LILIAN DA SILVA GONÇALVES

O USO DO GEOGEBRA PARA O ENSINO DO CÁLCULO DA ÁREA DE POLÍGONOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Rondonópolis – MT
Setembro de 2021

LILIAN DA SILVA GONÇALVES

O USO DO GEOGEBRA PARA O ENSINO DO CÁLCULO DA ÁREA DE POLÍGONOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, pólo Rondonópolis, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal de Rondonópolis – UFR
Instituto de Ciências Exatas e Naturais – ICEN
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Orientadora Dra. Joelma Ananias de Oliveira (UFR)

Rondonópolis – MT
Setembro de 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

G635u Gonçalves, Lilian da Silva.
O uso do GeoGebra para o ensino do cálculo da área de polígonos no Ensino Fundamental / Lilian da Silva Gonçalves. -- 2021
65 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Joelma Ananias de Oliveira.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Extas e Naturais, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Rondonópolis, 2021.
Inclui bibliografia.

1. Área. 2. Polígonos. 3. GeoGebra. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

AV DOS ESTUDANTES, 5055 - CIDADE UNIVERSITÁRIA - CEP: 78736900

TEL : 66 3410 4026 - EMAIL : PROFMATUFMTROO@GMAIL.COM

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: "O Uso do Geogebra para o Ensino do Cálculo da Área de Polígonos no Ensino Fundamental"

AUTORA: MESTRANDA **LILIAN DA SILVA GONÇALVES**

Dissertação submetida ao programa de pós-graduação do PROFMAT, do curso de Matemática/UFMT /(UFR), como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Dissertação defendida e aprovada em **24** de **setembro** de **2021**.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. **Doutora Joelma Ananias de Oliveira** (Presidente Banca / orientadora)

INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDONÓPOLIS

2. **Doutor Dércio Braga Santos** (Membro Interno)

INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDONÓPOLIS

3. **Doutor Leandro Bezerra de Lima** (Membro Interno)

INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

4. **Doutor Aroldo José de Oliveira** (Membro Suplente)

INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDONÓPOLIS

5. **Doutor Clayton Eduardo Lente da Silva** (Suplente)

INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDONÓPOLIS

6. **Doutor João Batista Garcia** (Suplente)

INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

RONDONÓPOLIS, **24/09/2021**.

Documento assinado eletronicamente por **JOELMA ANANIAS DE OLIVEIRA**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 24/09/2021, às 16:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Leandro Bezerra de Lima**, **Usuário Externo**, em 24/09/2021, às 20:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **DERCIO BRAGA SANTOS**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 17/10/2021, às 09:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3940148** e o código CRC **236F5DA2**.

Para quem eu poderia dedicar este estudo e todos os benefícios pessoais e profissionais que ele possa gerar, se não fosse para os “anjos” legados por Deus, a quem eu chamo família. Com sentimento de amor, literalmente, incondicional, dedico para minha filha Vivian, que aos 20 anos me ensinou que o amor é a força motriz de nossas vidas e, especialmente, que pessoas dedicadas e esforçadas são capazes de vencer todas as pequenas e grandes batalhas da vida. Filha, te amo! Ao meu filho Gabriel, que aos 13 anos me faz acreditar que a amorosidade é uma forma de vencer barreiras e de encantar a vida de todos que estão ao nosso lado. Obrigada filho, pelo amor, carinho e dedicação. Mesmo tão jovem tem a capacidade de me fazer acreditar nos seres humanos. Filho, te amo!

AGRADECIMENTOS

O sentimento de gratidão que brota d'alma nos demonstra que nada somos ou seríamos se estivéssemos acompanhados unicamente pela solidão. Assim, quando os louros desta vitória acadêmica glorificam a minha existência, me resta agradecer àqueles que estiveram nos momentos felizes e nos momentos difíceis ao meu lado e não permitiram que o cansaço e as dificuldades acabassem me fazendo desistir. Para todos e a cada um de vocês muito obrigada!

Neste momento, eu agradeço a Deus, que foi a minha força em todos os momentos em minha vida e, especialmente, durante este Mestrado iluminou meu caminho e me fez ter a certeza de que eu nunca estaria só. Pai, não existem palavras que possam expressar a sua força e as suas bênçãos em minha vida e, agora, quando termino esta fase a certeza vem ao meu coração: esta vitória é nossa!

Com a garganta embargada por um "obrigada" que não quer calar, agradeço ao meu esposo Rodrigo, meu amor e minha fonte de tranquilidade e companheirismo. Sei que esta jornada foi cansativa para você também, mas, juntos conseguimos vencer cada batalha, por isso, muito obrigada. Rodrigo, te amo imensamente.

Agradeço ao meu pai Lídio (*in memoriam*), com o coração embargado de saudades, que me legou mais do que a aparência física, me legou o amor pela Matemática e a força para suplantar todas as dificuldades impostas pela vida. Pai, a saudade é um sentimento que machuca e nos faz acreditar que somente as lágrimas são nossas companheiras, mas, sei que onde estiver o seu olhar é de amor e proteção aos seus filhos. Te amo, eternamente!

Para minha mãe Maria Madalena agradeço a vida e o amor aos livros. A senhora sempre foi uma incentivadora das caminhadas acadêmicas de seus filhos e, desde muito cedo nos demonstrou que pequenas e grandes vitórias ocorrem com muito esforço, força e decisão. Mãe, tenho orgulho de ser sua filha, te amo!

A vida é muito mais leve, quando temos ao nosso lado pessoas especiais, que podemos chamar de amigos. Assim, agradeço para a "minha pessoa" Mychelly Agnes Marcelo Henrique, minha amiga em todos os momentos e para todas as lutas. Obrigada por existir e, por ser examente como és: forte, amorosa, companheira e decidida.

Com respeito, carinho e extrema admiração agradeço para minha orientadora a Professora Dra. Joelma Ananias de Oliveira, que foi minha luz na jornada de construção do presente estudo e, soube me incentivar e manter a chama da ciência da Matemática em minha vida. Agradeço por seus ensinamentos e, certamente, guardarei a senhora “no lado esquerdo do meu peito”.

Agradeço imensamente aos avaliadores pelas contribuições finais, que me permtiram alcançar maior grau de qualidade no texto final deste trabalho. Cada contribuição me permitiu ser uma mestre ainda mais completa.

“A educação tem raízes amargas, mas seus frutos são doces”.

(Aristóteles).

RESUMO

Os índices em matemática, apresentados pelas avaliações nacionais não são favoráveis, em sala de aula é possível perceber a dificuldade dos estudantes em compreender os assuntos matemáticos, configurando importante pesquisas e discussão sobre métodos de ensino da disciplina, ainda mais neste momento de pandemia da COVID-19 que o mundo enfrenta e tem reflexos diretos na educação escolar. Assim, o objetivo geral deste estudo é elaborar uma coleção de atividades interativas no GeoGebra, que auxilie o professor do ensino fundamental a fazer as demonstrações das fórmulas usadas no cálculo da área de polígonos. Para alcançar o objetivo traçado o caminho metodológico trilhado pelo estudo foi a realização de uma pesquisa de natureza aplicada; abordagem qualitativa; quanto aos objetivos é exploratória; em relação aos procedimentos é uma pesquisa bibliográfica com método indutivo. Por intermédio do desenvolvimento desta pesquisa foi possível conhecer algumas funcionalidades do GeoGebra, como o uso do aplicativo para representação gráfica de função, discussão sobre resolução de sistemas lineares, a contribuição mútua entre os membros da comunidade GeoGebra e o desenvolvimento colaborativo disponível pelo software. Em termos de dimensão o material produzido é um protótipo de livro que está divido em três seções, a primeira contém aplicações para uso do professor em sala de aula, com a finalidade de facilitar a demonstração das fórmulas para o cálculo de área de polígonos e fornecer uma ferramenta que facilite a visualização e compreensão das fórmulas pelo estudante. A segunda seção tem atividades práticas para memorização dos processos de cálculo, e a terceira seção apresenta situações problemas. Ao estar em posse de um material publicado o usuário pode acessar o perfil do criador, procurar pela postagem e fazer comentários, críticas ou apresentar sugestão de mudança. Concluiu-se que a elaboração de uma coleção de atividades interativas no GeoGebra, que auxilie o professor do ensino fundamental a fazer as demonstrações das fórmulas usadas no do cálculo da área de polígonos foi desenvolvida e apresentada nos resultados da pesquisa, comprovando que o trabalho alcançou seu objetivo principal.

Palavras-chave: Área. Polígonos. GeoGebra.

ABSTRACT

The indices in mathematics, presented by national evaluations are not favorable, in the classroom it is possible to notice the difficulty of students in understanding mathematical subjects, configuring important research and discussion on methods of teaching the discipline, even more at this time of COVID-19 pandemic that the world faces and has direct reflections on school education. Thus, the general objective of this study is to develop a collection of interactive activities on GeoGebra, which helps elementary school teachers to demonstrate formulas used in the calculation of the area of polygons. To achieve the outlined objective the methodological path followed by this study was the realization of a research of applied nature; qualitative approach; as for the objectives it is exploratory; in relation to the procedures it is a bibliographic research with inductive method. Through the development of this research it was possible to know some features of GeoGebra, such as the use of the application for graphical representation of function, discussion on solving linear systems, the mutual contribution between members of the GeoGebra community and the collaborative development available through the software. In terms of dimension the material produced is a prototype of a book that is divided into three sections, the first contains applications for the use of the teacher in the classroom, in order to facilitate the demonstration of the formulas for calculating the area of polygons and provide a tool that facilitates the visualization and understanding of the formulas by the student. The second section has practical activities for memorizing the calculation processes, and the third section presents problem solving exercises. By being in possession of a published material the user can access the creator's profile, search for the post and make comments, criticisms or submit a change suggestion. It was concluded that the elaboration of a collection of interactive activities in GeoGebra, which helps the elementary school teacher to make the demonstrations of the formulas used in the calculation of the area of polygons was developed and presented in the research results, proving that the work achieved its main objective.

Keywords: Area. Polygons. GeoGebra.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
cm	Centímetro
cm²	Centímetro Quadrado
COVID-19	Corona Vírus Disease (Doença do Coronavírus)
km	Quilômetro
km²	Quilômetro Quadrado
LAL	Lado, Ângulo, Lado (se refere a um dos casos de congruência de triângulo)
LLL	Lado, Lado, Lado (se refere a um dos casos de congruência de triângulo)
m	Metro
m²	Metro Quadrado
SARS-CoV-2	Nomenclatura do Vírus Causador da COVID-19
UFR	Universidade Federal de Rondonópolis

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{Q}$	Conjunto dos Números Racionais
$\neq$	Diferente de
$=$	Igual a
$>$	Maior que
$<$	Menor que
$\lvert AB \rvert$	Norma/Medida do Segmento AB
$\forall$	Para Todo
$//$	Paralelo(a) a(ao)
$\perp$	Perpendicular a(ao)
$\sqrt{b}$	Raiz Quadrada de um Valor b

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo da área de polígonos é objeto de estudo presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), etapa do ensino fundamental, o conteúdo apresenta excelência para contribuir ao desenvolvimento do raciocínio do estudante, quando este consegue compreender a lógica de seus processos, que é mais facilmente entendida quando há aprendizagens com experimentação. O *software* GeoGebra permite essa experiência de ação e consequência, visualização com movimento tornando a aprendizagem significativa.

Os índices em matemática, apresentados pelas avaliações nacionais não são favoráveis, em sala de aula é possível perceber a dificuldade dos estudantes em compreender os assuntos matemáticos, configurando como importantes, pesquisas e discussão sobre métodos de ensino da disciplina, ainda mais neste momento de pandemia da COVID-19 que o mundo enfrenta e tem reflexos diretos na educação escolar.

Nesse sentido, o entendimento da Geometria merece especial atenção, visto que sua compreensão é facilitada quando há processos de experimentação, em contrapartida, o extenso conteúdo de matemática presente no currículo do ensino fundamental e o cenário atual de pandemia não colaboram com experimentos que envolvam materiais concretos, justificando a importância de pesquisas que apresentam resultados favoráveis quanto ao uso de *softwares* para o ensino de geometria, como é o caso do presente trabalho.

Para a apresentação de resultados sobre o uso do *software* GeoGebra para o ensino do cálculo da área de polígonos no ensino fundamental, foi realizada uma pesquisa bibliográfica reunindo trabalhos sobre o tema. O processo de pesquisa envolveu a aprendizagem do uso do *software* a fim de compreender a usabilidade deste em sala de aula, bem como, traçar os critérios e como proceder nesse sentido para a melhoria da prática pedagógica e dinamização dos processos de ensino e de aprendizagem.

O referencial teórico desta pesquisa está sequenciado da seguinte maneira: a apresentação da origem do pensamento matemático, sendo exposição comum para a origem deste pensamento entre os historiadores pesquisados, o raciocínio comparativo; na sequência são apresentadas citações diretas e indiretas, que falam sobre a importância da matemática para a vida em sociedade, destacando sua influência direta na capacidade do indivíduo de exercer o papel de cidadão.

São apresentadas as expectativas da BNCC quanto à aprendizagem da geometria, bem como sua importância no desenvolvimento do raciocínio lógico nos estudantes. Em seguida são expostos argumentos de outras pesquisas afirmando, que o desenvolvimento do raciocínio acontece quando há compreensão da geometria e para que a compreensão ocorra é interessante utilizar experimentações práticas ou aplicativos dinâmicos para demonstração dos fatos.

É apresentado o cenário atual de pandemia, bem como sua influência no desenvolvimento dos trabalhos, em especial o trabalho docente. São expostos resultados de pesquisa, que apresentam a relevância do uso de *softwares* para a prática pedagógica, instrumentos advindos da evolução/revolução tecnológica, que agregam efetividade nas atividades cotidianas, no caso em tela, do aprendizado da geometria.

Sobre o uso de aplicativos dinâmicos para o ensino da geometria, o GeoGebra é citado em trabalhos acadêmicos pesquisados como um *software* com capacidade de promover resultados superiores no aprendizado escolar, quando comparado com um grupo que passou pelo processo de aprendizagem utilizando imagens estáticas.

Este estudo traz a teoria sobre o cálculo da área de polígonos quadriláteros e triangulares, considerando alguns conceitos como conhecidos. A teoria apresentada contém definições, teoremas e suas demonstrações, contendo sempre que possível, imagens para acompanhar o raciocínio exposto e facilitar a compreensão.

Há ainda um capítulo dedicado à apresentação do produto desenvolvido, fruto desta pesquisa. Neste capítulo é citado o material suporte, vídeos; artigos e outros *Books* no GeoGebra, para o desenvolvimento do material, um GeoGebra *Book*, constituído de *applets* para uso do professor e constituído de exercícios.

2 OBJETIVOS DA PESQUISA

Considerando o currículo escolar no ensino fundamental, norteado pela BNCC, e a dificuldade dos estudantes em compreender as fórmulas para o cálculo de área sem uma atividade de experimentação, considerando a situação atual em que as aulas são desenvolvidas remotamente. Esta dissertação tem como objetivo geral:

2.1 Objetivo Geral

Elaborar uma coleção de atividades interativas no GeoGebra, que auxilie o professor do ensino fundamental a fazer as demonstrações das fórmulas usadas no cálculo da área de polígonos.

2.2 Objetivos Específicos

São objetivos específicos desta dissertação:

- Apresentar a eficiência do *Software* GeoGebra para o ensino de matemática;
- Descrever possibilidades de uso do GeoGebra para qualificar a prática pedagógica;
- Apresentar a necessidade de capacitação dos professores para a utilização do *software* GeoGebra.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

O presente capítulo está dividido em três seções. A primeira seção aborda o princípio do raciocínio matemático e sua importância para a vida em sociedade; na segunda seção estão as considerações sobre o ensino da geometria no currículo escolar, o cenário pandêmico e as adaptações escolares, nesta etapa também são expostas as dificuldades no ensino da geometria e quais as estratégias utilizadas por professores para facilitar os processos de ensino e aprendizagem e na terceira seção se encontram as definições e demonstrações pertinentes ao objeto de estudo com aprofundamento adequado a delimitação da pesquisa.

3.1 A Origem do Pensamento Matemático e sua Importância para o Relacionamento Social

Quando o homem deixa de ser nômade e passa a fazer a administração dos recursos disponíveis numa dada região, surge a necessidade de fazer contagens e, neste sentido, a matemática ganha essencialidade para o fazer cotidiano da vida. Inicialmente, esse processo foi desenvolvido a partir da comparação entre o consumo diário e a oferta de alimento na região. E, tais comparações originaram os agrupamentos por padrão, bem como a identificação de diferenças (ROCHO et al., 2018).

Sobre a origem dos raciocínios matemáticos Boyer faz os seguintes apontamentos:

> As noções primitivas de número, grandeza e forma podiam estar relacionadas com contrastes mais do que com semelhanças – a diferença entre um lobo e muitos, a desigualdade de tamanho entre uma sardinha e uma baleia, a dessemelhança entre a forma redonda da lua e a retilínea de um pinheiro. Gradualmente deve ter surgido, da massa de experiências caóticas, a percepção de que há analogias: e dessa percepção de semelhanças em número e forma nasceram a ciência e a Matemática (BOYER, 2021, p. 24).

Eves (2011), Rocho *et al*. (2018) e Boyer (2021), pesquisadores sobre a história da Matemática, concordam que as necessidades, observações e esforços primitivos proporcionaram o surgimento do conceito de grandeza, forma e número. Uma vez em posse de tais raciocínios, eles foram repassados aos seus sucessores e, desse modo, serviram de base para reformulações e melhorias das técnicas de contagem.

Hoje, os matemáticos se preocupam em apresentar definições rigorosas, utilizando os raciocínios primitivos apresentados nos parágrafos anteriores; comparação, semelhança e diferenças, a fim de que não haja dubiedade na identificação de objetos. Estas definições acarretam consequências para determinados grupos, e provar tais consequências com raciocínios precisos para que não haja dúvida sobre sua efetivação completam o foco das pesquisas em matemática pura na atualidade (BOYER, 2021).

D'Ambrosio (1999, p. 97) escreveu que: "Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber". Ainda conforme D'Ambrosio (1999), o pensamento do matemático não é voltado a um único objeto, mas é enriquecido pela possibilidade de comunicação e pela percepção da matemática em suas ações. Observando o padrão que se encontra em toda a natureza, conhecido como sequência de Fibonacci (SILVA; ALMEIDA, 2020), é possível afirmar que a matemática faz parte da essência da vida.

Para exercer cidadania[1] o homem segundo Silva, Gomes e Piai (2016, p. 2) deve "ser capaz de relacionar, mensurar e comparar fenômenos à sua volta", isso lhe permite compreender fatos, conjecturar consequências mediante determinadas ações com uma margem de erro reduzida, o que lhe conduz a melhores escolhas para si e para o grupo. Segundo D'Ambrosio (1999) a matemática é uma forma de pensamento estável fundamentada na lógica racional, que considera fatos comprovados e especificados com olhar atento à cada discrepância de resultado num determinado estudo, sendo desenvolvida por diversos povos individualmente e a partir da universalização e compartilhamento de suas verdades.

Sobre o pensamento matemático e a vivência em sociedade, Silva ainda acrescenta:

> Se uma pessoa não desenvolve o pensamento lógico matemático, estará sujeita a um risco social maior, pois sua capacidade de relacionar diferentes ideias será deficitária, abrindo espaço para a alienação e impedindo o pleno gozo de sua cidadania, bem como estar ciente de seus direitos e deveres enquanto sujeito social (SILVA; GOMES; PIAI, 2016, p. 2).

Para Silva, Gomes e Piai (2016) o desenvolvimento do pensamento matemático promove melhores oportunidades e capacita o indivíduo a ter autonomia para fazer

[1] "A cidadania é notoriamente um termo associado à vida em sociedade" (LIMA; MENEZES JUNIOR; BRZEZINSKI, 2017, p. 2482).

escolhas que o conduzam a boas ações para si e os próximos, pois o pensamento matemático permite ao indivíduo analisar as alterações acarretadas por suas ações antes que elas aconteçam, favorecendo com isso o equilíbrio social.

3.2 A Geometria e o Currículo Escolar: metodologias utilizadas

A geometria é um campo da Matemática que exige constantes raciocínios para a compreensão dos problemas propostos, em contrapartida, utiliza-se de gráficos que auxiliam a interpretação dos dados ou informações apresentadas. O enlace da resolução algébrica com a apresentação gráfica, incrementado por uma interessante situação problema faz com que estudos de geometria favoreçam o desenvolvimento da capacidade de abstrair, generalizar e projetar situações problemas, trazendo uma melhor compreensão das situações apresentadas (PAVANELLO, 2012).

A matemática foi dividida na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em 5 unidades temáticas, Dentre elas está "Grandezas e medidas" e "Geometria", fora da BNCC o tema grandezas e medidas é estudado pelo ramo da geometria. Sobre o estudo das Grandezas e medidas a BNCC apresenta que:

> As medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade. Assim, a unidade temática Grandezas e medidas, ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.). Essa unidade temática contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico. No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a expectativa é que os alunos reconheçam que medir é comparar uma grandeza com uma unidade e expressar o resultado da comparação por meio de um número (BRASIL, 2018, p. 273).

Segundo o Brasil (1997, p. 35), é importante que os conceitos geométricos façam parte do currículo escolar de Matemática pois, "por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive".

As expectativas do Brasil (2018) para os anos finais do ensino fundamental são: o reconhecimento de figuras geométricas, a identificação de seus elementos e a resolução de problemas envolvendo grandezas geométricas. Os estudantes devem determinar as expressões de cálculo de áreas de quadriláteros, triângulos e círculos e as de volume de prismas e cilindros.

Nesse entendimento, analisa-se que para que o estudante consiga solucionar problemas do cotidiano faz-se necessário, além do entendimento da situação apresentada, a compreensão da teoria necessária para resolver a situação. Neste sentido, a aprendizagem à partir da memorização de fórmulas é ineficiente, visto que proporcionam a capacidade de resolver problemas específicos, semelhantes aos quais houve treinamento para isso (GOMES; RODRIGUES, 2014).

Para que o estudante tenha compreensão do conteúdo é importante, que as situações apresentadas sejam analisadas com atenção, à fim de não propor um problema fora de contextualização. Ao preparar uma aula de conhecimentos matemáticos os professores devem ter uma boa base de aplicações para apresentar e, assim, fazer com que o conteúdo tenha sentido. Os materiais devem ser preparados com cautela, verificando se a organização dos conteúdos está disposta na ementa do curso e se algum dos exemplos pretendidos não envolvem pré-requisitos que o estudante não dispõe. O embasamento teórico deve ser claro quando for tratar de um tópico que não admite contextualização isoladamente, nestas situações o professor deve fazer uma boa introdução ao assunto, preparar exemplos que permitam ao estudante comparar o desenvolvimento de problemas com o uso da teoria e sem esta, em que seja ressaltado o quão mais fácil é conhecer a teoria estudada (VANZELLA; MONTEIRO, 2020).

Quando o conteúdo é transmitido de forma processual o estudante tende a deixar de ter uma postura investigativa diante da situação, comprometendo com isso sua compreensão sobre o assunto tratado. O professor necessita priorizar a compreensão do objeto de estudo, reconhecendo esse entendimento como essencial, pois os cálculos podem ser realizados por calculadoras e aplicativos, mas, a interpretação do problema e a determinação de qual cálculo executar não são determinados por máquinas. Na compreensão de Vanzella e Monteiro (2020, p. 74): “O mais importante no trabalho matemático é o raciocínio, a capacidade de resolver problemas e de usar as ideias matemáticas para explorar as situações mais diversas”.

Como escrito por Pavanello (2012), a geometria se relaciona com outras áreas do conhecimento, o que deveria facilitar seu entendimento, mas conforme Martinez e Novello (2013) existem professores, que sentem dificuldade no ensino dos conceitos geométricos por falta de experimentação, desse modo, o professor deve praticar a resolução de situações reais que o permita desenvolver estratégias para então ensinálas aos estudantes.

É importante ter conhecimento que a proposta da BNCC é pela Geometria Euclideana, também conhecida como geometria plana, porém existem outras geometrias que não são vistas no ensino básico, como a geometria elíptica que é utilizada em estudos de superfícies onde há curvatura positiva, e a geometria hiperbólica que é estudada em superfícies com curvatura negativa (DARIO, 2014).

3.2.1 A tecnologia e o cenário atual

A pandemia da COVID-19, doença causada pelo vírus SARS-CoV-2, gerou barreiras sanitárias no mundo, bem como, trouxe problemas na convivência social, afetando também a vida pessoal e profissional das pessoas devido ao alto potencial de contágio do vírus. O Brasil é um dos países que vem sendo amplamente afetado pela infecção desse Betacoronavírus (WERNECK; CARVALHO, 2020). A crise vivenciada pelas pessoas não é somente sanitária, mas é também financeira, socioeconômica e, especialmente, psicológica, sendo comparado o período atual somente à Grande Depressão de 1929 e a Crise Econômica e Financeira Internacional que aconteceu entre os anos de 2007 e 2008 (COSTA, 2020).

Assim, diante do cenário apresentado, e em consonância com o tema da pesquisa, será discutido o uso das tecnologias em sala de aula, que foram reforçadas pela situação atual, especialmente aplicadas ao ensino da geometria.

Diante dos recursos oferecidos pelas tecnologias como a organização de informações, cooperação no desenvolvimento de trabalhos em tempo real e apresentação dinâmica de conteúdos, educadores, pesquisadores e demais interessados em educação têm discutido a necessidade da inclusão de instrumentos tecnológicos como prática comum em sala de aula (SILVA; CORREA, 2014). Para o filósofo Levy (2010) a tecnologia faz parte do homem, é a materialização das suas ideias e não há como separar o homem do que ele é.

Conforme Brasil (1998) a principal função desenvolvida pelo computador é a armazenagem e transmissão de informação, enquanto Valente (1993) considerou o computador uma ferramenta eficiente para fazer demonstrações de fenômenos ou conceitos, por sua capacidade de animação, apesar de afirmar ser uma sub-utilização do computador usá-lo apenas para demonstrações ao observar a capacidade de interação entre o estudante e a máquina, que faz a aprendizagem ser dinâmica, o que permite ao estudante experimentar possibilidades e visualizar as consequências.

De acordo com os resultados da pesquisa realizada por Ferreira et al. (2020), os recursos tecnológicos ainda podem ser melhor explorados, havendo para isso, a necessidade de capacitação dos professores, de forma a potencializar as suas práticas pedagógicas. Conforme Marques e Esquincalha (2020) a jornada de trabalho do professor foi aumentada na pandemia, pois ele teve que aprender a utilizar ferramentas , que ainda não conhecia, além de preparar aulas e ministrar aulas "como de costume", porém, sob um enfoque mais tecnológico. O professor também deve fazer e editar vídeos e preparar materiais especiais para os estudantes que não acessam as aulas remotas, isto significa dizer que o professor necessita buscar práticas que possam encantar o estudante ao aprendizado da Matemática.

Como bem escreve Marques e Esquincalha (2020, p. 9) "A chegada do coronavírus acelerou um processo de apropriação de tecnologias no e para o ensino". Cabendo observar que os resultados das pesquisas são favoráveis ao uso de tecnologias, considerando que estas promovem o desenvolvimento da criatividade na resolução de problemas matemáticos.

> o uso de aparelhos eletrônicos tanto na sala de aula, como fora dela, é visto como uma forma de potencializar o trabalho colaborativo, facilitar o consenso e o dissenso sobre ideias matemáticas e favorecer a argumentação e a comunicação dessas ideias. Também foi defendido que o uso de *software* dinâmico como GeoGebra, Cabri, entre outros, e algumas aplicações da Internet, encorajam múltiplas representações e visualizações, favorecendo a compreensão de conceitos matemáticos (VALENCIA, 2020, p. 3).

Os resultados apresentados por Orange et al. (2018) afirmam que os estudantes que tiveram contato com os softwares para a aprendizagem do conteúdo apresentado, obtiveram um melhor rendimento nas avaliações. No entanto, para que esse aprendizado seja mais significativo é importante que o professor tenha práticas pedagógicas motivadoras.

Charnei (2019) fez uma pesquisa comparativa cujo objeto de estudo foi o cálculo de área de figuras planas retangulares, com a utilização do *software* GeoGebra para aprendizagem do conteúdo. Ainda segundo Charnei, o uso do *software* permite que o estudante vivencie uma experiência de interação, em que ele constrói objetos geométricos, manipula-os analisando as consequências de cada ajuste realizado, podendo desfazer e refazer buscando entender a relação. Para Charnei a ferramenta oferece melhor oportunidade de compreensão do que o desenvolvimento de um desenho estático, destacando a necessidade de capacitação para o professor.

Silva (2013, p. 7) fez uma pesquisa bibliográfica com "o objetivo de discutir a adequação de exercícios e problemas envolvendo área e perímetro das principais figuras planas para o trabalho com o GeoGebra" nessa pesquisa, foi apresentada a seguinte análise:

> Pelo método tradicional, o conceito de área e perímetro das principais figuras planas são apenas transmitidos para os alunos, de forma oral e escrita, incentivando apenas a memorização de fórmulas, ou seja, o aluno recebe tudo pronto. Com o GeoGebra, os alunos têm a oportunidade de trabalharem, de forma dinâmica, as propriedades das figuras planas envolvidas na atividade e entender o porquê de tal propriedade ser usada ou não para o cálculo de determinada área ou determinado perímetro, bem como relacionar, através do *software*, várias figuras planas, proporcionando ao aluno que ele perceba as semelhanças e diferenças entre tais figuras, estimulando o raciocínio e a criação de conjecturas (SILVA, 2013, p. 63).

Para Nogueira (2020, p. 93), o maior destaque na utilização de *softwares* para o ensino é "auxiliar no desenvolvimento de habilidades, no qual seja possível construir processos de conceituação que objetivem uma maior participação dos sujeitos na construção do conhecimento". Sobre o GeoGebra o autor observou boa aceitação pelos estudantes, ele escreveu ainda que deve haver incentivo e capacitação aos professores para a utilização da ferramenta. Nogueira ainda acrescenta que o *software* GeoGebra permite a aprendizagem cooperativa, torna os processos de ensino e de aprendizagem dinâmicos e produz maiores índices de habilidades conquistadas.

3.3 Formalização da Teoria sobre o Cálculo da Área de Polígonos Quadriláteros e Triangulares

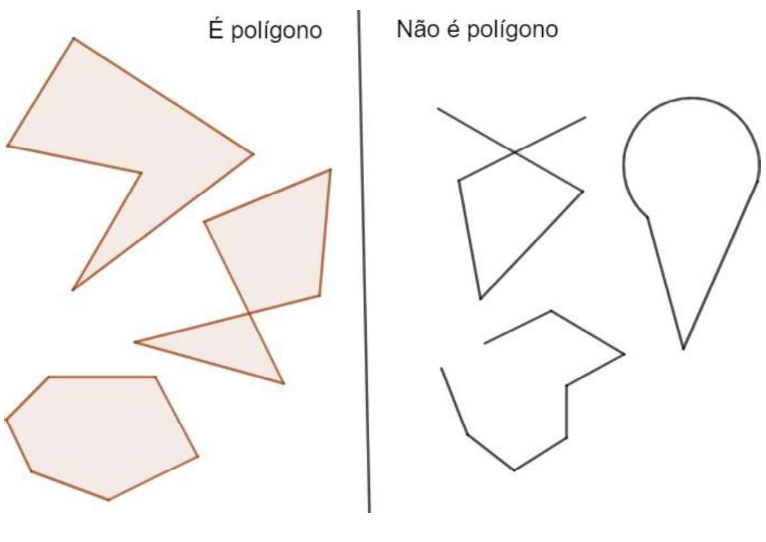
O presente trabalho objetiva apresentar a teoria sobre o cálculo de área de polígonos simples, cuja definição será apresentada na próxima subseção, sendo por vezes identificados neste trabalho apenas como polígono. A primeira subseção desta seção contém as definições pertinentes considerando a delimitação do estudo e o conhecimento das noções preliminares de ponto, reta, plano, bem como as definições de segmento, ângulos e suas representações e os axiomas sobre medição de ângulos. As demais subseções são constituídas por definição, teorema e demonstração formal para cada uma das principais figuras geométricas planas, o quadrado, o retângulo, o paralelogramo, o triângulo e um polígono qualquer utilizado como exemplo.

3.3.1 Definições elementares

Ao desenvolver uma teoria atenta-se que o matemático precisa ter a preocupação em definir com clareza e precisão os conceitos para então demonstrar suas propriedades (BICUDO, 1998).

Definição 3.1 (Polígono). De acordo com Meneses (1997), se α é um plano. Um polígono P é a região do plano α delimitada por um conjunto A finito de segmentos de retas do plano α, onde cada extremidade de um desses segmentos é também extremidade de um, e apenas um, outro, dentre os segmentos de retas do conjunto A, esse conjunto pode também ser identificado como uma linha poligonal fechada ou pode ser chamado de fronteira de P. Cada um dos segmentos de retas que dão origem ao polígono são chamados de aresta ou lado do polígono e as extremidades dos segmentos são chamadas de vértices do polígono. Martins (2005) escreve que: se $V = \{V_1, V_2, \dots, , V_n\}$ é um conjunto com n pontos pertencentes à α, a região limitada P representada por $P = V_1V_2 \dots V_n$ é um polígono de arestas V_iV_{i+1}, sendo $i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n - 1$ e a aresta V_nV_1.

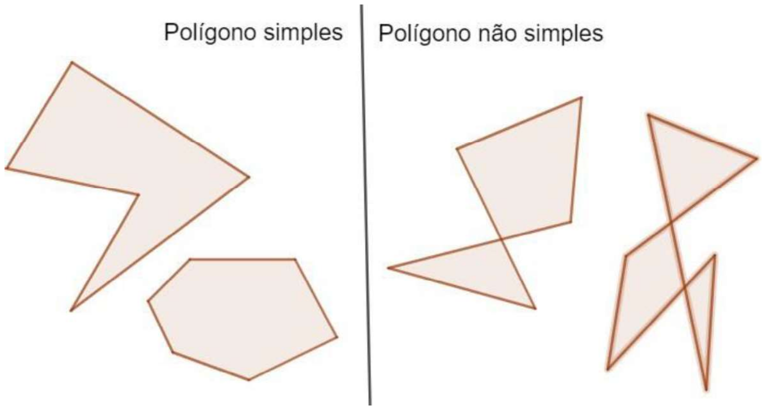
Figura 1 – Diferenciação de figuras planas: polígonos e não polígonos



Duas arestas de um mesmo polígono serão chamadas de vizinhas ou consecutivas se possuem uma extremidade comum. Dois vértices serão chamados de vizinhos ou consecutivos se são extremidades de uma mesma aresta.

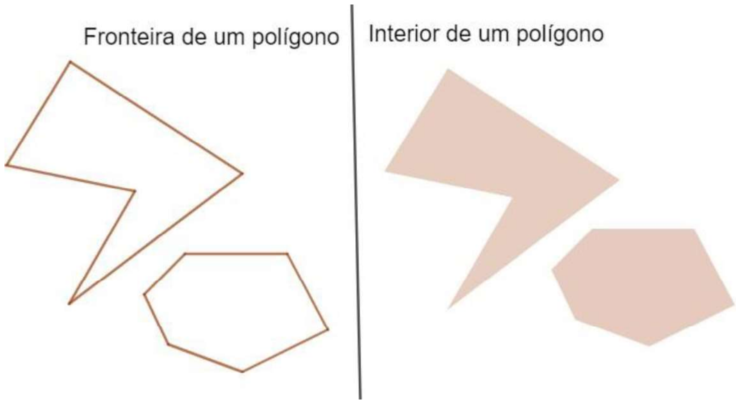
Definição 3.2 (Polígono Simples). Um polígono *P* será identificado como polígono simples se não houver intersecção entre arestas não adjacentes (MARTINS, 2005).

Figura 2 – Diferenciação entre polígonos simples e não simples



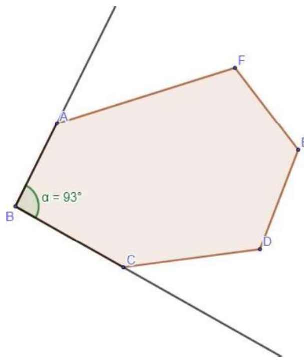
Definição 3.3 (Ponto Interior do Polígono). Se *A* é um ponto do polígono *P* e *A* não pertence à fronteira de *P* então *A* é um ponto do interior do polígono *P* (MARTINS, 2005).

Figura 3 – Diferenciação entre fronteira de um polígono e interior de um polígono



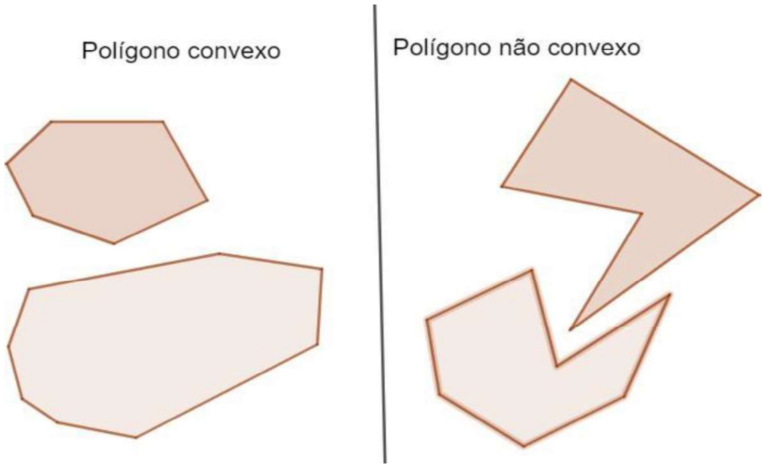
Definição 3.4 (Ângulo Interno de um Polígono). Duas arestas adjacentes de um polígono *P* determina duas regiões angulares, o ângulo cuja região angular compartilha pontos interiores com *P* é um ângulo interno de *P*. Por vezes será identificado somente como ângulo do polígono e a diferenciação dos demais ângulos do polígono poderá ser expressa pela identificação do seu vértice (MARTINS, 2005).

Figura 4 – Ângulo interno de um polígono



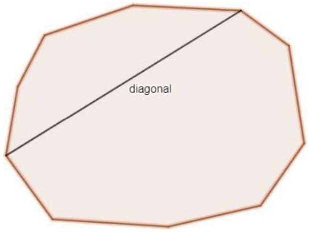
Definição 3.5 (Polígono Convexo). Um polígono é dito convexo se todos os seus ângulos internos possuem medidas menores ou iguais à 180°, caso contrário o polígono será chamado de côncavo (MARTINS, 2005).

Figura 5 – Diferenciação entre polígono convexo e não convexo



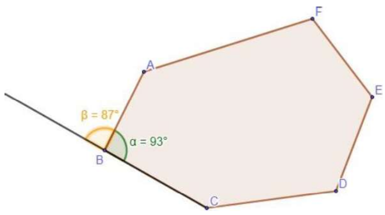
Definição 3.6 (Diagonal de um Polígono). Chama-se diagonal a todo segmento de reta que une dois vértices não consecutivos de um polígono (LIMA, 2010).

Figura 6 – Diagonal de um polígono



Definição 3.7 (Ângulo Externo de um Polígono)**.** Se *A* é um vértice do polígono *P*, que determina o ângulo Â, o suplemento de Â obtido com o prologamento de um dos lados de *P* que tem *A* como uma das extremidades é um ângulo externo ao polígono *P* no vértice *A* (BARBOSA, 1984).

Figura 7 – Ângulo externo de um polígono



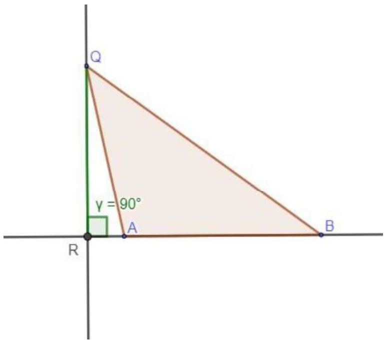
Uma das definições dada para base pelo Ferreira (2008, p. 168) conceitua que é a “parte inferior onde alguma coisa repousa ou apoia”, e trazendo essa definição para polígonos convexos, acontece que qualquer lado do polígono pode ser a parte inferior, depende de como o posicionamos, e assim é em geometria. A base de um polígono convexo pode ser qualquer um dos seus lados, depende da escolha de cada problema.

Segundo o conceito de Ferreira (2008, p. 114), altura é a: “dimensão vertical de um corpo da base para cima”. Na sequência há uma definição rigorosa para altura de um polígono.

Definição 3.8 (Altura de um Polígono). Seja *AB* uma base do polígono *P*, e *Q* é um, dentre os pontos de *P* com a maior distância possível da reta suporte de *AB*, e *R* a interseção entre a reta suporte de *AB* e a reta perpendicular à esta, passando por

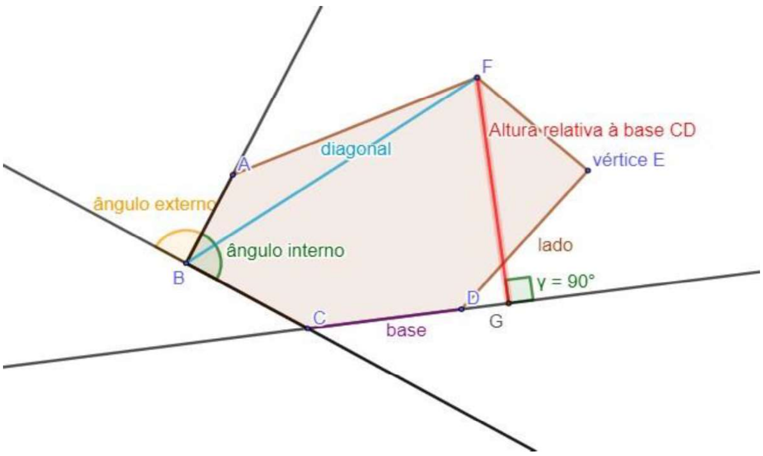
Q. Chamamos de altura do polígono *P* relativa à base *AB*, a medida do segmento *RQ*.

Figura 8 – Altura de um polígono



A figura 9 apresenta os elementos de um polígono convexo definidos acima.

Figura 9 – Elementos de um polígono

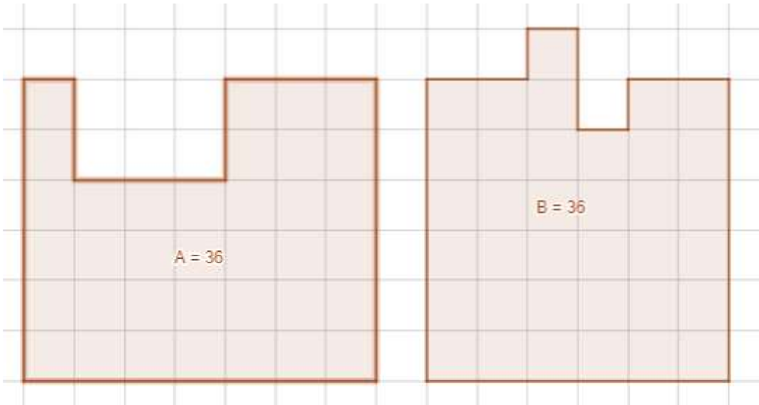


Definição 3.9 (Área). É a medida da extensão de uma superfície[2]. Se *S* é uma superfície, a área de *S* poderá ser referenciada neste trabalho por $Área_{(S)}$.

Definição 3.10 (Superfícies Equivalentes). Sejam *A* e *B* duas superfícies. *A* e *B* são equivalentes se possuem a mesma área, isto é $Área_{(A)} = Área_{(B)}$ (D'ACAMPORA, 2005).

2 "É a parte externa e visível dos corpos" (FERREIRA, 2008, p. 757).

Figura 10 – Superfícies equivalentes



Definição 3.11 (Área) Seja *S* uma superfície, e *R* uma superfície referência, e *x* um número real. Se são necessárias *x* réplicas de *R* para cobrir totalmente a superfície *S* sem sobreposição de uma réplica por outra, dizemos então que a área de *S* é *xR* (LIMA, 1991).

Costumamos usar como referência para medição de áreas, quadrados com lados medindo 1 unidade de medida linear, essas referências são chamadas de quadrados unitários.

Os quadrados unitários cuja unidade de medida do lado seja o metro ou um de seus múltiplos ou submúltiplos são referenciados com simbologia específica, veja alguns exemplos abaixo.

- O quadrado unitário com 1 metro (m) de lado é referenciado por m^2.
- O quadrado unitário com 1 centímetro (cm) de lado é referenciado por cm^2.
- O quadrado unitário com 1 quilômetro (km) de lado é referenciado por km^2.

3.3.2 Quadrados

Definição 3.12 (Quadrado). “Quadrilátero com quatro ângulos retos e quatro lados iguais entre si” (FERREIRA, 2008, p. 668).

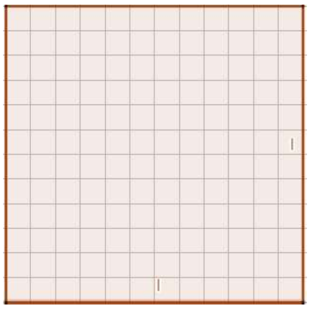
Teorema 1 (Área do Quadrado). *Um quadrado Q de lado l tem área l^2.*

Demonstração. Esta demonstração será desenvolvida em 4 partes.

Parte 1

Seja Q um quadrado com lado l, sendo l um número natural. Podemos particionar o quadrado Q por meio de paralelas aos seus lados à cada unidade linear, criando então l fileiras de quadrados unitários com l quadrados unitários em cada fileira, formando um total de l^2 quadrados unitários, todos justapostos. Então, a área de *Q* é l^2.

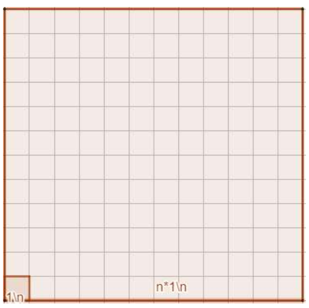
Figura 11 – Quadrado de lado l particionado em l^2 quadrados



Parte 2

Agora considera $l = \frac{1}{n}$ com *n* $\in \mathbb{N}$, podemos particionar um quadrado unitário fazendo cortes paralelos aos seus lados, distantes dois a dois $\frac{1}{n}$, construindo assim *n* fileiras de quadrados com lados $\frac{1}{n}$, contendo *n* quadrados desses em cada fileira, vemos então que a área de cada quadrado obtido equivalente à *Q* é $\frac{1}{n^2}$ do quadrado unitário, logo, a área de *Q* é $\frac{1}{n^2} = l^2$.

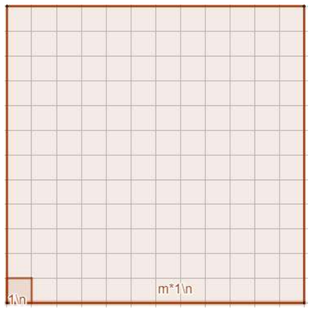
Figura 12 – Quadrado de lado $\frac{1}{n}$ replicado n^2 vezes



Parte 3

Se $l = \frac{m}{n}$ com *m, n* ∈ $\mathbb{N}$, podemos particionar *Q* fazendo cortes paralelos aos seus lados, equidistantes dois a dois, de forma a obter *m* fileiras de quadrados cujos lados medem $\frac{1}{n}$, com *m* quadrados desses em cada fileira, obtendo um total de m^2 quadrados justapostos com área $\frac{1}{n^2}$ (conforme visto na parte 2 desta demonstração), verificando com isso que $Área_{(Q)} = m^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{m^2}{n^2} = l^2$.

Figura 13 – Quadrado de lado $\frac{1}{n}$ replicado m^2 vezes



Parte 4

Por fim, considere que l, a medida do lado do quadrado Q, seja um número irracional, vamos verificar que ainda assim teremos $Área_{(Q)} = l^2$. Esta parte da verificação será realizada em duas etapas descritas à seguir.

Na primeira verifica-se que $\forall b < l^2$ teremos que $b < Área_{(Q)}$.

Na segunda, verifica-se que $\forall b > l^2$ teremos que $b > Área_{(Q)}$.

Então, $Área_{(Q)} \neq b \; \forall b \neq l^2$.

Portanto, conclui-se que $Área_{(Q)} = l^2$.

Como as duas etapas seguem de maneira análoga, a primeira etapa será desenvolvida, ficando a segunda, à cargo do leitor.

Seja *b* um número real em que $0 < b < l^2$.

Disso, considerando que a função raiz é crescente, segue que $\sqrt{b} < l$.

Sendo os racionais denso nos reais, podemos afirmar que existe $r \in \mathbb{Q}$ em que $\sqrt{b} < r < l$.

Se *R* é um quadrado com lado *r*, então *R* é menor que *Q* logo, $Área_{(R)} < Área_{(Q)}$.

Então $r^2 < Área_{(Q)}$ (considerando a parte 3 desta demonstração).

Logo $b < r^2 <$ Área$_{(Q)}$.

Portanto, $b <$ Área$_{(Q)}$, $\forall\, b < l^2$.

Da etapa 2 não desenvolvida, temos que $b >$ Área$_{(Q)}$ $\forall\, b > l^2$.

Logo, por exclusão, temos que Área$_{(Q)} = l^2$.

Concluímos portanto que a área de um quadrado Q de lado l é expressa pela fórmula:

$$\text{Área}_{(Q)} = l^2 \tag{3.1}$$

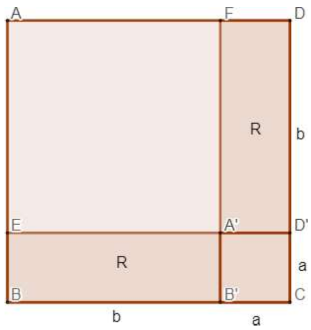
(LIMA, 1991).

3.3.3 Retângulos

Definição 3.13 (Retângulo). "É um Quadrilátero cujos ângulos são retos" (FERREIRA, 2008, p. 705).

Teorema 2 (Área do Retângulo). *Se um retângulo R tem lados medindo a e b com $a, b \in$ R, então sua área é $a \cdot b$*

Figura 14 – Retângulo de lado $a + b$



Demonstração. Considerando as medidas $a, b \in \mathbb{R}$, pode-se construir um quadrado Q de lado $a + b$, como na figura 14. À partir do ponto C identifique os pontos B' e D' sobre os segmentos BC e CD respectivamente, distantes do ponto C uma medida a. Trace um segmento perpendicular ao segmento BC à partir do ponto B', até o segmento AD, identificando assim o ponto F. Da mesma forma trace o segmento $D'E$, perpendicular ao segmento CD, sendo E um ponto pertencente ao segmento AB. Observe que o quadrado Q contém 2 cópias de R e mais dois quadrados, um de lado a e outro de lado b. Então,

$$Área_{(Q)} = 2\ Área_{(R)} + a^2 + b^2 \tag{3.2}$$

Por outro lado sabemos que

$$Área_{(Q)} = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{3.3}$$

Comparando as equações 3.2 e 3.3 temos que

$$Área_{(R)} = ab \tag{3.4}$$

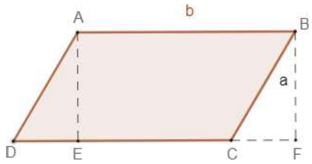
(LIMA, 1991).

3.3.4 Paralelogramos

Definição 3.14 (Paralelogramo). "É um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos" (FERREIRA, 2008, p. 609).

Teorema 3 (Área do Paralelogramo). Se *P* é um paralelogramo em que um dos lados tem media b, e a é a medida da altura relativa a este lado, então a área de *P* é dada por $a \cdot b$.

Figura 15 – Paralelogramo



Demonstração. Seja *P* o paralelogramo *ABCD* apresentado na figura 15 considerando a notação fixada na figura 15, deve-se verificar que a área de *P* é $a\,.\,b$. Para isto, trace a partir dos pontos *A* e *B*, dois segmentos, *AE* e *BF* , perpendiculares à reta que contém *CD*. O quadrilátero *ABFE* é um retângulo de lados a e b, e pelo teorema 2 sua área é $a \cdot b$. Veja ainda que os triângulos *ADE* e *CBF* são congruentes pelo caso LAL. (caso de congruência apresentado como um axioma em Barbosa (1984)) então, pelas definições 3.10 e 3.11 pode-se concluir que $Área_{(P)} = Área_{(ABFE)} = a \cdot b$. Por outro lado, observe que *b* é a medida de um dos lados do paralelogramo

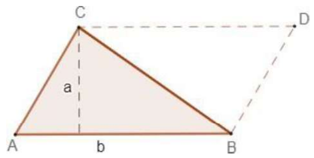
P , e a é a altura relativa à este lado. Garantindo assim o teorema (BARBOSA, 1984).

3.3.5 Triângulos

Definição 3.15 (Triângulo). É um “polígono de três lados” (FERREIRA, 2008, p. 791).

Teorema 4 (Área do Triângulo). Se *T* é um triângulo em que um dos lados tem media *b,* e a é a medida da altura relativa a este lado, então a área de *T* é dada por $\frac{1}{2} \cdot (ab)$.

Figura 16 – Triângulo



Demonstração. Dado um triângulo *ABC*, com notação fixada pela figura 16, trace pelo vértice *C* uma reta paralela ao lado *AB*, e pelo vértice *B* uma reta paralela ao lado *AC*. Estas duas retas se intersectam em um ponto *D*. O polígono *ABCD* é um paralelogramo, e os dois triângulos *ABC* e *CDB* são congruentes pelo caso LLL. Como $Área_{(ABCD)}$ = $Área_{(ABC)}$+$Área_{(CDB)}$ e $Área_{(ABC)}$ = $Área_{(CDB)}$ e $Área_{(ABCD)}$ = $a \cdot b$, então: $Área_{(ABC)}$ = $\frac{1}{2} \cdot (ab)$. Observe que b é a medida de um dos lados do triângulo e a é a medida da altura relativa à este lado. (BARBOSA, 1984).

Se *ABC* é um triângulo cujos lados medem a, b e $c,$ então a medida da área deste triângulo pode ser obtida pela Fórmula de Heron:

$$Área_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

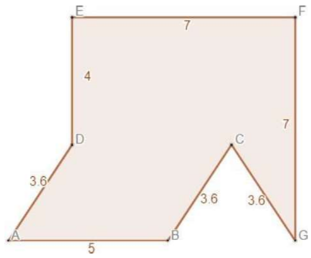
Onde $p = \frac{a+b+c}{2}$. Vogt (2004) apresenta duas demonstrações diferentes para essa fórmula.

3.3.6 Polígonos

Para o cálculo da área de polígonos Guedes (2013) orienta a subdivisão do polígono em figuras cujas áreas já se sabe calcular.

Exemplo 3.1. Calcular a área do polígono *P* representado na figura 17 considerando que *ED//FG, EF//DC//AB, AD//BC* e *A, B, G* são pontos colineares.

Figura 17 – Um polígono



Seja *r* a reta suporte de *DC*, e *H* o ponto de interseção entre *r* e o lado *FG* do polígono. A reta *r* particiona o polígono *P* nos seguintes polígonos: *ABCD* que é paralelogramo não retângulo, *DEFH* que é retângulo, e o triângulo *CGH*.

Então, $Área_P = Área_{ABCD} + Área_{DEFH} + Área_{CGH}$

Sendo *DEFH* um retângulo de lados 4 e 7, $Área_{DEFH} = 28$.

Como $H \in FG$ e $C \in DH$, segue que $|HG| = |FG| - |ED| = 3$ e $|CH| = |DH| - |DC| = 2$, sendo *DEFH* um retângulo, tem-se que $DH \perp FG$, então *CGH* é um triângulo retângulo em *H* logo, tomando *CH* como base do triângulo, *HG* é a altura relativa à essa base, como $|CH| = 2$ e $|HG| = 3$ segue que $Área_{CGH} = 3$.

Seja *s* a reta suporte de *ED*, e *Q* a interseção entre *s* e *AB*. Como *DEFH* é retângulo, então $s \perp DC$, sendo *DC//AB* tem-se que $s \perp AB$. Tomando *AB* como base do paralelogramo *ABCD, DQ* é a altura relativa à esta base. Sendo *DQ//HG* e *DH//QG* segue que $|DQ| = |HG| = 3$, como $|AB| = 5$ tem-se que $Área_{ABCD} = 15$.

Portanto, $Área_P = 46$.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Quando se inicia um estudo científico um dos mais relevantes aspectos vem a ser o caminho metodológico delineado, ou seja, a natureza do estudo; sua forma sob o aspecto da abordagem do problema; o tipo de estudo conforme os objetivos traçados; como foi executada a pesquisa considerando o ponto de vista dos procedimentos técnicos e o método de desenvolvimento do estudo.

Nesse sentido, para a melhor compreensão da metodologia da presente pesquisa faz-se essencial a observação do organograma apresentado na figura 18:

Figura 18 – Organograma do caminho metodológico do estudo

A dissertação aqui construída tem sua elaboração embasada em uma pesquisa de natureza aplicada, tendo em vista que foi desenvolvido um material dinâmico, dentro do *software* GeoGebra, que apresenta importante prática pedagógica para o ensino da Matemática, especialmente, neste momento pandêmico que assolou o mundo e tornou as aulas on-line uma opção para dar continuidade às atividades escolares.

Gil (2010) discorre que a pesquisa enquadrada como de natureza aplicada é um tipo de estudo com potencial de gerar conhecimentos para a aplicação prática, de modo que o estudo contempla um manancial de informações, que pode gerar soluções de problemas relacionados com a prática pedagógica no ensino da matemática e, especificamente, da geometria.

Ao apresentar o tipo de pesquisa desenvolvido quanto à abordagem, pontuamos que ela é qualitativa. Assim, tem-se a consideração que as pesquisas do tipo qualitativa possuem maior amplitude em relação a observação da ocorrência dos fenômenos e características que envolvem a coisa estudada e, possivelmente, cabe ao pesquisador uma compreensão mais profunda sobre o que vem sendo analisado e como pode buscar soluções aos problemas e limitações encontradas (SANTOS FILHO; GAMBOA, 2017).

Nesse sentido, cabe o entendimento de que a pesquisa qualitativa permitiu à pesquisadora o aprofundamento do fenômeno analisado e a construção de um material interativo, utilizando para isso o *software* GeoGebra como meio alternativo para o aprimoramento dos processos de ensino e aprendizagem na matemática.

Quanto aos objetivos traçados a presente pesquisa é do tipo exploratória, que de acordo com Gil (2010) é um tipo de estudo que permite o aprofundamento teórico do pesquisador, em relação a coisa pesquisada viabilizando uma descrição mais precisa da situação existente e dos elementos que compõem o caminho traçado. Para a realização da pesquisa exploratória foram levantados junto a diferentes teorizadores abordagens relacionadas à origem do pensamento matemático e sua importância para o relacionamento social; a geometria e o currículo escolar; o uso das tecnologias no cenário atual, especialmente, no campo da educação escolar; a formalização da Teoria sobre o cálculo da área de polígonos quadriláteros e triangulares, trazendo suas características e estratégias para cálculo da área de polígonos diversos.

Nesse sentido, quanto aos procedimentos este trabalho é uma pesquisa bibliográfica, que contempla segundo Marconi e Lakatos (2010), um estudo em dados secundários, que permitem a construção de conhecimento sobre o tema escolhido, sendo esta a primeira etapa de todo estudo científico, pois a discussão da temática estudada a partir de outros teorizadores eleva a qualidade de conhecimento, percepção e capacidade analítica dos pesquisadores.

A pesquisa bibliográfica foi, por assim considerar, uma revisitação da pesquisadora dos principais temas relacionados à prática pedagógica do ensino da Matemática, considerando o uso do *software* GeoGebra, de modo a possibilitar o conhecimento de algumas funcionalidades deste importante recurso tecnológico que pode ser utilizado para a representação de objetos geométricos, gráficos de funções e, para preparar uma sequência de atividades interativas no GeoGebra. Esta pesquisa também possibilitou o desenvolvimento de um *GeoGebra Book* para o estudo das fórmulas de cálculo da “Área de Polígonos”. O *GeoGebra Book* é um livro interativo que consiste em uma coleção de atividades do GeoGebra e pode ser acessado pelo computador ou celular.

Em relação ao método o estudo é indutivo, isto significa dizer, que é uma forma de estudo que induz uma assertiva observada por uma pesquisa com dados reais, como é o caso das informações sobre o GeoGebra e a possibilidade de seu uso como instrumento de qualificação das práticas pedagógicas para o ensino da geometria.

Quanto ao estudo com método indutivo Lakatos e Marconi (2010, p. 53) consideram que: “[...] Entende-se por generalização o alargamento dos resultados da pesquisa para o mundo real onde o objeto estudado aparece sob condições semelhantes. [...]”.

Assim, munida de conhecimento teórico sobre o tema principal e adjacentes relacionados ao uso de *software* como instrumento de prática pedagógica, o presente estudo trouxe uma opção de melhoria na qualidade do ensino da Matemática, em particular, da geometria, a partir de uma prática que faz uso da tecnologia, como forma de suplantar os problemas educativos vivenciados devido aos limites impostos pela pandemia para as aulas presenciais.

5 RESULTADOS DA PESQUISA

Por intermédio do desenvolvimento desta pesquisa foi possível conhecer algumas funcionalidades do GeoGebra, como o uso do aplicativo para representação gráfica de função, discussão sobre resolução de sistemas lineares, a contribuição mútua entre os membros da comunidade GeoGebra e o desenvolvimento colaborativo disponível pelo *software*.

O *software* é gratuito e não é necessário fazer o cadastro para usar as ferramentas ou acessar os materiais disponíveis. Algumas construções podem ser desenvolvidas em aula com a participação dos estudantes, outras precisam de um tempo maior de preparo, sendo importante deixá-las prontas para o uso, mas, para salvar as construções é necessário ter um perfil particular na comunidade.

> O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de *softwares* de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (GEOGEBRA, 2021, p. 1).

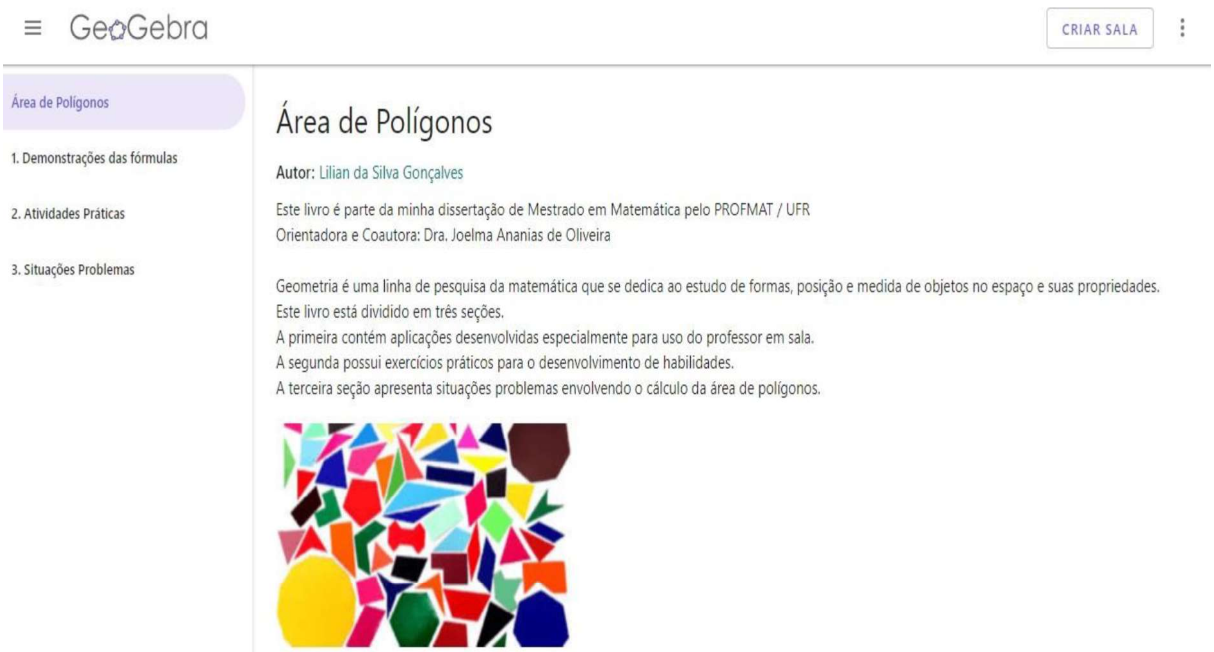
Em termos de dimensão o material produzido é um protótipo de livro que está divido em três capítulos, o primeiro capítulo contém aplicações para uso do professor em sala de aula, com a finalidade de facilitar a demonstração das fórmulas para o cálculo de área de polígonos e fornecer uma ferramenta que facilite a visualização e compreensão das fórmulas pelo estudante. O segundo capítulo é constituído de atividades práticas para memorização dos processos de cálculo, e o terceiro capítulo apresenta situações problemas. Ao estar em posse de um material publicado o usuário pode acessar o perfil do criador, procurar pela postagem e fazer comentários, críticas ou apresentar sugestão de mudança.

O desenvolvimento do livro foi motivado pelo conhecimento do livro "Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma GeoGebra – 2019*" de* Cássio (2019), e para aprender a programar no GeoGebra foram fundamentais as obras Programa dá Licença (2020b), Programa dá Licença (2020a), Cássio (2020b), Cássio (2020a) Cássio (2020c), e Nóbriga e Dantas (2021). Para acessar o livro produzido, um

GeoGebra *Book* para o estudo das fórmulas de cálculo da “Área de Polígonos”, clique no link https://www.geogebra.org/m/nk7hhhvq .

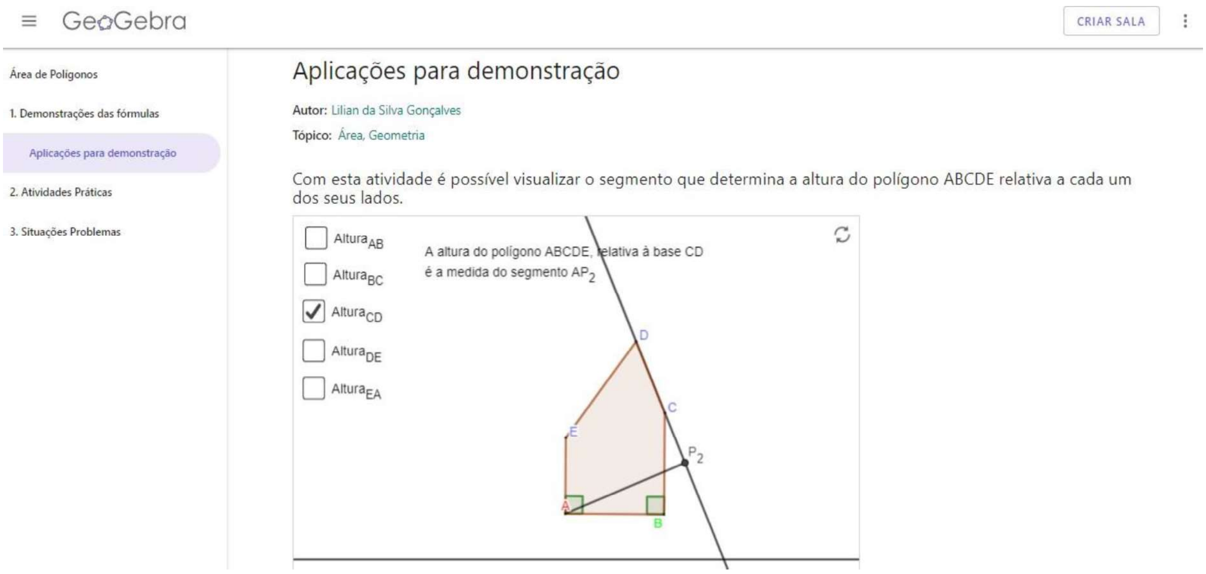
A figura 19 representa a capa do livro, nela contém a apresentação do material e os canais de navegação pelos capítulos. As figuras 20 até 28 apresentam os aplicativos do primeiro capítulo. Os aplicativos são intuitivos e simples de manusear, alguns possuem breves explicações. As figuras 29 até 43 são as imagens dos aplicativos do segundo capítulo, com exercícios para prática dos cálculos. A figura 44, na seção 3, é um jogo tangram para trabalhar o raciocínio de forma prazerosa e consolidar o conceito de figuras equivalentes, as figuras 45 até 50 são situações problemas.

Figura 19 – Página inicial



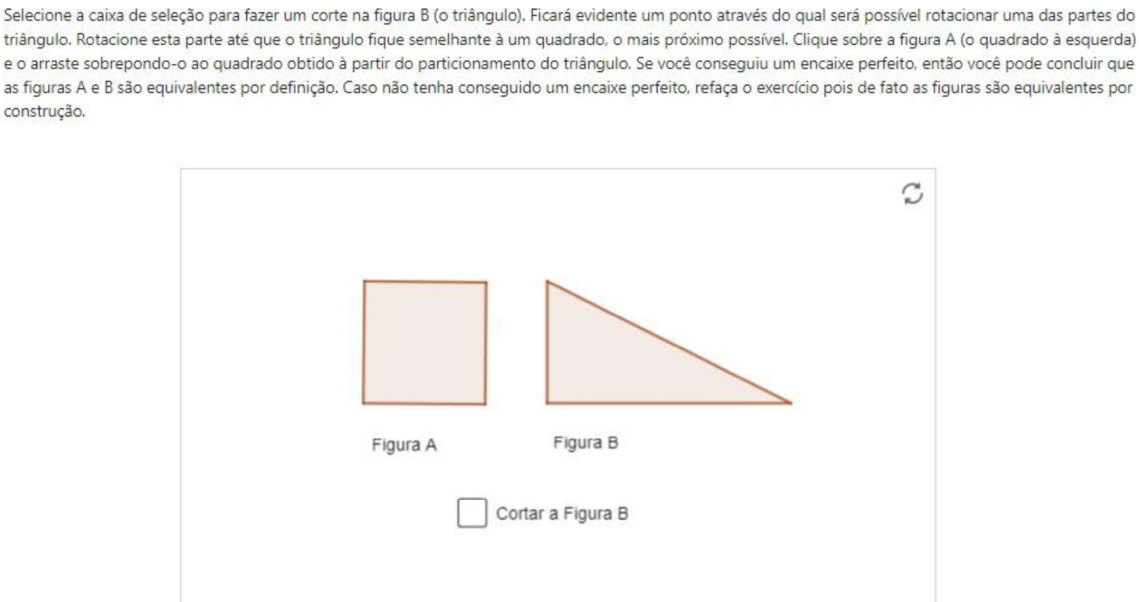
O *applet* visualizado na figura 20 apresenta a altura relativa a cada uma das bases do polígono *ABCDE,* no momento em que o professor estiver explicando sobre a altura dos polígonos, ele pode solicitar que o *applet* mostre a altura relativa à uma outra base do polígono dado, selecionando a altura desejada.

Figura 20 – Definição de altura



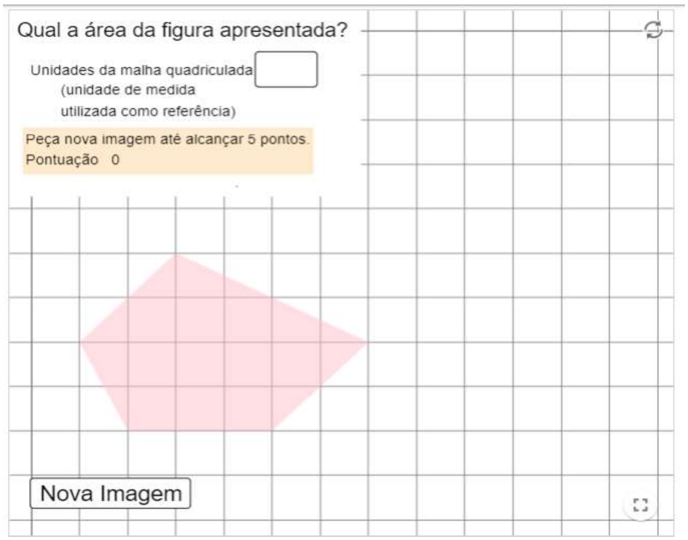
O *applet* representado na figura 21 permite ao professor mostrar para o estudante um exemplo de sobreposição de figuras, que garantem a igualdade de área. Desse modo, viabiliza a facilitação da visualização e entendimento do estudante, motivando-o para o aprendizado da matemática.

Figura 21 – Definição de figuras equivalentes



Com o *applet* da figura 22 o professor fará a contagem da área da figura apresentada na malha quadriculada, destacando que esse valor para a área se refere a quantidade de unidades da malha quadriculada correspondente à cobertura da figura.

Figura 22 – Determinação de área na malha quadriculada

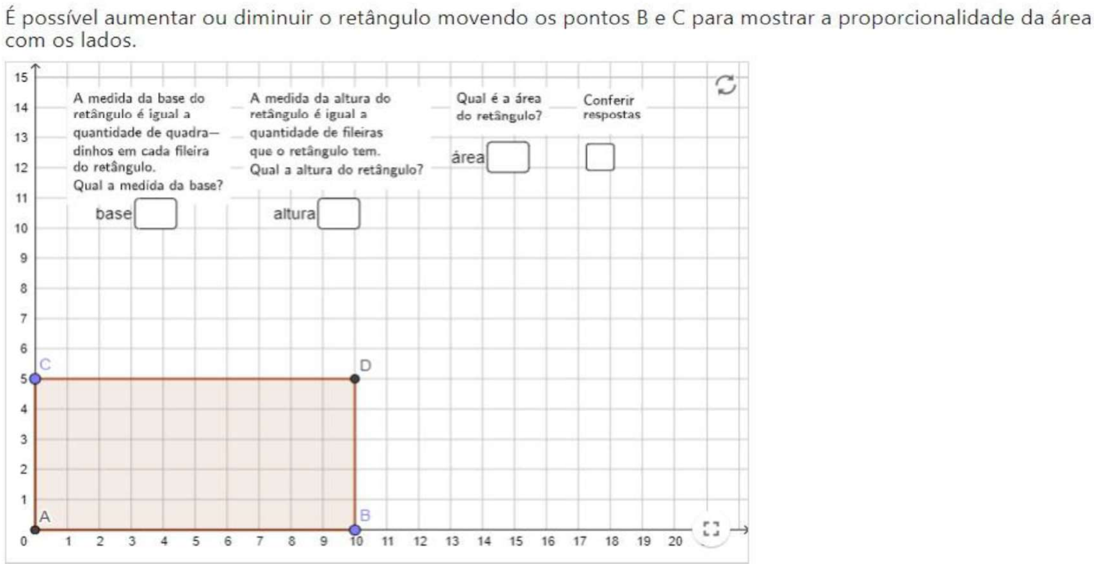


O *applet* da figura 23 é similar ao apresentado na figura 22, e a utilização é análoga. A diferença entre esses dois *applets* é que o apresentado na figura 23 permite a determinação da área da figura evidente, pela contagem de unidades de uma malha triangular, mostrando com isso que a área de uma figura depende da referência utilizada.

Figura 23 – Determinação de área na malha triangular

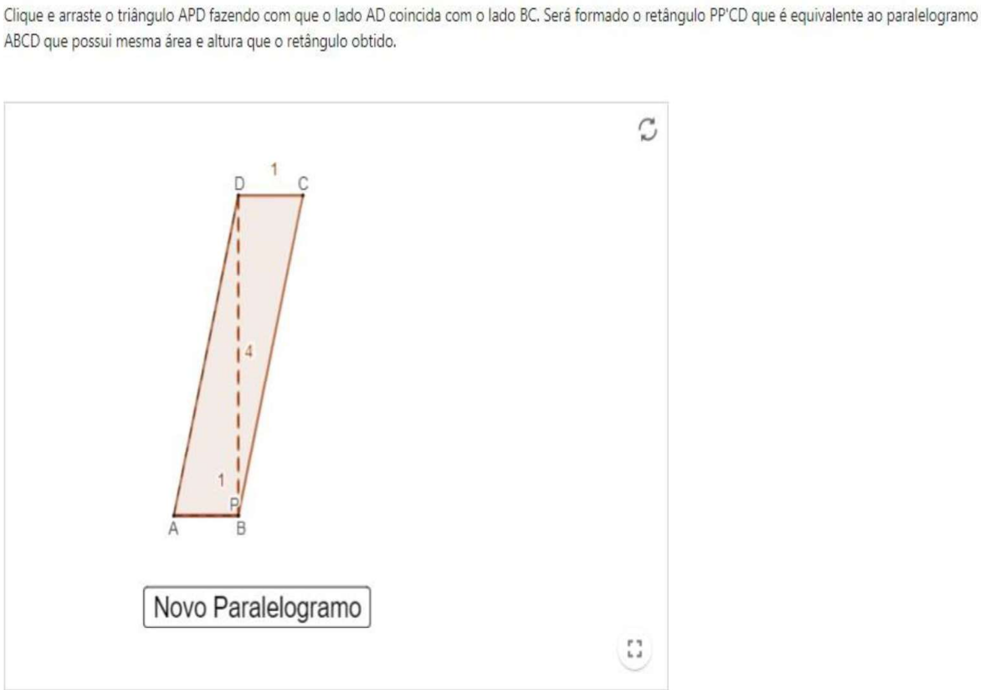
O *applet* da figura 24 permite que o professor faça a contagem, junto com o estudante, da área de diferentes retângulos cujos lados têm medidas inteiras, a mudança de retângulos é obtida com o deslocamento dos pontos B e C. Com esse *applet* o professor mostra para o estudante, que em qualquer retângulo com lados inteiros, a área é obtida multiplicando a medida dos seus lados, facilitando a indução de que a área de qualquer retângulo é obtida da mesma forma.

Figura 24 – Fórmula da área do retângulo



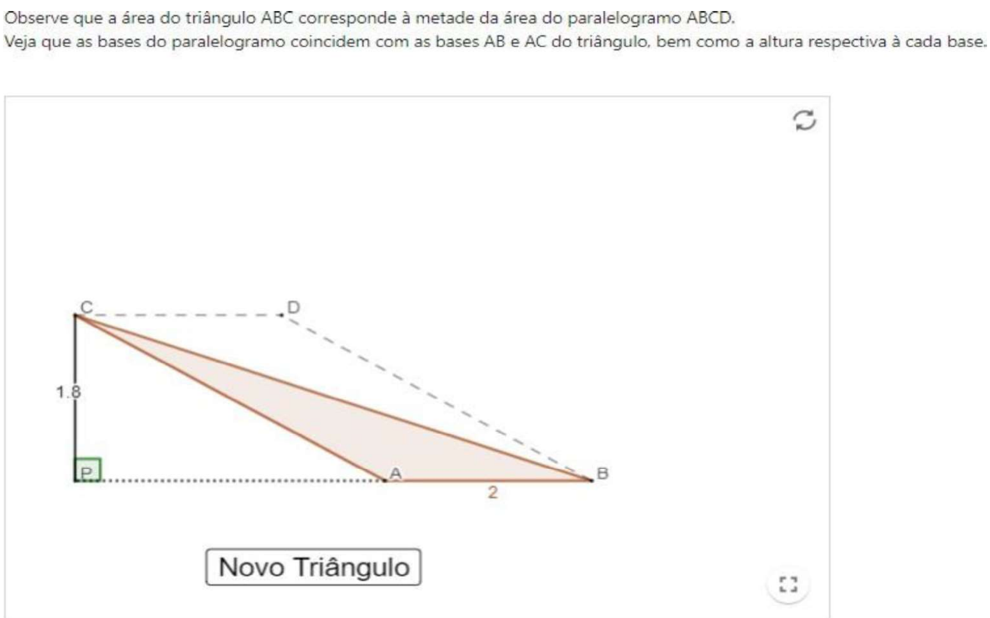
Na figura 25 é exibido um *applet* que permite ao professor mostrar ao estudante que todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de mesma base e mesma altura relativa, para isso o professor deve fazer o deslocamento do triângulo ABD até que AD coincida com BC. O professor pode fazer esse processo quantas vezes for necessário para que o estudante compreenda, utilizando paralelogramos diferentes ao clicar em “Novo Paralelogramo”.

Figura 25 – Fórmula da área do paralelogramo



Na figura 26 o *applet* não desenvolve movimento, mas dá suporte ao professor para mostrar para o estudante que todo triângulo equivale à metade de um paralelogramo de mesma base e mesma altura relativa à esta. O *applet* fornece um novo triângulo ao clicar em "Novo Triângulo".

Figura 26 – Fórmula da área do triângulo



Atenta-se para o fato de que os *applets* das figuras 27 e 28 auxiliam o professor a apresentar ao estudante algumas estratégias de particionamento de um polígono qualquer à fim de determinar a sua área.

Figura 27 – Partição de polígonos - exemplo 1

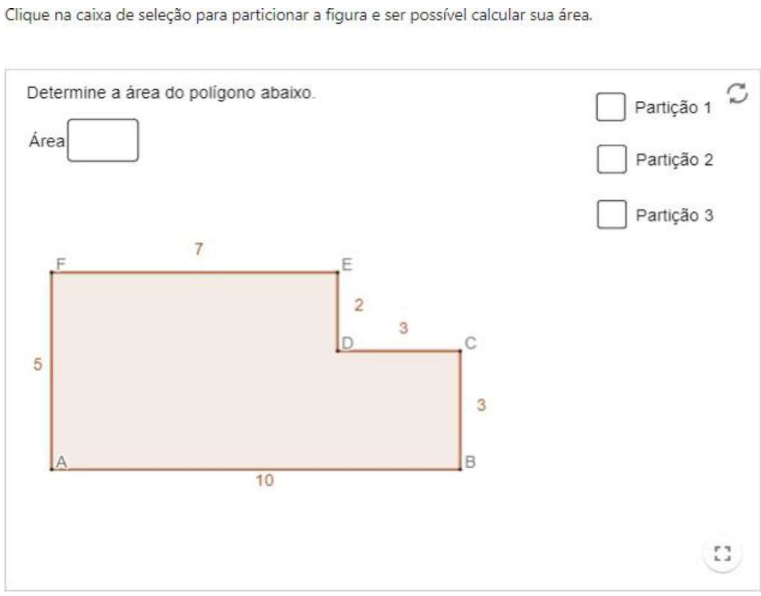
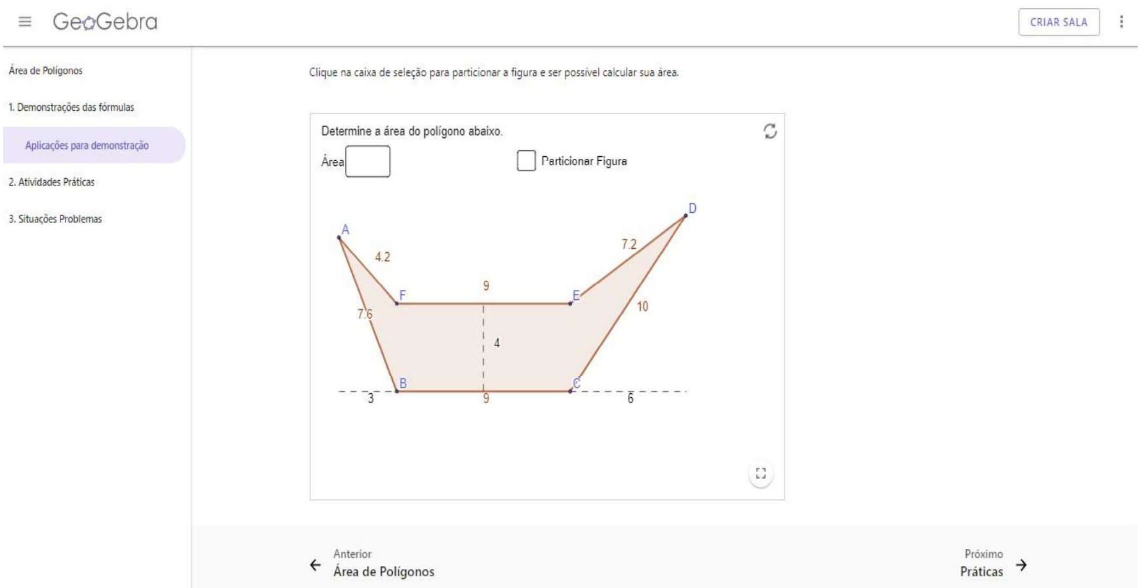


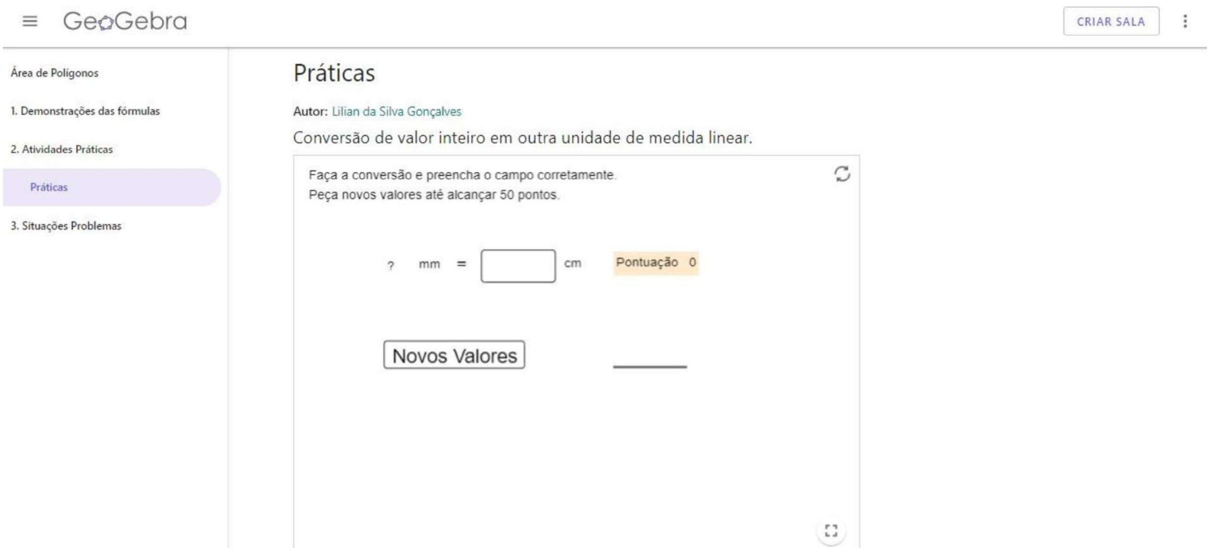
Figura 28 – Partição de polígonos - exemplo 2



Os *applets* da primeira seção auxiliam o processo de ensino, a possibilidade de obter uma nova figura com um clique, com as devidas medidas ou partições, torna a aula dinâmica, e permite ao professor apresentar um maior número de exemplos.

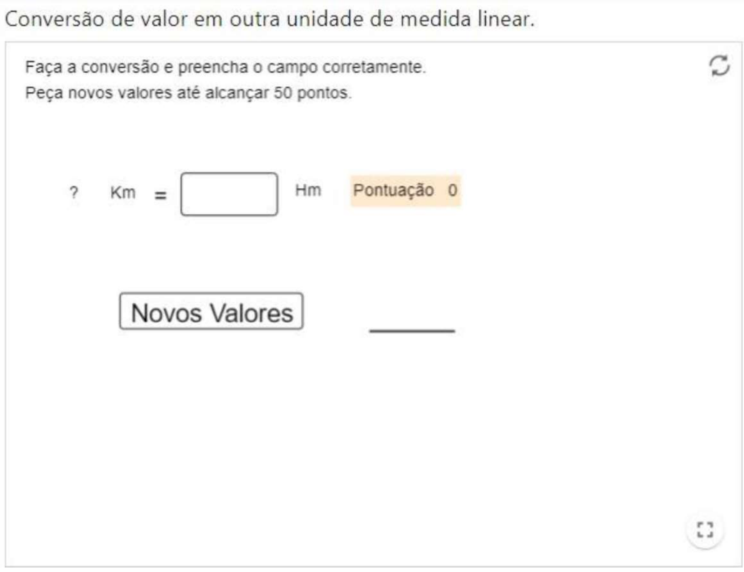
A figura 29 apresenta a abertura da seção de exercícios para treino e memorização das técnicas de cálculo. Em exercícios sobre o cálculo de área é comum haver a necessidade de fazer conversão de medidas lineares, o *applet* apresentado nesta figura oferece valores inteiros e solicita a conversão em uma unidade de medida específica, dentre as unidades que são múltiplas ou submúltiplas do metro.

Figura 29 – Prática de conversão entre unidades de medida linear - fornecimento de valores inteiros



A figura 30 traz um *applet* similiar ao apresentado na figura anterior, porém os valores fornecidos possuem uma casa decimal.

Figura 30 – Prática de conversão entre unidades de medida linear



Os *applets* das figuras 31, 32 e 33 são exercícios de identificação, para que o estudante frize o conceito de altura de um polígono, considerando que a altura está relacionada à uma base. Nestes três *applets* o estudante pode solicitar uma nova figura para identificação através de um clique. O primeiro *applet* fornece sempre retângulos, o segundo fornece paralelogramos, e o terceiro, triângulos.

Figura 31 – Identificação da altura relativa à uma base específica em retângulos

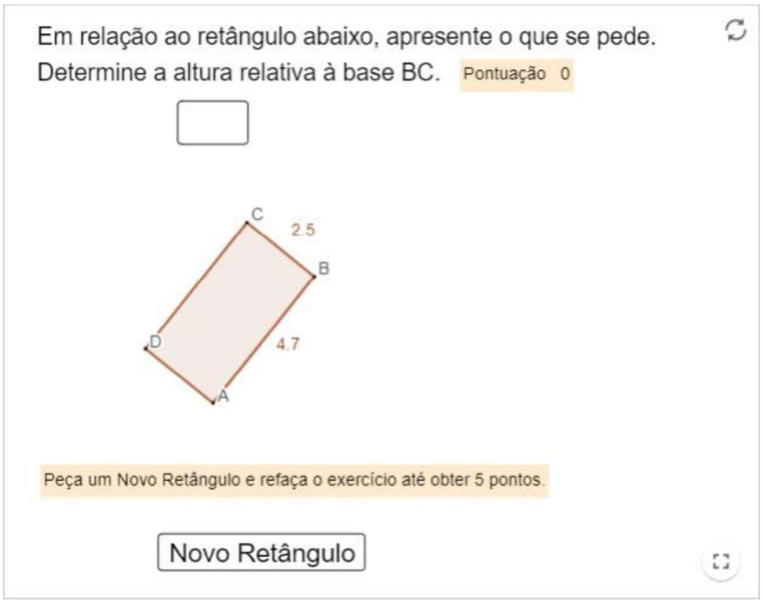


Figura 32 – Identificação da altura relativa à uma base específica em paralelogramos

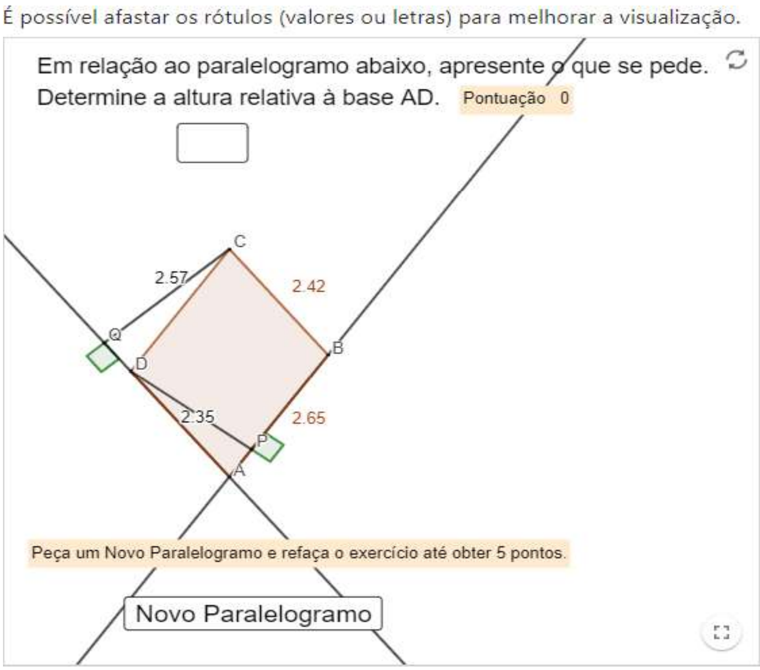
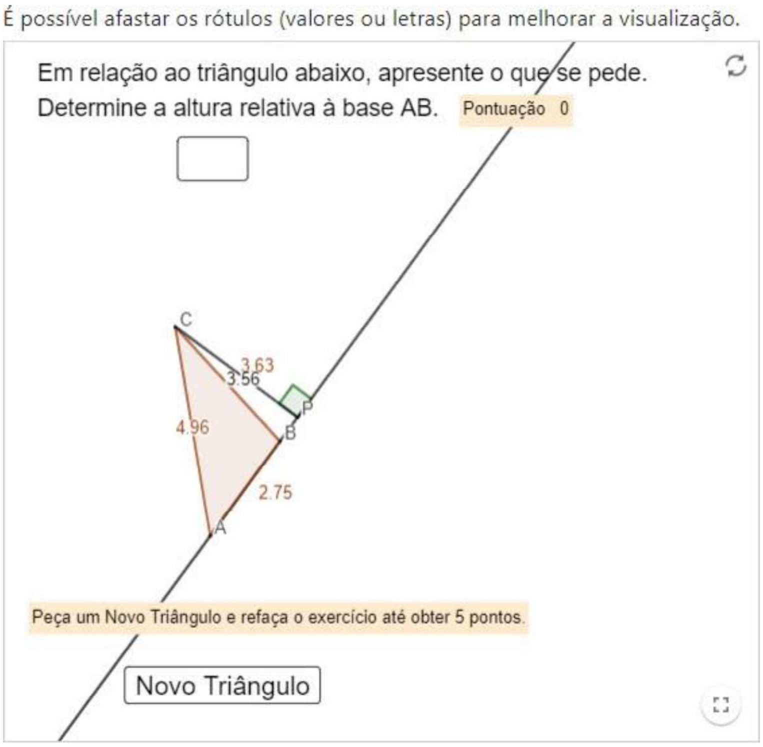
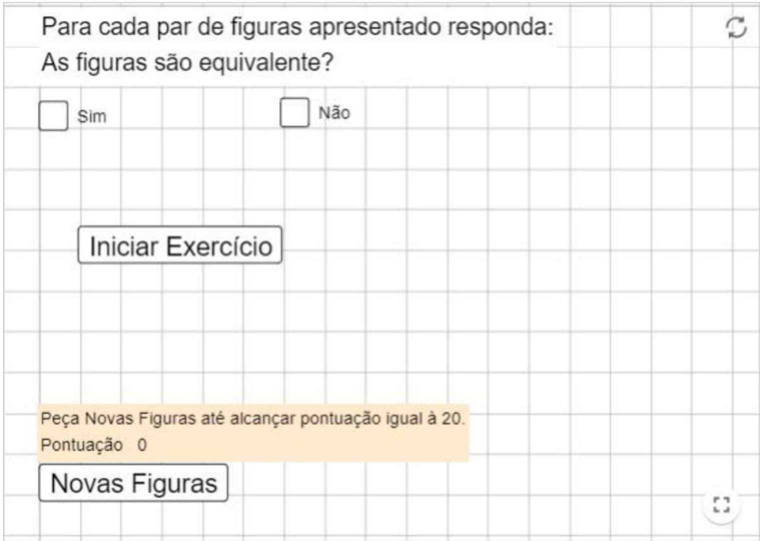


Figura 33 – Identificação da altura relativa à uma base específica em triângulos



Salienta-se que o *applet* cuja imagem aparece na figura 34 apresenta simultaneamente duas figuras poligonais, solicitando ao estudante a confirmação ou negação quanto a equivalência das figuras apresentadas. É um exercício para fixação do conceito de equivalência de figuras.

Figura 34 – Identificação de figuras equivalentes sobre uma malha quadriculada



Os *applets* apresentados nas figuras 35 e 36 são os mesmos das figuras 22 e 23. Estes aparecem na seção de práticas para que o estudante experimente contar a área das figuras sem o auxílio do professor. Esses exercícios também são conceituais, bastando fazer uma contagem simples para indicar a resposta.

Figura 35 – Determinação da área de polígonos sobre uma malha quadriculada

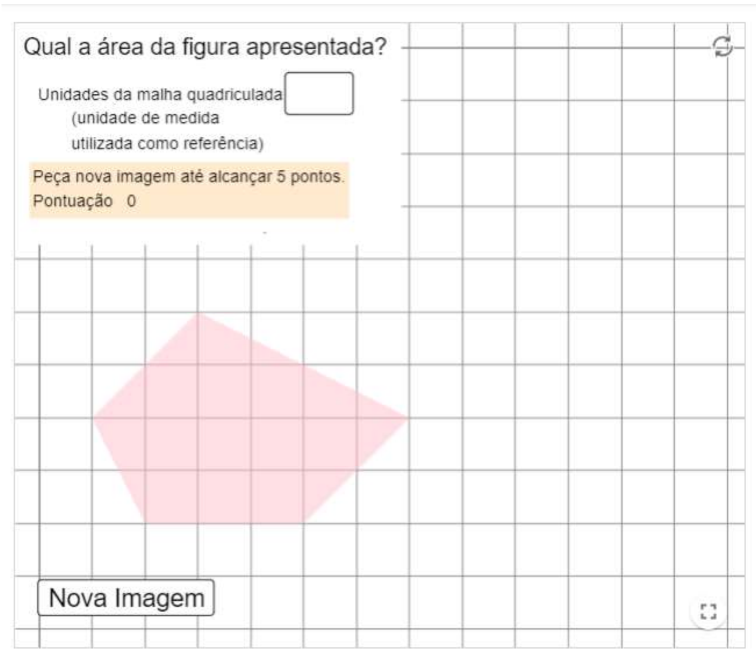
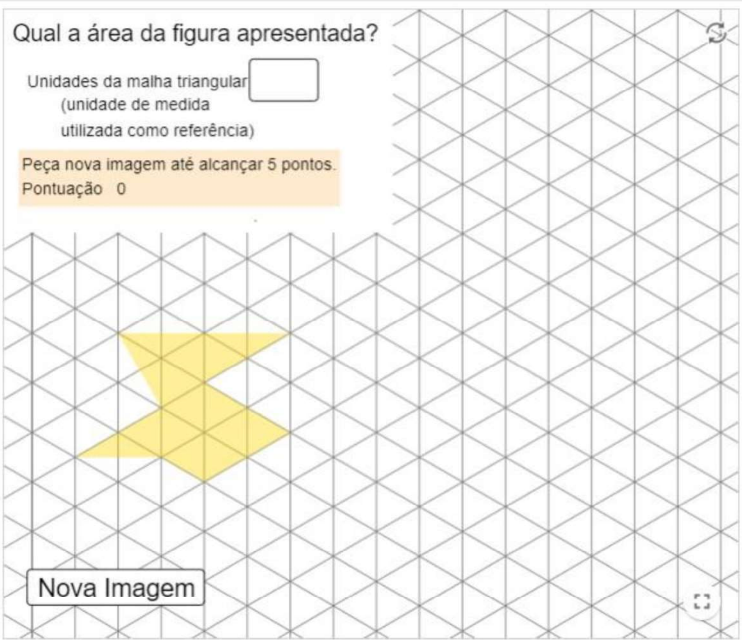


Figura 36 – Determinação da área de polígonos sobre uma malha triangular



Considera-se que os *applets* das figuras 37 e 38 para a prática de conversão de unidades de medida de área, são similares aos exercícios de abertura desta seção, representados nas figuras 29 e 30.

Figura 37 – Prática de conversão entre unidades de medida de área - fornecimento de valores inteiros

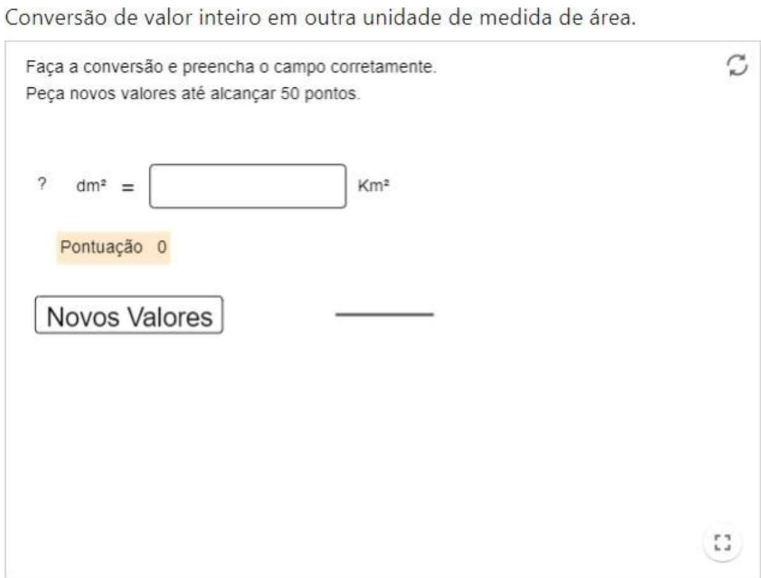
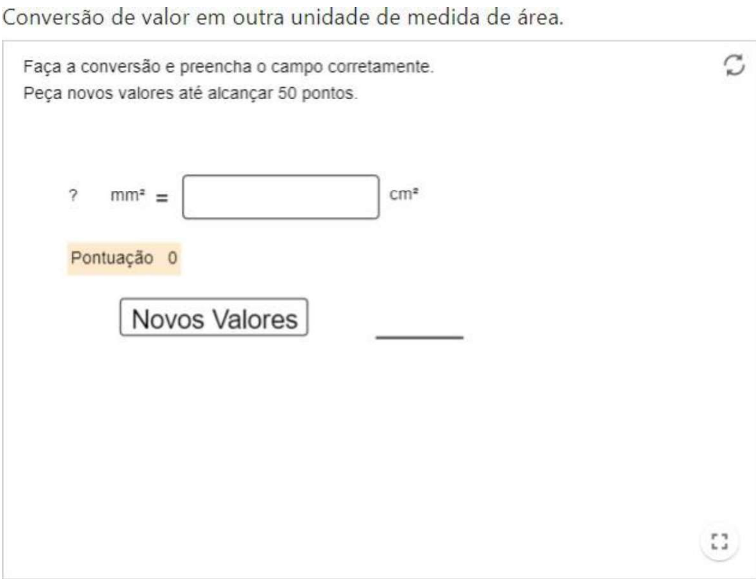


Figura 38 – Prática de conversão entre unidades de medida de área



Os *applets* das figuras 39 e 40 são para a prática do cálculo de área de paralelogramos e triângulos respectivamente.

Figura 39 – Prática do cálculo da área de paralelogramos sendo conhecidas as medidas de uma base e a altura relativa à esta

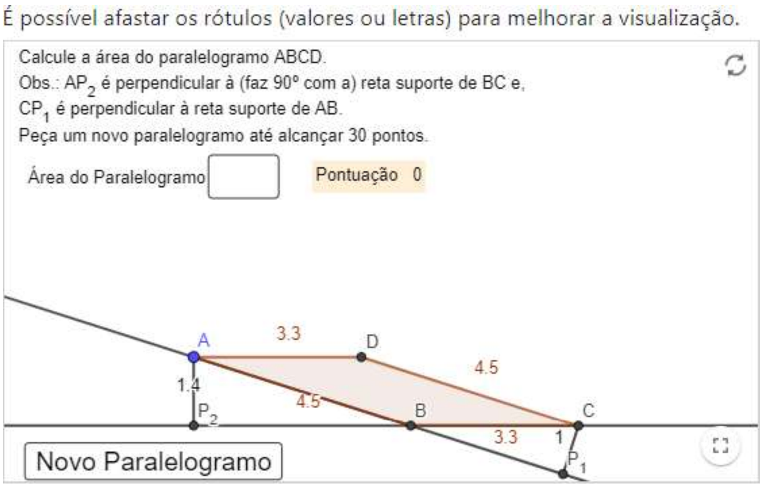
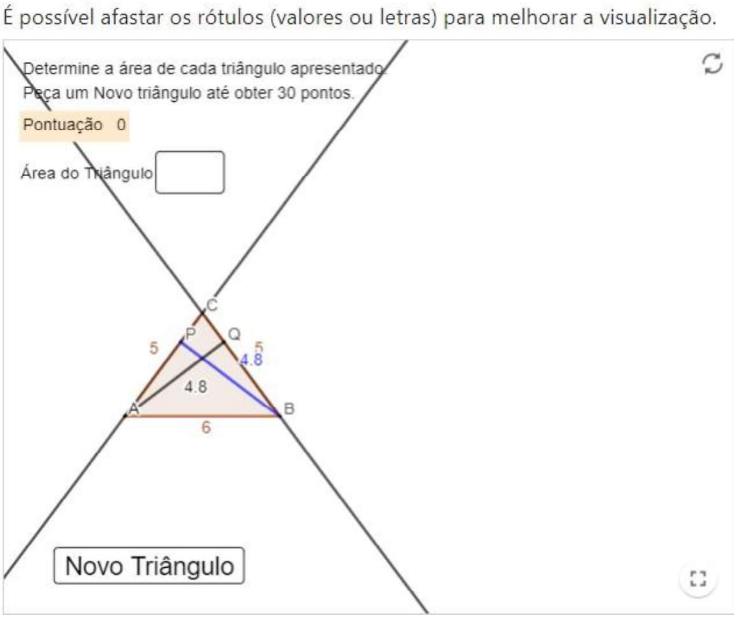


Figura 40 – Prática do cálculo da área de triângulos sendo conhecidas as medidas de uma base e a altura relativa à esta



Os exercícios apresentados nas figuras 41, 42 e 43 envolvem a análise da melhor partição para se determinar a área solicitada.

Figura 41 – Prática do cálculo da área de polígonos à partir do particionamento adequado da figura - Exercício 1

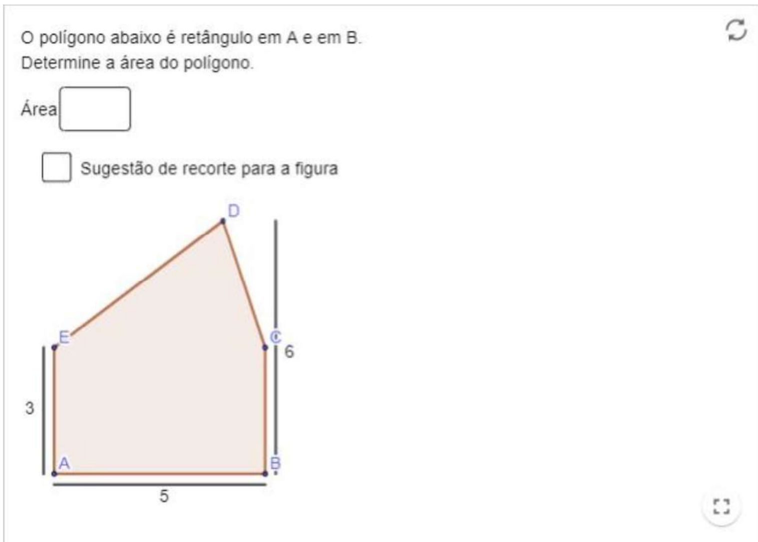


Figura 42 – Prática do cálculo da área de polígonos à partir do particionamento adequado da figura - Exercício 2

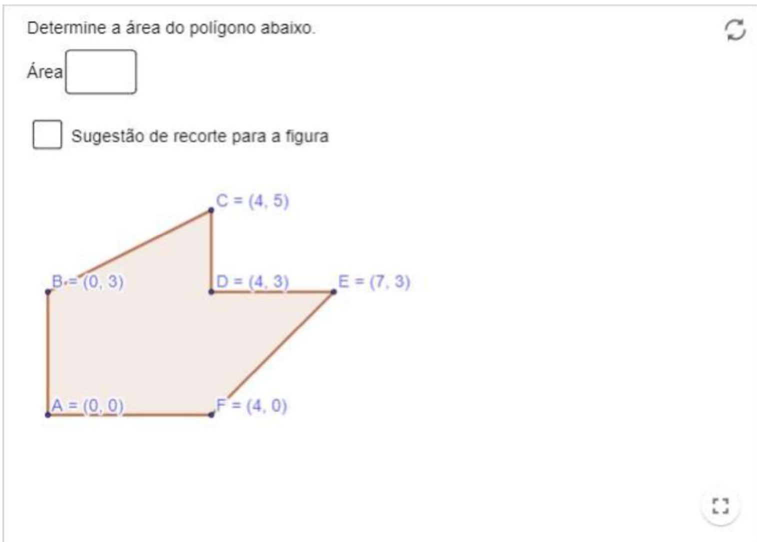
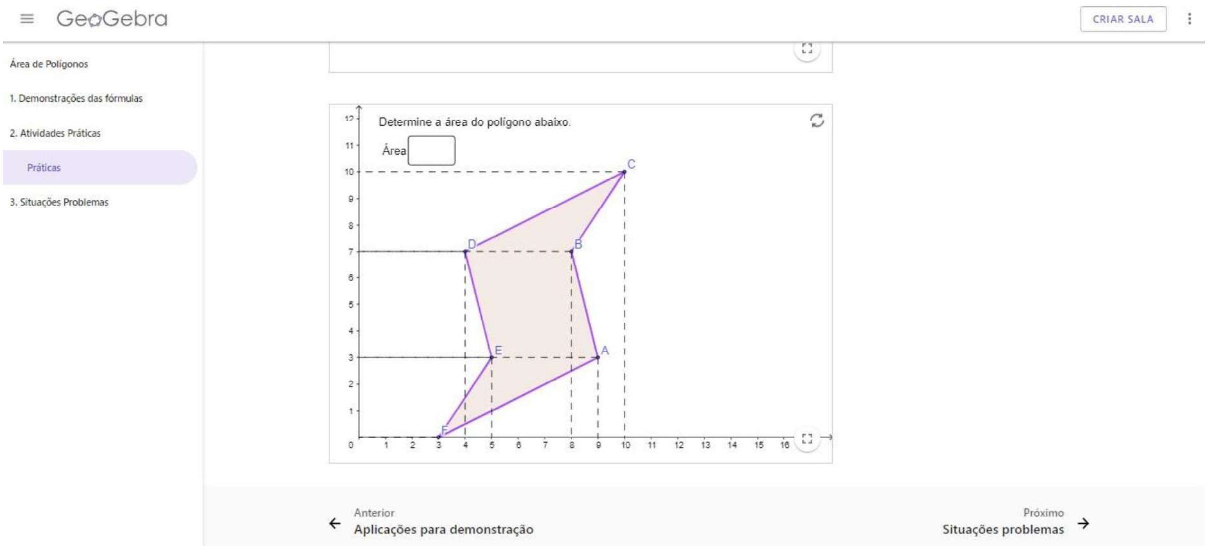
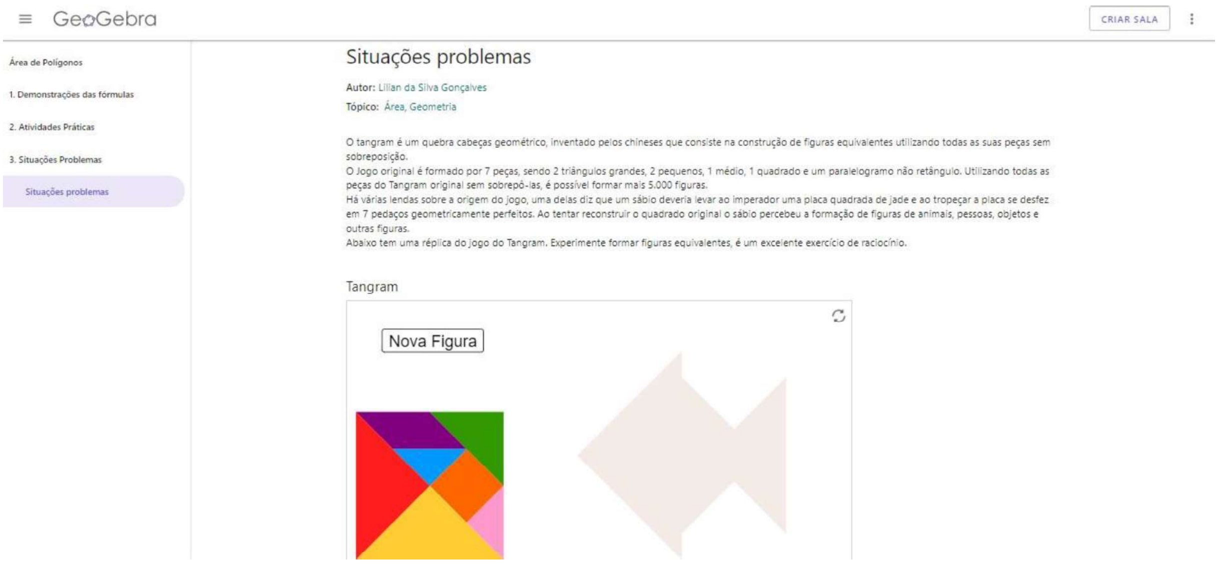


Figura 43 – Prática do cálculo da área de polígonos à partir do particionamento adequado da figura - Exercício 3



A figura 44 mostra a abertura do terceiro capítulo do GeoGebra *book*. Essa figura apresenta um *applet* do jogo Tangram. O jogo envolve análise, reforça a ideia de figuras equivalentes e proporciona um momento descontraído durante a aprendizagem.

Figura 44 – Tangram



Os *applets* apresentados nas figuras 45 à 50 envolvem análise e interpretação de situações problemas reais, proporcionando ao estudante uma vivência onde se utiliza a teoria estudada.

Figura 45 – Situação problema 1

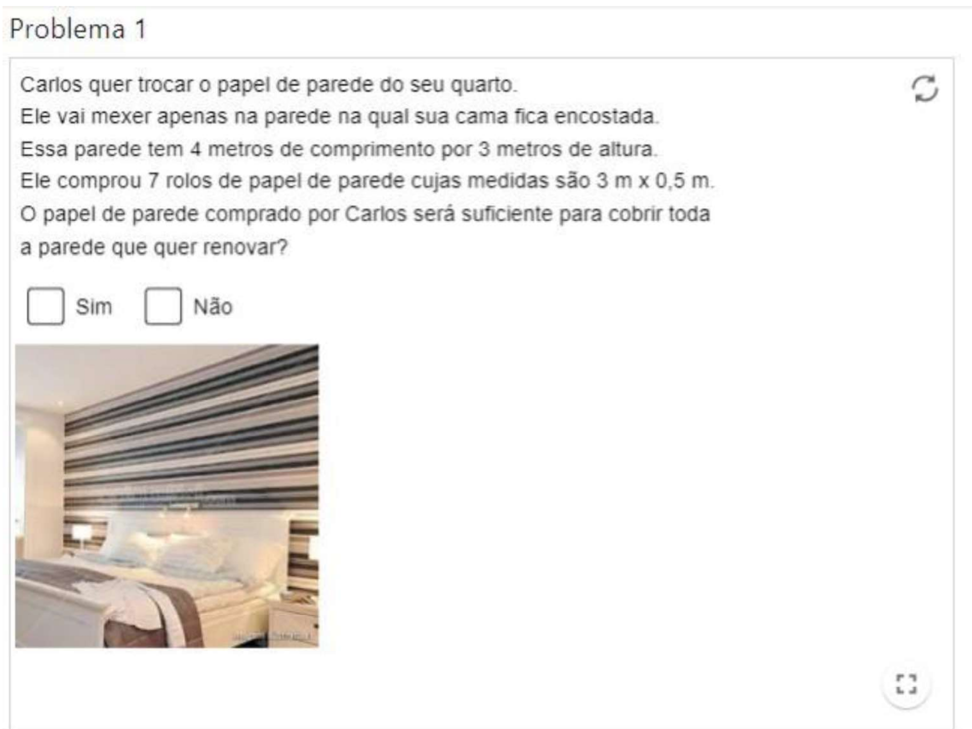


Figura 46 – Situação problema 2

Problema 2

Terreno não se limpa sozinho!
É claro que não, e se o terreno fica em uma via de pouco tráfego, o mato serve como esconderijo para mal intensionados, pois podem insvestir contra pessoas que por ali passam. Se o terreno fica em uma via bem movimentada, o problema maior é a estética do local que fica comprometida, prejudicando o comércio da região. Para impedir o descuido com a cidade, o proprietário é responsável pela limpeza do seu terreno, e a prefeitura aplica multa à quem descumprir com a obrigação.
Senhor José trabalha carpindo terrenos, ele cobra R$ 30,00 para cada área equivalente à 100 m². Um cliente ligou pedindo o custo para a limpeza de um terreno retangular, de esquina, com medias iguais à 12 x 25 m. Quanto o senhor José deve cobrar por esse trabalho, seguindo seu preço padrão?

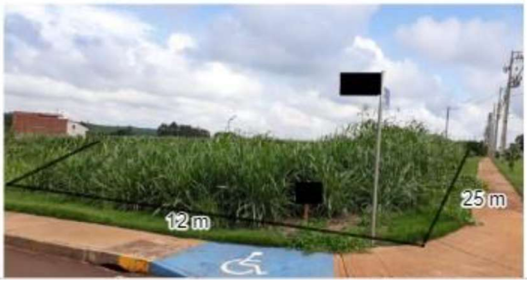


Figura 47 – Situação problema 3

Problema 3

Beatriz vai trocar o azulejo da piscina de sua casa. O azulegista que ela contratou cobrou R$ 100,00 por metro quadrado. Ela ainda terá que comprar o azulejo e o rejunte colante para piscina. O azulejo que ela irá comprar custa R$ 120 cada m² e o rejunte custa R$ 150,00 um pacote de 5 kg, suficientes para cobrir uma área de 1 m². Considerando que as medidas da piscina de Beatriz são: 3 m de largura por 10 m de comprimento por 1,6 m de profundidade. Quanto Beatriz gastará na troca do azulejo?

- [ ] R$ 19.812.00
- [ ] R$ 24.344.00
- [ ] R$ 25.776.00
- [ ] R$ 26.492.00

Figura 48 – Situação problema 4

Problema 4

Tia Nilva tem em seu sítio um galpão para criação de galinhas no sistema semicaipira.
O galpão mede 10 x 50 m, sendo que 50 m² são reservados para passagem e instalação de bebedouros e comedouros. A densidade aplicada na criação é de 5 galinhas / m². O galpão está com sua capacidade máxima, conforme as especificações citadas.
Quantas Galinhas há no galpão?

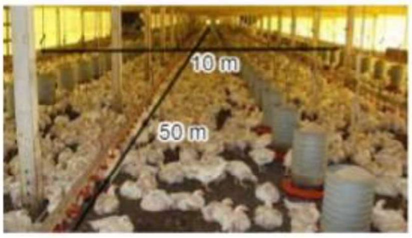


Figura 49 – Situação problema 5

Problema 5

Beatriz está reformando sua casa. Ela trocou a janela retangular da sala de equipamentos esportivos por uma janela triangular. Ela ligou na vidraçaria e passou as dimensões da janela para orçar o valor e fazer a encomenda. Eles disseram que o valor é cobrado por m² de vidro, e depende também do tipo de vidro escolhido. O valor do m² do vido escolhido por Beatriz é R$ 350,00. Quanto Beatriz deverá pagar pelo vidro da janela?
As dimensões em m estão especificadas na imagem.

R$

Figura 50 – Situação problema 6

Este livro foi planejado pensando em agilizar o trabalho docente, com a possibilidade de apresentar vários exemplos com uma menor utilização do tempo, isso também contribui para o aumento da experiência do educando sobre o assunto. Outro fundamento na estruturação do livro foi a possibilidade da prática independete por parte do estudante, com fornecimento de feedbacks quando o mesmo responder a alguma questão incorretamente, esse método de tentativa, erro, orientação, análise, nova tentativa e acerto, constrói no estudante o sentimento de que é possível conseguir mesmo não estando o professor sempre junto, fazendo com que o professor torne-se mediador do conhecimento a partir do ensinamento do caminho a ser seguido.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante das pesquisas apresentadas nesta dissertação fica evidente, a importância do raciocínio matemático para o desenvolvimento de capacidades essenciais para a compreensão de deveres e o reconhecimento do objetivo que conduz a realização destes. O raciocínio também capacita o cidadão à diferenciar deveres e direitos, e a apresentar argumentos que propiciem o recebimento dos seus direitos.

Para que haja o desenvolvimento do raciocínio matemático é preciso estudar a Matemática e albergar conhecimento em cada nível estudado, considerando sempre que a compreensão do raciocínio anterior contribui para a construção de um raciocínio posterior. O entendimento dos conteúdos é melhor desenvolvido quando trabalhado com experimentação, que pode acontecer com material concreto ou aplicativos dinâmicos que permitam isso.

É importante considerar que a pandemia acarretou um aumento na jornada de trabalho do professor, e uma redução do nível de compreensão dos conteúdos matemáticos pelos estudantes, o que fez com que os professores buscassem por alternativas para chamar a atenção e promover a interação do estudante em sala de aula.

O GeoGebra mostra-se eficiente no ensino de geometria para estudantes da educação básica, facilitando o entendimento das fórmulas e permitindo a execução de ações e análise de consequências, bem como a interação dos estudantes e discussão sobre os resultados.

Foi possível perceber, à partir das pesquisas estudadas neste trabalho, a falta de preparo dos professores para trabalharem com o GeoGebra, considerando sua influência na aprendizagem dos estudantes é interessante que as secretarias de educação forneçam capacitação específica para professores, fomentando assim a adoção do *software* pelos docentes.

Esta pesquisa possibilitou a elaboração de uma coleção de atividades interativas no GeoGebra, que auxilie o professor do ensino fundamental a fazer as demonstrações das fórmulas usadas no cálculo da área de polígonos, tal construção está apresentada nos resultados da pesquisa, atendendo ao proposto como objetivo principal deste trabalho.

O desenvolvimento deste trabalho mudou a nossa forma de compreender e utilizar o GeoGebra, se temos uma ideia de apresentação diferenciada de conteúdo, logo pensamos numa maneira de desenvolver com o *software*. Reconhecemos que muitos trabalhos podem ser desenvolvidos em diversas áreas, cada um fornecendo um tipo diferente de aplicação, ou em áreas diferentes da Matemática, uns com orientação específica para programação no GeoGebra, outros fazendo levantamento da frequência de pesquisas sobre o tema e a influência na possível mudança no perfil dos professores. Esperamos com este trabalho, incentivar os leitores a tentar, experimentar, errar, insistir e acertar.

Por fim, fica a sugestão para os mantenedores educacionais fornecerem cursos para utilização do *software* GeoGebra, bem como, promoverem incentivo à adoção de tecnologias para o ensino da matemática e à publicação de materiais colaborativos e instrutivos.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana Plana*. [S.I.]: SBM, 1984.

BICUDO, I. Platão e a matemática. *Letras Clássicas*, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, n. 2, p. 301–315, 1998.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* Trad. Elza F. Gomide. Campinas-SP: UNICAMP, 2021.

BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais:* matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. *O computador na sociedade do conhecimento*. Secretaria de educação à distância. Brasília: Ministério da Educação, 1998.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília-DF: Ministério da Educação, 2018. 600 p.

CHARNEI, M. Dificuldade de aprendizagem do cálculo de área de figuras planas retangulares: uma possibilidade através do geogebra. *WCBIE*, UNESPAR, p. 623–632, 2019.

COSTA, S. d. S. Pandemia e desemprego no brasil. *Revista de Administração Pública*, v. 54, n. 4, p. 969–978, 2020.

CÁSSIO, J. *Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma GeoGebra - 2019*. [S.I.]: GeoGebra, 2019.

CÁSSIO, J. *Como criar um botão no GeoGebra.* 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=zA0gdmBKJpQ&t=23s>. Acesso em: 03 mar. 2021.

CÁSSIO, J. *Como fazer uma atividade com feedback automático no GeoGebra?* 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=8PX8K7iyJ9o&t=5s>. Acesso em: 09 mar. 2021.

CÁSSIO, J. *Curso de GeoGebra*. 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/Ywtj4ejx>. Disponível em: 07 mar. 2021.

D'ACAMPORA, R. Quadraturas e partições de superfícies planas utilizando o software tabulae. UFSC, p. 60, 2005.

D'AMBROSIO, U. *A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática*. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectiva. São Paulo: UNESP, 1999.

DARIO, D. F. *Geometrias não euclidianas:* elíptica e hiperbólica no ensino médio. 2014. 57f. Dissertação (Mestre em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Pato Branco, Pato Branco, Paraná, Brasil, 2014.

EVES, H. *Introdução à história da matemática.* 5. ed. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP.: Ed. da UNICAMP, 2011.

FERREIRA, A. B. d. H. *Miniaurélio: o minidicionário da língua portuguesa*. Curitiba-PR: Positivo, 2008.

FERREIRA, L. A. et al. Ensino de matemática e covid-19: práticas docentes durante o ensino remoto. *Em teia*, EDUMATEC, v. 11, n. 2, p. 15, 2020.

GEOGEBRA. *O que é o GeoGebra?* 2021. Disponível em: <https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT#:~:text=GeoGebra%20%C3%A9%20uma%20comunidade%20em,aprendizagem%20em%20todo%20o%20mundo>. Acesso em: 26 fev. 2021.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa.* 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GOMES, T. d. A.; RODRIGUES, C. K. A evolução das tendências da educação matemática e o enfoque da história da matemática no ensino. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, v. 4, n. 3, p. 57–67, 2014.

GUEDES, A. d. S. Evolução no cálculo de áreas de figuras planas: de arquimedes a newton. PROFMAT, p. 77, 2013.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. *Metodologia científica.* 2. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

LEVY, P. *Cibercultura*. Trad. Carlos Irineu da Costa. São Paulo: Editora 34, 2010.

LIMA, E. L. *Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança*. [S.l.]: GRAFITEX Comunicação visual, 1991.

LIMA, E. L. Qual é a soma dos ângulos (internos ou externos) de um polígono (convexo ou não)? *RPM*, IMPA, n. 19, p. 6, 2010.

LIMA, M. E.; MENEZES JUNIOR, A. d. S.; BRZEZINSKI, I. Cidadania: sentidos e significados. (SIPD/CÁTEDRA UNESCO), p. 28–31, 2017.

MARQUES, P. P. M. d. R.; ESQUINCALHA, A. d. C. Desafios de se ensinar matemática remotamente: os impactos da pandemia covid-19 na rotina de professores. *Edição Virtual*, SBEM-RJ, p. 10, 2020.

MARTINEZ, M. L. S.; NOVELLO, T. P. Uma proposta para o ensino de geometria na educação básica. *VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática*, ULBRA, p. 13, 2013.

MARTINS, N. L. Classificação e partição de polígonos simples. Universidade de Aveiro, p. 145, 2005.

MENESES, C. N. d. Partição retangular mínima de um retângulo com pontos no interior: uma abordagem em programação linear inteira. UNICAMP, p. 106, 1997.

NÓBRIGA, J. C. C.; DANTAS, S. C. Uma proposta de atividade com feedbacks automáticos no geogebra. 2021. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/12755>. Acesso em: 06 abr. 2021.

NOGUEIRA, E. B. Uso do software geogebra no ensino da geometria analítica: equação da reta e equação da circunferência. PROFMAT-UESB, p. 110, 2020.

ORANGE, C. B. G. P. R. et al. Os softwares como ferramenta auxiliadora no processo de ensino aprendizagem da matemática. Universidade Federal da Paraíba - UFPB, p. 9, 2018.

PAVANELLO, R. M. Por que ensinar / aprender geometria? *Universidade Estadual de Maringá*, p. 6, 2012.

PROGRAMA DÁ LICENÇA. *Live - GeoGebra e ensino remoto de matemática*. 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=rjiD-XgaQZ0&t=371s>. Acesso em: 09 maio 2021.

PROGRAMA DÁ LICENÇA. *Oficina - Programando Objetos no GeoGebra*. 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=a1oSyr1qEI0&t=1265s>. Acesso em: 09 maio 2021.

ROCHO, V. d. R. et al. *(Orgs.). História da matemática: e-book - como surgiram alguns conceitos matemáticos*. Sombrio-SC: Instituto Federal Catarinense, 2018.

SANTOS FILHO, J. C. dos; GAMBOA, S. S. *Pesquisa educacional:* quantidade-qualidade. São Paulo: Cortez, 2017.

SILVA, E. F. d. Cálculo de área e perímetro das principais figuras planas: discutindo a adequação de exercícios e problemas para o geogebra. Universidade Federal do Paraíba, p. 67, 2013.

SILVA, R. F. d.; CORREA, E. S. Novas tecnologias e educação: a evolução do processo de ensino e aprendizagem na sociedade contemporânea. Educação e Linguagem, v. 1, n. 1, p. 23–35, 2014.

SILVA, R. L.; ALMEIDA, R. L. d. S. A fantástica sequência de fibonacci e o enigmático número de ouro: contexto histórico, definições, propriedades e aplicações. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, v. 18, p. 12, 2020.

SILVA, R. M. d.; GOMES, D. A. A.; PIAI, M. A. L. A matemática como instrumento para o desenvolvimento humano e emancipação social. SBEM, 2016.

VALENCIA, A. F. Tecnologia e educação matemática em tempos de pandemia. Olhar de professor, v. 23, p. 4, 2020.

VALENTE, J. A. Por quê o computador na educação? Governo do Paraná, p. 25, 1993.

VANZELLA, E.; MONTEIRO, R. *Educação sem Fronteiras*. João Pessoa - PB: Ed. do CCTA, 2020.

VOGT, M. *Pitágoras, Heron, Brahmagupta – fórmulas; provas; áreas; aplicações*. UFSC, p. 55, 2004.

WERNECK, G. L.; CARVALHO, M. S. A pandemia de covid-19 no brasil: crônica de uma crise sanitária anunciada. *Cad. Saúde Pública*, v. 36, n. 5, p. e00068820, 2020.