: Identificação da área total e área da base do prisma na Janela de Álgebra.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

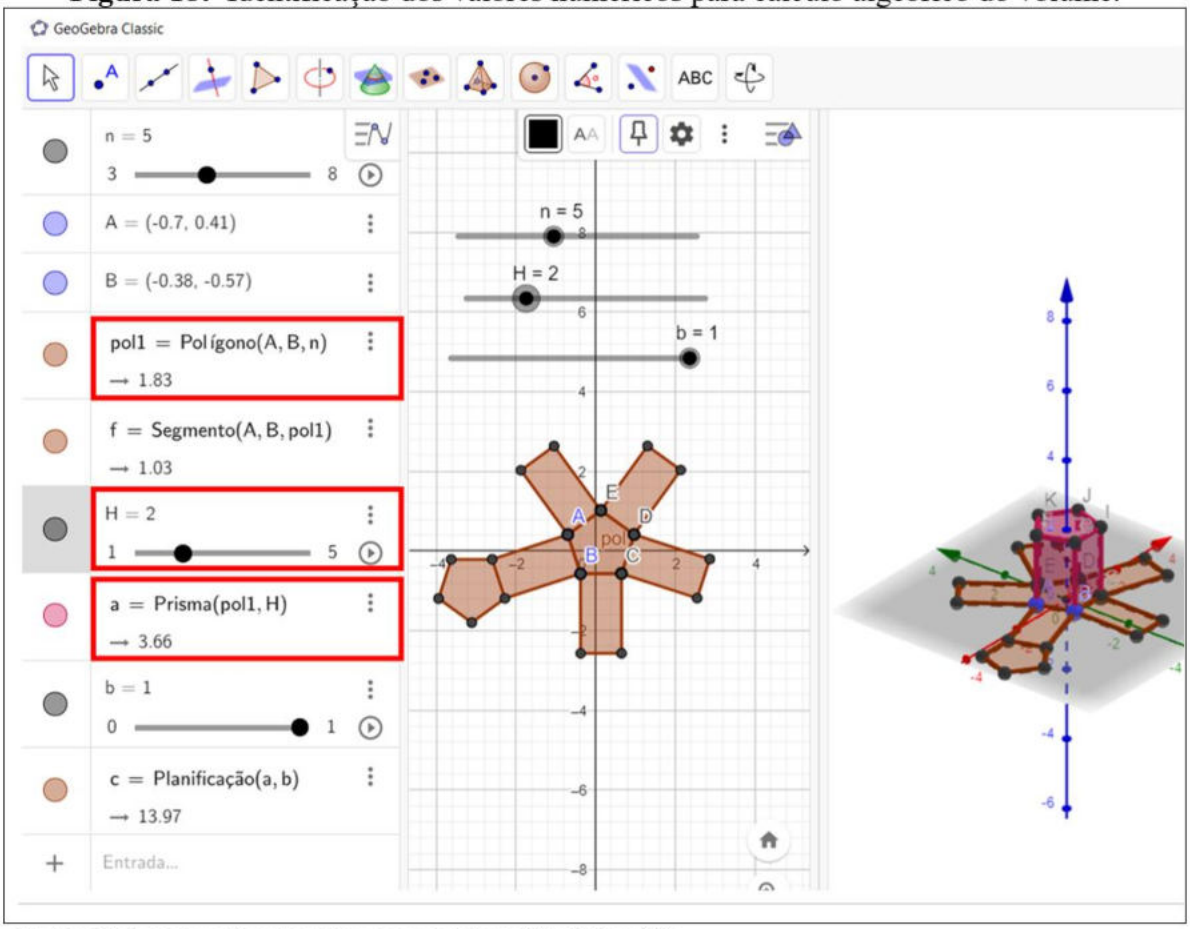
3.2.4 Volume do prisma

Antes mesmo de explicar a lógica do cálculo do volume de um prisma, o professor deve esclarecer aos alunos que o termo volume, nesse contexto, representa a quantidade de unidades cúbicas de medida que preenche totalmente o sólido sem deixar sobras. É importante deixar claro que o volume pode conter uma quantia de unidades inteiras e mais uma parte de uma unidade, ou seja, nem sempre esse valor pode ser representado por um número natural, mas, sempre por um decimal, normalmente com arredondamento de, no máximo, três casas.

As construções no GeoGebra 3D já fornecem, logo abaixo do nome do polígono, situado na Janela de Álgebra, o volume desse sólido geométrico, como ilustrado a Figura 18. Contudo, é importante que o aluno saiba realizar esses cálculos e, por isso, o professor deve trabalhar a teoria com os alunos e utilizar o software como apoio para verificar os resultados. Bom dar ciência aos alunos que, devido às aproximações, podem ocorrer pequenas divergências nos resultados encontrados.

Os valores destacados nos retângulos em vermelho na Figura 18 representam, respectivamente a área do polígono da base pol1 do prisma, a altura H desse prisma e, finalmente, o volume do Prisma(pol1,H). Interessante que os alunos sejam motivados a alterem, usando os respectivos controles deslizantes, o tipo de polígono da base e a altura dos prismas e verifiquem que o produto da área da base pela altura será sempre igual ou muito próximo do volume desse prisma.

Figura 18: Identificação dos valores numéricos para cálculo algébrico do volume.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

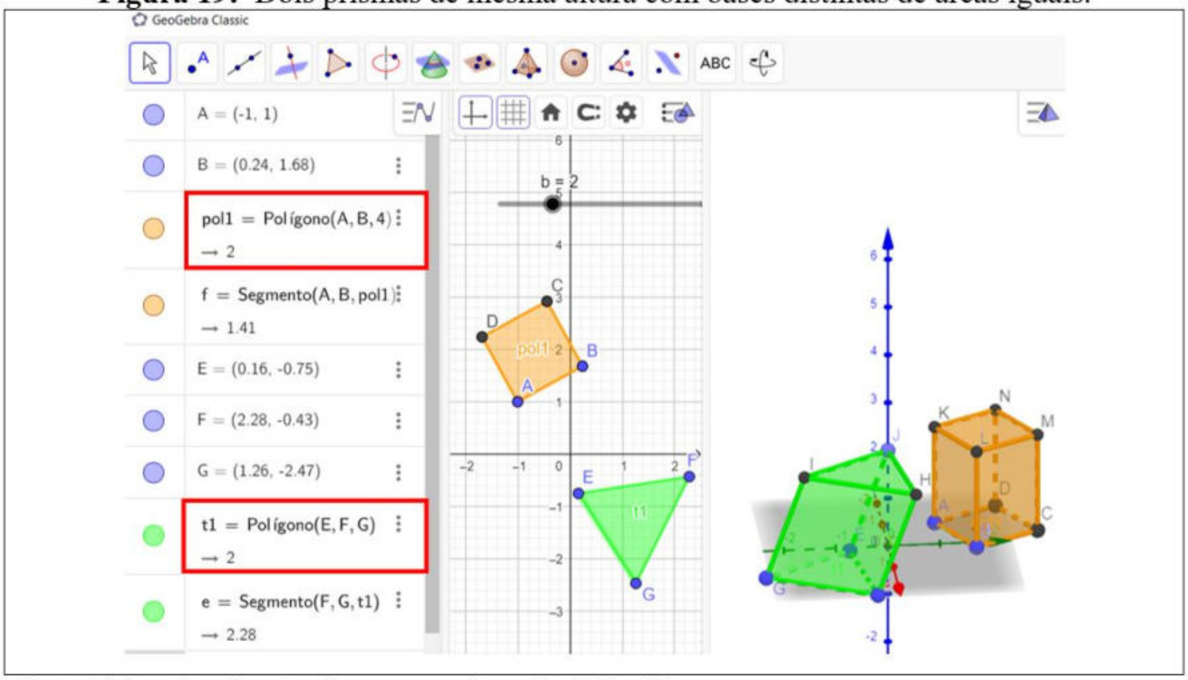
Para convencer o aluno de que a relação Base x Altura é válida para se calcular o volume de qualquer prisma, o professor pode utilizar o Princípio de Cavalieri (Teorema 3.20), tomando como auxílio o paralelepípedo reto retângulo, cujo volume é mais intuitivo e compreensível, embora esse sólido não tenha ainda sido identificado nesses termos para os alunos. Não vamos nos deter nessa demonstração, mas o professor pode encontrar demonstrações desse tipo em bons livros didáticos. Por ora, o confronto dos resultados obtidos com os dados do GeoGebra é suficiente para esse convencimento.

Teorema 3.20 (Princípio de Cavalieri) Considere dois sólidos S_1 e S_2, de mesma altura, apoiados sobre um plano α. Se a interseção de todo plano β paralelo a α é vazia ou determina sobre esses sólidos superfícies de áreas iguais, então os sólidos S_1 e S_2 têm volumes iguais.

O Princípio de Cavalieri será citado mais adiante nas demonstrações dos volumes de outros sólidos geométricos e, embora seja possível demonstrá-lo com maior rigor matemático, ele será aqui tomado por verdadeiro, sem esse tipo de demonstração. Dada à sua importância para diversas demonstrações geométricas, recomenda-se ao leitor pesquisar sobre o assunto.

Por ora, é suficiente tentar o convencimento por meio do exemplo a seguir, para o qual dois prismas foram construídos, conforme Figura 19, sendo o primeiro um prisma oblíquo triangular e o segundo um prisma reto retangular de base quadrada, ambas as bases iguais a 2 unidades quadradas de medida. Estrategicamente, esses prismas foram construídos de tal modo que suas alturas possam ser alteradas, a primeira pelo arraste do ponto H sobre o eixo vertical e a segunda por meio do controle deslizante b.

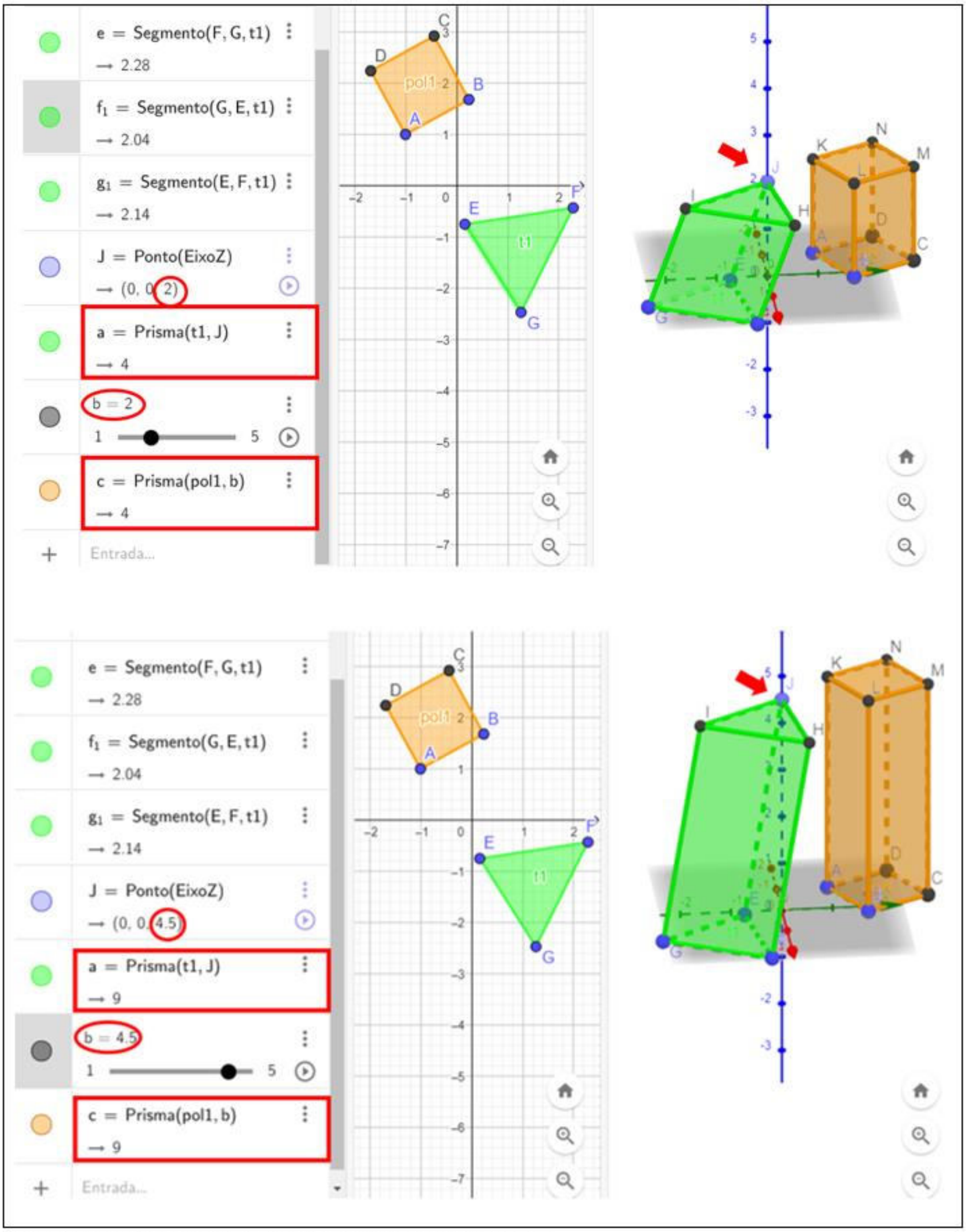
Figura 19: Dois prismas de mesma altura com bases distintas de áreas iguais.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Embora as alturas dos dois prismas variem de forma independente, os resultados que mostram a validade do Princípio de Cavalieri só podem ser observados quando as alturas são iguais, por isso, as manipulações devem manter sempre esse critério. A recomendação é que apenas as alturas sejam alteradas e os campos referentes aos volumes observados para que o aluno se certifique de que o volume do prisma triangular “a” é sempre igual ao volume do paralelepípedo “c”, como ilustrado na Figura 20.

Figura 20: Variando as alturas e observando a manutenção da igualdade dos volumes.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

O fato de um dos prismas ser reto retangular e o outro ser oblíquo triangular favorece ainda mais ao aluno se convencer da validade do Princípio de Cavalieri, pois intuitivamente, o aluno começa a ter a percepção de que esse teorema se aplica a qualquer sólido geométrico.

3.3 Paralelepípedo

Para o estudo dos paralelepípedos, propõe-se o mesmo procedimento adotado no estudo dos prismas, na expectativa de que, diante da exploração de materiais manipuláveis e figuras, complementadas pelas construções e manipulações feitas no GeoGebra, o aluno perceba que os paralelepípedos pertencem a uma subclasse dos prismas. Essa percepção transcende os limites do reconhecimento de um paralelepípedo simplesmente pela aparência da sua forma geométrica (nível da visualização), mas pressupõe a identificação de algumas propriedades da figura, o que sugere um possível avanço para o Nível 2 (análise) do pensamento geométrico segundo o Modelo van Hiele. Nesse estágio, o aluno perceba que, por gozarem das mesmas propriedades, os paralelepípedos pertencem a uma subclasse dos prismas.

Desse modo, os pré-requisitos para o estudo dos paralelepípedos e dos prismas, em geral, são praticamente os mesmos. Desse modo, o aluno que tem boa compreensão sobre os prismas e percebe que paralelepípedo é um caso particular de prisma não terá grandes dificuldades em fazer associações entre as figuras, descobrir novas relações e assimilar o conteúdo. Pelo longo espaço de tempo entre o estudo de Geometria Plana e Geometria Espacial, é possível que os alunos tenham esquecido alguns conceitos.

Nesse sentido, é importante que o professor faça uma breve revisão sobre paralelogramos, reforçando sua definição e algumas propriedades e relações, já que esse é o polígono de interesse no estudo dos paralelepípedos. Sobre paralelismo e perpendicularidade e inclinação, as informações necessárias podem ser verificadas no tópico que trata dos prismas.

Convém relembrar que estudo desse tema envolve conhecimentos conceituais de paralelismo, ângulos, áreas e volumes. É fundamental que o professor incentive os alunos a realizarem cálculos algébricos, principalmente quando se tratar das medidas de capacidade. No caso dos paralelogramos reto-retângulos, o teorema de Pitágoras deve ser trabalhado no cálculo da medida das diagonais. Essa interrelação entre Geometria e Álgebra é de suma importância, pois a disjunção entre as áreas da Matemática tem revelado o aspecto ineficiente do ensino da disciplina.

A exemplo da forma como foi introduzido o estudo dos prismas, uma boa estratégia é iniciar pelo trabalho com materiais concretos e imagens e após as devidas discussões e registros, passar para as atividades no GeoGebra. Dentro dessa proposta, objetiva-se proporcionar ao aluno as condições necessárias para uma aprendizagem significativa sobre paralelepípedos, partindo do conhecimento cotidiano e aprimorando esse conhecimento de modo a compreender melhor a estrutura dessa forma, seus elementos, propriedades e relações, formalizar argumentos válidos e aplicar esses conhecimentos em situações reais.

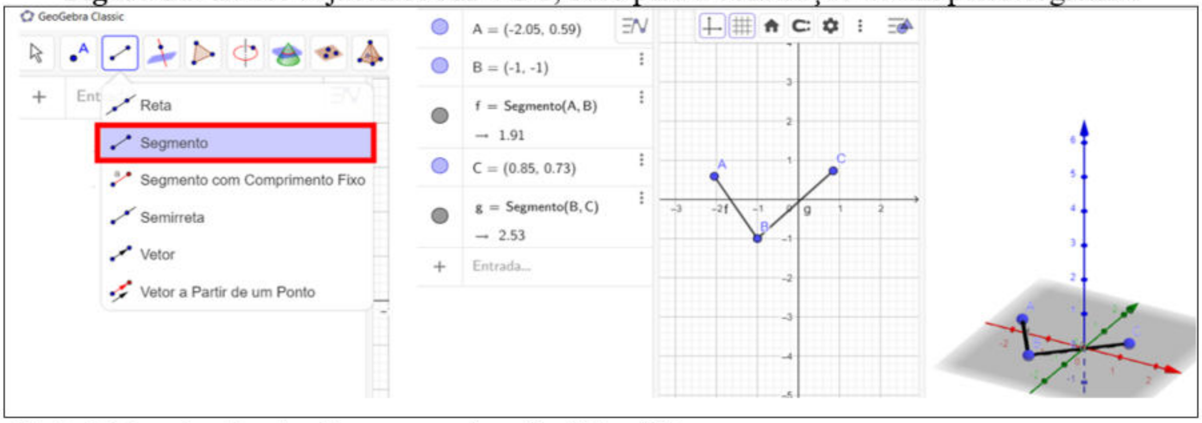
Há de se considerar que o perfil do aluno da EJA, principalmente no tocante às suas vivências e experiência profissional, favorece o ensino e aprendizagem desse tema, desde que o professor selecione criteriosamente os conteúdos mais relevantes e utilize um vocabulário adequado, dentro da realidade do aluno.

Ao propor atividades no GeoGebra em complemento às demais metodologias já mencionadas, deve-se observar que a versão utilizada para esse trabalho não dispõe de ferramentas específicas para construção de paralelogramos e paralelepípedos, mas isso não impede que, com a adoção de algumas estratégias, essas figuras sejam construídas. Um caminho relativamente fácil para se construir um paralelepípedo na janela de visualização 3D é iniciar pela construção de um paralelogramo na janela 2D, que servirá de base para esse sólido geométrico. No entanto, como já mencionado, as o GeoGebra não apresentam a ferramenta paralelogramo.

Como a construção no GeoGebra auxilia muito no estudo desse sólido, sugere-se aqui uma forma interessante para construí-lo, até mesmo porque requer alguns conhecimentos de Geometria Plana que os alunos supostamente têm, ou precisam reforça-los com o auxílio do professor. Isso se fará conforme os passos a seguir.

Passo 1. Para criar o paralelogramo da base, deve-se iniciar clicando na ferramenta segmento e em dois pontos quaisquer da janela 2D, de modo que seja criando um segmento AB. Em seguida, clicar no ponto B e em outro ponto fora do segmento AB, para criar um segmento BC. Desse modo, ficam construídos dois lados adjacente AB e BC do polígono ABCD, formando um ângulo qualquer, como mostra a Figura 21.

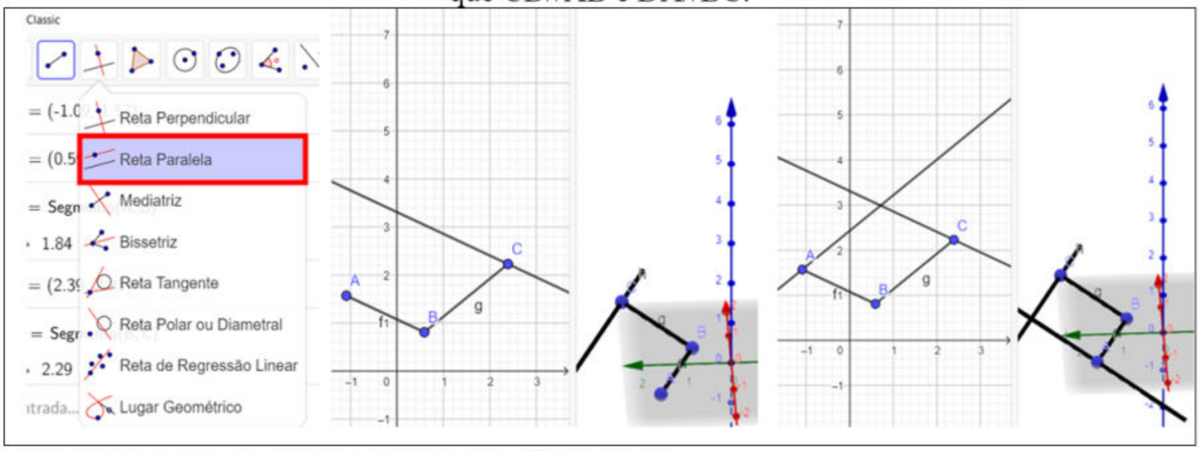
Figura 21: Lados adjacentes AB e BC, base para a construção de um paralelogramo.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Passo 2. Tendo em vista que os lados opostos do paralelogramo ABCD, são paralelos, o ponto D deve ser estrategicamente inserido de modo que se tenha AB//CD e BC//DA. Para tal, sugere-se que, se trace duas retas, sendo uma contendo o ponto A e paralela ao segmento BC e outra contendo o ponto C e paralela ao segmento AB. Isso pode ser feito clicando na ferramenta “Reta Paralela” e em seguida no segmento AB e depois no ponto C, repetindo-se o procedimento para o segmento BC e o ponto A, como mostra a Figura 22.

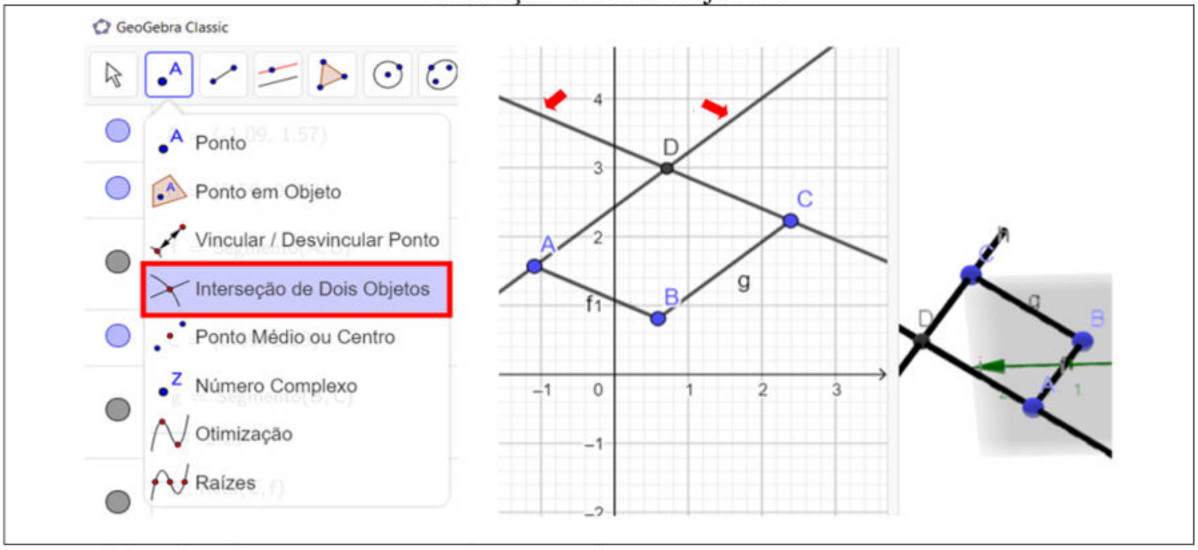
Figura 22: Retas paralelas aos lados AB e BC, para determinação do vértice D de modo que CD//AB e DA//BC.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

O ponto D procurado é a interseção dessas duas retas criadas. Para defini-lo, basta clicar na ferramenta “interseção de dois objetos” e depois sobre as duas retas, como na Figura 23.

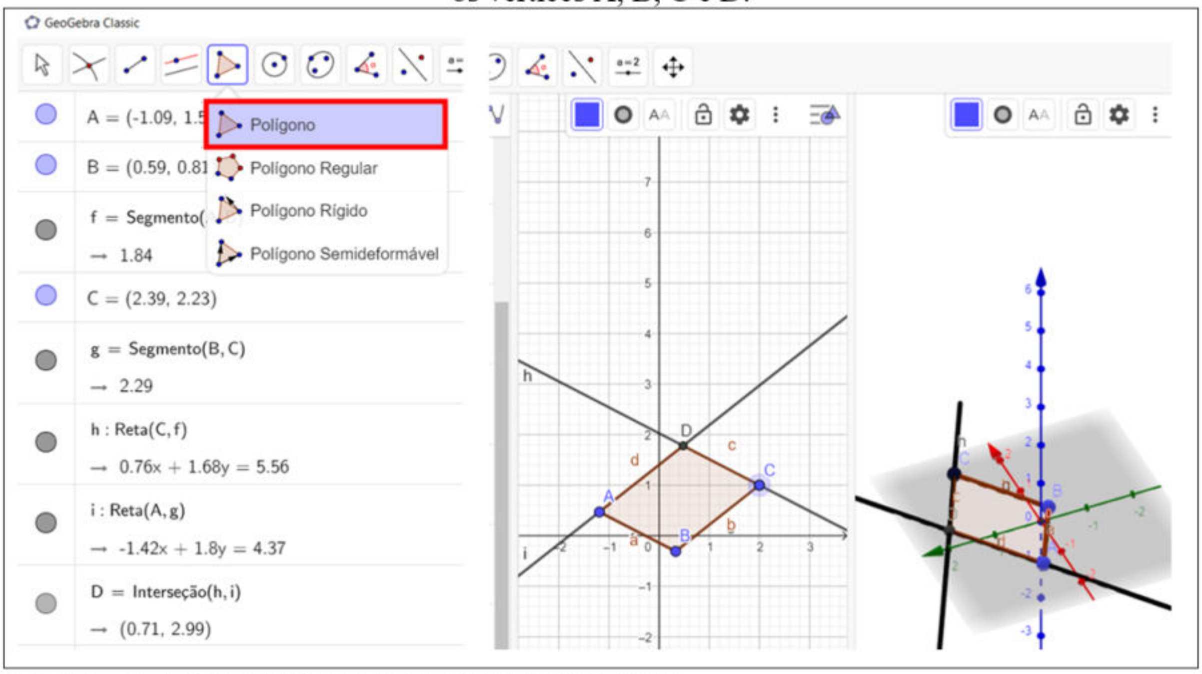
Figura 23: Determinação do vértice D do paralelogramo com o auxílio da ferramenta "Interseção de Dois Objetos".



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Passo 3. Definidos os vértices A, B, C e D, deve-se construir o paralelogramo clicando na ferramenta "Polígono" e em seguida, nos pontos ABCDA, nessa ordem. Assim, será criado o paralelogramo, como na Figura 24.

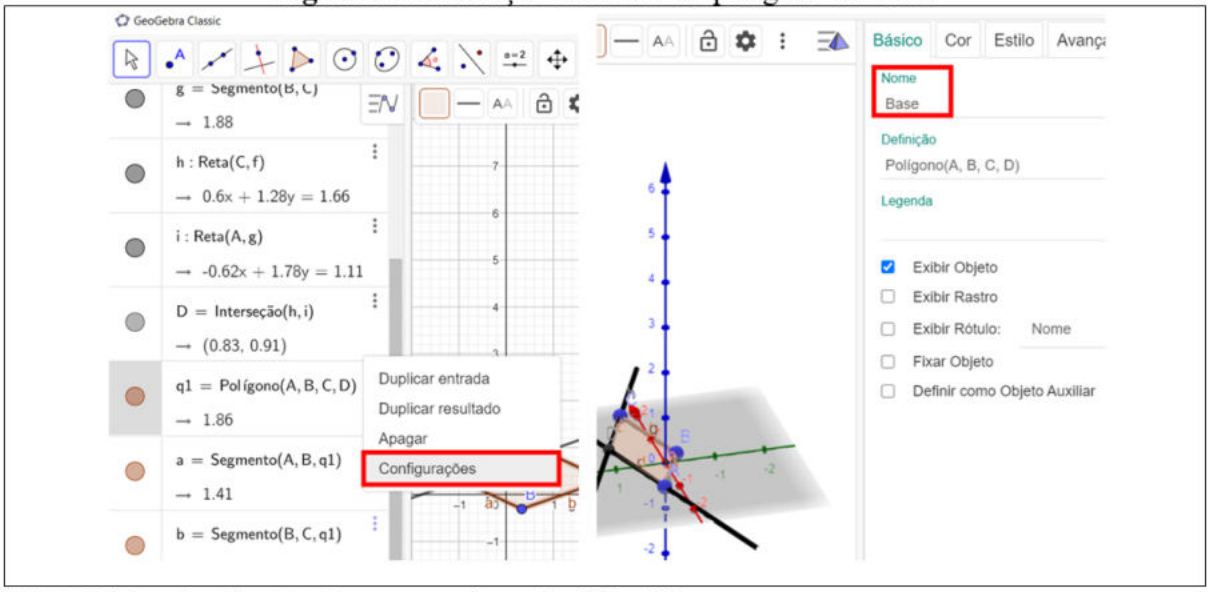
Figura 24: Criação do paralelogramo com auxílio da ferramenta "Polígono", conhecendo os vértices A, B, C e D.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Passo 4. Para facilitar a compreensão, sugere-se alterar o nome do polígono para “Base”, procedendo como na Figura 25. O professor deve auxiliar o aluno quando necessário.

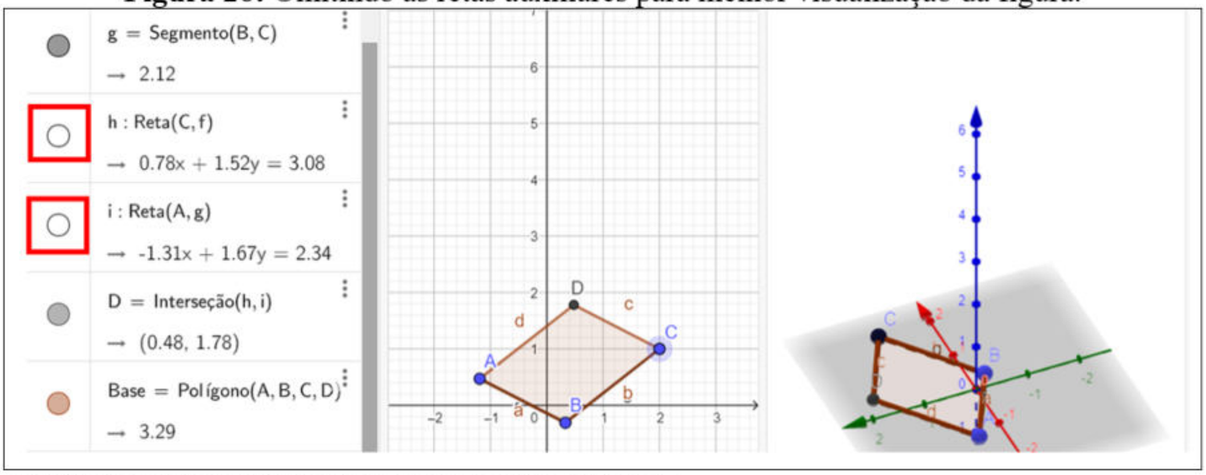
Figura 25: Alteração do nome do polígono da base.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Passo 5. Criado o paralelogramo, pode-se omitir as retas auxiliares, deixando apenas o polígono. Isso pode ser feito desmarcando os elementos identificados como “Reta” na Janela de Álgebra, simplesmente clicando no local indicado na Figura 26.

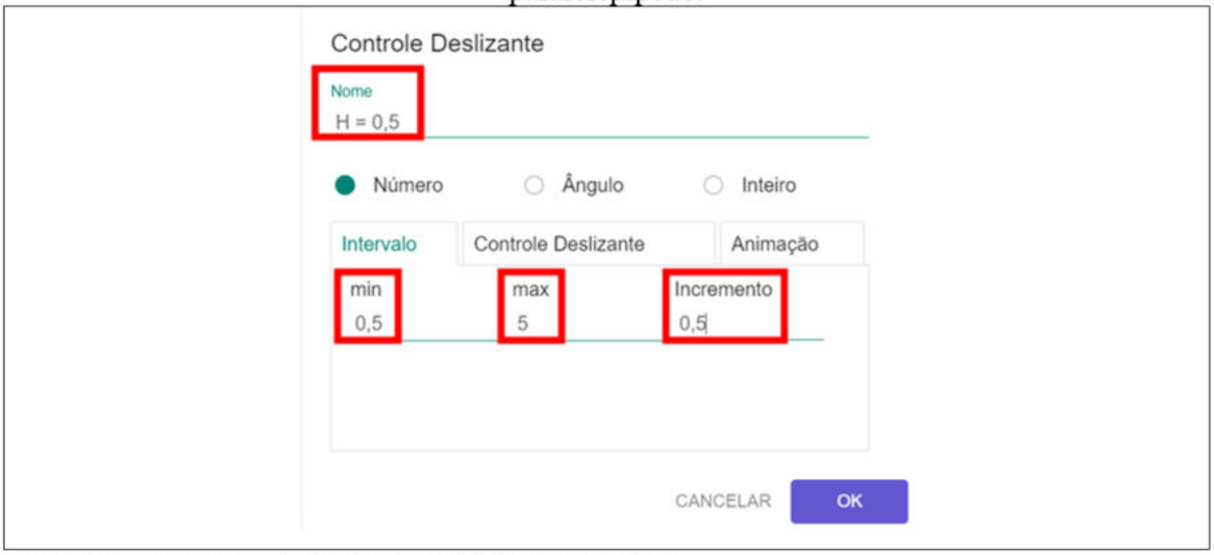
Figura 26: Omitindo as retas auxiliares para melhor visualização da figura.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Passo 6. Antes de criar o paralelepípedo, sugere-se que seja criado um controle deslizante e, na caixa de diálogo de criação, os dados sejam ajustados como destacado na Figura 27. O parâmetro H determinará a variação da altura do o sólido durante as manipulações dentro do intervalo [0,5; 5], em saltos de 0,5 unidades, o suficiente para esse estudo.

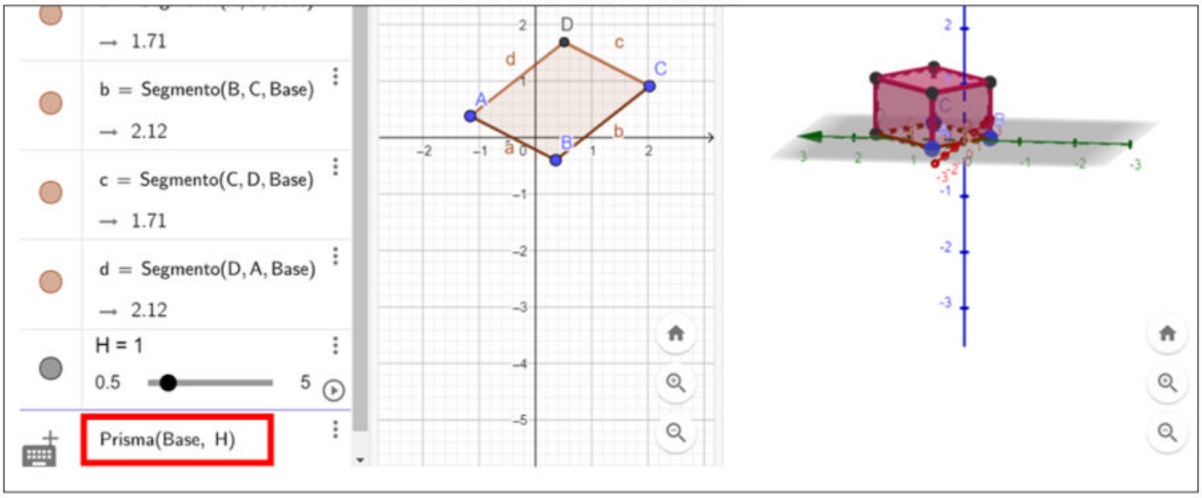
Figura 27: Criação e configuração do controle deslizante para variação da altura do paralelepípedo.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Passo 7. Uma forma prática para se criar o paralelepípedo que tem como base o paralelogramo ABCD, que aqui foi nomeado como “Base”, e altura dependente do parâmetro H do controle deslizante, é digitar na caixa de entrada o comando Prisma(Base, H). Assim, será gerado o paralelepípedo ABCD, como na Figura 28.

Figura 28: Construção do paralelepípedo a partir do polígono “Base”, altura vinculada ao controle deslizante H.

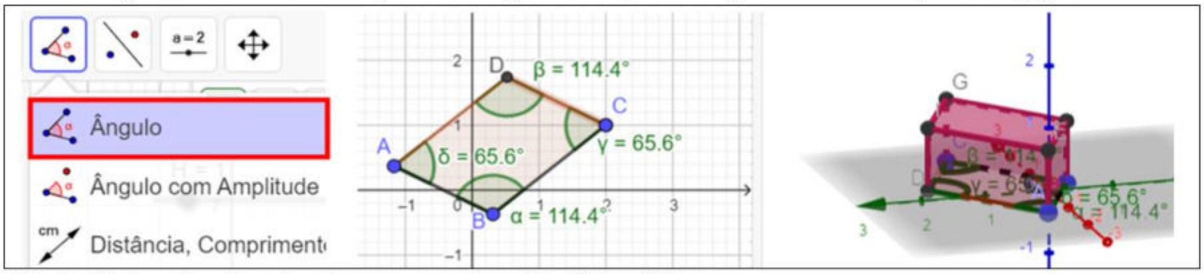


Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Para verificar que, durante as manipulações, a base ABCD permanecerá sendo um paralelogramo, é interessante que, utilizando a ferramenta "Ângulo", se insira a medida dos ângulos internos do polígono da Janela 2D, procedendo como se segue.

Passo 8. Clicar na ferramenta "Ângulo" e, em seguida, nos três extremos dos segmentos que determinam cada um dos quatro ângulos, seguindo a sequência no sentido horário. Por exemplo, para determinar a medida do ângulo A, deve-se clicar na ferramenta ângulo e em seguida, nos pontos B, A e D, nessa ordem. Repetir de maneira análoga para os demais ângulos. Com isso, as medidas serão explicitadas como na Figura 29.

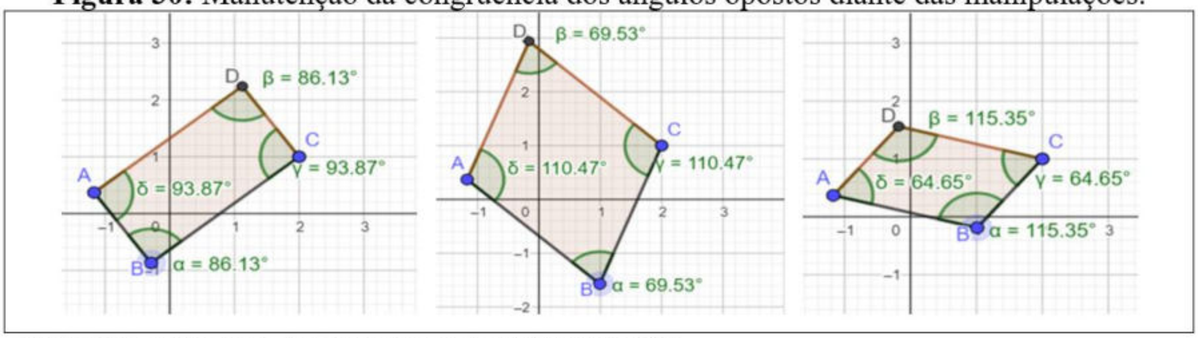
Figura 29: Determinação dos ângulos do paralelogramo base do paralelepípedo.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Nesse estágio, é importante solicitar ao aluno que arraste os pontos A, B ou C, provocando deformações no polígono Base e observe o que ocorre com as medidas dos ângulos internos. O objetivo é que se observe que, embora haja alterações nas medidas desses ângulos, a figura mantém a congruência dos ângulos opostos (Figura 30), uma propriedade dos paralelogramos. É importante que o aluno perceba que independentemente das manipulações, a base será sempre um paralelogramo e, portanto, o prisma manterá todas as propriedades de um paralelepípedo. Essas percepções representam uma mudança de estágio de desenvolvimento do pensamento geométrico, demonstrando um avanço nos níveis de van Hiele.

Figura 30: Manutenção da congruência dos ângulos opostos diante das manipulações.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

3.3.1 Elementos do paralelepípedo

Num primeiro momento pós construção do paralelepípedo, é interessante que o professor solicite aos alunos que, valendo-se do dinamismo do GeoGebra, manipulem a figura, observando-a atentamente sob diferentes ângulos e preencham a Tabela 3. Da mesma forma como foi feito com os prismas, os alunos devem procurem identificar o máximo de propriedades das figuras e as relações entre os dados numéricos referentes a cada elemento, verificando que para essa figura vale também a Relação de Euler. Essa atividade é de fundamental importância para o avanço nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, iniciando-se com a transição do nível 1 para o nível 2, esperando-se, com o desenvolvimento de outras atividades, avançar ao menos até o nível 3 de van Hiele.

Tabela 3: Registros sobre os elementos observados no paralelepípedo

Polígono da Base	Núm. de Faces	Núm. de Vértices	Núm. de Arestas
Quadrilátero	6	8	12

Fonte: Próprio autor

3.3.2 Classificação dos paralelepípedos

Assim como os demais prismas, os paralelepípedos são classificados em retos e oblíquos. Como o aluno já estudou sobre prismas retos e oblíquos, não há necessidade de se ater novamente nesse assunto. No entanto, é interessante uma breve apresentação desses dois tipos de paralelepípedo no GeoGebra, principalmente para que o aluno verifique, pela análise dos ângulos entre as arestas laterais e o plano da base, a veracidade das características expressas na definição seguinte.

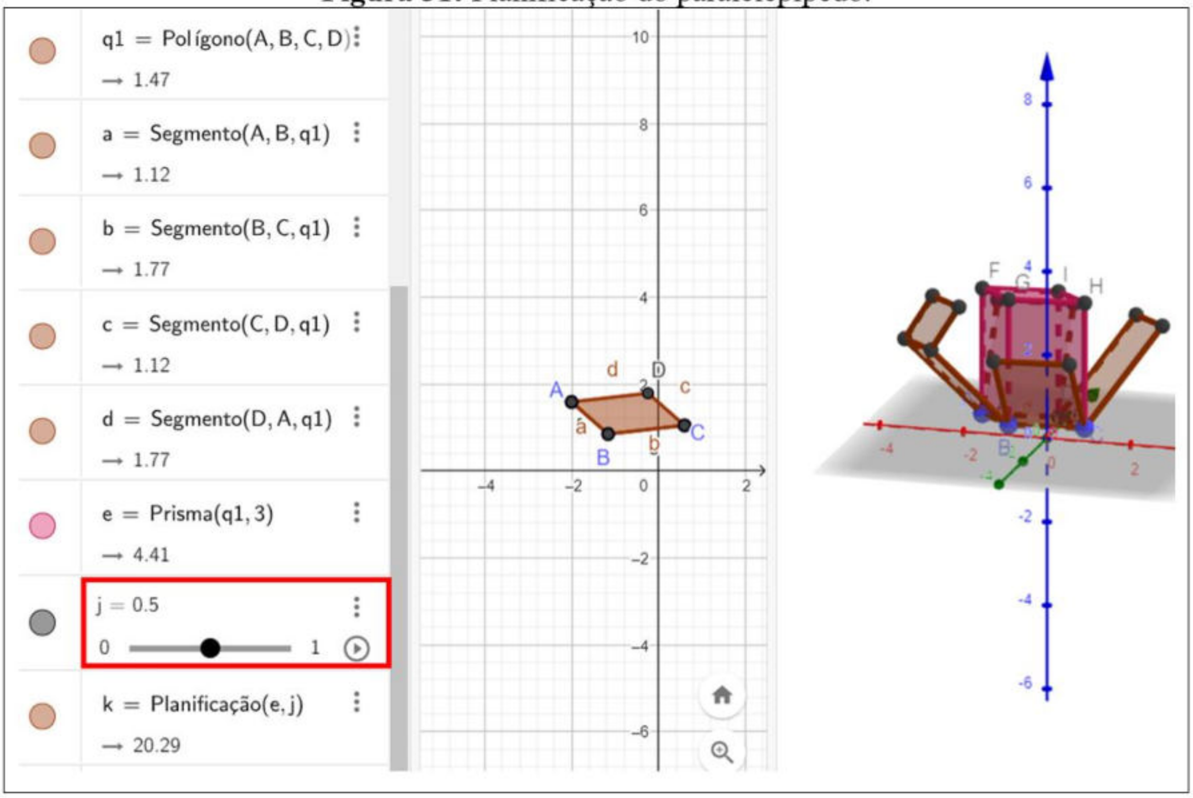
Definição 3.21 (Paralelepípedo reto) Um paralelepípedo é dito reto quando suas arestas laterais são perpendiculares à base e, consequentemente, suas faces laterais são retângulos.

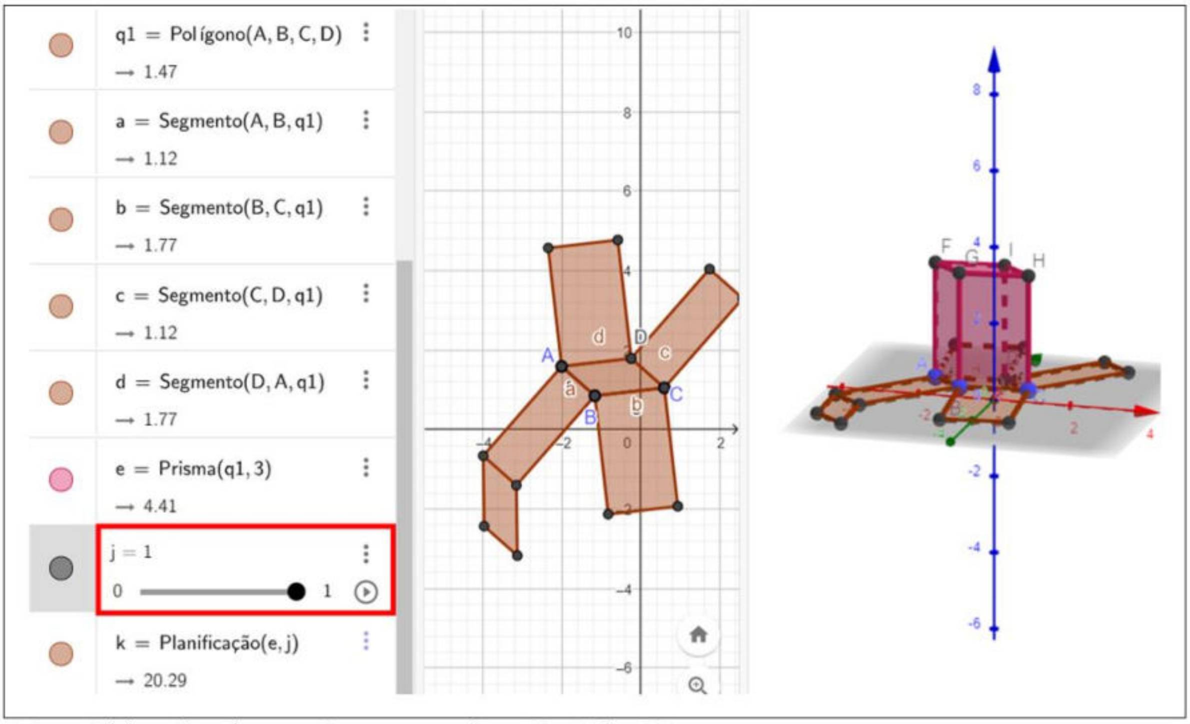
3.3.3 Área lateral e área total de um paralelepípedo

Para se determinar a área lateral do paralelepípedo, um caminho é utilizar a ferramenta “Planificação”, a exemplo do que foi feito com os prismas. Da mesma forma, o professor pode-se recorrer aos cálculos algébricos ou valer-se dos resultados apresentados na Janela de Álgebra do GeoGebra. Para obtenção desses dados deve-se dar sequência à atividade no GeoGebra 3D, procedendo como no passo a seguir.

Passo 9. Para se obter a planificação do objeto, deve-se clicar na ferramenta “Planificação” e, em seguida, no paralelepípedo apresentado na Janela de visualização 3D. É criado automaticamente um controle deslizante cujo parâmetro define os estágios de planificação, como na Figura 31.

Figura 31: Planificação do paralelepípedo.





Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

A Figura 31 mostra dois estágios de planificação, um quando j = 0.5, o que significa que o processo de planificação está em 50%, e o outro quando j = 1, que representa 100%. Vale observar que somente nesse estágio final da planificação, ou seja, quando j = 1, o objeto está totalmente planificado e, somente nesse estágio, todas as faces são apresentadas na Janela de visualização 2D. Isso facilita determinar a quantidade de faces da figura e daí, verificando as medidas das arestas e valendo-se dos conhecimentos de Geometria Plana, calcular a área de cada face, e realizar a partir desses valores o cálculo algébrico da área lateral e da área total, confrontando os resultados com os valores apresentados na Janela de Álgebra.

Com esse tipo de atividade, espera-se que o aluno avance nos Níveis de van Hiele a ponto de perceber que um paralelepípedo é uma forma tridimensional cujas 6 faces são paralelogramos identificar as propriedade da figura, criar uma imagem mental e associá-la ao vocabulário formal, desenvolvendo a capacidade de elaborar argumentos do para definir esse sólido de diferentes formas, como as que se seguem.

Nesse estágio, o aluno teria avançado para o nível 3 (dedução informal) de van Hiele, já satisfatório para o aluno jovem e adulto, embora alguns desses alunos sejam potencialmente capazes de avançar para o nível 4 (dedução formal), tornando-se capazes de elaborar provas e demonstrações com maior rigor matemático, embora esse estágio não se encaixe no perfil do aluno da EJA, principalmente quando se considera o tempo reduzido de contato desse aluno com a geometria escolar.

De qualquer modo, o aluno que se desenvolve satisfatoriamente até atingir o nível 3 de van Hiele, embora não tenha ainda desenvolvido a capacidade de elaborar demonstrações formais, é capaz de negociar significados, criar imagens mentais e compreender as diferentes formas de se definir um paralelepípedo, como as que se seguem, inclusive de estabelecer relações entre essas definições.

Quanto à classe e ao polígono da base, um paralelepípedo pode ser definido da seguinte forma:

Definição 3.22-a (Paralelepípedo) Chama-se paralelepípedo todo prisma cuja base é um paralelogramo.

Observando a classificação do poliedro e as propriedades das faces, pode-se assim definir paralelepípedo:

Definição 3.22-b (Paralelepípedo) Define-se paralelepípedo como sendo um hexaedro no qual cada face é um paralelogramo.

Finalmente, um paralelepípedo pode ter como base de sua definição o reconhecimento do paralelismo de cada um dos três pares de planos que contêm faces opostas.

Definição 3.22-c (Paralelepípedo) Diz-se que um poliedro é um paralelepípedo se este é um hexaedro com três pares de faces paralelas.

3.3.4 Diagonal do paralelepípedo reto-retângulo

Com a metodologia aqui proposta, é provável que o aluno, ao analisar um paralelepípedo reto-retângulo na tela do GeoGebra, consiga perceber que, pelas propriedades da figura, sua diagonal é a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos são uma aresta lateral e uma diagonal da base. Dependendo do seu nível de pensamento geométrico, é capaz de deduzir que a diagonal da base do paralelepípedo é também a hipotenusa de outro triângulo retângulo no qual os catetos são duas arestas adjacentes da base e, portanto, conhecendo-se as dimensões da base, a medida da diagonal pode ser calculada por meio do teorema de Pitágoras.

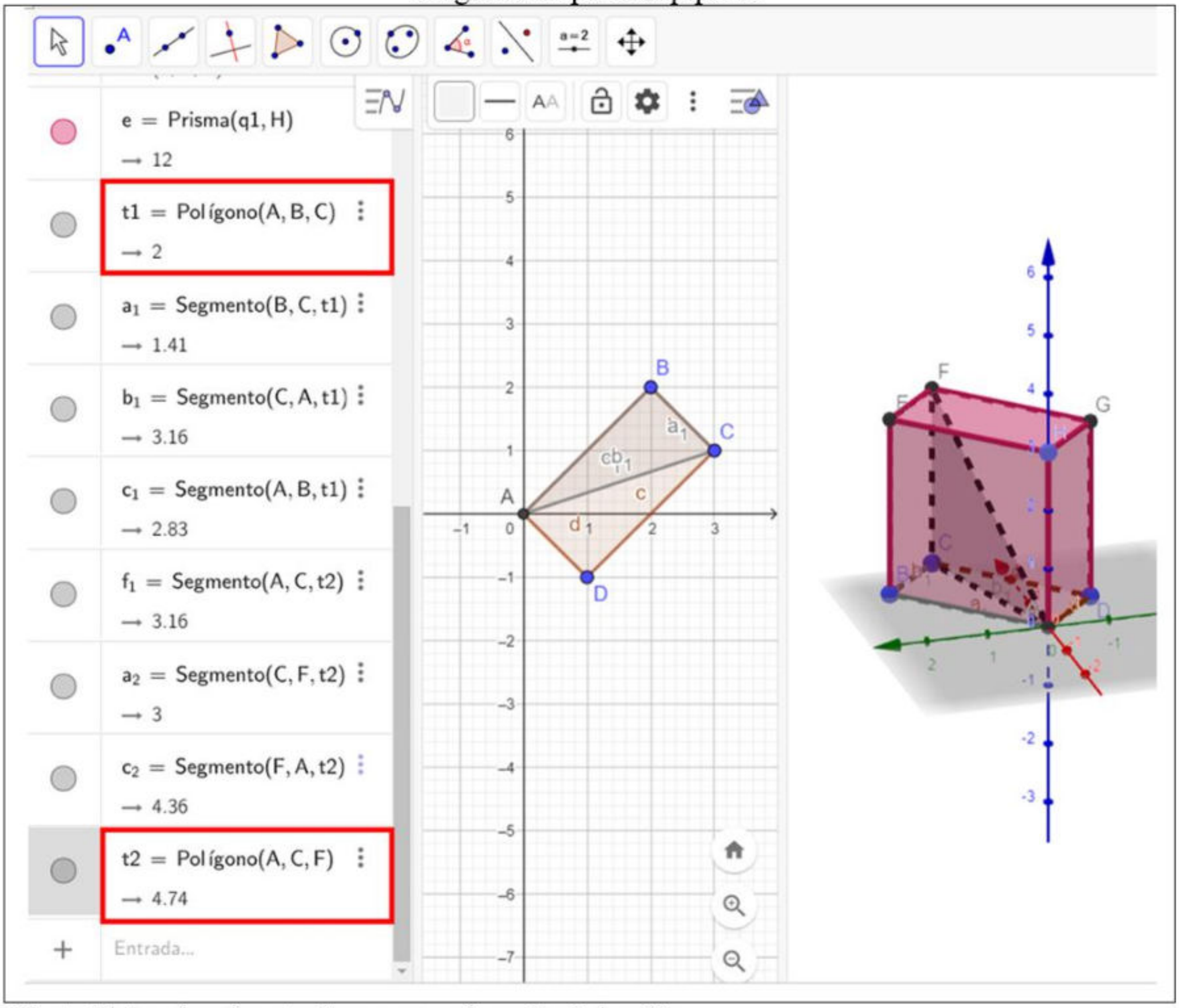
Um aluno que já tenha alcançado o nível 2 (análise) de van Hiele é capaz de manifestar essa percepção e raciocínio, embora não consiga ainda elaborar argumentos para justificar sua lógica de pensamento. Os questionamentos feitos pelo professor vão contribuir para o desenvolvimento dessa habilidade de explicar, mesmo que de maneira simples e informal, o que fazer e por que fazer para determinar essas medidas, promovendo aí o avanço para o nível 3 (dedução informal) do Modelo van Hiele.

Para facilitar esse estudo, o professor pode solicitar aos alunos que, construído o prisma no GeoGebra 3D, construam triângulos clicando na ferramenta "polígono" e, em seguida, em três vértices do paralelogramo, convenientemente escolhidos, como ilustra a Figura 32.

Na Figura 32, o triângulo ABC, que contém a diagonal da base e o triângulo ACF, que contém a diagonal do paralelepípedo, estão representados, respectivamente, pelos polígonos t1 e t2. Como a base é um retângulo e as arestas laterais são perpendiculares ao plano da base, não restam dúvidas que esses dois triângulos são retângulos, mas se julgar necessário, o aluno pode verificar a medida do maior ângulo interno de cada um por meio da ferramenta "Ângulo".

Para melhor visualização dos polígonos, pode-se desmarcar, na Janela de Álgebra, o elemento prisma. Para os cálculos, as medidas de todos os segmentos estão apresentadas na Janela de Álgebra. A identificação desses elementos na figura também auxilia no avanço do pensamento geométrico.

Figura 32: Visualização dos triângulos que auxiliam na dedução do cálculo da medida da diagonal do paralelepípedo.



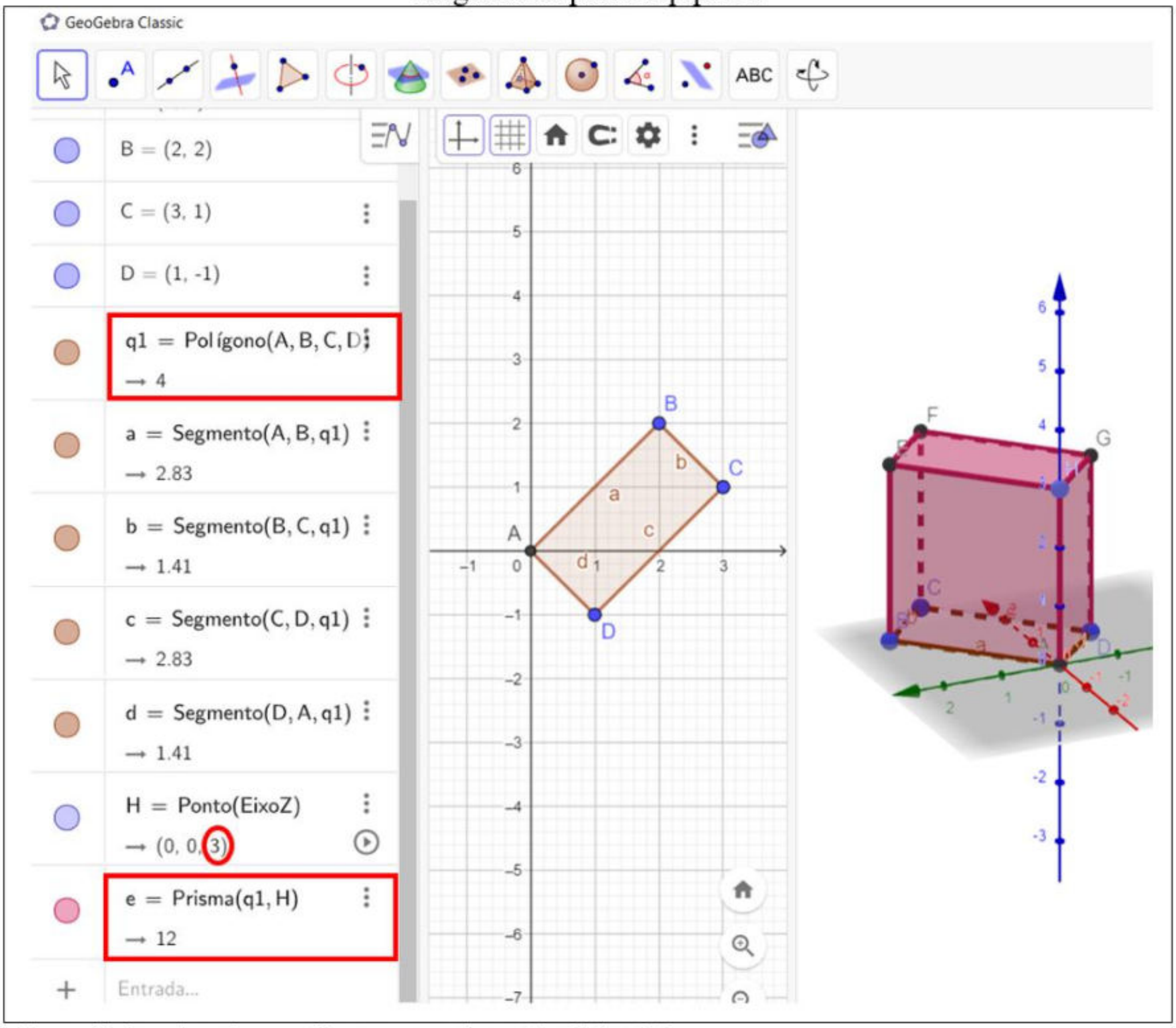
Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

3.3.5 Volume do paralelepípedo reto-retângulo

Como o paralelepípedo é um prisma, seu volume pode ser calculado como já explicado. Do mesmo modo, a Janela de Álgebra do GeoGebra apresenta esse valor, porém, o professor deve explorar outros valores apresentados nessa janela, solicitando que os alunos utilizem esses valores na realização dos cálculos e, posteriormente, confrontem os resultados.

Tomando como exemplo a Figura 33, o volume do paralelepípedo, apesar de estar exposto no elemento Prisma disposto na Janela de Álgebra, deve ser calculado multiplicando-se a área do polígono ABCD da base pela altura do sólido, representada pela terceira coordenada do ponto H. Assim, sendo V o volume procurado, A a área da base e H a altura do paralelepípedo, o cálculo é como segue.

Figura 33: Visualização dos triângulos que auxiliam na dedução do cálculo da medida da diagonal do paralelepípedo.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

3.4 Cubo

De acordo com Wikipédia (2020), o Cubo Mágico (Figura 34), como originalmente chamado por seu inventor, o professor húngaro de arquitetura Ernő Rubik é um quebra-cabeça tridimensional criado em 1974 e amplamente difundido na década de 1980, quando foi licenciado pela Ideal Toys e teve seu nome alterado para “Cubo de Rubik”. Nesse mesmo ano, ganhou o prémio alemão do “Jogo do Ano (*Spiel des Jahres*)”. Interessante o fato de que o professor Ernő Rubik demorou um mês para resolver o cubo pela primeira vez.

Geralmente confeccionado em plástico e apresentado em várias versões, é atualmente um dos brinquedos mais populares do mundo, com mais de 350 milhões de unidades vendidas.

A versão mais comum é a 3x3x3, composta por 6 "*faces*" de 6 cores diferentes, com "*arestas*" medindo 56 mm cada.

Atualmente cubistas de várias nações praticam e competem não só a resolução do 3x3x3, mas também outros similares. A partir de 2003, a Associação Mundial do Cubo Mágico (WCA, World Cubing Association) passou a organizar competições por todo o mundo e reconhecer recordes nacionais, continentais e mundiais.

Figura 34: Cubo Mágico ou Cubo de Rubik.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Rubiks_cube_by_keqs.jpg

Esse breve histórico tem como objetivo principal despertar a curiosidade do aluno e criar um ambiente favorável para a introdução ao estudo do sólido geométrico cubo. O nome "cubo" mágico associado à figura favorece a criação de uma imagem mental primária da forma geométrica que caracteriza esse objeto de estudo. Intencionalmente não foram apresentadas nesse texto muitas informações além do que se julga suficiente, para evitar que a atenção do aluno se fixe especificamente nesse objeto e o compreenda como representação única do cubo, sem perceber sua relação com outros materiais importantes para a generalização da forma. A intenção é levar o aluno à percepção de que um cubo não se trata, necessariamente, de um cubo mágico, mas pode ser qualquer outro objeto que apresente a mesma forma e as mesmas propriedades. É interessante que o professor esclareça a seus alunos que o cubo é uma figura muito importante para o estudo da Geometria Espacial, pois o cubo cuja aresta mede 1 unidade de medida é a base para o cálculo do volume de todos os sólidos geométricos.

É natural que nesse primeiro contato o aluno identifique um cubo pela aparência, mas não perceba ou não se importe com as propriedades da figura, tais como a congruência das arestas, a forma quadrada e a congruência de todas as faces e a perpendicularidade entre faces adjacentes.

Nesse estágio, é importante que o professor reconheça que esse estado manifesto pelo aluno caracteriza o Nível 1 (Reconhecimento) de desenvolvimento do pensamento geométrico segundo o Modelo van Hiele e que esse aluno precisa de um direcionamento planejado, mas com a devida autonomia, para superar as fases de transição para o Nível 2 (análise), quando começa a perceber algumas das propriedades básicas da figura.

Uma vez criada uma imagem mental primitiva para a figura cubo, sugere-se ao professor apresentar aos alunos algumas figuras e materiais manipuláveis, tais como dados, cubos mágicos, caixas ou outros objetos de formato cúbico, para que sejam manipulados e as observações registradas e compartilhadas com o grupo. Isso possibilitará ao professor perceber se os alunos reconhecem as representações do cubo, o que caracteriza o nível 1 de van Hiele. Essa atividade deve ser breve e minuciosamente planejada, considerando-se a limitação do tempo disponível para esse estudo.

Explorando as ferramentas do GeoGebra, existem diferentes modos de se construir um cubo, umas mais simples, porém com menos recursos, outras mais elaboradas, mas com a vantagem de permitir mais possibilidades de manipulações. Dentre esses, propõe-se aqui um modo que se julga conveniente para esse estudo. Para que o aluno tenha melhor percepção das propriedades e relações presentes nesse sólido, sugere-se que a medida da aresta seja vinculada ao controle deslizante. Para tal, deve-se clicar na janela de visualização 2D para acionar sua barra de ferramentas e proceder conforme os passos a seguir.

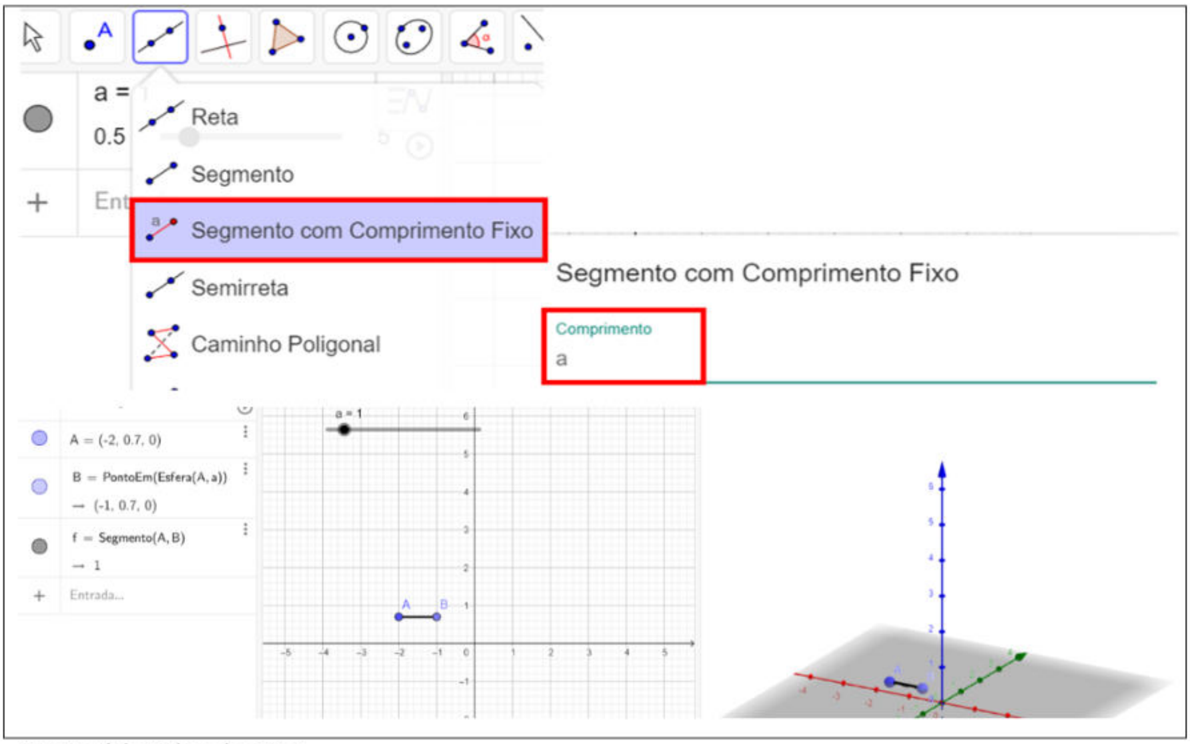
1) Criar um Controle Deslizante e configurá-lo como na Figura 35. Essa configuração é uma sugestão conveniente para esse estudo, mas não necessariamente precisa ser seguida.

Figura 35: Configuração do Controle Deslizante “a”, vinculado à aresta do cubo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Para vincular o comprimento das arestas do cubo ao controle deslizante, deve-se clicar na ferramenta segmento de comprimento fixo e preencher o campo "comprimento" da caixa de diálogo com o parâmetro do controle deslizante, nesse caso, "a". Clicando em OK, será criado um segmento (Figura 36) que será uma das arestas do cubo.

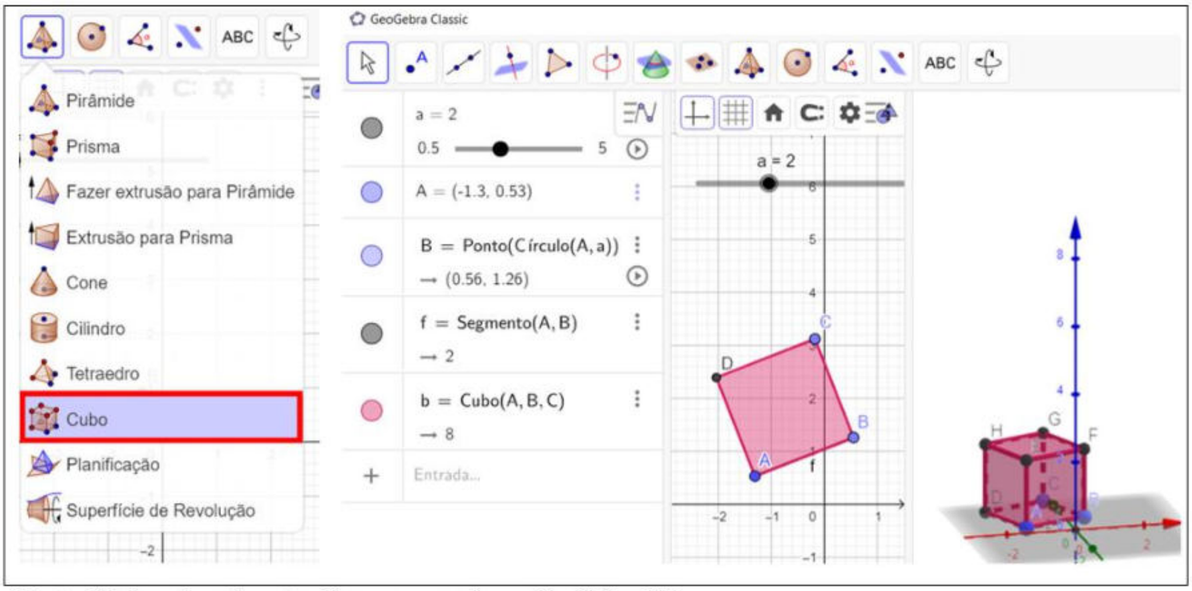
Figura 36: Construção de um segmento com comprimento fixo para aresta do cubo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3) Clicando na ferramenta cubo e em seguida nos pontos A e B do segmento AB, será gerado o cubo apresentado na Figura 37.

Figura 37: Cubo de arestas vinculadas ao controle deslizante “a”.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

3.4.1 Elementos do cubo

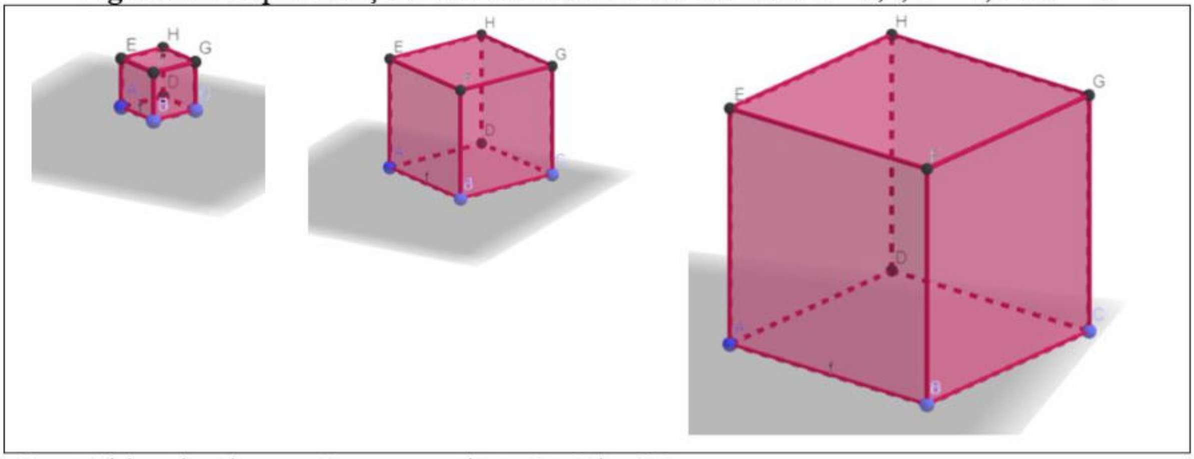
Uma vez construída o cubo, pode-se melhorar sua visualização através da omissão dos eixos, mantendo apenas o plano como referência para dar ao aluno a noção do espaço. Isso pode ser feito seguindo a sequência mostrada na Figura 38 e vale também para o estudo de qualquer outra figura geométrica.

Figura 38: Sequência de procedimentos para omitir os eixos e manter o plano na janela 3D.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse caso, o sólido é exibido como na Figura 39, com variações de tamanho definidas pelo controle deslizante.

Figura 39: Representações do cubo com arestas medindo $a = 0,5$, $a = 2,5$ e $a = 5$.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

A manipulação dessas figuras facilita ao aluno identificar e analisar elementos, tais como faces, vértices e arestas, possibilitando a percepção de propriedades e relações importantes para a compreensão da estrutura desse sólido geométrico e das expressões algébricas aplicadas aos cálculos de comprimento, área e volume, dando sentido ao estudo, de modo que tais conhecimentos se tornem realmente aplicáveis à situações do cotidiano. A visualização por diferentes ângulos favorece ainda o processo dedutivo por meio do qual o aluno passa a perceber, por exemplo, que o cubo tem seis faces, todas quadradas e congruentes e que tem também diagonais, embora essas estejam implícitas na figura.

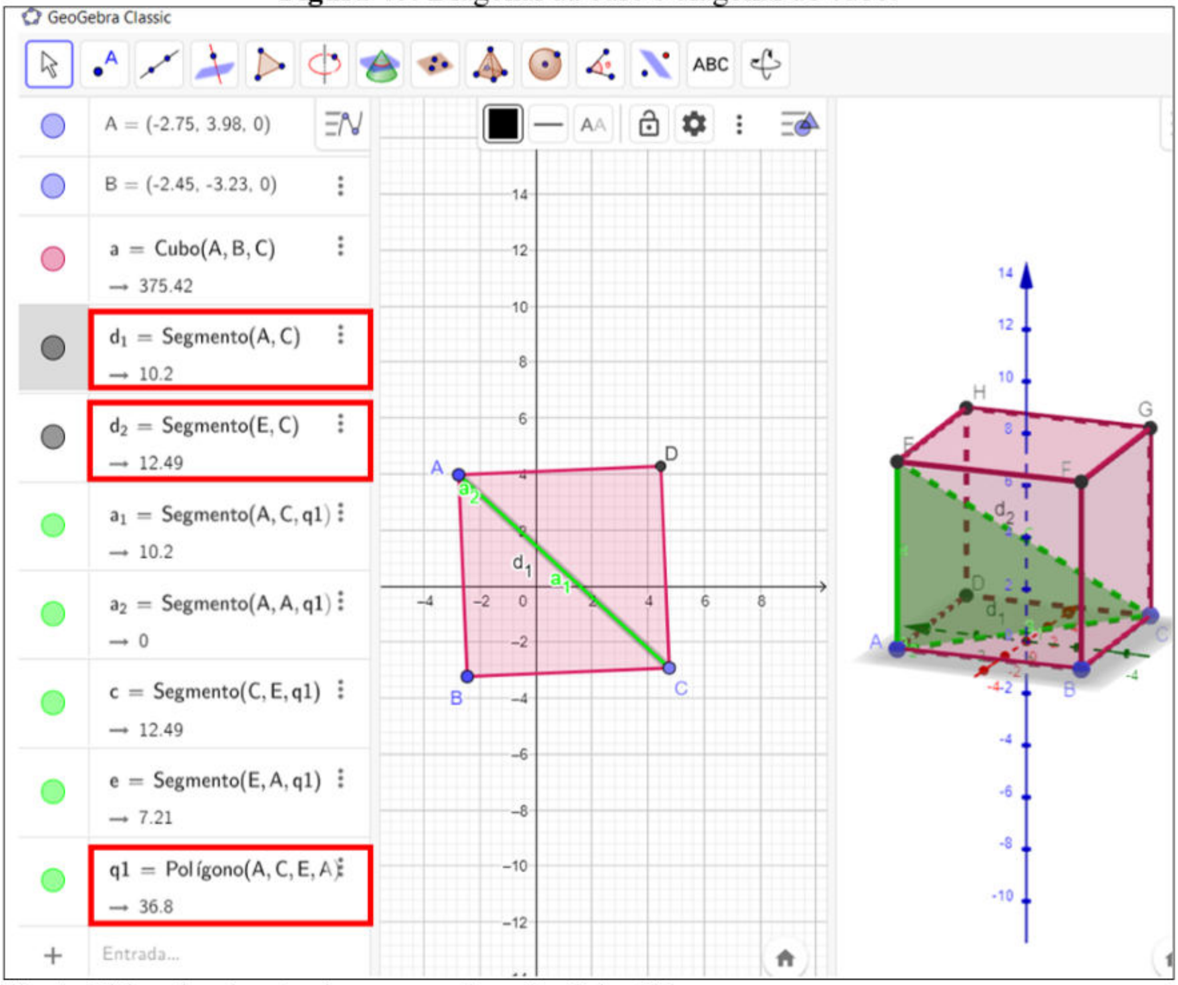
3.4.2 Diagonal do cubo

No nível 3 de van Hiele o aluno consegue desenvolver estratégias para calcular a medida da diagonal de um cubo. Nessas condições, o aluno consegue criar imagens mentais que o permitam identificar que, ao traçar a diagonal da base e, a partir de um dos seus extremos, a diagonal do prisma, ter-se-á gerado dois triângulos retângulos cujas medidas das diagonais podem ser calcular algebricamente aplicando-se, duas vezes, o teorema de Pitágoras.

4) Clicando na ferramenta cubo e em seguida nos pontos A e B do segmento AB, será gerado o cubo ABCDEFGH. Para visualizar as diagonais do cubo e da base, com suas respectivas medidas, deve-se digitar, na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, os comandos “Segmento(A,C)” e depois, “Segmento(E,C)”. Para facilitar para o aluno fazer os cálculos

algébricos, sugere-se ainda digitar o comando “Polígono(A,C,E,A), gerando o triângulo retângulo ACE, cuja cor deve ser alterada e a transparência aumentada, acessando suas configurações. A imagem deve ser apresentada como ilustrado na Figura 40.

Figura 40: Diagonal da base e diagonal do cubo.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Embora as medidas das diagonais já estão apresentadas na Janela de Álgebra, a Figura 4.7 favorece ao aluno calcular esses valores e ainda mais, deduzir uma expressão genérica para determina-los em um cubo qualquer em função da medida “a” da aresta. Ao analisar o triângulo retângulo CAE destacado no cubo, o aluno percebe que a medida d_2 da diagonal do cubo pode ser calculada por meio do teorema de Pitágoras, mas apenas o cateto AE tem medida “a” conhecida. Analisando um pouco mais, percebe que pode utilizar o mesmo teorema para calcular a medida do cateto d_2, diagonal da base, em função da aresta “a”.

Desse modo, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, deduz que a medida da diagonal da base do cubo é dada por

$$d_1 = a\sqrt{2}$$

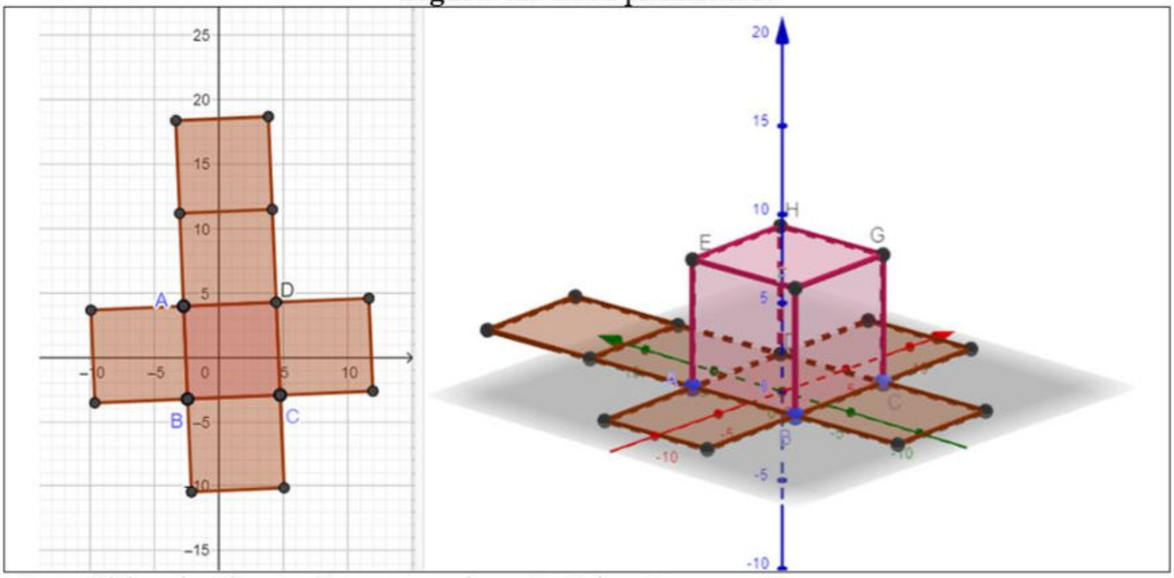
e, aplicando o mesmo teorema, desta vez no triângulo CAE, deduz que a medida da diagonal do cubo de aresta "a" pode ser calculada pela expressão

$$d_2 = a\sqrt{3}$$

3.4.3 Área lateral e área total do cubo

Do mesmo modo que nos sólidos abordados anteriormente, é provável que a essa altura o aluno da EJA, explorando a figura na Janela 3D GeoGebra, consiga perceber as propriedades do cubo, concebendo esse sólido como um paralelepípedo composto de seis faces quadradas e congruentes. Para melhor visualização, recomenda-se que o cubo seja planificado no GeoGebra, clicando na ferramenta "Planificação" e depois, sobre a figura, como já foi feito anteriormente com outros prismas. Agindo dessa forma, o cubo será apresentado como ilustrado na Figura 41.

Figura 41: Cubo planificado.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Sabendo que as faces do cubo são todas quadradas e congruentes e que esse sólido possui duas bases e quatro faces laterais, é muito provável que o aluno deduza que a área lateral do cubo é igual à soma das áreas de quatro quadrados de lado “a” e que a área total corresponde à área lateral acrescida do dobro da área de uma base. Em linguagem matemática, tem-se que

$$A_{Base} = a^2,$$

$$A_{Lateral} = 4a^2$$

e

$$A_{Total} = 6a^2$$

A elaboração de argumentos e raciocínios lógicos desprovidos do devido rigor matemático, para justificar que a área lateral do cubo corresponde à soma das áreas de quatro quadrados congruentes e a área total corresponde à soma das áreas de seis desses quadrados, caracterizam o avanço para o nível 3 (dedução informal) de van Hiele. Por razões já mencionadas nesse trabalho, não se espera que o aluno da EJA elabore com maior rigor demonstrações formais para o cálculo da área do cubo, capacidade que só seria adquirida a partir do nível 4 (dedução formal).

3.4.4 Volume do cubo

Espera-se que os alunos percebam que, por ter as mesmas propriedades do prisma e ter como bases quadrados, o cubo é um prisma e então seu volume pode ser calculado como o volume de um prisma. Contudo, as manipulações no GeoGebra e a compreensão de que todas as faces do cubo são todas quadradas permitem ao aluno intuir que a altura e as arestas da base têm medidas iguais e daí, ao calcular algebricamente o volume do cubo, esse aluno pode facilmente deduzir a expressão que permite calcular o volume do cubo em função da medida de suas arestas. Desse modo, não será difícil deduzir que o volume do cubo de aresta “a” é

$$V = a^3$$

3.5 Pirâmide

Em um breve apanhado sobre a história das pirâmides do Egito Antigo, Santos (2021) salienta que há várias discussões sobre a origem dessas construções e as possíveis explicações para a complexa engenharia que possibilitou construí-las. Embora a história desses locais sagrados seja cercada de misticismos, o que se sabe é que historiadores e arqueólogos chegaram a conclusão de que cada um dos blocos de pedra que eram lapidados e encaixados uns sobre os outros nessas construções pesava cerca de duas toneladas e que os próprios egípcios desenvolveram mecanismos para o transporte das rochas e outros materiais utilizados nessas construções. Quanto à curiosa forma geométrica desses monumentos, Mendonça (2019) esclarece que os egípcios escolheram o formato piramidal porque acreditavam ser essa uma forma de ascensão do faraó aos céus, sendo acolhido por Rá, a divindade mais poderosa da mitologia egípcia.

O processo de construção dessas obras piramidais durava de vinte a trinta anos, camponeses eram recrutados durante o período de seca do rio Nilo e, embora esses monumentos tenham sido implantados há mais de 2500 anos, os egípcios, já naquela época, demonstravam um conhecimento matemático bastante desenvolvido, pois utilizavam cálculos precisos na elaboração de técnicas que determinavam a posição exata para que as pedras se encaixassem perfeitamente umas sobre as outras. Além disso, há um grande conhecimento geométrico na engenharia utilizada na construção de labirintos na parte interna das pirâmides, como estratégia para enganar os violadores de tumba e proteger toda a riqueza dos faraós, que ficariam guardadas no momento em que eles fossem mumificados.

Segundo Mendonça (2019), existe um total de 123 pirâmides no Egito. As mais conhecidas são as pirâmides de Queóps, de Quéfren e de Miquerinos (Figura 42), que representam uma família de faraós e estão localizadas na península de Gizé. Essa terna de pirâmides é a única das sete maravilhas do mundo que ainda resiste intacta às ações do tempo.

Figura 42: As três principais pirâmides do Egito.

Fonte: MENDONÇA (2019). Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/artes/piramides-do-egito. Acesso em 15/06/2021.

Esse breve histórico tem por objetivo despertar o interesse e a curiosidade do aluno e dar sentido ao estudo das pirâmides, facilitando a criação de uma imagem mental da forma geométrica piramidal. Embora essa forma não pareça tão recorrente no cotidiano do aluno da EJA, não se deve ignorar a importância desse estudo para as generalizações, para a compreensão do mundo e para a continuidade dos estudos, incluindo a matemática e outras disciplinas.

Considerando-se que o aluno já explorou o assunto prismas, acredita-se que esse aluno já tenha um bom domínio sobre polígonos e uma boa noção espacial, incluindo os conceitos de base, faces, arestas, vértices, áreas e volume, pré-requisitos fundamentais para o estudo das pirâmides. Não serão abordados aqui todos os detalhes dessa forma, pois o objetivo principal é despertar o professor para a importância de se respeitar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno segundo van Hiele e explicitar as possibilidades de avanço com o auxílio do GeoGebra.

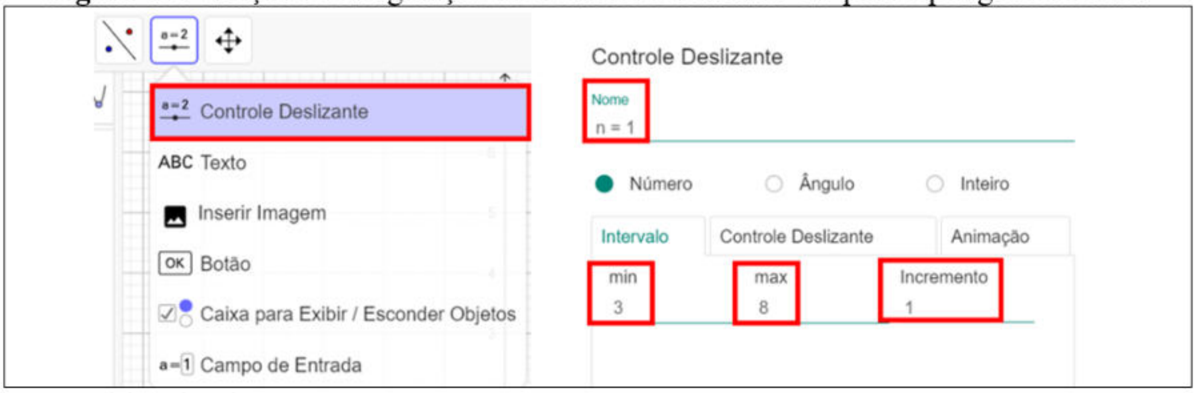
3.5.1 Elementos da pirâmide

Para iniciar o estudo das pirâmides o professor pode lançar mão de materiais manipuláveis e imagens e verificar se os alunos conseguem identificar as formas e seus elementos. A partir daí, o estudo pode ser complementado com a construção e manipulação de pirâmides no GeoGebra, pois, além de possibilitar a otimização do tempo disponível para o estudo, auxiliará muito no estudo dos elementos e das relações entre eles, além de possibilitar novas descobertas, deduções, conjecturas e percepção de propriedades da figura.

Com a pretensão de explorar essa mesma construção em abordagens posteriores, já levando-se em consideração as limitações de tempo para o estudo, propõe-se ao professor a construção de uma pirâmide de bases e altura variáveis. Para isso, sugere-se os passos a seguir.

Passo 1) Visando facilitar a variação do polígono da base, sugere-se criar, na Janela de Visualização 2D, um controle deslizante n, configurando-o como na Figura 43.

Figura 43: Criação e configuração do Controle Deslizante "n" para o polígono da base.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Passo 2) Ainda na Janela 2D, criar a base da pirâmide, clicando na ferramenta "Polígono Regular", em seguida, em dois pontos distintos A e B, e definindo na caixa de diálogo o número de vértices pelo parâmetro n do controle deslizante, como na Figura 44.

Figura 44: Criação da base da pirâmide, vinculada ao Controle Deslizante "n".

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os polígonos gerados são os mesmos da Figura 13 (ver página 75). Basta acionar o controle deslizante n para visualizar todas as bases criadas para a construção das pirâmides.

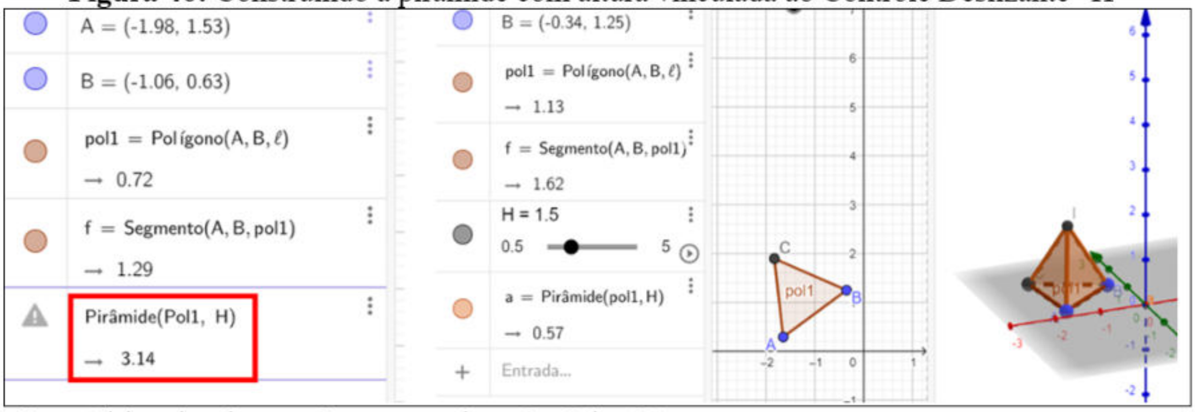
Passo 3) Para facilitar a variação de altura da pirâmide durante as manipulações, sugere-se criar outro controle deslizante H, configurando-o como na Figura 45.

Figura 45: Configuração do Controle Deslizante para definir a variação de altura da pirâmide.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Passo 4) Na Caixa de Entrada, digitar o comando "Pirâmide (Pol1, H)", para gerar a pirâmide que tem como base o polígono apresentado na tela e altura vinculada ao controle deslizante H, como na Figura 46.

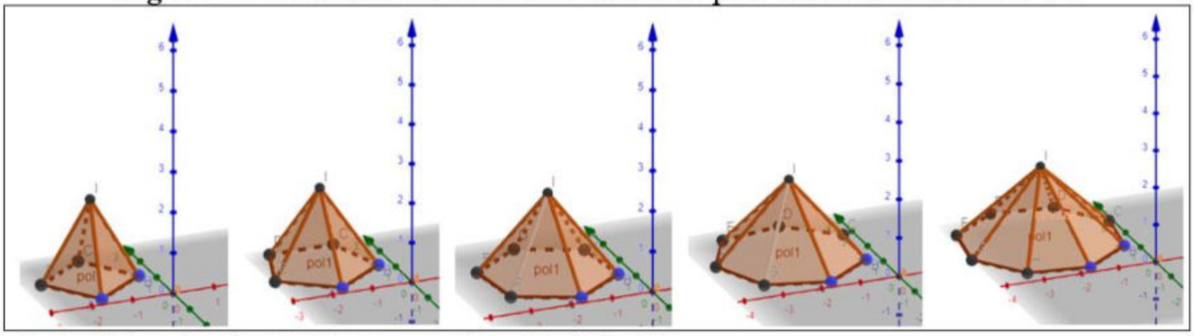
Figura 46: Construindo a pirâmide com altura vinculada ao Controle Deslizante "H"



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Uma vez criada a pirâmide, sugere-se que o professor solicite aos alunos que modifique manualmente os parâmetros do controle deslizante, gerando, além da pirâmide triangular mostrada na Figura acima, outras pirâmides como as apresentadas na Figura 47 e manipule atentamente cada figura, anotando e refletindo sobre suas descobertas, dúvidas e constatações.

Figura 47: Pirâmides com bases determinadas pelo Controle Deslizante "l".



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

3.5.2 Classificação das pirâmides

Observando as diversas pirâmides geradas com a variação do parâmetro do controle deslizante l, como mostrado na Figura 47, o aluno provavelmente perceberá que o que difere essas pirâmides são os polígonos da base. Considerando o conhecimento que esse aluno detém sobre polígonos, o professor deve esclarecer que as pirâmides são classificadas, de acordo com o polígono da base, em pirâmide triangular, quadrangular, pentagonal e assim por diante.

Nesse estágio, o professor deve estimular o aluno a manipular cada figura e, de acordo com os elementos observados, preencher as células com os dados numéricos da Tabela 4.

Tabela 4: Dados numéricos preenchidos pelo aluno, com base nas observações dos elementos de cada pirâmide

Tipo da Base	Núm. de Faces	Núm. de Vértices	Núm. de Arestas
Triangular	4	4	6
Quadrangular	5	5	8
Pentagonal	6	6	10
Hexagonal	7	7	12
Heptagonal	8	8	14
Octogonal	9	9	16

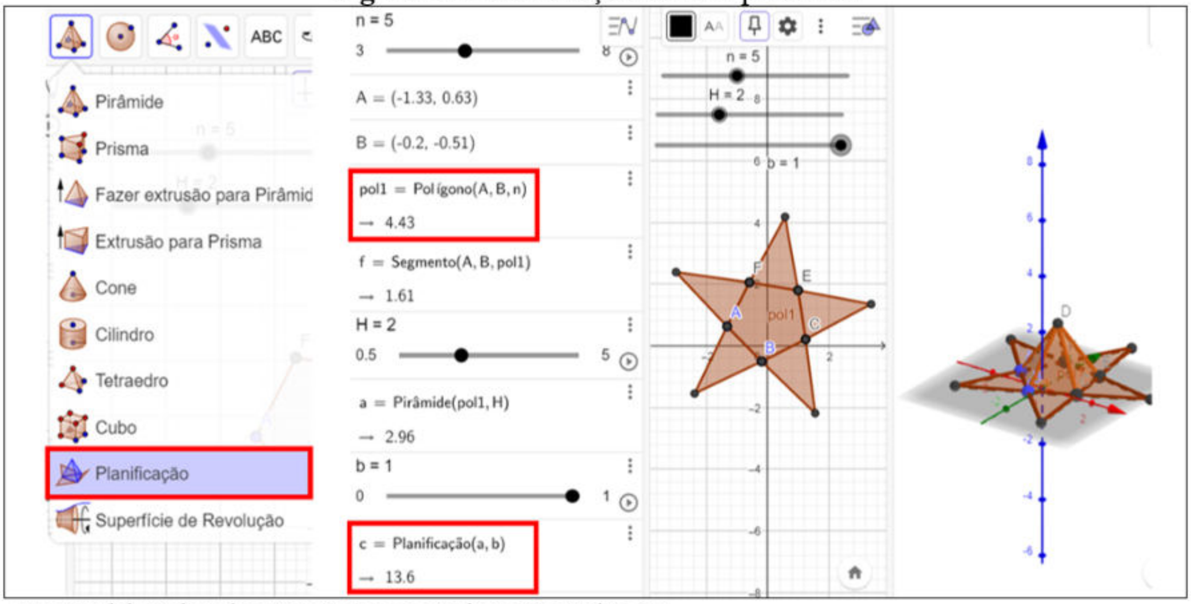
Fonte: Elaborada pelo autor

Preenchida corretamente a Tabela 4, é o momento de discutir com os alunos as relações entre os elementos de cada linha das tabelas 2 (ver página 76) e 4, possibilitando que sejam feitas conjecturas da Relação de Euler. Por possibilitar a percepção de certos elementos e relações, essa atividade auxiliará o avanço do nível de pensamento geométrico do aluno, como pressupõe a teoria dos van Hiele.

3.5.3 Área lateral e área total de uma pirâmide

Para o cálculo das áreas da pirâmide, sugere-se que iniciar o estudo por meio da ferramenta "Planificação" do GeoGebra. Considerando a pirâmide já construída, no tópico 3.5.1, clicar na ferramenta "Planificação" e acionar o controle deslizante, como na Figura 48.

Figura 48: Planificação de uma pirâmide.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

O processo de planificação gerou o Controle Deslizante b, cujo parâmetro varia de 0 a 1. Isso representa o percentual de abertura da figura. Somente quando b = 1 a figura aparece na Janela de Visualização 2D, pois se encontra 100% planificada, ou seja, todas as faces estão totalmente apoiadas no plano da base.

Os dados numéricos que acompanham os elementos pol1 = Polígono(A,B,n) e c = Planificação(a,b) representam, respectivamente, as áreas da base e a área total da pirâmide. Em certos casos, é importante que o professor solicite os cálculos algébricos e, para isso, a Figura 48 auxilia na percepção de que a área lateral é a soma das áreas de n regiões triangulares e a área total é essa soma acrescida da área do polígono da base.

O professor pode se valer desse momento para trabalhar com seus alunos o cálculo da medida do apótema da pirâmide regular, esclarecendo para eles que o apótema é a altura do triângulo que forma uma face lateral. É um ótimo momento para se trabalhar vários cálculos envolvendo, por exemplo, o teorema de Pitágoras, visto que as medidas de alguns elementos são desconhecidas. Contudo, diante da limitação do tempo, pode ser conveniente utilizar o próprio GeoGebra para calcular essas distâncias ou até mesmo as áreas, mas não é recomendado trabalhar o conteúdo na sua totalidade sem recorrer a cálculos algébricos.

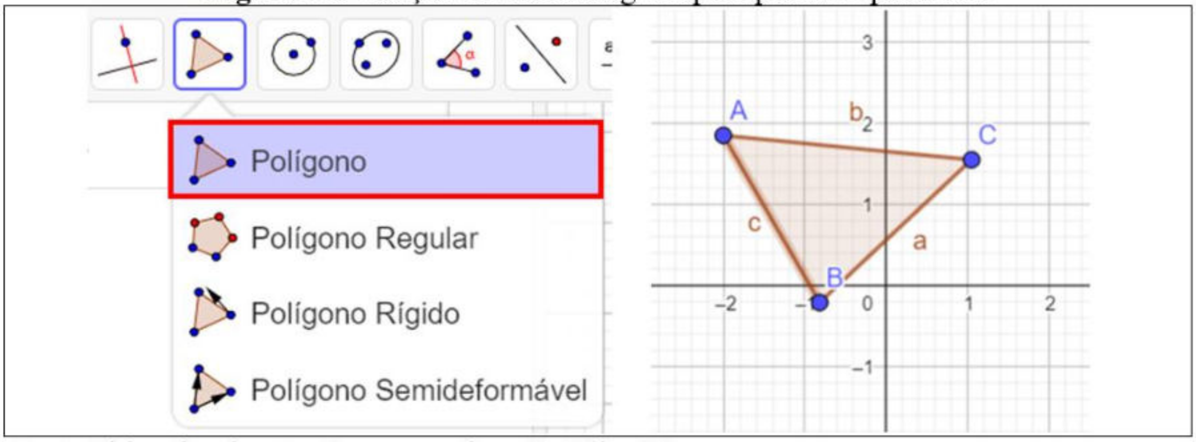
Na falta de tempo para explorar muitos cálculos, o professor deve conduzir os alunos a perceberem que, dadas a área da base e a área total da pirâmide, a área lateral é facilmente obtida tomando-se a segunda e subtraindo dela a primeira. Por exemplo, a pirâmide representada na Figura 48 tem área da base igual a 4,43 e área total igual a 13,6 e, portanto, sua área lateral é 13,6 – 4,43 = 9,17 unidades quadradas.

3.5.4 Volume da pirâmide

Uma forma interessante de se conduzir o aluno à dedução da fórmula do volume da pirâmide de forma significativa requer a percepção da relação entre o volume da pirâmide e o volume de um prisma de mesma base, até mesmo por considerar que, há essa altura, esse aluno já sabe calcular o volume do prisma e, portanto, deve avançar valendo-se de um conhecimento prévio. Baseado no Modelo de van Hiele, esse estudo se inicia pela visualização e avança para as conjecturas e compreensão das formas e suas relações, culminando no desenvolvimento do pensamento geométrico. Nesse sentido, propõe-se que seja realizada, com o auxílio do GeoGebra, a atividade a seguir.

Passo 1) Na Janela 2D, criar um triângulo, clicando na ferramenta “Polígono” e, em seguida, em três pontos distintos A, B e C, fechando a figura no ponto A, como mostra a Figura 49.

Figura 49: Criação de base triangular para prisma e pirâmide.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

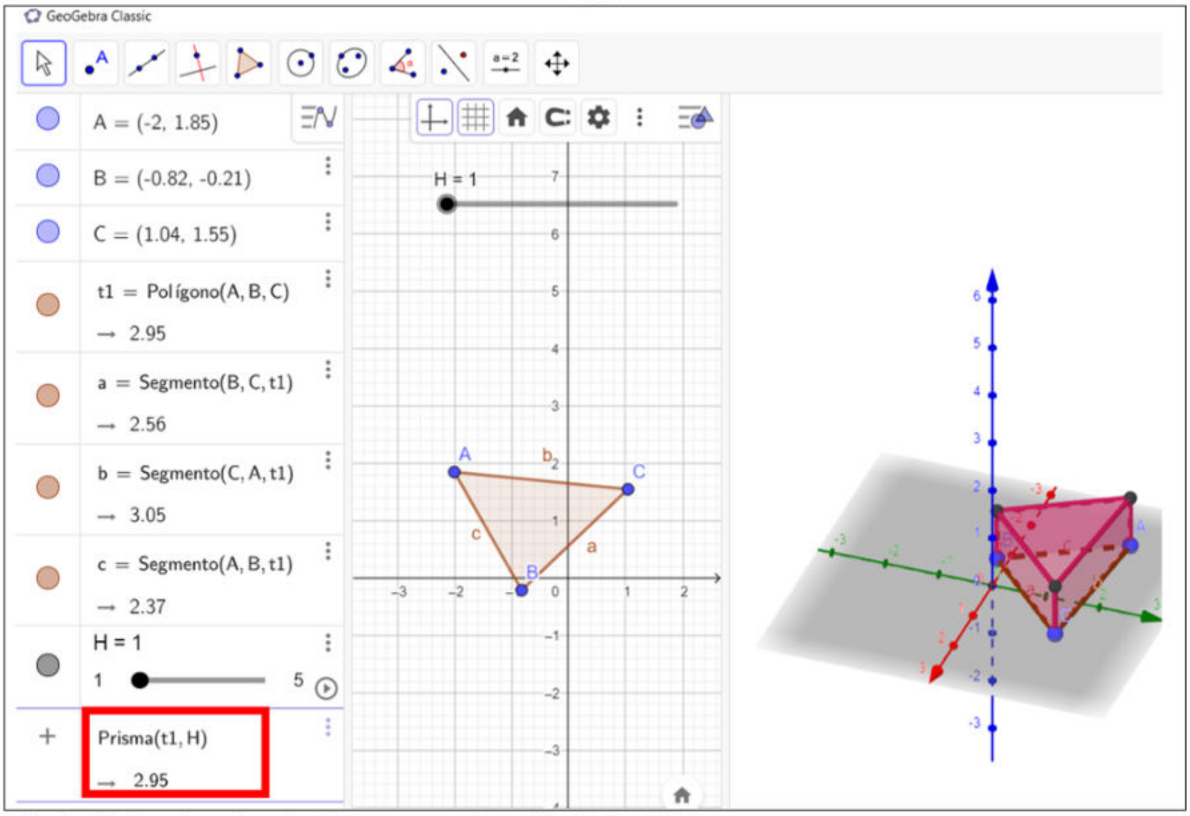
Passo 2) Para variar a altura das figuras, deve-se criar um controle deslizante H, configurando-o como na Figura 50.

Figura 50: Configuração do Controle Deslizante vinculado à altura do prisma e pirâmide.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Passo 2) Na caixa de entrada, digitar o comando “Prisma(t1,H)”, para criar o prisma cuja base é o triângulo t1 e a altura varia conforme o parâmetro H do controle deslizante. Ver Figura 51.

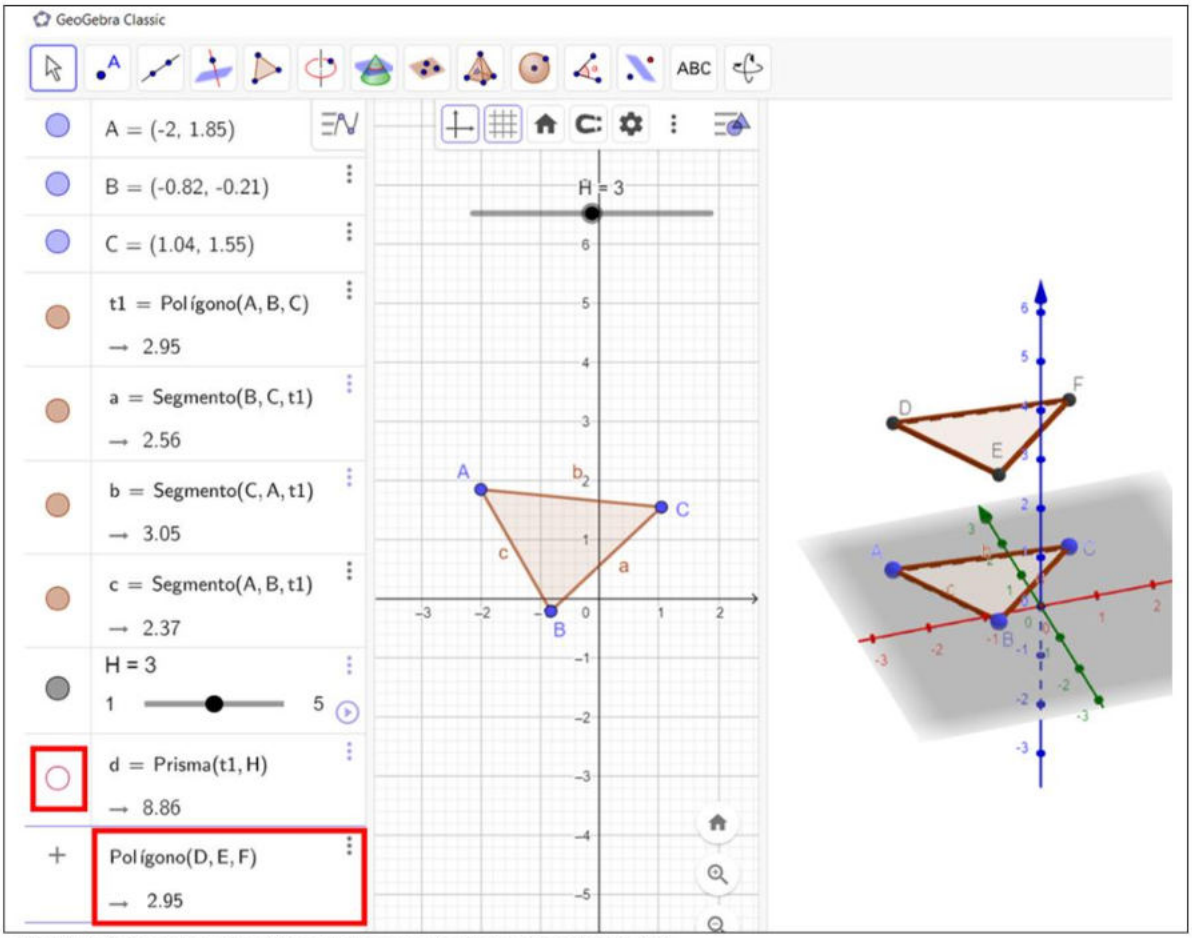
Figura 51: Construção do prisma de base “t1” e altura vinculada ao Controle Deslizante “H”.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Passo 2) Para melhor visualização do que se segue, é interessante omitir o prisma e evidenciar suas duas bases. Para tal, deve-se recorrer à Janela de Álgebra e desmarcar o elemento “Prisma(t1,H)”. Caso outros elementos sejam também desmarcados, marcá-los novamente, mantendo desmarcado apenas o elemento Prisma. Na caixa de entrada, digitar Polígono(D,E,F), como na Figura 52.

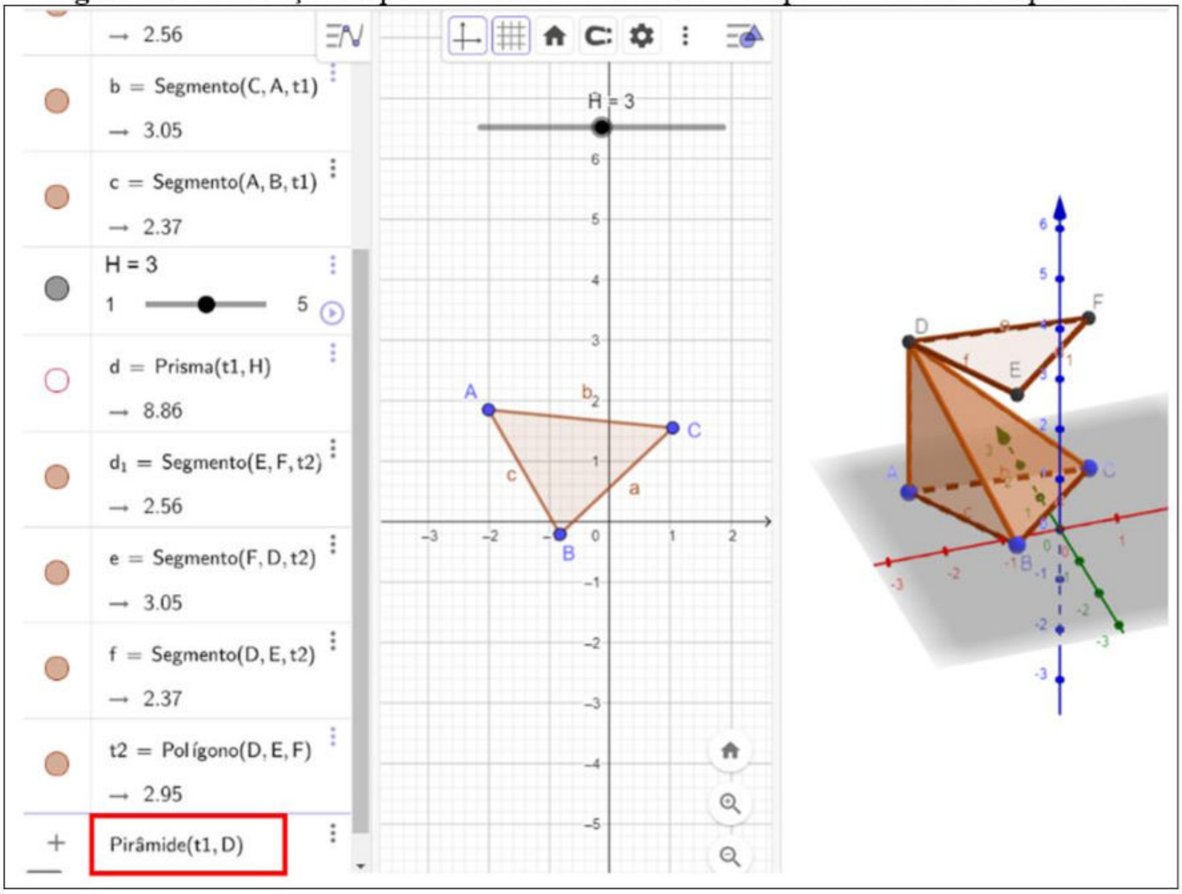
Figura 52: Omitindo o prisma e evidenciando suas duas bases.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Passo 2) Criar outra pirâmide de base coincidente com a base inferior do prisma e vértice coincidindo com um dos vértices da base superior, digitando na caixa de entrada, o comando "Pirâmide(t1, D)", como na Figura 53.

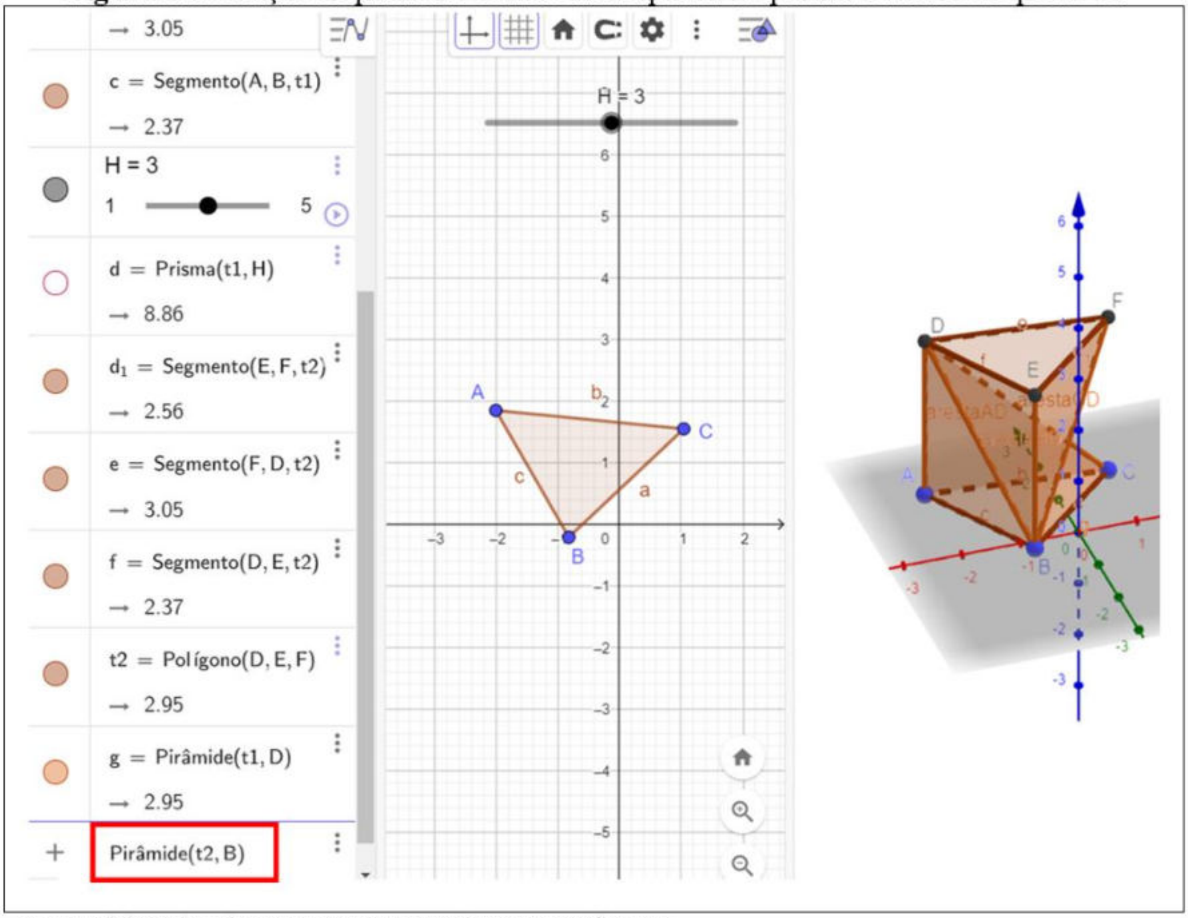
Figura 53: Construção de pirâmide com a base inferior do prisma e vértice no ponto D.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Passo 3) Criar outra pirâmide, agora com a base coincidente com a base superior do prisma e vértice coincidindo com um dos vértices da base inferior. Para isso, digitar na caixa de entrada o comando "Pirâmide(t2, B)", como na Figura 54.

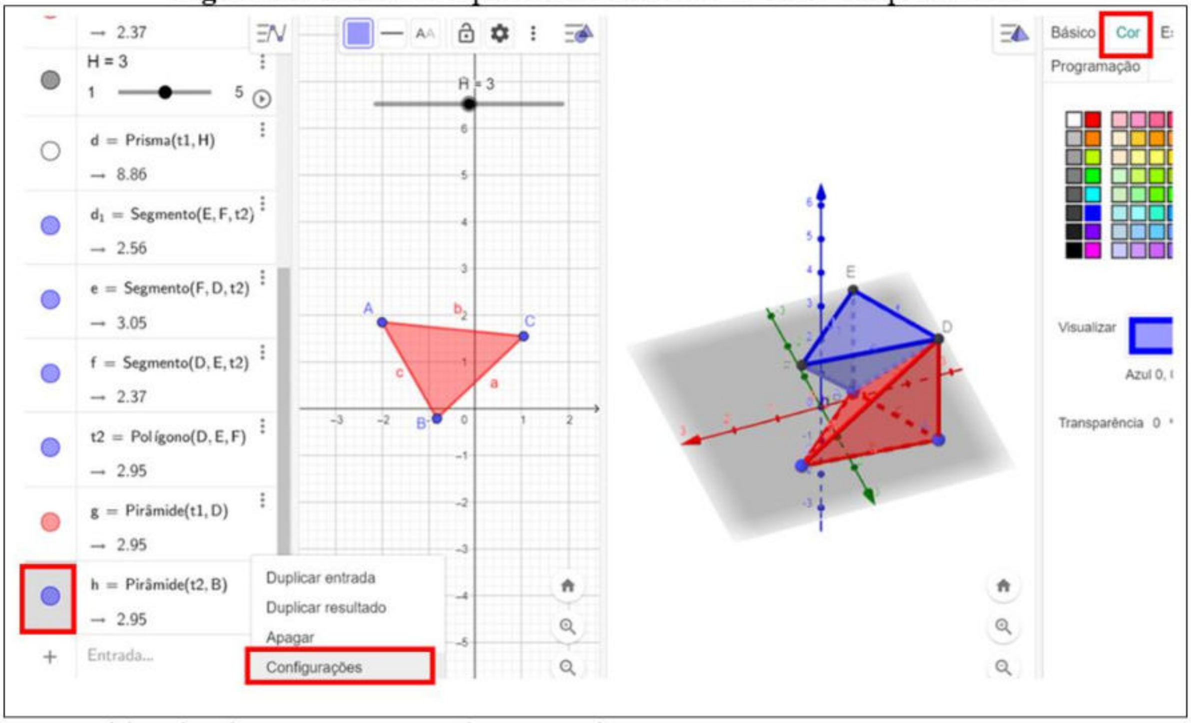
Figura 54: Criação de pirâmide com a base superior do prisma e vértice no ponto B.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Para melhor visualização, o professor pode orientar os alunos a mover a figura procurando uma posição que permita perceber partes que faltam para preencher um polígono convexo. Em seguida, alterar a cor das pirâmides, de preferência com cores bem distintas. Isso pode ser feito selecionando o elemento “Pirâmide” na Janela de Álgebra e clicando nos três pontinhos para acessar “Configurações”, e depois em Cor. Essa alteração facilita para o aluno distinguir as duas pirâmides que compõem o poliedro, como na Figura 55.

Figura 55: Movendo o poliedro e alterando as cores das pirâmides.

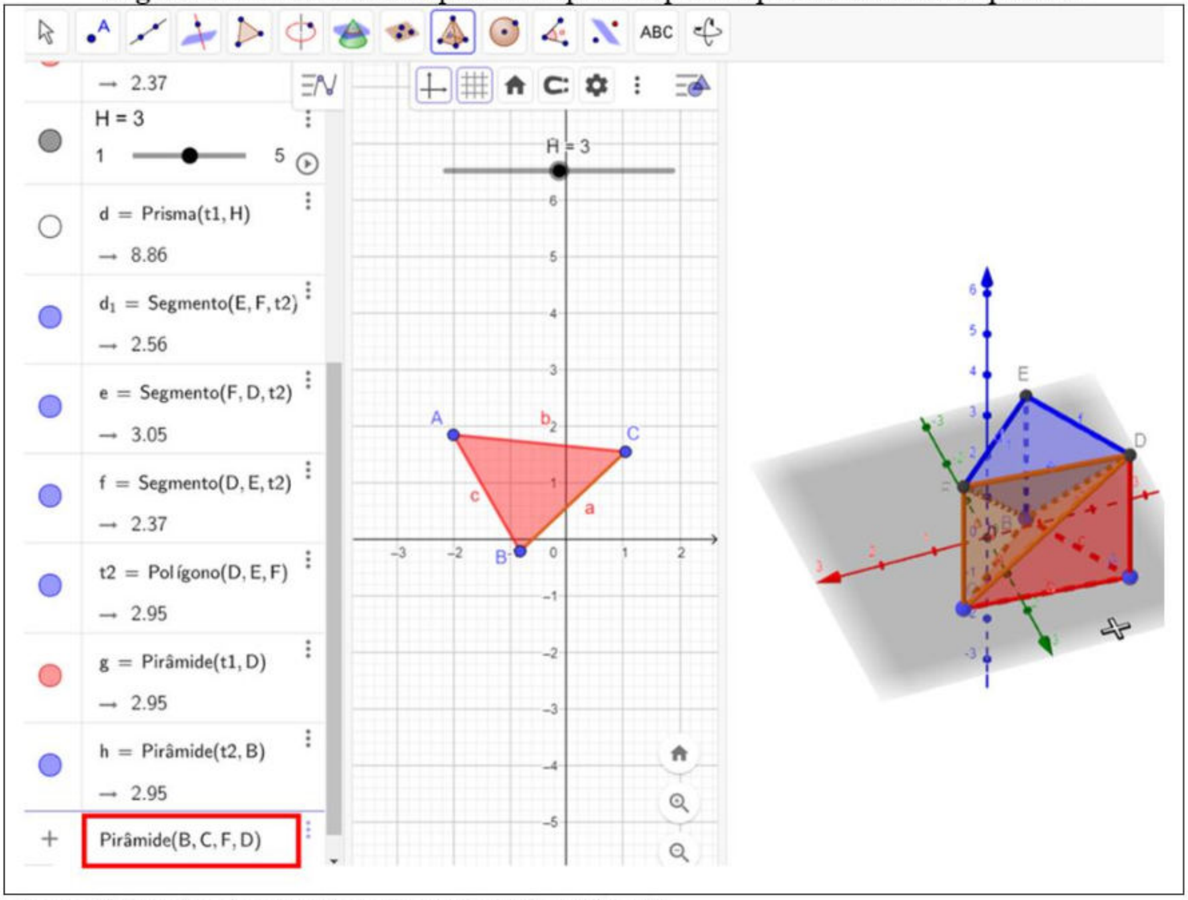


Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Nesse momento, é importante o professor verificar se os alunos percebem que uma pirâmide de base triangular se encaixa perfeitamente no espaço que falta para tornar o poliedro convexo. O procedimento para construção dessa pirâmide são conforme o Passo 3.

Passo 3) Na Caixa de Entrada, digitar o comando "Pirâmide(B,C,F,D)", para que seja criada a pirâmide que completa o preenchimento do prisma, como na Figura 56.

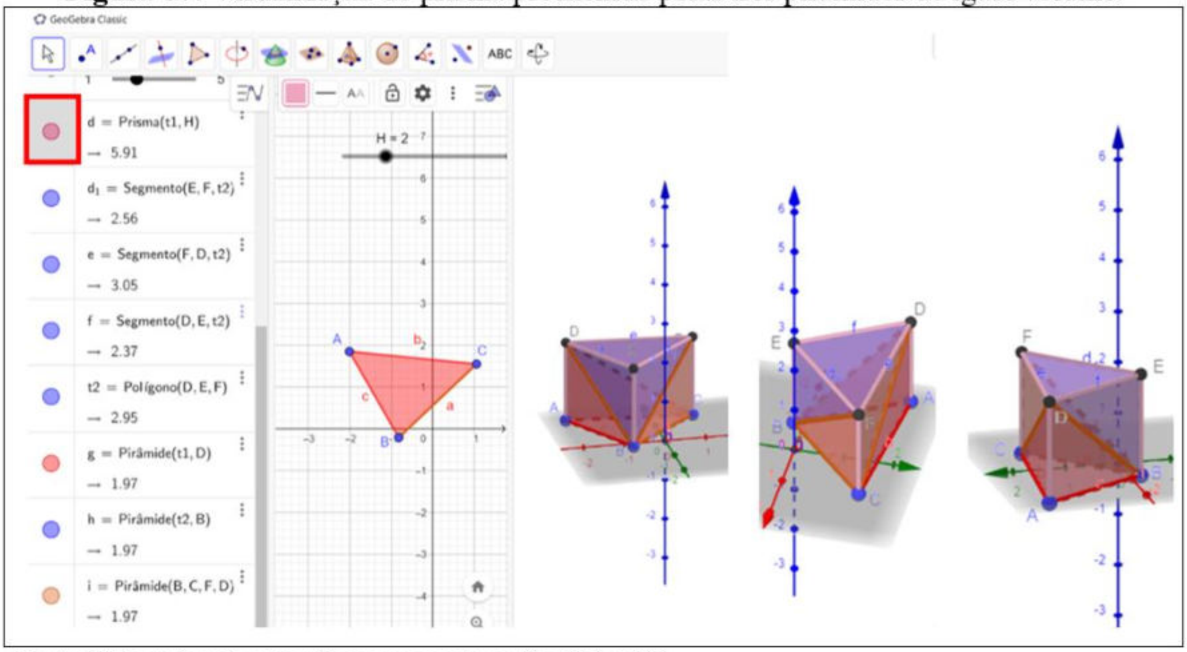
Figura 56: Construindo a pirâmide que completa o preenchimento do prisma.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Agora o elemento “d = Prisma(t1,H)” deve ser marcado novamente e a figura e a figura manipulada de modo que possa ser observada sob diversos ângulos, possibilitando a percepção de que a junção das três pirâmides coincide exatamente com o Prisma d, conforme Figura 57.

Figura 57: Visualização do prisma preenchido pelas três pirâmides de igual volume.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Geometricamente, já é possível convencer o aluno de que um prisma pode ser composto pela junção de três pirâmides de igual volume. Basta observar, na janela de Álgebra, a igualdade dos volumes de ambas as pirâmides, expressos à direita das setas, logo abaixo do nome do poliedro. Na Figura 57, o volume de cada pirâmide é 1,97 unidades cúbicas e o volume do prisma é 5,91 unidades cúbicas. Para uma comprovação algébrica, o professor deve solicitar aos alunos que efetuem a soma dos volumes das três pirâmides e comparem com o volume do prisma. Tudo deve ser devidamente registrado pelo aluno.

Como o volume das figuras está vinculado à altura H do controle deslizante, é importante que, acionando o controle deslizante, a altura seja alterada e essa comparação dos volumes realizada para diferentes alturas. O professor deve esclarecer aos alunos que possíveis divergências nos valores podem ocorrer porque o GeoGebra opera com aproximações, mas essas diferenças são mínimas e irrelevantes.

Feitos os devidos registros, o professor deve solicitar que os alunos calculem a razão entre o volume de uma pirâmide e o volume do prisma. No caso da Figura 57, o aluno deve realizar o cálculo

$$\frac{Volume\ do\ Prisma\ "d"}{Volume\ da\ Pirâmide\ "g"} = \frac{5{,}91}{1{,}97} = 3$$

Ao realizar os cálculos, é provável que o aluno perceba que, mesmo com as possíveis inexatidões, a razão procurada sempre igual a 3 ou, em raros casos, muito próxima desse valor. Daí, valendo-se da propriedade fundamental das proporções, deduz-se facilmente que

$$Volume\ da\ Pirâmide\ \mathrm{g} = \frac{1}{3}.Volume\ do\ Prisma\ "d"$$

Essa relação pode ser generalizada considerando-se o Princípio de Cavalieri, uma vez que, provada a validade para sólidos de base triangular, como acabamos de demonstrar, é possível que, para qualquer prisma p1, se construa um prisma p2 de mesma altura H e base triangular, de tal modo que a área da base de p1 seja igual à área da base de p2. Pelo Princípio de Cavalieri, os prismas p1 e p2 tem volumes iguais e, portanto, p1 também é composto por três pirâmides de volumes idênticos, sendo que, cada pirâmide de p1 tem volume exatamente igual ao volume de uma pirâmide de p2.

Desse modo, espera-se convencer o aluno de que, dada uma pirâmide qualquer e um prisma de mesma base e altura igual à altura da pirâmide, vale sempre a relação

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}.V_{Prisma}$$

Como o volume do prisma de altura H e área da base dada por A_{Base} é

$$V_{Prisma} = A_{Base}.H$$

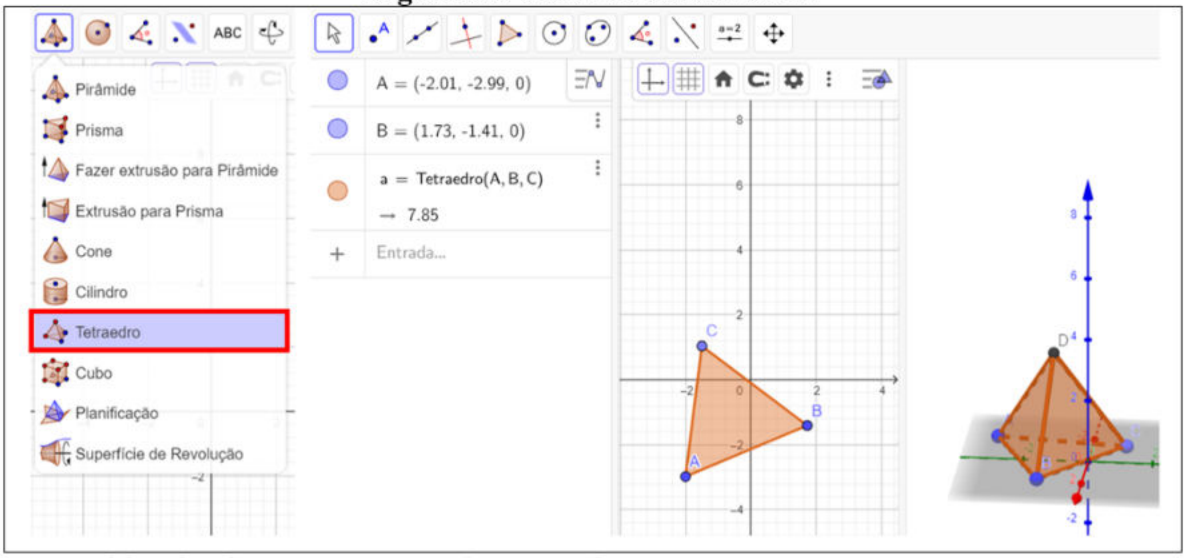
deduz-se que o volume da pirâmide altura H é dado pela relação

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}.A_{Base}.H$$

3.6 Tetraedro

Uma forma mais simples de se construir um tetraedro no GeoGebra é clicando na ferramenta “Tetraedro” e, em seguida, em dois pontos quaisquer sobre o plano da Janela de Visualização 3D. Será gerado o tetraedro de base ABC, como ilustrado na Figura 58.

Figura 58: Tetraedro de base ABC.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

É possível que pela visualização os alunos percebam que um tetraedro é um caso especial de pirâmide, mais especificamente, uma pirâmide de base triangular. Essa percepção é característica do Nível 1 (Visualização ou reconhecimento) do Modelo van Hiele. Contudo, é interessante que o professor solicite aos alunos que, manipulando a figura, analisem todas as faces e destaquem alguma característica especial verificada nessa figura. Importante recordar que uma figura semelhante já foi estudada, a exemplo da pirâmide triangular apresentada na Figura 56.

Valendo-se do conhecimento construído no estudo das pirâmides, é muito provável que, além da identificação dos elementos do tetraedro, o aluno também reconheça algumas das propriedades da figura e consiga argumentar sobre elas, demonstrando o avanço para o Nível 2 (Análise) de van Hiele. Importante o professor destacar que, se todas as faces são triângulos equiláteros, então esse tetraedro é dito regular e é também um dos cinco sólidos platônicos que serão abordados na seção 3.7.

Há de se esperar que esse estudo seja relativamente breve, uma vez que os alunos, conhecedores das formas piramidais, seus elementos, propriedades e relações, já detém, mesmo que implicitamente, o domínio de boa parte do conteúdo tetraedro. Desse modo, o professor deve encorajar e orientar seus alunos no sentido de, seguindo alguns dos passos descritos para o estudo das pirâmides, explorarem a figura tetraedro, realizando, por exemplo, planificações, alteração de medidas, calcular suas áreas e fazer comparações, dentre outras atividades indicadas pelo professor.

3.6.1 Elementos, área e volume do tetraedro

O aluno da EJA que detém o nível 1 de van Hiele consegue identificar os principais elementos de um tetraedro, perceber que sua base é triangular e criar uma imagem mental para o que seria sua altura simplesmente pela visualização da figura, mesmo sem perceber as propriedades desse sólido. Ao atingir o nível 2 de pensamento geométrico segundo a teoria de van Hiele, esse aluno passa a perceber as propriedades da figura e a classificá-la como um caso particular das pirâmides. Avançando para o nível 3, torna-se capaz de explicar com certo rigor a lógica usada para o cálculo da altura do tetraedro por meio de sucessivas aplicações do teorema de Pitágoras e também desenvolver bons argumentos para explicar o cálculo da área superfície e do volume de um tetraedro.

Para esse estudo, é suficiente tomar um tetraedro regular de aresta medindo “a” e, para facilitar esse estudo, sugere-se construir esse sólido no GeoGebra. Para visualizar o tetraedro por diferentes ângulos e poder manipular facilmente suas medidas e observar simultaneamente algumas de suas representações, sugere-se proceder como nos passos seguintes.

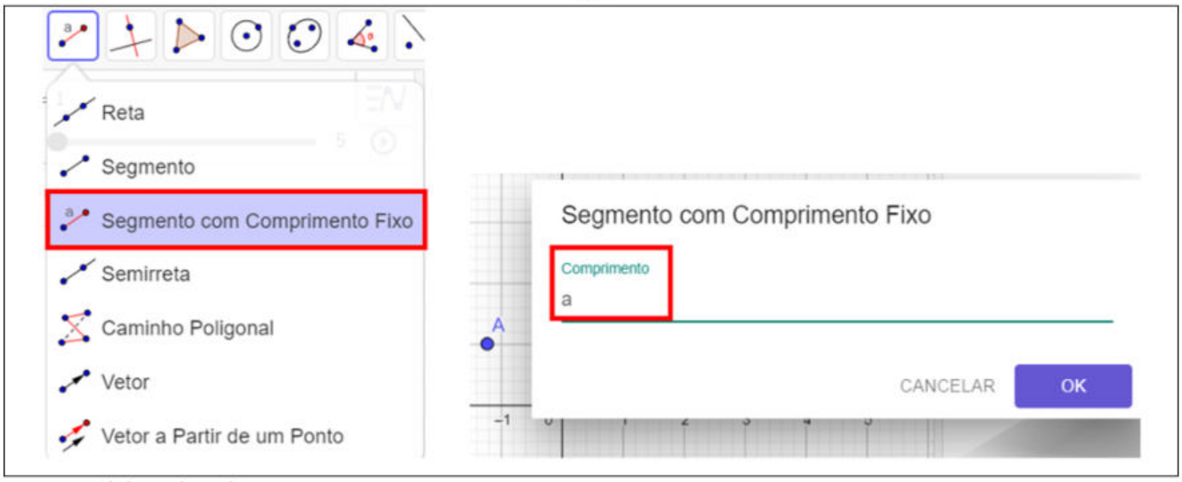
1) Para controlar a medida das arestas, deve-se criar um controle deslizante “a” e configurá-lo, sugestivamente, como na Figura 59.

Figura 59: Configuração do Controle Deslizante “a” a ser vinculado à aresta do tetraedro.

Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Clicar na ferramenta “Segmento de Comprimento Fixo” e em seguida em uma região qualquer da Janela 2D, preenchendo o campo “Comprimento” com o parâmetro “a”, como na Figura 60. Essa ação definirá uma aresta da base do tetraedro, vinculada ao controle deslizante.

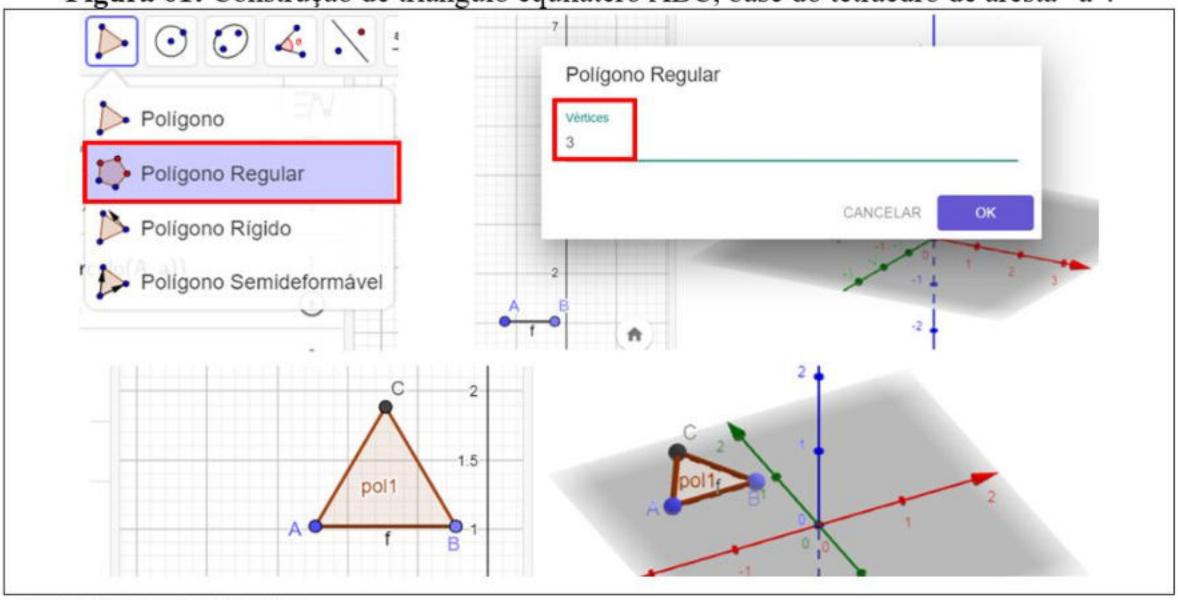
Figura 60: Construção de segmento de comprimento fixo vinculado ao Controle Deslizante “a”.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3) Para construir o triângulo equilátero que servirá de base para o tetraedro, deve-se clicar na ferramenta “Polígono Regular” e nos extremos A e B do segmento de comprimento fixo do passo anterior. Será criado o triângulo ABC, de lado medindo “a”, como na Figura 61.

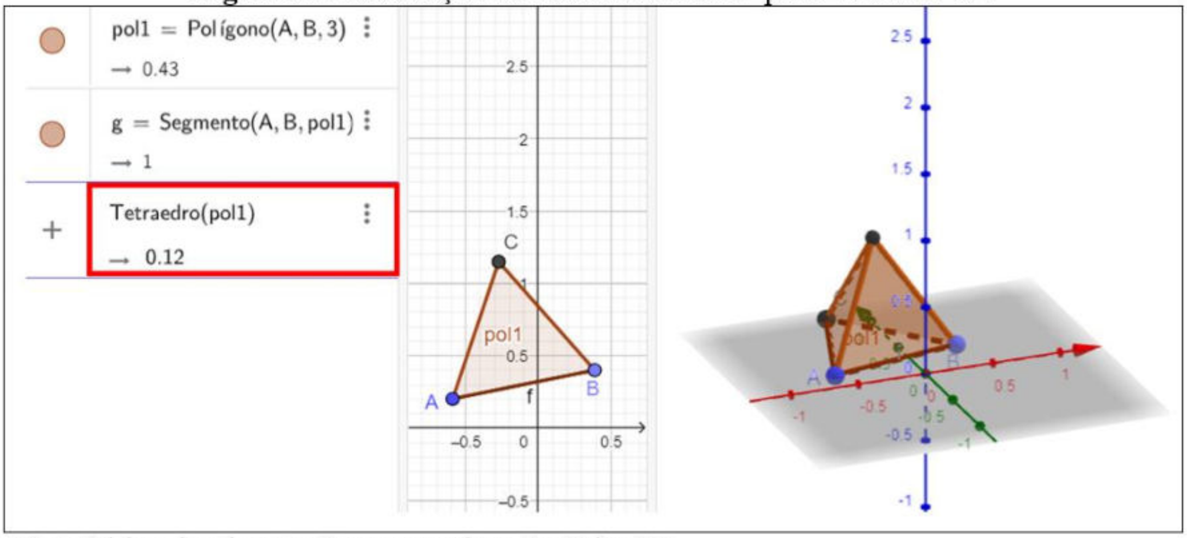
Figura 61: Construção de triângulo equilátero ABC, base do tetraedro de aresta “a”.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4) Para se construir o tetraedro de base “pol1” e aresta “a”, deve-se digitar, na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, o comando “Tetraedro(pol1)”. O sólido será gerado como na Figura 62. Essa ação definirá uma aresta da base do tetraedro, vinculada ao controle deslizante.

Figura 62: Construção do tetraedro de base “pol1” e aresta “a”.

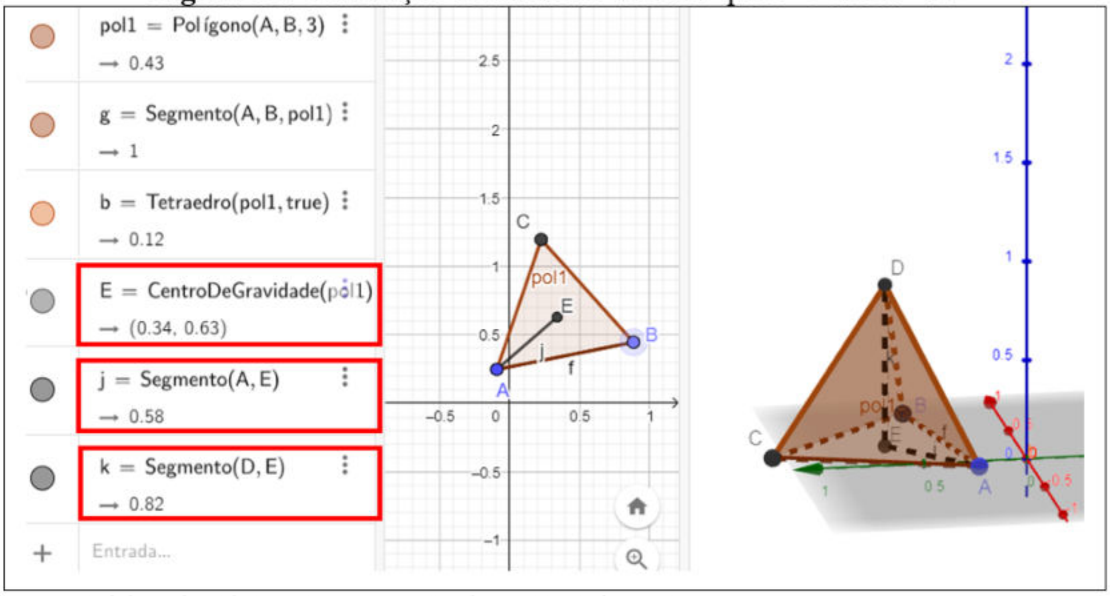


Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Embora o GeoGebra já apresente o volume do tetraedro, é importante que o aluno visualize os segmentos necessários para o cálculo algébrico. Para isso, deve-se proceder como se segue.

5) Digitar, na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, o comando “CentroDeGravidade(pol1)”, depois “Segmento(A,E)” e, finalmente, “Segmento(D,E)”, gerando os catetos do triângulo retângulo AED, como na Figura 63.

Figura 63: Construção do tetraedro de base "pol1" e aresta "a".

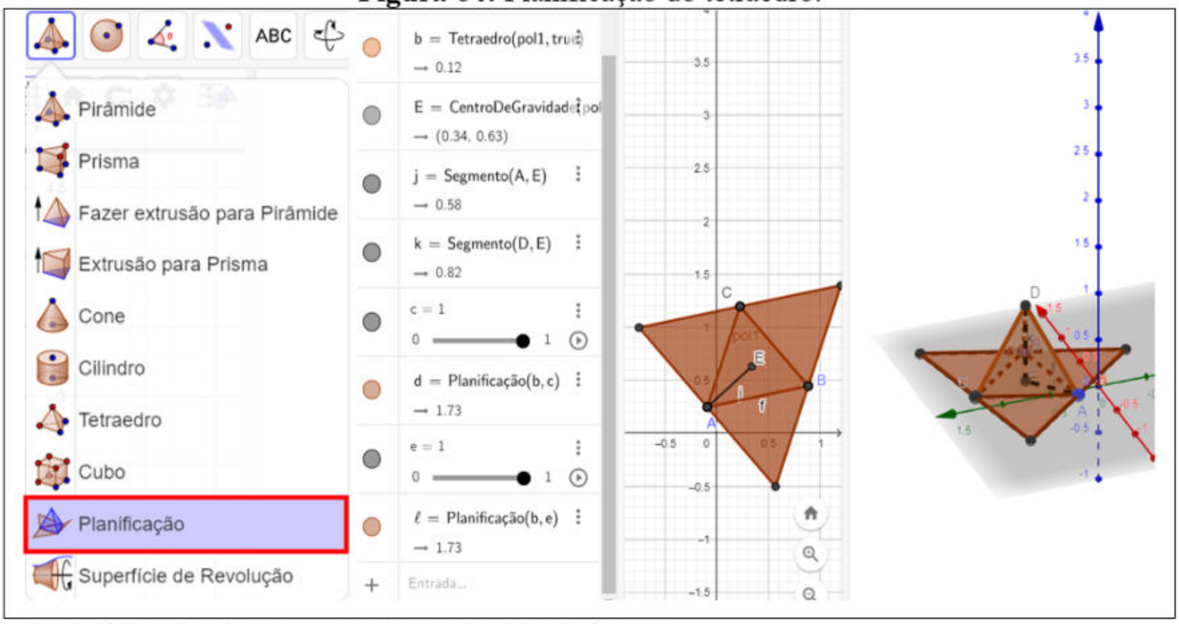


Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Convém relembrar que a medida do segmento $\overline{AE}$ equivale a dois terços da altura do triângulo equilátero ABC e essa altura o aluno já deve saber calcular. O segmento $\overline{DE}$ é a altura do tetraedro e pode ser calculada utilizando-se o teorema de Pitágoras.

Para facilitar a dedução da fórmula para o cálculo da área da superfície do tetraedro, o sólido deve ser planificado. Para tal, deve-se clicar na ferramenta "Planificação" e depois sobre o tetraedro, como na Figura 64.

Figura 64: Planificação do tetraedro.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

A partir dessas observações o aluno pode perceber que a área da superfície do tetraedro equivale a quatro vezes a área da base e o volume do tetraedro é igual a terça parte do produto da área da base pela altura do sólido. O professor pode direcionar o aluno na expectativa de que ele deduza que a área e o volume do tetraedro regular são, em função da medida da aresta, dados, respectivamente, pelas expressões

$$A = a^2\sqrt{3}$$

e

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Diante da realidade da EJA, não há necessidade de avançar nesse assunto muito além do que foi sugerido aqui e é provável que nem sempre o professor terá disponibilidade de tempo para explorar todas essas sugestões. Fica a critério de cada professor decidir o que e como abordar cada assunto tratado aqui.

3.7 Poliedros regulares

Para introduzir o assunto, o professor deve esclarecer que esse estudo vai tratar de poliedros convexos e que, dentre eles, existem apenas cinco poliedros regulares, também chamados de poliedros de Platão ou poliedros platônicos e que serão esses os sólidos geométricos abordados nesse tópico.

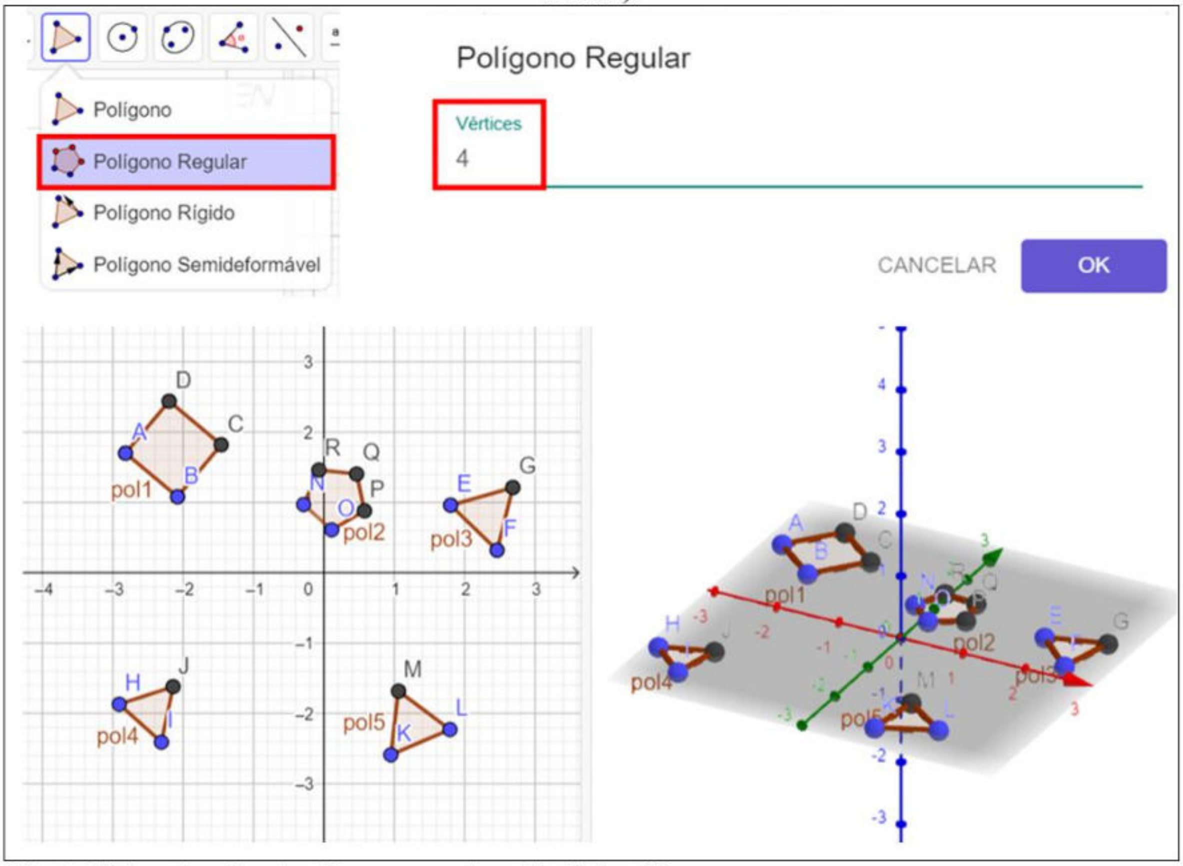
Como complemento ao uso de materiais manipuláveis, figuras e ao material teórico e outros adotados pelo professor, propõe-se aqui a exploração das ferramentas do GeoGebra, de modo que o aluno participe do processo de construção da representação figural desses sólidos e vá percebendo, de forma prática e dinâmica, seus elementos, propriedades e relações. Embora esse primeiro momento esteja mais voltado para o reconhecimento das formas, o vocabulário específico para o estudo já pode ser introduzido, para que o aluno desenvolva a capacidade de relacionar elementos e propriedades às figuras. O reconhecimento das figuras pela aparência de suas formas e a identificação de seus elementos, tais como faces, vértices e arestas e caracteriza o Nível 1 (Visualização ou reconhecimento) da teoria de desenvolvimento do pensamento geométrico segundo van Hiele.

Do ponto de vista pedagógico, o dinamismo do GeoGebra destaca-se como um estímulo ao estudo desses objetos, facilitando a identificação de propriedades e o desenvolvimento da capacidade de perceber a existência de elementos implícitos da figura, tais como suas diagonais, ângulos, dentre outros, de modo a promover o desenvolvimento da abstração e o consequente avanço para níveis superiores de pensamento.

Especificamente para o estudo dos poliedros regulares, sugere-se a construção e manipulação dos cinco poliedros de Platão, valendo-se do auxílio do GeoGebra, conforme os passos a seguir.

Passo 1. Na Janela de visualização 2D, o aluno deve criar um quadrado, um pentágono regular e três triângulos regulares distintos. Recomenda-se manter um bom distanciamento entre as figuras, para melhor visualização durante as atividades posteriores. Todos esses polígonos podem ser construídos clicando-se na ferramenta “Polígono Regular” e em dois pontos distintos da Janela de visualização. Na caixa de diálogo que se abre, preencher o campo “Vértices” com o número de vértices do polígono desejado, ou seja, 3 para cada um dos três triângulos, 4 para o quadrado e 5 para o pentágono. Feito isso, serão apresentadas na tela representações como as da Figura 65.

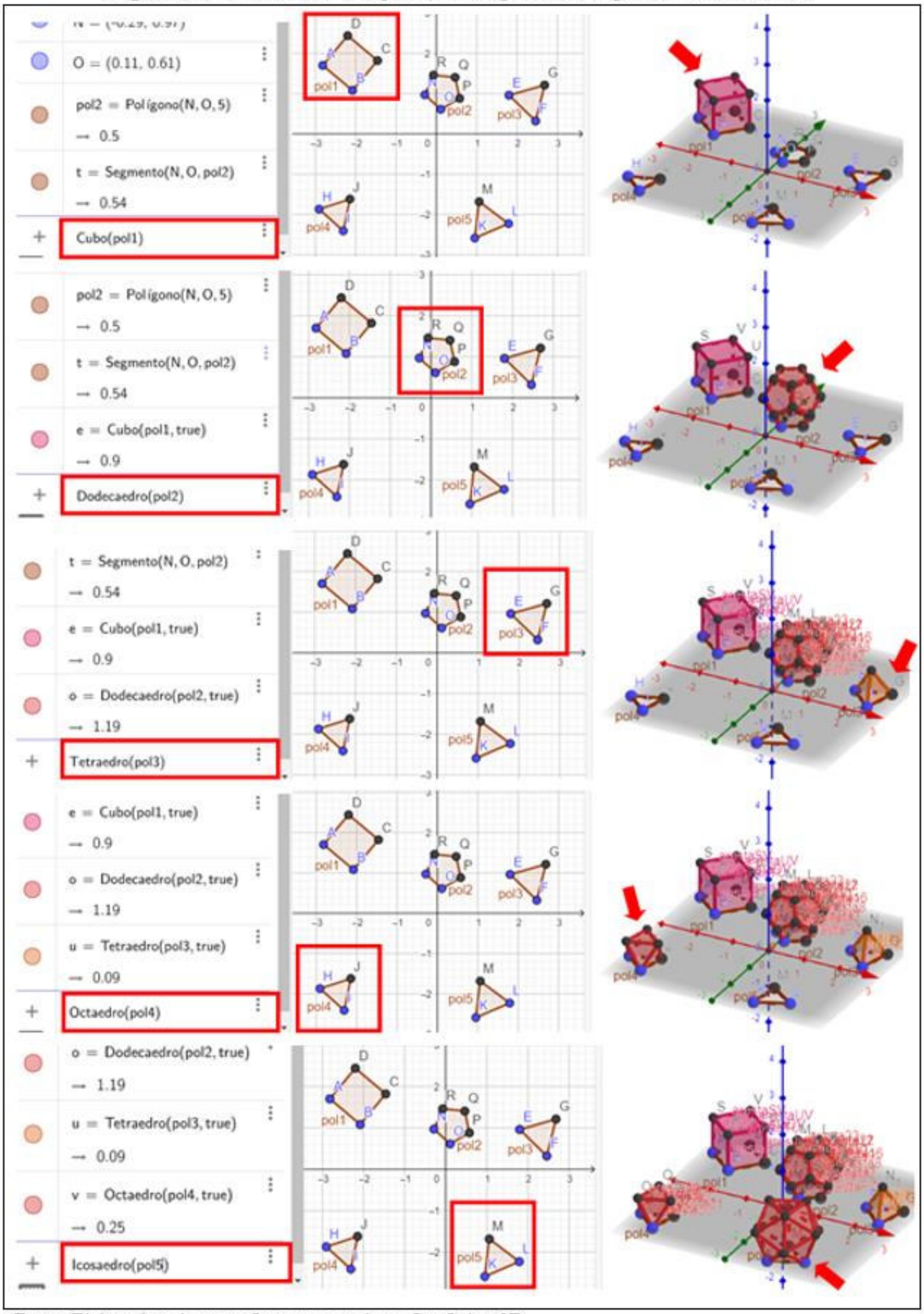
Figura 65: Construção dos polígonos base para os poliedros regulares (ou poliedros de Platão).



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Para a construção dos cinco poliedros de Platão, partindo desses polígonos (Figura 65), sugere-se que, na Caixa de Entrada, se digite os comandos específicos para cada figura, como segue: para criar o cubo, deve-se digitar, o comando “Cubo(pol1)”; para a construção do dodecaedro, digitar o comando “Dodecaedro(pol2)”; para o tetraedro, digitar “Tetraedro(pol3); para o octaedro, o comando “Octaedro(pol4) e, finalmente, digitar o comando “Icosaedro(pol5)” para criar o icosaedro, como na Figura 66.

Figura 66: Construção dos poliedros regulares (ou poliedros de Platão).

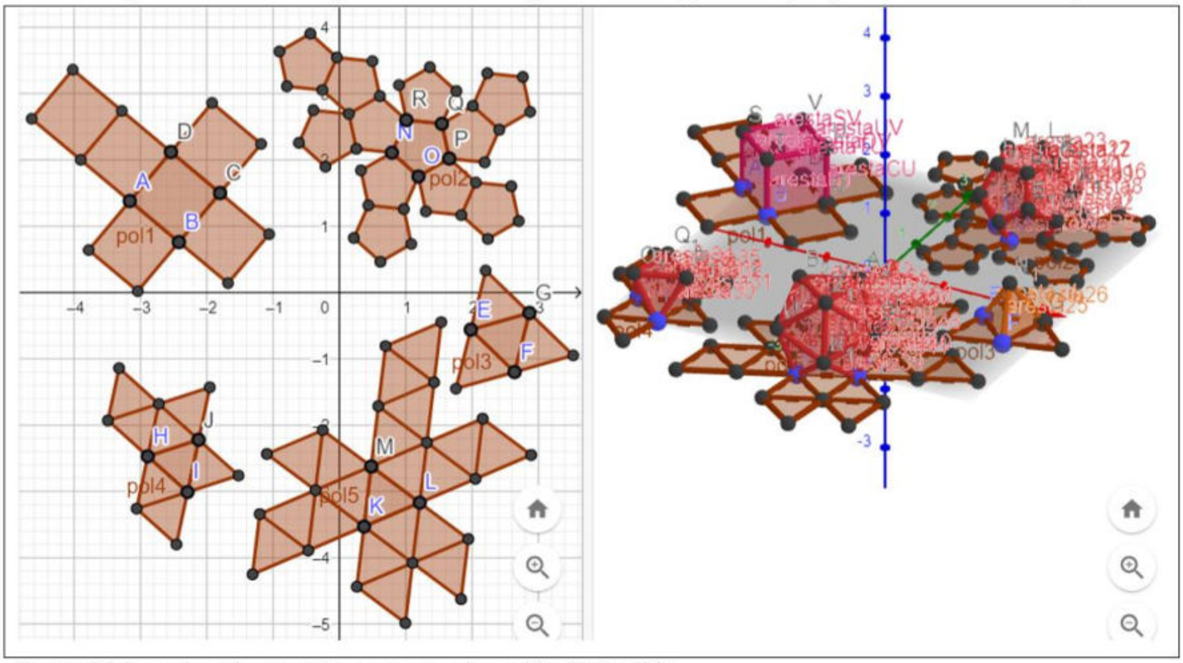


Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

3.7.1 Forma planificada dos poliedros regulares

Construídos os poliedros, como na Figura 66, o professor deve solicitar aos alunos que manipulem atentamente as figuras e anotem suas observações. Nesse momento, o aluno pode, inclusive, clicar na ferramenta “Planificação” e em seguida em cada um dos poliedros, obtendo o resultado mostrado na Figura 67. Isso possibilitará observações importantes, como, por exemplo, a diferenciação das figuras pela sua forma planificada e a identificação da quantidade de faces de cada poliedro.

Figura 67: Forma planificada dos poliedros regulares (ou poliedros de Platão).



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Interessante notar que o processo de planificação disponibiliza controles deslizantes independentes, cada um vinculado a uma das figuras, possibilitando ao aluno manipular um sólido por vez e observar separadamente o que ocorre durante esse processo.

3.7.2 Poliedros de Platão e a Relação de Euler

Visando facilitar o reconhecimento das relações e propriedades desses sólidos, sugere-se que o professor solicite aos alunos que, valendo-se do recurso da manipulação oferecido pelo

GeoGebra 3D, façam o registro de alguns dados em especial, como os apresentados na Tabela 5.

Tabela 5: Registro sobre os elementos observados nos poliedros de Platão

Poliedro	Polígono da face	Núm. faces	Núm. vértices	Núm. arestas
Hexaedro (Cubo)	*Quadrado*	*6*	*8*	*12*
Dodecaedro	*Pentágono regular*	*12*	*20*	*30*
Tetraedro	*Triângulo equilátero*	*4*	*4*	*6*
Octaedro	*Triângulo equilátero*	*8*	*6*	*12*
Icosaedro	*Triângulo equilátero*	*20*	*12*	*30*

Fonte: Próprio autor

Preenchida a Tabela 5, o professor deve direcionar a análise e discussão desses dados, na expectativa de que, diante dessa análise e da observação das figuras, os alunos consigam criar conjecturas e tirar conclusões importantes para a dedução da Relação de Euler, ou, ao menos, sejam capazes de compreender essa relação de maneira significativa. Essa intervenção intencional do professor caracteriza, segundo a teoria de van Hiele, uma das fases de transição para níveis superiores de pensamento geométrico, devendo ser cuidadosamente planejada para que esse aluno seja, sutilmente e com certa autonomia, induzido a perceber essa importante relação e valer-se dela para resolver problemas.

Nesse estágio, o aluno deve ser capaz de compreender as afirmações seguintes e associar imagens mentais a elas, demonstrando a capacidade de abstração. Esse avanço é muito significativo quando se desenvolve na EJA um trabalho diferenciado como esse, onde se procura respeitar os ritmos de aprendizagem e explorar as peculiares do aluno jovem e adulto em prol da educação, primando pelo avanço nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de acordo com o Modelo van Hiele.

Teorema 6.1: (Relação de Euler): Em todo poliedro convexo é válida a relação

$$V + F = A + 2 \text{ ou seja, } V - A + F = 2.$$

Definição 6.1 (poliedros platônicos): Diz-se que um poliedro é platônico se, e só se, é convexo, em todo vértice concorre o mesmo número de arestas, toda face tem o mesmo número de arestas e é válida a Relação de Euler.

Finalmente, o aluno pode confrontar essas informações com as figuras geradas no GeoGebra, de modo a sentir-se convencido de sua veracidade.

3.8 Cilindro

Considerando-se dois planos distintos e paralelos α e β, assim como mencionado no estudo dos prismas, tomemos sobre esses planos duas regiões circulares (círculos) c_1 e c_2, de raios congruentes e centros O_1 e O_2. Traçando-se o segmento de reta $\overline{O_1O_2}$, o conjunto que esse segmento e todos os segmentos de reta paralelos a ele e cujas extremidades pertencem aos círculos c_1 e c_2 é denominado cilindro de bases c_1 e c_2.

Um modo simples de se construir um cilindro reto no GeoGebra 3D, de modo que sua altura e o raio da base possam ser facilmente manipulados, é proceder como nos passos a seguir.

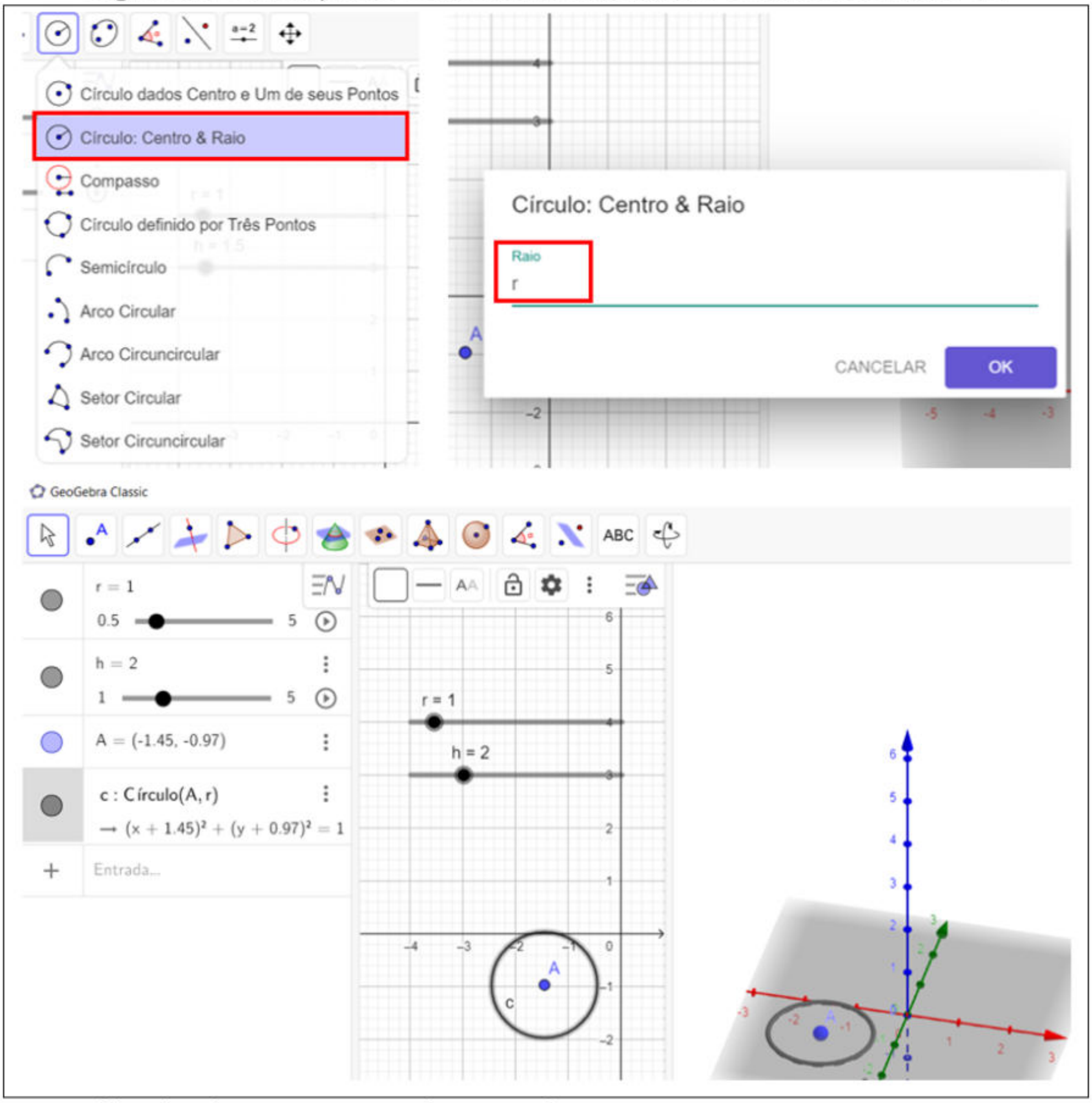
1) Inicialmente, deve-se criar dois controles deslizantes e ao configurá-los, renomear cada um deles como r e h, respectivamente, além de alterar os valores, como na Figura 68.

Figura 68: Configuração dos controles deslizante vinculados ao raio e altura do cilindro.

Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Como base para o cilindro, deve-se construir um círculo com raio vinculado ao controle deslizante r. Para isso, deve-se clicar na ferramenta “Círculo: Centro & Raio” e em um ponto qualquer da Janela 2D. Abrirá uma caixa de diálogo na qual deve-se preencher o campo “Raio” com o parâmetro r e clicar OK, para que seja gerada a imagem como na Figura 69.

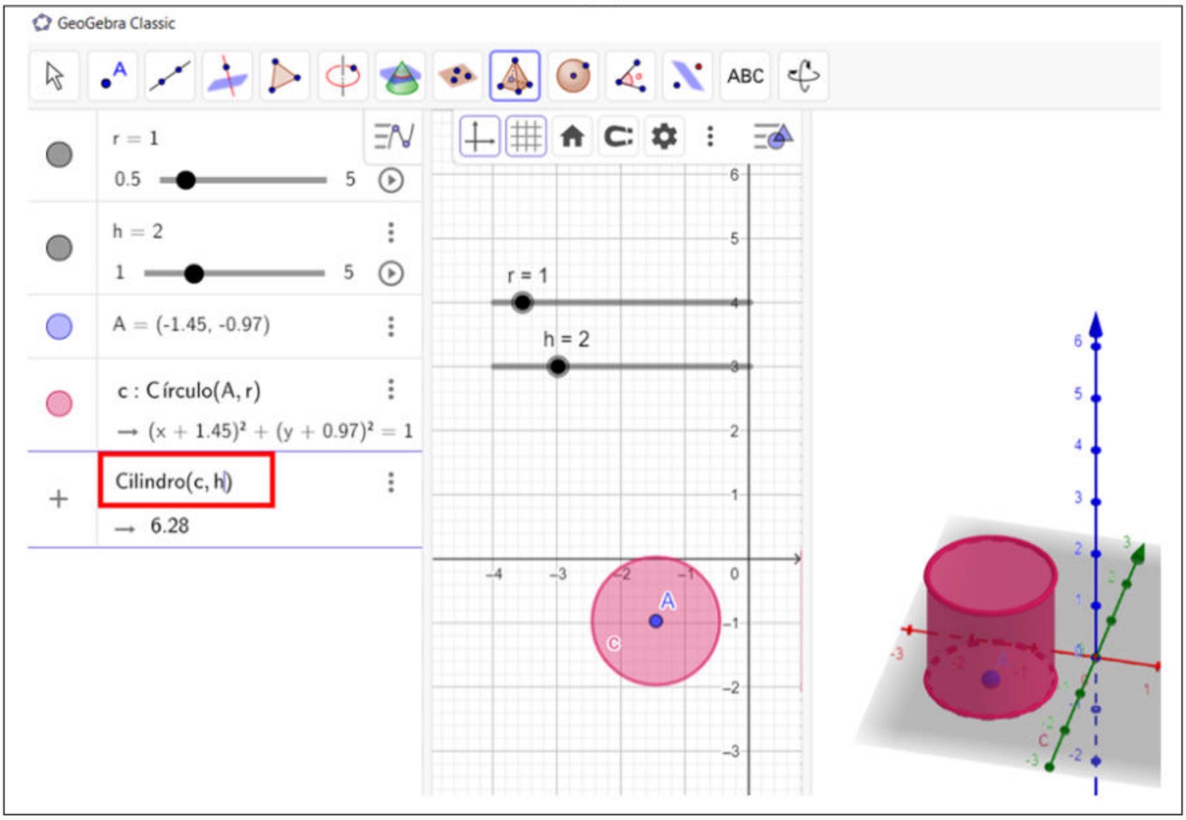
Figura 69: Construção do círculo de raio vinculado ao Controle Deslizante “r”.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

3) Uma vez construído o círculo “c” da base, o cilindro pode ser construído a partir dele e, para maiores possibilidades de manipulações, sugere-se que sua altura seja vinculada ao controle deslizante h. Desse modo, para que esse cilindro seja gerado deve-se digitar, na caixa de Entrada da Janela de Álgebra, o comando “Cilindro(c, h)”, como ilustrado na Figura 70.

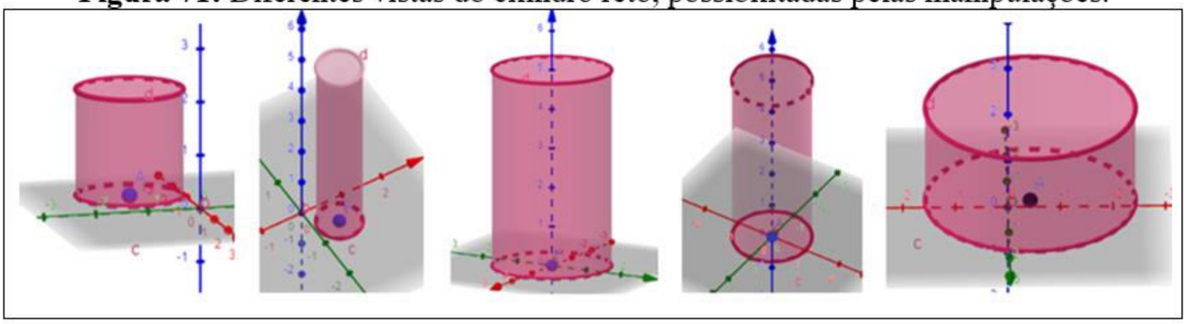
Figura 70: Construção do cilindro de base "c" e altura vinculada ao Controle Deslizante "h".



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Concluído esse processo de construção, o aluno deve ser instruído a manipular a figura por meio dos controles deslizantes e também de movimentos na tela, de modo a observar diferentes figuras e por diversos ângulos, como ilustrado na Figura 71.

Figura 71: Diferentes vistas do cilindro reto, possibilitadas pelas manipulações.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

3.8.1 Elementos do cilindro e classificação dos cilindros

Comparando-se os cilindros com os prismas da Figura 20 (página 83), percebe-se que, semelhantemente aos prismas, os cilindros têm duas bases paralelas e uma superfície lateral. A principal diferença é que as bases são circulares e não poligonais, ao passo que a superfície lateral não é composta de polígonos, mas de uma superfície curva.

As bases são duas regiões circulares de mesmo raio, situadas em planos distintos e paralelos. Assim como nos prismas, a altura do cilindro é a distância entre os planos que contêm suas bases. Sendo C_1 e C_2 os centros dos círculos das bases, a reta $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ é chamada "eixo" do cilindro.

Os segmentos paralelos à reta $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ e que estão situados na superfície do cilindro são chamados "geratrizes".

Semelhantemente aos prismas, os cilindros são classificados em retos e oblíquos. Um cilindro é reto quando seu eixo é perpendicular aos planos de suas bases. Caso contrário, o cilindro é dito oblíquo. Devido ao pouco tempo disponível em sala de aula e à pouca relevância desse assunto para o aluno da EJA, o professor deve fazer uma abordagem superficial, apenas a título de conhecimento, sem delongas. Basta que sejam apresentadas algumas figuras e/ou sólidos manipuláveis para uma breve discussão e seguir para assuntos mais relevantes para o estudo proposto.

3.8.2 Área da superfície lateral e área total do cilindro

A versão do GeoGebra utilizada nesse trabalho não dispõe da ferramenta para planificação de corpos redondos, por isso, não é possível obter as áreas do cilindro utilizando-se desse recurso, como foi sugerido no estudo dos prismas e pirâmides. No entanto, com os conhecimentos de Geometria Plana e as experiências do cotidiano que se pressupões que o aluno da EJA traga consigo, é provável que esse aluno não encontre dificuldades em compreender que a superfície do cilindro, embora seja cura, pode ser representada na forma de uma figura plana retangular, cuja medida da base equivale ao perímetro do círculo da base e a altura é a mesma do cilindro.

Considerando-se que o aluno, conhecendo as medidas do raio r da base e a altura h do cilindro, saiba calcular o comprimento de um círculo, o professor pode, valendo-se da planificação de materiais manipuláveis, tais como tubos flexíveis, por exemplo, auxiliar o aluno na dedução da área lateral do cilindro, levando-o à compreensão de que essa área, denotada por A_l, pode ser calculada por meio da relação

$$A_l = 2\pi r.h$$

Nessas condições, e auxiliado pelas visualizações proporcionadas pelo GeoGebra, esse aluno consegue ainda calcular a área de uma base do cilindro, dada por

$$A_b = \pi r^2$$

e deduzir que a área total da superfície do cilindro pode ser obtida pela relação

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r.h$$

Embora não haja necessidade prática, o professor pode optar por um maior rigor matemático, solicitando aos alunos que melhorem esteticamente essa relação por meio da evidenciação dos termos semelhantes, visando obter uma relação equivalente do tipo

$$A = 2\pi r(r + h)$$

3.8.3 Volume do cilindro

Conhecendo a lógica para o cálculo do volume de um prisma e percebendo algumas propriedades comuns entre cilindros e prismas, é provável que o aluno deduza que o cálculo do volume de um cilindro segue a mesma lógica, diferindo apenas pela forma de se calcular as áreas das bases. Contudo, o professor pode valer-se do Princípio de Cavalieri para convencer esse aluno, bastando para isso proceder como nos passos que se seguem.

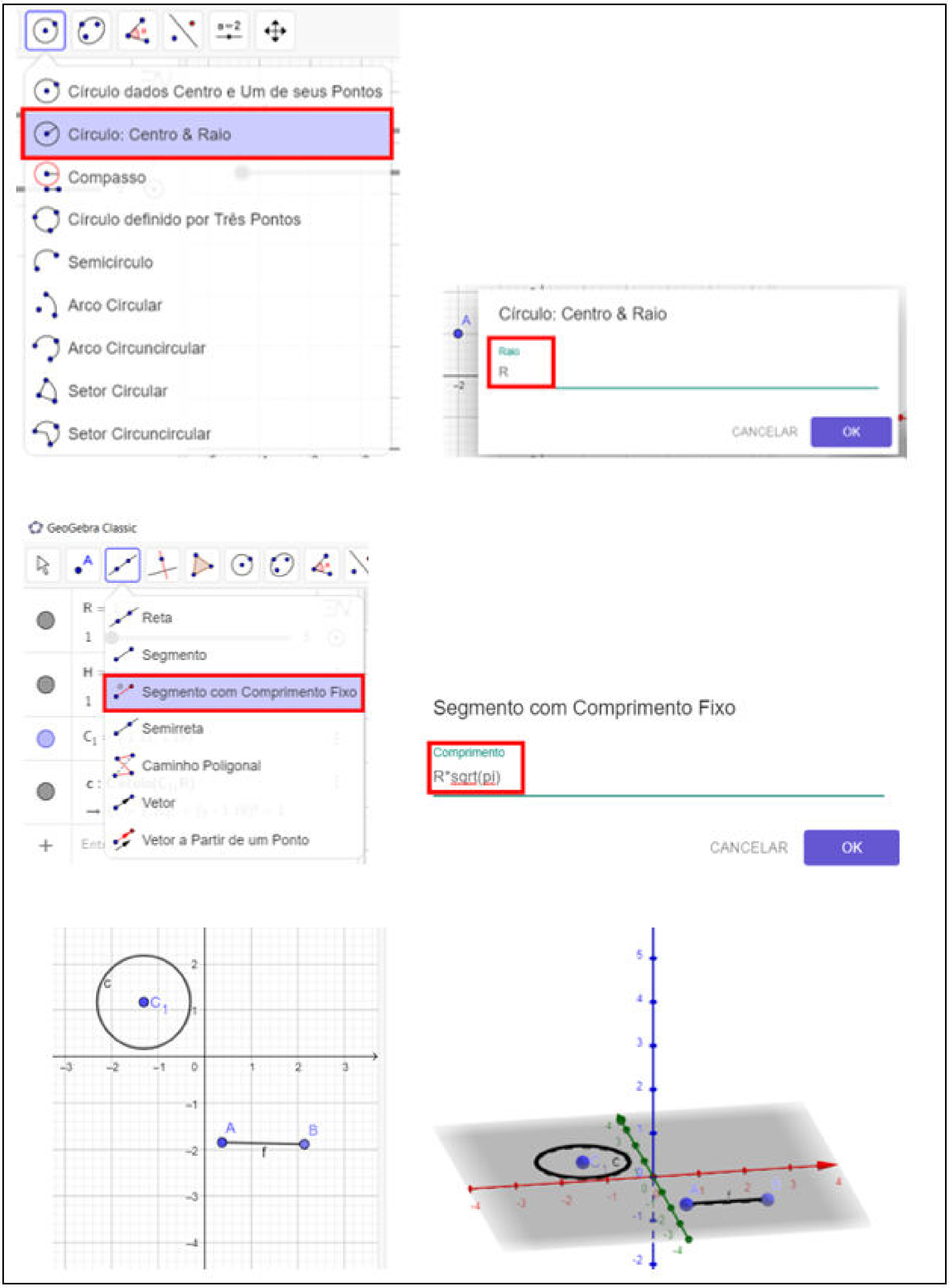
1) Criar dois controles deslizantes, “R” e “H”, e configurá-los como na Figura 72.

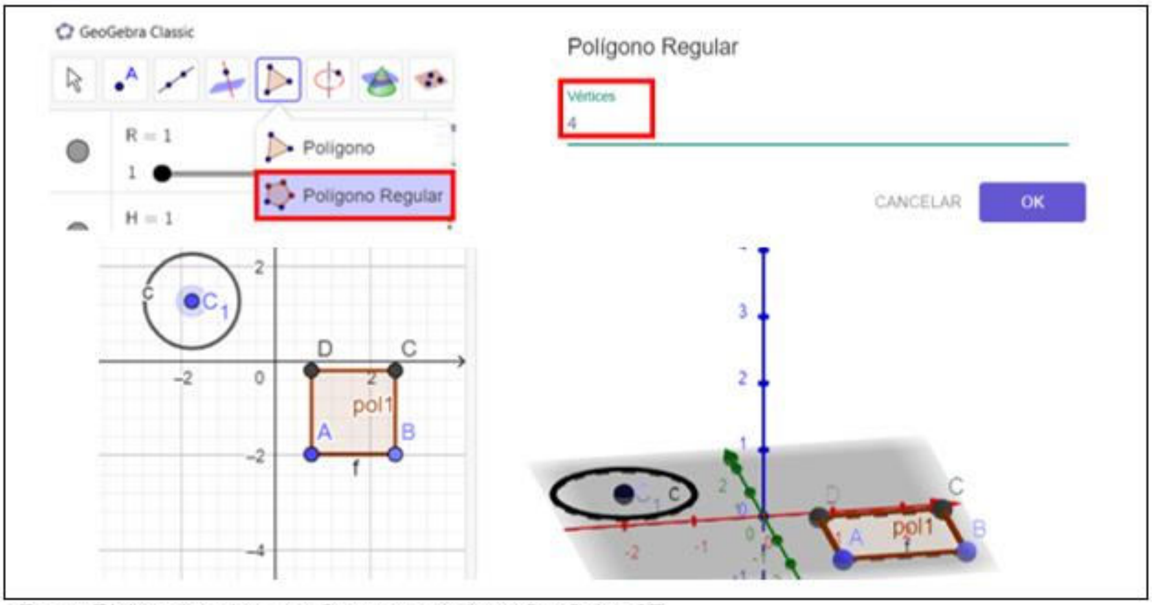
Figura 72: Configuração dos controles deslizantes “R” e “H”.

Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Clicar na ferramenta “Círculo: Centro & Raio” e em uma região qualquer da Janela 2D, preenchendo o campo Raio da caixa de diálogo com o parâmetro “R” e clicando OK. Em seguida, clicar na ferramenta “Segmento com Comprimento Fixo” e em outra região da Janela 2D, preenchendo o campo “Comprimento” da caixa de diálogo com o comando “R*sqrt(pi) e clicar OK. Finalmente, clicar na ferramenta “Polígono Regular” e nos pontos A e B, extremos do segmento construído. Finalizar preenchendo o campo “Vértices” da caixa de diálogo com o numeral 4 (quatro). Desse modo, serão geradas a base circular de um cilindro e a base quadrada de um prisma, ambas as bases de mesma área, como ilustrado na Figura 73.

Figura 73: Construção de círculo e polígono de mesma área vinculados ao Controle Deslizante "R".

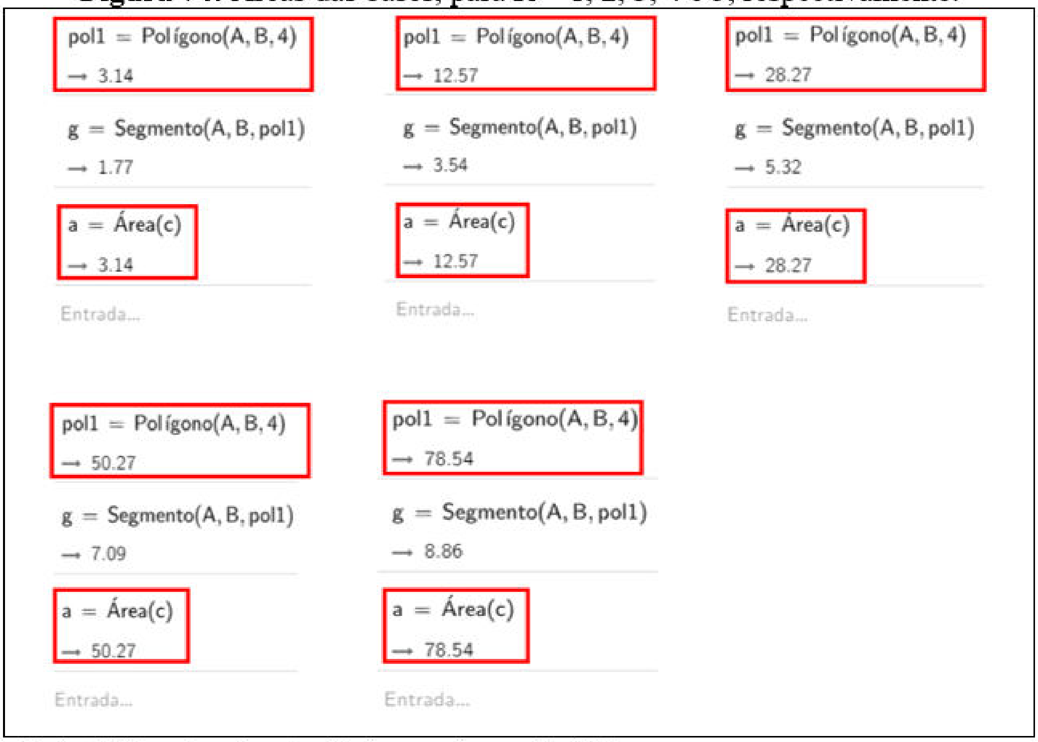




Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

2) Para dar ao aluno a certeza de que a igualdade das áreas do cilindro e do polígono da Figura 7.6 será preservada durante as manipulações, deve-se digitar, na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, o comando "Área(c)" e manipular o controle deslizante, comparando valores dos campos referentes às áreas das duas figuras. O elemento "pol1" representam o polígono com sua área e o elemento "a" representa a área do círculo c, como na Figura 74.

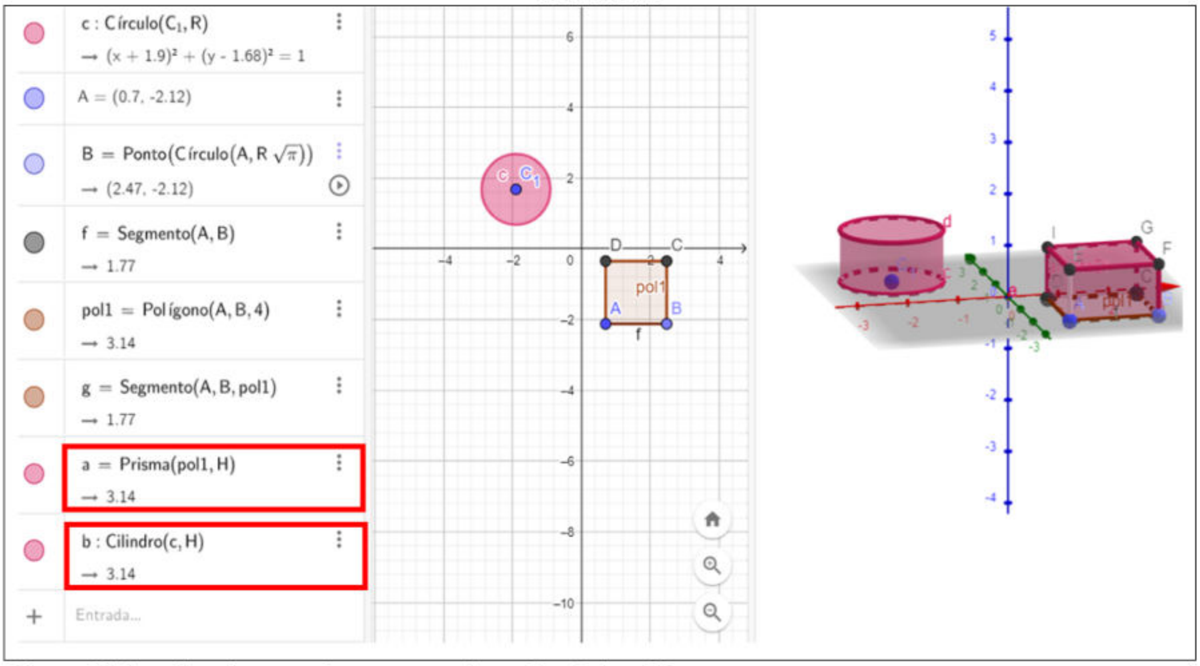
Figura 74: Áreas das bases, para R = 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor. Dados gerados no GeoGebra.

4) Construir, no GeoGebra 3D, um prisma de base “pol1” e um cilindro de base “c”, ambos com alturas vinculadas ao controle deslizante “H”. Para isso, deve-se digitar, na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, os comandos “Prisma(pol1,H)” e “Cilindro(c,H)”. Interessante destacar que os volumes dos dois sólidos são iguais, como na Figura 75.

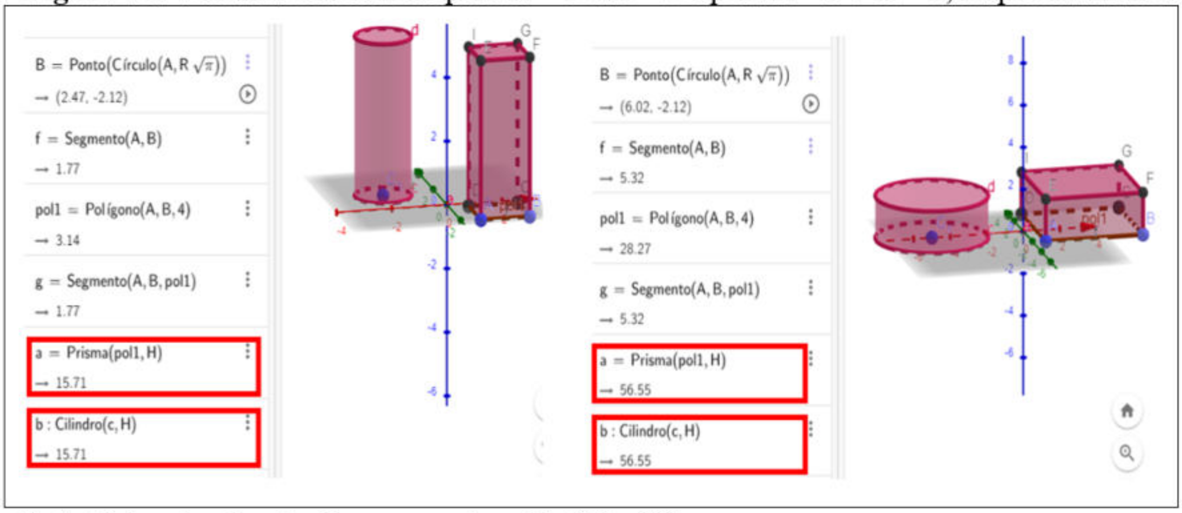
Figura 75: Sólidos auxiliares para dedução do volume do cilindro pelo Princípio de Cavalieri.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Importante mostrar para os alunos que, para qualquer raio r ou altura H, o dado numérico que representa o volume do cilindro é sempre igual ao que representa o volume do prisma, com uma possível, mas desprezível divergência decorrente das aproximações. Isso pode ser verificado facilmente manipulando-se os controles deslizantes, a exemplo do ilustrado na Figura 76.

Figura 76: Volumes dos sólidos para R = 1 e H = 5 e para R = 3 e H = 2, respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Partindo dessas constatações, o professor pode direcionar o aluno na intenção de que, fundamentado no Princípio de Cavalieri, ele venha a deduzir que o cálculo do volume do cilindro é, a exemplo do volume do prisma, dado pelo produto da área da base pela altura, ou seja, esse volume é dado pela relação

$$V = \pi r^2 . h$$

Nesse estágio, o aluno que demostra a compreensão desse conteúdo e consegue elaborar argumentos lógicos para explica-lo terá avançado ao menos para o nível 3 de van Hiele, o que já é bastante satisfatório, considerando-se o perfil do aluno da EJA, não no sentido de capacidade intelectual, mas de oportunidades e perspectivas, principalmente por se tratar de alunos há tempos fora do ambiente escolar e com objetivos educacionais diversos aos objetivos de um aluno do Ensino Regular.

3.9 Cone

Pelas suas experiências práticas, o aluno da EJA é capaz de conceber o cone como um objeto com uma base plana circular e uma ponta, criando uma imagem mental para distingui-lo de outros sólidos. Provavelmente uma associação recorrente do nome cone a alguma imagem mental diz respeito aos cones de sinalização de trânsito. Alguns podem perceber a semelhança da figura com um funil, uma casquinha de sorvete, um chapeuzinho de aniversário ou outros objetos com forma geométrica parecida. Por isso, é importante que o professor disponibilize imagens como as da Figura 77.

Figura 77: Objetos que lembram um cone.

Fonte: https://www.passeidireto.com/pergunta/65721231/4-objetos-que-lembram-o-cone

Já tendo estudado sobre outros sólidos geométricos, é possível que esse aluno consiga perceber algumas semelhanças do cone com o cilindro, pelo formato da base e também com a pirâmide, por ter apenas um vértice fora da base. É provável que desenvolva ainda uma noção de como calcular a altura do cone, ou ao menos percebê-la intuitivamente. Essa percepção, com certeza, trará contribuições importantes para a dedução do volume do cone e demonstram que esse aluno detém o nível 1 (reconhecimento) de van Hiele.

Ao observar figuras e manipular objetos concretos ou virtuais, esse aluno avança nas fases de desenvolvimento do pensamento geométrico, passando a perceber algumas propriedades do cone. Com uma abordagem adequada, priorizando o respeito aos níveis de pensamento dos alunos e a valorização de suas experiências, os conhecimentos são construídos gradualmente e a aprendizagem se torna prazerosa e significativa para o aluno.

Nesse sentido, propõe-se que ao mesmo tempo que figuras e materiais manipuláveis são disponibilizados aos alunos, sejam também propostas atividades de construção, manipulação e análise desse sólido no GeoGebra.

As sugestões que se seguem são instruções, passo a passo, para a construção de cones no GeoGebra 3D, de tal modo que seus principais elementos possam ser visualizados sob diferentes ângulos.

1) Para construir um cone de altura h e base circular de raio r, de modo que essas medidas possam ser facilmente manipuladas, deve-se iniciar pela criação de dois controles deslizantes, configurando-os como destacado na Figura 78.

Figura 78: Configuração dos Controles Deslizantes "r" e "h", para raio e altura do cone.

Fonte: Elaborada pelo autor.

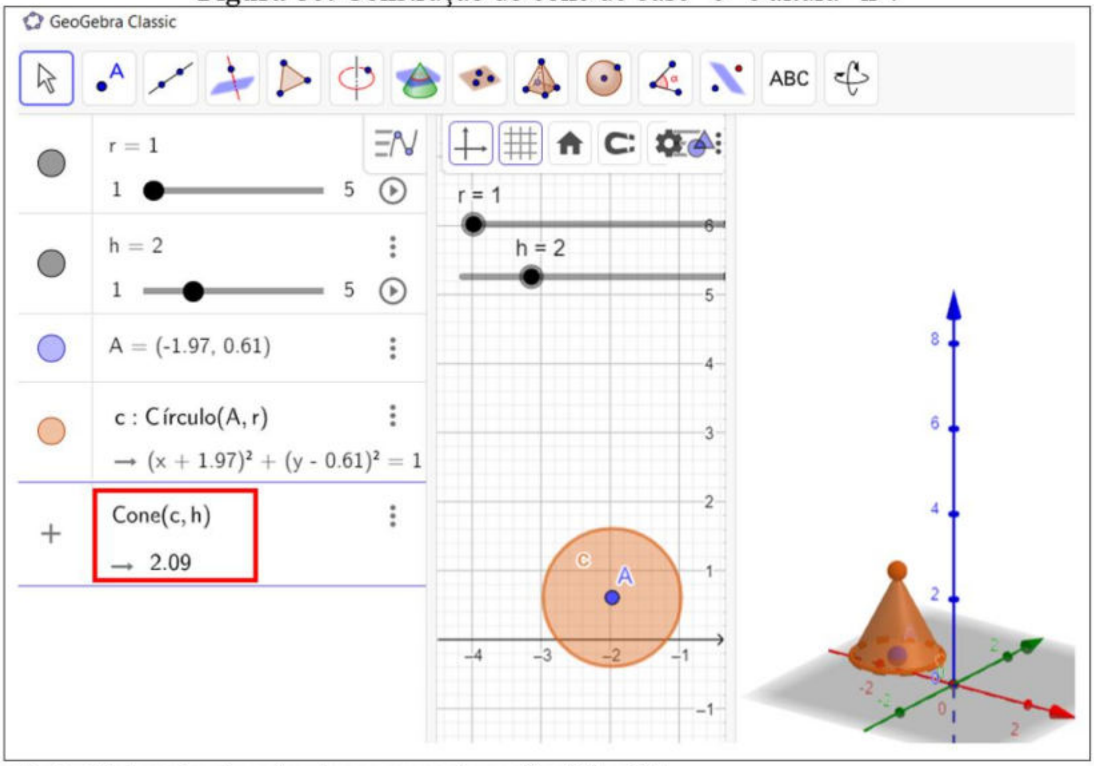
2) Para a base do cone, deve-se criar um círculo com centro móvel e raio vinculado ao controle deslizante "r", procedendo como na Figura 79.

Figura 79: Construção de círculo de raio vinculado ao Controle Deslizante "r".

Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

3) Para construir o cone vinculado cuja base é o círculo "c" gerado no passo anterior e a altura vinculada ao controle deslizante "h", deve-se digitar, na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, o comando "Cone(c,h)", como na Figura 80.

Figura 80: Construção do cone de base “c” e altura “h”.

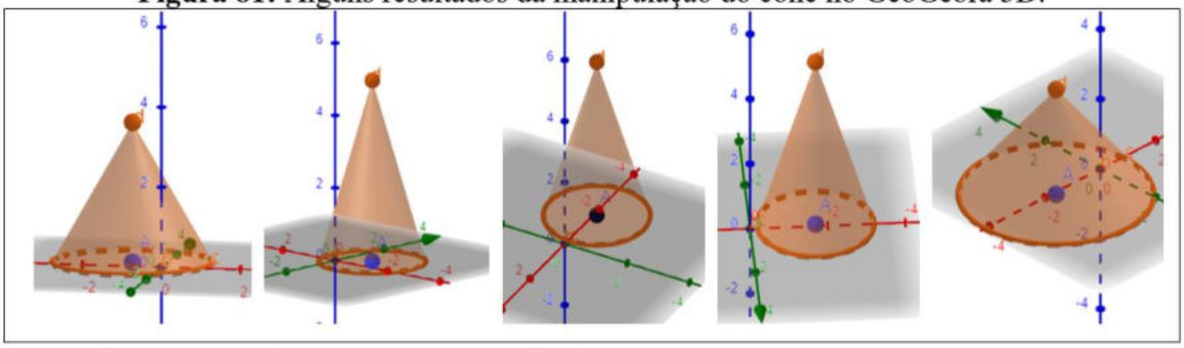


Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Uma vez construído o cone de acordo com o sugerido, os alunos devem manipular a base e a altura, respectivamente, por meio dos controles deslizantes “r” e “h” e observar as alterações numéricas na Janela de Álgebra. Devem também movimentar a figura por meio de arrastes do mause sobre a Janela de Visualização 3D e observar o sólido por diferentes ângulos.

O processo de construção e manipulação no GeoGebra favorece a identificação dos elementos, propriedades e relações. Por isso, recomenda-se manipular os controles deslizantes e também mover o sólido na Janela de Visualização 3D, observando-o atentamente sob diferentes ângulos, a exemplo da Figura 81, e tentando compreender sua estrutura, identificar seus elementos e perceber propriedades e relações.

Figura 81: Alguns resultados da manipulação do cone no GeoGebra 3D.

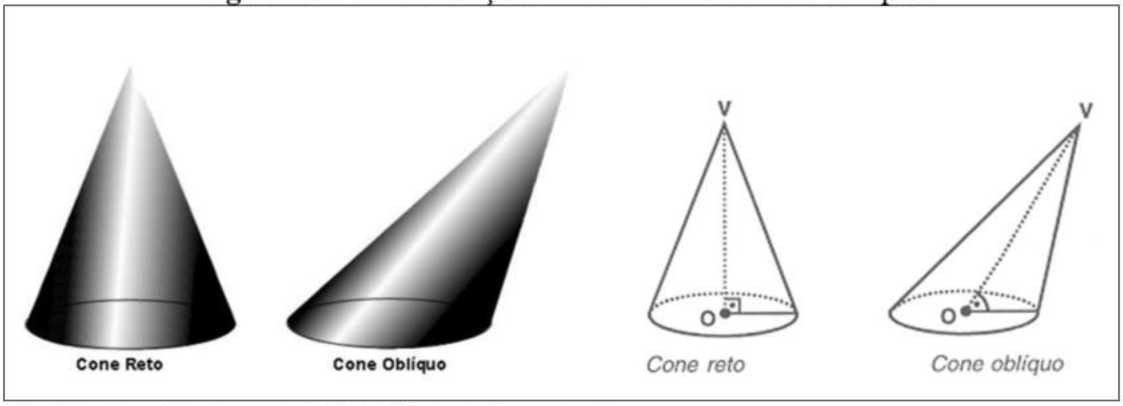


Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

3.9.1 Elementos e classificação dos cones

Não são necessários muitos argumentos para mostrar ao aluno que os cones se classificam em reto e oblíquo, bastando ao professor apresentar figuras e esclarecer que um cone é reto quando seu eixo é perpendicular ao plano da base e oblíquo quando não o é (Figura 82). O GeoGebra não fornece, em suas ferramentas básicas, meios para a construção de cones oblíquos.

Figura 82: Diferenciação entre cone reto e cone oblíquo.

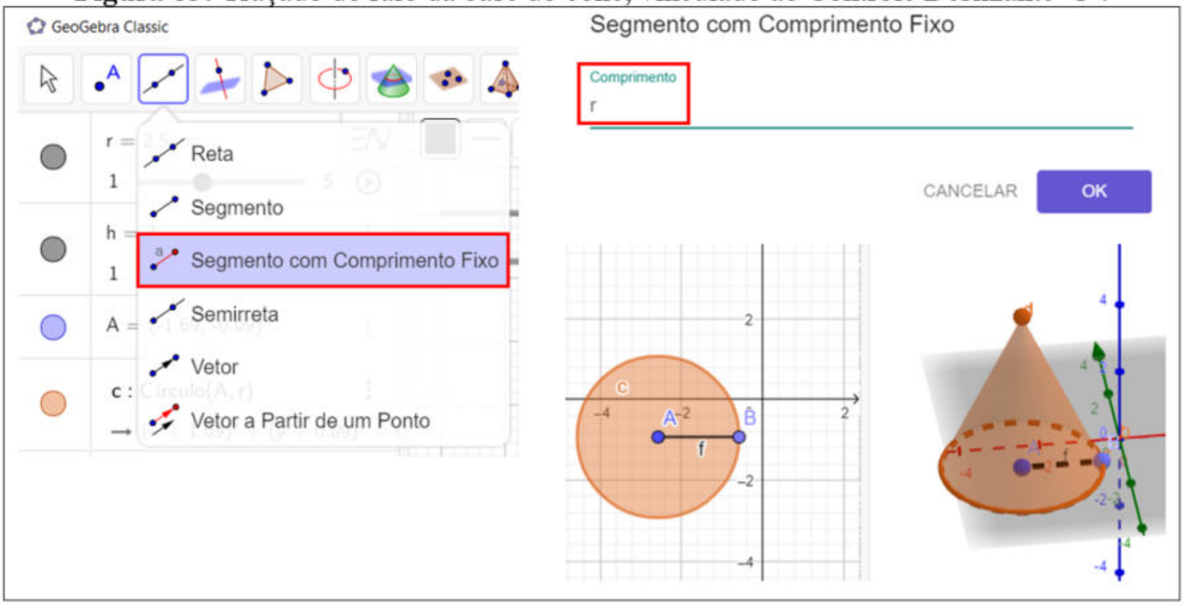


Fonte: cursinhopopularpaulofreire.files.wordpress.com.

A essa altura o aluno já deve ter identificado alguns dos elementos do cone, tais como base, vértice e, ainda que intuitivamente, a altura. Contudo, ao traçar o raio da base e o segmento que representa a altura, essa noção torna-se mais clara e fornece elementos importantes para a identificação da geratriz e para alguns cálculos importantes. Para tal, deve proceder como se segue.

4) Ciente de que a base cone é um círculo de raio medindo r, o aluno pode traçar esse raio no GeoGebra, bastando clicar na ferramenta "Segmento com Comprimento Fixo" da Janela 2D, depois no centro do círculo (ponto A) e, na caixa de diálogo que se abre, preencher o campo com o parâmetro "r", como ilustrado na Figura 83.

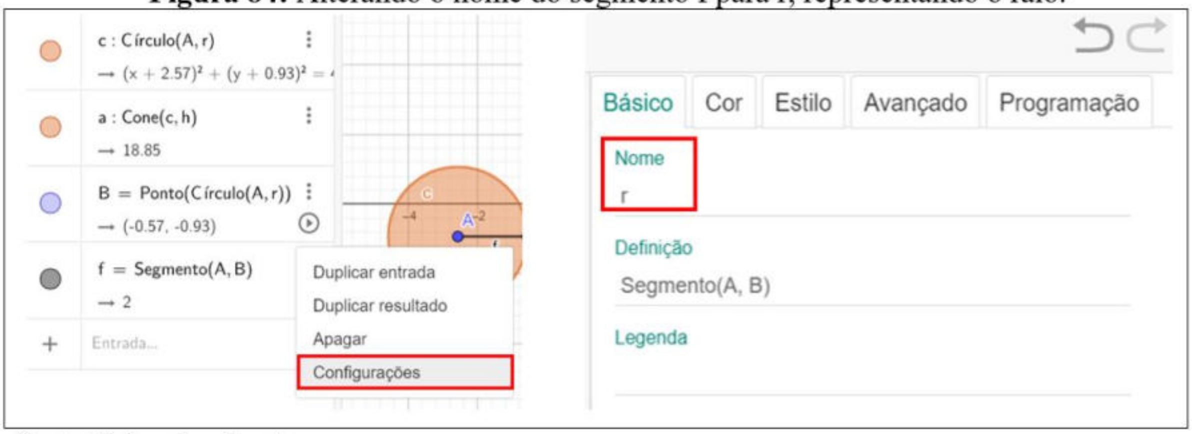
Figura 83: Traçado do raio da base do cone, vinculado ao Controle Deslizante "r".



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

4) Para facilitar a compreensão, sugere-se acessar clicar sobre os dados referentes ao segmento "f" na Janela de Álgebra, acessar as "Configurações" e alterar o nome "f" para "r", como na Figura 84.

Figura 84: Alterando o nome do segmento f para r, representando o raio.



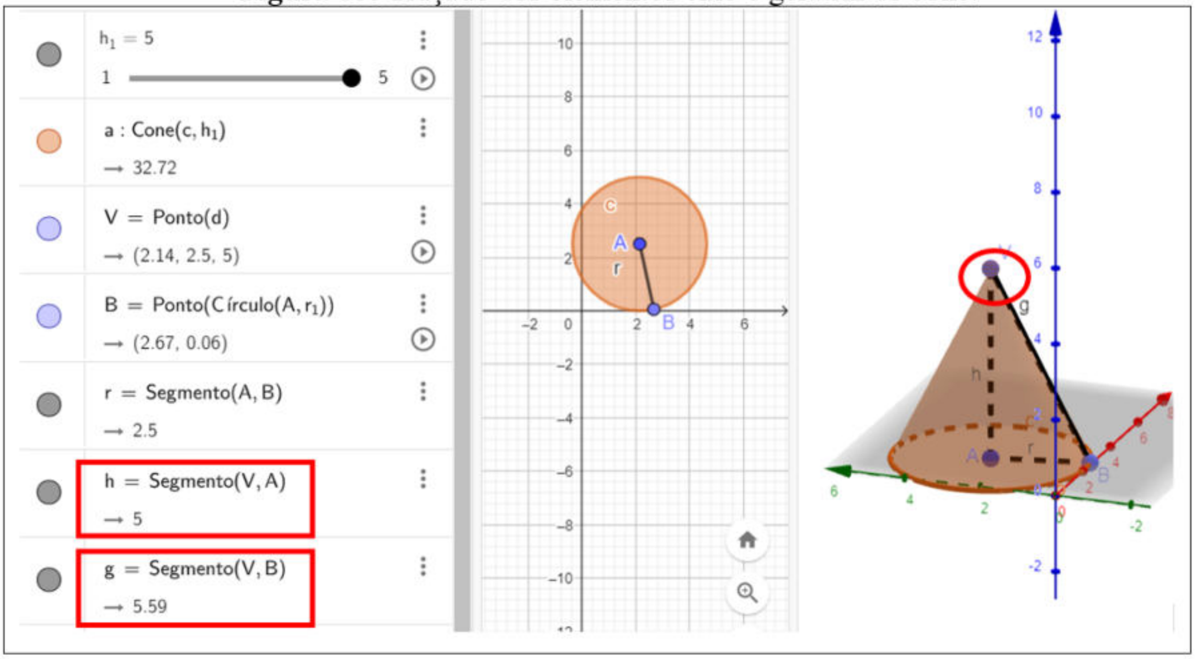
Fonte: Elaborada pelo autor.

5) Para traçar a geratriz e o eixo do cone, deve-se primeiramente criar um ponto coincidente com o vértice do cone. Isso pode ser feito clicando na ferramenta "Ponto" e em seguida sobre o vértice do cone. Para facilitar a associação desse ponto ao elemento vértice, recomenda-se renomear esse ponto como "V".

Feito isso, clicar na ferramenta "segmento" e em seguida sobre os pontos "V" e "A", renomeando esse segmento como "h". Repetir o procedimento, só que dessa vez, clicando sobre os pontos “V” e “B”. Lembrar que “V” é o vértice, “A” é o centro da base e “B” é uma extremidade do raio r.

Desse modo, o segmento VA representa a altura do cone e deve ser renomeado como “h” e o segmento VB representa a geratriz do cone e deve ser renomeado como “g”. A figura deve ser apresentada como na Figura 85.

Figura 85: Traçado dos elementos eixo e geratriz do cone.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Tendo ciência de que a figura explorada trata-se de um cone reto, o aluno deve deduzir que o triângulo ABV é retângulo, pois o eixo VA é perpendicular ao plano da base, no qual está contido o raio AB. Desse modo, conhecidas as medidas da altura h e do raio r, ambos catetos do triângulo retângulo ABV, de hipotenusa g, o aluno é capaz de calcular a medida da geratriz g aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABV. Note que r e h são determinados pelos parâmetros dos controles deslizantes e, portanto, só resta ao aluno calcular o valor de g e comparar com a medida da geratriz g dada pela Janela de Álgebra do GeoGebra.

Por exemplo, pela Figura 85 tem-se que

$$g^2 = r^2 + h^2$$

$$g^2 = 2{,}5^2 + 5^2$$

$$g = \sqrt{31{,}25}$$

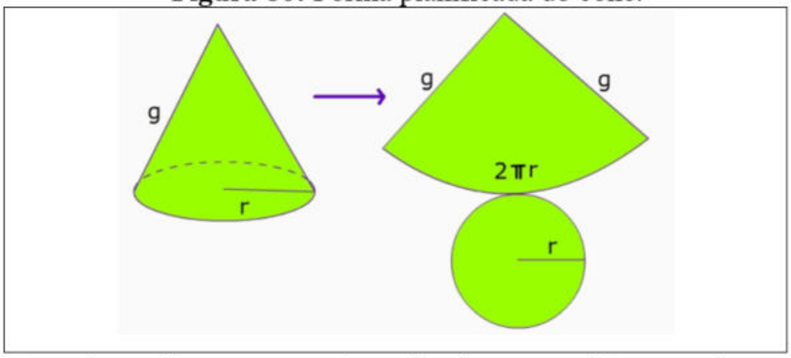
$$g = 5{,}59$$

É importante que o aluno seja motivado a fazer esses cálculos e comparar com os dados da Janela de Álgebra, para perceber a importante integração entre Geometria e Álgebra.

3.9.2 Área da superfície do cone

A exemplo do que pode ser feito no caso de prismas e pirâmides, uma forma lógica para se calcular a área da superfície de em cone seria partindo da planificação desse sólido. No entanto, por ter uma superfície lateral curva, o cone, assim como o cilindro e a esfera, se enquadra na classe dos sólidos redondos, para os quais o GeoGebra não disponibiliza a ferramenta "Planificação". Para dar ao aluno uma noção de como seria essa planificação, o professor deve apresentar aos alunos figuras que podem ser encontradas em alguns livros didáticos ou mesmo na internet, como a apresentada na Figura 86.

Figura 86: Forma planificada do cone.



Fonte: https://www.matematica.pt/faq/area-superficie-cone.php .

Dependendo do nível de pensamento geométrico no qual o aluno se encontra, é possível que ele perceba que a área lateral do cone corresponde à área de um setor circular e que para se calcular a área total deve-se adicionar a essa área lateral a área do círculo de raio r, base do cone. Ao perceber essa característica e se preocupar com a forma de calcular a área dessa superfície, esse aluno demonstra já ter avançado para o nível 2 (análise) de van Hiele. O desenvolvimento de argumentos lógicos para esse cálculo, mesmo que de forma parcial e dedutiva, indica um avanço para o nível 3 (dedução informal).

Como não há tempo disponível para muitas demonstrações, o professor pode esclarecer que a área lateral do prisma de raio r e geratriz g é dada pela expressão

$$A_l = \pi . r . g$$

Com essa informação e já sabendo calcular a área da superfície circular, o aluno é capaz de deduzir que a área total da superfície do cone é

$$A = \pi r^2 + \pi . r . g$$

que, após alguns cálculos, se resume a

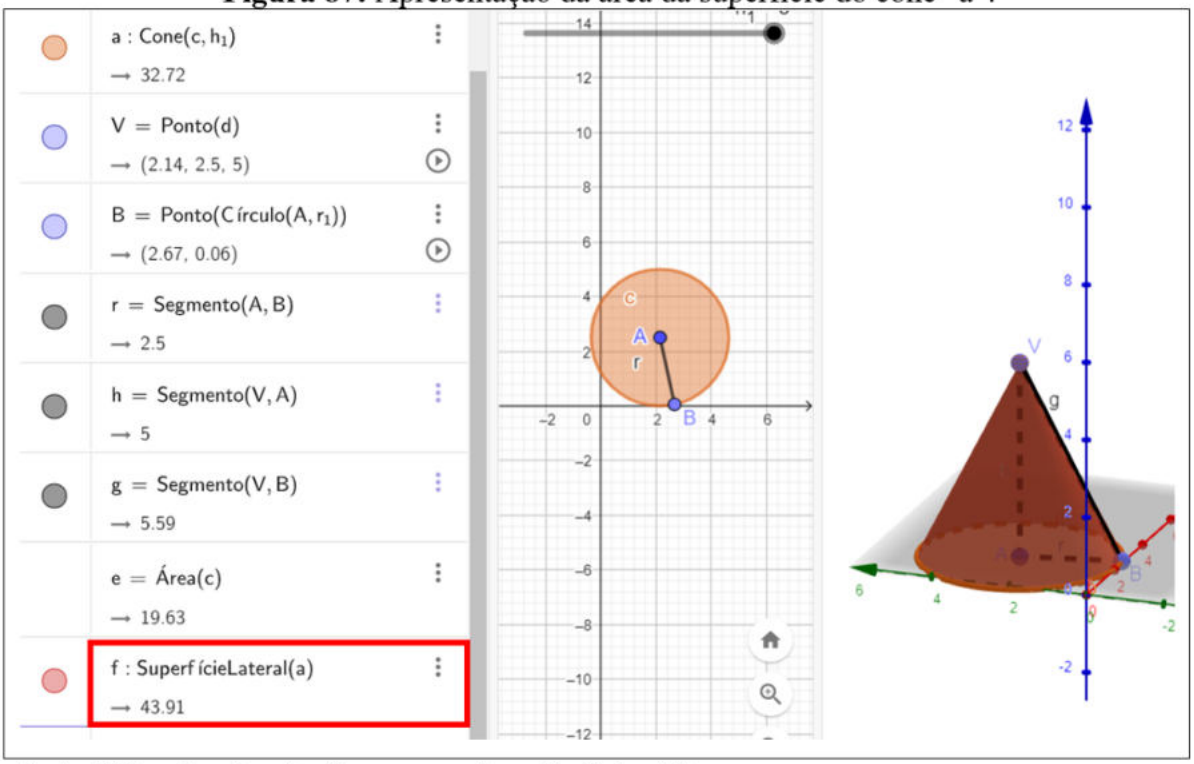
$$A = \pi r(r + g)$$

Embora seja importante para o aluno calcular algebricamente essa área, existem momentos nos quais é suficiente tomar esse valor no GeoGebra, principalmente quando se precisa ganhar tempo. Ademais a Janela de Álgebra permite verificar a área, ainda que simplesmente para verificar os resultados obtidos nos cálculos.

Para tal, deve-se proceder como se segue.

6) Para se obter a área total da superfície do cone “a”, deve-se digitar, na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, o comando “SuperfícieLateral(a)”, como na Figura 87.

Figura 87: Apresentação da área da superfície do cone “a”.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

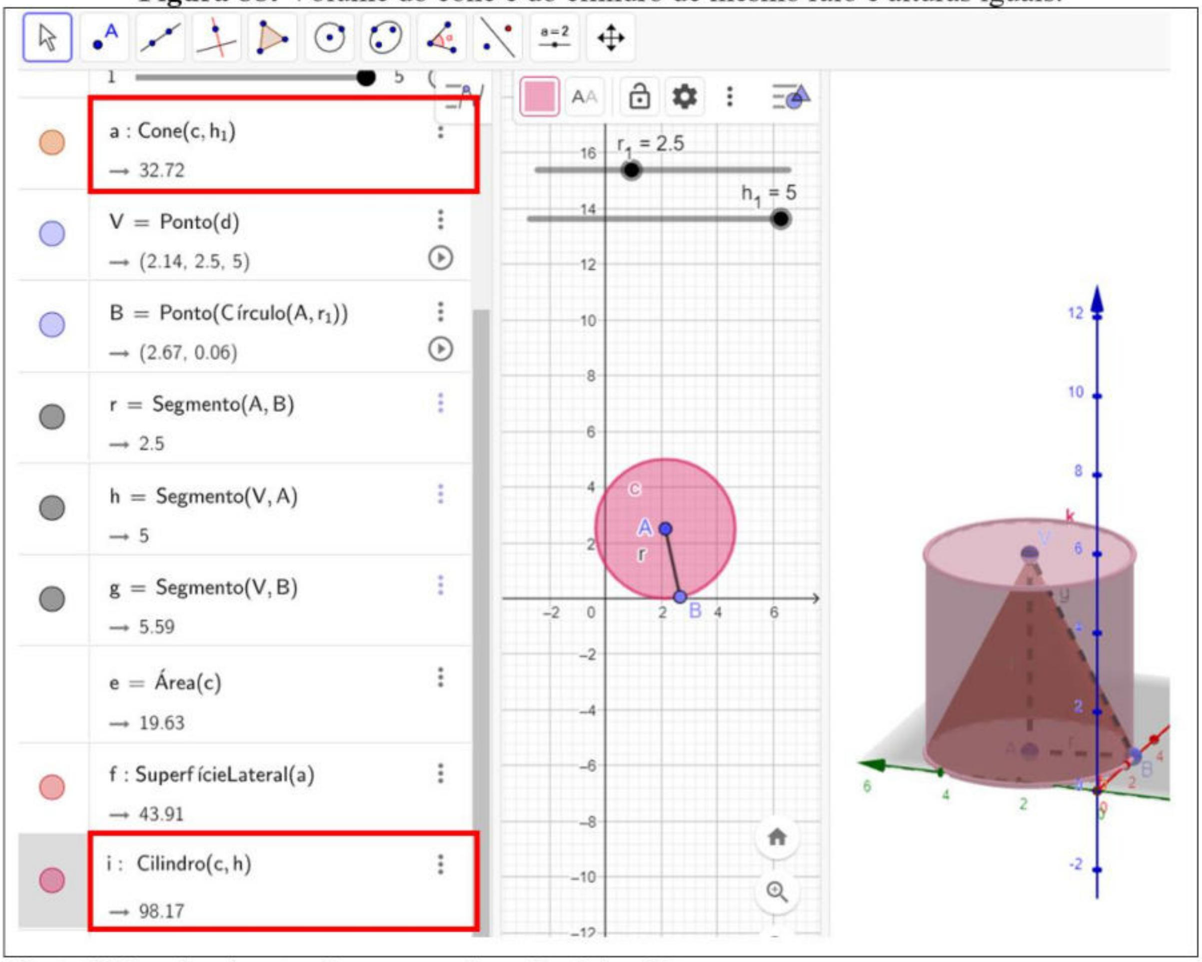
3.9.3 Volume do cone

Para dedução do volume do cone, uma alternativa interessante é construir, no GeoGebra 3D, um cilindro circunscrito ao cone, isto é, usar a mesma base do cone para esse cilindro e definir sua altura como a mesma do cone.

Como o cone construído para esse estudo tem como base o círculo “c” e altura vinculada ao Controle Deslizante “h”, deve-se construir o cilindro como se segue.

7) Digitar, na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, o comando “Cilindro(c,h)”. Desse modo, será gerado o cilindro como ilustrado na Figura 88.

Figura 88: Volume do cone e do cilindro de mesmo raio e alturas iguais.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Uma vez construído o cilindro, o professor deve solicitar aos alunos que manipulem as figuras e as observem atentamente, registrando em uma tabela (Tabela 6) os valores apresentados nos campos referentes aos volumes dos dois sólidos, como destacado na Figura 88.

Tabela 6: Comparação dos volumes do cone e do cilindro.

	Anotação 1	Anotação 2	Anotação 3	Anotação 4	Anotação 5	Anotação 6
$V_{Cilindro}$						
V_{Cone}						
$\frac{V_{Cilindro}}{V_{Cone}}$						

Fonte: Elaborada pelo autor.

O preenchimento da Tabela 6 é uma sugestão de atividade para que o aluno perceba que a razão entre o volume do cilindro e o volume do cone de mesma base e altura é sempre igual a 3. O professor deve alertar o aluno para possíveis divergências, mas deixar claro que, caso ocorra, essa diferença é desprezível e, por isso, o valor pode sempre ser arredondado para 3. Tal divergência se deve às operações com o número irracional π (pi).

Daí, o aluno pode deduzir que

$$\frac{V_{Cilindro}}{V_{Cone}} = 3$$

e então, pela Propriedade Fundamental das Proporções,

$$V_{cone} = \frac{V_{cilindro}}{3}$$

e, portanto,

$$V_{cone} = \frac{\pi . r^2 . h}{3}$$

Pela comparação entre as formas, elementos e propriedades das figuras, é provável que alguns alunos associem o volume do cone ao volume da pirâmide e percebam que ambos os cálculos obedecem à mesma lógica, ou seja, representam a terça parte do produto entre a área da base e a altura do sólido geométrico.

Para a realidade da EJA, o conteúdo abordado nesse tópico é suficiente para que o aluno compreenda o necessário sobre cones e tenha condições de aplicar esses conhecimentos em situações do seu cotidiano.

3.10 Esfera

Ao ouvir falar de esfera é muito provável que venha à mente do aluno da EJA a imagem de uma bola e de outros objetos com a mesma forma geométrica. Nesse sentido, o estudo superficial do tema não representa para esse aluno nenhuma novidade. Contudo, o professor deve valer-se dos conhecimentos que esse aluno já tem para levá-lo a buscar conhecimentos mais profundos sobre o assunto. O fato desse aluno conhecer o objeto na prática e ter algum domínio sobre ele deve ser um fator motivador. Contudo, conhecer suas propriedades e cálculos importantes com aplicação em situações do cotidiano pode causar perplexidade em muitos desses alunos, sobretudo quando a metodologia adotada pelo professor faz com que o aluno se sinta capaz e perceba que seu conhecimento e experiências de vida são valorizados.

Além de objetos esféricos, o aluno da EJA está familiarizado com objetos cuja forma geométrica se aproxima de uma semiesfera e tem a percepção de que é possível se construir uma esfera a partir da união de duas semiesferas de mesmo raio. Objetos como os apresentados na Figura 89 podem ser explorados na introdução do tema, pois são comuns a esses alunos.

Figura 89: Objetos que lembram uma esfera ou uma semiesfera.

Fonte: Acervo pessoal do autor.

O objetivo desse estudo é fazer com que seja dada ao aluno a compreensão de que, geometricamente, esfera é uma figura tridimensional limitada por uma superfície esférica. Trata-se de um sólido geométrico definido por um conjunto de pontos que estão a uma mesma distância de um ponto dado, que é o centro da esfera. A distância R entre o centro e um ponto qualquer situado na superfície da esfera é definida como medida do raio da esfera. Esses conceitos tornam significativos para o aluno da EJA quando aprendidos na prática.

Para que esse objetivo seja alcançado, sugere-se que, além de figuras e materiais manipuláveis que aproximem esse aluno de experiências cotidianas com objetos de forma esférica, o professor proponha atividades no GeoGebra, considerando-se que o dinamismo do software, associado às diversas representações feitas simultaneamente contribuem bastante para o aprendizado, principalmente pelo despertamento do espírito investigativo e dedutivo e pela interação entre Geometria e Álgebra.

O que se segue é uma sugestão de atividade que o professor deve propor que seus alunos executem no GeoGebra 3D, com maior ou menor riqueza de detalhes, a depender de suas condições de trabalho.

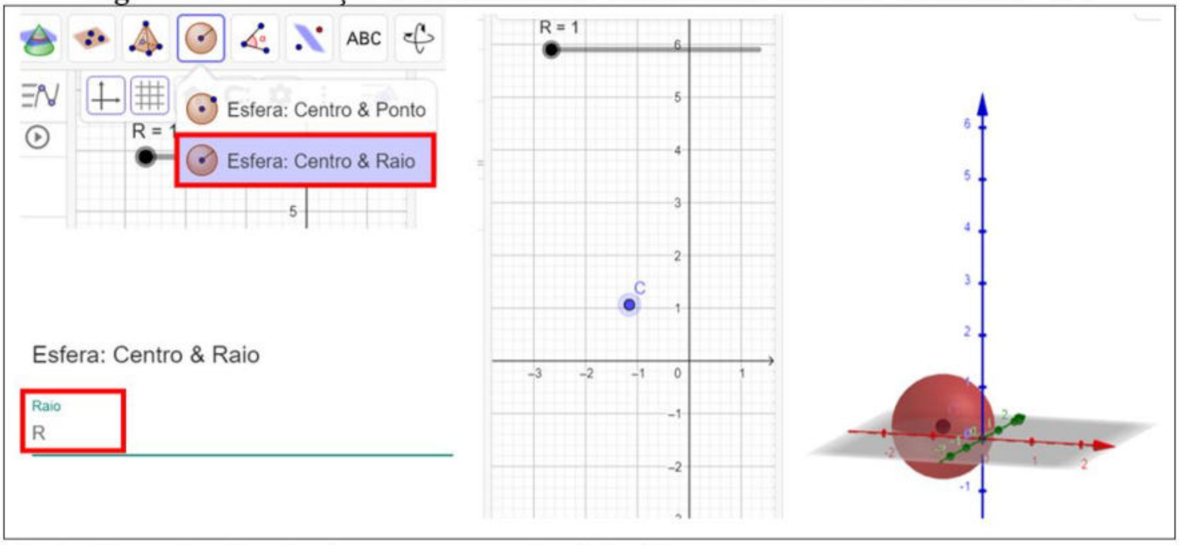
1) Na Janela 2D, iniciar pela criação de um controle deslizante R, configurando-o como na Figura 90.

Figura 90: Configuração do Controle Deslizante "R".

Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Para construir a esfera com raio vinculado ao controle deslizante, deve-se clicar na ferramenta "Esfera: Centro & Raio" e em algum ponto sobre o plano da Janela 3D. Na caixa de diálogo que se abre, preencher o campo "raio" com o parâmetro "r". Para facilitar a compreensão, sugere-se renomear o cento da esfera (ponto A) como "C", como ilustrado na Figura 91.

Figura 91: Construção da esfera de raio vinculado ao Controle Deslizante "R".



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

3.10.1 Volume da esfera

O que se segue é uma sugestão de atividade que pode levar o aluno da EJA a uma dedução significativa da expressão matemática que expressa o volume de uma esfera em função da medida de seu raio. O professor deve orientar seus alunos a se guiarem pelos passos a seguir.

1) Na Janela de visualização 2D, criar um controle deslizante, configurando-o, sugestivamente, como indicado na Figura 92.

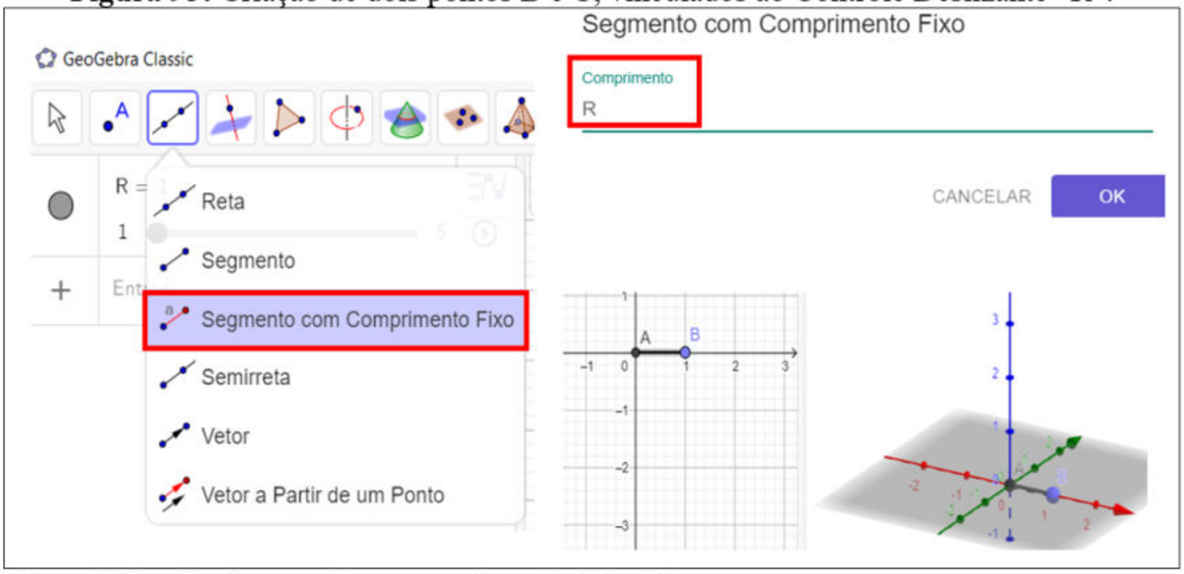
Figura 92: Criação e configuração do Controle Deslizante "R".

Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Algumas figuras dessa atividade dependem de dois pontos sobre o eixo Oz, simétricos e a uma distância variável R da origem. Para criar esses dois pontos, deve-se, na Janela 3D,

clicar na ferramenta “Segmento com Comprimento Fixo” e depois na origem (0, 0, 0) do sistema cartesiano. Na caixa de diálogo que se abre, preencher o campo “Comprimento” com o parâmetro “R”. Será criado um segmento AB como na Figura 93, mas o que interessa, de fato, é o ponto B de sua extremidade fora da origem. Para criar o outro ponto, deve-se clicar na origem novamente e preencher o campo “Comprimento” com o mesmo parâmetro “R”. Desse modo será criado um segmento AC de comprimento R, assim como AB.

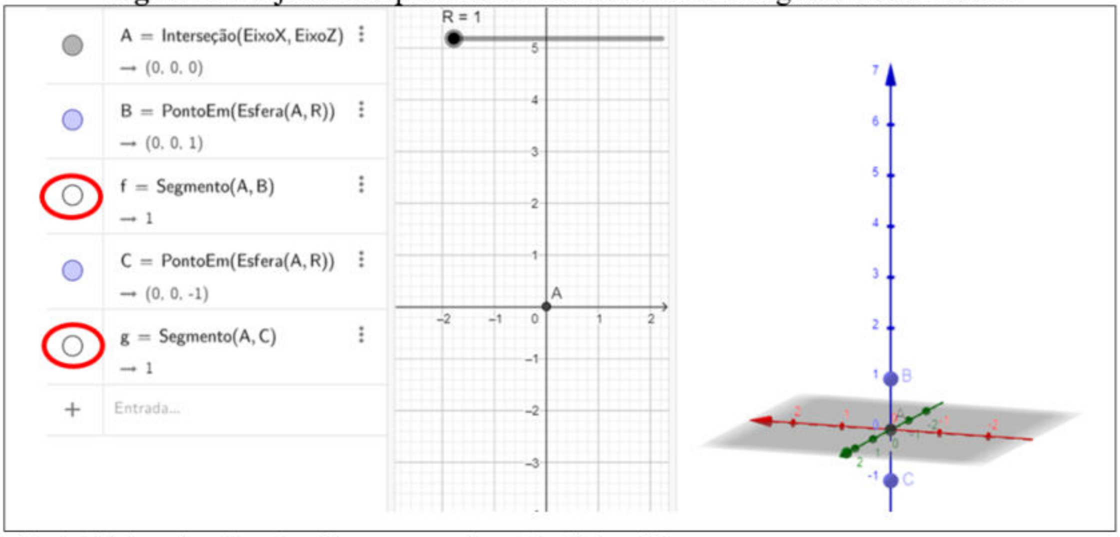
Figura 93: Criação de dois pontos B e C, vinculados ao Controle Deslizante “R”.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

3) Criados os dois segmentos, deve-se clicar na extremidade fora da origem de cada um deles e arrastar esse ponto, colocando-o sobre o eixo Oz, um de cada lado da origem. Para isso, deve-se ir movimentando a figura até coloca-la numa posição que facilite a colocação desses pontos em uma posição na qual apareça, na Janela de Álgebra, na forma (0, 0, 1) e (0, 0, -1), com o controle deslizante em $R = 1$. Feito isso, deve-se omitir os segmentos, deixando visíveis apenas os pontos, como na Figura 94.

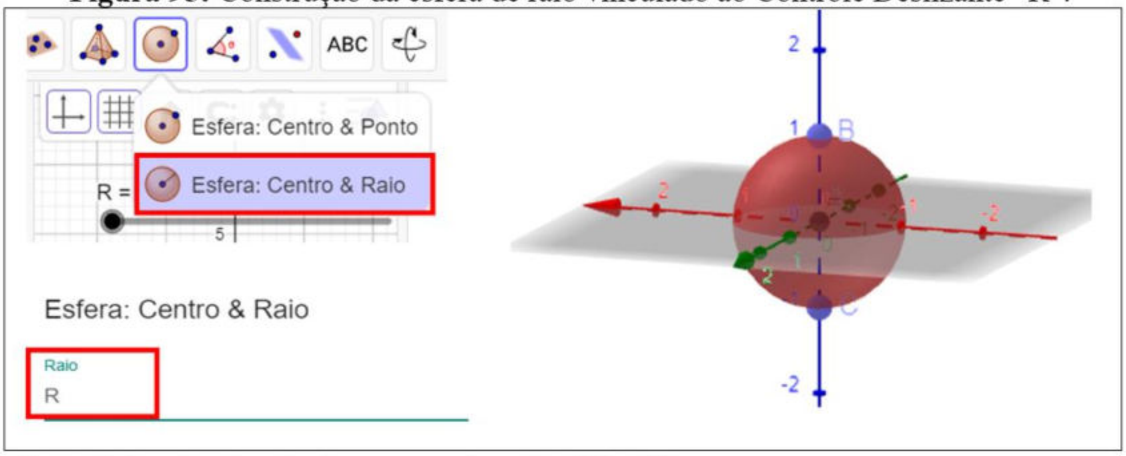
Figura 94: Ajuste dos pontos B e C e omissão dos segmentos AB e AC.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

4) Clicar na ferramenta "Esfera: Centro & Raio" e em seguida, na origem (ponto A). Abrirá uma caixa de diálogo, na qual o campo "Raio" deve ser preenchido com o parâmetro "R". Desse modo, a esfera será apresentada como na Figura 95.

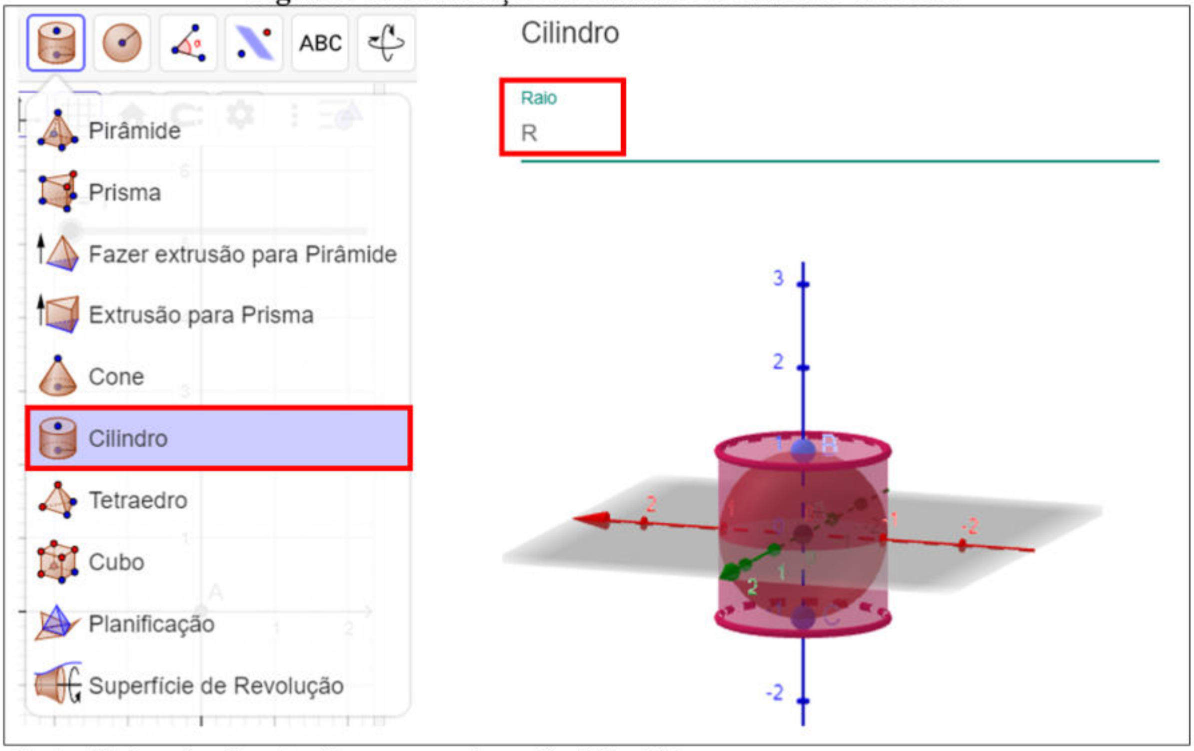
Figura 95: Construção da esfera de raio vinculado ao Controle Deslizante "R".



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

4) Clicar agora na ferramenta "Cilindro" e depois sobre os pontos B e C. Na caixa de diálogo que se abre, preencher o campo "Raio" com o parâmetro "R", gerando o cilindro circunscrito à esfera, como na Figura 96.

Figura 96: Construção do cilindro circunscrito à esfera.



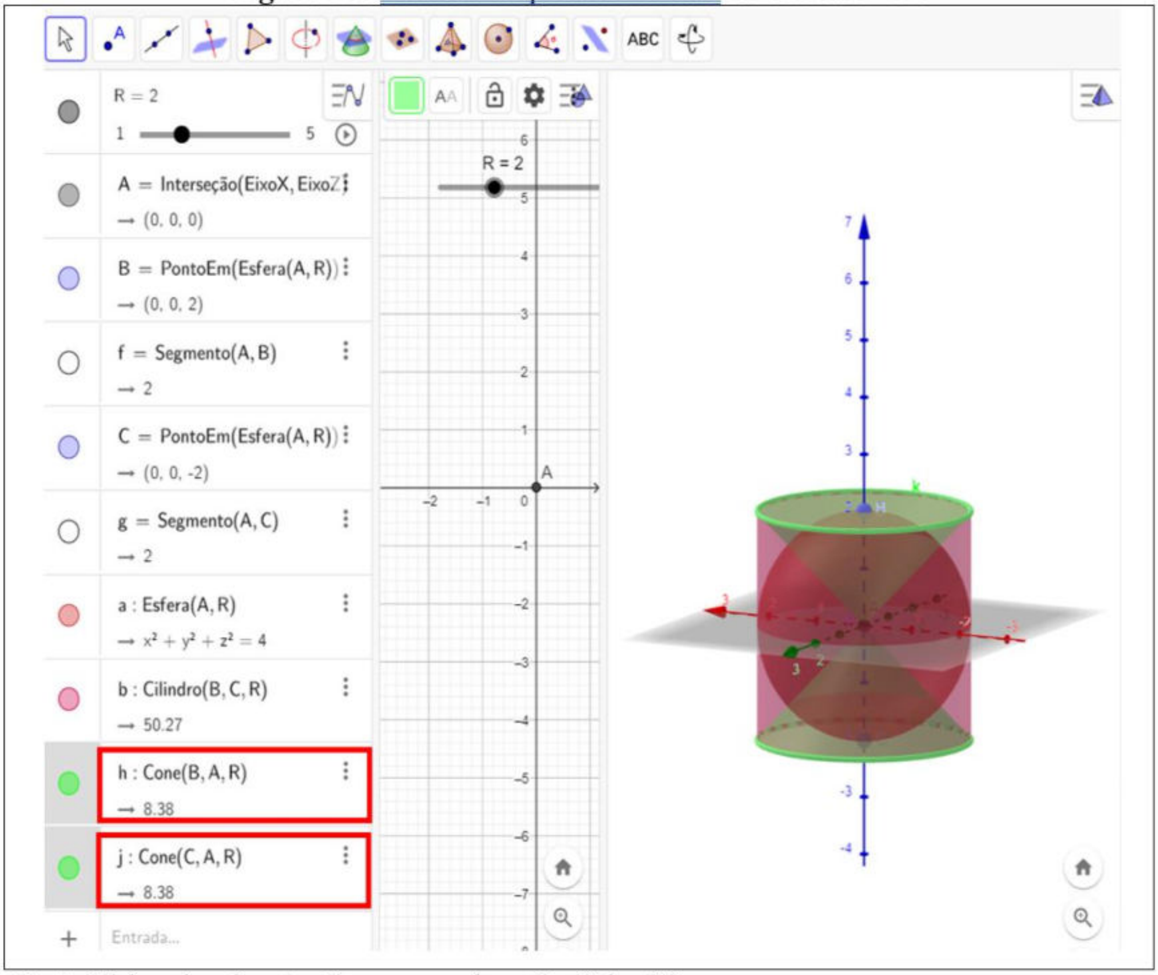
Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

A partir dessa construção, já é possível comparar volume da esfera com o volume do cilindro, bastando, para isso, manipular o controle deslizante, anotar os volumes dos dois sólidos e calcular a razão entre os dois volumes, para cada raio R. No entanto, o aluno pode ter dificuldades em determinar a fração geratriz dessa razão decimal, dificultando a dedução da fórmula.

Pensando nisso, recomenda-se que seja construída ainda outra figura auxiliar, conhecida na geometria como clepsidra, que se trata de dois cones de mesma altura e bases congruentes e paralelas, unidos pelos vértices. Para fins desse estudo, a clepsidra deve estar inscrita no cilindro e, para isso, deve-se proceder como no passo seguinte.

4) Digitar, na caixa de diálogo da Janela de Álgebra, o comando “Cone(B,A,R)”. Repetir o procedimento, digitando “Cone(C,A,R)”. Esses parâmetros representam, respectivamente, o centro da base, o vértice e o raio dos cones. Será assim gerada a clepsidra inscrita no cilindro e vinculada ao controle deslizante “R”. Para melhor visualização, recomenda-se alterar a cor dos cones. A representação deve ficar como ilustrado na Figura 97.

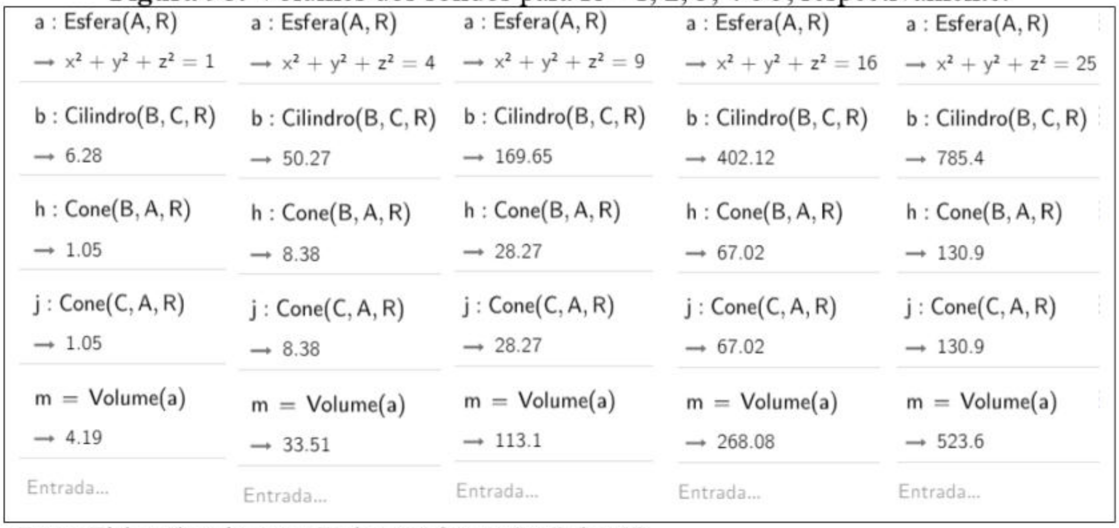
Figura 97: Esfera e clepsidra inscritas no cilindro "b".



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Uma vez construída essa figura, ela deve ser manipulada e cada um de seus componentes pode ser estudado individualmente, a critério do professor ou a depender da necessidade do aluno. Para que o volume da esfera seja exibido na Janela de Álgebra, deve-se digitar, na Caixa de Entrada, o comando "Volume(a)". Daí, manipulando-se o controle deslizante, os volumes dos sólidos se alteram, como na Figura 98. Nesse caso, o elemento "m" representa o volume da esfera "a".

Figura 98: Volumes dos sólidos para R = 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor. Dados gerados no GeoGebra 3D.

Para esse estudo, sugere-se que esses volumes sejam anotados em uma tabela e efetuadas algumas operações, como na Tabela 7.

Tabela 7: Volumes do cilindro e do cone e relação entre esses volumes.

Raio	$V_{Cilindro}$	V_{Cone}	V_{Esfera}	$V_{Cilindro} - 2.V_{Cone}$
1	6,28	1,05	4,19	$6{,}28 - 2\,.\,1{,}05 = 4{,}18$
2	50,27	8,38	33,51	$50{,}27 - 2\,.\,8{,}38 = 33{,}51$
3	169,65	28,27	113,1	$169{,}65 - 2\,.\,28{,}27 = 113{,}11$
4	402,12	67,02	268,08	$402{,}12 - 2\,.\,67{,}02 = 268{,}08$
5	785,4	130,9	523,6	$785{,}4 - 2\,.\,130{,}9 = 523{,}6$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Preenchida a Tabela 7, os dados devem ser analisados pelos alunos, com o acompanhamento do professor. A expectativa é que os alunos percebam que o volume da esfera de raio R pode ser calculado pela relação

$$V_{Esfera} = V_{Cilindro} - 2\,.\,V_{Cone}$$

em que ambos os três sólidos tem raio R, cada um dos dois cones tem altura igual ao raio R e o cilindro tem altura igual ao diâmetro da esfera, ou seja, H = 2R.

Uma vez percebida e compreendida essa relação, fica fácil para o aluno que já domina o cálculo do volume do cilindro e do cone, deduzir a expressão matemática para calcular o volume da esfera, em função de seu raio R, partindo daquilo que ele já sabe. Resta ao professor incentivar esse aluno a substituir na expressão os termos $\boldsymbol{V_{Cilindro}}$ e $\boldsymbol{V_{Cone}}$ pelas suas respectivas fórmulas, já deduzidas em tópicos anteriores.

Desse modo, tem-se que

$$\boldsymbol{V_{Esfera}} = \pi R^2 . 2R - 2.\frac{1}{3}\pi R^2 R$$

o que, desenvolvendo os cálculos resulta na expressão

$$\boldsymbol{V_{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Desenvolvendo esse raciocínio, a fórmula tão usada nos livros e outros tipos de material didático passa a fazer sentido para o aluno. Na prática, a primeira expressão, aquela que na qual o volume da esfera é dado em função dos volumes do cilindro e dos cones, já é satisfatória para o aluno da EJA, porém, a continuidade dos cálculos facilita a compreensão dos conteúdos na forma como são geralmente expostos no material didático.

Embora demonstrações algébricas de maior complexidade não sejam adequadas para se trabalhar na EJA, é importante que o professor as compreenda essas ideias para ter condições de se portar com maior segurança diante de questionamento levantados por alguns alunos mais curiosos. Nesse sentido, segue uma demonstração algébrica para a fórmula do volume da esfera, a partir do Princípio de Cavalieri.

Essa demonstração, com certeza, é muito importante para o professor e para aqueles alunos em um nível de pensamento geométrico mais avançado. Vale a consciência de que a linha de raciocínio adotada para essa dedução está fora do alcance daqueles alunos que ainda não atingiram, no mínimo, o nível 3 de van Hiele. De qualquer modo, a compreensão dessas ideias indica um significativo avanço para níveis superiores de pensamento geométrico.

Convém iniciar essa demonstração algébrica com maior rigor matemático relembrando que a área de um círculo de raio r é

$$V_{círculo} = \frac{1}{3}\pi r^2$$

e que o volume de um cone de raio r e altura H é dado pela expressão

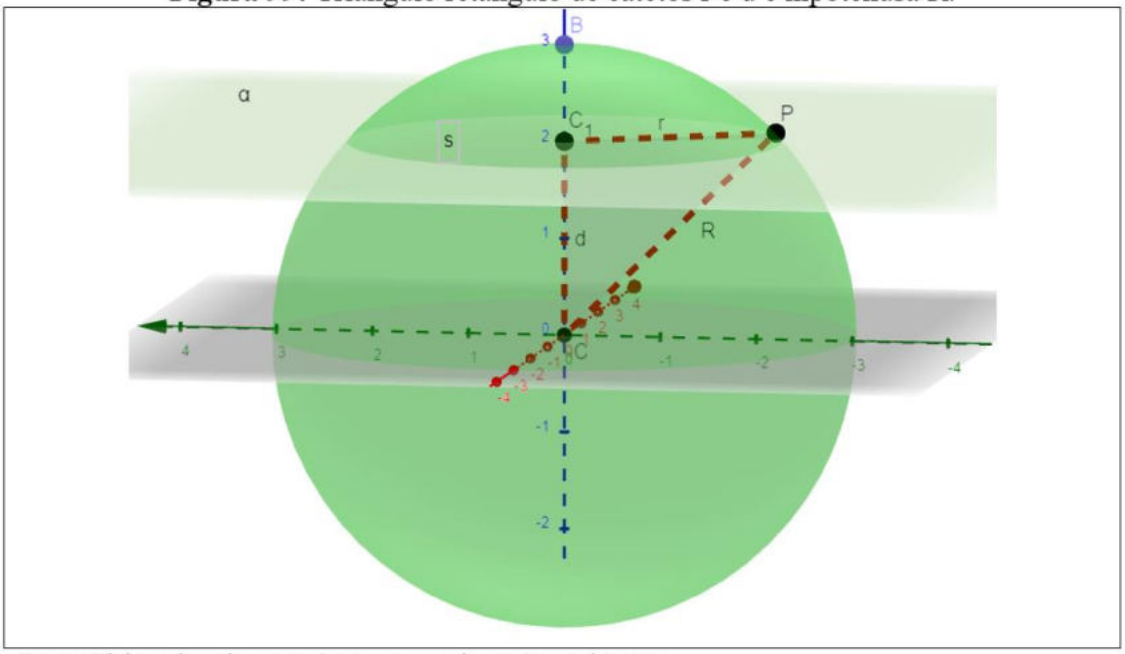
$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 . H$$

Essas informações são importantes para a resolução do problema em questão, que se trata de calcular o volume de uma esfera de raio R.

A interseção dessa esfera com um plano α que a corta a uma distância d do seu centro é uma superfície circular de raio r, com $r \leq R$, chamada seção transversal da esfera.
Sejam C e C_1, respectivamente os centros da esfera e de uma seção transversal c e seja P uma extremidade do raio do círculo c sobre a superfície esférica.

O segmento r que representa o raio do círculo c e o segmento d que une o centro desse círculo ao centro da esfera são catetos de um triângulo retângulo que tem por hipotenusa um segmento R de comprimento igual ao raio da esfera, conforme ilustrado na Figura 99.

Figura 99: Triângulo retângulo de catetos r e d e hipotenusa R.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Daí, pelo teorema de Pitágoras, tem-se que

$$R^2 = r^2 + d^2$$

donde se deduz que

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

Desse modo, a área da seção s da esfera, região circular de raio r, é dada por

$$A_s = \pi r^2$$

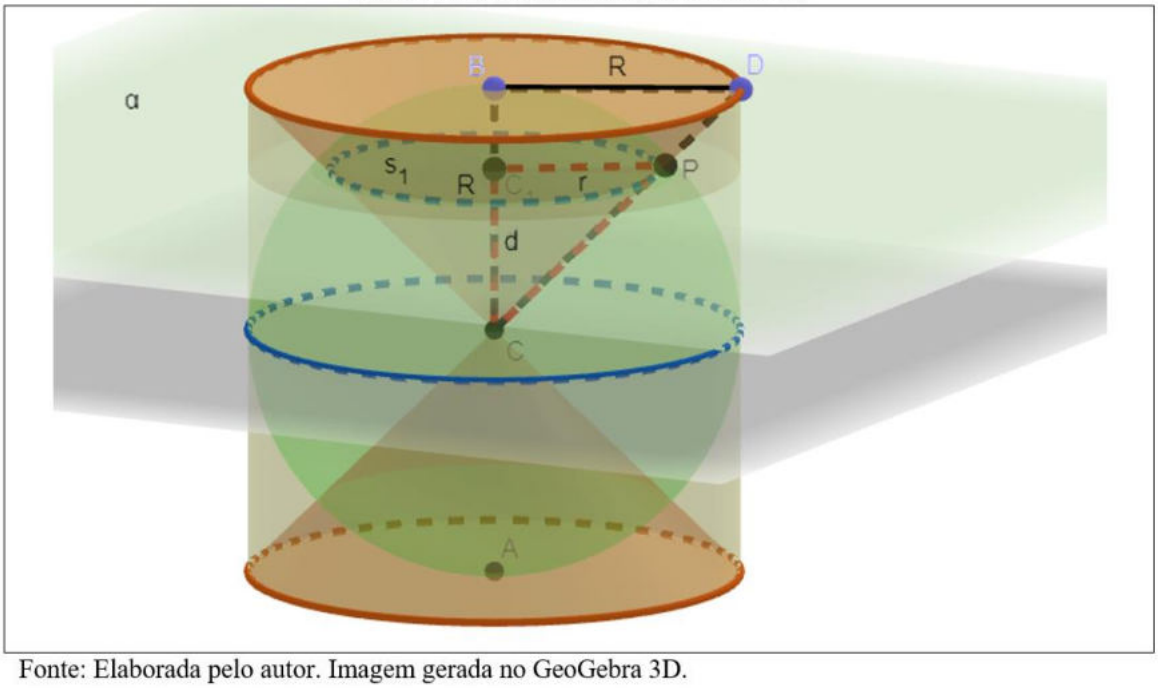
Segue daí que, substituindo-se r^2, a área de uma seção transversal s da esfera é dada, em função do raio R da esfera e da distância d que separa a seção s do plano paralelo que contém o centro C, pela expressão

$$A_s = \pi(R^2 - d^2)$$

Seja uma clepsidra de raio R e altura 2R inscrita em um cilindro de mesma base e altura, com vértices coincidindo com o centro C da esfera, como na Figura 100. Vale lembrar que uma clepsidra corresponde a dois cones de mesma altura e bases congruentes e paralelas, unidos pelos vértices e que o espaço interior ao cilindro e exterior à clepsidra chama-se "anti-clepsidra".

Seja ainda uma seção transversal s_1, determinada pela interseção do plano α com a clepsidra a uma distância d do centro da esfera, também ilustrada na Figura 100.

Figura 100: Seção transversal da clepsidra de raio R, a uma distância d do centro da esfera inscrita no cilindro de raio R.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Note que o segmento r, raio da região circular s_1 de centro C_2 é paralelo ao raio R da clepsidra e determina, sobre a superfície da clepsidra um ponto P, de tal modo que os triângulos retângulos CBD e CC_1P são semelhantes. Por essa semelhança tem-se que

$$\frac{r}{d} = \frac{R}{R}$$

Então, $r = d$ e, portanto, a área da seção transversal s_1 do cone é

$$A_{s_1} = \pi r^2 \text{ ou ainda, } A_{s_1} = \pi d^2$$

Nesse caso, a seção transversal da anti-clepsidra é a coroa circular de raios R e r, cuja área é

$$A_{s_2} = \pi(R^2 - d^2) = A_s$$

ou seja, a área seção transversal da anti-clepsidra é exatamente igual à área da seção transversal da esfera.

Isso significa que, para toda distância $d \leq R$ do centro da esfera, é possível determinar uma seção transversal da anti-clepsidra com área igual à área da seção transversal da esfera.

Sendo assim, tem-se, pelo Princípio de Cavalieri, que o volume da esfera é igual ao volume da anti-clepsidra de mesmo raio R e altura 2R igual ao diâmetro da esfera.

Como já foi visto que o volume de um cone é igual à terça parte do volume do cilindro de mesma base e altura, não é difícil perceber que o volume da anti-clepsidra é a diferença entre o volume do cilindro de raio R e altura 2R e o volume de dois cilindros de base e altura R, ou seja

$$V = \pi R^2 . 2R - 2.\frac{1}{3}\pi R^2 R$$

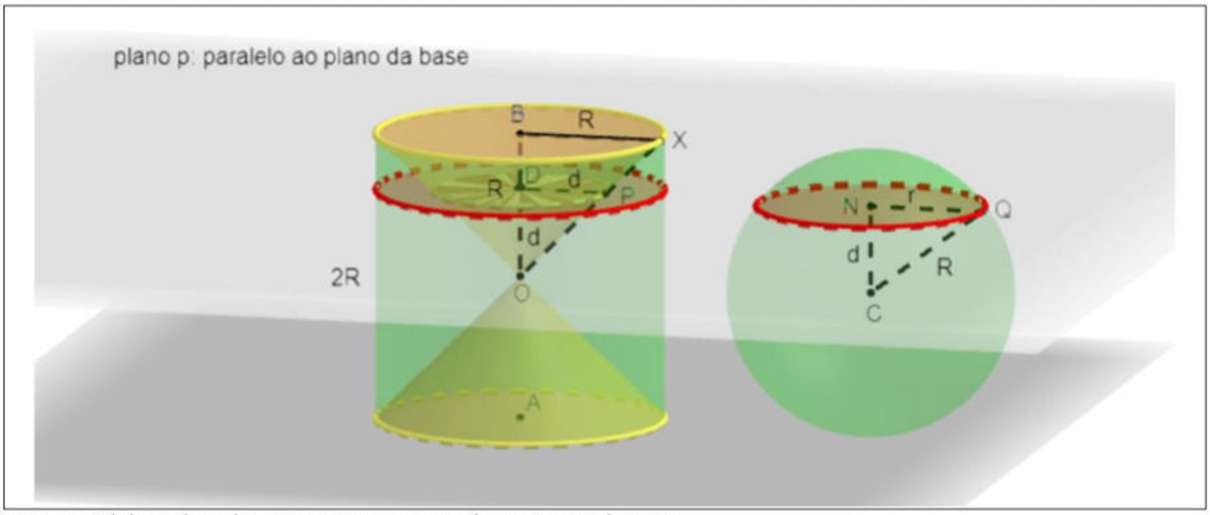
Donde se conclui que o volume da esfera de raio R é dado pela expressão

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Para facilitar a compreensão do aluno, o professor pode simular uma situação na qual uma esfera de raio R é colocada sobre uma mesa, ao lado de uma anticlepsidra de raio R e altura 2R e ambas são seccionadas por um plano p, paralelo aos planos das bases da anticlepsidra, como ilustrado na Figura 101. É importante reforçar aos alunos que a região interna ao cilindro e externa à clepsidra é chamada anticlepsidra.

Nesse caso, a seção transversal gerada pela interseção do plano p com a anticlepsidra é uma coroa circular de centro D, limitada exteriormente por um círculo de raio R e inferiormente por outro círculo de raio d, como ilustrado na Figura 101. Vale ressaltar que essa é a mesma situação mostrada na Figura 100, porém, com a separação da esfera, de modo que o aluno possa visualizar melhor e compreender a ideia.

Figura 101: Seções transversais determinadas pelo plano p sobre a anti-clepsidra e a esfera.



Fonte: Elaborada pelo autor. Imagem gerada no GeoGebra 3D.

Após compreender que o plano p intersecta os dois sólidos gerando duas sessões transversais, como as destacadas em vermelho na Figura 101, o aluno deve ser levado a perceber que, na clepsidra, os triângulos OBX e ODP são retângulos e tem um ângulo agudo em comum, pois BOX = DOP. Logo, pelo caso AA, esses triângulos são semelhantes (pesquise sobre semelhança de triângulos). Importante destacar ainda que o triângulo OBX é isósceles, isto é, tem dois lados com medidas iguais, e seus catetos medem R. Daí, segue da semelhança de triângulos que o triângulo ODP também é isósceles e, portanto, o cateto DP também tem medida d.

A seção transversal determinada pelo plano p sobre a anti-clepsidra é uma coroa circular de área dada, dedutivamente, pela relação

$$A_1 = \pi R^2 - \pi d^2.$$

Evidenciando π,

$$A_1 = \pi(R^2 - d^2).$$

Na esfera, o triângulo CNQ também é retângulo e, portanto, vale o Teorema de Pitágoras, donde

$$R^2 = r^2 + d^2$$

e, portanto,

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

A sessão transversal determinada pelo plano p sobre a esfera é um círculo de raio r, cuja área é

$$A_2 = \pi r^2.$$

Como $r^2 = R^2 - d^2$, temos que a área dessa sessão é dada por

$$A_2 = \pi(R^2 - d^2).$$

Então, $A_1 = A_2$, ou seja, a área das duas sessões transversais, em função da distância d que separa o plano p do centro da esfera, será sempre igual, para todo p pertencente ao intervalo fechado [0, R].

Em outras palavras, todo corte determinado pelo plano p sobre os dois sólidos a uma distância $d \leq R$ do centro da esfera determina uma seção transversal na anti-clepsidra com área exatamente igual à área da seção transversal determinada pelo mesmo plano na esfera.

Sendo assim, tem-se, pelo Princípio de Cavalieri, que o volume da esfera é igual ao volume da anti-clepsidra de mesmo raio R e altura 2R igual ao diâmetro da esfera.

Como já foi visto que o volume de um cone é igual à terça parte do volume do cilindro de mesma base e alturas iguais, não é difícil deduzir que o volume da anti-clepsidra é a diferença entre o volume do cilindro de raio R e altura 2R e o volume de dois cilindros de base e altura R, e, como esse é também o volume da esfera, chegamos à relação

$$V = \pi R^2 . 2R - 2.\tfrac{1}{3}\pi R^2 R,$$

donde, desenvolvendo os cálculos, se conclui (e faz sentido afirmar) que o volume da esfera de raio R é dado pela expressão

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

3.10.2 Área da superfície esférica

Conhecendo a expressão que permite calcular o volume da esfera de raio R, pode-se utilizar essa expressão para deduzir a fórmula da área da superfície esférica. Na EJA, é inviável aprofundar essa demonstração com os alunos, porém, é muito importante que o professor compreenda essa ideia e, se achar conveniente, a apresente a seus alunos, mesmo que a título de conhecimento. Essa compreensão dá sentido à fórmula, embora apenas alunos em um nível de pensamento geométrico mais avançado são capazes de compreendê-la.

Para tal, o professor deve tomar duas esferas concêntricas, uma de raio R e outra um pouco maior e determinar o volume da superfície situada entre essas duas esferas, ou seja, a diferença D entre os volumes das duas esferas. Sendo d a distância entre as duas superfícies esféricas, tem-se que

$$D = \frac{4}{3}\pi(R+d)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$D = \frac{4}{3}\pi(R+d)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$D = \frac{4}{3}\pi(R^3 + 3R^2 d + 3Rd^2 + d^3) - \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$D = \frac{4}{3}\pi R^3 + 4\pi R^2 d + 4\pi R d^2 + \frac{4}{3}\pi d^3 - \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$D = 4\pi R^2 d + 4\pi R d^2 + \frac{4}{3}\pi d^3$$

Pelo Princípio de Cavalieri, o volume D da casca esférica corresponde ao volume de um prisma de base poligonal e altura d. Desse modo, a área da base desse prisma é o quociente

$$A = \frac{D}{d}$$

Assim, a área da casca esférica de espessura d corresponde à área da base do prisma, dada por

$$A = 4\pi R^2 + Rd + \frac{4}{3}\pi d^2$$

Como o que se deseja encontrar é a área da superfície esférica, não é difícil deduzir que a distância entre as duas esferas deve ser nula, ou seja, sua casca deve ter espessura desprezível. Portanto, pondo $d = 0$, obtém-se

$$A = 4\pi R^2$$

expressão essa que representa a área da superfície de uma esfera de raio R.

É claro que o professor é quem vai decidir sobre quais conteúdos são mais importantes e qual metodologia vai adotar para ministrá-los, a depender de fatores diversos, dentro do contexto da escola e dos alunos. O objetivo dessa proposta metodológica é contribuir com ideias interessantes para a melhoria do ensino de Geometria Espacial na EJA. Não há aqui pretensão de impor ideias nem regras, ficando essa proposta em aberto para críticas, sugestões e aprimoramentos.

4 O PRODUTO EDUCACIONAL

Este capítulo traz uma abordagem sobre o produto educacional elaborado a partir dessa Dissertação de Mestrado. Trata-se de um livro digital interativo (e-book), conforme Apêndice 01 (página 188), baseado em partes dos capítulos 1, 2 e 3 desse trabalho, dando maior ênfase às atividades do Capítulo 3, com as devidas adequações de linguagem, direcionada, especificamente aos alunos da EJA, embora possa se aplicar perfeitamente a outras pessoas que sintam o desejo de conhecer e explorar a beleza da geometria e aprendê-la de forma prazerosa e significativa.

O Produto Educacional foi elaborado com o intuito de contribuir com o ensino de Geometria Espacial e tem como público-alvo alunos que cursam o ensino médio na modalidade Educação de Jovens e Adultos EJA e encontra-se disponível no Portal EduCapes para acesso público, no endereço eletrônico http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/602739.

Além disso, o e-book foi recebido pela Direção de Ensino do Instituto Federal Goiano, Campus Ceres, a qual declara estar o material adequado para ser utilizado, a critério do docente em validação do Conselho de Curso, como material didático complementar para os alunos, conforme Declaração de Recebimento do Produto, disponibilizada no Anexo 01 (página 187).

A percepção do descaso com o ensino da geometria escolar, da escassez de materiais pedagógicos especificamente elaborados para a EJA e da falta de sentido que os alunos da EJA demonstram perceber na forma como os conteúdos geométricos normalmente são ensinados na escola, nos motivou a elaborar e disponibilizar aos alunos da EJA, e a quem mais se interessar, esse material que os auxilie na compreensão de tão importantes conteúdos de um modo que os faça perceber a beleza da Geometria enquanto ciência primordial para a compreensão do mundo que nos cerca.

Nesse sentido, essa proposta traz algumas orientações importantes para o estudo de sólidos geométricos, mais especificamente direcionadas a alunos que não tiveram a oportunidade para se aprofundar no estudo de Geometria Espacial, tratando esses assuntos de maneira leve, envolvente e de fácil compreensão, com uma linguagem simples e detalhada, proporcionando ao leitor as condições necessárias para o estudo, valorizando seus conhecimentos prévios, respeitando seus níveis de pensamento geométrico e lhe permitindo participar ativamente da construção do próprio conhecimento, de modo que a aprendizagem seja, de fato, significativa para ele.

4.1 Descrição do produto educacional

Esse livro digital interativo, escrito em forma de texto, acrescido de vídeos online. Dividido em três capítulos, essa obra é apresentada em um formato que pode ser lido em dispositivos digitais como computadores, iPad, tabletes ou smartphones. A Figura 102 dá uma ideia de como ficou a apresentação visual dessa obra, embora esteja sujeita às alterações para publicação, por meio de uma editora, em momento oportuno.

Figura 102: Primeira e última folhas do produto educacional (*e-book*).

Fonte: Acervo pessoal do autor.

Consistindo, essencialmente, em uma proposta pedagógica com exemplos de atividades para serem desenvolvidas com o auxílio do GeoGebra 3D, essa obra merece especial atenção pelo seu caráter didático e autoexplicativo, potencialmente capaz de proporcionar ao aluno a rica oportunidade de estudar além dos limites físicos do ambiente escolar, podendo otimizar seu tempo disponível e aproveitá-lo para construção e aprimoramento de seus conhecimentos, principalmente em tempos nos quais o acesso presencial à escola não está tão fácil, como a exemplo da fase pandêmica na qual nosso país e o mundo momentaneamente se encontram. Contudo, não se trata da solução para todos os problemas educacionais, nem tampouco minimiza a importância da mediação do professor que deve, sempre que possível, ser procurado para esclarecer eventuais dúvidas.

Ao desenvolver as atividades propostas nessa obra o aluno poderá se divertir com as maravilhas da geometria, aprendendo de maneira prática, dinâmica, divertida e significativa. É um material que o professor pode indicar para seus alunos, como material pedagógico auxiliar, visto que a abordagem dos conteúdos tem potencial para facilitar muito o processo de ensino e aprendizagem de geometria, favorecendo um ensino de qualidade, uma vez que, por possibilitar a construção e manipulação de representações geométricas, o uso adequado do GeoGebra, desde que com a devida intervenção do professor, pode ser uma alternativa muito interessante para a percepção de propriedades e relações, compreensão de conceitos geométricos e construção de sentidos.

Para a elaboração desse e-book, nos orientamos pela mesma questão que norteou a escrita da Dissertação, a saber: quais elementos são significativos para o ensino de geometria espacial para o aluno da EJA?

4.2 Conteúdos do produto educacional

O *e-book* está dividido em três capítulos, versando o primeiro capítulo sobre a Educação de Jovens e Adultos (EJA), com destaque para alguns aspectos legais da modalidade, o reconhecimento do seu grande potencial educativo e a importância do estudo de Geometria na EJA. Para maiores esclarecimentos e interatividade, esse capítulo apresenta ainda um vídeo online interessante para quem deseja saber um pouco mais sobre como funciona a EJA.

O segundo capítulo traz informações e instruções sobre o GeoGebra, destacando algumas de suas características, vantagens, aspectos pedagógicos, possibilidades de exploração do software e recomendações de uso, além de instruções detalhadas para o download e instalação da versão utilizada nesse trabalho. Apresenta também a interface do GeoGebra 3D e mostra uma maneira fácil de fazer com que as janelas 2D e 3D se mantenham dispostas lado a lado, de modo a enriquecer o estudo com uma maior quantidade de informações visuais. Em complemento ao conteúdo textual, esse capítulo dispõe de dois vídeos instrutivos online sobre o GeoGebra, sendo o primeiro uma introdução ao GeoGebra e o outro sobre os comandos do GeoGebra 3D.

O terceiro e último capítulo apresenta uma série de atividades cuidadosamente planejadas em observância às orientações do Modelo van Hiele, de modo a proporcionar ao aluno plenas condições de desenvolvê-las, no intuito de que ocorram gradativamente, o desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico.

Essas atividades propostas no Capítulo 3 envolvem o estudo dos prismas, paralelepípedos, cubos, pirâmides, tetraedros, poliedros regulares, cilindro, cone e esfera. O objetivo é que o aluno aprenda a classificar os principais poliedros e corpos redondos, identifique seus elementos e perceba as propriedades e relações entre eles, incluindo a Relação de Euler para poliedros convexos, além de deduzir e desenvolver os cálculos de diagonais, áreas e volumes. Pela dedução das expressões matemáticas para esses cálculos, esse aluno passa a ver sentido nas fórmulas apresentadas nos livros e materiais similares de estudo.

Esse último capítulo conta ainda com 19 vídeos online, tratando, nessa ordem, sobre: Poliedros e corpos redondos, planificação de sólidos geométricos, Princípio de Cavalieri para volumes, prismas, paralelepípedos, cubos, pirâmides, tetraedros, poliedros regulares, Relação de Euler, cilindros, cones, fração geratriz de uma dízima periódica e esferas. Os dois últimos vídeos fazem um apanhado geral sobre prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.

4.3 Metodologia adotada para a produção do *e-book*

A elaboração desse e-book se iniciou pela pesquisa bibliográfica realizada para a escrita da Dissertação. Idealizado para ser uma adaptação de parte do Trabalho de Conclusão de Curso, diferindo basicamente pela seleção dos conteúdos mais relevantes para os alunos e pela adequação de linguagem, foi realizado um minucioso trabalho de adequação de uma proposta para professores para torná-la uma sequência didática direcionada e apropriada para alunos.

O intuito é auxiliar principalmente alunos da EJA, mas também outros estudantes da educação básica, a partir da proposta de atividades para serem desenvolvidas com a utilização do software GeoGebra, visando facilitar o estudo de sólidos geométricos.

Desse modo, pode-se dizer que o trabalho foi desenvolvido em duas etapas, consistindo a primeira na realização de um estudo teórico que se iniciou com um levantamento bibliográfico sobre o tema e resultou no texto da Dissertação, base para o conteúdo do livro. A segunda etapa foi o processo de elaboração do produto, na qual foi realizada a seleção dos conteúdos relevantes para os fins a que se destina o produto, seguida da adaptação de linguagem, acréscimo de informações e detalhes, seleção e inserção de vídeos educativos disponíveis no YouTube e incansáveis revisões desse material complementar ao ensino em sala de aula, visando contribuir ao máximo para que esses alunos alcancem uma aprendizagem significativa.

4.4 Discussões sobre o produto educacional

Um dos objetivos que se espera ter alcançado com esse trabalho diz respeito à ampliação da produção crítica de materiais direcionados à EJA. Não foi apenas "mais um trabalho", mas algo diferente de tudo o que se costuma ler, principalmente pela riqueza de detalhes, simplicidade do vocabulário e preocupação com a forma como o leitor irá receber as informações e interagir com a obra. Os vídeos online inseridos no corpo do texto como complemento ao texto é um dos grandes diferenciais dessa obra e é motivação para o desenvolvimento de trabalhos futuros em formato similar.

Além disso, uma das principais contribuições do árduo trabalho de elaboração foi motivar uma reflexão sobre o ensino de Geometria na EJA, principalmente diante da escassez de materiais específicos e da ausência de políticas públicas de valorização e fomento a essa importante modalidade de ensino da Educação Básica.

Embora tenhamos outras preocupações além das investigações sobre os benefícios e desafios do uso de ambientes de geometria dinâmica no estudo da geometria escolar, as atividades aqui propostas explicitam e enfatizam os aspectos pedagógicos do GeoGebra, principalmente pela facilidade de se construir e manipular objetos virtuais de maneira muito próxima dos que é feito com objetos manipuláveis do mundo real, fator motivador para compreensão de conceitos, definições, propriedades e relações.

Esse estudo mostrou o quanto o uso adequado de recursos tecnológicos pode contribuir para a compreensão do mundo real, a partir das diversas possibilidades de visualização de objetos e das relações algébricas apresentadas simultaneamente às representações geométricas na tela do computador.

Espera-se que essa proposta auxilie muitos alunos no estudo de geometria e que seja bem aceita pela maioria, com resultados positivos para a educação brasileira de modo geral e, sobretudo, para a EJA. É claro que muito ainda há que se estudar sobre o assunto e essa pesquisa vem impulsionar outros estudos, inclusive, servir de referência para a produção de novos materiais.

Diante das dificuldades dos professores em encontrar materiais de ensino adequados e também dos alunos em assimilar os conteúdos de geometria da forma como, tradicionalmente, são ensinados na escola, percebe-se a importância e necessidade que mais trabalhos como esse sejam produzidos e disponibilizados, sem custo para o usuário, como material de apoio para alunos de todos os níveis e modalidades de ensino.

Apesar das contribuições dos softwares educativos, o desenvolvimento das atividades mostrou algumas limitações do GeoGebra, nos levando a concluir que as ferramentas disponíveis no software nem sempre são suficientes para explorar os conteúdos geométricos na sua totalidade. Para maiores constatações, ressalta-se aqui a importância do desenvolvimento de pesquisas futuras, baseadas, se possível, em atividades presenciais que proporcionem ao aluno da EJA o contato com esses recursos, na expectativa de que seja possível observar, na prática, o quanto essa metodologia pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Nesse sentido, espera-se ter concretizado o intuito de produzir um material que venha a auxiliar alunos na compreensão dos conteúdos geométricos e do mundo, partindo de um bom planejamento e do desenvolvimento consciente de atividades, com vistas à produção de um conhecimento geométrico que seja significativo para o aluno.

Há esperança de que essa e outras obras similares sejam bem aceitas como material complementar em apoio às atividades propostas por professores em sala de aula, de modo a tornar o ensino de Geometria Espacial mais leve, atrativo e significativo para alunos da EJA e de todas as modalidades de ensino.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos objetivos que se espera ter alcançado com esse trabalho diz respeito à ampliação da produção crítica de materiais direcionados à EJA. Essa preocupação também está explícita nas colocações de Gadotti e Romão ao estabelecerem como uma das linhas de ação "ampliar, por meio de impressos e multimídias, a elaboração, produção, distribuição e avaliação de materiais didáticos próprios à EJA" (GADOTTI e ROMÃO, 2000, p. 128). Muito além das discussões sobre questões relevantes da Educação Básica, o diferencial desse trabalho está na incorporação de propostas didáticas e metodológicas potencialmente eficazes na luta por melhorias no âmbito educacional e das transformações sociais.

A elaboração deste trabalho possibilitou uma reflexão sobre o ensino de Geometria na EJA, principalmente diante da escassez de materiais específicos e da ausência de políticas públicas de valorização e fomento a essa importante modalidade de ensino da Educação Básica.

O aprofundamento nos estudos sobre o Modelo van Hiele levou o autor à percepção que, muito mais importante que a simples adoção de recursos tecnológicos que embasava a proposta original desse trabalho, seria conhecer e respeitar os níveis de pensamento do aluno. Nessa concepção, o conhecimento do Modelo van Hiele exerce fundamental importância no processo de planejamento e atuação do professor, por favorecer que a escolha das metodologias e dos recursos didáticos influenciem positivamente o ensino, de modo que o estudo se torne atrativo e a aprendizagem em Geometria seja significativa para o aluno da EJA.

Embora os ambientes de geometria dinâmica tenham deixado de ser o foco principal desse trabalho, as atividades aqui propostas explicitam e enfatizam os aspectos pedagógicos do GeoGebra, principalmente pela facilidade de se construir e manipular objetos virtuais de maneira muito próxima dos que é feito com objetos manipuláveis do mundo real, fator motivador para compreensão de conceitos, definições, propriedades e relações. Percebe-se ainda o quanto o uso adequado de recursos tecnológicos pode contribuir para a compreensão do mundo real, a partir das diversas possibilidades de visualização de objetos e das relações algébricas apresentadas simultaneamente às representações geométricas na tela do computador.

Conhecendo um pouco das peculiaridades da EJA e o perfil dos professores que atuam na modalidade, espera-se que essa proposta auxilie o professor na escolha dos materiais e métodos para o ensino de Geometria e seja bem aceita por parte dos alunos, com resultados positivos para a educação brasileira de modo geral e, sobretudo, na EJA. É claro que muito ainda há que se estudar sobre o assunto e essa pesquisa vem impulsionar esses estudos, inclusive, servir de referência para pesquisas de campo e futuros trabalhos científicos e produtos educacionais a serem produzidos nessa linha de investigação.

A proposta do Ensino da Geometria, nos documentos oficiais da Educação Básica, embora apresente rasas orientações no sentido que o currículo deve ser voltado para o desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno, pouca menção faz especificamente à EJA, restando ao professor seguir as orientações para o Ensino Regular. Contudo, ao recorrer aos materiais didáticos, o professor se depara com um material que, na sua maioria, é inadequado para o ensino na EJA. O que se percebe é que, diante da pesada carga horária à qual esse professor se submete, falta tempo hábil para fazer as devidas adequações desse material. Ciente dessa realidade, elaborou-se esse trabalho como um material de apoio para esse professor e espera-se que as atividades aqui propostas, mesmo sem alteração alguma, embora a recomendação é que sejam adequadas à proposta do professor, contribua em grande medida para o ensino de Geometria Espacial na EJA.

Finalmente conclui-se que a elaboração dessa dissertação proporcionou preciosos momentos de reflexão crítica, nos levando a concluir que o ensino da Geometria na EJA e na Educação Básica em geral necessita de mudanças conceituais, procedimentais e atitudinais. Nesse sentido, o intuito foi produzir algo que venha a auxiliar professores na melhoria da qualidade de suas aulas, partindo de um bom planejamentos e do desenvolverem consciente de atividades, visando a construção do conhecimento geométrico por meio de um ensino de carácter amplo, mas não além do que os níveis de desenvolvimento dos alunos permita avançar.

Pensando no aluno, propôs-se produzir baseado nas atividades propostas no capítulo 3 dessa dissertação, um material complementar em linguagem adequada para o aluno da EJA, de modo a tornar o ensino de Geometria Espacial mais atrativo e significativo para esse aluno. As maiores dificuldades constatadas dizem respeito à necessidade de investimentos públicos na formação continuada de professores e em recursos tecnológicos para que essa proposta possa se tornar efetiva na maioria das escolas interessadas.

Finalmente, o desenvolvimento das atividades mostrou algumas limitações do GeoGebra, nos levando a concluir que as ferramentas disponíveis no software nem sempre são suficientes para explorar os conteúdos geométricos na sua totalidade. Para maiores constatações, ressalta-se aqui a importância do desenvolvimento de pesquisas futuras, baseadas, se possível, em atividades presenciais que proporcionem ao aluno da EJA o contato com esses recursos, na expectativa de que seja possível observar, na prática, o quanto essa metodologia pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

REFERÊNCIAS

· ALVES, G. de S.; SAMPAIO, F. F.. O MODELO DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE E POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES DA GEOMETRIA DINÂMICA. **Revista de Sistemas de Informação da FSMA**: n. 5, p. 69-76, 2010. Disponível em: http://www.fsma.edu.br/si/edicao5/FSMA_SI_2010_1_Principal_2.pdf. Acesso em: 20 maio 2021.

· ASSAD, A. **Usando o geogebra para analisar os níveis do pensamento geométrico dos alunos do ensino médio na perspectiva de Van Hiele**. 159 f.. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2017.

· AZEVEDO FILHO, M. F. de. **Geometria euclidiana espacial**. 3ª ed.. Fortaleza: EdUECE, 2015.

· BENTO, H. A. **O desenvolvimento do pensamento geométrico com a construção de figuras geométricas planas utilizando o software: Geogebra.** 260f.. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

· BORSOI, C. **GEOGEBRA 3D NO ENSINO MÉDIO: UMA POSSIBILIDADE PARA A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL.** 159f.. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

· BRASIL. **Censo Escolar 2020.** Diretoria de Estatísticas Educacionais. Brasília: MEC, INEP, 2021. Disponível em: https://download.inep.gov.br. Acesso em: 24 maio 2021.

· _______. **Constituição Federal do Brasil**. Brasília: Senado, 1988. Disponível em: https://www2.senado.leg.br. Acesso em: 27 janeiro 2021.

· _______. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica.** Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br. Acesso em: 18 fevereiro 2021.

· _______. **Educação para jovens e adultos:** proposta curricular para o 1º segmento do Ensino Fundamental. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: Ação Educativa/MEC, 2001. Disponível em: http://portal.mec.gov.br. Acesso em: 18 fevereiro 2021.

· _______. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional,** LDB. 9394/1996. São Paulo: Saraiva, 1996. Disponível em: http://portal.mec.gov.br. Acesso em: 27/01/2021.

· _______. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br. Acesso em: 27 janeiro 2021.

· CORRÊA, J. N. P. **O Ensino de Poliedros por Atividade**. 347f.. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

· D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 23ª ed.. Coleção Perspectivas em Educação Matemática. Campinas: Papirus, 2012.

· DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações.** Livro 2. 1ª ed. 3ª impressão. São Paulo: Ática, 2001.

· FANTINATO, T. M. **Formação docente para a diversidade.** 1. ed. Curitiba: IESDE BRASIL S/A, 2014.

· FONSECA, M. da C. F. R. **Educação de Jovens e Adultos: especificidades, desafios e contribuições.** 2 ed., 1 reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2005

· FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** Saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

· GADOTTI, M.; ROMÃO, J. E. **Educação de jovens e adultos:** teoria, prática e proposta. 2ª ed. rev. Guia da escola cidadã. v. 5. São Paulo: Cortez. Instituto Paulo Freire, 2000.

· GEOGEBRA.ORG. **O que é o GeoGebra?** Disponível em https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT. Acesso em: 08 maio 2021.

· GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos computacionais no ensino de Matemática.** 473p. Coleção PROFMAT; 06, Rio de Janeiro: SBM, 2012.

· KALEFF, A. M.; HENRIQUES, A. de S.; REI, D. M.; FIGUEIREDO, L. G.. Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: o modelo de van hiele. **Boletim de Educação Matemática**: Bolema, Rio Claro, v. 9, n. 10, p. 1-8, 1994. Disponível em: file:///C:/Users/Cliente/Downloads/10671-Texto%20do%20artigo-56822-1-10-20150921%20(8).pdf. Acesso em: 08 abr. 2021.

· LIMA, M. L. da S.; SANTOS, M. C, dos.. Provas e demonstrações e níveis do pensamento geométrico: conceitos, bases epistemológicas e relações. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, [S.L.], v. 15, n. 1, p. 1-21, 14 maio 2020. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2020.e66702. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2020.e66702. Acesso em: 31 maio 2021.

· LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando Geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

· LORENZATO, S. A. **Porque não ensinar Geometria?** In: A Educação Matemática em Revista. pp. 3-13, ano III, n. 4. Blumenau: SBEM, 1995. Disponível em http://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf. Acesso em: 09 março 2021.

· MENDONÇA, C. **Pirâmides do Egito**. 2019. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/artes/piramides-do-egito. Acesso em: 15 junho 2021.

· MORAN, J. M. **A educação que desejamos:** Novos desafios de como chegar lá. São Paulo: Papirus, 2007.

· MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação do professor:** licenciatura e prática docente escolar. 1 reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

· NUNES, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. **Na vida dez, na escola zero.** 16 ed. 3 reimp. São Paulo: Cortez, 2011.

OLIVEIRA, M. C.; GAZIRE, E. S. **Ressignificando a Geometria Plana no Ensino Médio com o auxílio de van Hiele**. Cartilha. 56 f. Belo Horizonte: 2012. Disponível em: https://docplayer.com.br/8833646-Geometria-plana-no-ensino-medio-com-o-auxilio-de-van-hiele.html. Acesso em: 01 abril 2021.

· PIROZZI, G. P. **Tecnologia ou metodologia? O grande desafio para o século XXI**. SESI/CEUNSP, Revista Pitágoras. ISSN 2178-8243, v.4, n.4. FINAN - Nova Andradina/MS, dez/mar 2013. Disponível em: https://uniesp.edu.br/sites/_biblioteca/revistas/20170602112332.pdf. Acesso em: 10 junho 2021.

· SANTOS, F. B. dos. **A história das Pirâmides no Egito Antigo**. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/historiag/a-historia-das-piramides-no-egito-antigo.htm. Acesso em: 15 junho 2021.

· SCALABRIN, A. M. M. O.; MUSSATO, S.. GEOMETRIA ESPACIAL COM O SOFTWARE GEOGEBRA: uma proposta de atividades investigativas para o ensino de pirâmides. **Boletim do Museu Integrado de Roraima**, Roraima, v. 13, n. 1, p. 123-145, 02 dez. 2020. Semanal. Disponível em: file:///C:/Users/Cliente/Downloads/cborges,+artigo04_MC.pdf. Acesso em: 08 junho 2021.

· SEDUC. **Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás** (versão experimental). Goiânia/GO: Secretaria de Estado da Educação, 2021. Disponível em: http://www.seduc.go.gov.br. Acesso em: 25 junho 2021.

· SANTOS, F. B. dos. **A história das Pirâmides no Egito Antigo**. 2021. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/historiag/a-historia-das-piramides-no-egito-antigo. Acesso em: 15 jun. 2021.

· SOUZA, A. R. **Ensino da Geometria Espacial para Jovens e Adultos em um curso técnico em Saneamento**. 70 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013.

· VIEIRA, G.; ALLEVATO, N.. A PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO SOBRE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS À LUZ DO MODELO VAN HIELE. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática,** REnCiMa, v. 6, n. 1, pp. 43-53. Edição Especial: IV Encontro de Produção

Discente, 2015. Disponível em: file:///C:/Users/Cliente/Downloads/928-Texto%20do%20artigo-3506-1-10-20150520.pdf. Acesso em: 31 maio 2021.

· WIKIPÉDIA. **CUBO DE RUBIK.** In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2020. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Cubo_de_Rubik&oldid=60036917. Acesso em: 15 junho 2021.

ANEXO 01: DECLARAÇÃO DE RECEBIMENTO DO PRODUTO EDUCACIONAL POR INSTITUIÇÃO FEDERAL DE ENSINO

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

Declaração nº 12/2021 - DE-CE/CMPCE/IFGOIANO

DECLARAÇÃO

A Direção de Ensino do Instituto Federal Goiano, Campus Ceres, intitulada pela Portaria nº 27, publicada no D.O.U. de 02 de fevereiro de 2016, declara ter recebido uma cópia em formato digital do Produto Educacional intitulado **UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ESTUDO DE GEOMETRIA ESPACIAL NA EJA: EXPLORANDO SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA GEOGEBRA**, de autoria do Prof. Eber Oliveira Silva, como um dos resultados do seu trabalho de pesquisa de mestrado, no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), vinculado ao Programa de Pós-graduação Stricto Sensu do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás (IME-UFG).

O referido Produto Educacional em formato de Livro Digital (*E-book*) está adequado para utilizado, a critério do docente em validação do Conselho de Curso, como material didático complementar para uso de nossos estudantes, conforme proposto pelo autor. O material foi licenciado com uma licença *Creative Commons* e depositado no Portal EduCapes, no endereço eletrônico http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/602739.

Por ser a expressão da verdade, firmo a presente declaração para que surta seus efeitos legais.

Ceres, 16 de setembro de 2021.

(Assinado Eletronicamente)
Adriano Honorato Braga
Diretor de Ensino
Port. 027, D.O.U. de 01/02/2016

Documento assinado eletronicamente por:

- **Adriano Honorato Braga**, **DIRETOR - CD3 - DE-CE**, em 16/09/2021 15:01:28.

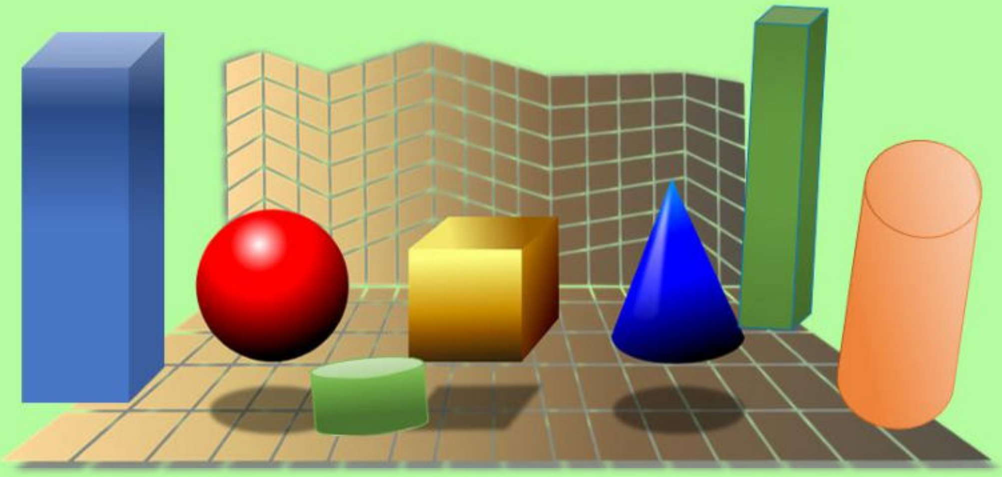
Este documento foi emitido pelo SUAP em 16/09/2021. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifgoiano.edu.br/autenticar-documento/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 309514
Código de Autenticação: 56d4050d8a

INSTITUTO FEDERAL GOIANO
Campus Ceres
Rodovia GO-154, Km.03, Zona Rural, None, CERES / GO, CEP 76300-000

APÊNDICE 01: PRODUTO EDUCACIONAL

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ESTUDO DE GEOMETRIA ESPACIAL NA EJA



EXPLORANDO SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA GEOGEBRA

EBER OLIVEIRA SILVA
Autor

ELISABETH CRISTINA DE FARIA

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ESTUDO DE GEOMETRIA ESPACIAL NA EJA

EXPLORANDO SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA GEOGEBRA

Eber Oliveira Silva
Elisabeth Cristina de Faria

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Silva, Eber Oliveira
Uma Proposta Pedagógica para o Estudo de Geometria Espacial na EJA [manuscrito] : Explorando Sólidos Geométricos com o Auxílio do Software de Geometria Dinâmica GeoGebra / Eber Oliveira Silva. - 2021.
109 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Elisabeth Cristina de Faria.
Produto Educacional (Stricto Sensu) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2021.
Bibliografia.

1. EJA. 2. GeoGebra. 3. Geometria Espacial. 4. Pensamento Geométrico. I. Faria, Elisabeth Cristina de, orient. II. Título.

CDU 51

RESUMO

Este livro digital interativo é baseado em partes de um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Programa de Pós-graduação *Stricto Sensu* do Instituto de Matemática e Estatística (IME-UFG). Intitulado "Geometria Espacial na EJA: Uma Proposta de ensino à luz do Modelo van Hiele com auxílio do Software de Geometria Dinâmica GeoGebra", o TCC supracitado consiste em uma pesquisa bibliográfica e versa sobre alguns desafios e possibilidades para o ensino e aprendizagem de Geometria Espacial na Educação de Jovens e Adultos (EJA). Diante do descaso com o ensino da geometria escolar, da escassez de materiais pedagógicos especificamente elaborados para a EJA e da falta de sentido que os alunos da EJA demonstram perceber na forma como os conteúdos geométricos normalmente são ensinados na escola, nos propomos a elaborar e disponibilizar ao caro aluno da EJA, e a quem mais se interessar, um material que os auxilie na compreensão de tão importantes conteúdos de um modo que os faça perceber a beleza da Geometria enquanto ciência primordial para a compreensão do mundo que nos cerca. Nesse sentido, essa proposta traz algumas orientações importantes para o estudo de sólidos geométricos, mais especificamente direcionadas a alunos que não tiveram a oportunidade para se aprofundar no estudo de Geometria Espacial, tratando esses assuntos de maneira leve, envolvente e de fácil compreensão, com uma linguagem simples e detalhada, proporcionando ao leitor as condições necessárias para o estudo, valorizando seus conhecimentos prévios, respeitando seus níveis de pensamento geométrico e lhe permitindo participar ativamente da construção do próprio conhecimento, de modo que a aprendizagem seja, de fato, significativa. A essência dessa obra é uma proposta pedagógica com exemplos de atividades no GeoGebra 3D, que o leitor pode propor ao seu professor explorar durante as aulas, caso ache conveniente, e ainda terá a rica oportunidade de estudar em casa e aprimorar seus conhecimentos, principalmente em tempos nos quais o acesso presencial à escola não está tão fácil, como a exemplo da fase pandêmica na qual nosso país e o mundo momentaneamente se encontram.

Palavras-chave: EJA. GeoGebra. Geometria Espacial. Pensamento Geométrico.

Dedico essa obra à minha esposa Lucimar, aos meus pais Isac e Geralda, aos meus irmãos Mirson e Tânia e a todos os familiares e amigos, que sempre me apoiaram e incentivaram.

... ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou a sua construção.

Paulo Freire

SUMÁRIO

CARTA AO LEITOR

Caro leitor

Bem-vindo ao nosso estudo sobre sólidos geométricos com o auxílio do *software* GeoGebra.

Para facilitar sua compreensão, vamos ajudá-lo a construir, em um ambiente virtual dinâmico, sólidos geométricos que representam objetos com formas semelhantes àqueles que você pode observar em sua casa, na rua, no trabalho e em vários outros locais. Se você observar atentamente todos os detalhes de cada sólido geométrico que faz parte desse estudo, tenho certeza de que irá identificar muitas semelhanças com objetos que você conhece.

Se você ainda não conhece o GeoGebra, ou se conhece, mas tem dificuldades em trabalhar com esse programa, não se preocupe. Esse material vai auxiliá-lo em todas as etapas da construção e manipulação dos objetos, de modo que, quando você menos esperar, vai perceber que está aprendendo geometria de um jeito fácil e divertido.

Mesmo que no início as coisas pareçam um pouquinho complicadas, não se desanime. Se seguir todas as instruções com bastante atenção, vai perceber que as atividades são bem mais fáceis que parecem ser. Para facilitar sua compreensão, as atividades são descritas passo a passo, de forma simples e detalhada. Com dedicação e paciência você conseguirá realizar todas as atividades e aprender muitas coisas legais e interessantes.

Para que você aprenda, de fato, é importante que não pule nenhuma etapa e fique atento a todos os detalhes, pois a cada passo você descobrirá muitas coisas curiosas e interessantes sobre as figuras que você está construindo. Vá trabalhando sem pressa e aproveite para registrar suas observações para poder rever suas descobertas mais tarde. Registre também suas dúvidas e dificuldades, para pesquisar sobre o assunto ou tirar dúvidas com seu professor ou com seus colegas.

Tenho certeza de que você irá aprender muitas coisas interessantes sobre objetos do seu dia a dia, descobrir coisas novas, se divertir e se encantar com a beleza da geometria.

Para complementar, inserimos vários vídeos online no corpo do texto para você assistir.

Bons estudos!

Eber O. Silva

1 EJA: UM DIREITO À EDUCAÇÃO A QUALQUER TEMPO

A Educação de jovens e Adultos – EJA – é uma modalidade da Educação Básica, criada com o objetivo principal de promover a democratização do ensino no Brasil e destinada aos brasileiros que não tiveram condições de concluir o ensino fundamental ou o ensino médio na idade própria.

É bom que você saiba que a EJA tem amparo legal na legislação vigente, conquistando maior reconhecimento pós criação da LDB, em 1996. O texto da seção V, Art. 37º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional 9.394/96, reconhece a EJA como modalidade específica da educação básica e atribui ao Poder Público a obrigação de promover ações no sentido de viabilizar e gerir políticas de incentivo ao acesso a uma educação gratuita e de qualidade àqueles que não tiveram condições de concluir seus estudos na idade própria, conforme mencionado:

> **Art. 37º.** A educação de jovens e adultos será destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos no ensino fundamental e médio na idade própria. **§ 1º**. Os sistemas de ensino assegurarão gratuitamente aos jovens e aos adultos, que não puderam efetuar os estudos na idade regular, oportunidades educacionais apropriadas, consideradas as características do alunado, seus interesses, condições de vida e de trabalho, mediante cursos e exames.
> **§ 2º.** O Poder Público viabilizará e estimulará o acesso e a permanência do trabalhador na escola, mediante ações integradas e complementares entre si. (BRASIL, 1996).

Em reconhecimento do grande potencial educativo da EJA queremos motivar você, jovem ou adulto que teve poucas oportunidades de frequentar a escola, a retomar os estudos, por acreditar ser esse um meio de resgate da sua autoestima e conquista da cidadania plena, favorecido pelas relações sociais estabelecidas em um ambiente que busca atender aos seus anseios, necessidades e expectativas. Nosso desejo é que as práticas educacionais dessa modalidade de ensino tenham como personagem central você, aluno jovem, adulto ou idoso.

Por não encontrar muitas publicações especificamente elaboradas para o ensino de geometria na EJA de forma dinâmica e interativa, achamos por bem disponibilizar a você, esse material de estudo. Esperamos o estar ajudando a aprender geometria de forma fácil e prazerosa.

Se você deseja saber um pouco mais sobre a EJA, assista o vídeo 1.

Vídeo 1: Saiba como funciona a EJA

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

Reprodução: aproximadamente 12 minutos

Fonte[1]: YouTube:www.youtube.com/watch?v=LOVhA5w_SZc&ab_channel=TVBrasilGov. Acesso em 02/08/2021

Mas... por que estudar geometria na EJA?

A geometria é um ramo da Matemática cujo estudo é fundamental para a compreensão da composição das formas existentes no mundo real, constituindo-se num vasto campo de possibilidades de investigação, reflexão, interpretação e dedução. Por favorecer a análise de fatos e o estabelecimento de ligações e relações entre elementos, o estudo da Geometria Espacial promove o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia, além da capacidade de conjecturar, sintetizar, formalizar e aplicar o conhecimento matemático.

Consideramos que você, aluno da EJA, ainda que esteja fora da escola há muito tempo, tem muita experiência de vida e plenas condições de aprender os conteúdos da forma como são tratados nesse material de apoio. Acreditamos que você tenha um conhecimento razoável sobre diversas formas geométricas presentes no seu dia a dia e que consiga identificar algumas de suas propriedades básicas. Aprender um pouco mais de geometria a partir daquilo que você já sabe é muito importante para sua vida profissional e para o prosseguimento dos estudos.

[1] Todos os vídeos utilizados nessa obra, incluindo as imagens que os identificam, são de acesso livre e encontram-se disponíveis no YouTube. Contudo, atribuímos todos os créditos aos seus responsáveis.

2 O SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA GEOGEBRA

Em primeiro lugar, pensamos em propor atividades no GeoGebra porque as potencialidades reconhecidas nos softwares de geometria dinâmica são muito importantes para o desenvolvimento da abstração matemática, pois possibilitam a análise de relações e propriedades de objetos matemáticos e a formulação de conceitos, dando sentido ao estudo. No entanto, é muito importante que você utilize, além do GeoGebra, outros materiais como textos, figuras e objetos concretos. Dessa forma, você perceberá várias relações e compreenderá melhor os conteúdos estudados.

As importantes descobertas proporcionadas pelo dinamismo dos softwares de geometria dinâmica revelam seu aspecto heurístico e a amplitude das possibilidades de visualização, deduções, conjecturas e provas visuais que situam o aluno em um importante cenário para investigação, instigando-o a se aventurar em novas descobertas, na comparação de objetos, percepção das relações entre elementos e no reconhecimento de suas propriedades. Como afirma Pereira (2012), "As características do GeoGebra potencializam a constituição de cenários para investigação, nos quais o aluno é capaz de experimentar situações em um processo dinâmico" (PEREIRA, 2012, p. 32 *apud* SCALABRIN; MUSSATO, 2020, p. 131).

A diversidade de ferramentas disponíveis nesses ambientes permite que as características e propriedades desses objetos sejam percebidas visualmente durante cada fase da construção.

O que mais você precisa saber sobre o software GeoGebra

Criado em 2001 e atualmente utilizado em 190 países ao redor do mundo, o GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma, que vem ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem para todos os níveis de ensino, combinando conteúdos de geometria, álgebra, estatística e cálculo numa única aplicação. O dinamismo desse software possibilita a professores e alunos explorar, investigar, conjecturar e testar hipóteses acerca de situações na construção do conhecimento matemático.

Indicado para todos os níveis e modalidades de ensino, o GeoGebra reúne ferramentas de Geometria, Álgebra, Estatística e Cálculo, numa interconexão prática, de fácil manuseio e de linguagem simples, esse ambiente vem se destacando como um estímulo à criatividade e ao desenvolvimento do raciocínio lógico, facilitando a compreensão de conceitos, a criação de conjecturas e a comprovação visual de diversos resultados algébricos. Completando o trabalho com régua, compasso, transferidor e outros materiais manipuláveis, o GeoGebra dispõe de recursos similares muito práticos.

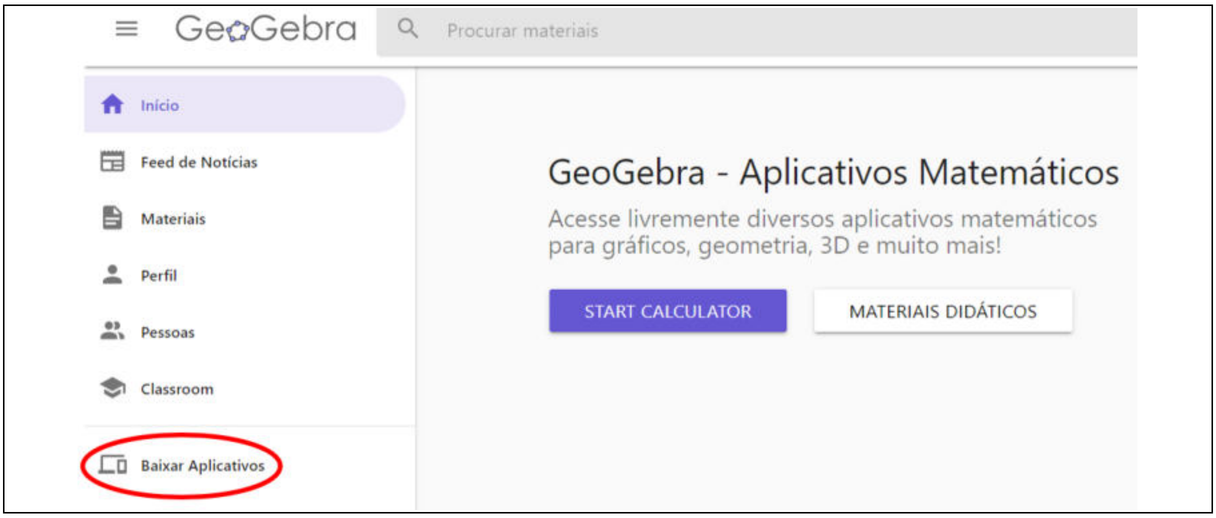
Dentre as versões para notebooks ou PCs, recomendamos o GeoGebra Classic para Desktop, por ser a versão mais limpa e completa do GeoGebra. Podendo ser executado em notebooks, PCs ou aparelhos com sistema Android, trata-se de um software relativamente leve. Existe ainda a versão online, que não requer o armazenamento de dados permanentes na memória do computador, contudo, a versão para Desktop oferece a vantagem do trabalho offline em casos de indisponibilidade de rede.

A versão utilizada nessa obra é a 6.0.631.0-offline, atualizada em março de 2021. Embora você encontre diversos tutoriais em formato de textos e vídeos na internet, é muito importante que você faça uma análise crítica dos materiais consultados e da possibilidade de descobrir sozinho a funcionalidade de diversas ferramentas. Recomendamos que você consulte documentos mais recentes, verifique de qual versão estão falando e explore o software para descobrir como as ferramentas funcionam.

Para explorar o GeoGebra, você tem a opção de utilizar a versão on-line acessando o site www.geogebra.org/classic#classic6 ou, se preferir, pode instalá-lo em seu computador. A segunda opção oferece a vantagem de permitir que você trabalhe offline quando estiver sem acesso à uma rede de internet.

Para baixar o software e instalá-lo em seu computador, acesse o site www.geogebra.org e clique na opção Baixar Aplicativos, como indicado na Figura 1:

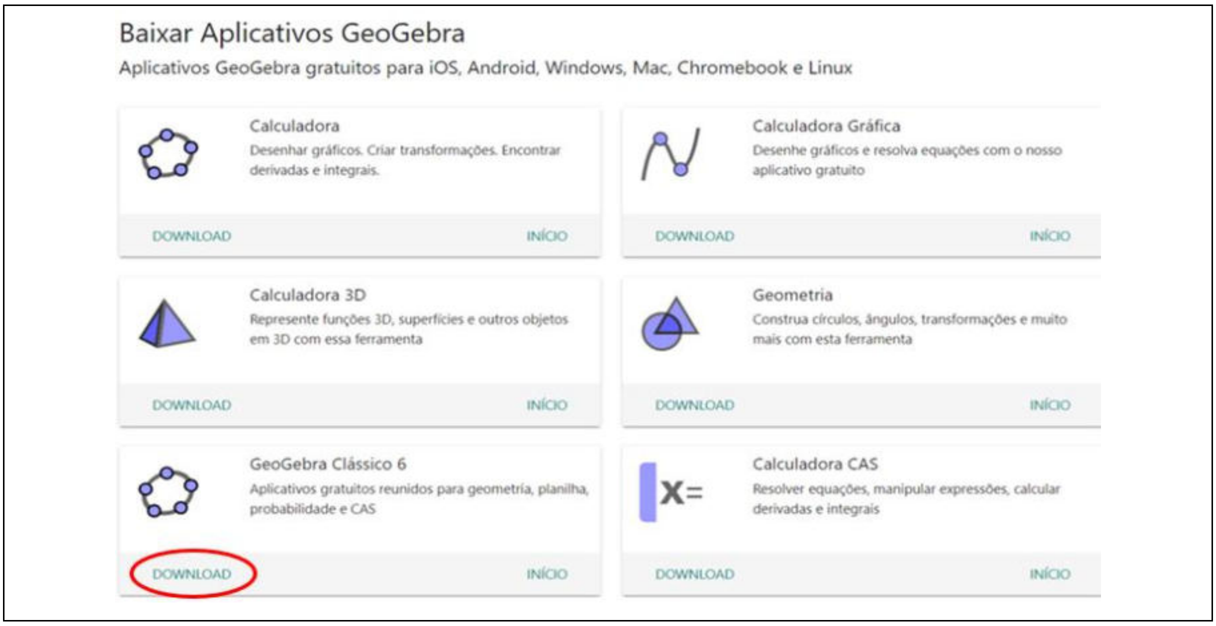
Figura 1: Baixando o software GeoGebra



Fonte: https://www.geogebra.org/?lang=pt

Ao escolher essa opção, abrirá outra tela com vários aplicativos para download. É interessante escolher a versão mais recente. Para nosso estudo, sugerimos o GeoGebra Classic 6. Basta escolher essa versão e clicar em DOWNLOAD para baixar, como na Figura 2.

Figura 2: Escolhendo a versão e fazendo Download



Fonte: https://www.geogebra.org/?lang=pt

Concluído o download, basta instalar o software no seu computador e começar a explorá-lo. Para saber um pouco mais a esse respeito, sugerimos que você assista o Vídeo 2.

Vídeo 2: Introdução ao GeoGebra

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

Reprodução: aproximadamente 48 minutos

Fonte: YouTube: www.youtube.com/watch?v=IRXmjQx7mWc. Acesso em 02/08/2021.

O GeoGebra 3D

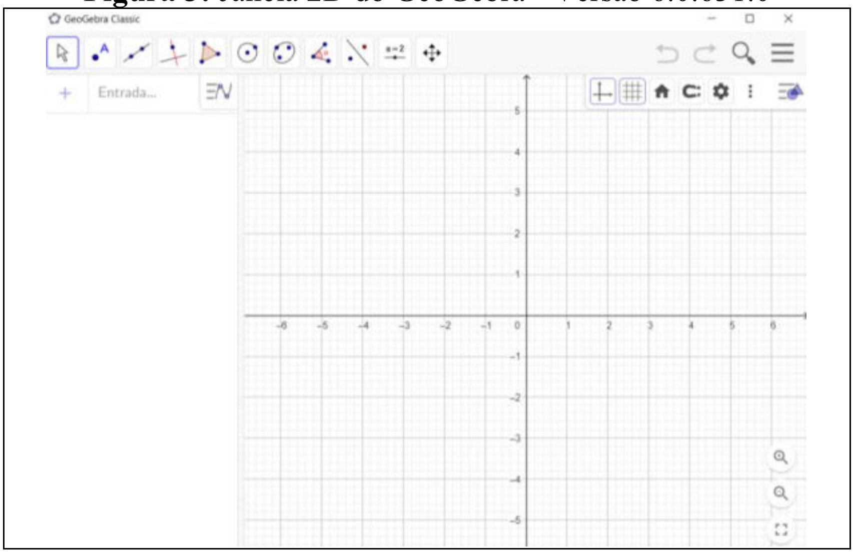
O GeoGebra 3D é um importante instrumento de apoio para você explorar, de maneira dinâmica as mais variadas representações de objetos, a fim de perceber elementos e propriedades das figuras. Para melhor desempenho, recomendamos que você comece construindo figuras na Janela 2D. Vá clicando nas ferramentas e vendo o que acontece na tela. Isso lhe dará maior confiança para utilizar as ferramentas do ambiente 3D.

Contribuindo para o desenvolvimento da noção espacial, o GeoGebra 3D dispõe de ferramentas que permitem construir figuras tridimensionais e dar a elas movimentos translativos e rotativos no espaço virtual, favorecendo a análise de elementos que podem ser melhor explorados quando a figura é observada por diferentes ângulos de visualização. Essa interação dinâmica possibilita a visualização desses objetos sob diferentes ângulos, favorecendo a compreensão da sua estrutura, o processo de formação de imagens mentais e a compreensão dos conceitos geométricos.

A interface do Geogebra 3D exibe o Campo de Entrada, Janela de Álgebra e duas janelas de visualização, que podem estar dispostas lado a lado. A primeira janela de visualização é do Geogebra 2D, representando o plano xy e a segunda é do ambiente 3D, que representa o espaço xyz.

Ao abrir o GeoGebra Classic, versão 6.0.631.0, será apresentada uma tela como na Figura 3.

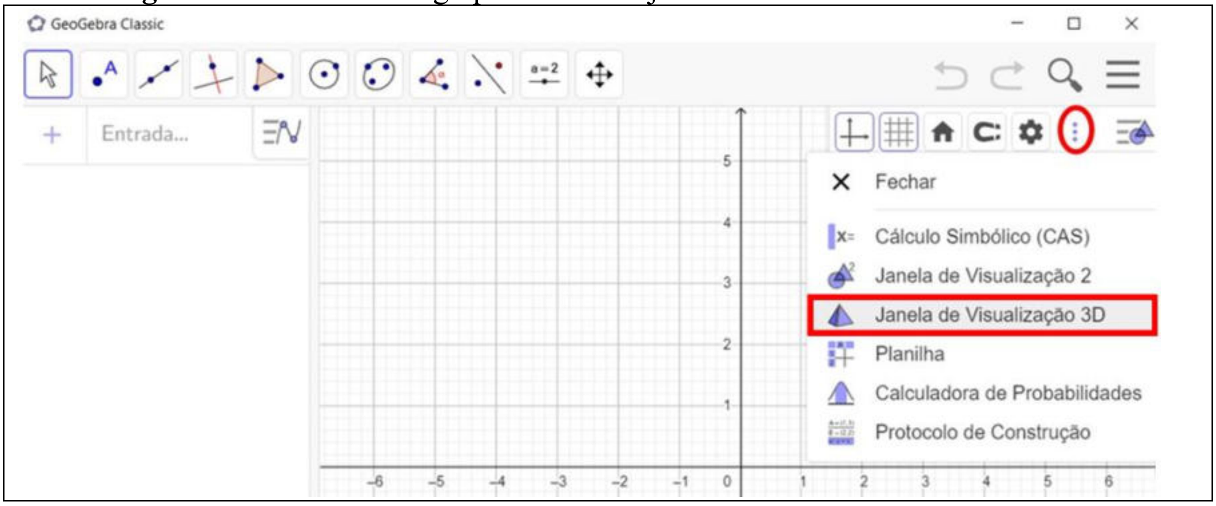
Figura 3: Janela 2D do GeoGebra - Versão 6.0.631.0



Fonte: Elaborada pelo autor

Para abrir a janela de visualização 3D, basta clicar nos três pontinhos que aparecem no canto superior direito, logo abaixo da lupa e, na caixa de diálogo que se abre, clicar na opção “Janela de Visualização 3D”, como indicado na Figura 4.

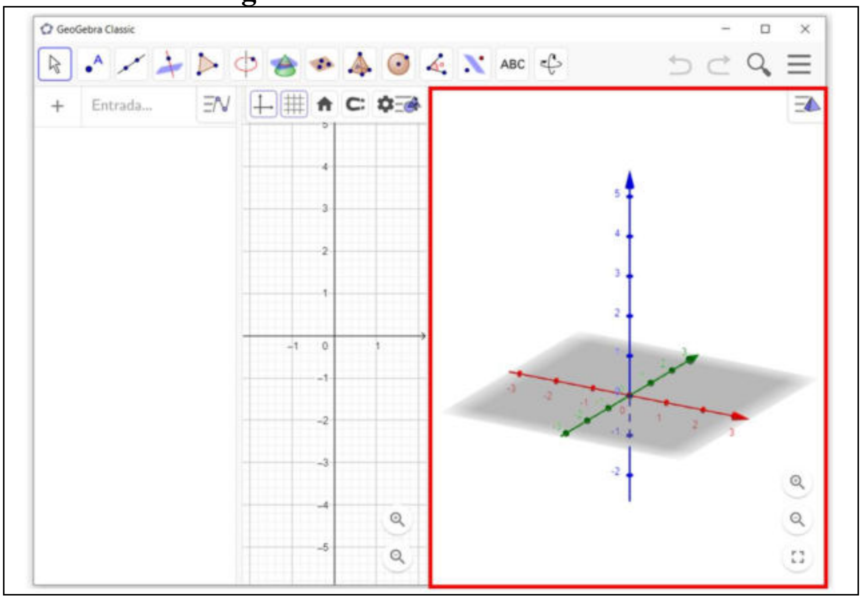
Figura 4: Caixa de diálogo para acesso à janela 3D do GeoGebra



Fonte: Elaborada pelo autor

Fazendo isso, abrirá a tela a janela 3D do GeoGebra, que permitirá facilmente construir e manipular objetos tridimensionais, como é o caso dos sólidos abordados nesse trabalho, como na Figura 5.

Figura 5: Janela 3D do GeoGebra



Fonte: Elaborada pelo autor

Um simples clique em qualquer região da janela 2D ou 3D faz com que a barra de ferramentas da respectiva janela apareça, como na Figura 6.

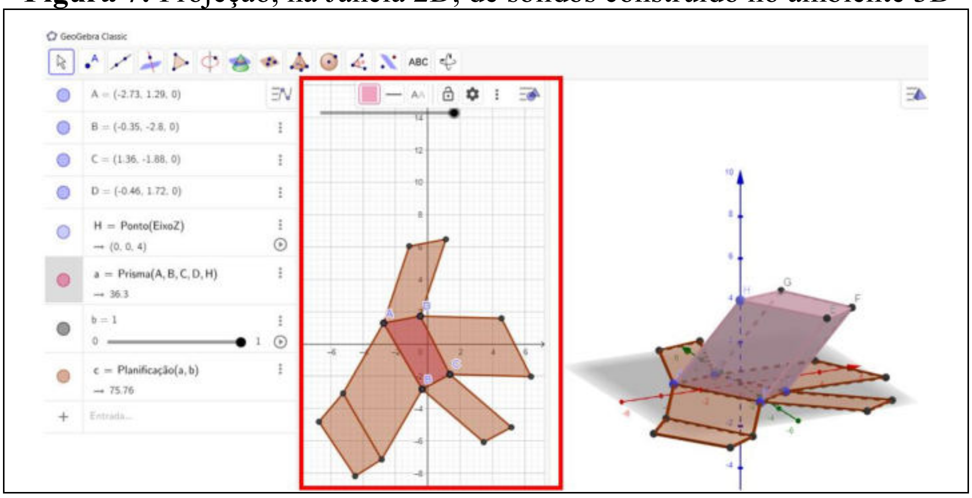
Figura 6: Barra de ferramentas das Janelas 2D e 3D, respectivamente

Fonte: Elaborada pelo autor

Manter as duas janelas abertas lado a lado permite ao usuário, durante o estudo de sólidos geométricos, observar o comportamento de alguns elementos planos desses sólidos. No entanto, é importante ressaltar que, por razões óbvias, as ferramentas da janela 2D não são as mesmas da janela 3D. É fácil verificar isso clicando alternadamente sobre as duas janelas e observando o que ocorre na barra de ferramentas, como mostram as figuras a seguir.

A base plana das construções feitas no ambiente 3D, assim como as planificações de sólidos geométricos, é automaticamente projetada no plano xy e aparecem na janela de visualização 2D, como apresentado na Figura 7.

Figura 7: Projeção, na Janela 2D, de sólidos construído no ambiente 3D



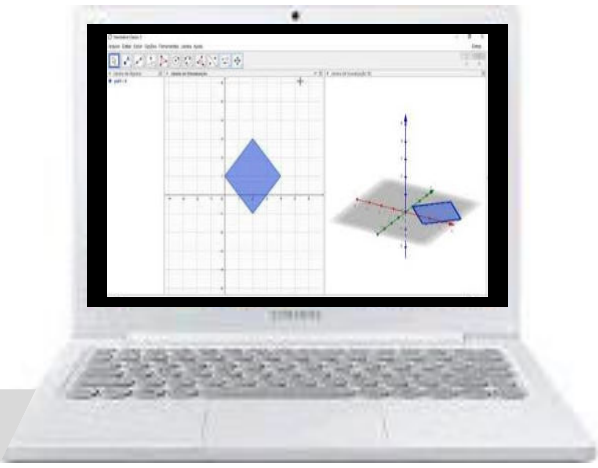
Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra.

Você pode aprender um pouco mais sobre o GeoGebra 3D assistindo o Vídeo 2.

Vídeo 3: O GeoGebra 3D

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem



Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

Reprodução: aproximadamente 10 minutos

Fonte: YouTube: www.youtube.com/watch?v=VKFbr16REVk&t=71s. Acesso em 02/08/2021.

3 O ESTUDO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Nessa seção aprenderemos um pouco sobre os poliedros (poliedros platônicos, prismas e pirâmides) e corpos redondos (cilindro, cone e esfera). Para esse estudo é importante que você consiga desenhar polígonos e círculos com o GeoGebra 2D, e, além disso, reveja definições e conceitos como lado, vértice, diagonal, raio e diâmetro, além de relembrar como se calcula áreas dessas figuras planas.

Que tal ter uma noção básica do que iremos estudar? O Vídeo 4 ajudará você a compreender os conteúdos e desenvolver as atividades propostas mais adiante.

Vídeo 4: Poliedros e corpos redondos

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

Reprodução: aproximadamente 5 minutos

Fonte: YouTube: www.youtube.com/watch?v=gHTSeS8wDts&t=108s. Acesso em 02/08/2021.

Ao avançar no campo da Geometria Espacial, é importante que você saiba sobre ângulos, paralelismo e perpendicularidade entre retas no plano, além de dominar os cálculos de distâncias entre objetos no plano e áreas de figuras planas.

Para ajudar você, apresentamos algumas definições, axiomas e teoremas, porém, sem apresentar nenhuma demonstração. O objetivo é que você explore essas afirmações no GeoGebra e tente, a partir da observação das figuras, compreender o significado de cada informação.

Tendo em mente os pré-requisitos básicos e outras informações importantes para esse estudo, sugere-se afirmações como os que se seguem, contudo, sem nenhuma demonstração, por considerar que esses alunos já passaram pelo estudo da Geometria Plana. A disposição dessas informações é apresentada como sugestão, e sua importância se deve ao fato de que o aluno da EJA, em casos não raros de esquecimento ou não assimilação dos conteúdos estudados anteriormente a essa fase, necessita ter onde recorrer para tirar suas dúvidas. Essas informações, com certeza, facilitarão para que novos conceitos façam sentido para esse aluno.

Seguem algumas afirmações elaboradas pelo autor, com base nos conhecimentos adquiridos ao longo dos anos, e outras baseadas nas obras de Azevedo Filho (2015), Corrêa (2019) e Dante (2001).

Caso você desconheça alguns termos, não se preocupe, apenas preste atenção no texto relacionado a eles. De qualquer modo, vamos explicá-las de maneira bem superficial. *"Definição"* é um enunciado que explica o significado de alguma coisa. *"Axiomas"* são conceitos primitivos, aceitos como verdadeiros sem a necessidade de demonstração. *"Proposições"* são afirmações que podem ser demonstradas.

Preste bastante atenção nessas afirmações e tente verificar a veracidade delas no GeoGebra.

Definição 3.1 (Segmento de reta) Sejam A e B dois pontos distintos sobre uma reta r. O conjunto de todos os pontos de r, localizados entre A e B, inclusive os próprios A e B, recebe o nome de segmento de reta e é denotado por segmento AB.

Definição 3.2 (Polígono) Chama-se polígono toda figura plana fechada formada por segmentos de reta que se encontram nos extremos e não se cruzam em nenhum ponto.

Definição 3.3 (Paralelismo) Duas retas r e s no plano são ditas paralelas se, e somente se, não têm nenhum ponto em comum. Em linguagem matemática, escreve-se r//s. Duas retas não paralelas denominam-se retas concorrentes.

Definição 3.4 (Perpendicularismo) Duas retas concorrentes no plano são perpendiculares se, e só se, o ângulo entre elas mede 90º.

Axioma 3.5 (Postulado de Euclides) Por um ponto A fora de uma reta r passa uma única reta t paralela à reta r.

Definição 3.6 (Paralelogramo) Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e só se, possui os lados opostos paralelos.

Proposição 3.7 Em todo paralelogramo os ângulos opostos são congruentes, ou seja, têm medidas iguais.

Proposição 3.8 Em um paralelogramo os pares de lados opostos são congruentes.

Definição 3.9. (Triângulo isósceles) Um triângulo é dito isósceles se tem dois lados congruentes.

Proposição 3.10 Em um triângulo isósceles os ângulos da base têm mesma medida.

Definição 3.11 (Triângulo equilátero) Um triângulo é dito equilátero se, e só se, os três lados e os três ângulos são congruentes.

Proposição 3.12 Em um triângulo equilátero os três ângulos internos medem 60º.

Definição 3.13 (Plano) Um plano é uma figura geométrica bidimensional formada pela reunião de infinitas retas, perpendiculares a uma reta dada, dispostas lado a lado.

Axioma 3.14 Cada reta contém pelo menos dois pontos distintos; todo plano contém no mínimo três pontos não colineares; o espaço contém pelo menos quatro pontos distintos entre si não coplanares e não colineares.

Axioma 3.15 Por três pontos não colineares passa um único plano.

Definição 3.16 (Paralelismo no espaço) Dados dois planos α e β, diz-se que esses planos são paralelos se existe uma reta r simultaneamente perpendicular aos dois.

Axioma 3.17 A interseção de dois pontos distintos não paralelos é uma reta.

Definição 3.18 (Distância entre dois planos) A distância entre dois planos paralelos α e β, denotada por $d(\alpha, \beta)$, é definida como sendo a distância de um ponto qualquer de um dos dois planos ao outro plano.

Definição 3.19 (Planificação) Planificar um poliedro consiste no processo de cortá-lo ao longo de algumas de suas arestas e abri-lo de modo que suas faces se apoiem totalmente sobre uma superfície plana, sem sobreposições ou deformações.

É importante saber que a planificação de um poliedro pode ser feita corretamente de diferentes maneiras. Não se frustre se encontrar em outros materiais de estudo planificações diferentes das que você verifica no GeoGebra. Todas elas podem estar corretas!

O vídeo 5 esclarece algumas dúvidas sobre as planificações.

Vídeo 5: Planificação de sólidos geométricos

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

Reprodução: aproximadamente 10 minutos

Fonte: YouTube: www.youtube.com/watch?v=mSL27huvhIQ. Acesso em 02/08/2021.

As atividades que se seguem o ajudarão a compreender as representações bidimensionais de objetos tridimensionais apresentadas no livro didático. Isso é muito importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

3.1 Aprendendo sobre prismas

Para entender o que é um prisma, vamos construir e manipular esse sólido no GeoGebra e analisá-lo atentamente por diferentes ângulos, buscando compreender sua estrutura, identificar elementos e a perceber algumas propriedades e relações. Procure comparar essas figuras com materiais concretos e observar todas as informações apresentadas na tela do computador, principalmente os dados numéricos da Janela de Álgebra.

A partir dessas observações, esperamos que você compreenda a definição 3.20.

Definição 3.20 (Prismas) Prisma é um poliedro composto por duas faces poligonais congruentes e paralelas contendo n lados que formam suas bases e uma quantidade n de paralelogramos que formam suas faces laterais.

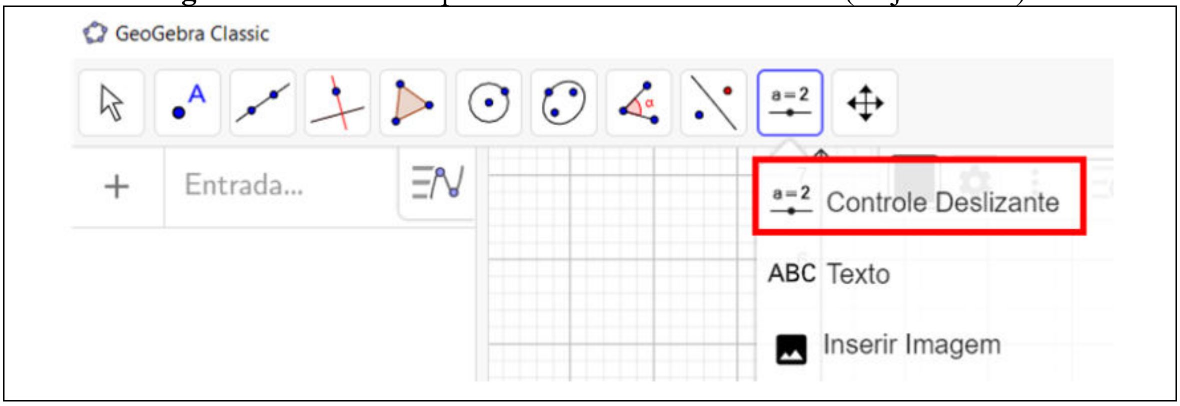
Para esse estudo, vamos construir seis prismas distintos, o suficiente para que você perceba elementos, relações e propriedades, desenvolva imagens mentais e crie seu próprio conceito de prisma.

Para essa e todas as demais atividades desse estudo, você deve abrir o GeoGebra e dispor as janelas 2D e 3D lado a lado, como já indicado anteriormente nas figuras 2 e 3.

Tudo certo? Agora siga os seguintes passos:

1) Clique na janela 2D para acionar sua barra de ferramentas, como já ilustrado na Figura 4 e crie um controle deslizante, clicando em controle deslizante, como mostra a Figura 8, e depois sobre a Janela 2D novamente.

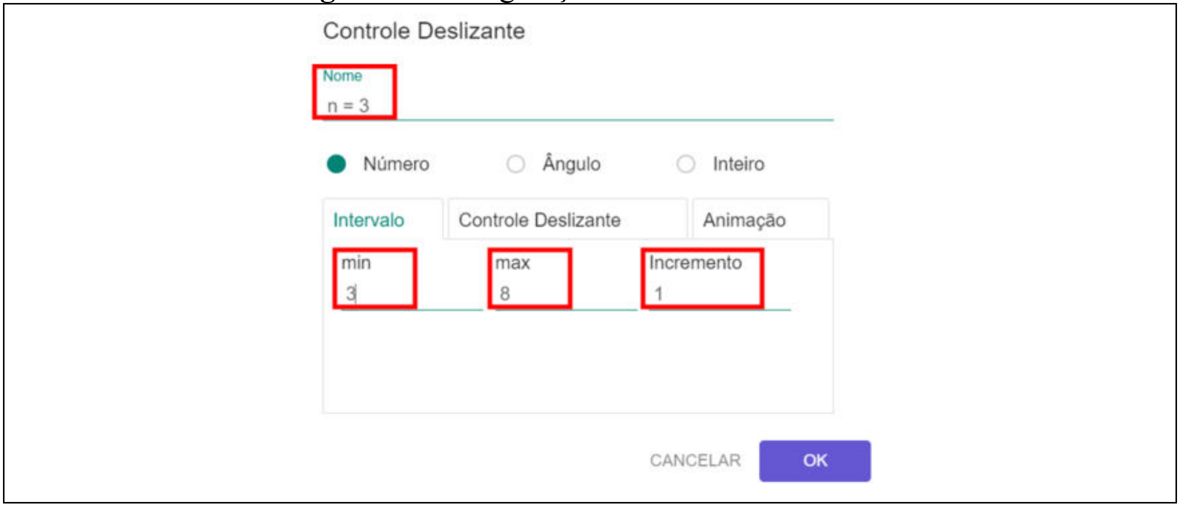
Figura 8: Ferramenta para criar o controle deslizante (na janela 2D)



Fonte: Elaborada pelo autor

2) A caixa de diálogo que se abriu é para configuração do controle deslizante. Como se pretende construir polígonos com n lados, altere o nome do controle deslizante para "n = 3" e os demais valores de n para "min: 3", "max: 8" e "Incremento: 1", como na Figura 9. Feitas essas alterações, clique em OK.

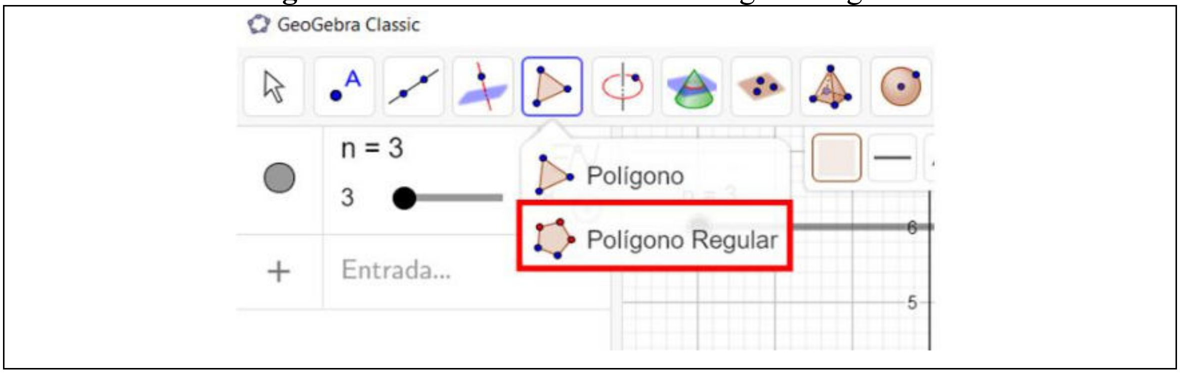
Figura 9: Configuração do controle deslizante



Fonte: Elaborada pelo autor

3) Para se criar uma base regular para o prisma, clique na janela 3D e, na barra de ferramentas, clicar na ferramenta "Polígono Regular", como na Figura 10.

Figura 10: Acesso à ferramenta "Polígono Regular"

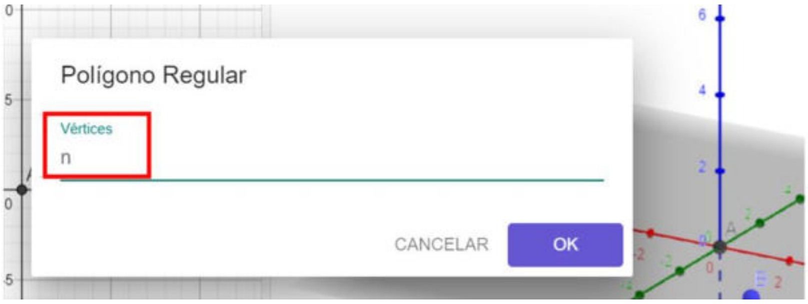


Fonte: Elaborada pelo autor

6) Depois de clicar em "Polígono Regular", clique no ponto (0, 0, 0), que é o encontro dos três eixos e depois em outro ponto qualquer do plano xy. Essa ação determinará um dos lados do polígono regular que servirá de base para o prisma.

Ao clicar nesses dois pontos, abre-se a caixa de diálogo ilustrada na Figura 11. Para vincular o número de lados do polígono ao controle deslizante, preencha o campo "Vértice" com o parâmetro "n" e clicar OK. Vincular a base do prisma ao controle deslizante possibilita a construção de diversos prismas, a partir da variação do parâmetro "n". Vale observar que o número de lados de um polígono é igual ao número de vértices, portanto, o campo vértices define também o número de lados.

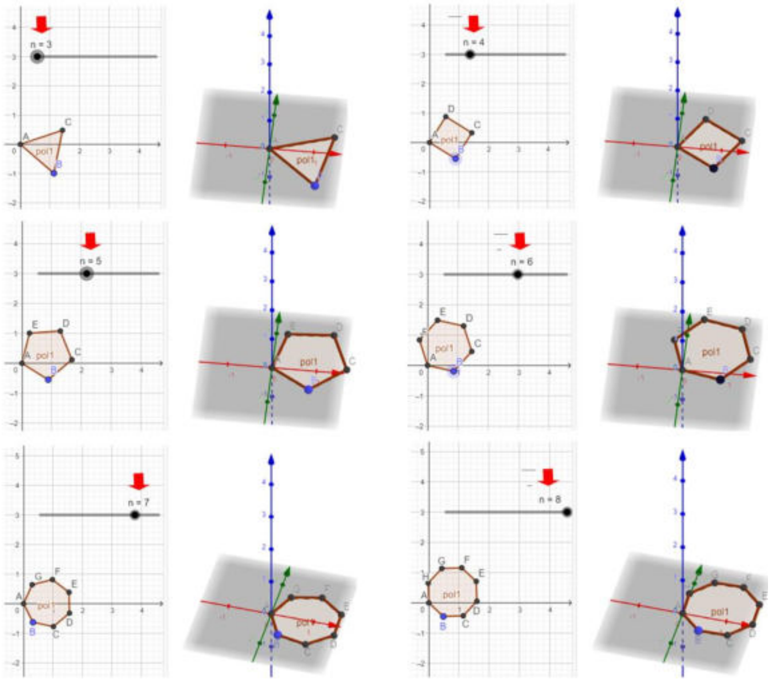
Figura 11: Vinculando o número de vértices do polígono ao controle deslizante n



Fonte: Elaborada pelo autor

O primeiro polígono que surge imediatamente é o triângulo. Daí, como os valores de n variam de 3 a 8, os demais polígonos surgem na seguinte sequência: quadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono e octógono, conforme Figura 12.

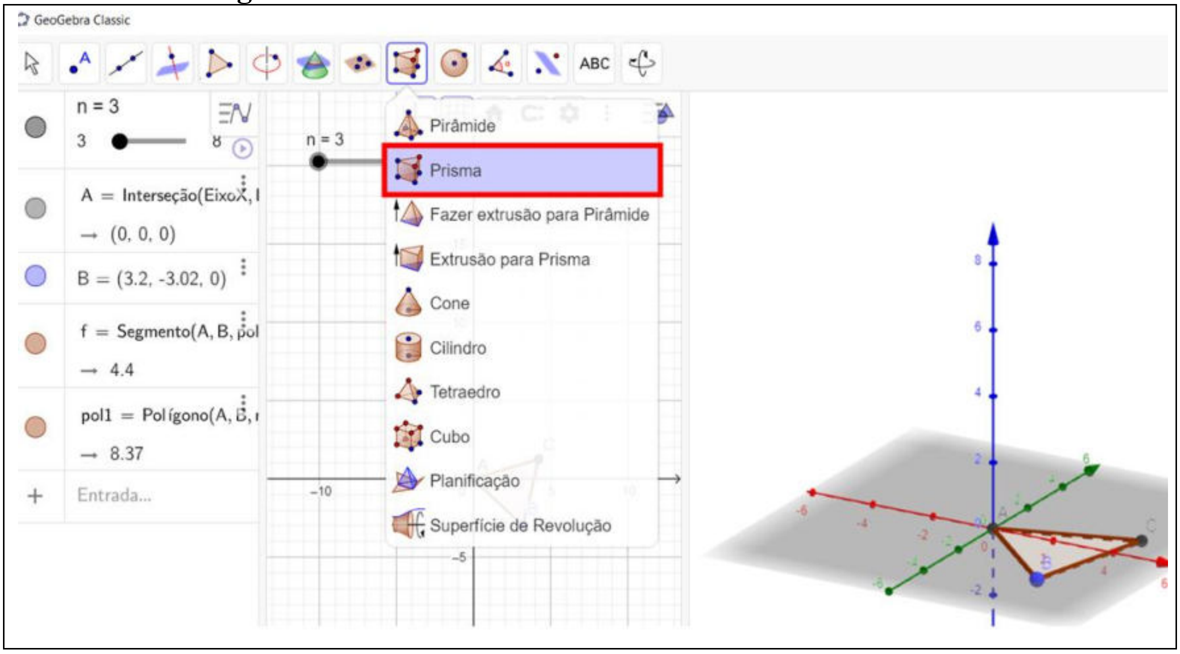
Figura 12: Sequência de polígonos que serão base dos prismas a serem construídos



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

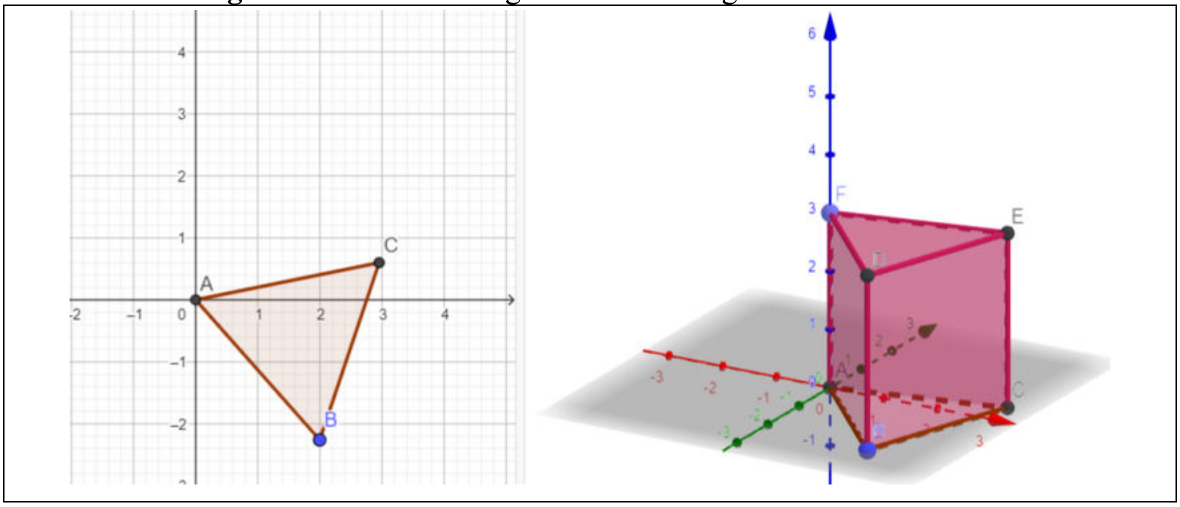
7) Com a base definida, clique na ferramenta prisma (Figura 13), em seguida, sobre o polígono da base e, finalmente, em algum ponto sobre o eixo perpendicular ao plano da base (plano xy), normalmente o eixo vertical. Esse ponto definirá a altura H do prisma e a base superior estará situada em um plano paralelo ao plano onde foi criada a primeira base, distando H unidades do plano da base inferior. Será gerado um prisma similar ao apresentado na Figura 14.

Figura 13: Acesso à ferramenta "Prisma" do GeoGebra 3D



Fonte: Elaborada pelo autor

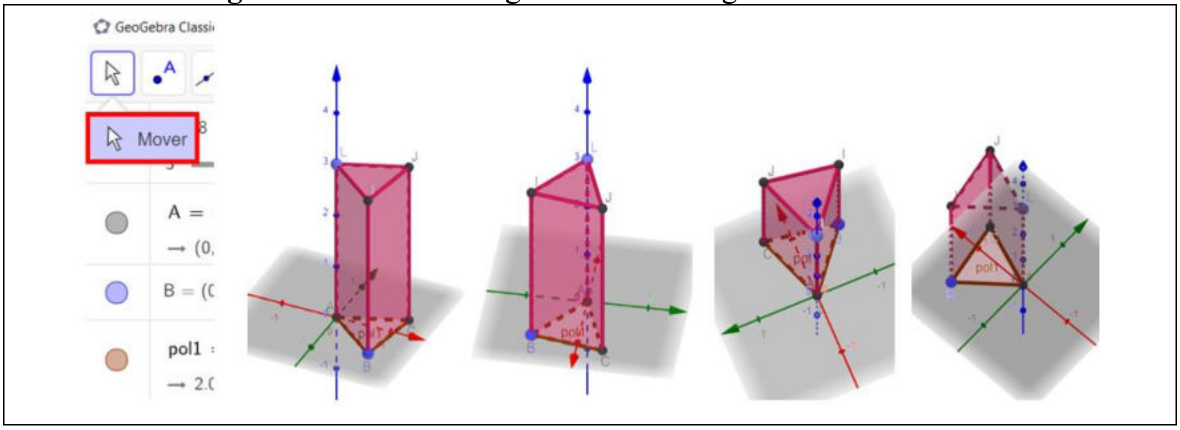
Figura 14: Prisma triangular de altura 3 gerado na Janela 3D



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Concluída a construção, você pode dar movimento à figura e visualizá-la por diferentes ângulos. Para isso, clique na ferramenta "Mover" e em seguida, mantendo pressionado o botão auxiliar do mouse, clique na Janela 3D e mover o cursor sobre essa janela, para obter resultados parecidos com os apresentados na Figura 15.

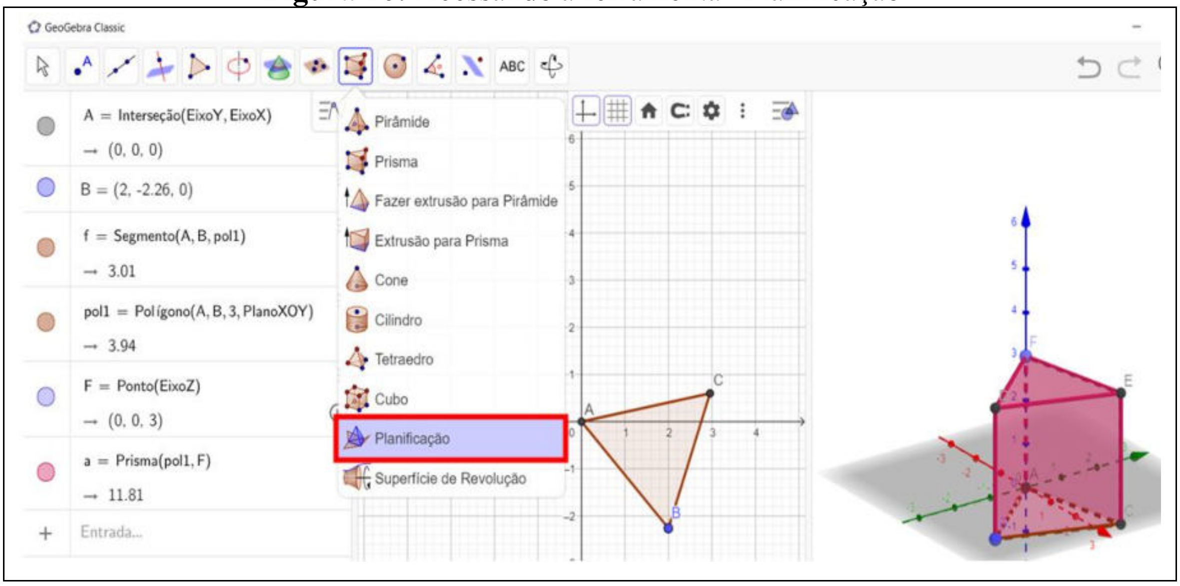
Figura 15: Prisma triangular de altura 3 gerado na Janela 3D



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

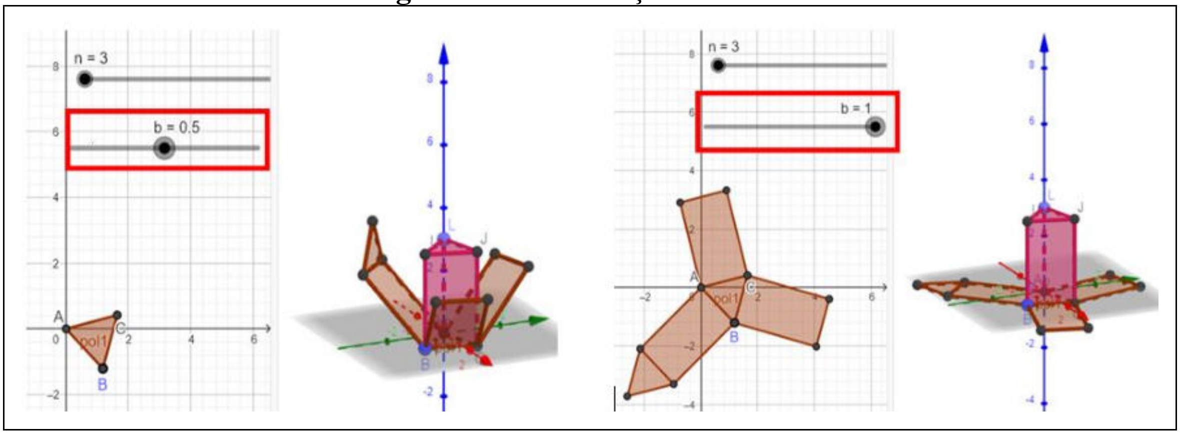
8) Do mesmo modo que a planificação de objetos manipuláveis é importante para a compreensão de sua estrutura, o GeoGebra 3D dispõe desse recurso para objetos virtuais. Para planificar um prisma, basta clicar na ferramenta "Planificação" (Figura 16) e em seguida sobre o prisma. Será criado automaticamente um controle deslizante "b" com os parâmetros de 0 a 1. Quando b = 1, o prisma estará totalmente planificado e só então terá todas as faces apresentadas nas duas janelas de visualização, como na Figura 17.

Figura 16: Acessando a ferramenta "Planificação"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Figura 17: Planificação do Prisma



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.1.1 Elementos do prisma

Você já deve ter observado que um prisma possui faces poligonais, vértices e arestas e que, duas dessas faces são paralelas. Essas são as bases do prisma. Para compreender a relação entre esses elementos, copie e preencha a Tabela 1.

Para isso, manipule o controle deslizante e, para cada prisma, identifique o polígono da base para preencher a linha correspondente da tabela.

Tabela 1: Registro sobre os elementos dos prismas

Polígono da Base	**Núm. de Faces**	**Núm. de Vértices**	**Núm. de Arestas**
Triângulo			
Quadrilátero			
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
Octógono			

Fonte: Elaborada pelo autor

Após o preenchimento da Tabela 1, observe qual relação existe entre a soma das duas primeiras colunas e o valor que você anotou na terceira coluna. Veja que vale a relação

$$F + V = A + 2 \quad \text{(Relação de Euler)}$$

3.1.2 Classificação dos prismas

Um prisma pode ser reto ou oblíquo, definido conforme a definição 3.21. Pode-se também classificar os prismas pelo polígono da base.

Definição 3.21 Um prisma é dito reto quando suas arestas laterais são perpendiculares à base e, consequentemente, suas faces laterais são retângulos.

As arestas adjacentes de um prisma reto estão contidas em um plano perpendicular aos planos das bases do prisma e as faces laterais desse prisma estão contidas em planos distintos, ambos perpendiculares aos planos das bases. Tente constatar a veracidade dessas afirmações com o auxílio de ferramentas do GeoGebra 3D.

Observe ainda as definições 3.22 e 3.23.

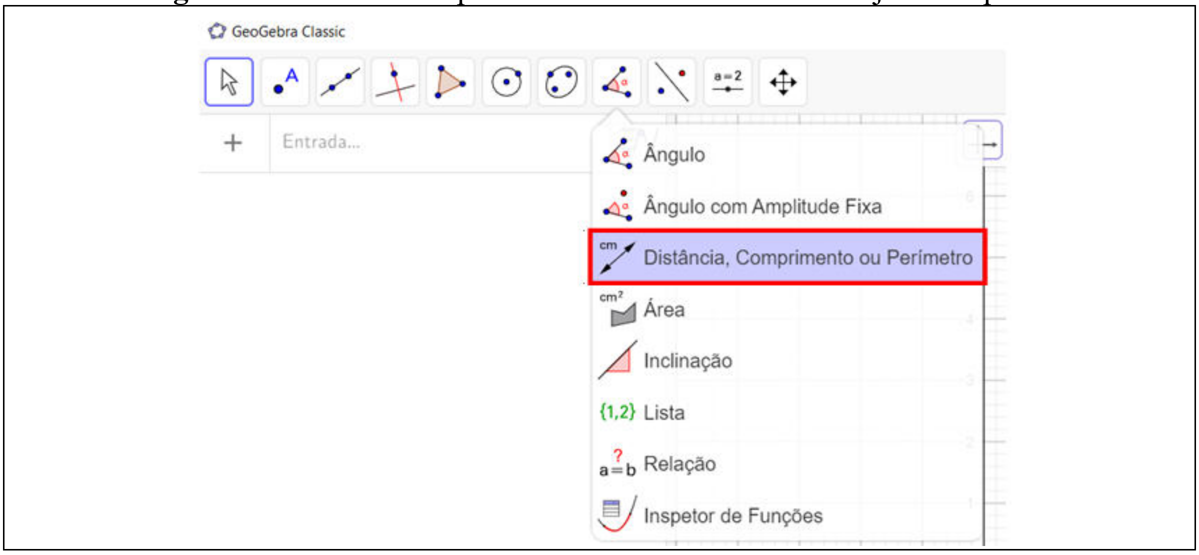
Definição 3.22 Dois planos são perpendiculares se formam entre si um ângulo reto, ou seja, se o ângulo entre eles mede 90°.

Definição 3.23 Um prisma oblíquo possui arestas laterais oblíquas à base. Nesse caso, as faces laterais são paralelogramos não retângulos.

3.1.3 Área lateral e área total do um prisma

Para calcular a área lateral de um prisma, você precisa reconhecer os polígonos das faces e saber calcular a área de quadriláteros. Da forma como as figuras foram construídas no GeoGebra, o elemento altura está explícito, restando a você determinar a medida da aresta da base, o que pode facilmente ser feito com auxílio da ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro", disposta na barra de ferramentas da Janela 2D, como na Figura 18.

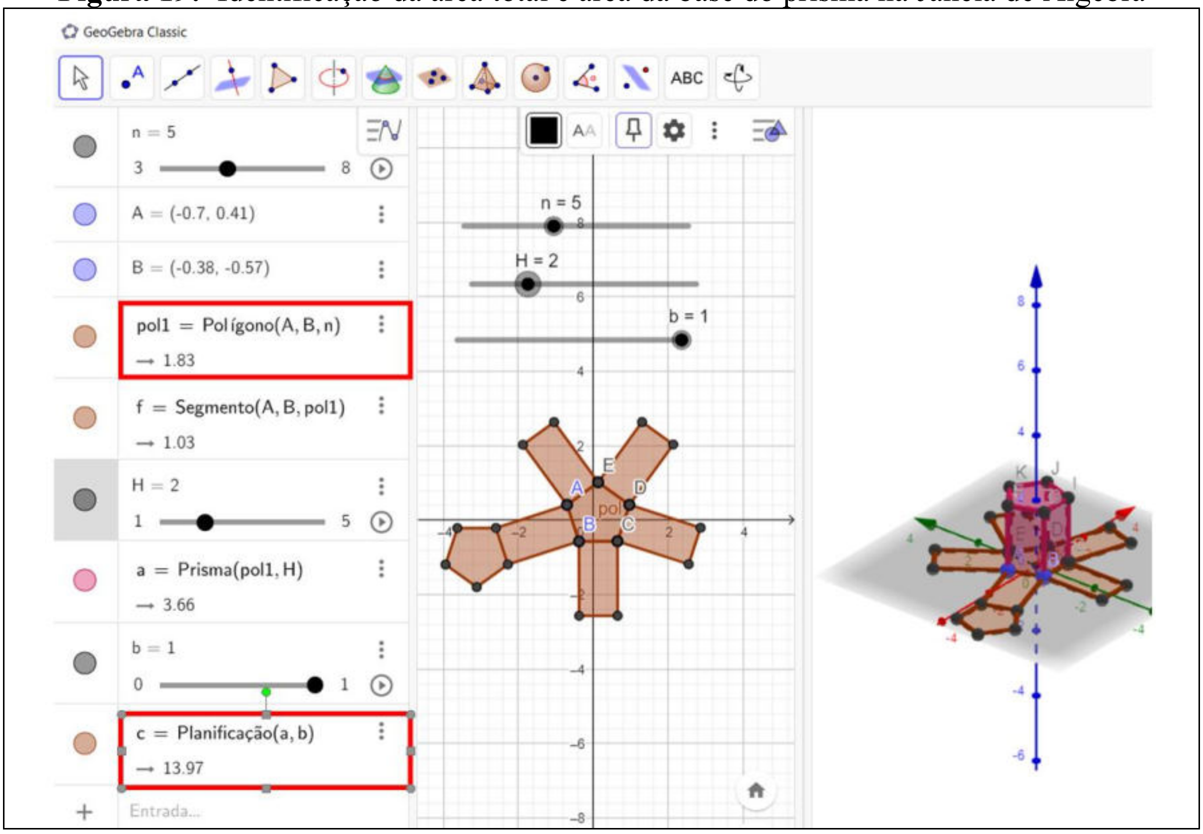
Figura 18: Ferramenta para se medir distâncias entre objetos no plano



Fonte: Elaborada pelo autor

Faça a planificação do prisma. Assim você poderá observar a área da base (Polígono(A,B,n)) e a área total (Planificação(a,b)), apresentadas nessa ordem, na Janela de Álgebra do GeoGebra, como se pode verificar na Figura 19. Tente descobrir como calcular a área lateral. *Dica: a área lateral não envolve as áreas das duas bases.*

Figura 19: Identificação da área total e área da base do prisma na Janela de Álgebra



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

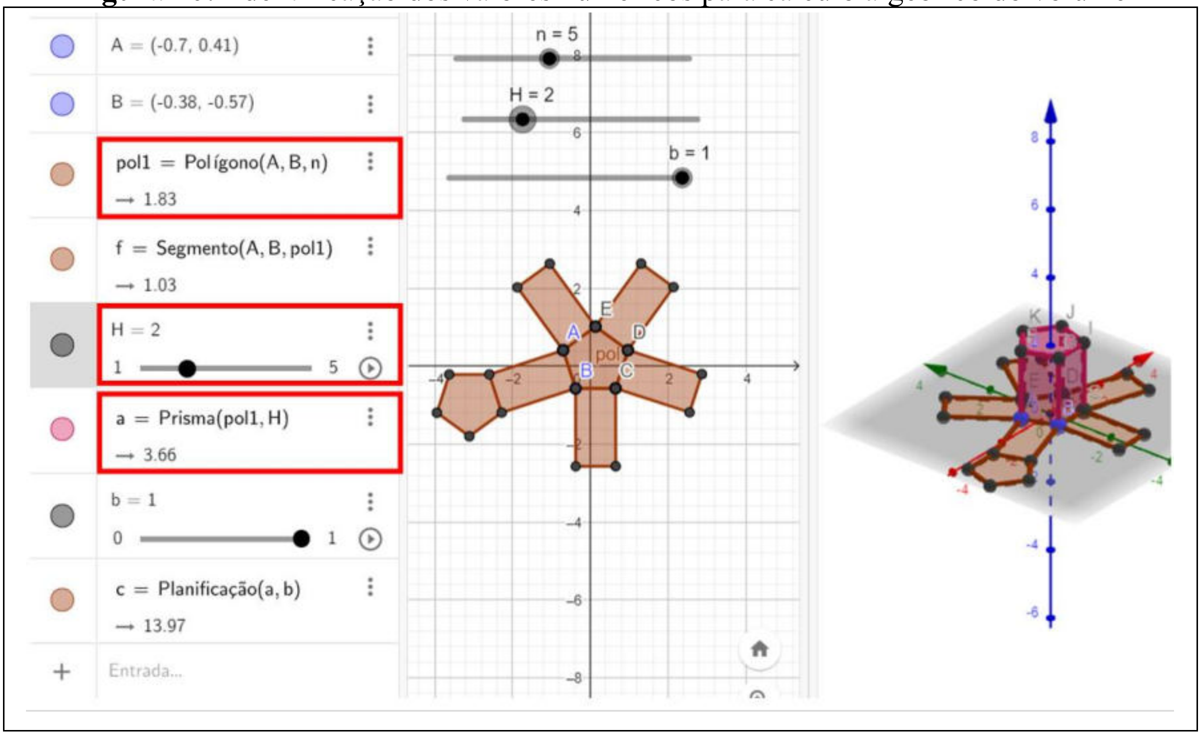
3.1.4 Volume do prisma

O termo volume representa a quantidade de unidades cúbicas de medida que preenche totalmente o sólido sem deixar sobras. O volume de um objeto pode conter uma quantia de unidades inteiras e mais uma parte de uma unidade, ou seja, nem sempre esse valor pode ser representado por um número natural, mas, sempre por um decimal, normalmente com arredondamento de, no máximo, três casas.

As construções no GeoGebra 3D já fornecem, logo abaixo do nome do polígono, situado na Janela de Álgebra, o volume desse sólido geométrico, como ilustrado a Figura 20. Contudo, é importante que você realize esses cálculos e utilize o software como apoio para verificar os resultados. Saiba que, devido às aproximações, podem ocorrer pequenas divergências nos resultados encontrados.

Os valores destacados nos retângulos em vermelho na Figura 20 representam, respectivamente a área do polígono da base pol1 do prisma, a altura H desse prisma e, finalmente, o volume do Prisma(pol1,H). Altere as medidas, usando os respectivos controles deslizantes e observe atentamente o que acontece. Percebe que o produto da área da base pela altura será sempre igual ou muito próximo do volume desse prisma?

Figura 20: Identificação dos valores numéricos para cálculo algébrico do volume



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

A relação “Base x Altura” é válida para se calcular o volume de qualquer prisma, conforme garante o Princípio de Cavalieri (Teorema 3.24).

Teorema 3.24 (Princípio de Cavalieri) Considere dois sólidos S_1 e S_2, de mesma altura, apoiados sobre um plano α. Se a interseção de todo plano β paralelo a α é vazia ou determina sobre esses sólidos superfícies de áreas iguais, então os sólidos S_1 e S_2 têm volumes iguais.

O Princípio de Cavalieri será citado mais adiante nas demonstrações dos volumes de outros sólidos geométricos e, embora seja possível demonstrá-lo com maior rigor matemático, ele será aqui tomado por verdadeiro, sem esse tipo de demonstração.

Dada à sua importância para diversas demonstrações geométricas, recomendamos que você assista o Vídeo 6 e pesquise mais sobre o assunto.

Vídeo 6: Princípio de Cavalieri para volumes

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em “Assistir no YouTube”

Reprodução: aproximadamente 20 minutos

Fonte: YouTube: www.youtube.com/watch?v=9xPTuACdeZg&ab_channel=JeanProdu%C3%A7%C3%B5esBu%C3%ADque. Acesso em 02/08/2021.

Agora que você assistiu o vídeo, que tal tentar constatar a validade desse princípio por meio de uma atividade no GeoGebra? Para isso, prossiga como nos passos a seguir.

1) Crie um controle deslizante b e configure-o com min: 1, max: 5 e incremento: 0,5.

2) Usando a ferramenta “Polígono Regular”, construa um triângulo e um quadrado. Depois vá ajustando seus pontos até que os dois fiquem com área igual a 2, como destacado na Figura 21.

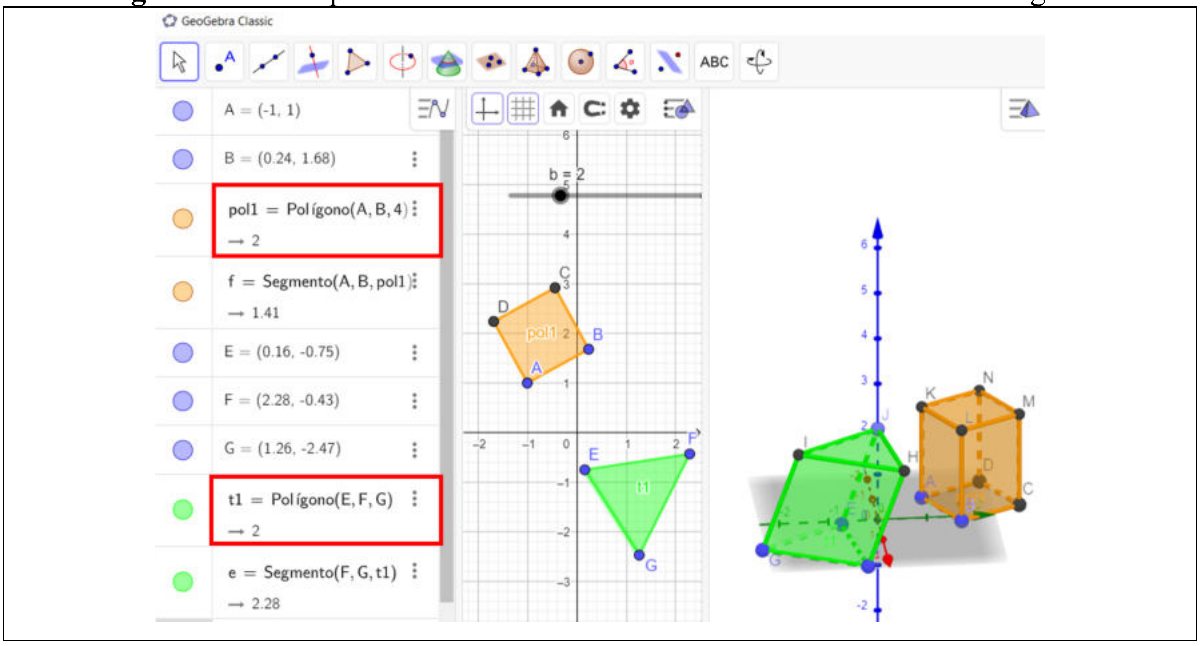
3) Clique na ferramenta prisma, depois sobre o triângulo e em seguida no ponto (0, 0, 2) sobre o eixo z (vertical). Basta clicar em cima do ponto representado pelo numeral 2.

4) Na Caixa de Entrada, digite o comando “Prisma(pol1, b)”.

Assim, você acaba de construir dois prismas diferentes, cujas bases tem áreas iguais. Por favor, não altere os pontos da base, pois as áreas precisam se manter iguais.

A altura do prisma triangular pode ser alterada pelo arraste do ponto J sobre o eixo vertical e a segunda por meio do controle deslizante b. Manipule as alturas e observe o que acontece com os volumes dos dois prismas sempre que as alturas forem iguais. Você pode observar o valor do controle deslizante e arrastar o ponto J para esse mesmo valor.

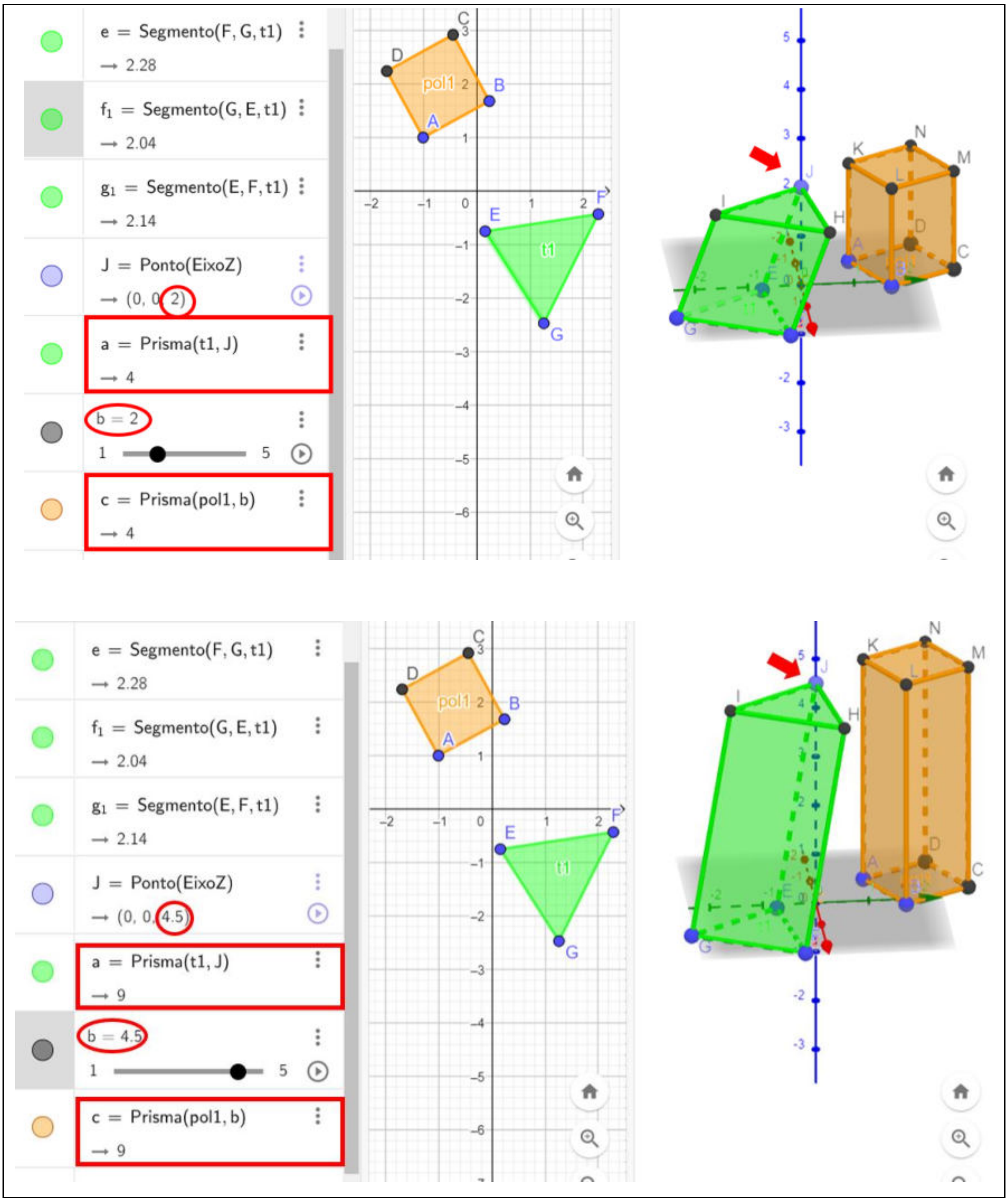
Figura 21: Dois prismas de mesma altura com bases distintas de áreas iguais



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Embora as alturas dos dois prismas variem de forma independente, os resultados que mostram a validade do Princípio de Cavalieri só podem ser observados quando as alturas são iguais, por isso, as manipulações devem manter sempre esse critério. Altere apenas as alturas e observe os campos referentes aos volumes para certificar-se de que o volume do prisma triangular “a” é sempre igual ao volume do paralelepípedo “c”, como ilustrado na Figura 22.

Figura 22: Variando as alturas e observando a manutenção da igualdade dos volumes



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Para saber mais sobre os prismas, assista o Vídeo 7.

Vídeo 7: Saiba mais sobre os prismas

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em “Assistir no YouTube”

Reprodução: aproximadamente 4 minutos

Fonte: YouTube: www.youtube.com/watch?v=bBL_YJTiJPU&ab_channel=VandoMat. Acesso em 02/08/2021.

3.2 Aprendendo sobre paralelepípedos

Para compreender os paralelepípedos é importante que você faça uma revisão sobre paralelogramos, reforçando sua definição e algumas propriedades e relações, já que esse é o polígono de interesse no estudo dos. Sobre paralelismo e perpendicularidade e inclinação, as informações necessárias podem ser verificadas no tópico que trata dos prismas.

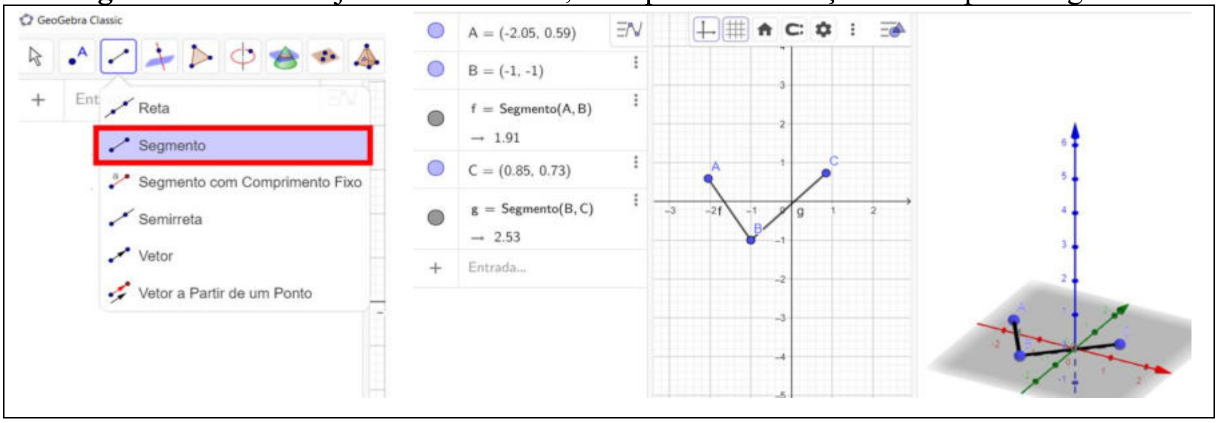
Convém relembrar que estudo desse tema envolve conhecimentos conceituais de paralelismo, ângulos, áreas e volumes. Como foi feito estudo dos prismas, sugerimos que você utilize também materiais concretos e imagens e reforce com as atividades no GeoGebra.

Nas primeiras tentativas de construir um paralelepípedo no GeoGebra, você vai perceber que a versão utilizada para esse trabalho não dispõe de ferramentas específicas para construção de paralelogramos para a base do sólido, nem ferramentas para a construção direta de paralelepípedos. Contudo, isso não impede que, com a adoção de algumas estratégias, essas figuras sejam construídas.

Um caminho relativamente fácil para se construir um paralelepípedo na janela de visualização 3D é iniciar pela construção de um paralelogramo na janela 2D, que servirá de base para esse sólido geométrico. Para isso, você deve proceder conforme os passos a seguir.

Passo 1. Para criar o paralelogramo da base, clique na ferramenta segmento e em dois pontos quaisquer da janela 2D, de modo que seja criando um segmento AB. Em seguida, clique no ponto B e em outro ponto fora do segmento AB, para criar um segmento BC. Desse modo, ficam construídos dois lados adjacente AB e BC do polígono ABCD, formando um ângulo qualquer, como mostra a Figura 23.

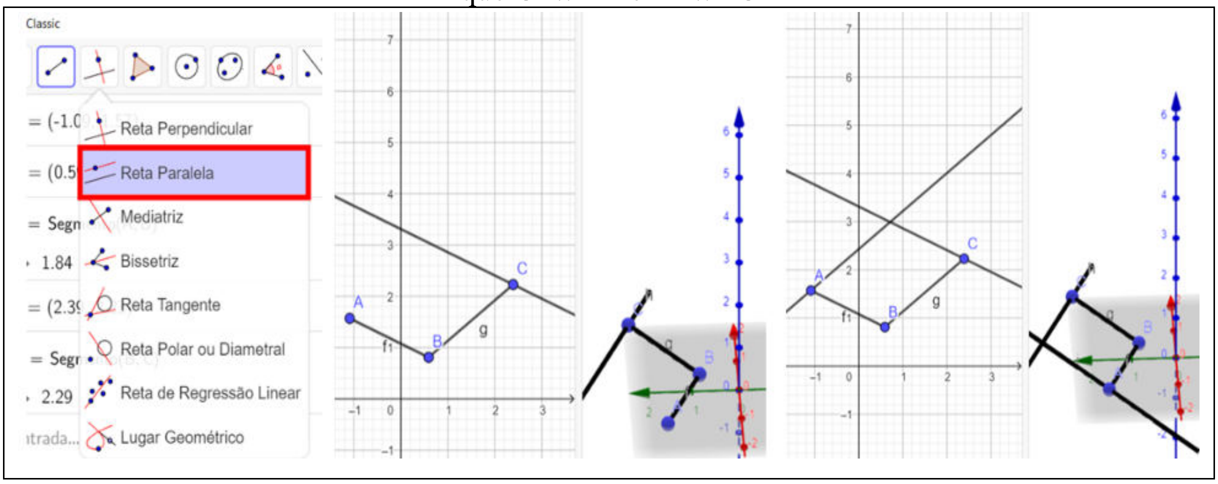
Figura 23: Lados adjacentes AB e BC, base para a construção de um paralelogramo



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Passo 2. Tendo em vista que os lados opostos do paralelogramo ABCD, são paralelos, o ponto D deve ser estrategicamente inserido de modo que se tenha AB//CD e BC//DA. Para tal, trace duas retas, uma contendo o ponto A e paralela ao segmento BC e outra contendo o ponto C e paralela ao segmento AB. Isso pode ser feito clicando na ferramenta "Reta Paralela" e em seguida no segmento AB e depois no ponto C. Repita o procedimento para o segmento BC e o ponto A, como mostra a Figura 24.

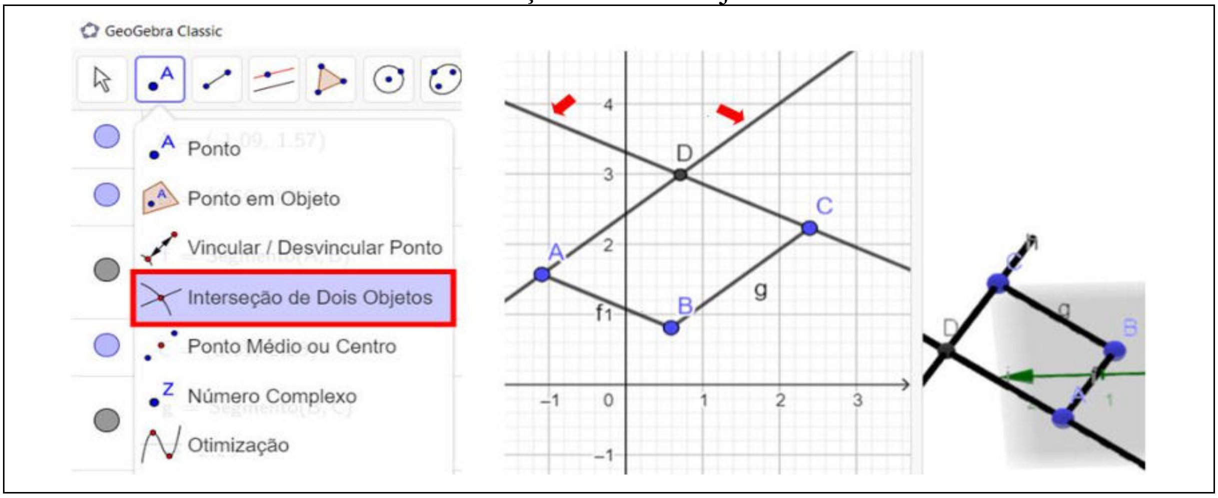
Figura 24: Retas paralelas aos lados AB e BC, para determinação do vértice D de modo que CD//AB e DA//BC



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

O ponto D procurado é a interseção dessas duas retas criadas. Para defini-lo, clique na ferramenta “interseção de dois objetos” e depois sobre as duas retas, como na Figura 25.

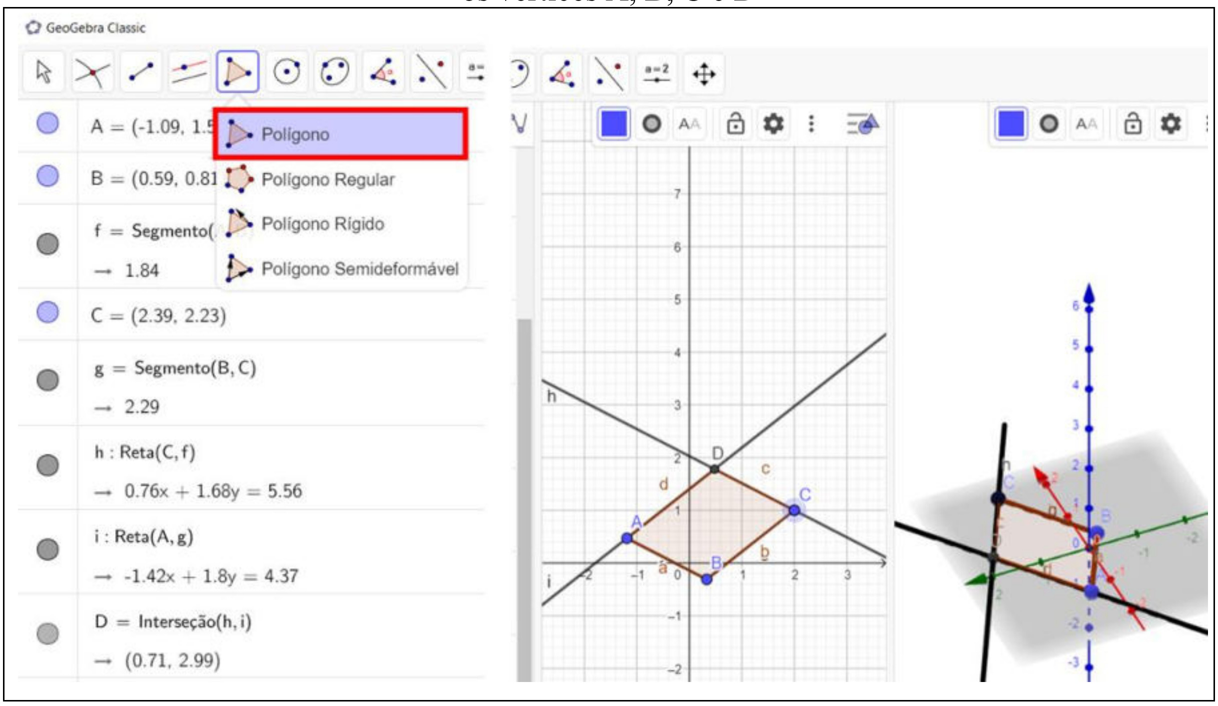
Figura 25: Determinação do vértice D do paralelogramo com o auxílio da ferramenta “Interseção de Dois Objetos”



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Passo 3. Definidos os vértices A, B, C e D, construa o paralelogramo clicando na ferramenta “Polígono” e em seguida, nos pontos ABCDA, nessa ordem. Assim, será criado o paralelogramo, como na Figura 26.

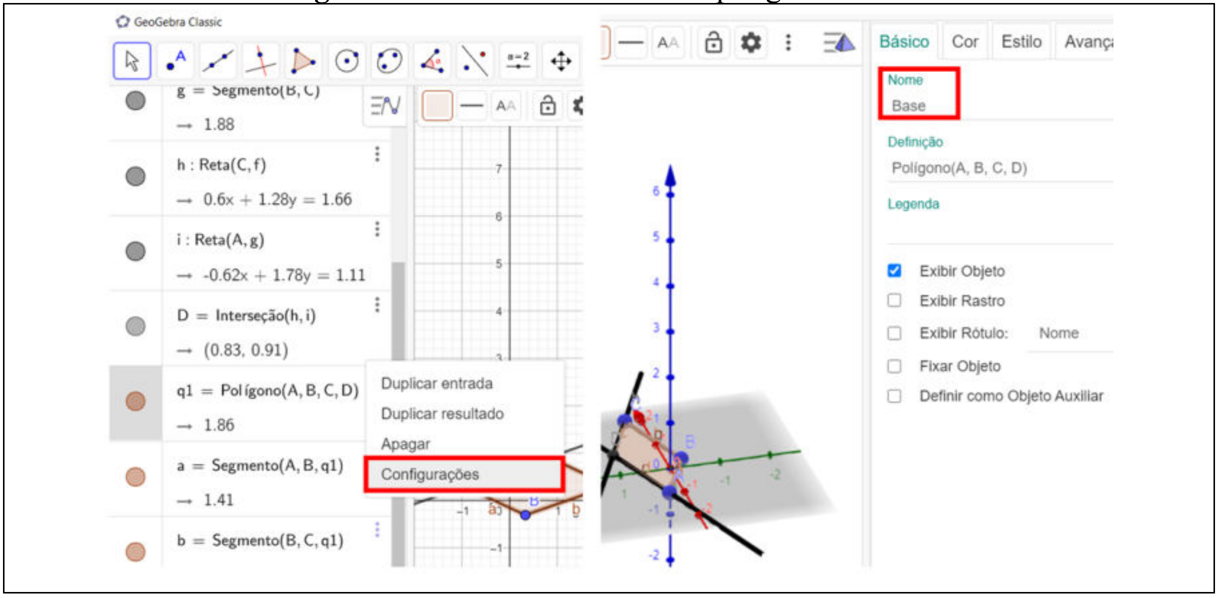
Figura 26: Criação do paralelogramo com auxílio da ferramenta “Polígono”, conhecendo os vértices A, B, C e D



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Passo 4. Para facilitar sua compreensão, altere o nome do polígono para "Base", procedendo como na Figura 27.

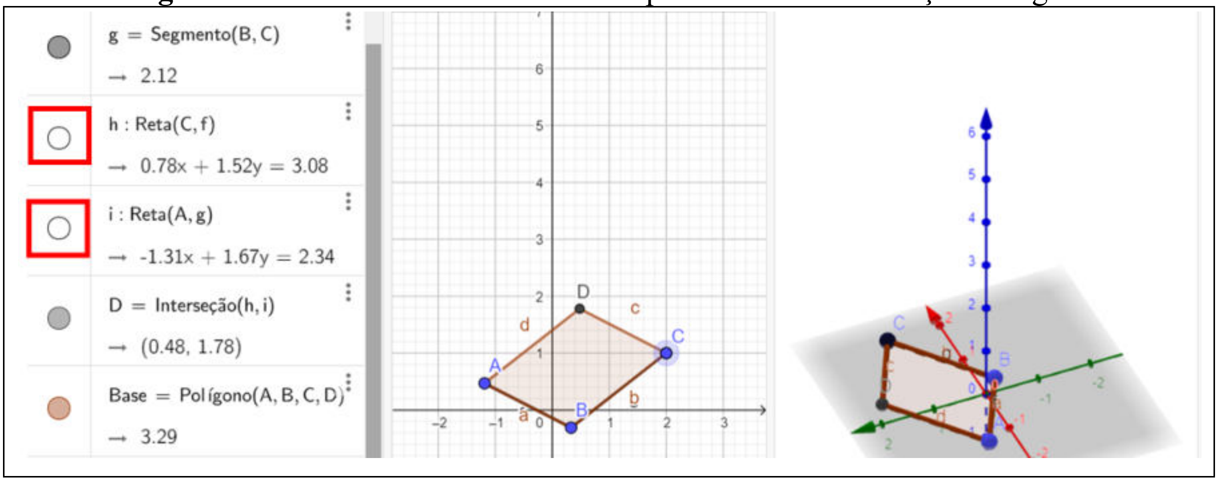
Figura 27: Alterando o nome do polígono da base



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Passo 5. Criado o paralelogramo, omita as retas auxiliares, deixando apenas o polígono. Para isso, desmarque com um clique os elementos identificados como "Reta", na Janela de Álgebra como indicado na Figura 28.

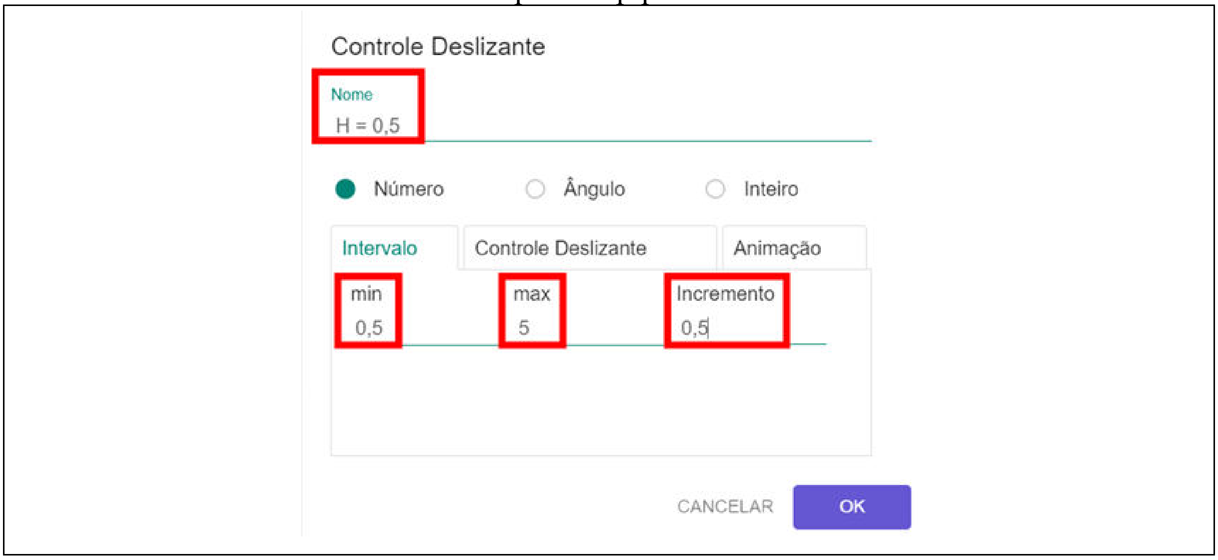
Figura 28: Omitindo as retas auxiliares para melhor visualização da figura



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Passo 6. Antes de criar o paralelepípedo, crie um controle deslizante e, na caixa de diálogo de criação, altere os dados como destacado na Figura 29. O parâmetro H determinará a variação da altura do o sólido durante as manipulações dentro do intervalo [0,5; 5], em saltos de 0,5 unidades.

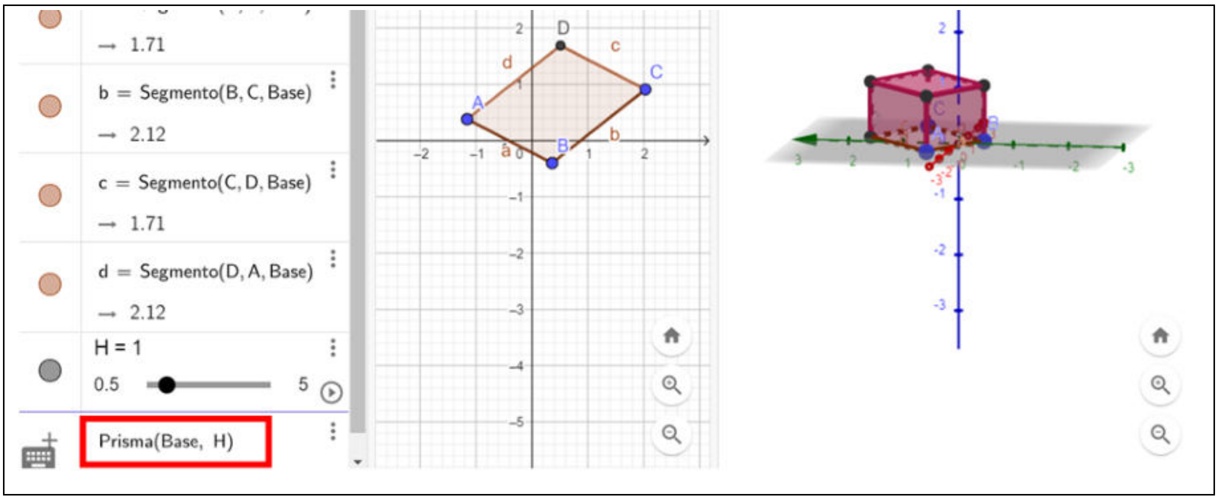
Figura 29: Criação e configuração do controle deslizante para variação da altura do paralelepípedo



Fonte: Elaborada pelo autor

Passo 7. Para construir o paralelepípedo que tem como base o paralelogramo ABCD, que aqui foi nomeado como “Base”, e altura dependente do parâmetro H do controle deslizante, vá na Caixa de Entrada e digite o comando “Prisma(Base, H)”. Assim, será gerado o paralelepípedo ABCD, como na Figura 30.

Figura 30: Construção do paralelepípedo a partir do polígono “Base”, altura vinculada ao controle deslizante H

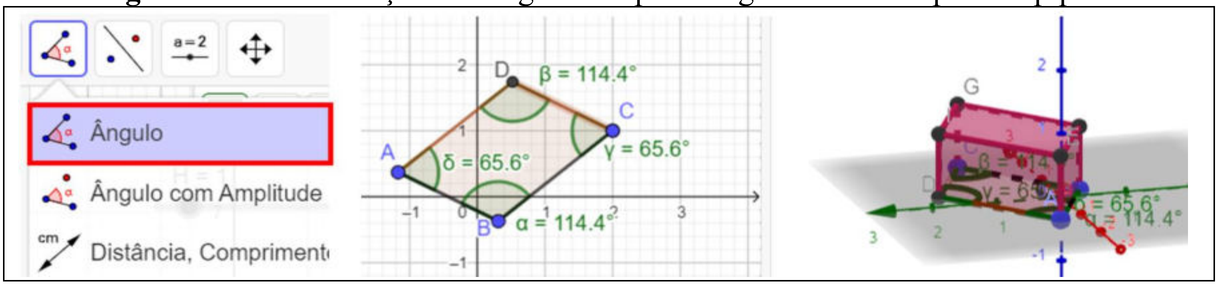


Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Para verificar que, durante as manipulações, a base ABCD permanecerá sendo um paralelogramo, é interessante que, utilizando a ferramenta “Ângulo”, se insira a medida dos ângulos internos do polígono da Janela 2D, procedendo como se segue.

Passo 8. Clique na ferramenta “Ângulo” e, em seguida, nos três extremos dos segmentos que determinam cada um dos quatro ângulos, seguindo a sequência no sentido horário. Por exemplo, para determinar a medida do ângulo A, deve-se clicar na ferramenta ângulo e em seguida, nos pontos B, A e D, nessa ordem. Repita de maneira análoga para os demais ângulos. Assim, as medidas serão mostradas, como na Figura 31.

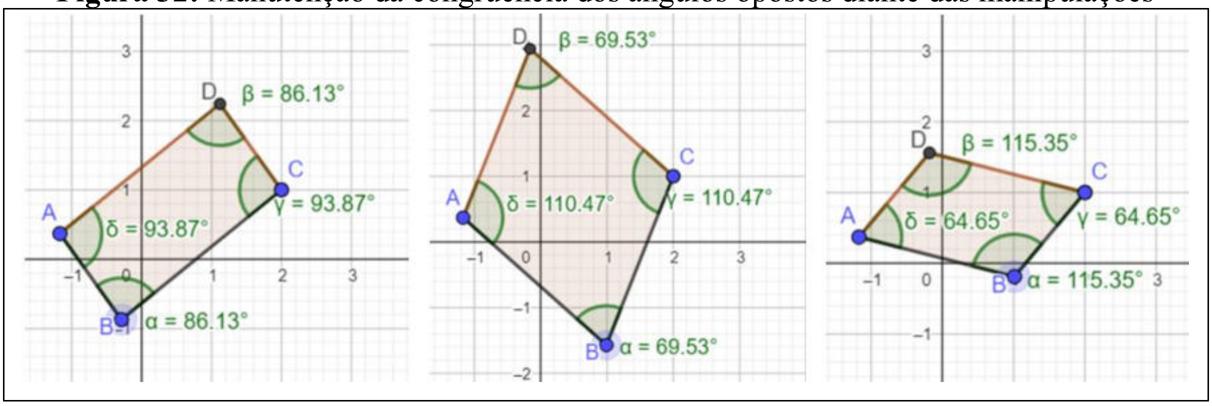
Figura 31: Determinação dos ângulos do paralelogramo base do paralelepípedo



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Arraste os pontos A, B ou C, provocando deformações no polígono Base e observe o que ocorre com as medidas dos ângulos internos, como na Figura 32.

Figura 32: Manutenção da congruência dos ângulos opostos diante das manipulações



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra.

Percebe que, embora haja alterações nas medidas desses ângulos, a figura mantém a congruência dos ângulos opostos? Lembre-se que essa é uma propriedade dos paralelogramos e, portanto, independente da manipulação que você fizer nesse polígono, ele será sempre um paralelogramo e, então, o prisma que você construiu será sempre um paralelepípedo.

3.2.1 Elementos do paralelepípedo

Manipule o paralelepípedo no GeoGebra e o observe-o por diferentes ângulos. Tente identificar seus elementos e depois preencha a Tabela 2.

Tabela 2: Registros sobre os elementos observados no paralelepípedo

Polígono da Base	Núm. de Faces	Núm. de Vértices	Núm. de Arestas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Da mesma forma como foi feito com os prismas, procure identificar o máximo de propriedades das figuras e as relações entre os dados numéricos referentes a cada elemento. Verifique se para esse sólido geométrico vale também a Relação de Euler.

3.2.2 Classificação dos paralelepípedos

Assim como os demais prismas, os paralelepípedos são classificados em retos e oblíquos. Como você já estudou sobre prismas retos e oblíquos, não há necessidade de se ater novamente nesse assunto. De qualquer modo, tente utilizar o GeoGebra para verificar a veracidade das características expressas na definição seguinte.

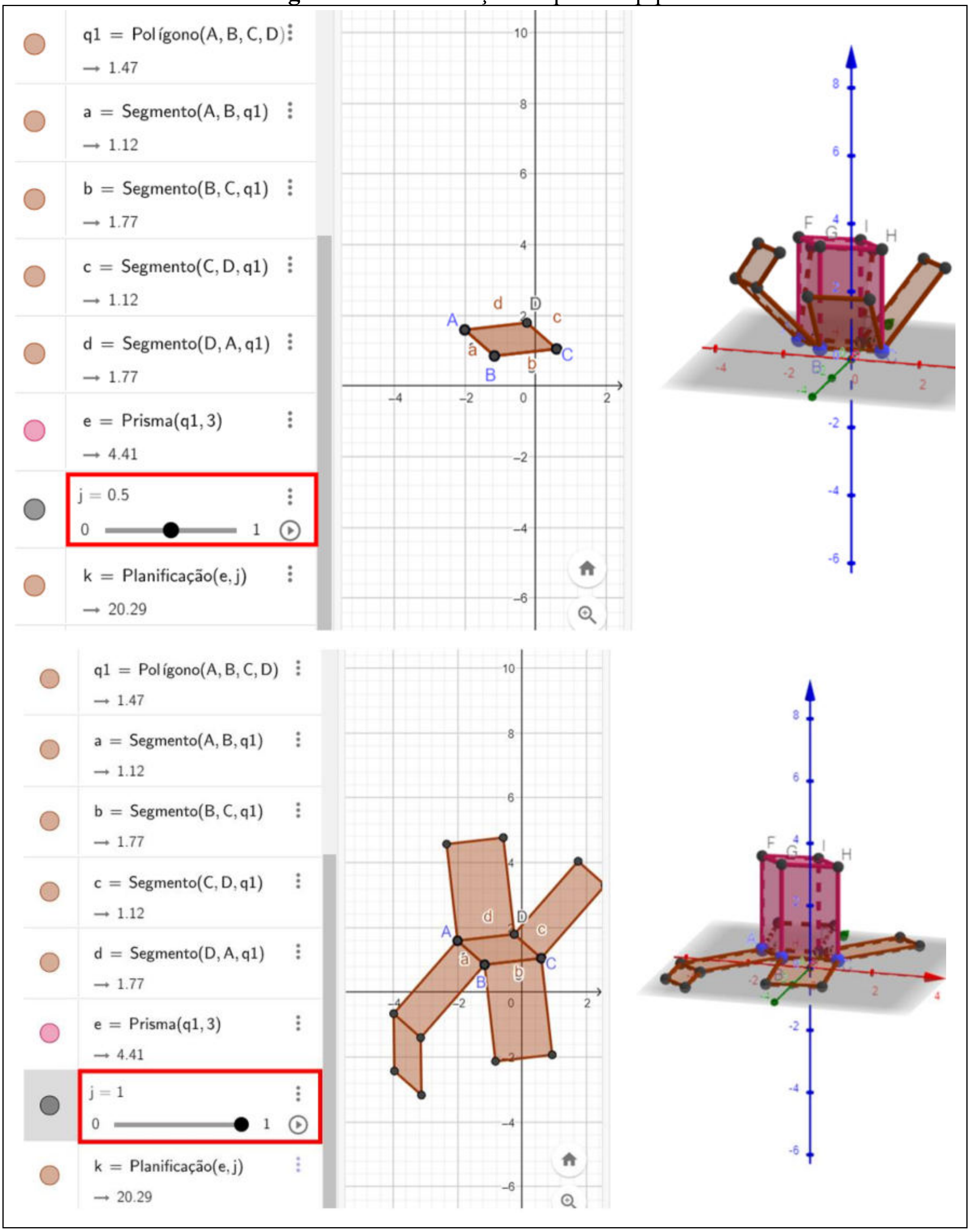
Definição 3.21 (Paralelepípedo reto) Um paralelepípedo é dito reto quando suas arestas laterais são perpendiculares à base e, consequentemente, suas faces laterais são retângulos.

3.2.3 Área lateral e área total de um paralelepípedo

Para se determinar a área lateral do paralelepípedo, um caminho é utilizar a ferramenta "Planificação", a exemplo do que foi feito com os prismas. Faça todos os cálculos algébricos ou utilize alguns dos resultados apresentados na Janela de Álgebra do GeoGebra. Para obtenção desses dados volte à atividade do GeoGebra 3D, e proceda como no passo a seguir.

Passo 9. Clique na ferramenta “Planificação” e, em seguida, no paralelepípedo apresentado na Janela de visualização 3D. É criado automaticamente um controle deslizante cujo parâmetro define os estágios de planificação, como na Figura 33.

Figura 33: Planificação do paralelepípedo



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

A Figura 33 mostra dois estágios de planificação, um quando j = 0.5, o que significa que o processo de planificação está em 50%, e o outro quando j = 1, que representa 100%. Vale observar que somente nesse estágio final da planificação, ou seja, quando j = 1, o objeto está totalmente planificado e, somente nesse estágio, todas as faces são apresentadas na Janela de visualização 2D. Isso facilita determinar a quantidade de faces da figura e daí, verificando as medidas das arestas e valendo-se dos conhecimentos de Geometria Plana, calcular a área de cada face, e realizar a partir desses valores o cálculo algébrico da área lateral e da área total, confrontando os resultados com os valores apresentados na Janela de Álgebra.

E aí, conseguiu perceber que os paralelepípedos pertencem a uma subclasse dos prismas?

Quanto à classe e ao polígono da base, um paralelepípedo pode ser definido da seguinte forma:

Definição 3.22-a (Paralelepípedo) Chama-se paralelepípedo todo prisma cuja base é um paralelogramo.

Observando a classificação do poliedro e as propriedades das faces, pode-se assim definir paralelepípedo:

Definição 3.22-b (Paralelepípedo) Define-se paralelepípedo como sendo um hexaedro no qual cada face é um paralelogramo.

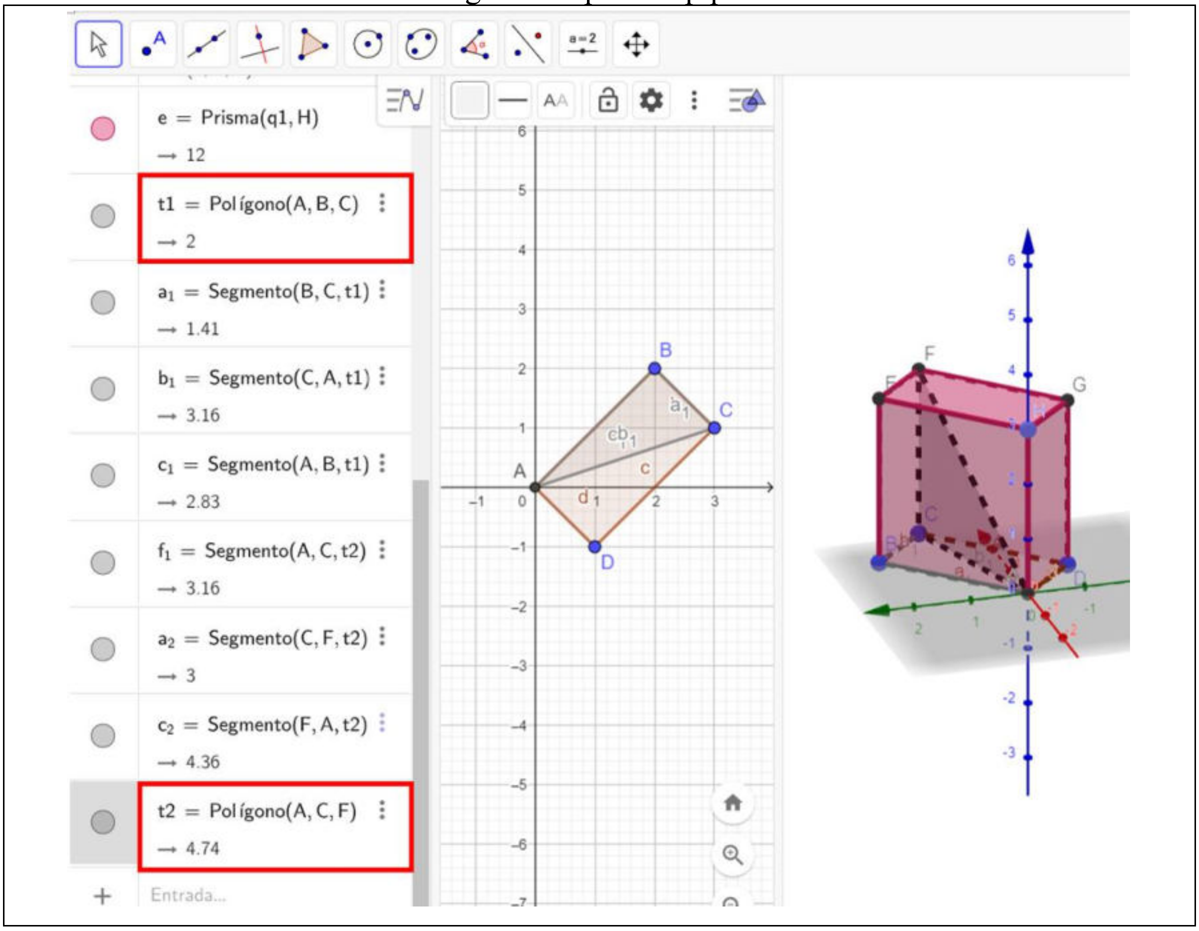
Finalmente, um paralelepípedo pode ter como base de sua definição o reconhecimento do paralelismo de cada um dos três pares de planos que contêm faces opostas.

Definição 3.22-c (Paralelepípedo) Diz-se que um poliedro é um paralelepípedo se este é um hexaedro com três pares de faces paralelas.

3.2.4 Diagonal do paralelepípedo reto-retângulo

Para facilitar o cálculo da medida da diagonal do paralelepípedo, construa, no GeoGebra 3D, um paralelepípedo reto-retângulo e use seus vértices para construir triângulos clicando na ferramenta “polígono” e, em seguida, em três vértices do paralelogramo, convenientemente escolhidos, como ilustra a Figura 34.

Figura 34: Visualização dos triângulos que auxiliam na dedução do cálculo da medida da diagonal do paralelepípedo



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Na Figura 34, o triângulo ABC, que contém a diagonal da base e o triângulo ACF, que contém a diagonal do paralelepípedo, estão representados, respectivamente, pelos polígonos t1 e t2. Como a base é um retângulo e as arestas laterais são perpendiculares ao plano da base, esses dois triângulos são retângulos. Caso isso não esteja claro para você, verifique a medida do maior ângulo interno de cada um deles por meio da ferramenta “Ângulo”.

Para melhor visualização dos polígonos, desmarque, na Janela de Álgebra, o elemento prisma. Para os cálculos, as medidas de todos os segmentos estão apresentadas na Janela de Álgebra.

Ao analisar o paralelepípedo reto-retângulo na tela do GeoGebra, você consegue perceber que, pelas propriedades da figura, sua diagonal é a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos são uma aresta lateral e uma diagonal da base?

Percebe também que a diagonal da base do paralelepípedo é também a hipotenusa de outro triângulo retângulo no qual os catetos são duas arestas adjacentes da base?

Se você percebeu isso, deve ter notado que a diagonal da base pode ser calculada aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo ABC e, para calcular a diagonal do paralelepípedo, deve-se aplicar o mesmo teorema, dessa vez no triângulo ACF.

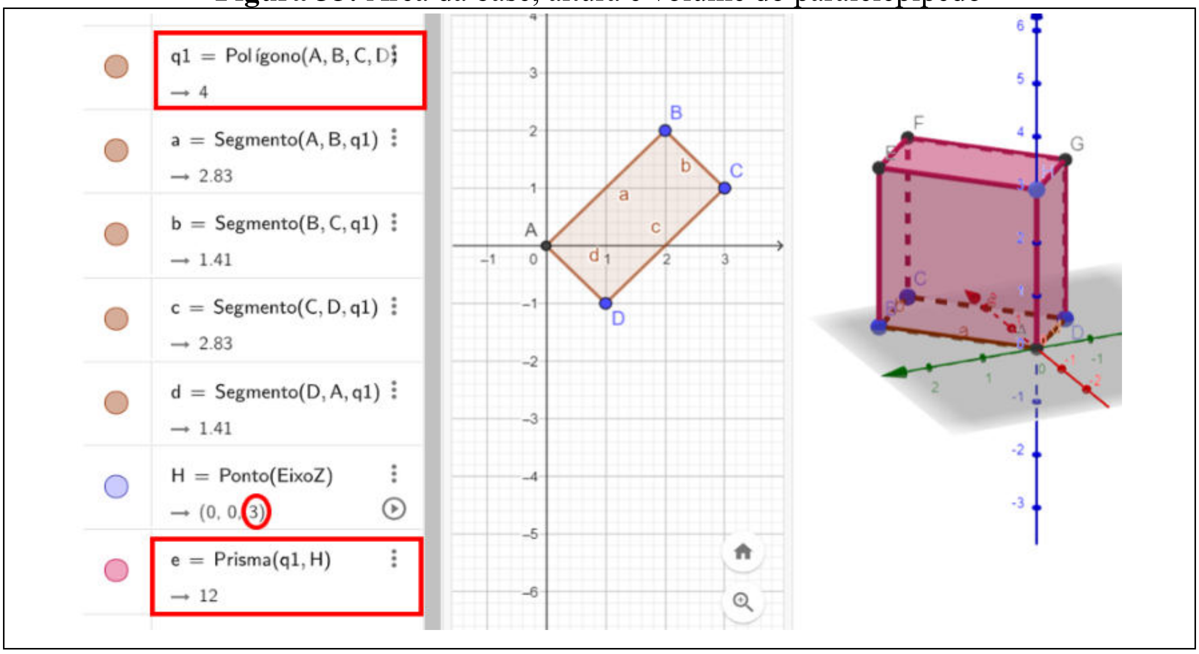
Faça os cálculos e depois compare os resultados com as medidas dos segmentos b_1 e c_2, na Janela de Álgebra.

3.2.5 Volume do paralelepípedo reto-retângulo

Como o paralelepípedo é um prisma, seu volume pode ser calculado como já explicado. Do mesmo modo, a Janela de Álgebra do GeoGebra apresenta esse valor, mas é importante que você faça os cálculos e depois compare os resultados.

Tomando como exemplo a Figura 35, o volume do paralelepípedo, apesar de estar exposto no elemento Prisma disposto na Janela de Álgebra, deve ser calculado multiplicando-se a área do polígono ABCD da base pela altura do sólido, representada pela terceira coordenada do ponto H. Assim, sendo V o volume procurado, A a área da base e H a altura do paralelepípedo, o cálculo é como segue: $V = 4 \,.\, 3 = 12$.

Figura 35: Área da base, altura e volume do paralelepípedo



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Para saber mais sobre os paralelepípedos, assista o Vídeo 8.

Vídeo 8: Saiba mais sobre os paralelepípedos

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em “Assistir no YouTube”

Reprodução: aproximadamente 10 minutos

Fonte[2]: YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=aGjQOBLtkZs&ab_channel=Prof.KaduLandert. Acesso em 02/08/2021

3.3 Aprendendo sobre cubos

De acordo com Wikipédia (2021), o Cubo Mágico (Figura 34), como originalmente chamado por seu inventor, o professor húngaro de arquitetura Ernő Rubik é um quebra-cabeça tridimensional criado em 1974 e amplamente difundido na década de 1980, quando foi licenciado pela Ideal Toys e teve seu nome alterado para “Cubo de Rubik”. Nesse mesmo ano, ganhou o prémio alemão do “Jogo do Ano (Spiel des Jahres)”. Interessante o fato de que o professor Ernő Rubik demorou um mês para resolver o cubo pela primeira vez.

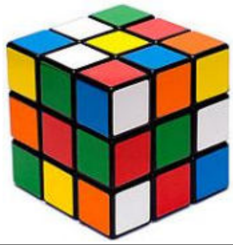
Geralmente confeccionado em plástico e apresentado em várias versões, é atualmente um dos brinquedos mais populares do mundo, com mais de 350 milhões de unidades vendidas. A versão mais comum é a 3x3x3, composta por 6 “faces” de 6 cores diferentes, com “arestas” medindo 56 mm cada.

Atualmente cubistas de várias nações praticam e competem não só a resolução do 3x3x3, mas também outros similares. A partir de 2003, a Associação Mundial do Cubo Mágico (WCA,

[2] Esse vídeo e todas as imagens contidas nele são de livre acesso e estão disponíveis no YouTube.

World Cubing Association) passou a organizar competições por todo o mundo e reconhecer recordes nacionais, continentais e mundiais.

Figura 36: Cubo Mágico ou Cubo de Rubik



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Rubiks_cube_by_keqs.jpg

Você já deve ter um conhecimento razoável sobre objetos com essa mesma forma geométrica, não é?

O que talvez você não saiba é que esse sólido geométrico é muito importante para o estudo da Geometria Espacial, pois o cubo cuja aresta mede 1 unidade de medida é a base para o cálculo do volume de todos os sólidos geométricos.

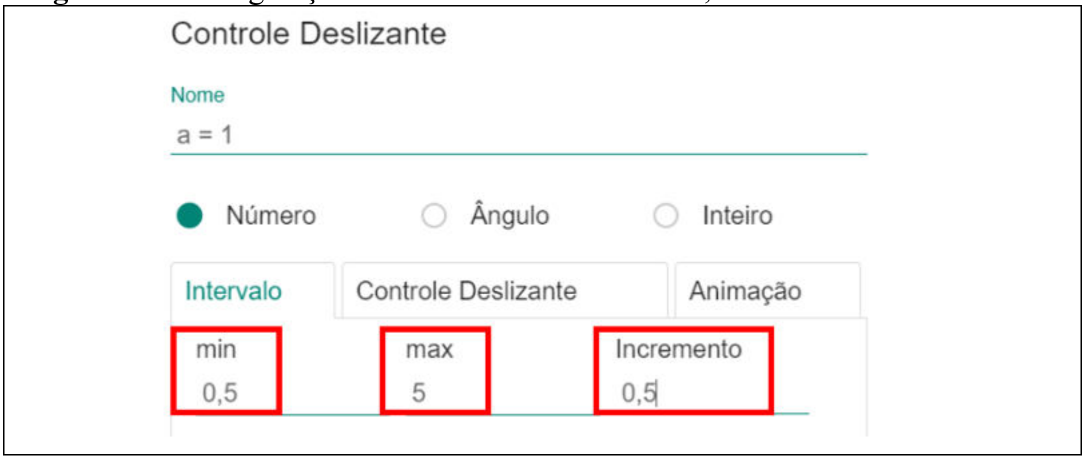
Você já deve conhecer as expressões metros cúbicos, centímetros cúbicos, etc. mas, fazia ideia que essas expressões tem relação com o cubo?

Explorando as ferramentas do GeoGebra, existem diferentes modos de se construir um cubo, umas mais simples, porém com menos recursos, outras mais elaboradas, mas com a vantagem de permitir mais possibilidades de manipulações.

Para que você tenha melhor percepção das propriedades e relações presentes nesse sólido, vamos vincular a medida da aresta a um controle deslizante. Para tal, clique na janela de visualização 2D para acionar sua barra de ferramentas e proceda conforme os passos a seguir.

1) Crie um Controle Deslizante e configure-o como na Figura 37.

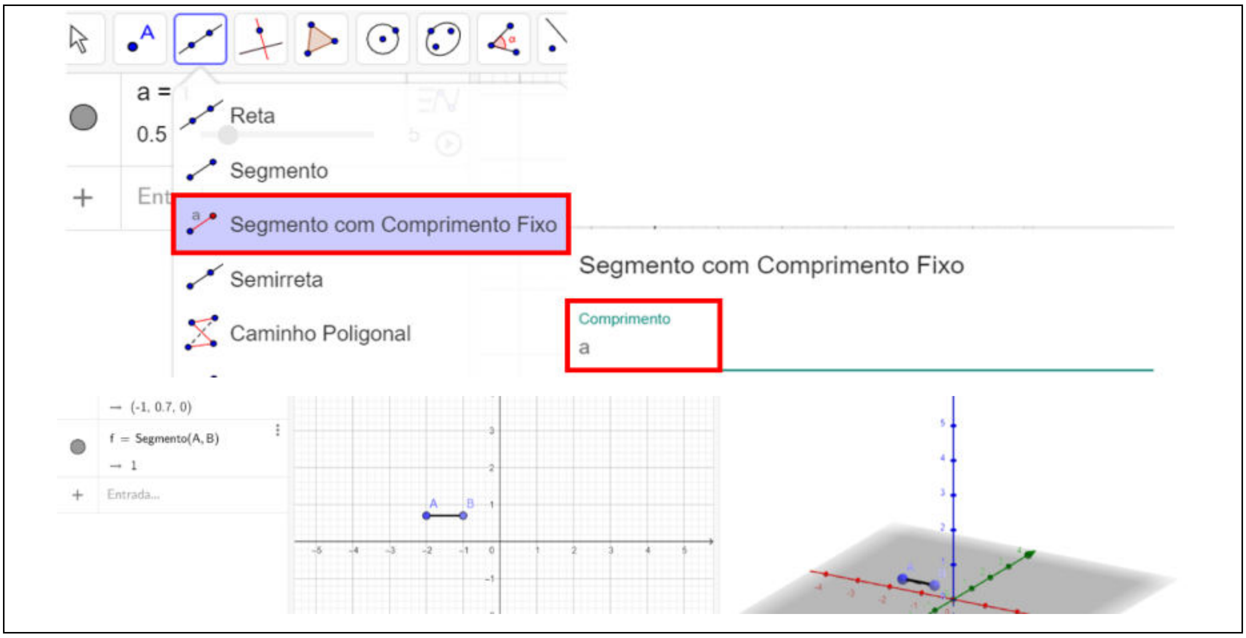
Figura 37: Configuração do Controle Deslizante “a”, vinculado à aresta do cubo



Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Para vincular o comprimento das arestas do cubo ao controle deslizante, deve-se clicar na ferramenta segmento de comprimento fixo e preencher o campo “comprimento” da caixa de diálogo com o parâmetro do controle deslizante, nesse caso, “a”. Clicando em OK, será criado um segmento (Figura 38) que será uma das arestas do cubo.

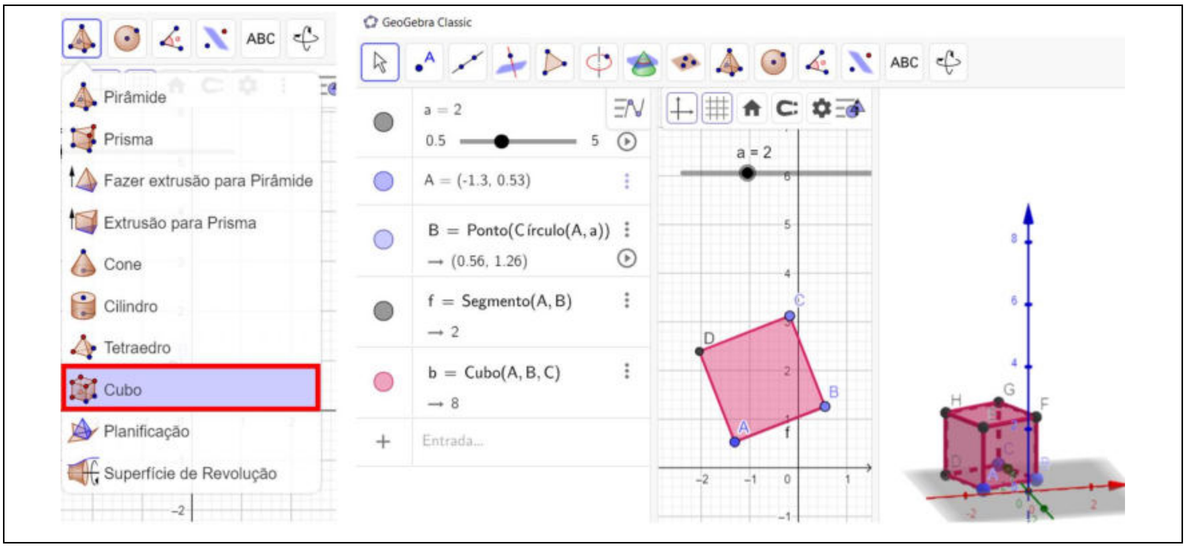
Figura 38: Construção de um segmento com comprimento fixo para aresta do cubo



Fonte: Elaborada pelo autor.

3) Clique na ferramenta cubo e em seguida nos pontos A e B do segmento AB. Será gerado o cubo apresentado na Figura 39.

Figura 39: Cubo de arestas vinculadas ao controle deslizante “a”



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.3.1 Elementos do cubo

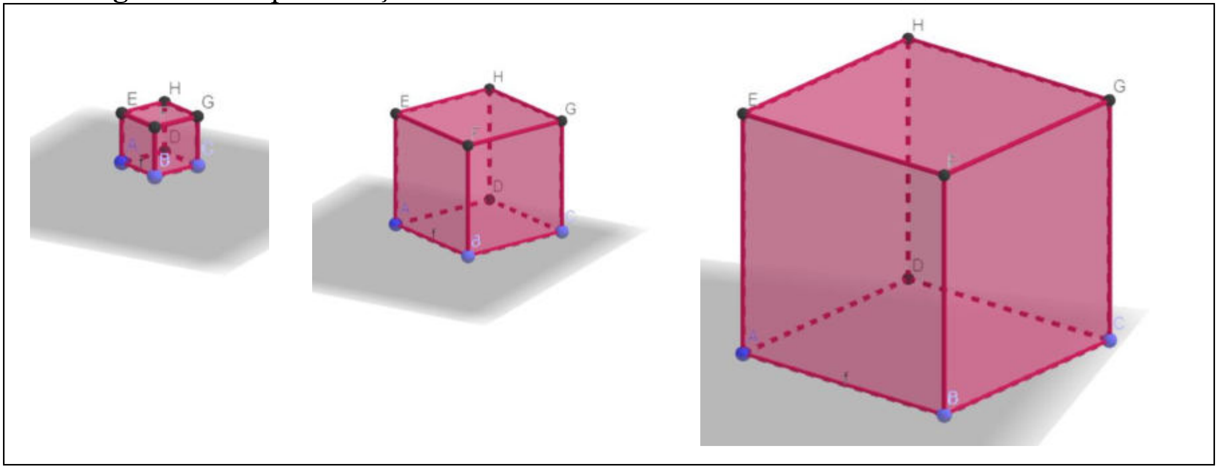
Uma vez construída o cubo, pode-se melhorar sua visualização através da omissão dos eixos, mantendo apenas o plano como referência para dar ao aluno a noção do espaço. Isso pode ser feito seguindo a sequência mostrada na Figura 40 e vale também para o estudo de qualquer outra figura geométrica.

Figura 40: Sequência de procedimentos para omitir os eixos e manter o plano na janela 3D

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse caso, o sólido é exibido como na Figura 41, com variações de tamanho definidas pelo controle deslizante.

Figura 41: Representações do cubo com arestas medindo *a = 0,5, a = 2,5 e a = 5*



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

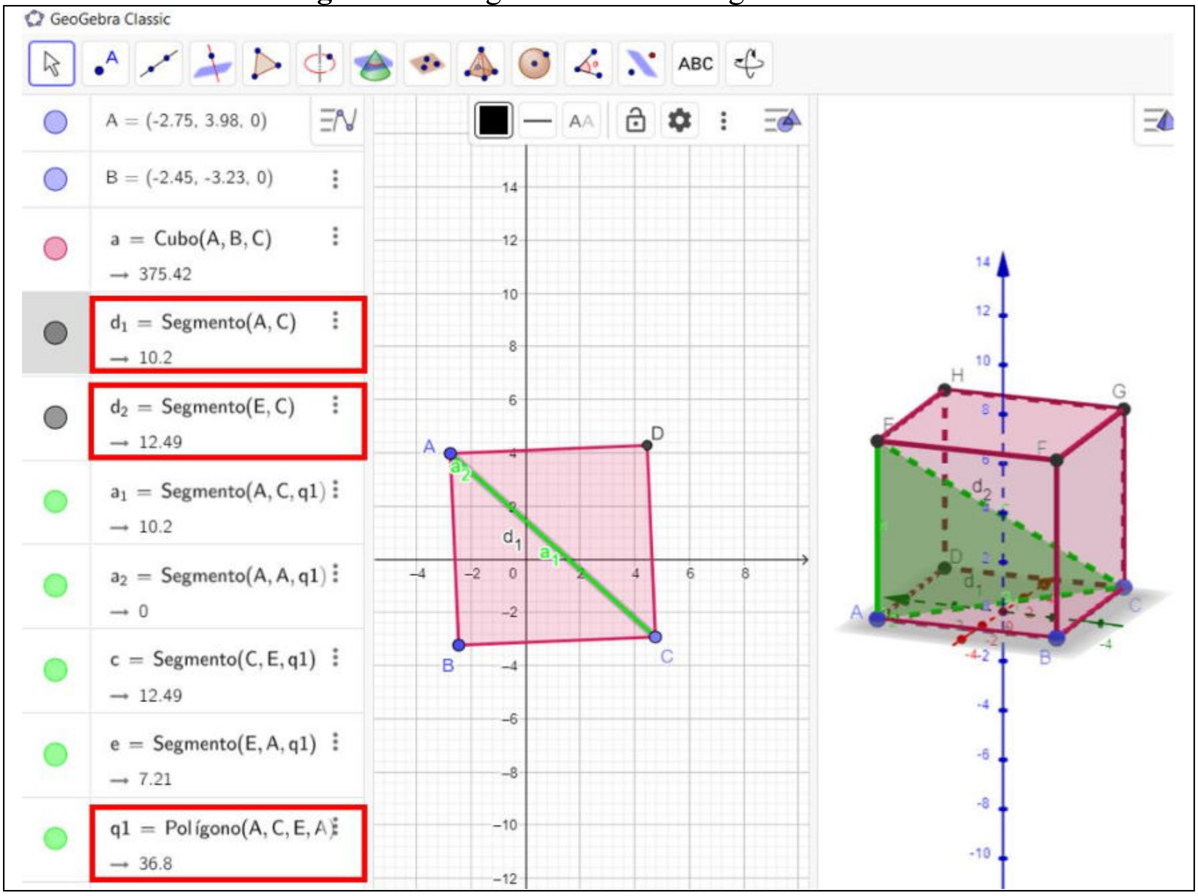
Manipule a figura e tente identificar elementos e perceber propriedades e relações importantes para a compreensão da estrutura desse sólido geométrico e das expressões algébricas aplicadas aos cálculos de comprimento, área e volume. Isso fará com que você veja sentido nesse estudo e tenha condições de aplicar esses conhecimentos à situações do cotidiano.

3.3.2 Diagonal do cubo

Tente calcular a medida da diagonal do cubo que você construiu. Para calcular a medida da diagonal de um cubo. Percebe que, ao traçar a diagonal da base e, a partir de um dos seus extremos, a diagonal do prisma, você consegue identificar dois triângulos retângulos cujas medidas das diagonais podem ser calcular algebricamente aplicando-se, duas vezes, o teorema de Pitágoras? Para facilitar enxergar esses triângulos, faça como nos passos a seguir.

4) Clique na ferramenta cubo e em seguida nos pontos A e B do segmento AB, gerando o cubo ABCDEFGH. Para visualizar as diagonais do cubo e da base, com suas respectivas medidas, vá na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, e digite os comandos “Segmento(A,C)” e depois, “Segmento(E,C)”. Em seguida, digite o comando “Polígono(A,C,E,A)”, gerando o triângulo retângulo ACE. Para visualizar melhor, tente mudar a cor e aumentar a transparência desse triângulo, acessando suas configurações. A imagem deve ser apresentada como ilustrado na Figura 42.

Figura 42: Diagonal da base e diagonal do cubo



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Embora as medidas das diagonais já estejam apresentadas na Janela de Álgebra, tente utilizar as medidas dadas para calcular esses valores e ainda mais, deduzir uma expressão genérica para determina-los em um cubo qualquer em função da medida “a” da aresta.

Ao analisar o triângulo retângulo CAE destacado no cubo, perceba que a medida d_2 da diagonal do cubo pode ser calculada por meio do teorema de Pitágoras, mas apenas o cateto AE tem medida “a” conhecida. Analisando um pouco mais, você vai perceber que pode utilizar o mesmo teorema para calcular a medida do cateto d_2, diagonal da base, em função da aresta “a”.

Desse modo, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, você pode deduzir que a medida da diagonal da base do cubo é dada por

$$d_1 = a\sqrt{2}$$

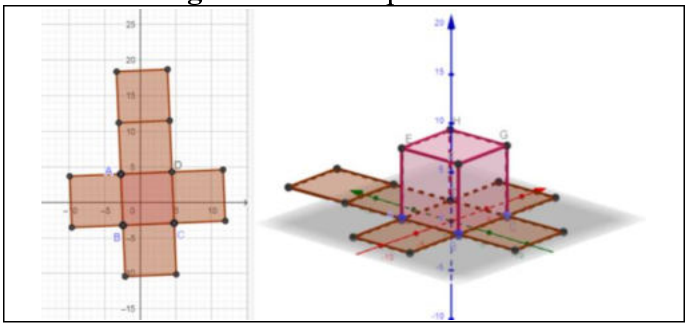
e, aplicando o mesmo teorema, desta vez no triângulo CAE, pode concluir que a medida da diagonal do cubo de aresta “a” pode ser calculada pela expressão

$$d_2 = a\sqrt{3}$$

3.3.3 Área lateral e área total do cubo

Do mesmo modo que nos sólidos abordados anteriormente, é provável que a essa altura o aluno da EJA, explorando a figura na Janela 3D GeoGebra, consiga perceber as propriedades do cubo, concebendo esse sólido como um paralelepípedo composto de seis faces quadradas e congruentes. Para melhor visualização, recomenda-se que o cubo seja planificado no GeoGebra, clicando na ferramenta "Planificação" e depois, sobre a figura, como já foi feito anteriormente com outros prismas. Agindo dessa forma, o cubo será apresentado como ilustrado na Figura 43.

Figura 43: Cubo planificado



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Sabendo que as faces do cubo são todas quadradas e congruentes e que esse sólido possui duas bases e quatro faces laterais, é muito provável que o aluno deduza que a área lateral do cubo é igual à soma das áreas de quatro quadrados de lado "a" e que a área total corresponde à área lateral acrescida do dobro da área de uma base. Em linguagem matemática, tem-se que

$$A_{Base} = a^2,$$

$$A_{Lateral} = 4a^2$$

e

$$A_{Total} = 6a^2$$

Tente elaborar um argumento para justificar que a área lateral do cubo corresponde à soma das áreas de quatro quadrados congruentes e a área total corresponde à soma das áreas de seis desses quadrados.

3.3.4 Volume do cubo

Esperamos que você tenha percebido que, por ter as mesmas propriedades do prisma e ter como bases quadrados, o cubo é um prisma e então seu volume pode ser calculado como o volume de um prisma. Contudo, com as manipulações no GeoGebra e a compreensão de que todas as faces do cubo são todas quadradas, é possível que tenha notado que a altura e as arestas da base têm medidas iguais e daí, ao calcular algebricamente o volume do cubo, você vai deduzir que o volume do cubo de aresta "a" é

$$V = a^3$$

Para saber mais sobre os cubos, assista o Vídeo 9.

Vídeo 9: Saiba mais sobre os cubos

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

Reprodução: aproximadamente 5 minutos

Fonte: YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=-Xrs8437krE&ab_channel=ProfLa%C3%ADs-Matem%C3%A1tica. Acesso em 02/08/2021.

3.4 Aprendendo sobre pirâmides

Em um breve apanhado sobre a história das pirâmides do Egito Antigo, Santos (2021) salienta que há várias discussões sobre a origem dessas construções e as possíveis explicações para a complexa engenharia que possibilitou construí-las. Embora a história desses locais sagrados seja cercada de misticismos, o que se sabe é que historiadores e arqueólogos chegaram a conclusão de que cada um dos blocos de pedra que eram lapidados e encaixados uns sobre os outros nessas construções pesava cerca de duas toneladas e que os próprios egípcios desenvolveram mecanismos para o transporte das rochas e outros materiais utilizados nessas construções. Quanto à curiosa forma geométrica desses monumentos, Mendonça (2019) esclarece que os egípcios escolheram o formato piramidal porque acreditavam ser essa uma forma de ascensão do faraó aos céus, sendo acolhido por Rá, a divindade mais poderosa da mitologia egípcia.

O processo de construção dessas obras piramidais durava de vinte a trinta anos, camponeses eram recrutados durante o período de seca do rio Nilo e, embora esses monumentos tenham sido implantados há mais de 2500 anos, os egípcios, já naquela época, demonstravam um conhecimento matemático bastante desenvolvido, pois utilizavam cálculos precisos na elaboração de técnicas que determinavam a posição exata para que as pedras se encaixassem perfeitamente umas sobre as outras. Além disso, há um grande conhecimento geométrico na engenharia utilizada na construção de labirintos na parte interna das pirâmides, como estratégia para enganar os violadores de tumba e proteger toda a riqueza dos faraós, que ficariam guardadas no momento em que eles fossem mumificados.

Segundo Mendonça (2019), existe um total de 123 pirâmides no Egito. As mais conhecidas são as pirâmides de Queóps, de Quéfren e de Miquerinos (Figura 44), que representam uma família de faraós e estão localizadas na península de Gizé. Curiosamente, essa terna de pirâmides é a única das sete maravilhas do mundo que até os dias atuais resiste intacta às ações do tempo.

Figura 44: As três principais pirâmides do Egito

Fonte: MENDONÇA (2019). Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/artes/piramides-do-egito. Acesso em 15/06/2021.

Esperamos que esse breve histórico tenha despertado em você o interesse e a curiosidade em aprender mais sobre as pirâmides e que você tenha conseguido memorizar a forma geométrica de uma pirâmide, pois esse estudo é muito importante para a compreensão do mundo e para a continuidade dos estudos, incluindo a matemática e outras disciplinas.

Como você já estudou sobre os prismas, já conhece os polígonos e uma boa noção espacial, não terá dificuldades em identificar a base, as faces, arestas e vértices das pirâmides, além de calcular áreas e volume. Não mostraremos muitos detalhes, mas você pode avançar nesse estudo com o auxílio do GeoGebra.

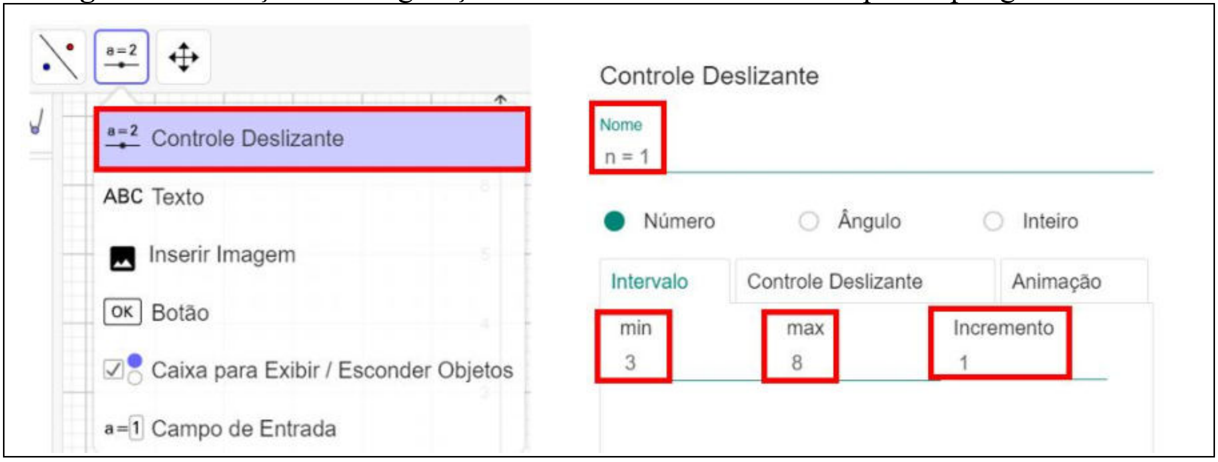
Que tal iniciarmos observando os elementos da pirâmide?

3.4.1 Elementos da pirâmide

Agora que você tem ideia do que seja uma pirâmide, veja se encontra algum objeto com a mesma forma geométrica para facilitar suas observações. Se não encontrar, não tem problema! Vamos tentar construir e compreender a estrutura das pirâmides no GeoGebra. Para isso, prossiga como nos passos a seguir.

Passo 1) Na Janela de Visualização 2D, crie um controle deslizante n, configurando-o como na Figura 45.

Figura 45: Criação e configuração do Controle Deslizante “n” para o polígono da base



Fonte: Elaborada pelo autor.

Passo 2) Ainda na Janela 2D, construa a base da pirâmide, clicando na ferramenta “Polígono Regular”, em seguida, em dois pontos distintos A e B, e definindo na caixa de diálogo o número de vértices pelo parâmetro n do controle deslizante, como na Figura 46.

Figura 46: Construção da base da pirâmide, vinculada ao Controle Deslizante “n”

Fonte: Elaborada pelo autor.

Use o controle deslizante n para visualizar todas as bases que você construiu para as pirâmides.

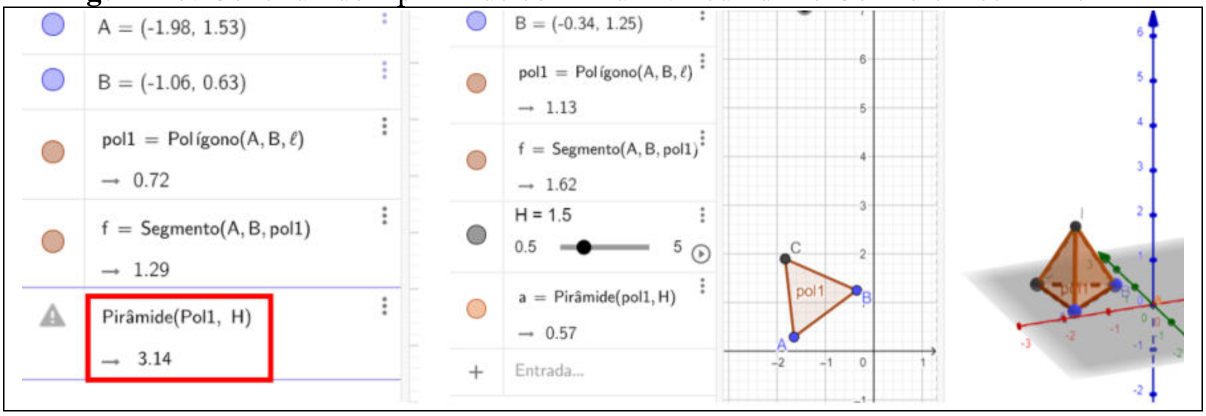
Passo 3) Crie outro controle deslizante H, configurando-o como na Figura 47. Com isso você poderá variar a altura das pirâmides e observar o que acontece.

Figura 47: Configuração do Controle Deslizante para definir a variação de altura da pirâmide

Fonte: Elaborada pelo autor

Passo 4) Na Caixa de Entrada, digite o comando "Pirâmide (Pol1, H)", para gerar a pirâmide que tem como base o polígono apresentado na tela e altura vinculada ao controle deslizante H, como na Figura 48.

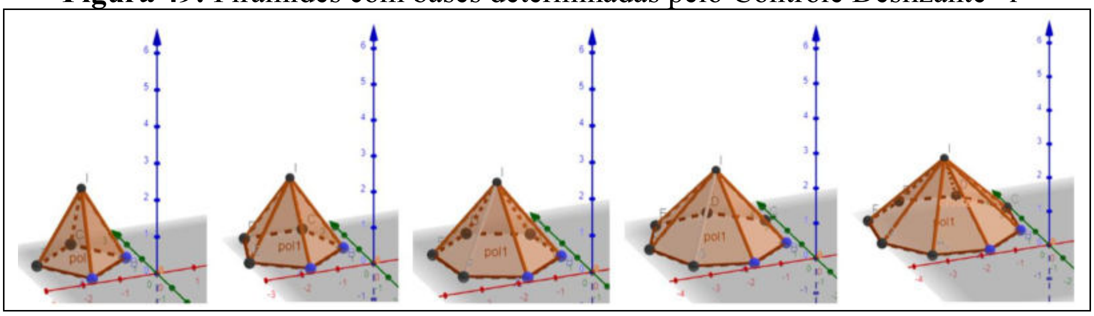
Figura 48: Construindo a pirâmide com altura vinculada ao Controle Deslizante "H"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Use os controles deslizantes para obter pirâmides como as apresentadas na Figura 49. Aproveite para manipular atentamente cada figura, anotando e refletindo sobre suas descobertas, dúvidas e constatações.

Figura 49: Pirâmides com bases determinadas pelo Controle Deslizante "l"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.4.2 Classificação das pirâmides

Observando as diversas pirâmides geradas com a variação do parâmetro do controle deslizante l, como mostrado na Figura 49, você pode perceber que o que difere essas pirâmides são os polígonos da base. Desse modo, as pirâmides são classificadas, de acordo com o polígono da base, em pirâmide triangular, quadrangular, pentagonal e assim por diante.

Para compreender algumas relações, observe as pirâmides no GeoGebra, copie e preencha a Tabela 3.

Tabela 3: Dados numéricos com base nas observações dos elementos de cada pirâmide

Tipo da Base	Núm. de Faces	Núm. de Vértices	Núm. de Arestas
Triangular			
Quadrangular			
Pentagonal			
Hexagonal			
Heptagonal			
Octogonal			

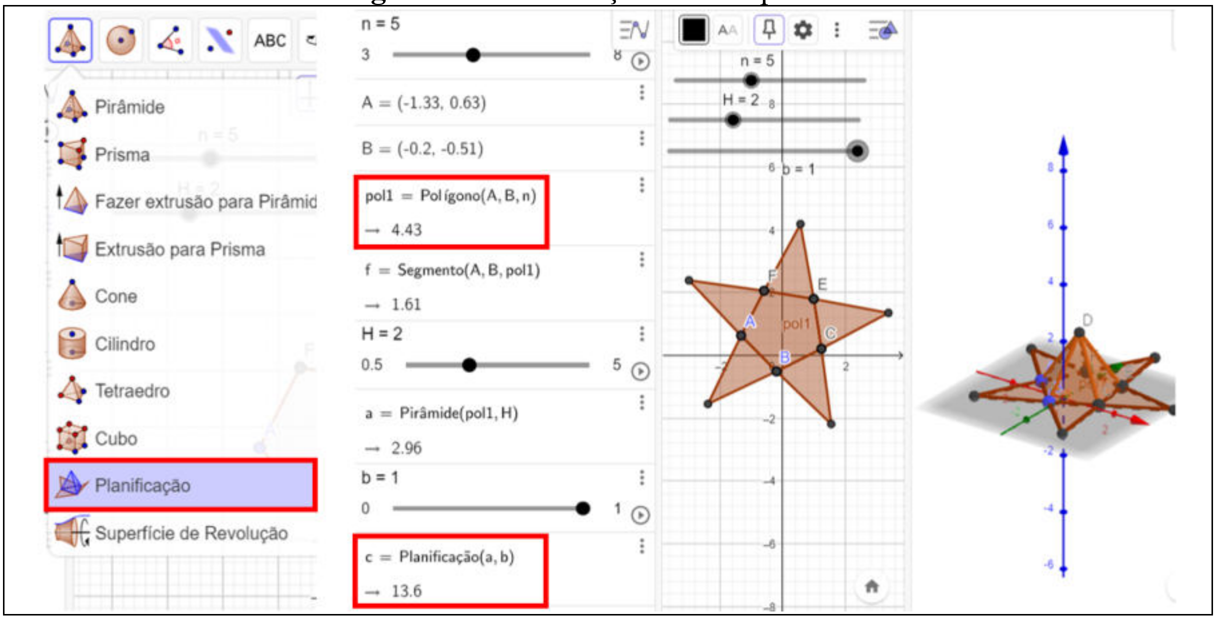
Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, para cada linha da Tabela 3, faça a soma das colunas 2 e 3 e compare com a coluna 4, para verificar se a Relação de Euler é válida também para as pirâmides.

3.4.3 Área lateral e área total de uma pirâmide

Considerando a pirâmide já construída, no tópico 3.4.1, clique na ferramenta “Planificação” e acione o controle deslizante “b”, como na Figura 50.

Figura 50: Planificação de uma pirâmide



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

O processo de planificação gerou o Controle Deslizante b, cujo parâmetro varia de 0 a 1. Isso representa o percentual de abertura da figura. Somente quando b = 1 a figura aparece na Janela de Visualização 2D, pois se encontra 100% planificada, ou seja, todas as faces estão totalmente apoiadas no plano da base.

O dado numérico que acompanha o elemento "pol1 = Polígono(A,B,n)" representa a área da base e o que acompanha o elemento "c = Planificação(a,b)" representa a área total da pirâmide.

É importante que você faça todos os cálculos. No entanto, é possível determinar a área lateral da pirâmide calculando a diferença entre a área total e a área da base.

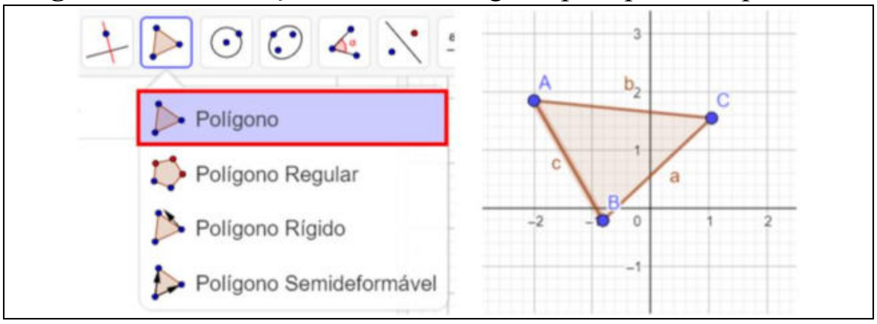
Por exemplo, a pirâmide representada na Figura 50 tem área da base igual a 4,43 e área total igual a 13,6 e, portanto, sua área lateral é 13,6 – 4,43 = 9,17 unidades quadradas.

3.4.4 Volume da pirâmide

Uma forma interessante e mais fácil de se deduzir a fórmula do volume da pirâmide é considerar a relação entre o volume da pirâmide e o volume de um prisma de mesma base. Como você já sabe calcular o volume do prisma, fica mais fácil compreender. Vamos para o GeoGebra realizar a atividade a seguir?

Passo 1) Na Janela 2D, crie um triângulo, clicando na ferramenta “Polígono” e, em seguida, em três pontos distintos A, B e C, fechando a figura no ponto A, como mostra a Figura 51.

Figura 51: Construção de base triangular para prisma e pirâmide



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra.

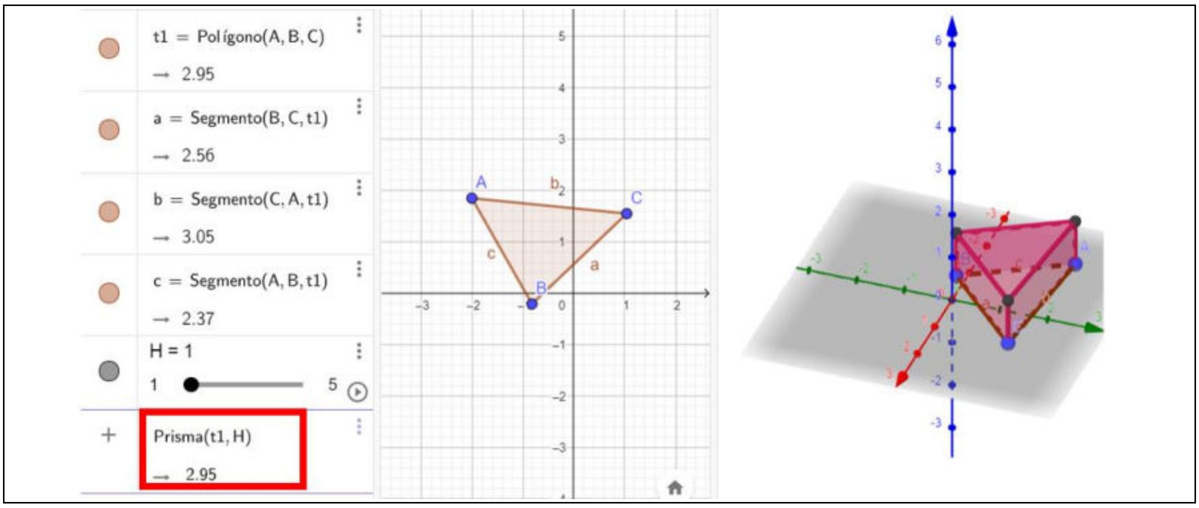
Passo 2) Para variar a altura, crie um controle deslizante, configurando-o como na Figura 52.

Figura 52: Configuração do Controle Deslizante vinculado à altura do prisma e pirâmide

Fonte: Elaborada pelo autor.

Passo 2) Na caixa de entrada, digite o comando “Prisma(t1,H)”, para criar o prisma cuja base é o triângulo t1 e a altura varia conforme o parâmetro H do controle deslizante. Veja a Figura 53.

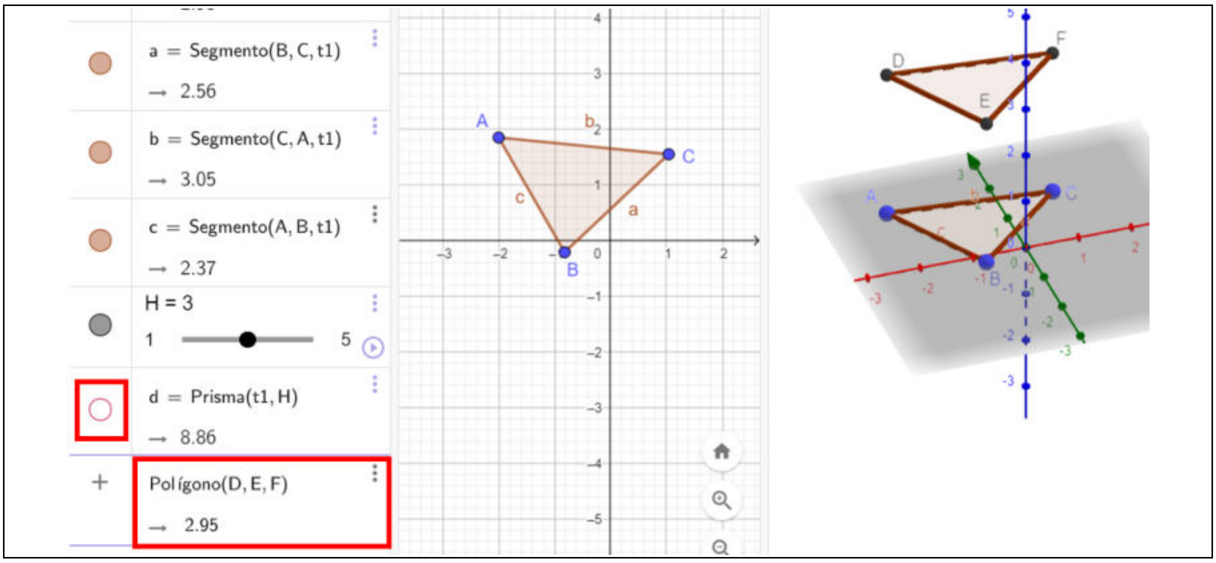
Figura 53: Construção do prisma de base “t1” e altura vinculada ao Controle Deslizante “H”



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Passo 2) Para melhor visualização, vá à Janela de Álgebra e desmarque o elemento “Prisma(t1,H)”. Caso outros elementos sejam também desmarcados, marque-os novamente, mantendo desmarcado apenas o elemento Prisma. Na caixa de entrada, digite Polígono(D,E,F), como na Figura 54.

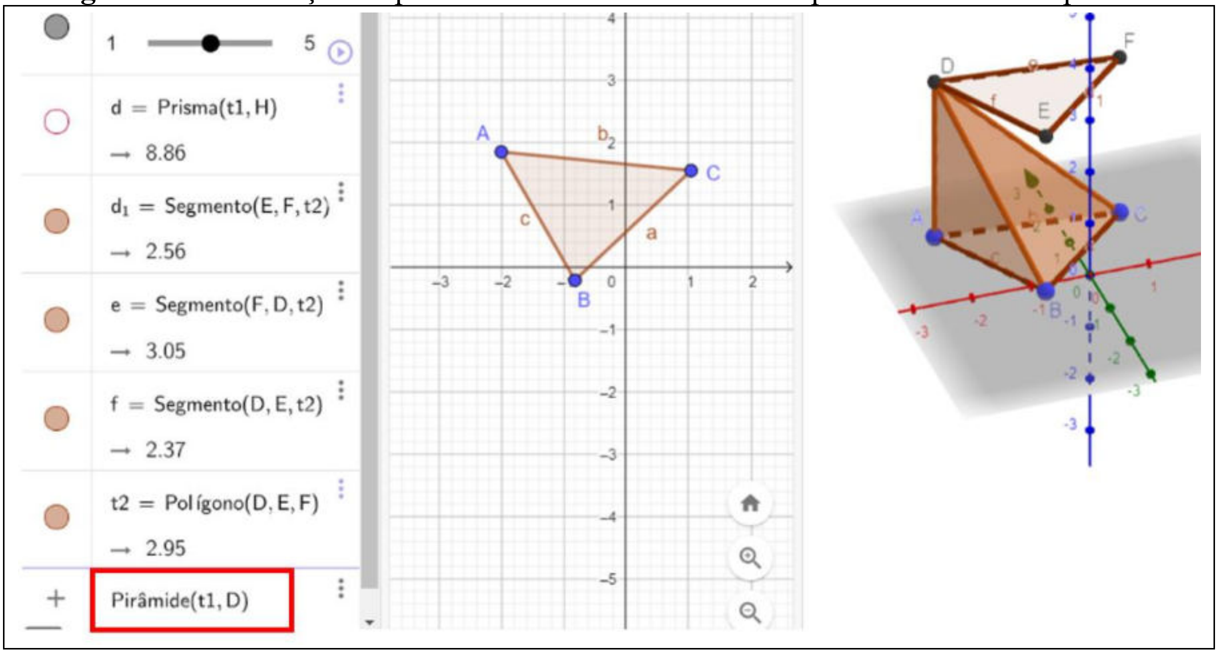
Figura 54: Omitindo o prisma e evidenciando suas duas bases



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Passo 2) Construa outra pirâmide de base coincidente com a base inferior do prisma e vértice coincidindo com um dos vértices da base superior, digitando na caixa de entrada, o comando “Pirâmide(t1, D)”, como na Figura 55.

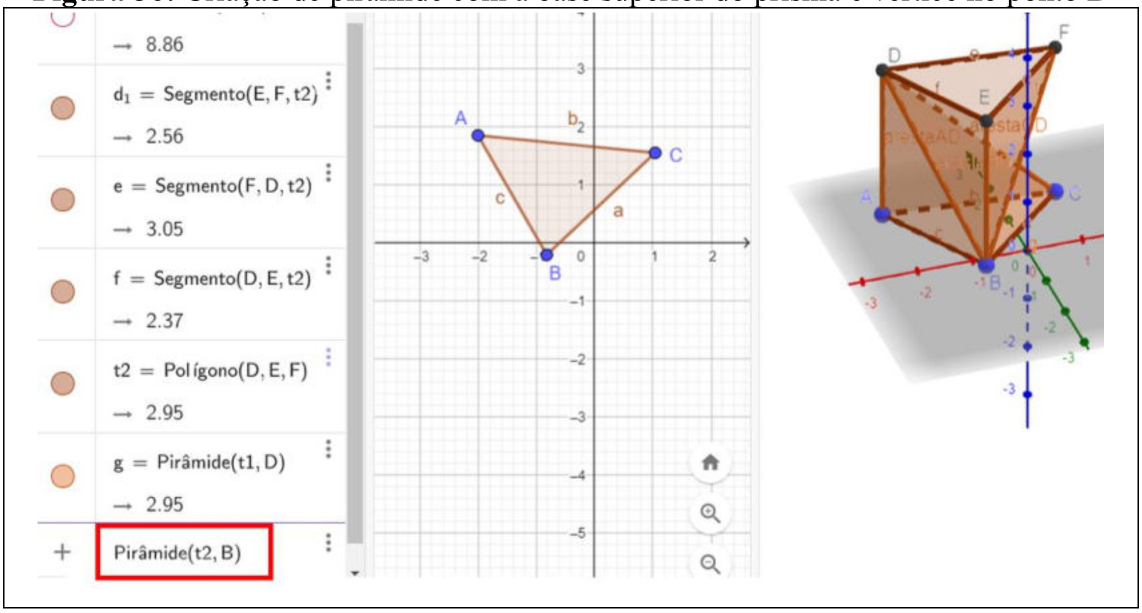
Figura 55: Construção de pirâmide com a base inferior do prisma e vértice no ponto D



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Passo 3) Crie outra pirâmide, agora com a base coincidente com a base superior do prisma e vértice coincidindo com um dos vértices da base inferior. Para isso, digite na caixa de entrada o comando "Pirâmide(t2, B)", como na Figura 56.

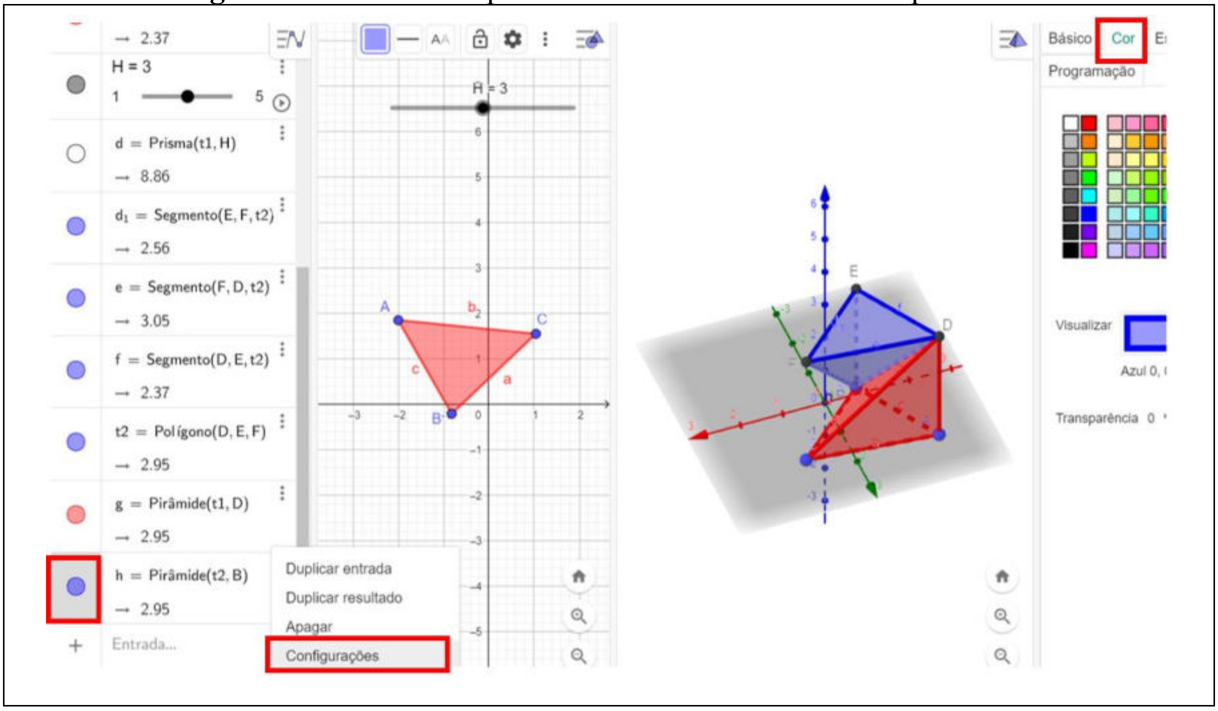
Figura 56: Criação de pirâmide com a base superior do prisma e vértice no ponto B



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Mova a figura procurando uma posição que permita perceber partes que faltam para preencher um polígono convexo. Em seguida, altere a cor das pirâmides, de preferência com cores bem distintas. Isso pode ser feito selecionando o elemento “Pirâmide” na Janela de Álgebra e clicando nos três pontinhos para acessar “Configurações”, e depois em Cor. Isso facilita para você distinguir as duas pirâmides que compõem o poliedro, como na Figura 57.

Figura 57: Movendo o poliedro e alterando as cores das pirâmides

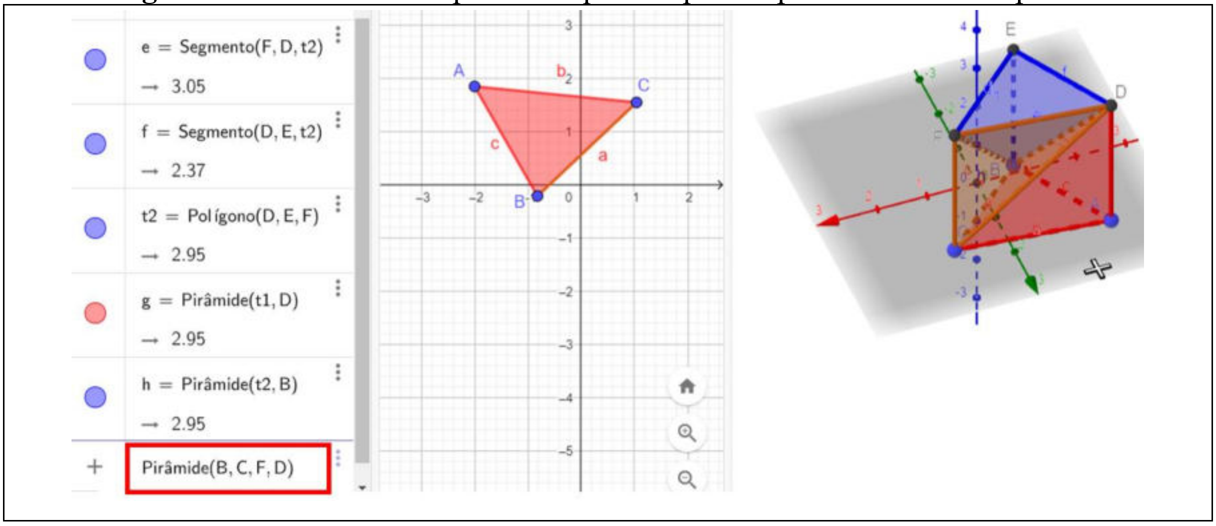


Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Percebe que uma pirâmide de base triangular se encaixa perfeitamente no espaço que falta para tornar o poliedro convexo? Os procedimentos para construção dessa pirâmide são conforme o Passo 3.

Passo 3) Na Caixa de Entrada, digite o comando “Pirâmide(B,C,F,D)”, para que seja criada a pirâmide que completa o preenchimento do prisma, como na Figura 58.

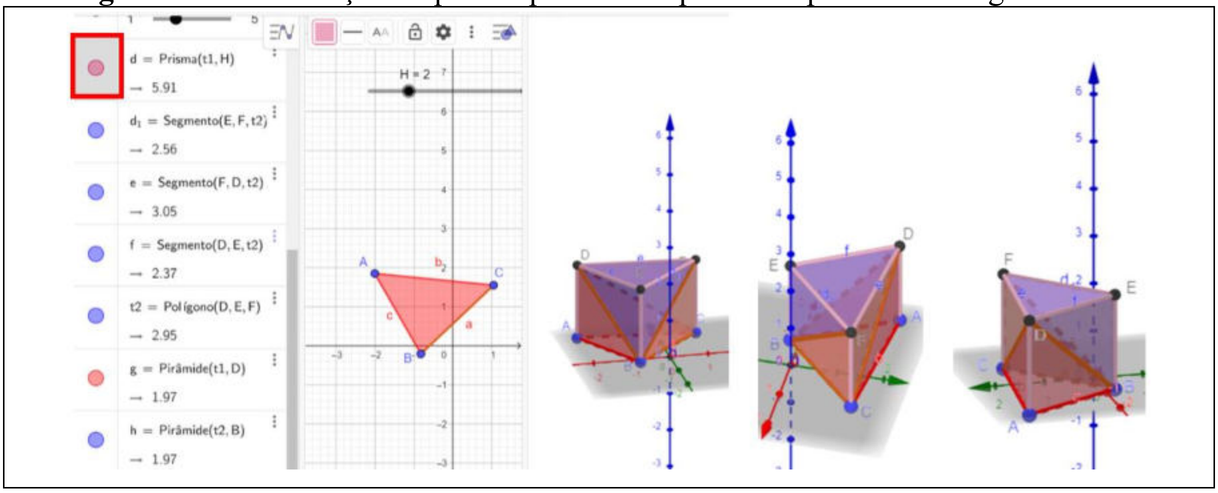
Figura 58: Construindo a pirâmide que completa o preenchimento do prisma



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Marque novamente o elemento “d = Prisma(t1,H)” e manipule a figura de modo que possa ser observada sob diversos ângulos. Note que a junção das três pirâmides coincide exatamente com o Prisma d, conforme Figura 59.

Figura 59: Visualização do prisma preenchido pelas três pirâmides de igual volume



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Na Figura 57, o volume de cada pirâmide é 1,97 unidades cúbicas e o volume do prisma é 5,91 unidades cúbicas.

Use o controle deslizante para variar a altura e, para cada figura, observe os dados na Janela de Álgebra e faça a soma dos volumes das três pirâmides e compare com o volume do prisma. Vá anotando tudo e depois observe com atenção. Podem ocorrer possíveis divergências nos valores, porque o GeoGebra opera com aproximações, mas essas diferenças são mínimas e irrelevantes.

Agora calcule a razão entre o volume de uma pirâmide e o volume do prisma, como no exemplo a seguir.

$$Exemplo: \quad \frac{Volume\ do\ Prisma\ "d"}{Volume\ da\ Pirâmide\ "g"} = \frac{5,91}{1,97} = 3$$

Ao realizar os cálculos, é provável que você tenha percebido que, mesmo com as possíveis inexatidões, a razão procurada será sempre igual a 3 ou, em raros casos, muito próxima desse valor.

Daí, pela propriedade fundamental das proporções, tem-se que

$$Volume\ da\ Pirâmide\ \mathrm{g} = \frac{1}{3}.Volume\ do\ Prisma\ "d"$$

Pelo Princípio de Cavalieri, é possível mostrar que, dada uma pirâmide qualquer e um prisma de mesma base e altura igual à altura da pirâmide, vale sempre a relação

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}.V_{Prisma}$$

Como o volume do prisma de altura H e área da base dada por A_{Base} é

$$V_{Prisma} = A_{Base}.H$$

deduz-se que o volume da pirâmide altura H é dado pela relação

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}.A_{Base}.H$$

Para saber mais sobre as pirâmides, assista o Vídeo 10.

Vídeo 10: Saiba mais sobre as pirâmides

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

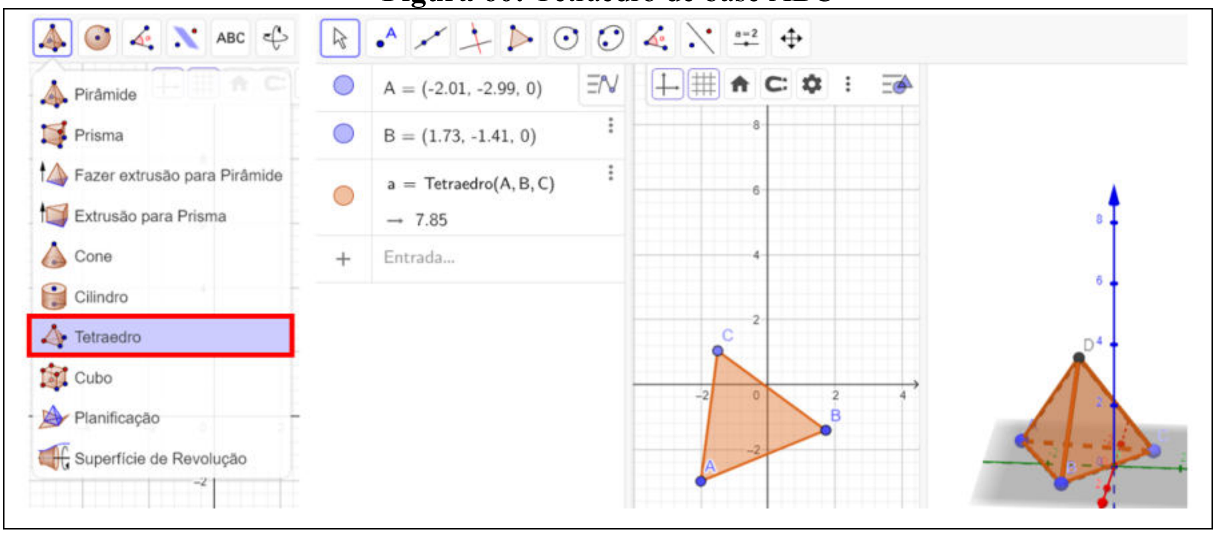
Reprodução: aproximadamente 14 minutos

Fonte: YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=enHOS5sAqNw&ab_channel=RevisandoMatematica. Acesso em 03/08/2021.

3.5 Aprendendo sobre os tetraedros

Para construir um tetraedro no GeoGebra, clique na ferramenta "Tetraedro" e, em seguida, em dois pontos quaisquer sobre o plano da Janela de Visualização 3D. Será gerado o tetraedro de base ABC, como ilustrado na Figura 60.

Figura 60: Tetraedro de base ABC



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Observando a figura, você consegue perceber que um tetraedro é um caso especial de pirâmide? É uma pirâmide triangular, não é?

Manipule a figura e destaque alguma característica especial em relação às faces.

Percebe que todas as faces são triângulos equiláteros? Então, temos na figura um tetraedro regular, um dos cinco sólidos platônicos que serão estudados mais adiante.

Vamos aprender mais sobre os elementos do tetraedro e aprender a calcular a área e volume desse sólido geométrico?

3.5.1 Elementos, área e volume do tetraedro

Para esse estudo, construa, no GeoGebra um tetraedro regular de aresta medindo “a”, procedendo como nos passos seguintes.

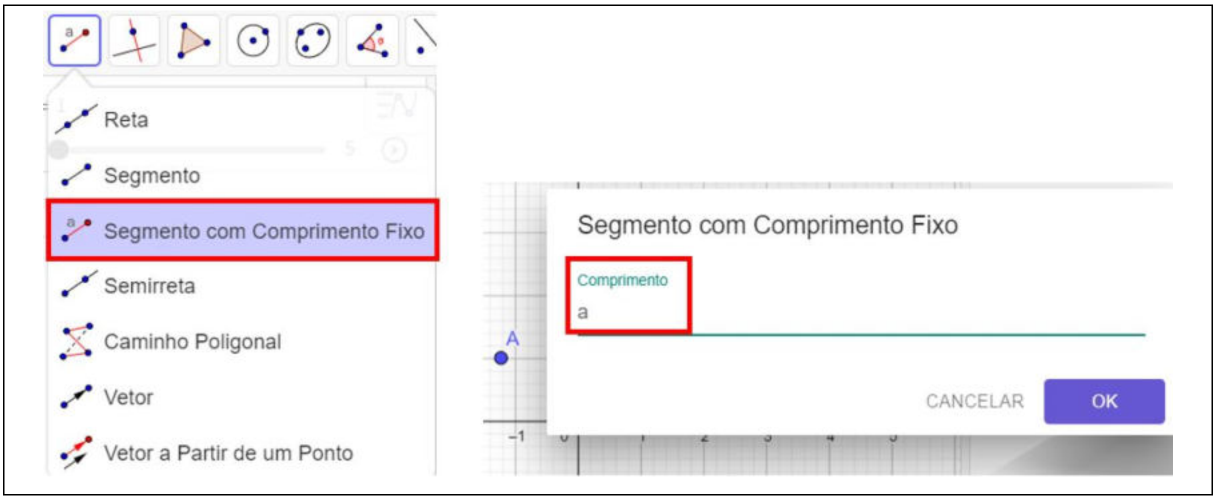
1) Para controlar a medida das arestas, crie um controle deslizante “a” e configure-o como na Figura 61.

Figura 61: Configuração do Controle Deslizante “a”

Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Clique na ferramenta “Segmento de Comprimento Fixo” e em seguida em uma região qualquer da Janela 2D e preencha o campo “Comprimento” com a letra “a”, como na Figura 62. Você criou uma aresta da base do tetraedro, vinculada ao controle deslizante!

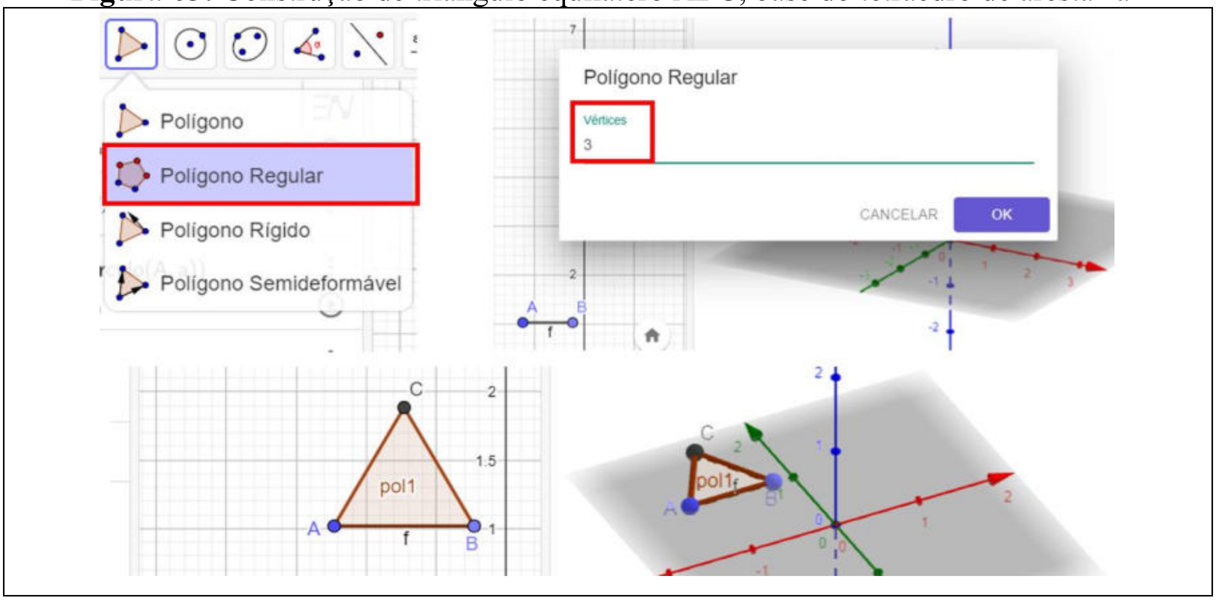
Figura 62: Construção de segmento de comprimento fixo vinculado ao Controle Deslizante "a"



Fonte: Elaborada pelo autor.

3) Para construir o triângulo equilátero que servirá de base para o tetraedro, clique na ferramenta "Polígono Regular" e nos extremos A e B do segmento de comprimento fixo do passo anterior. Será criado o triângulo ABC, de lado medindo "a", como na Figura 63.

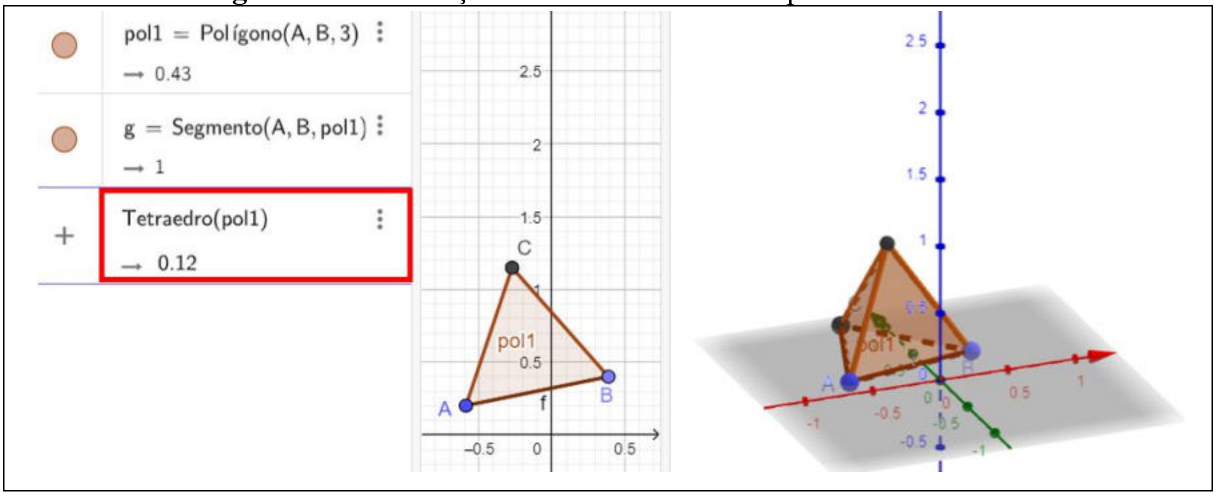
Figura 63: Construção de triângulo equilátero ABC, base do tetraedro de aresta "a"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

4) Na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, digite o comando "Tetraedro(pol1)". O sólido será gerado como na Figura 64.

Figura 64: Construção do tetraedro de base “pol1” e aresta “a”

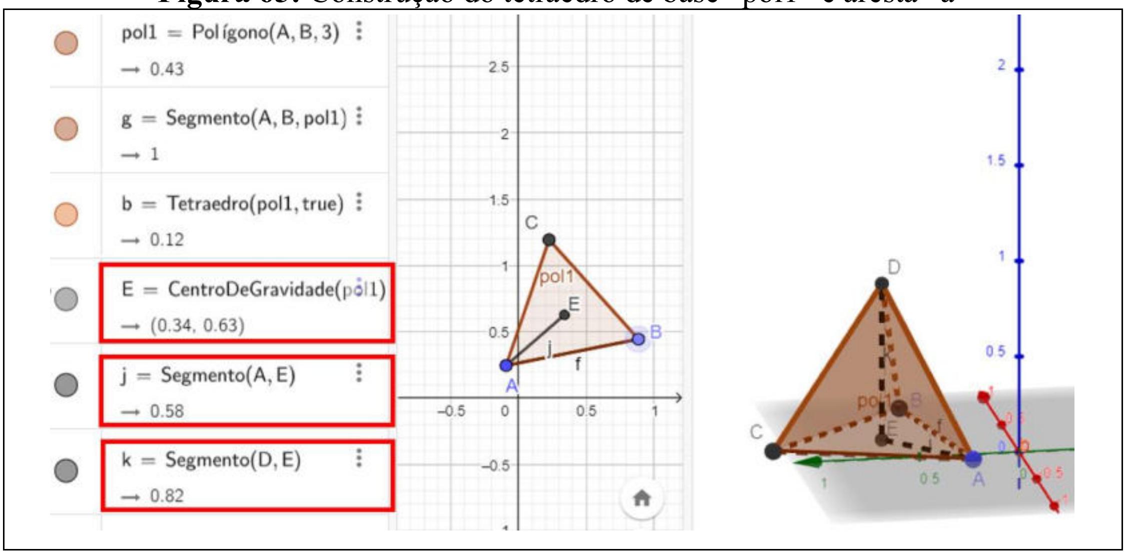


Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Embora o GeoGebra já apresente o volume do tetraedro, é importante que você visualize os segmentos necessários para o cálculo algébrico. Para isso, proceda como se segue.

5) Digite, na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, o comando “CentroDeGravidade(pol1)”, depois “Segmento(A,E)” e, finalmente, “Segmento(D,E)”, gerando os catetos do triângulo retângulo AED, como na Figura 65.

Figura 65: Construção do tetraedro de base “pol1” e aresta “a”

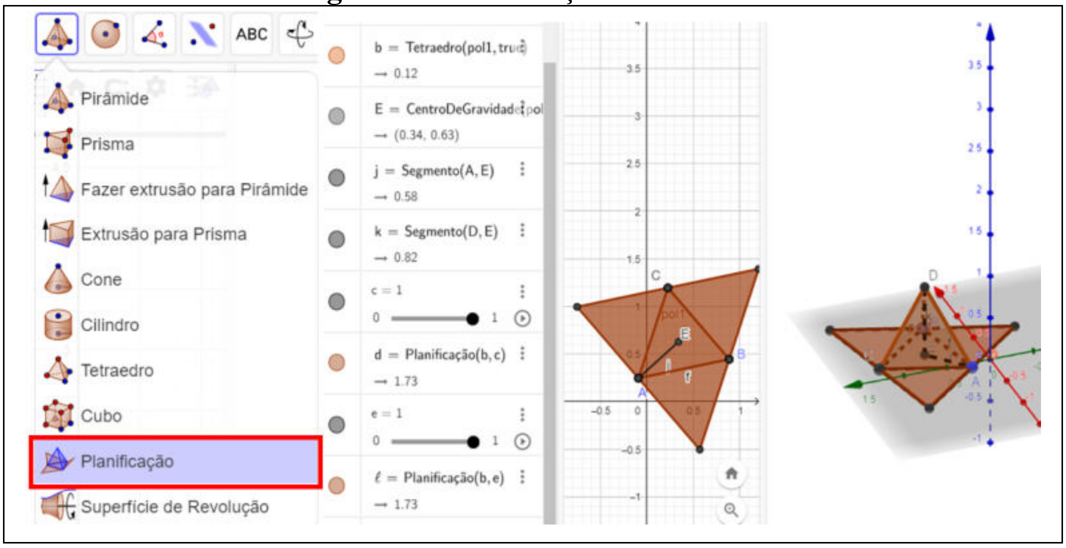


Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Lembre-se que a medida do segmento $\overline{AE}$ equivale a dois terços da altura do triângulo equilátero ABC e essa altura você já aprendeu como calcular. O segmento $\overline{DE}$ é a altura do tetraedro, que pode ser calculada utilizando-se o teorema de Pitágoras.

Clique na ferramenta “Planificação” e depois sobre o tetraedro, como na Figura 66.

Figura 66: Planificação do tetraedro



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Faça os cálculos para verificar que a área da superfície do tetraedro regular, em função da medida “a” da aresta é dada pela expressão

$$A = a^2\sqrt{3}$$

e o volume por

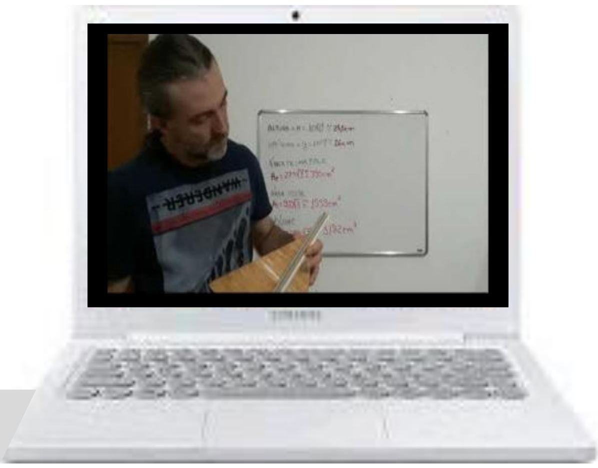
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Para saber mais sobre os tetraedros, assista o Vídeo 11.

Vídeo 11: Saiba mais sobre os tetraedros

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem



Se não abrir o vídeo, clique em “Assistir no YouTube”

Reprodução: aproximadamente 5 minutos

Fonte[3]: YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=uioTwag2nYs&ab_channel=APRENDER%26EVOLUIR. Acesso em 03/08/2021.

[3] Lembrete: Todos os vídeos e as imagens contidas neles são de livre acesso e estão disponíveis no YouTube.

3.6 Aprendendo sobre poliedros regulares

Vamos estudar sobre alguns poliedros convexos especiais. Dentre todos os poliedros convexos, existem apenas cinco poliedros regulares, também chamados de poliedros de Platão ou poliedros platônicos. Esses serão os sólidos geométricos abordados nesse tópico.

Para saber mais sobre poliedros regulares, assista o Vídeo 12.

Vídeo 12: Poliedros regulares

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

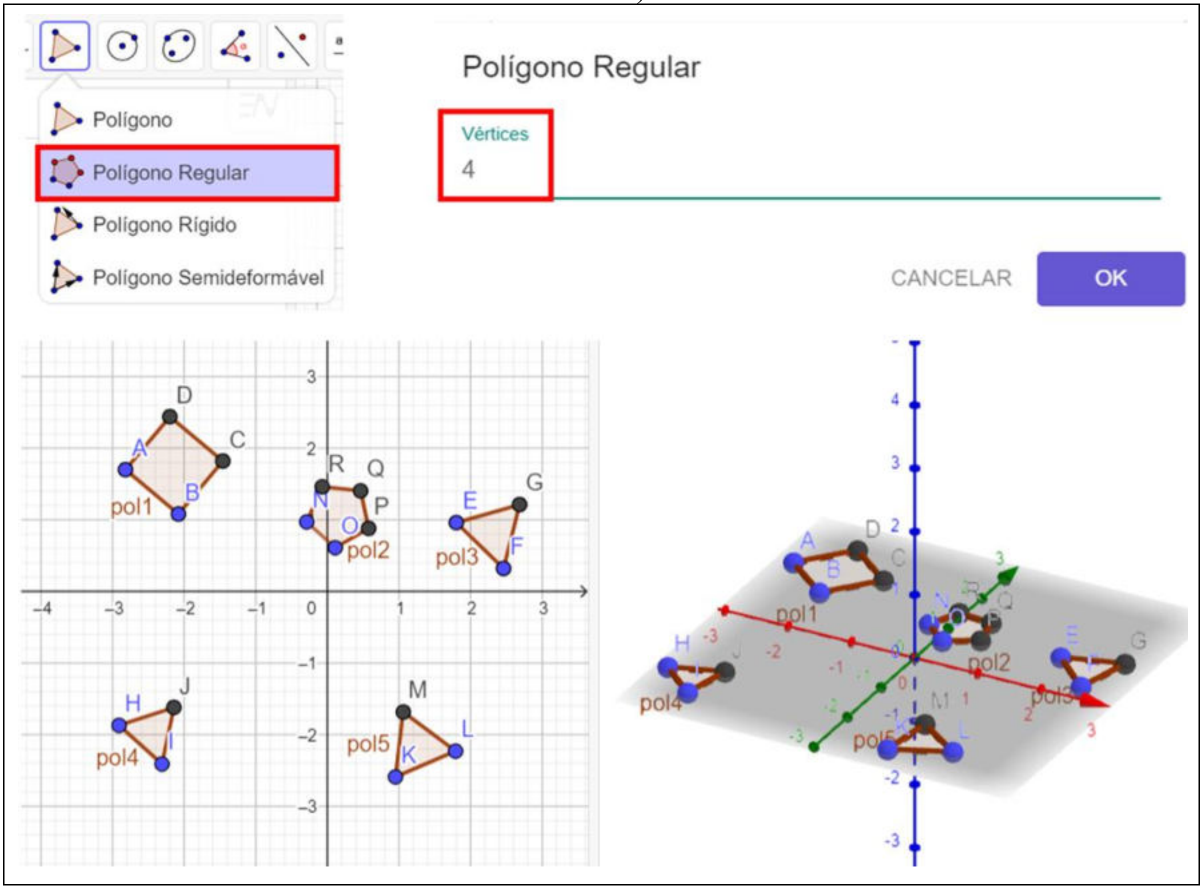
Reprodução: aproximadamente 9 minutos

Fonte: YouTube: www.youtube.com/watch?v=DbzVhSYPxQc&t=7s. Acesso em 03/08/2021.

Agora que você já sabe quais são os poliedros regulares, vamos construí-los no GeoGebra, conforme os passos a seguir.

Passo 1. Na Janela de visualização 2D, construa um quadrado, um pentágono regular e três triângulos regulares distintos. Mantenha um bom distanciamento entre as figuras, para melhor visualização durante as atividades posteriores. Todos esses polígonos podem ser construídos clicando-se na ferramenta "Polígono Regular" e em dois pontos distintos da Janela de visualização. Na caixa de diálogo que se abre, preencha o campo "Vértices" com o número 3, depois 4 e em seguida, 5. Feito isso, serão apresentadas na tela representações como as da Figura 67.

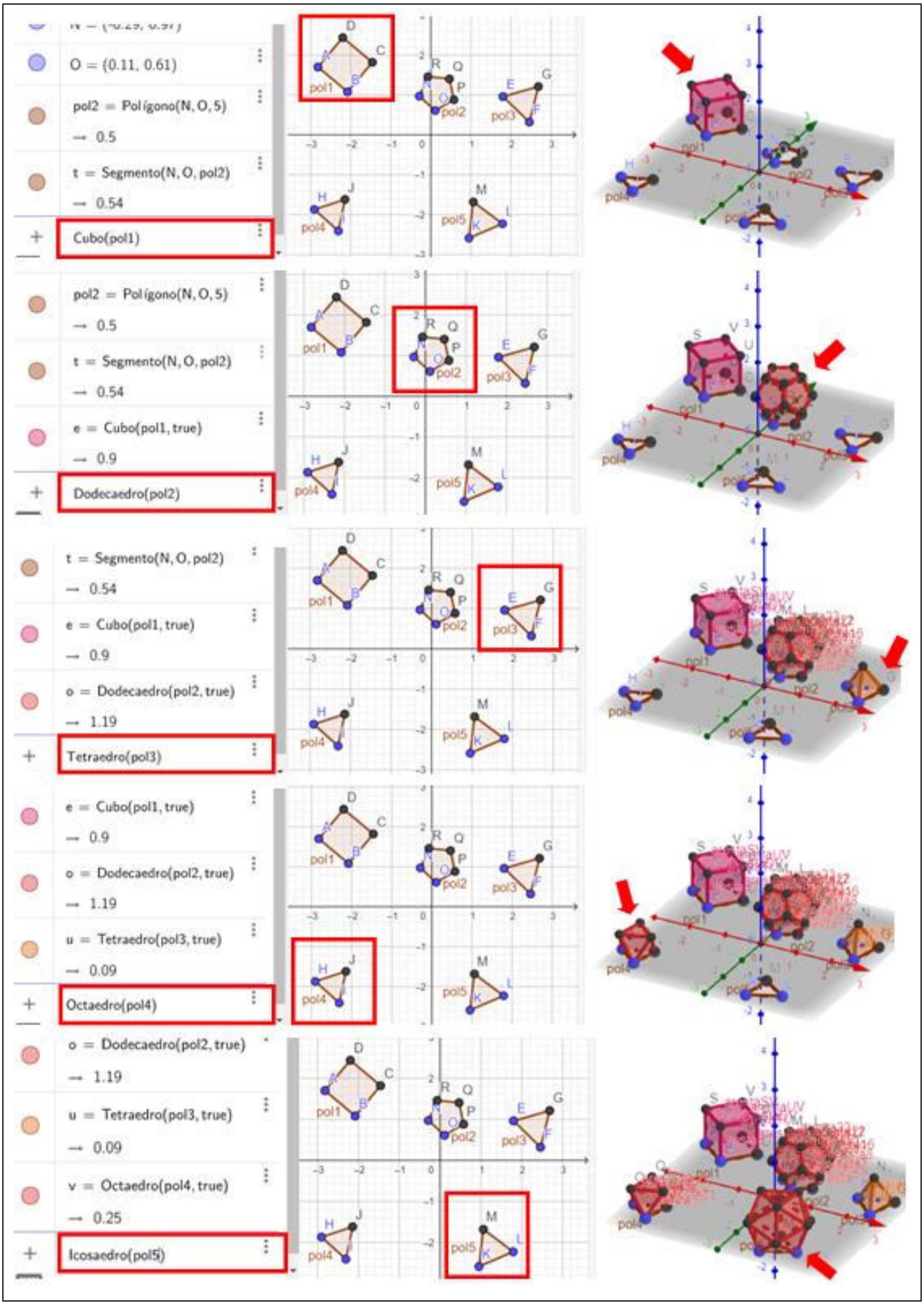
Figura 67: Construção dos polígonos base para os poliedros regulares (ou poliedros de Platão)



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Na Caixa de Entrada, digite os comandos "Cubo(pol1)"; depois, "Dodecaedro(pol2)"; em seguida, "Tetraedro(pol3); depois, "Octaedro(pol4) e, finalmente, "Icosaedro(pol5)" para gerar os poliedros regulares, como na Figura 68.

Figura 68: Construção dos poliedros regulares (ou poliedros de Platão)

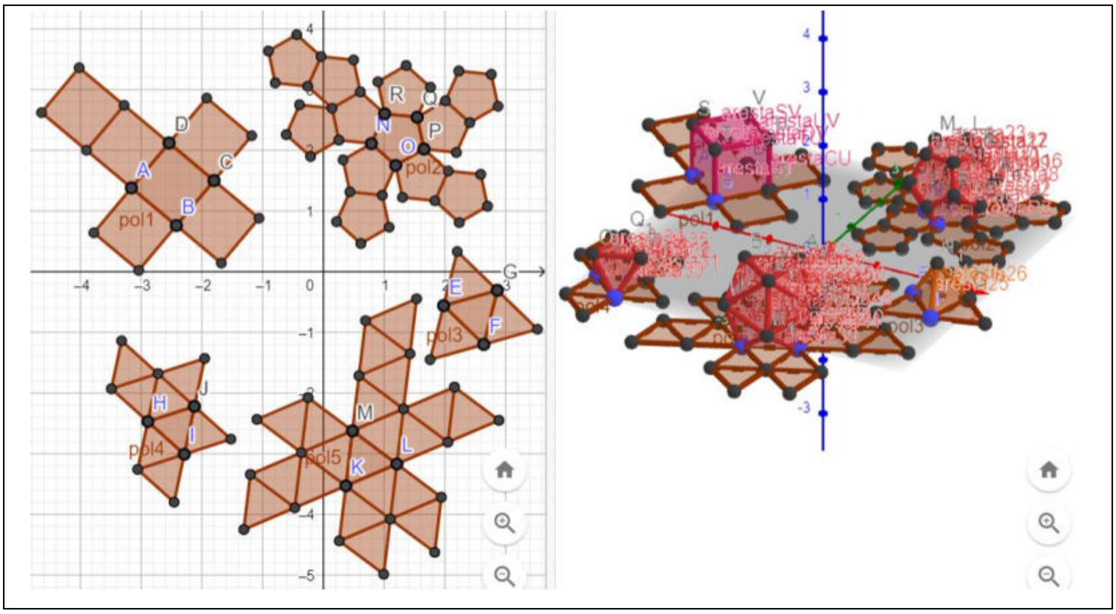


Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.6.1 Forma planificada dos poliedros regulares

Manipule atentamente as figuras e anote suas observações. Depois, clique na ferramenta “Planificação” e em cada um dos poliedros, obtendo o resultado como na Figura 69. Procure identificar cada poliedro pela sua forma planificada e a quantidade de faces de cada um.

Figura 69: Forma planificada dos poliedros regulares (ou poliedros de Platão)



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.6.2 Poliedros de Platão e a Relação de Euler

Observando os poliedros regulares no GeoGebra, copie e preencha a Tabela 4.

Tabela 4: Registro sobre os elementos observados nos poliedros de Platão

Poliedro	Polígono da face	Núm. faces	Núm. vértices	Núm. arestas
Hexaedro (Cubo)	*Quadrado*			
Dodecaedro	*Pentágono regular*			
Tetraedro	*Triângulo equilátero*			
Octaedro				
Icosaedro				

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, para cada linha da Tabela 4, faça a soma da terceira com a quarta coluna e compare o resultado com a quinta colona. Veja se o Teorema 6.1 está de acordo com o que você constatou. Essa é a famosa Relação de Euler.

Teorema 6.1: (Relação de Euler): Em todo poliedro convexo é válida a relação

$$V + F = A + 2,$$

ou seja,

$$V - A + F = 2.$$

Definição 6.1 (poliedros platônicos): Diz-se que um poliedro é platônico se, e só se, é convexo, em todo vértice concorre o mesmo número de arestas, toda face tem o mesmo número de arestas e é válida a Relação de Euler.

Verifique se essas informações são válidas para as figuras geradas no GeoGebra.

Para compreender melhor a Relação de Euler, assista o Vídeo 13.

Vídeo 13: Relação de Euler

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

Reprodução: aproximadamente 23 minutos

Fonte: YouTube: www.youtube.com/watch?v=5P_Gx4PP2hw&ab_channel=GiscomGizMatem%C3%A1tica. Acesso em 03/08/2021.

3.7 Aprendendo sobre os cilindros

Considerando-se dois planos distintos e paralelos α e β, assim como mencionado no estudo dos prismas, tomemos sobre esses planos duas regiões circulares (círculos) c_1 e c_2, de raios congruentes e centros O_1 e O_2. Traçando-se o segmento de reta $\overline{O_1O_2}$, o conjunto que esse segmento e todos os segmentos de reta paralelos a ele e cujas extremidades pertencem aos círculos c_1 e c_2 é denominado cilindro de bases c_1 e c_2.

Para construir um cilindro reto no GeoGebra 3D, de modo que sua altura e o raio da base possam ser facilmente manipulados, proceda como nos passos a seguir.

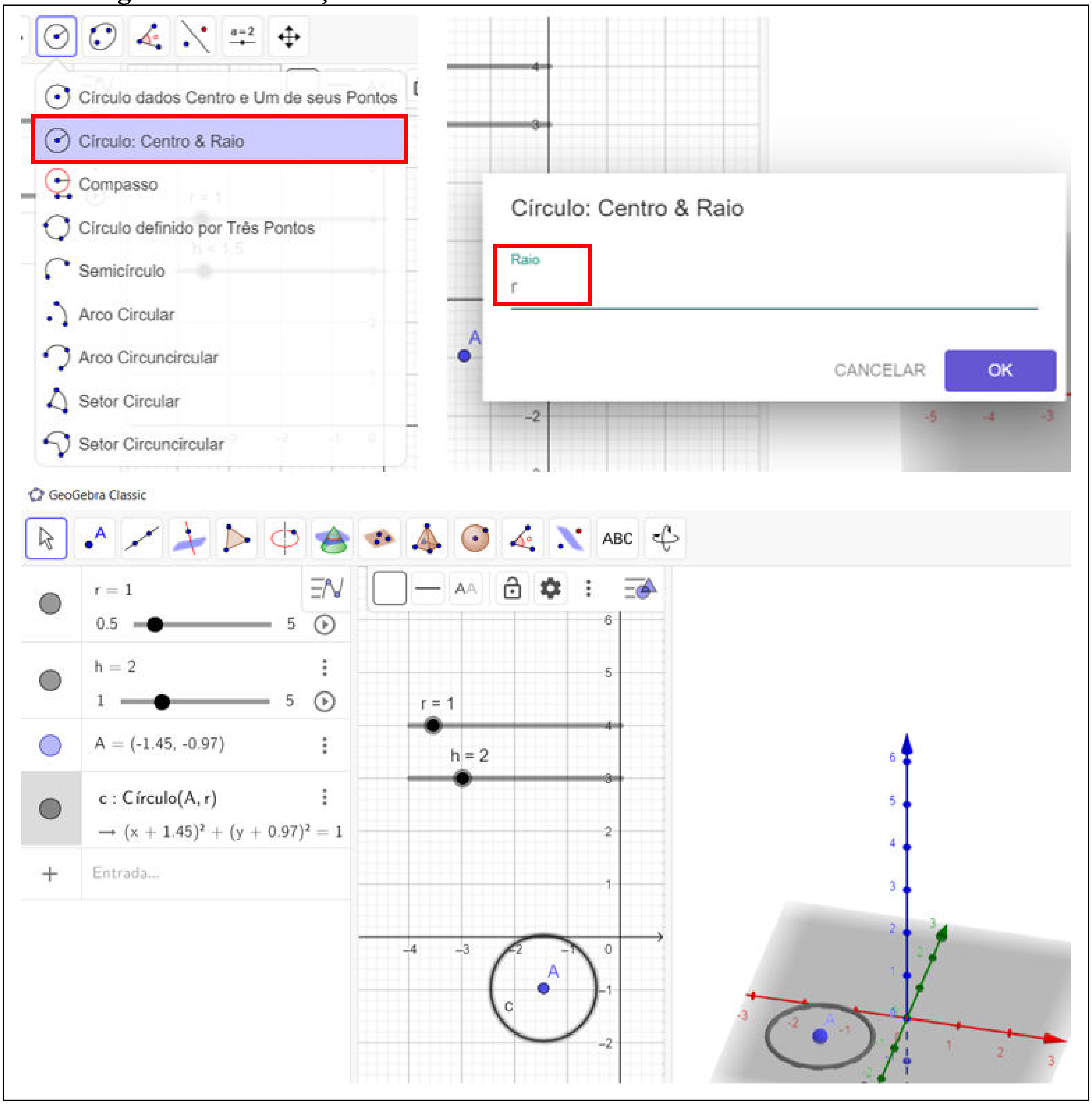
1) Inicialmente, crie dois controles deslizantes e configure-os como na Figura 70.

Figura 70: Configuração dos controles deslizante vinculados ao raio e altura do cilindro

Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Como base para o cilindro, construa um círculo com raio vinculado ao controle deslizante r. Para isso, clique na ferramenta “Círculo: Centro & Raio” e em um ponto qualquer da Janela 2D. Preencha o campo “Raio” com o parâmetro r e clique OK, para que seja gerada a imagem como na Figura 71.

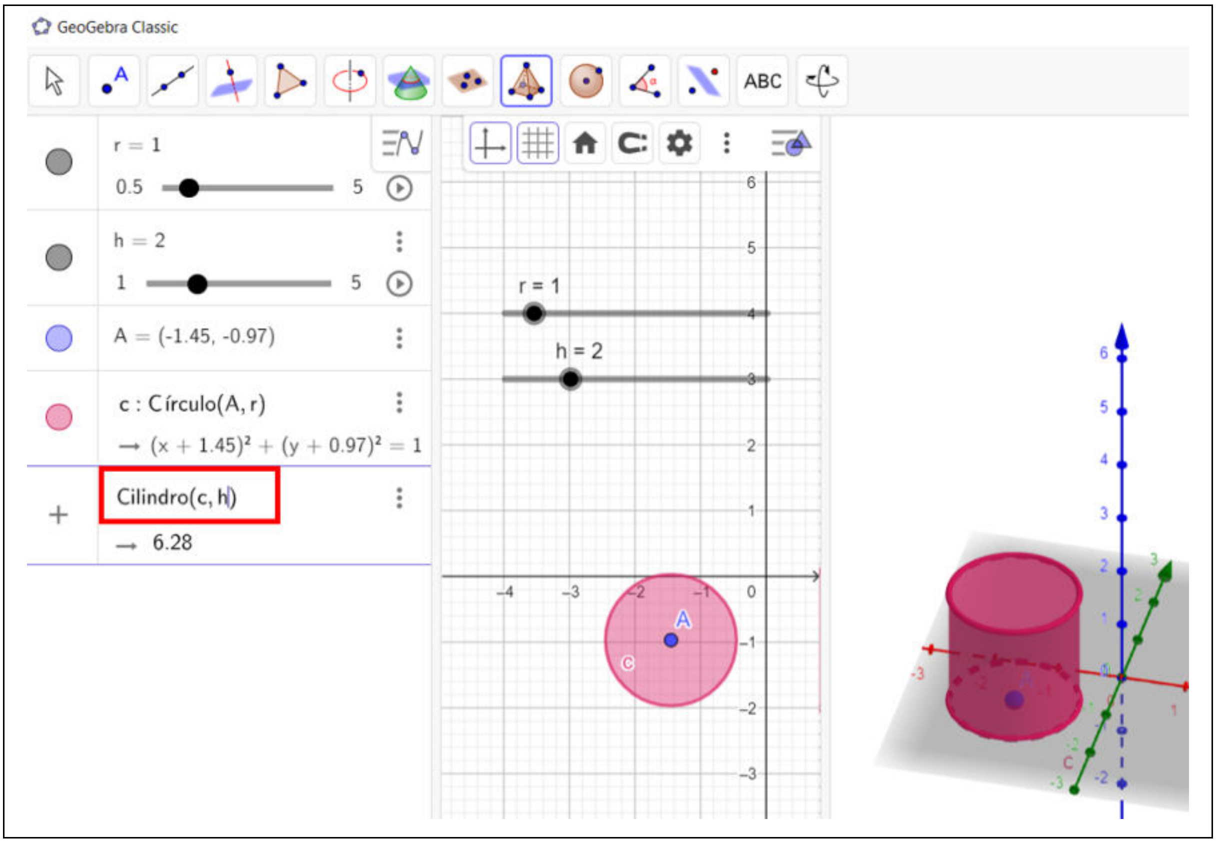
Figura 71: Construção do círculo de raio vinculado ao Controle Deslizante "r"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3) Na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, digite o comando "Cilindro(c, h)", como ilustrado na Figura 72.

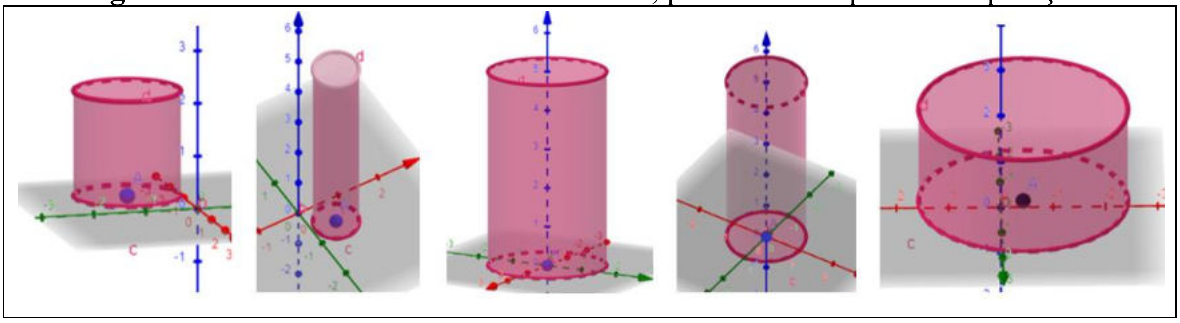
Figura 72: Construção do cilindro de base “c” e altura vinculada ao Controle Deslizante “h”



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Manipule os controles deslizantes e também de movimentos na tela, de modo a observar diferentes sólidos e sob diversos ângulos, como ilustrado na Figura 73.

Figura 73: Diferentes vistas do cilindro reto, possibilitadas pelas manipulações



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.7.1 Elementos e classificação dos cilindros

Você já deve ter percebido que, semelhantemente aos prismas, os cilindros têm duas bases paralelas e uma superfície lateral. A principal diferença é que as bases são circulares e não poligonais, ao passo que a superfície lateral não é composta de polígonos, mas de uma superfície curva.

As bases são duas regiões circulares de mesmo raio, situadas em planos distintos e paralelos. Assim como nos prismas, a altura do cilindro é a distância entre os planos que contêm suas bases. Sendo C_1 e C_2 os centros dos círculos das bases, a reta $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ é chamada “eixo” do cilindro.

Os segmentos paralelos à reta $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ e que estão situados na superfície do cilindro são chamados “geratrizes”.

Semelhantemente aos prismas, os cilindros são classificados em retos e oblíquos. Um cilindro é reto quando seu eixo é perpendicular aos planos de suas bases. Caso contrário, o cilindro é dito oblíquo.

Para saber mais, assista o vídeo 14.

Vídeo 14: Elementos e classificação dos cilindros

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em “Assistir no YouTube”

Reprodução: aproximadamente 8 minutos

Fonte[4]: YouTube: www.youtube.com/watch?v=rpbFsCa7D4E&ab_channel=EquacionaComPauloPereira. Acesso em 04/08/2021.

[4] Lembrete: Todos os vídeos e as imagens contidas neles são de livre acesso e estão disponíveis no YouTube.

3.7.2 Área da superfície lateral e área total do cilindro

A versão do GeoGebra utilizada nesse trabalho não dispõe da ferramenta para planificação de corpos redondos, por isso, não é possível obter as áreas do cilindro utilizando-se desse recurso, como foi sugerido no estudo dos prismas e pirâmides. No entanto, é fácil perceber que a superfície do cilindro, embora seja curva, pode ser representada na forma de uma figura plana retangular, cuja medida da base equivale ao perímetro do círculo da base e a altura é a mesma do cilindro.

Como já mostrado no Vídeo 8, a área lateral A_l de um cilindro de raio r e altura h, pode ser calculada por meio da relação

$$A_l = 2\pi r.h$$

Como a base é um círculo, você deve se lembrar que a área da base é dada por

$$A_b = \pi r^2$$

e, então, a área total da superfície do cilindro pode ser obtida pela relação

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r.h$$

Para melhorar essa fórmula, você pode evidenciar o fator comum $2\pi r$ e obter a relação equivalente

$$A = 2\pi r(r + h),$$

que é, esteticamente, mais elegante que a outra.

3.7.3 Volume do cilindro

Você deve imaginar que, por terem algumas propriedades em comum, o cálculo do volume do cilindro segue a mesma lógica utilizada para calcular o volume de um prisma, certo? A diferença está apenas na forma de se calcular as áreas das bases.

Para verificar se isso é verdade, vamos utilizar o Princípio de Cavalieri. Para isso proceda como nos passos que se seguem.

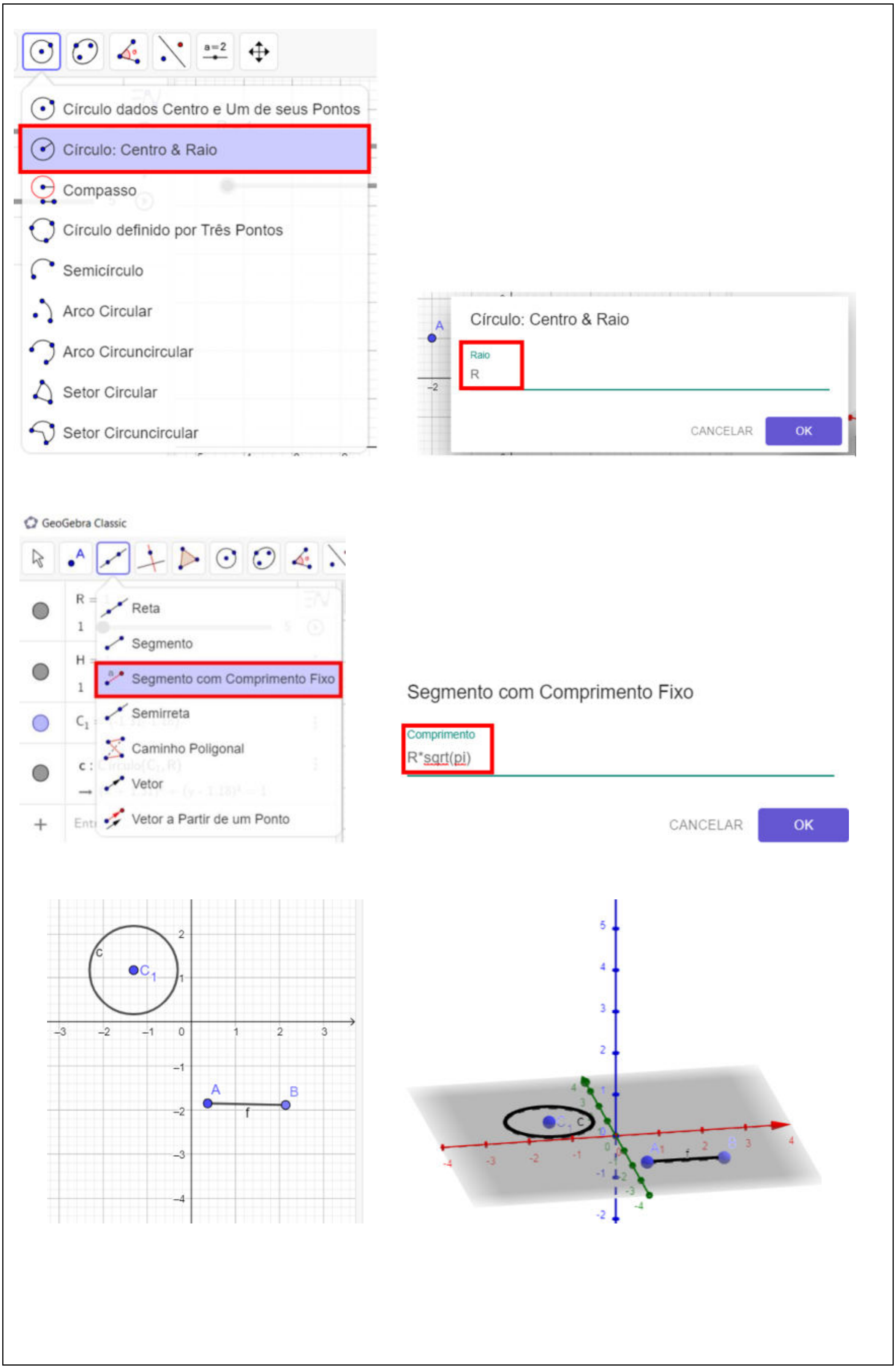
1) Crie dois controles deslizantes, “R” e “H”, e configure-os como na Figura 74.

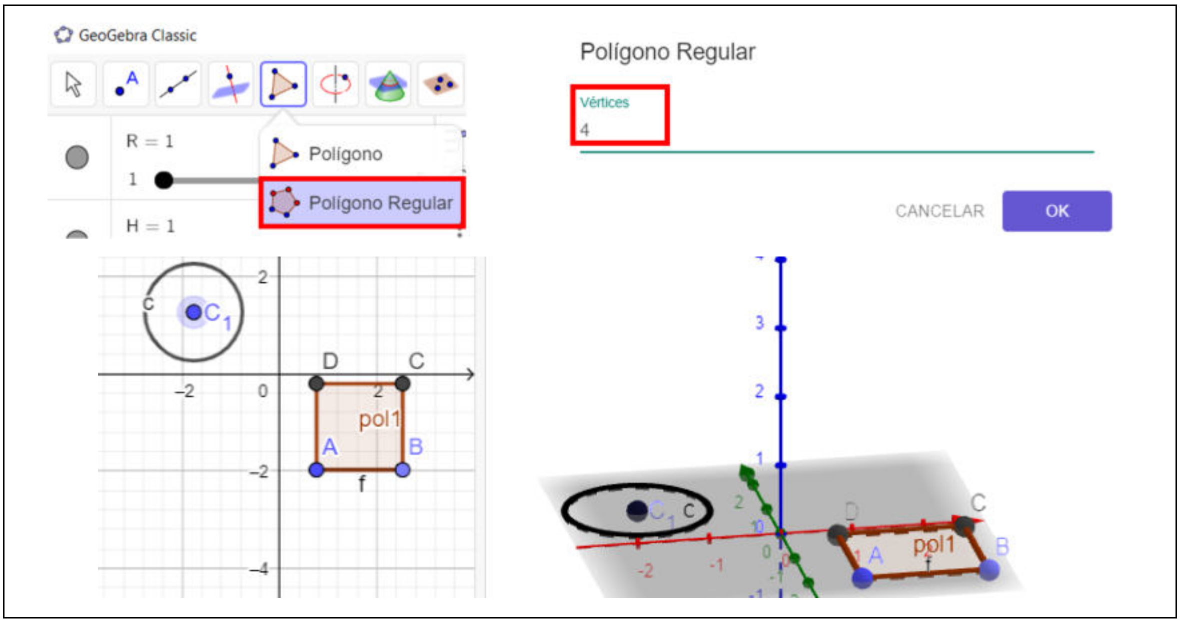
Figura 74: Configuração dos controles deslizantes “R” e “H”

Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Clique na ferramenta “Círculo: Centro & Raio” e em uma região qualquer da Janela 2D, preencha o campo Raio da caixa de diálogo com o parâmetro “R” e clique OK. Em seguida, clique na ferramenta “Segmento com Comprimento Fixo” e em outra região da Janela 2D, preenchendo o campo “Comprimento” da caixa de diálogo com o comando “R*sqrt(pi) e clicando novamente OK. Finalmente, clique na ferramenta “Polígono Regular” e nos pontos A e B, extremos do segmento construído e preencha o campo “Vértices” da caixa de diálogo com o numeral 4 (quatro). Desse modo, serão geradas a base circular de um cilindro e a base quadrada de um prisma, ambas as bases de mesma área, como ilustrado na Figura 75.

Figura 75: Construção de círculo e polígono de mesma área vinculados ao Controle Deslizante "R"

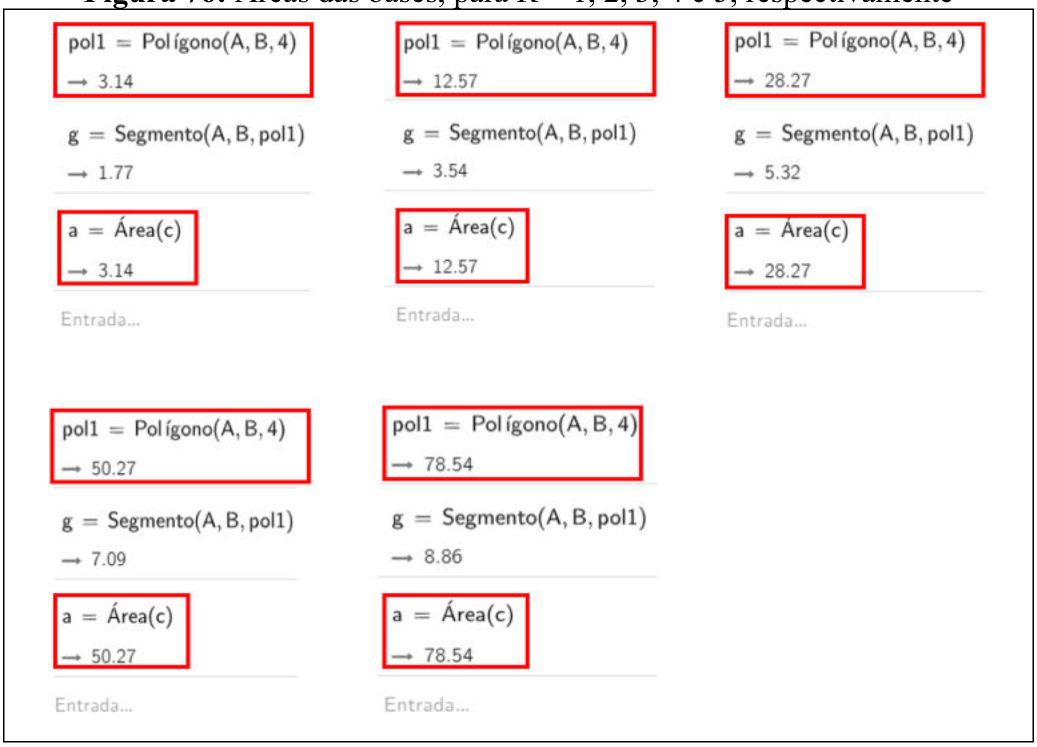




Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

2) Para ter a certeza de que a igualdade das áreas do cilindro e do polígono da Figura 7.6 será preservada durante as manipulações, digite, na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, o comando "Área(c)" e manipule o controle deslizante, comparando valores dos campos referentes às áreas das duas figuras. O elemento "pol1" representam o polígono com sua área e o elemento "a" representa a área do círculo c, como na Figura 76.

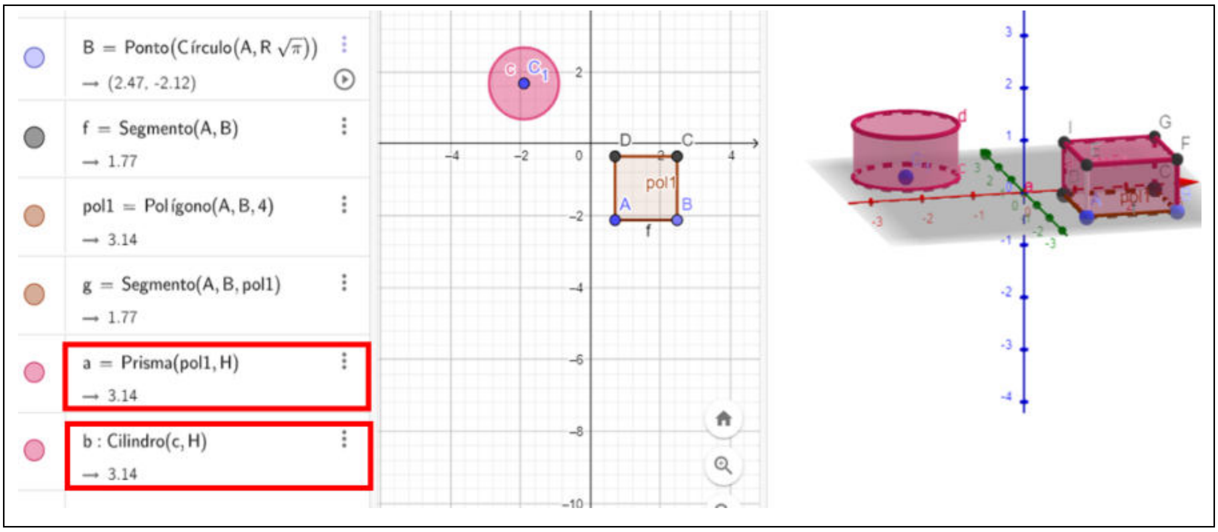
Figura 76: Áreas das bases, para R = 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente



Fonte: Elaborada pelo autor. Dados gerados no GeoGebra.

4) Na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, os comandos “Prisma(pol1,H)” e “Cilindro(c,H)”. Interessante destacar que os volumes dos dois sólidos são iguais, como na Figura 77.

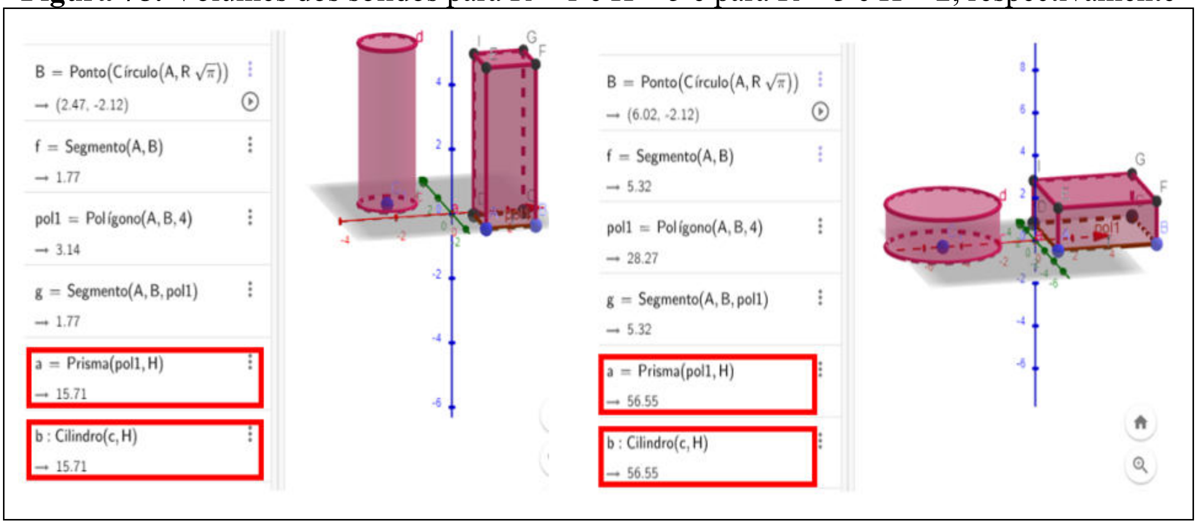
Figura 77: Sólidos auxiliares para dedução do volume do cilindro pelo Princípio de Cavalieri



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Manipule os controles deslizantes, a exemplo do ilustrado na Figura 78.

Figura 78: Volumes dos sólidos para R = 1 e H = 5 e para R = 3 e H = 2, respectivamente



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Manipulando os sólidos e utilizando os valores para calcular, verifique que, para o cálculo do volume do cilindro de raio r, vale a relação

$$V = \pi r^2 . h$$

Para saber mais sobre os cilindros, assista o Vídeo 15.

Vídeo 15: Saiba mais sobre os cilindros

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

Reprodução: aproximadamente 5 minutos

Fonte: YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=0Imo2KUxIi8&ab_channel=100Problema. Acesso em 04/08/2021.

3.8 Aprendendo sobre os cones

Pelas suas experiências práticas, é provável que você saiba o que é um cone e consiga identifica-lo entre outros sólidos geométricos. Que imagem vem à sua mente ao ouvir o nome "cone"? Pode ser que você pense em um cone de sinalização de trânsito, em um funil, uma casquinha de sorvete, um chapeuzinho de aniversário ou outros objetos com forma geométrica parecida. Você reconhece as formas geométricas da Figura 79 como cones?

Figura 79: Objetos que lembram um cone

Fonte: https://www.passeidireto.com/pergunta/65721231/4-objetos-que-lembram-o-cone

Como já estudou sobre outros sólidos geométricos, é possível que você consiga perceber algumas semelhanças do cone com o cilindro, pelo formato da base e também com a pirâmide, por ter apenas um vértice fora da base.

Para compreender melhor esse sólido geométrico tão presente no nosso cotidiano, vamos estuda-lo com o auxílio do GeoGebra 3D, certo? Para isso, prossiga como nos passos a seguir.

1) Para construir um cone de altura h e base circular de raio r, de modo que essas medidas possam ser facilmente manipuladas, você deve iniciar pela criação de dois controles deslizantes, configurando-os como destacado na Figura 80.

Figura 80: Configuração dos Controles Deslizantes "r" e "h", para raio e altura do cone

Fonte: Elaborada pelo autor.

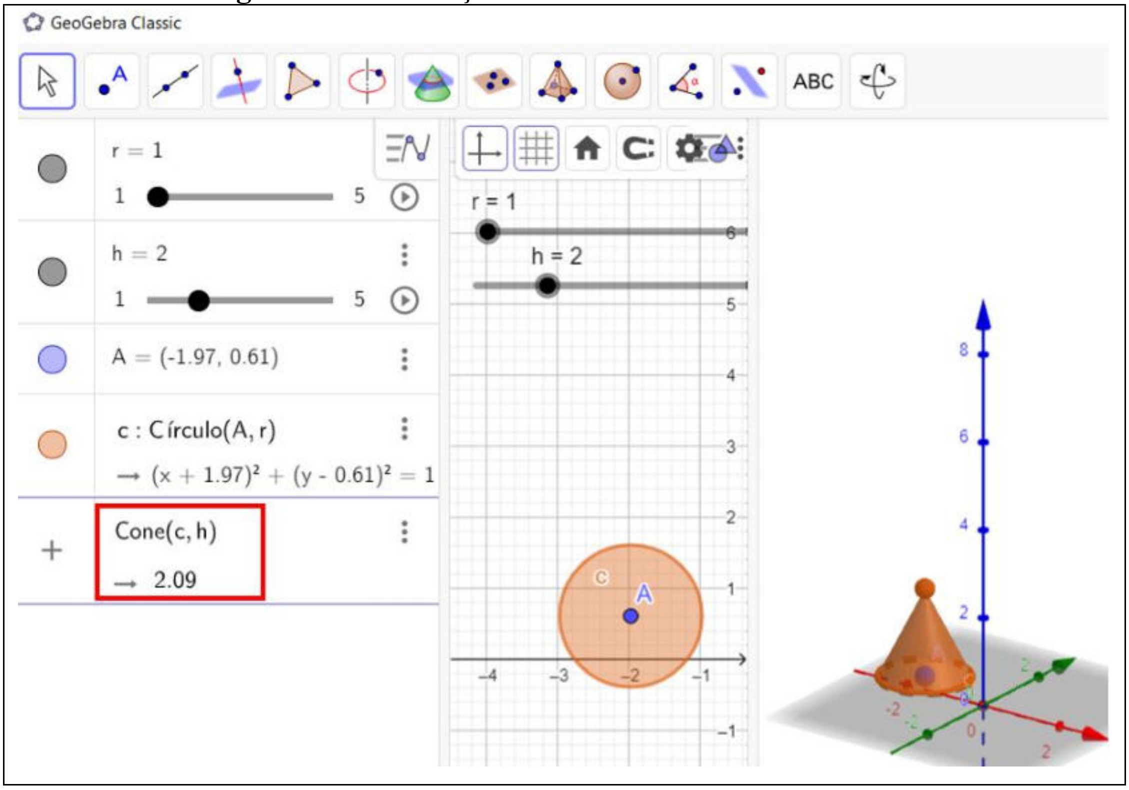
2) Para a base do cone, deve-se crie um círculo com centro móvel e raio vinculado ao controle deslizante "r", procedendo como na Figura 81.

Figura 81: Construção de círculo de raio vinculado ao Controle Deslizante "r"

Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3) Na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, digite o comando “Cone(c,h)”, como na Figura 82.

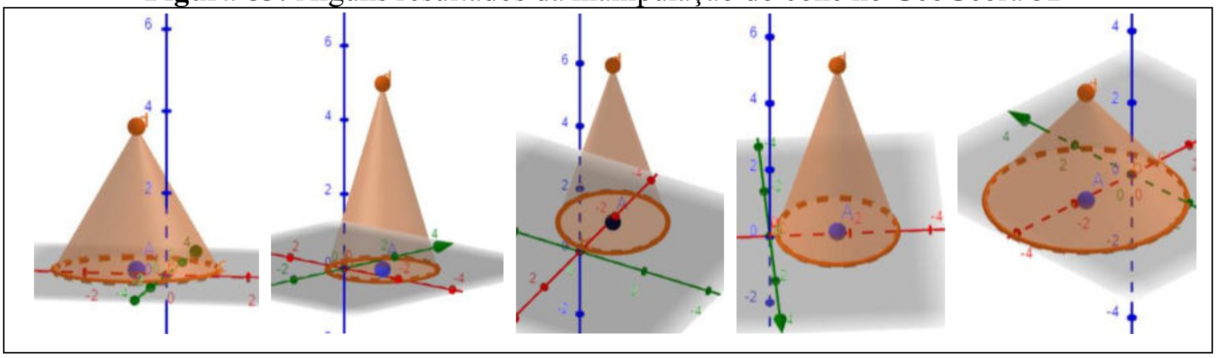
Figura 82: Construção do cone de base “c” e altura “h”



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Manipule os controles deslizantes e também mova o sólido na Janela de Visualização 3D, observando-o atentamente sob diferentes ângulos, a exemplo da Figura 83, e tentando compreender sua estrutura, identificar seus elementos e perceber propriedades e relações.

Figura 83: Alguns resultados da manipulação do cone no GeoGebra 3D

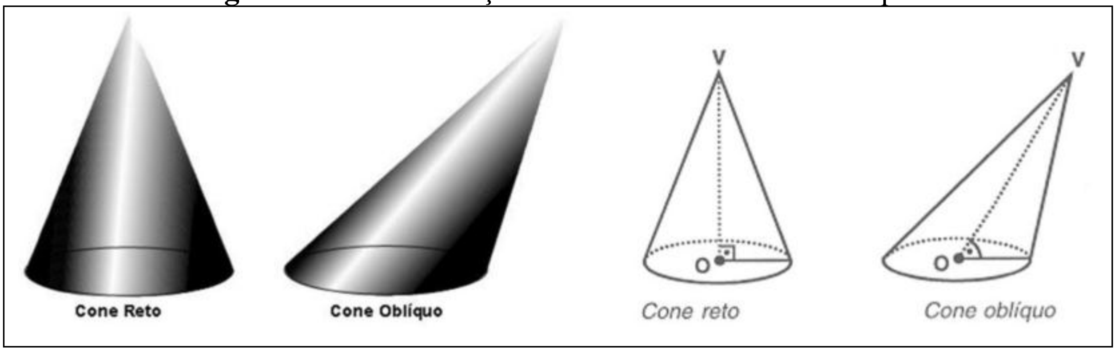


Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.8.1 Elementos e classificação dos cones

A exemplo dos prismas e cilindros, os cones também se classificam em reto e oblíquo. Observando a Figura 84, note que um cone é reto quando seu eixo é perpendicular ao plano da base e oblíquo quando não o é. Infelizmente o GeoGebra não fornece, em suas ferramentas básicas, meios para a construção de cones oblíquos.

Figura 84: Diferenciação entre cone reto e cone oblíquo

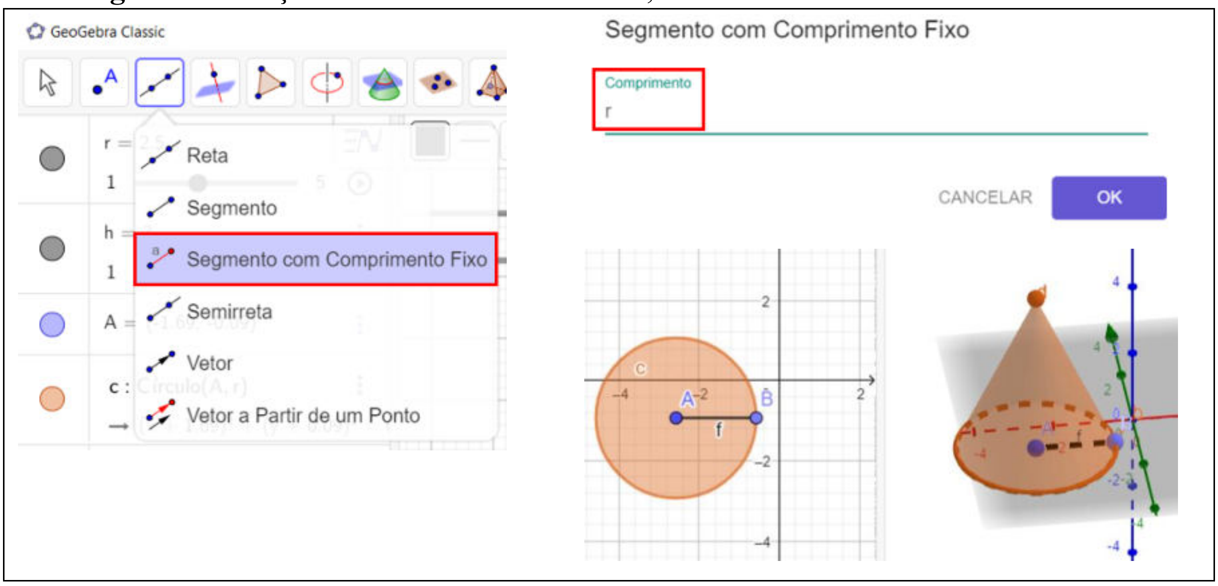


Fonte: cursinhopopularpaulofreire.files.wordpress.com

Para explorar esses sólidos geométricos no GeoGebra, proceda como se segue.

4) Clique na ferramenta "Segmento com Comprimento Fixo" da Janela 2D, depois no centro do círculo (ponto A) e, na caixa de diálogo que se abre, preencha o campo com o parâmetro "r", como ilustrado na Figura 85.

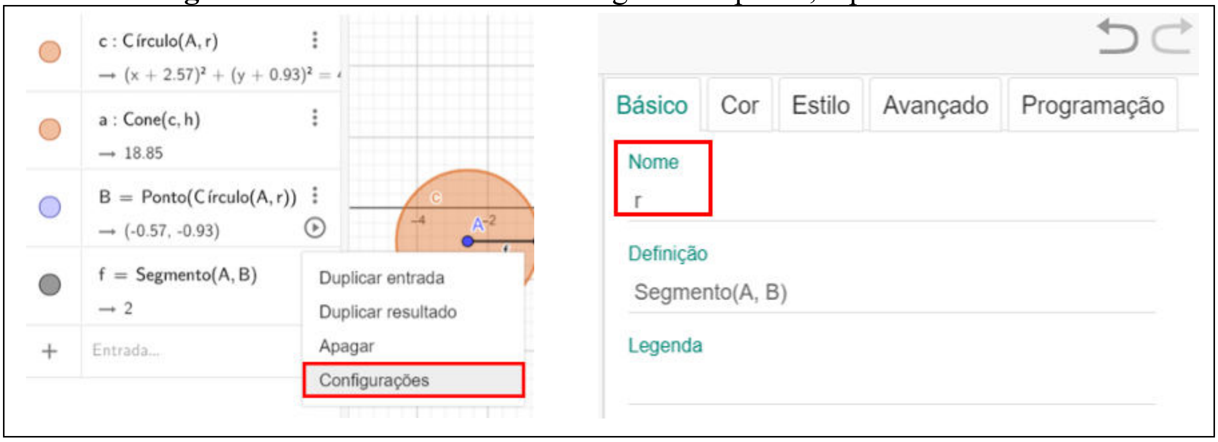
Figura 85: Traçado do raio da base do cone, vinculado ao Controle Deslizante "r"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

4) Para facilitar sua compreensão, clique sobre os dados referentes ao segmento “f” na Janela de Álgebra, acessar as “Configurações” e alterar o nome “f” para “r”, como na Figura 86.

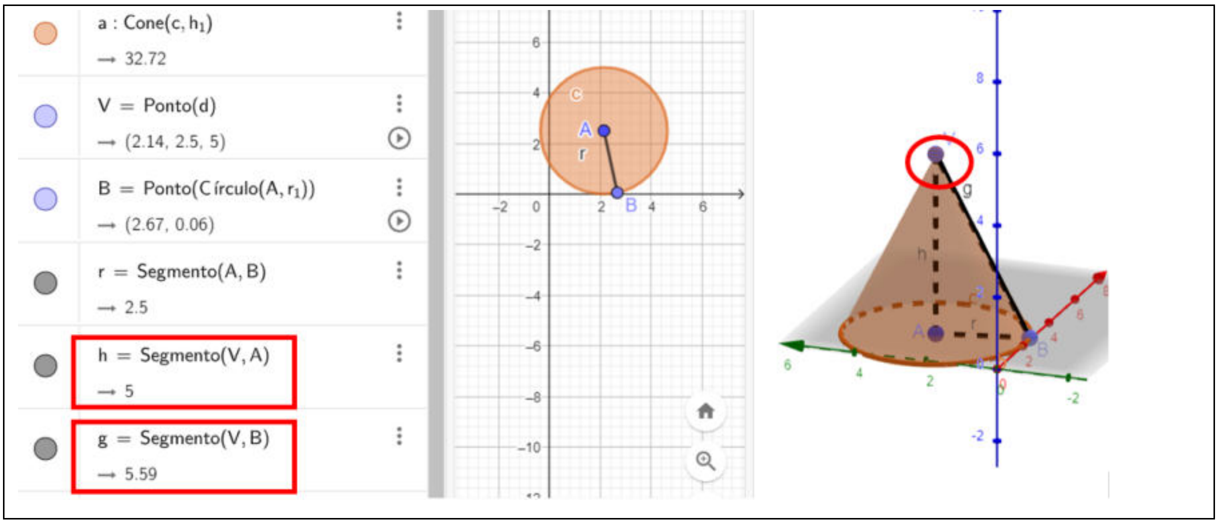
Figura 86: Alterando o nome do segmento f para r, representando o raio



Fonte: Elaborada pelo autor.

5) Clique na ferramenta “Ponto” e em seguida sobre o vértice do cone. Para facilitar a associação desse ponto ao elemento vértice, vá em configurações e renomeie esse ponto como “V”. Feito isso, clique na ferramenta “segmento” e em seguida sobre os pontos “V” e “A”, renomeando esse segmento como “h”. Repita o procedimento, só que dessa vez, clicando sobre os pontos “V” e “B”. Lembrar que “V” é o vértice, “A” é o centro da base e “B” é uma extremidade do raio r. Desse modo, o segmento VA representa a altura do cone e deve ser renomeado como “h” e o segmento VB representa a geratriz do cone e deve ser renomeado como “g”. Os elementos devem ser apresentados como na Figura 87.

Figura 87: Traçado dos elementos eixo e geratriz do cone



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Tendo ciência de que a figura explorada trata-se de um cone reto, você deve perceber que o triângulo ABV é retângulo, pois o eixo VA é perpendicular ao plano da base, no qual está contido o raio AB. Desse modo, conhecidas as medidas da altura h e do raio r, ambos catetos do triângulo retângulo ABV, de hipotenusa g, você pode calcular a medida da geratriz g aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABV. Note que r e h são determinados pelos parâmetros dos controles deslizantes e, portanto, só resta a você calcular o valor de g e comparar com a medida da geratriz g dada pela Janela de Álgebra do GeoGebra.

Por exemplo, pela Figura 87 tem-se que

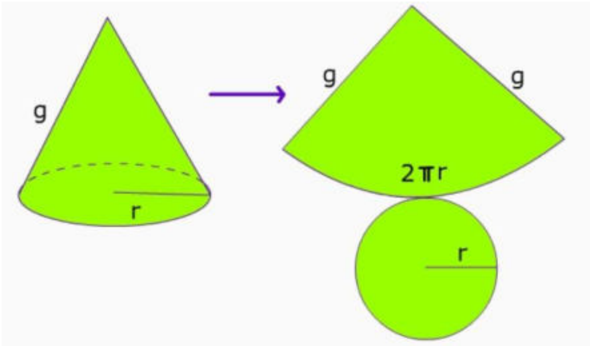
$$g^2 = r^2 + h^2$$
$$g^2 = 2{,}5^2 + 5^2$$
$$g = \sqrt{31{,}25}$$
$$g = 5{,}59$$

É importante que você efetue esses cálculos e compare com os dados da Janela de Álgebra, para perceber a importante integração entre Geometria e Álgebra.

3.8.2 Área da superfície do cone

A exemplo do que pode ser feito no caso de prismas e pirâmides, uma forma lógica para se calcular a área da superfície de um cone seria partindo da planificação desse sólido. No entanto, por ter uma superfície lateral curva, o cone, assim como o cilindro e a esfera, se enquadra na classe dos sólidos redondos, para os quais o GeoGebra não disponibiliza a ferramenta “Planificação”. Contudo, você pode encontrar em alguns livros didáticos ou mesmo consultando na internet, a planificação de um cone, como a apresentada na Figura 88.

Figura 88: Forma planificada do cone



Fonte: https://www.matematica.pt/faq/area-superficie-cone.php

Note que a área lateral do cone corresponde à área de um setor circular e que para se calcular a área total deve-se adicionar a essa área lateral a área do círculo de raio r, base do cone. Mas aqui faltam elementos para esse cálculo. Por isso, vamos apenas esclarecer que a área lateral do prisma de raio r e geratriz g é dada pela expressão

$$A_l = \pi . r . g$$

Com essa informação e já sabendo calcular a área da superfície circular, você pode deduzir que a área total da superfície do cone é

$$A = \pi r^2 + \pi . r . g$$

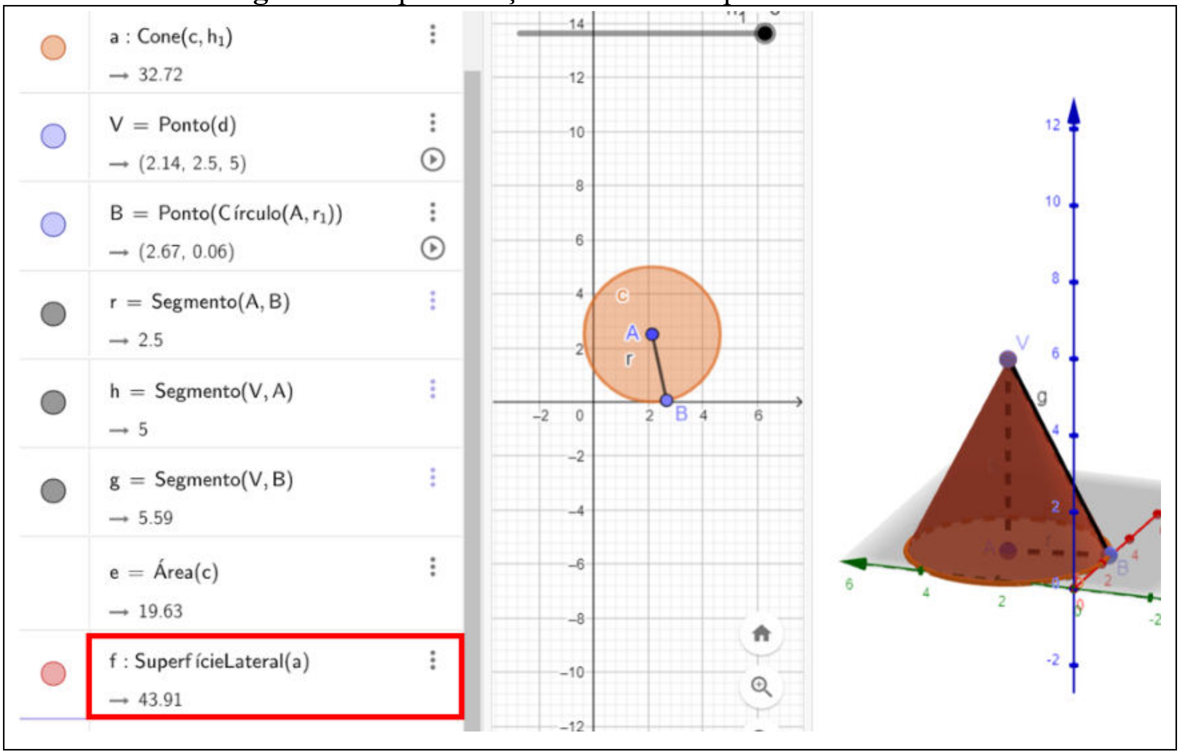
que, após alguns cálculos, se resume a

$$A = \pi r(r + g)$$

Faça os cálculos utilizando a relação acima e depois recorra à Janela de Álgebra para verificar se os resultados obtidos nos cálculos estão corretos. Para tal, proceda como se segue.

6) Para se obter a área total da superfície do cone “a”, digitar, na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, o comando “SuperfícieLateral(a)”, como na Figura 89.

Figura 89: Apresentação da área da superfície do cone "a"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

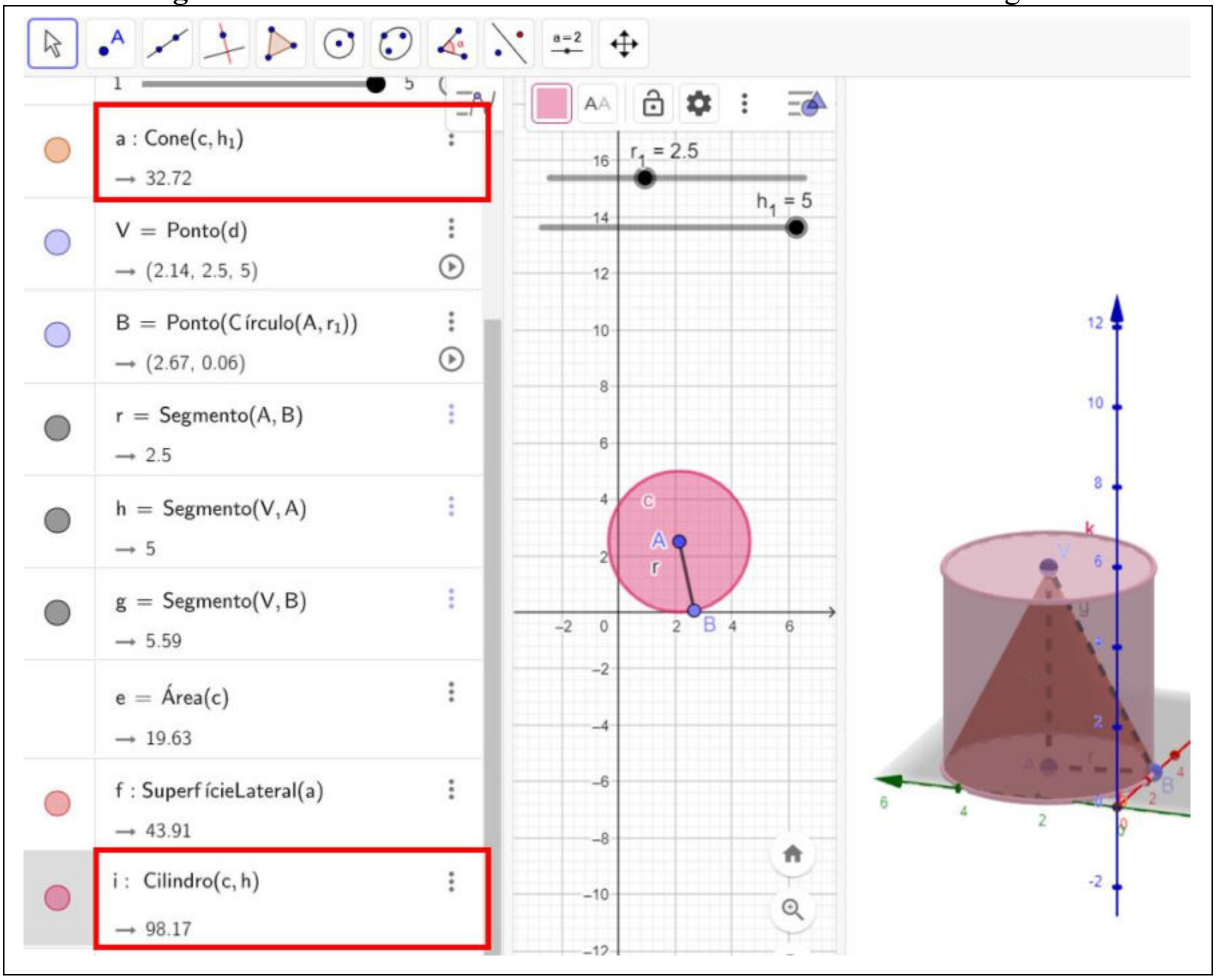
3.8.3 Volume do cone

Para dedução do volume do cone, uma alternativa interessante é construir, no GeoGebra 3D, um cilindro circunscrito ao cone, isto é, usar a mesma base do cone para esse cilindro e definir sua altura como a mesma do cone.

Como o cone construído para esse estudo tem como base o círculo "c" e altura vinculada ao Controle Deslizante "h", deve-se construir o cilindro como se segue.

7) Digite, na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, o comando "Cilindro(c,h)". Desse modo, será gerado o cilindro como ilustrado na Figura 90.

Figura 90: Volume do cone e do cilindro de mesmo raio e alturas iguais



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Agora, manipule as figuras e as observe atentamente o que ocorre. Copie a Tabela 5 e registre nela os valores apresentados nos campos referentes aos volumes dos dois sólidos, como destacado na Figura 90.

Tabela 5: Comparação dos volumes do cone e do cilindro

	Anotação 1	Anotação 2	Anotação 3	Anotação 4	Anotação 5	Anotação 6
$V_{Cilindro}$						
V_{Cone}						
$\frac{V_{Cilindro}}{V_{Cone}}$						

Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível que ocorra pequenas divergências nos cálculos, mas, caso ocorram, essa diferença é desprezível e, por isso, o valor pode sempre ser arredondado para 3. Tal divergência se deve às operações com o número irracional π (pi).

Daí, o você pode deduzir que

$$\frac{V_{Cilindro}}{V_{Cone}} = 3$$

e então, pela Propriedade Fundamental das Proporções,

$$V_{cone} = \frac{V_{cilindro}}{3}$$

e, portanto,

$$V_{cone} = \frac{\pi . r^2 . h}{3}$$

Percebe que a forma de calcular o volume do cone é muito parecido com a forma de calcular o volume da pirâmide? De fato, ambos os cálculos obedecem à mesma lógica, ou seja, representam a terça parte do produto entre a área da base e a altura do sólido geométrico.

Para saber mais sobre os cilindros, assista o Vídeo 16.

Vídeo 16: Saiba mais sobre os cones

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

Reprodução: aproximadamente 15 minutos

Fonte: YouTube: www.youtube.com/watch?v=7czepJadjGw&ab_channel=COL%C3%89GIONOVAESCOLA. Acesso em 04/08/2021.

3.9 Aprendendo sobre esferas

Ao ouvir falar de esfera é muito provável que venha à sua mente a imagem de uma bola e de outros objetos com a mesma forma geométrica. Isso é muito bom, porque você já possui uma boa noção sobre essa forma geométrica.

Além de objetos esféricos, você deve estar familiarizado com objetos cuja forma geométrica se aproxima de uma semiesfera, isto é, metade de uma esfera, não é? Sabia que é possível se construir uma esfera a partir da união de duas semiesferas de mesmo raio?

Objetos como os apresentados na Figura 91 podem ajudá-lo a reconhecer outros objetos com formas semelhantes.

Figura 91: Objetos que lembram uma esfera ou uma semiesfera

Fonte: Acervo pessoal do autor

O que se segue é uma sugestão de atividade para você realizar no GeoGebra 3D, e aprender muitas coisas novas sobre esse importante sólido geométrico.

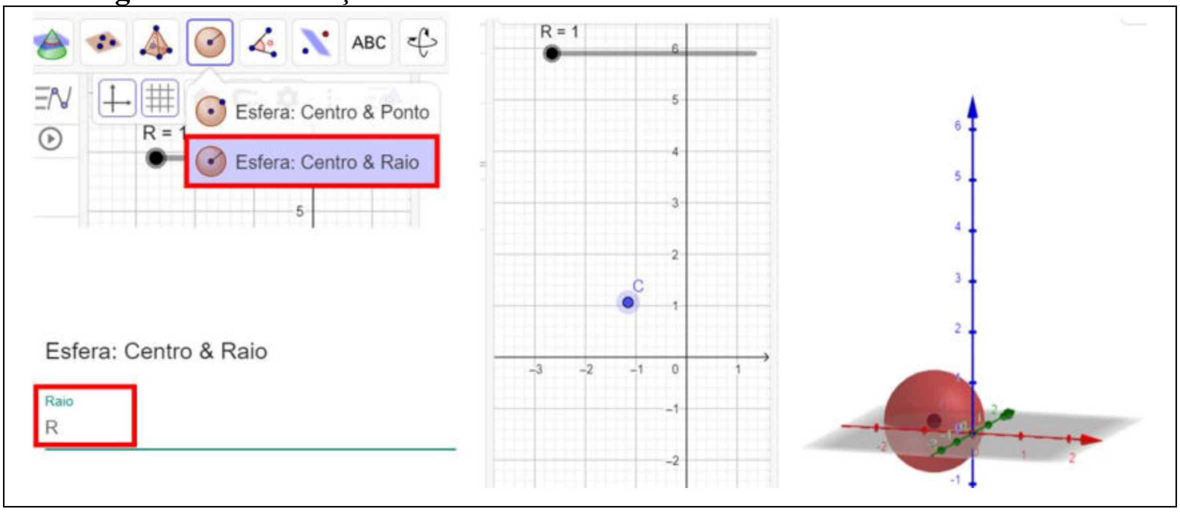
1) Na Janela 2D, crie de um controle deslizante R, configurando-o como na Figura 92.

Figura 92: Configuração do Controle Deslizante “R”

Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Para construir a esfera com raio vinculado ao controle deslizante, clique na ferramenta "Esfera: Centro & Raio" e em algum ponto sobre o plano da Janela 3D. Na caixa de diálogo que se abre, preencha o campo "raio" com o parâmetro "r". Para facilitar a compreensão, renomeie o cento da esfera (ponto A) como "C", como ilustrado na Figura 93.

Figura 93: Construção da esfera de raio vinculado ao Controle Deslizante "R"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.9.1 Volume da esfera

Para compreender a expressão matemática que expressa o volume de uma esfera em função da medida de seu raio, vá para o GeoGebra e proceda como nos passos a seguir.

1) Na Janela de visualização 2D, crie um controle deslizante, configurando-o como indicado na Figura 94.

Figura 94: Criação e configuração do Controle Deslizante "R"

Fonte: Elaborada pelo autor.

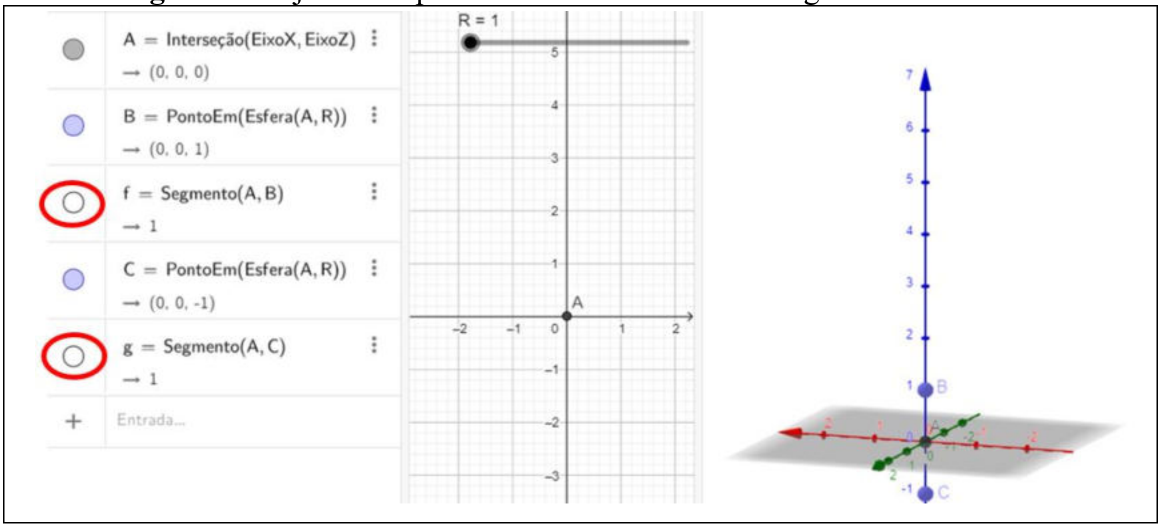
2) Algumas figuras dessa atividade dependem de dois pontos sobre o eixo Oz, simétricos e a uma distância variável R da origem. Para criar esses dois pontos, clique na Janela 3D, depois, na ferramenta “Segmento com Comprimento Fixo” e depois na origem (0, 0, 0) do sistema cartesiano. Na caixa de diálogo que se abre, preencha o campo “Comprimento” com o parâmetro “R”. Será criado um segmento AB como na Figura 95, mas o que interessa, de fato, é o ponto B de sua extremidade fora da origem. Para criar o outro ponto, clique na origem novamente e preencha o campo “Comprimento” com o mesmo parâmetro “R”. Desse modo será criado um segmento AC de comprimento R, assim como AB.

Figura 95: Criação de dois pontos B e C, vinculados ao Controle Deslizante “R”

Fonte: Elaborada pelo autor.

3) Criados os dois segmentos, clique na extremidade fora da origem de cada um deles e arraste esse ponto, colocando-o sobre o eixo Oz, um de cada lado da origem. Para isso, movimente a figura até coloca-la numa posição que facilite a colocação desses pontos em uma posição na qual apareça, na Janela de Álgebra, na forma (0, 0, 1) e (0, 0, -1), com o controle deslizante em $R = 1$. Feito isso, omita os segmentos, deixando visíveis apenas os pontos, como na Figura 96.

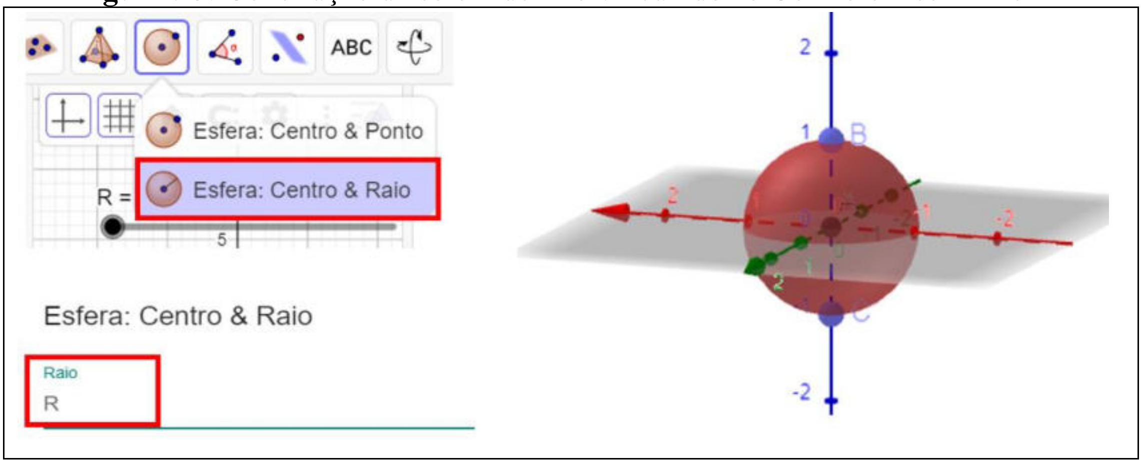
Figura 96: Ajuste dos pontos B e C e omissão dos segmentos AB e AC



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

4) Clique na ferramenta "Esfera: Centro & Raio" e em seguida, na origem (ponto A). Abrirá uma caixa de diálogo, na qual o campo "Raio" deve ser preenchido com o parâmetro "R". Desse modo, a esfera será apresentada como na Figura 97.

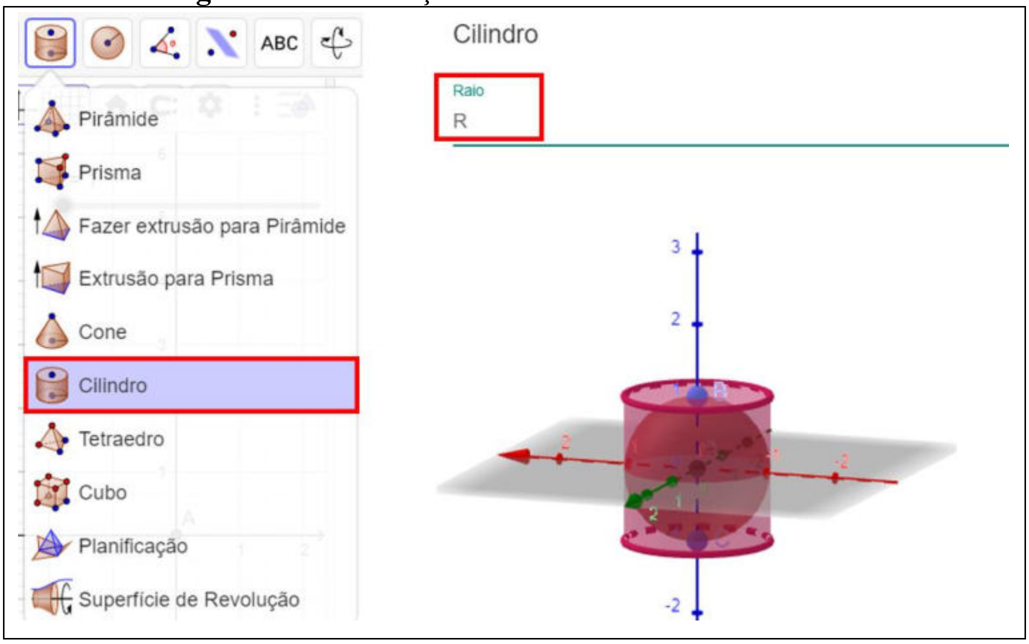
Figura 97: Construção da esfera de raio vinculado ao Controle Deslizante "R"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

4) Clique agora na ferramenta "Cilindro" e depois sobre os pontos B e C. Na caixa de diálogo que se abre, preencha o campo "Raio" com o parâmetro "R", gerando o cilindro circunscrito à esfera, como na Figura 98.

Figura 98: Construção do cilindro circunscrito à esfera



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

A partir dessa construção, já é possível comparar volume da esfera com o volume do cilindro, bastando, para isso, manipular o controle deslizante. Anote os volumes dos dois sólidos e calcule a razão entre esses dois volumes, para cada raio R. Em seguida, tente descobrir a fração que gera esse decimal.

Se sentir dificuldades em encontrar essa fração, assista o vídeo 17.

Vídeo 17: Fração geratriz de uma dízima periódica

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

Reprodução: aproximadamente 4 minutos

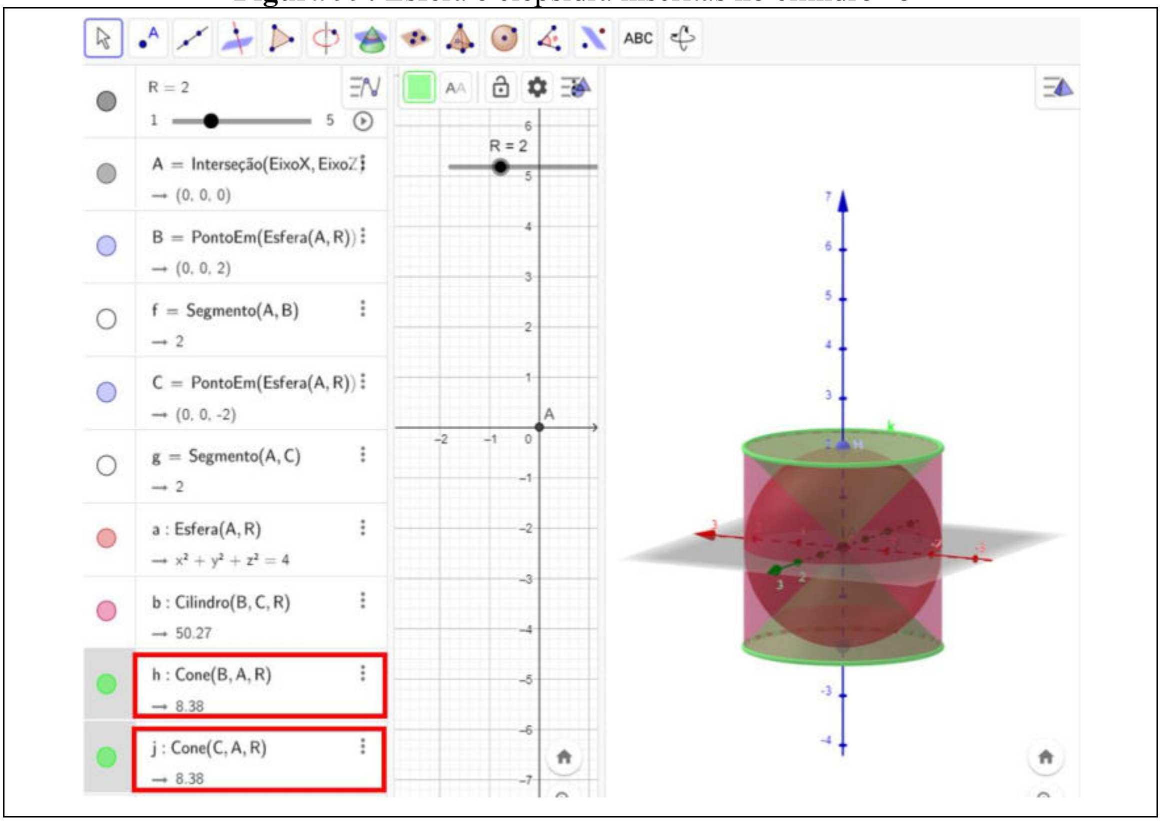
Fonte[5]: YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=Q65uuYakV3k&ab_channel=FerrettoMatemática . Acesso em 04/08/2021.

[5] Lembrete: Todos os vídeos e as imagens contidas neles são de livre acesso e estão disponíveis no YouTube.

Outra forma interessante para se construir a expressão para o cálculo do volume de uma esfera é utilizando-se uma figura auxiliar, conhecida na geometria como clepsidra, que se trata de dois cones de mesma altura e bases congruentes e paralelas, unidos pelos vértices. Para esse estudo, a clepsidra deve estar inscrita no cilindro e, para isso, deve-se proceder como no passo seguinte.

4) Digite, na caixa de diálogo da Janela de Álgebra, o comando "Cone(B,A,R)". Repita o procedimento, digitando "Cone(C,A,R)". Esses parâmetros representam, respectivamente, o centro da base, o vértice e o raio dos cones. Será assim gerada a clepsidra inscrita no cilindro e vinculada ao controle deslizante "R". Para melhor visualização, mude a cor dos cones. A representação deve ficar como ilustrado na Figura 99.

Figura 99: Esfera e clepsidra inscritas no cilindro "b"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Para que o volume da esfera seja exibido na Janela de Álgebra, digite, na Caixa de Entrada, o comando "Volume(a)". Depois, manipule o controle deslizante e observe a variação dos volumes dos sólidos, como na Figura 100. Nesse caso, o elemento "m" representa o volume da esfera "a". A região que fica dentro do cilindro, porém, fora da clepsidra é chamada "anticlepsidra" e seu volume é a diferença entre o volume do cilindro e os volumes dos dois cones.

Figura 100: Volumes dos sólidos para R = 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente

a : Esfera(A, R) → $x^2 + y^2 + z^2 = 1$	a : Esfera(A, R) → $x^2 + y^2 + z^2 = 4$	a : Esfera(A, R) → $x^2 + y^2 + z^2 = 9$	a : Esfera(A, R) → $x^2 + y^2 + z^2 = 16$	a : Esfera(A, R) → $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
b : Cilindro(B, C, R) → 6.28	b : Cilindro(B, C, R) → 50.27	b : Cilindro(B, C, R) → 169.65	b : Cilindro(B, C, R) → 402.12	b : Cilindro(B, C, R) → 785.4
h : Cone(B, A, R) → 1.05	h : Cone(B, A, R) → 8.38	h : Cone(B, A, R) → 28.27	h : Cone(B, A, R) → 67.02	h : Cone(B, A, R) → 130.9
j : Cone(C, A, R) → 1.05	j : Cone(C, A, R) → 8.38	j : Cone(C, A, R) → 28.27	j : Cone(C, A, R) → 67.02	j : Cone(C, A, R) → 130.9
m = Volume(a) → 4.19	m = Volume(a) → 33.51	m = Volume(a) → 113.1	m = Volume(a) → 268.08	m = Volume(a) → 523.6
Entrada...	Entrada...	Entrada...	Entrada...	Entrada...

Fonte: Elaborada pelo autor. Dados gerados pelo GeoGebra 3D.

Agora, copie e preencha a Tabela 6.

Tabela 6: Volumes do cilindro e do cone e relação entre esses volumes

Raio	$V_{Cilindro}$	V_{Cone}	V_{Esfera}	$V_{Cilindro} - 2.V_{Cone}$
1				
2				
3				
4				
5				

Fonte: Elaborada pelo autor.

Preenchida a Tabela 6, analise seus dados. Perceba que o volume da esfera de raio R pode ser calculado pela relação

$$V_{esfera} = V_{cilindro} - 2\,.\,V_{cone},$$

em que ambos os três sólidos tem raio R, cada um dos dois cones tem altura igual ao raio R e o cilindro tem altura igual ao diâmetro da esfera, ou seja, H = 2R.

Você já sabe as fórmulas para se calcular os volumes do cilindro e do cone, certo?

Então, substitua os termos $V_{Cilindro}$ e V_{Cone} pelas suas respectivas fórmulas, já deduzidas em tópicos anteriores.

Desse modo, você deve chegar à relação

$$V_{esfera} = \pi R^2 . 2R - 2.\frac{1}{3}\pi R^2 R.$$

Agora, desenvolva os cálculos até chegar à expressão

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Na prática, a primeira expressão, aquela que na qual o volume da esfera é dado em função dos volumes do cilindro e dos cones, já resolve nossos problemas do dia a dia. Porém, a continuidade dos cálculos facilita a compreensão dos conteúdos na forma como são geralmente expostos nos materiais didáticos geralmente utilizados nas escolas.

Vamos finalizar esse tópico deduzindo com maior rigor matemático a fórmula do volume da esfera, com

Para que você compreenda a ideia, encontre sentido na fórmula e tenha certeza de que ela é realmente válida, faremos uma demonstração algébrica muito interessante, para a qual utilizaremos o Princípio de Cavalieri.

Antes de iniciar, vamos relembrar que a área de um círculo de raio r e o volume de um cilindro e de um cone, ambos de raio r e altura H, são dadas, nessa ordem, pelas expressões

$$A_{círculo} = \pi r^2;$$

$$V_{cilindro} = \pi r^2 . H;$$

e

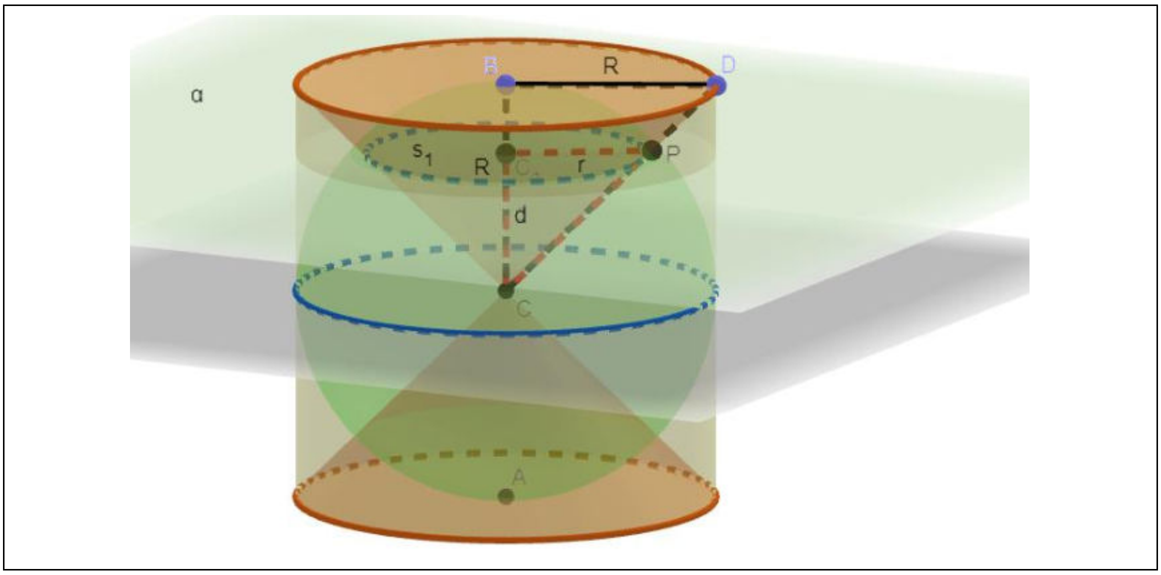
$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 . H.$$

Essas informações são importantes para a resolução do problema em questão, que se trata de calcular o volume de uma esfera de raio R.

Importante você saber que a interseção dessa esfera com um plano p que a corta a uma distância d do seu centro é uma superfície circular de raio r, com $r \leq R$, chamada seção transversal da esfera.

A Figura 101 dá ideia do que seria uma seção transversal.

Figura 101: Seção transversal determinada por um plano α sobre a clepsidra de raio R, a uma distância d do centro da esfera inscrita no cilindro de raio R.

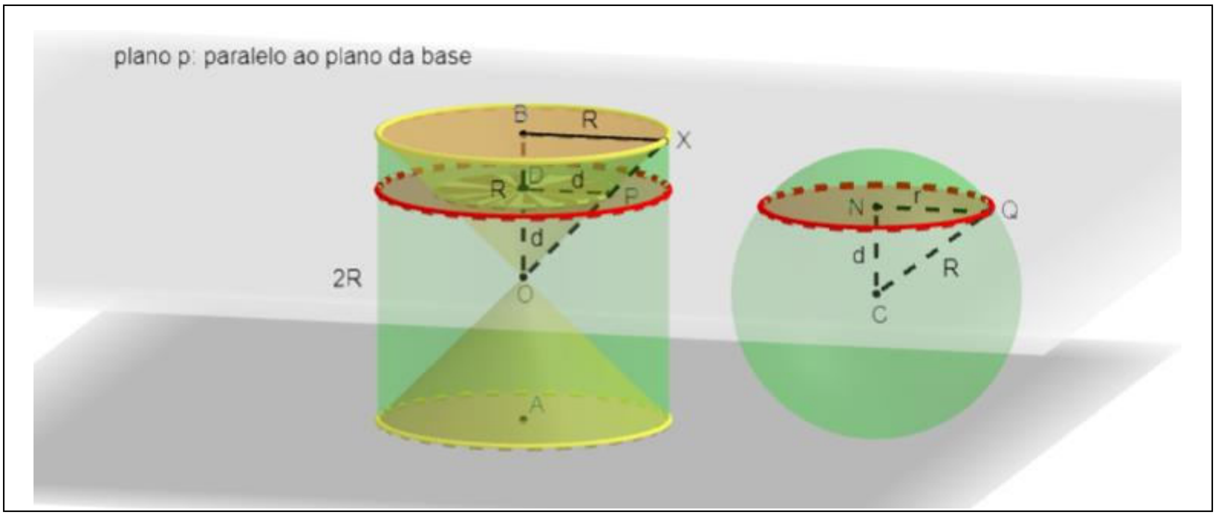


Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Compreendendo melhor sobre o volume da esfera

Lembra que a região interna ao cilindro e externa à clepsidra é chamada anticlepsidra? Pois bem. A seção transversal gerada pela interseção do plano p com a anticlepsidra é uma coroa circular de centro D, limitada exteriormente por um círculo de raio R e inferiormente por outro círculo de raio d, como ilustrado na Figura 102. Essa é a mesma situação mostrada na Figura 101, porém, separamos a esfera para você visualizar melhor e compreender a ideia.

Figura 102: Seções transversais determinadas pelo plano p sobre a anti-clepsidra e a esfera.



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Imagine que a anti-clepsidra de raio R e altura 2R e a esfera de raio R, representadas na Figura 101, estão dispostas, lado a lado, sobre uma mesa (plano da base inferior), e que um plano p, paralelo aos planos das bases da anti-clepsidra, corta esses dois sólidos gerando as sessões transversais destacadas em vermelho, como na Figura 102.

Perceba que, na clepsidra, os triângulos OBX e ODP são retângulos e tem um ângulo agudo em comum, pois BOX = DOP. Logo, pelo caso AA, esses triângulos são semelhantes (pesquise sobre semelhança de triângulos). Note ainda que o triângulo OBX é isósceles, isto é, tem dois lados com medidas iguais, e seus catetos medem R. Segue da semelhança de triângulos que o triângulo ODP também é isósceles e, portanto, o cateto DP também tem medida d.

A seção transversal determinada pelo plano p sobre a anti-clepsidra é uma coroa circular de área dada, dedutivamente, pela relação

$$A_1 = \pi R^2 - \pi d^2.$$

Evidenciando π,

$$A_1 = \pi(R^2 - d^2).$$

Na esfera, o triângulo CNQ também é retângulo e, portanto, vale o Teorema de Pitágoras, donde

$$R^2 = r^2 + d^2$$

e, portanto,

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

A sessão transversal determinada pelo plano p sobre a esfera é um círculo de raio r, cuja área é

$$A_2 = \pi r^2.$$

Como $r^2 = R^2 - d^2$, temos que a área dessa sessão é dada por

$$A_2 = \pi(R^2 - d^2).$$

Então, $A_1 = A_2$, ou seja, a área das duas sessões transversais, em função da distância d que separa o plano p do centro da esfera, será sempre igual, para todo p pertencente ao intervalo fechado [0, R].

Em outras palavras, todo corte determinado pelo plano p sobre os dois sólidos a uma distância $d \leq R$ do centro da esfera determina uma seção transversal na anti-clepsidra com área exatamente igual à área da seção transversal determinada pelo mesmo plano na esfera.

Sendo assim, tem-se, pelo Princípio de Cavalieri, que o volume da esfera é igual ao volume da anti-clepsidra de mesmo raio R e altura 2R igual ao diâmetro da esfera.

Como já foi visto que o volume de um cone é igual à terça parte do volume do cilindro de mesma base e alturas iguais, não é difícil deduzir que o volume da anti-clepsidra é a diferença entre o volume do cilindro de raio R e altura 2R e o volume de dois cilindros de base e altura R, e, como esse é também o volume da esfera, chegamos à relação

$$V = \pi R^2 . 2R - 2.\frac{1}{3}\pi R^2 R,$$

donde, desenvolvendo os cálculos, se conclui (e faz sentido afirmar) que o volume da esfera de raio R é dado pela expressão

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Agora essa expressão faz todo sentido, não é? Essas deduções enriquecem nossos conhecimentos e tornam a Geometria ainda mais bela!

3.9.2 Área da superfície esférica

Conhecendo a expressão que permite calcular o volume da esfera de raio R, pode-se utilizar essa expressão para deduzir a fórmula da área da superfície esférica. Embora não seja tão fácil compreendê-la, essa demonstração será aqui apresentada a título de conhecimento. Essa compreensão dá sentido à fórmula e é possível que você, com calma e muita atenção, possa acompanhá-la.

Para tal, vamos tomar duas esferas concêntricas, uma de raio R e outra um pouco maior e determinar o volume da superfície situada entre essas duas esferas, ou seja, a diferença D entre os volumes das duas esferas.

Sendo d a distância entre as duas superfícies esféricas, tem-se que

$$D = \tfrac{4}{3}\pi(R + d)^3 - \tfrac{4}{3}\pi R^3$$

$$D = \tfrac{4}{3}\pi(R^3 + 3R^2d + 3Rd^2 + d^3) - \tfrac{4}{3}\pi R^3$$

$$D = \tfrac{4}{3}\pi R^3 + 4\pi R^2d + 4\pi Rd^2 + \tfrac{4}{3}\pi d^3 - \tfrac{4}{3}\pi R^3$$

$$D = 4\pi R^2d + 4\pi Rd^2 + \tfrac{4}{3}\pi d^3.$$

Pelo Princípio de Cavalieri, o volume D da casca esférica corresponde ao volume de um prisma de base poligonal e altura d. Desse modo, a área da base desse prisma é o quociente

$$A = \frac{D}{d}$$

Assim, a área da casca esférica de espessura d corresponde à área da base do prisma, dada por

$$A = 4\pi R^2 + Rd + \frac{4}{3}\pi d^2$$

Como o que se deseja encontrar é a área da superfície esférica, não é difícil deduzir que a distância entre as duas esferas deve ser nula, ou seja, sua casca deve ter espessura desprezível.

Portanto, pondo $d = 0$, obtém-se

$$A = 4\pi R^2$$

expressão essa que representa a área da superfície de uma esfera de raio R.

Para saber mais sobre a esfera e de outros sólidos geométricos, assista os Vídeo 18, 19, 20 e 21.

Vídeo 18: Saiba mais sobre a esfera

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

Reprodução: aproximadamente 13 minutos

Fonte: YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=Upy0txpXP9k&ab_channel=ProfTawanJaime. Acesso em 04/08/2021.

Vídeo 19: Dedução do volume da esfera

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

Reprodução: aproximadamente 15 minutos

Fonte: YouTube: www.youtube.com/watch?v=V3pM2ADZ-sY&ab_channel=ProfessorOctavio. Acesso em 04/08/2021.

Vídeo 20: Revendo os volumes do prisma e do cilindro

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em “Assistir no YouTube”

Reprodução: aproximadamente 13 minutos

Fonte: YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=Upy0txpXP9k&ab_channel=ProfTawanJaime. Acesso em 04/08/2021.

Vídeo 21: Revendo sobre as pirâmides, cones e esferas

Para saber mais...

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em “Assistir no YouTube”

Reprodução: aproximadamente 12 minutos

Fonte[6]: YouTube: www.youtube.com/watch?v=UkDjBHXd7Sw. Acesso em 04/08/2021.

[6] Lembrete: Todos os vídeos e as imagens contidas neles são de livre acesso e estão disponíveis no YouTube.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos objetivos que se espera ter alcançado com esse trabalho diz respeito à ampliação da produção crítica de materiais direcionados à EJA. Não foi apenas “mais um trabalho”, mas algo diferente de tudo o que costumo ler, principalmente pela riqueza de detalhes, simplicidade do vocabulário e preocupação com a forma como o leitor irá receber as informações e interagir com a obra. A descoberta da possibilidade se se inserir vídeos online no corpo do texto como complemento ao texto é o grande diferencial dessa obra e me motivou muito a desenvolver trabalhos futuros em formato parecido.

Além disso, uma das principais contribuições do árduo trabalho de elaboração foi motivar uma reflexão sobre o ensino de Geometria na EJA, principalmente diante da escassez de materiais específicos e da ausência de políticas públicas de valorização e fomento a essa importante modalidade de ensino da Educação Básica.

Embora tenhamos outras preocupações além das investigações sobre os benefícios e desafios do uso de ambientes de geometria dinâmica no estudo da geometria escolar, as atividades aqui propostas explicitam e enfatizam os aspectos pedagógicos do GeoGebra, principalmente pela facilidade de se construir e manipular objetos virtuais de maneira muito próxima dos que é feito com objetos manipuláveis do mundo real, fator motivador para compreensão de conceitos, definições, propriedades e relações.

Esse estudo mostrou o quanto o uso adequado de recursos tecnológicos pode contribuir para a compreensão do mundo real, a partir das diversas possibilidades de visualização de objetos e das relações algébricas apresentadas simultaneamente às representações geométricas na tela do computador.

Por conhecer um pouco das peculiaridades da EJA, espero que essa proposta auxilie muitos alunos no estudo de geometria e que seja bem aceita pela maioria, com resultados positivos para a educação brasileira de modo geral e, sobretudo, para a EJA. É claro que muito ainda há que se estudar sobre o assunto e essa pesquisa vem impulsionar outros estudos, inclusive, servir de referência para a produção de novos materiais.

Como ex-aluno da EJA e atual professor da Educação Básica com experiência em EJA, tenho percebido as dificuldades dos professores em encontrar materiais de ensino adequados e também dos alunos em assimilar os conteúdos de geometria da forma como, tradicionalmente, são ensinados na escola. Ciente dessa realidade e concluindo essa obra, percebo a importância e necessidade que mais trabalhos como esse sejam produzidos e disponibilizados, sem custo para o usuário, como material de apoio para alunos de todos os níveis e modalidades de ensino.

Espero estar, com as atividades aqui propostas, contribuindo, de alguma forma, para o ensino de Geometria Espacial, não só para alunos da EJA, mas também para outros que, porventura, vierem a se interessar pelo assunto.

Pensando sempre no aluno, a elaboração desse trabalho consistiu, basicamente, na adaptação de parte do conteúdo do TCC citado na Carta ao Leitor, para uma linguagem direcionada para esse aluno, de forma interativa e esse foi mais um desafio através do qual aprendemos muito.

Apesar das contribuições dos softwares educativos, o desenvolvimento das atividades mostrou algumas limitações do GeoGebra, nos levando a concluir que as ferramentas disponíveis no software nem sempre são suficientes para explorar os conteúdos geométricos na sua totalidade. Para maiores constatações, ressalta-se aqui a importância do desenvolvimento de pesquisas futuras, baseadas, se possível, em atividades presenciais que proporcionem ao aluno da EJA o contato com esses recursos, na expectativa de que seja possível observar, na prática, o quanto essa metodologia pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Finalmente, destacamos que a elaboração desse *e-book* nos proporcionou preciosos momentos de reflexão crítica, nos dando a certeza de que o ensino de geometria na EJA e na Educação Básica em geral ainda necessita de muitas mudanças e que cabe a nós fazermos nossa parte. Nesse sentido, o intuito foi produzir algo que venha a auxiliar alunos na compreensão dos conteúdos geométricos e do mundo, partindo de um bom planejamento e do desenvolvimento consciente de atividades, visando a construção de um conhecimento geométrico que seja significativo para o aluno.

Nosso real desejo e esperança é que essa e outras obras similares sejam bem aceitas como material complementar em apoio às atividades propostas pelos professores em sala de aula, de modo a tornar o ensino de Geometria Espacial mais leve, atrativo e significativo para alunos da EJA e de todas as modalidades de ensino.

REFERÊNCIAS

· AZEVEDO FILHO, M. F. de. **Geometria euclidiana espacial.** 3ª ed.. Fortaleza: EdUECE, 2015.

· BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional,** LDB. 9394/1996. São Paulo: Saraiva, 1996.

· CORRÊA, J. N. P. **O Ensino de Poliedros por Atividade**. 347f.. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

· DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações.** Livro 2. 1ª ed. 3ª impressão. São Paulo: Ática, 2001.

· GEOGEBRA.ORG. **O que é o GeoGebra?** Disponível em https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT. Acesso em: 08 maio 2021.

· MENDONÇA, C. **Pirâmides do Egito**. 2019. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/artes/piramides-do-egito. Acesso em: 15 junho 2021.

· SANTOS, F. B. dos. **A história das Pirâmides no Egito Antigo**. 2021. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/historiag/a-historia-das-piramides-no-egito-antigo. Acesso em: 15 jun. 2021.

· SCALABRIN, A. M. M. O.; MUSSATO, S.. GEOMETRIA ESPACIAL COM O SOFTWARE GEOGEBRA: uma proposta de atividades investigativas para o ensino de pirâmides. **Boletim do Museu Integrado de Roraima**, Roraima, v. 13, n. 1, p. 123-145, 02 dez. 2020. Semanal. Disponível em: file:///C:/Users/Cliente/Downloads/cborges,+artigo04_MC.pdf. Acesso em: 08 junho 2021.

· WIKIPÉDIA. **CUBO DE RUBIK.** In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2020. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Cubo_de_Rubik&oldid=60036917. Acesso em: 15 junho 2021.

Autor

Eber Oliveira Silva – Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Especialista em Educação de Jovens e Adultos pelo Centro Universitário Barão de Mauá (Ribeirão Preto/SP). Professor de Matemática do Ensino Básico Técnico Tecnológico (EBTT) da Rede Federal de Ensino. Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), sob orientação da Professora Doutora Elisabeth Cristina de Faria (PROFMAT/IME/UFG).

Co-autora

Profa. Dra. Elisabeth Cristina de Faria – Professora da área da Educação Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da UFG e professora do Programa de Pós Graduação em Ensino da Educação Básica CEPAE/UFG e do PROFMAT/IME/UFG. Especialista em Etnomatemática e Modelagem Matemática (PUC Campinas/SP), Mestre em Educação Brasileira FE/UFG e Doutora em Educação Matemática (PUC/SP)