UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

Sequências didáticas para o ensino de progressões geométricas e probabilidade: explorando problemas motivadores no ensino médio

Diogo Sérgio Borges

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Sequências didáticas para o ensino de progressões geométricas e probabilidade: explorando problemas motivadores no ensino médio

Diogo Sérgio Borges

Sob a Orientação do Professor
Montauban Moreira de Oliveira Júnior

Dissertação submetida como requisito parcial para a aprovação no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ
Agosto de 2021

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Borges, Diogo Sérgio, 1987-
B732s   Sequências didáticas para o ensino de progressões geométricas e probabilidade: explorando problemas motivadores no ensino médio / Diogo Sérgio Borges. - Seropédica, 2021.
67 f.

Orientador: Montauban Moreira de Oliveira Júnior.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT, 2021.

1. Sequências didáticas. 2. Ensino de progressões geométricas e probabilidade. 3. Motivação. 4. Problemas motivadores. 5. Ensino médio. I. Moreira de Oliveira Júnior, Montauban, 1981-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

DIOGO SÉRGIO BORGES

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção de grau de **Mestre**, no Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 23/08/2021

Conforme deliberação número 001/2020 da PROPPG, de 30/06/2020, tendo em vista a implementação de trabalho remoto e durante a vigência do período de suspensão das atividades acadêmicas presenciais, em virtude das medidas adotadas para reduzir a propagação da pandemia de Covid-19, nas versões finais das teses e dissertações as assinaturas originais dos membros da banca examinadora poderão ser substituídas por documento(s) com assinaturas eletrônicas. Estas devem ser feitas na própria folha de assinaturas, através do SIPAC, ou do Sistema Eletrônico de Informações (SEI) e neste caso a folha com a assinatura deve constar como anexo ao final da tese / dissertação.

Montauban Moreira de Oliveira Júnior. Dr. UFRRJ (Orientador, Presidente da Banca)

Aline Maurício Barbosa. Dr.ª UFRRJ

Gladson Octaviano Antunes. Dr. UNIRIO

A Deus, família e amigos, que são fundamentais em minha vida!

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, criador de todas as coisas, pois em tudo percebo grandiosidade e perfeição. À minha mãe e ao meu avô, por terem se dedicado à minha criação no caminho correto. À minha esposa Juliana, que sempre esteve ao meu lado me incentivando, além do apoio emocional essencial nesse desafio. Aos professores Orlando, Luciano, Cláudio, Leandro, Andrea, Aline, Eulina, Douglas e André que me ensinaram e motivaram a estar sempre me aperfeiçoando como profissional. A meu professor e orientador Montauban, pela atenção e constante estímulo para eu desenvolver esta dissertação. Aos meus colegas e amigos Anderson, Deny, Gabriel, Henrique, Jefferson, Jonas, Maicon, Marcílio, Matheus, Ronald e Vitor, que sempre me ajudaram.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001.

RESUMO

BORGES, Diogo Sérgio. **Sequências didáticas para o ensino de progressões geométricas e probabilidade: explorando problemas motivadores no ensino médio. 2021.** – 67 páginas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2021.

O objetivo deste trabalho é apresentar um conjunto de atividades para o ensino de progressões geométricas e probabilidades de forma detalhada (sequências didáticas), começando e entremeando as etapas de ensino com uma coleção de problemas curiosos e instigantes, de maneira a manter a atenção e o interesse dos alunos do ensino médio. Este trabalho defende que a motivação é a ferramenta fundamental para que o aluno volte sua atenção e suas energias para a aula, e que a utilização de um problema motivador no momento certo da aula pode fazer a provocação necessária para que o discente dê uma chance ao que está sendo apresentado. O tutorial ensinado mostra como inserir problemas tradicionalmente motivadores como o problema da mesada, o paradoxo de Zenão, o problema dos aniversários e outros vários numa aula de forma que sejam pontos de atração para os assuntos ministrados. Recursos como o LibreOffice e páginas da web também complementam as ferramentas motivadoras utilizadas nas aulas.

Palavras-chave: motivação, probabilidades, progressões geométricas, ensino médio.

ABSTRACT

BORGES, Diogo Sérgio. **Didactic sequences for teaching geometric progressions and probability: exploring motivating problems in high school. 2021.** – 67 pages. Dissertation (Professional Master in Mathematics in National Network -PROFMAT). Institute of Exact Sciences, Federal Rural University of Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2021.

The objective of this work is to present a set of activities for teaching geometric progressions and probabilities in detail (didactic sequences), starting and interweaving the teaching steps with a collection of curious and thought-provoking problems, in order to maintain attention and interest of high school students. This work argues that motivation is the fundamental tool for the student to turn their attention and energy to the class, and that the use of a motivating problem at the right time in class can provoke the necessary provocation so that the student gives a chance to what is being presented. The taught tutorial shows how to insert traditionally motivating problems such as the allowance problem, the Zenão paradox, the birthday problem and several others into a class so that they are points of attraction for the subjects taught. Features such as LibreOffice and web pages also complement the motivating tools used in classes.

Keywords: motivation, probabilities, geometric progressions, high school.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é um produto educacional que propõe sequências didáticas para o ensino de progressões geométricas e de probabilidades com problemas que podem ser interessantes por estarem relacionados a resultados que tradicionalmente não são os esperados, aguçando a curiosidade e desafiando os alunos. O princípio é o mesmo de um espetáculo de mágica: depois de um bom número, o público quer saber o que há por trás da façanha. O educando também quer saber o que há por trás da solução inesperada, estranha e correta dada pelo professor, e então, por meio dessa estratégia, a empatia e a atenção do educando são conquistados. Neste momento, a matemática deixa de ser chata e passa a ser interessante.

Um dos grandes desafios dos professores é atrair a atenção dos alunos para o que está sendo ensinado em sala de aula. A quantidade de informações simultâneas que bombardeiam os jovens de hoje cria um conjunto grande de pensamentos que competem com o interesse pela disciplina ensinada. Por essa razão, cada vez mais a escolha do método de ensino e do conjunto de problemas que será apresentado tem que ser muito bem pensada. Um método antiquado, em que os alunos atuam passivamente e não têm sua curiosidade instigada, pode fazer com que a aula se torne uma obrigação. Ao mesmo tempo, um conjunto de problemas desinteressantes, sem interseção com a realidade, sem uma quebra de paradigma ou sem um bom desafio pode perder espaço rapidamente para outros pensamentos.

Progressões geométricas são um assunto relevante no ensino médio, e de onde podem ser obtidas características interessantes sobre crescimento e decrescimento intensos, sobretudo quando comparados aos correspondentes das progressões aritméticas. A intensidade dos crescimentos normalmente é subaproveitada pelos professores; no entanto, quando postas em destaque, podem trazer elementos importantes para uma boa aula.

O ensino de probabilidade é desafiador, pois muitas vezes requer conhecimento em análise combinatória, que por sua vez é uma disciplina que tradicionalmente exige bastante da atenção e da dedicação do aluno. Por outro lado, a mesma apresenta diversos problemas em que a complexidade em si é uma atração, e pode ser explorada como tal.

Além de um tutorial para uso de problemas instigantes, este trabalho apresenta sugestões de atividades usando o LibreOffice, um excelente pacote de aplicativos (e uma alternativa gratuita ao Microsoft Office), que pode ser um elemento de motivação, trazendo os alunos do quadro-negro para as telas, que estão muito presentes em seu cotidiano.

Este trabalho foi inspirado em problemas como o do jogo de xadrez contido no capítulo XVI do livro “O homem que Calculava” de Júlio César de Mello e Souza (TAHAN, 2016).

O objetivo deste trabalho é mostrar um conjunto de atividades para o ensino de progressões geométricas e probabilidades de forma detalhada, por meio de sequências didáticas, enriquecendo as etapas de ensino com problemas curiosos e instigantes, aguçando a atenção e o interesse dos alunos do ensino médio. O trabalho sugere situações que buscam mitigar a monotonia das aulas com problemas desafiadores que atraem a atenção e impressionam, consequentemente promovendo a participação e o envolvimento dos alunos no instante da apresentação desses, para, motivados, obterem seus melhores rendimentos nas aulas.

Este trabalho foi organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 foi tratada a importância da motivação dos alunos no ensino de matemática e sobre o ensino de progressões geométricas e probabilidade, tendo como documento normativo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). No capítulo 3 consta os problemas motivadores que foram inspirados, ou adaptados ou retirados na íntegra de outros problemas citados neste, contando com ótimos recursos multimídia e que serão abordados no capítulo 4. E, no capítulo 4, estão as sequências didáticas, objetos principais deste trabalho, contando com roteiros que buscam estimular, encorajar, desafiar os alunos.

2 A IMPORTÂNCIA DA MOTIVAÇÃO DOS ALUNOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA E O ENSINO DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS E PROBABILIDADE NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC).

2.1 MOTIVAÇÃO

A motivação é o que nos impele à ação; especificamente nas situações abordadas neste trabalho, ela impulsiona os alunos ao aprendizado de matemática, através de problemas que os fazem questionar o porquê de resultados surpreendentes. Por esta razão, é necessário um estudo um pouco mais aprofundado sobre a mesma.

“Motivação é o ato ou efeito de motivar, e deriva do latim *movere*, que dá a ideia de movimento, isto é, os motivos ou razões que estimulando ou incentivando movem a pessoa a determinada ação para atingir um objetivo”. (MAXIMIANO, 2003, p. 267) Esse “mover” pode ser entendido como uma força ou energia interna latente, aguardando os motivos para ser acionada e utilizada. Assim, o processo de motivação consiste na busca das razões, dos porquês que poderão ser utilizados para despertar o interesse do sujeito, ativando forças internas que funcionarão como um motor, que o colocará em movimento para atingir um propósito. Um exercício que pode ser proposto a partir do que foi dito é o de imaginar-se atingindo o objetivo. Por exemplo, quando o objetivo for atingir o cume de uma montanha, imaginar-se no topo durante o trajeto. Essa satisfação será responsável por mobilizar energia para atingir o cume da montanha. Tal entendimento é baseado nas ideias mostradas através de uma pesquisa sobre o tema:

> […] a motivação representaria "um fator interno que dá inicio, dirige e integra o comportamento de uma pessoa". Esta perspectiva que relaciona a motivação com uma energia interna é também defendida por outros teóricos. […] "os motivos ativam e despertam o organismo, dirigem-no para um alvo em particular e mantém o organismo em ação". […] a motivação é um processo psicológico, uma força que tem origem no interior do sujeito e

> que o impulsiona a uma ação. […] a motivação é “tudo o que desperta, dirige e condiciona a conduta. (LOURENÇO; ALMEIDA DE PAIVA, 2010, p. 133)

O estudo sobre motivação é relevante para os professores, visto que um dos objetivos em qualquer aula é criar um ambiente de interesse dos alunos pelo assunto em pauta. Assim, Alcará e Guimarães (2007 apud LOURENÇO; ALMEIDA DE PAIVA, 2010, p. 133) orientam que:

> No contexto educacional a motivação dos alunos é um importante desafio com que nos devemos confrontar, pois tem implicações diretas na qualidade do envolvimento do aluno com o processo de ensino e aprendizagem. O aluno motivado procura novos conhecimentos e oportunidades, evidenciando envolvimento com o processo de aprendizagem, participa nas tarefas com entusiasmo e revela disposição para novos desafios.

Uma teoria bastante interessante apontada por Boruchovitch (2009 apud LOURENÇO; ALMEIDA DE PAIVA, 2010, p. 134) aborda a motivação intrínseca e a extrínseca:

> O aluno intrinsecamente motivado concretiza a tarefa apenas pelo prazer, porque se interessa por ela e se satisfaz verdadeiramente com a atividade em si. No caso do aluno extrinsecamente motivado realiza-a por causas externas, nomeadamente o receio de punições, o anseio de reconhecimento e de obtenção de compensações, ou ainda por reconhecê-la como necessária, embora não seja do seu agrado.

O anseio de reconhecimento é uma necessidade real, tendo em vista que as pessoas muitas vezes gostam de se sentir importantes. Assim sendo, a congratulação pelo engajamento da turma na realização das tarefas pode ser um estímulo para que os alunos continuem se esforçando. A conscientização da necessidade de estudar determinado assunto também pode ser importante para incentivar o aluno ao aprendizado. Nesse sentido, o professor poderá, na introdução do tema, discorrer sobre a relevância do estudo em questão.

A satisfação na resolução de uma questão empodera e anima o estudante. Mas é preciso esforço por parte do mesmo, saber aceitar os erros e não desanimar, o que não observamos algumas vezes; há casos em que, na primeira tentativa, já há uma fuga, impedindo o seu crescimento. É importante combater esse pessimismo e fortalecer a confiança deles em si mesmos, convencendo-os de que os que alcançam a glória são aqueles que treinam de forma perseverante, pois estão seguros em si mesmos que conseguiriam alcançar a meta estabelecida. Esse trabalho motivacional é de grande valia para o sucesso escolar. Os tipos de alunos podem ser observados conforme apontamento de Martini (2008 apud LOURENÇO; ALMEIDA DE PAIVA, 2010, p. 135):

> Da revisão da literatura constata-se uma distinção entre dois grupos de alunos: (i) o que se empenha tendo como principal finalidade aprender; e (ii) o que procura obter boas qualificações, reputação, além de, em certos casos, evitar castigos. Os alunos que se enquadram no primeiro grupo são os que definem metas de aprendizagem, tendo como resultado um bom desempenho, boas notas e motivação. Comumente esses alunos revelam maior abertura às correções e não se frustram facilmente. Os alunos cuja única preocupação são os resultados concretos e aparentes, quando têm uma classificação baixa ou não observam, de imediato, o sucesso na aprendizagem, ficam frustrados e não extraem algo de positivo com essa experiência, desmotivando-os.

Alunos desinteressados e conteúdos que são expostos durante a aula de uma forma maquinal podem ser a grande realidade em muitas escolas. Isso, aliado ao fato de que a matemática muitas vezes já tem uma imagem associada ao que não traz prazer, torna tudo mais difícil. Diante disso, urge buscar meios de despertar os discentes para a importância da matemática em sua formação profissional. Um educando que se sinta desafiado e conteúdos apresentados de uma forma que possibilitem a participação ativa dos alunos em sala de aula deveriam ser objetivos a serem buscados. Assim, é preciso buscar meios de motivar os discentes para o ensino da matemática. Nesse sentido Posamentier e Krulik (2014) ressaltam detalhes importantes:

> Professores de matemática do ensino médio são sempre desafiados a encontrar maneiras de motivar as suas aulas. Infelizmente, há na sociedade

> um desprazer com o estudo da matemática que – é lamentável – contagia os alunos na escola. Uma das melhores formas de combater esse efeito sobre a educação de nossos jovens é motivá-los para essa disciplina. Que maneira melhor de fazer isso do que dotar de sentido o ensino matemático que eles recebem, começando, assim, com um aluno motivado? (POSAMENTIER; KRULIK, 2014, p. 20)

Para alcançar essa meta de reconhecimento dos benefícios que o conhecimento da matemática traz para a sociedade é imprescindível romper com essa forma maçante de aprendizagem em que o professor, detentor do conhecimento, transmite o conteúdo ao aluno, o qual fica somente na posição de recepção do conhecimento, anulando seu papel colaborativo em sala de aula. Convocar e instigar os alunos à participação e construção das aulas é fundamental para o sucesso escolar, conforme destaca os PCN+:

> […] deve-se provocar a motivação do aluno, ou seja, criar situações de desequilíbrio para despertar o interesse. Para que isso ocorra, invariavelmente o professor deve propor situações-problema, desafios e questões instigantes.(BRASIL, 2006, p. 55)

Assim, pode ser uma boa estratégia para os professores de matemática buscar e criar materiais envolvendo alguns problemas matemáticos que, quando apresentados aos alunos, propiciem o interesse através da curiosidade dos resultados inesperados, movendo-os da inércia habitual em sala de aula, ou seja, motivando-os à participação em sala de aula. De acordo, Posamentier e Krulik (2014, p. 16), afirmam que: “motivar alunos é canalizar os seus interesses para o tema específico a ser aprendido.”

Os problemas matemáticos vestidos com uma narrativa, trazendo conhecimento de outras culturas ou situações que apresentem um ar de mistério são boas alternativas para o início de uma aula instigante e participativa. E também há o uso da tecnologia como recurso à conquista da atenção dos discentes. Assim, Posamentier e Krulik (2014), orientam que:

> Dar uma aula eficaz deve ser o objetivo de todos os professores, todos os dias. Isso representa um desafio especial para o professor de matemática e um desafio a mais para o professor do ensino médio, em cujas classes há alunos não muito animados com o conteúdo. Os estudantes precisam de uma aula emocionante, que seja pensada com cuidado e elaborada adequadamente para cada turma. O início de uma aula, que não apenas dá o tom, mas também pode garantir que os alunos sejam receptivos ao conteúdo que virá, é um dos desafios mais desconcertantes, principalmente para os professores novos: como despertar o interesse dos alunos por aquela aula. (POSAMENTIER; KRULIK, 2014, p. 15)

A resolução de problemas é uma técnica de ensino muito importante, visto o sentido que dá às questões matemáticas. Os problemas permitem um envolvimento do educando nas questões propostas, pois eles encarnam os personagens da narrativa e se sentem desafiados a resolução dessas questões. Como em uma novela, onde o público se identifica, admira ou crítica, os discentes se sentem provocados pelos problemas. Os PCN enfatizam que:

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 2000, p. 52)

O professor poderá apresentar o problema conduzindo os alunos a um momento de expectativa de solução; nesse momento, o educador poderá questionar o aluno sobre sua resolução, semelhantemente à “maiêutica” de Sócrates:

> E em que consiste a maiêutica socrática? Consiste em ajudar o outro a obter seus próprios conhecimentos, por meio de perguntas. Assim, um escravo, protagonista do diálogo platônico Ménon, consegue resolver o teorema de Pitágoras sem ter nenhuma noção prévia de Matemática.O que fez Sócrates? Ajudou o escravo a construir o próprio conhecimento. O docente deve perguntar, indagar, conduzir o processo, e não impor verticalmente suas verdades. A maiêutica, arte do parteiro do conhecimento,

> estabelece um método ativo e participativo na Educação. O mestre não transmite saberes; ajuda a procurá-los, a construí-los. A relação dialógica socrática mostra que docente e discente aprendem juntos, na prática de ensino/aprendizagem. A Educação é um caminho de mão dupla: educando, nos educamos; somos docentes/discentes ou discentes/docentes. (FREITAS; BARRENECHEA, 2012, p. 31)

E então os discentes se sentirão desafiados e instigados a encontrar a resposta da questão. Dessa forma, as aulas expositivas poderão ser menos entediantes, o que vai de encontro ao que diz os PCN:

> Quanto às aulas expositivas, é comum que sejam o único meio utilizado, ao mesmo tempo em que deixam a ideia de que correspondem a uma técnica pedagógica sempre cansativa e desinteressante. Não precisa ser assim. A aula expositiva é só um dos muitos meios e deve ser o momento do diálogo, do exercício da criatividade e do trabalho coletivo de elaboração do conhecimento. Através dessa técnica podemos, por exemplo, fornecer informações preparatórias para um debate, jogo ou outra atividade em classe, análise e interpretação dos dados coletados nos estudos do meio e laboratório. (BRASIL, 2000, p. 53)

Após este início motivador, em que o professor conseguiu despertar um princípio de interesse do aluno pela matemática utilizando problemas que o instiguem, o decorrer das aulas poderão ser muito mais proveitosas. Desse modo, Posamentier e Krulik (2014) esclarecem:

> Para muitos professores, motivar alunos para aprender matemática é a principal preocupação ao se prepararem para dar uma aula. Os alunos que passam a ser interessados e receptivos tornam o resto do processo de ensino mais fácil e muitíssimo mais eficaz. (POSAMENTIER; KRULIK, 2014, p. 16)

Muitas vezes o aluno gosta de ser instigado pela curiosidade e de ser desafiado. O professor tem o papel de ajudá-lo a desenvolver seu potencial matemático e assim corroborar na sua formação profissional e na formação de um cidadão crítico. Nesse intento, Posamentier e Krulik (2014, p. 17) destacam que: “a tarefa do professor é entender as motivações básicas já presentes nos alunos e capitalizar a partir delas.”

Uma estratégia interessante na apresentação de conteúdos considerados complexos pelos alunos é partir de um exemplo simples, algo conhecido, e então introduzir uma atividade mais trabalhosa que utilize do mesmo raciocínio do anterior. Isso provocará o discente, que sentirá um empoderamento, pois possui um recurso muito forte para solucionar questões antes consideradas dificílimas. Posamentier e Krulik (2014) apontam que:

> Os alunos geralmente têm um desejo natural de completar o seu conhecimento de um tema. Esta técnica motivacional implica conscientizá-los a respeito de uma lacuna em seu conhecimento, capitalizando o seu desejo de aprender mais. Por exemplo, você pode apresentar alguns exercícios simples com situações conhecidas, seguidos de outros que envolvam situações desconhecidas sobre o mesmo tema. Ou pode falar (ou demonstrar) à turma como o tema a ser apresentado complementará os seus conhecimentos sobre uma determinada parte da matemática. Quanto mais intensamente você fizer isso, mais eficaz será a motivação. Orientar os alunos a descobrir essa lacuna de conhecimento por conta própria é mais eficaz. (POSAMENTIER; KRULIK, 2014, p. 18)

A curiosidade pode ser o primeiro passo no aprendizado, e deve ser estimulada pelo professor através de problemas que impressionam pelos resultados inesperados; sobre essa tema Posamentier e Krulik (2014) esclarecem que:

> Resultados inesperados muitas vezes intrigam os alunos e estimulam a sua curiosidade. Para motivar a crença básica na probabilidade, por exemplo, discuta com a turma o famoso “problema dos aniversários”. O seu resultado impressionante (e, ousamos dizer, inacreditável) deixará a turma perplexa e ansiosa para fazer um estudo mais aprofundado sobre probabilidade. (POSAMENTIER; KRULIK, 2014, p. 18)

Logo, o estudo da motivação e de como despertá-la no aluno é de suma importância para o ensino, especificamente, neste trabalho, de progressões geométricas e probabilidade.

2.2 ENSINO DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS E PROBABILIDADE NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC).

A Base Nacional Comum Curricular é um documento normativo muito relevante para os professores, visto que orienta como o ensino de matemática deve acontecer ao longo da educação básica. Podemos observar especificamente que

> No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. (BRASIL, 2018, p. 473)

Assim, dentro dos novos conhecimentos que devem ser agregados pelos estudantes, concernente a progressões geométricas, a Base traz como habilidade a ser alcançada: “(EM13MAT508) identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.” (BRASIL, 2018, p. 543). E para tal, a parte da sequência didática referente a progressões geométricas traz o problema das vitórias-régias, associando progressões geométricas com funções exponenciais, além de tratar das propriedades, do passo a passo para dedução de algumas fórmulas de progressões geométricas e de como proceder para a resolução de problemas, buscando estar em consonância com a Base.

Também, em sintonia com as habilidades propostas pela Base, a parte da sequência didática que aborda o ensino de probabilidade trata sobre combinatória, por meio do princípio fundamental do cálculo deduzindo as fórmulas de permutação, arranjo e combinação para resolução de problemas envolvendo agrupamentos ordenados ou não de objetos, atendendo o que é proposto pela BNCC como habilidade:

> (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.(BRASIL, 2018, p. 539)

Foi detalhada, na parte da sequência didática de probabilidade, a contagem das possibilidades do espaço amostral e dos casos favoráveis para resolução do problema dos aniversários, em conformidade com a Base Nacional: “(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.”(BRASIL, 2018, p. 539)

Portanto, dada a importância da Base na prática pedagógica dos professores, as sequências didáticas propostas por este trabalho buscam atender o que a BNCC traz como habilidades a serem alcançadas pelos alunos em sua formação escolar.

3 PROBLEMAS MOTIVADORES

Neste capítulo são apresentados os problemas que estão presentes nas sequências didáticas (capítulo 4), trazendo materiais multimídias existentes na internet e em livros que inspiraram esses problemas, ou foram uma adaptação desses (como no problema da mesada), ou utilizados na íntegra, como no caso do problema dos aniversários

Eles foram propostos nas sequências didáticas porque trazem as questões matemáticas, seja através da narrativa de uma situação cotidiana ou mesmo da história verdadeira da origem do problema. Essa roupagem ou contextualização dos problemas mostra aos alunos como a matemática está presente em questões do dia a dia e não são abordadas somente no meio escolar ou em universidades. E, mais que isso, a partir destes podem ser sugeridos novos problemas.

Outro fator motivador é que esses materiais multimídia utilizam tecnologia muito conhecida e explorada pelos alunos e podem ser usados concomitantemente com as sequências didáticas, ou antes das aulas, como uma preparação do conteúdo que será abordado.

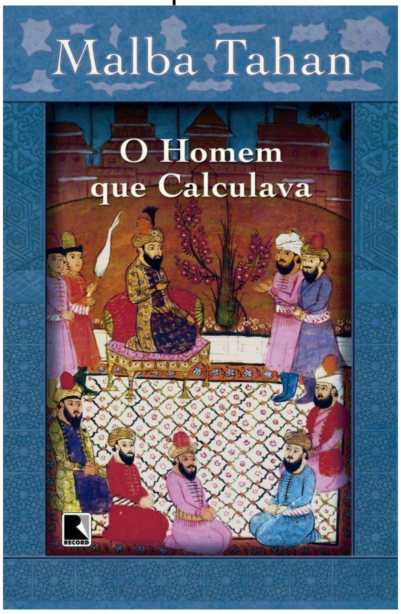
3.1 PROBLEMA DA MESADA

No Capítulo XVI do livro O Homem que Calculava (TAHAN, 2016, p. 114), é narrada a lenda sobre a origem do jogo de xadrez; essa história é contada de forma fluida, e contextualiza o uso da fórmula da soma dos primeiros termos de uma progressão geométrica, além de inspirar novos problemas semelhantes ao apresentado no livro. A figura 1 exibe uma capa do livro O Homem que Calculava.

Em resumo, Malba Tahan (2016) conta que em um reino distante um rei se encontrava muito triste pela perda de um filho, e então um homem muito sábio se sensibilizou e temendo pela ruína do reino inventou um jogo de tabuleiro dividido em sessenta e quatro casas iguais, onde cada jogador possui a mesma quantidade de peças e cada tipo de peça pode se deslocar de forma específica, exigindo dos jogadores estratégia e inteligência. Logo, o rei ficou muito feliz e grato pelo alívio de suas dores, oferecendo algo ao sábio que pediu um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois grãos pela segunda, quatro pela terceira e assim sucessivamente até a casa de número sessenta e quatro.

Assim, o problema da mesada é uma adaptação do problema presente na lenda do jogo de xadrez, referente a recompensa requerida pelo sábio ao rei. E, em ambos problemas, a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica é utilizada para resolvê-las.

Figura 1 - Capa do Livro - O Homem que Calculava



Fonte: https://www.record.com.br/wp-content/uploads/2019/06/13858-600x920.jpeg

Na coleção Matemática Multimídia da UNICAMP (https://m3.ime.unicamp.br) há recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio. Um desses recursos, intitulado “Pra lá de Bagdá” (BARICHELLO; NEHRING; W. PAQUES, [*s. d.*]), conta com um vídeo que aborda a lenda da origem do jogo de xadrez, introduzindo o ensino de progressões geométricas, seu termo geral e a soma dos seus termos, e também um Guia do Professor, aprofundando o conteúdo e sugerindo atividades para serem realizadas antes ou depois da exibição do vídeo. Esse vídeo também pode ser encontrado no YouTube através do endereço https://youtu.be/kHD6oy0RjpQ. Esse material motiva a atividade 1 das sequências didáticas, podendo ser utilizado concomitantemente durante a atividade.

Figura 2 - Trecho do vídeo "Pra lá de Bagdá" - Chaturanga

Fonte: http://data.avncloud.com/activities/222528/screenshots/chaturanga.jpg

3.2 PROBLEMA DAS VITÓRIAS-RÉGIAS

Há uma notícia no site G1 intitulada **Enigma da vitória-régia vira exemplo em vídeo que explica o que é o crescimento exponencial da pandemia** e que pode ser acessada através do endereço https://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/04/10/enigma-da-vitoria-regia-vira-exemplo-em-video-que-explica-o-que-e-o-crescimento-exponencial-da-pandemia.ghtml, a qual comenta sobre o vídeo https://youtu.be/s-lgS-4Xqy0 publicado no youtube do pesquisador brasileiro Maurício Féo.

Figura 3 - Imagem de apresentação do vídeo "Coronavírus e Vitórias-Régias: Entendendo..." no YouTube

Fonte: https://i.ytimg.com/vi/s-lgS-4Xqy0/maxresdefault.jpg

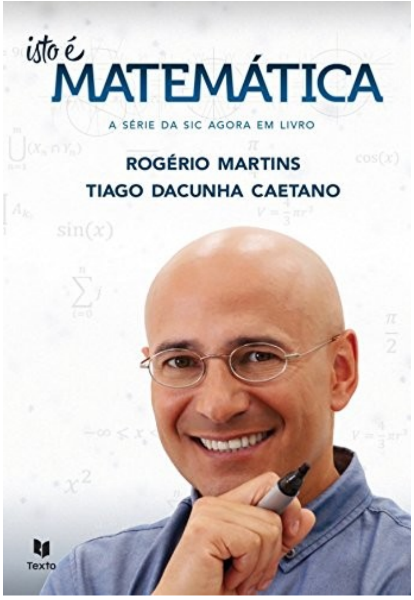
No vídeo que pode ser compartilhado com os alunos, a ideia de crescimento exponencial é abordada e explicada através do crescimento de vitórias-régias em um lago. Em resumo, o problema das vitórias-régias diz que em um lago há uma vitória-régia. E, a cada dia, cada vitória-régia se reproduz e gera outra vitória-régia. Se depois de 30 dias, toda a superfície do lago está coberta de vitórias-régias. Qual é o dia em que o lago teria metade da sua superfície coberta por vitórias-régias?

O interessante deste problema é que a ideia de crescimento exponencial é suficiente para sua resolução, percebendo que a quantidade de vitórias-régias do dia anterior é sempre metade do dia seguinte. Contudo, essa ideia de crescimento exponencial precisa ser trabalhada, pois muitos alunos tendem a responder esse problema baseando-se na ideia de crescimento aritmético.

3.3 IGUALDADE 0,999… = 1

No canal Isto é Matemática no YouTube há vídeos que pretendem, de maneira simples e realista, apresentar como a Matemática modela o que está ao nosso redor em grande parte da nossa vida. Promovido pela Sociedade Portuguesa de Matemática e Fundação Vodafone Portugal, apresentado por Rogério Martins, Matemático e Professor Universitário, escrito e encenado por Tiago DaCunha Caetano, realizado por Tiger da Silva e com Produção Sigma 3, o programa “Isto é Matemática” é difundido pela SIC Notícias e SIC Internacional.

Figura 4 - Capa do Livro -
Isto é Matemática



Fonte: https://m.media-amazon.com/images/I/51yj76w79kL.jpg

No vídeo https://youtu.be/3by2j7YO30o que pode ser compartilhado com os alunos, Rogério Martins explica de forma empolgante como a dízima periódica 0,999… é igual a 1. Ele enaltece a matemática como ciência, porque diferentemente de outras áreas em que é preciso utilizar de arte de bem falar e outros recursos para convencer o ouvinte do está sendo dito, na matemática podemos provar o que estamos afirmando, no caso, a igualdade 0,999… = 1. Utilizando recursos tecnológicos, Rogério apresenta três provas dessa igualdade.

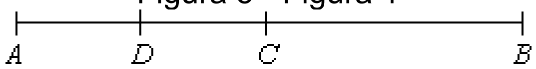
Na parte da sequência didática de progressões geométricas, este problema está na seção soma dos termos de uma P.G. infinita, onde é mostrado como decompor essa dízima em uma soma de uma P.G. infinita, assim possibilitando usar a fórmula para chegar ao resultado. Interessante notar que essa prova é diferente das três formas apresentadas pelo Rogério Martins no vídeo do YouTube.

3.4 PARADOXO DE ZENÃO

O paradoxo:

> O primeiro, conhecido como paradoxo da dicotomia, procura interpretar o movimento de um ponto A a um ponto B como uma sequência infinita de movimentos: antes de se chegar ao ponto B é preciso chegar ao ponto C tal que AC = CB (figura 1); mas, antes de se chegar a C, é preciso chegar ao ponto D tal que AD = DC; e assim por diante, indefinidamente.(RPM 39 - O PARADOXO DE ZENÃO, [*s. d.*])

Figura 5 - Figura 1



Fonte: https://www.rpm.org.br/cdrpm/39/images/2.htm3.gif

Na coleção Matemática Multimídia da UNICAMP (https://m3.ime.unicamp.br) há um material multimídia intitulado “À espera da meia-noite” (RAMOS RIFO; ROMAN; DE ANDRADE CAMPELLO JUNIOR, [*s. d.*]), o qual aborda a situação em que o segurança Claudemir está à espera do fim do seu horário de trabalho, quando entregará o turno para o seu companheiro Adilson. Entretanto, lhe parece que a espera vai demorar infinitamente. Esse vídeo também pode ser encontrado no YouTube pelo link https://youtu.be/j9Hg5Fx6zO4.

Figura 6 - Imagem de apresentação do vídeo "À espera da meia-noite." no YouTube

Fonte: https://i.ytimg.com/vi/j9Hg5Fx6zO4/mqdefault.jpg

No vídeo https://youtu.be/j9Hg5Fx6zO4 que pode ser compartilhado com os alunos, temos uma adaptação do paradoxo da dicotomia encenada de forma inusitada e divertida, onde Adilson tenta enganar seu amigo Claudemir fazendo-o acreditar através desse paradoxo que nunca chegará meia-noite, a hora da mudança de turno dos vigilantes. Mas com a noção de limites esse paradoxo é desvendado e solucionado através da fórmula da soma de termos de uma P.G. infinita.

3.5 PROBLEMA DOS ANIVERSÁRIOS

No livro Matemática Discreta (MORGADO; PINTO CARVALHO, 2015, p. 139), encontra-se o problema do aniversário, que consiste em determinar qual a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia em um grupo r de pessoas?

Figura 7 - Capa do Livro

Fonte: https://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/discreta.jpg

Na parte da sequência didática de probabilidade, este problema é resolvido detalhadamente, esclarecendo a parte combinatória com dedução das fórmulas da permutação, do arranjo e da combinação pelo princípio fundamental do cálculo, requisito essencial para determinar a probabilidade de duas pessoas em um grupo de n pessoas aniversariarem em um mesmo dia. A sequência didática também traz a possibilidade de utilizar a planilha eletrônica como recurso tecnológico, facilitando a apresentação das probabilidades à turma.

4 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Neste capítulo serão apresentadas as atividades que contam com os problemas motivadores, que aguçam a curiosidade e surpreendem pelo resultado inesperado, trabalhados no capítulo terceiro. Essas atividades poderão ser utilizadas pelos professores durante o ensino de progressões geométricas e probabilidade no ensino médio, buscando apresentar ao aluno o conteúdo de uma forma atual através de recursos multimídias conhecidos e muito explorados por eles no dia a dia.

4.1 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

- **Público-alvo:** alunos do ensino médio.
- **Conteúdo abordado:** progressões geométricas.
- **Quantidade de aulas:** Entre 6 e 8.
- **Tempo de cada aula:** 50 minutos.
- **Conteúdo de Progressões Geométricas:** completo.

Este texto trata de um tutorial para uma aula de Progressões Geométricas para o Ensino Médio. Será apresentado um passo a passo comentado, detalhando atitudes que o professor deve ter para que a aula seja fluida, interessante e motivadora, destacando-se os momentos chamados de impressionantes, que têm potencial para captar a atenção do aluno.

4.1.1 Primeira parte da aula: atraindo a atenção para o tema

Inicialmente, é necessário dar o passo certo para conquistar a turma. Um erro, um indício de que o assunto será enfadonho ou repetitivo, e os alunos vão perder a motivação. **Enquanto o assunto ainda é desconhecido o professor está em vantagem, pois a curiosidade dos alunos é inevitável.** Este momento é a hora de um problema motivador, que ilustre o que a matéria vai tratar.

A aula começa e o professor deve apresentar, primeiramente, o problema da mesada. Inicialmente sem escrever muito no quadro, mantendo o contato visual e informal, num ambiente de conversa e descontração. O problema será apresentado do seguinte modo:

Uma criança ganha de mesada 10 reais por mês do pai. Como a criança gosta de moedas, ela propõe uma mudança da seguinte forma:

- 2 centavos no dia 1;
- 4 centavos no dia 2;
- 8 centavos no dia 3;
- 16 centavos no dia 4, …

É importante ressaltar que, evidentemente, o pai fica inclinado a aceitar, pois afinal de contas, são moedinhas! Caso o pai aceite a mudança, quanto ele terá que pagar à criança no final de 30 dias? A criança vai ganhar mais, ou menos que 10 reais?

Após a apresentação do problema, o professor deverá dar um tempo de dez minutos para que os alunos pensem no problema e tentem resolvê-lo. Esse engajamento dos alunos é essencial para que se sintam desafiados e dispostos a entender como será a solução deste problema.

Momento Impressionante: Neste momento, o professor diz a resposta: o pai deverá pagar à criança R$ 21.474.836,46. Mais de 21 milhões de reais!

4.1.2 Momentos De Interação Aproveitando A Empolgação

Como a atenção turma foi atraída e um comprometimento à compreensão desse problema vibra em sala de aula, o professor, buscando aprofundar e engajar ainda mais os alunos na resolução dessa questão, pode recorrer à utilização de perguntas à turma. Por exemplo: Vocês acreditam neste resultado? Vocês esperavam este resultado? Por que razão vocês acham que o número foi tão grande?

Essas perguntas objetivam a construção do conhecimento, oportunizando um momento de permuta do conhecimento entre o professor e o aluno. Através das perguntas, sonda-se o que os alunos pensam e entendem a respeito desse resultado impressionante. Contudo, é importante estimular que os alunos manifestem sua curiosidade construindo suas próprias perguntas. O medo do julgamento é um fator impeditivo para que o estudante se expresse, mas o professor pode sugerir a criação de grupos para estimular a confiança dos alunos, já que muitos têm vergonha de se manifestar para toda turma e, quando participando de um grupo, sentem-se protegidos para exporem seus questionamentos.

O professor também pode apresentar a possibilidade de seus alunos escreverem suas perguntas ou respostas para, em seguida, debatê-las.

Outra atividade que poderá ser proposta pelo professor é sugerir aos alunos que realizem a seguinte multiplicação na calculadora: 2x2x2x...x2. Assim, os alunos poderão constatar como crescimento exponencial acontece de forma rápida. De forma semelhante, pode sugerir aos alunos que realizem a seguinte soma na calculadora: 2+2+2+...+2, analisando a velocidade de crescimento deste valor. Nessa soma, temos uma progressão aritmética, enquanto no produto, uma progressão geométrica, ambos com primeiro termo valendo dois e razão com valor dois, possibilitando ao aluno comparar a diferença prática entre progressões aritméticas e geométricas.

O professor, valendo-se do convencimento do aluno de que o ritmo de crescimento da P.G. é muito maior que o da P.A., busca conduzir a turma ao porquê dessa diferença, esclarecendo o que acontece após cada interação na P.A. em que temos a seguinte sequência (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 ...) e na P.G. com a sequência (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...). Com isso, o professor observa que o sétimo termo da P.G.

é quase dez vezes maior que o termo de mesma posição da P.A., e convida os alunos a outras conclusões oportunas que podem surgir ao observar o crescimento de ambas sequências.

4.1.3 Aproveitando Um Pouco Mais

Aproveitando ainda o momento de empolgação, o professor poderá discursar sobre a beleza da matemática, enaltecendo o grandioso papel dessa ciência no progresso da humanidade, como nas grandiosas construções do mundo antigo: as pirâmides do Egito, o coliseu em Roma, entre tantas outras. Também vemos a mesma presente em outras disciplinas, como a física, a química, a biologia, a geografia, a história e outras. A matemática está presente em nossas vidas diariamente sem nem mesmo percebermos. No cuidado com a saúde, temos instrumentos para aferir nossa temperatura corporal, nossa glicemia e nossa pressão sanguínea, além dos remédios que devem ser dosados de uma forma matematicamente precisa para não intoxicar o organismo. Nas relações de compra e venda, aí está a matemática a reger seu funcionamento.

Enfim, os números são fascinantes e estudá-los para compreendê-los é certeza da obtenção de um conhecimento crucial em muitas tomadas de decisões relativas as finanças que influenciam até mesmo na qualidade de vida do homem, pois o sucesso de muitas negociações depende da compreensão matemática para prever os prejuízos e lucros.

Em seguida, o professor dará continuidade à aula, expondo o assunto (Progressão Geométrica) relacionado ao problema e que permitirá que os alunos cheguem à resposta.

4.1.4 Segunda parte da aula: iniciando o assunto tecnicamente

Após o início instigante, os alunos possivelmente estarão mais propensos a receber informação da forma mais tradicional sem tanta resistência. É isto que será detalhado a partir de agora.

No endereço https://www.matematica.com.br/ em conteúdos, material didático temos o documento Progressão Geométrica criado pelo professor Jorge Krug disponível em formato PDF e que pode ser acessado através do link http://matematica.com.br/files/2/Progress__o_Geom__trica.pdf. Este documento inspirou e foi adaptado para a criação da parte conceitual desta sequência didática.

4.1.4.1 Definição de Progressão Geométrica

Progressão Geométrica (P.G.) é toda sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um certo número constante, denominado razão (q).

Notação: a_1, a_2, a_3, ... , a_{n-1}, a_n, …

onde:

a_1 é o primeiro termo;
a_2 é o segundo termo;
a_n é o n-ésimo termo ou termo geral;
n é o número de termos;
q é a razão $q = \frac{a_2}{a_1}$.

A apresentação dos exemplos, juntamente ao que já foi mostrado, permitirá aos alunos perceber que o problema proposto, isto é, o problema da mesada, corresponde a uma P.G. de primeiro termo a_1 igual a dois, razão q igual a dois e número de termos igual a trinta.

Exemplos de progressões geométricas:

a) (2, 4, 8, 16, ...), sendo, a_1 = 2; q = 2

b) (-18, -6, -2, $\frac{-2}{3}$, ...), sendo, a_1 = -18; q = $\frac{1}{3}$

c) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$, sendo, a_1 = 1; q = $\frac{1}{2}$

4.1.4.2 Fórmula do Termo Geral

Em uma PG (a_1, a_2, a_3, ... , a_{n-1}, a_n, …), de razão q, podemos escrever qualquer termo em função do primeiro termo.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

O aluno poderá questionar sobre a origem da fórmula e como fazer para memorizá-la; então, o professor poderá trazer o entendimento da fórmula, ensinando-o a deduzi-la do seguinte modo:

Em uma P.G. de razão q, os termos são obtidos, por definição, a partir do primeiro:

- $a_1 = a_1$
- $a_2 = a_1 \cdot q$
- $a_3 = a_2 \cdot q$, como $a_2 = a_1 \cdot q$ então, $a_3 = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$

Assim, pode-se deduzir a seguinte expressão do termo geral, apontando ao aluno que o índice do termo é sempre uma unidade maior que o expoente da razão.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Com esse entendimento, pode-se calcular o termo geral da seguinte forma:

$a_n = a_s \cdot q^{n-s}$ .Por exemplo: $a_{20} = a_{15} \cdot q^5$.

Também pode-se observar que, em certas situações, é favorável colocar o primeiro termo como a_0 e não a_1; o uso do zero no índice no caso que será estudado serve para denotar o montante de uma quantia inicial, possibilitando observar a correção dessa quantia em um período de tempo, que é representado pelo índice n. Dessa forma, o termo geral da P.G. é dado por $a_n = a_0 \cdot q^n$. Por exemplo, se depositamos na poupança R$ 1.000,00, rendendo 1% ao mês, quanto terei daqui 4 meses?

Temos uma P.G. com a_0 = R$ 1.000,00 e razão q = 1 + i = 1 + 0,01 = 1,01.

Daqui a 4 meses, teremos $a_4 = a_0 .q^4 = 1000.(1,01)^4$ = R$ 1.040,60.

4.1.4.3 Momento De Pausa Para Um Assunto Interessante

Neste momento, muitos conceitos foram ensinados, e os alunos podem estar cansados. Pode ser o momento de instigá-los novamente com um assunto curioso. O assunto pode ser sobre os números muito grandes. Não é algo que se relacione totalmente com o tema, mas que tem a ver com os valores grandes que são obtidos com o crescimento rápido dos termos de uma PG.

Para salientar a compreensão de números grandes, o professor poderá fazer um experimento; por exemplo, quanto tempo eles acham que levaria para contar de um a um milhão, um número por segundo. Após a interação com a turma, ele revelaria que transcorreriam onze dias, treze horas, quarenta e seis minutos e quarenta segundos para realizar essa contagem. O aluno possivelmente ficará curioso em saber como o professor conseguiu tal exatidão na resposta; nesse momento, a turma poderá ser conduzida a essa resposta através das seguintes reflexões: quantos segundos têm um minuto? (60 segundos); e uma hora? (60 x 60

= 3.600 segundos); e então um dia? (60 x 60 x 24 = 86.400 segundos). Pronto, agora é só realizar algumas divisões, utilizando restos como dividendos:

- 1.000.000 dividido para 84.600 dá **11 dias** restando 49.600 segundos;
- 49.600 dividido para 3.600 dá **13 horas**, restando 2800 segundos;
- 2.800 dividido para 60 dá **46 minutos**, restando **40 segundos**.

Com a turma impressionada sobre a compreensão de valores grandes, o professor aproveitaria o ambiente propício para mais uma curiosidade e comentaria sobre o absurdo número Googolplex (dez elevado a um googol, que por sua vez é o dez elevado a cem). Buscando clarear o entendimento da turma, informaria que o número de átomos estimado em todo o universo observável seja de 10^{80}, quer dizer, o número um seguido de 80 zeros. O googol, que é 10^{100} é cem bilhões de bilhões de vezes maior! Algo impressionante!

A origem desse nome pra esse número remonta por volta do ano de 1920, em que o matemático norte-americano Edward Kasner (1878-1955) buscava um nome para um número muito grande (10^{100}) que despertasse a atenção das crianças. Assim, seu sobrinho Milton, de 9 anos, propôs chamar "googol" e esse nome foi popularizado por Kasner em seu livro "Matemática e imaginação". E em 1997, os construtores de uma nova página que apresentava um mecanismo de buscas na internet decidiram chamar seu produto "Googol", com o intuito de mostrar sua capacidade de processamento colossal de dados e que devido a um engano na hora da grafia esse site recebeu o nome de "Google" e a sede da empresa na Califórnia é chamada de Googleplex. Esse resumo foi adaptado da notícia **'Google', ou como ideia de infinito sempre intrigou a humanidade** no site da Sociedade Brasileira de matemática – SBM e que pode ser acessada pelo endereço https://www.sbm.org.br/noticias/google-ou-como-ideia-de-infinito-sempre-intrigou-a-humanidade.

Por fim, esse é um número que, quanto mais o entendemos, mais impressionados ficamos. E se fosse proposto o exercício anterior, contando um número por segundo, a turma se impressionaria e até mesmo largaria de mão a contagem do tempo por ser um número incrivelmente grande. Podemos agora voltar à matéria.

4.1.4.4 Classificação de Uma P.G.

- A P.G. será crescente quando o primeiro termo for positivo ($a_1 > 0$) e a razão maior que um ($q > 1$) ou o primeiro termo for negativo ($a_1 < 0$) e a razão estiver entre zero e um ($0 < q < 1$).

  Exemplos:

a) Dados $a_1 = 1$ e $q = 2$, logo (1, 2, 4, 8, …)
b) Dados $a_1 = -18$ e $q = 1/3$, logo (-18, -6, -2, 2/3, …)

- A P.G. será decrescente quando o primeiro termo for positivo ($a_1 > 0$) e a razão estiver entre zero e um ($0 < q < 1$) ou o primeiro termo for negativo ($a_1 < 0$) e a razão for maior que um ($q > 1$).

  Exemplos:

a) Dados $a_1 = 10$ e $q = 1/2$, logo (10, 5, 5/2, 5/4, …)
b) Dados $a_1 = - 2$ e $q = 5$ (- 2, - 10, - 50, …)

A P.G. será constante quando a razão for igual a um ($q = 1$)

Exemplo:

Dados $a_1 = 2$ e $q = 1$, logo (2, 2, 2, 2, ...)

A P.G. será oscilante ou alternante quando a razão for negativa ($q < 0$).

Exemplo:

Dados $a_1 = 5$ e $q = –2 < 0$, logo (5, –10, 20, –40, ...)

Neste momento, deve-se ressaltar que a razão negativa causa a oscilação. Isto deve ser bem compreendido pelos alunos.

4.1.4.5 **Propriedades da P.G.**

P_1 - O produto de dois termos equidistantes dos extremos de uma P.G. finita é igual ao produto dos extremos.

Por exemplo na P.G. (1, 2, 4, 8, 16, 32), temos:

$$1\times 32=32$$
$$2\times 16=32$$
$$4\times 8=32$$

P_2 - Qualquer termo de uma PG, excluídos os extremos, é a média geométrica entre o seu antecedente e o seu consequente.

Por exemplo na P.G. (1, 2, 4, 8, 16, 32), temos:

$$2=\sqrt{1\times 4}$$
$$4=\sqrt{2\times 8}$$
$$8=\sqrt{4\times 16}$$
$$16=\sqrt{8\times 32}$$

P_3 - Numa PG de número ímpar de termos, o termo médio é a média geométrica dos extremos ou dos termos equidistantes dos extremos.

Por exemplo na P.G. (1, 2, 4, 8, 16), temos:

$$4=\sqrt{1\times 16}$$
$$4=\sqrt{2\times 8}$$

4.1.4.6 Representação

Dada a P.G. (a, b, c) de razão q, podemos escrever em função do termo médio b.

$$\left(\frac{b}{q}, b, b\cdot q\right)$$

4.1.4.7 Produtos dos termos

A fórmula a seguir permite calcular o produto P_n dos n termos iniciais de uma P.G..

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]}$$

O professor pode comentar por que razão a única fórmula ausente na lista de fórmulas tradicionais (termo geral, soma e produto) das Progressões Aritméticas e Geométricas é a fórmula do produto da PA. Mas isso foge um pouco do escopo deste trabalho, e fica apenas como sugestão.

4.1.4.8 Soma dos termos de uma P.G. finita

Seja a PG (a_1, a_2, a_3, a_4, ... , a_n).

Para o cálculo da soma dos termos S_n, vamos considerar o que segue:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade pela razão q, temos:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \ldots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

Pela definição de PG, pode-se reescrever a expressão como:

$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_n \cdot q$$

Observe que $a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ é igual a $S_n - a_1$. Logo, substituindo, temos:

$$S_n \cdot q = S_n - a_1 + a_n \cdot q$$

Subtraindo S_n em ambos lados da igualdade:

$$S_n \cdot q - S_n = - a_1 + a_n \cdot q$$

Daí, evidenciando S_n, temos:

$$S_n \cdot (q-1) = a_n \cdot q - a_1$$

Multiplicando ambos o lados da igualdade por $\frac{1}{(q-1)}$:

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1}$$

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ substituindo na equação anterior:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1}{q-1}$$

Somando os expoentes da potência de mesma base q $q^{n-1} \cdot q = q^{(n-1+1)} = q^n$ e evidenciando a_1, pois é comum, chega-se à fórmula conhecida da soma dos termos de uma P.G. finita:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

4.1.4.9 **Utilizando o LibreOffice Calc Durante a Aula**

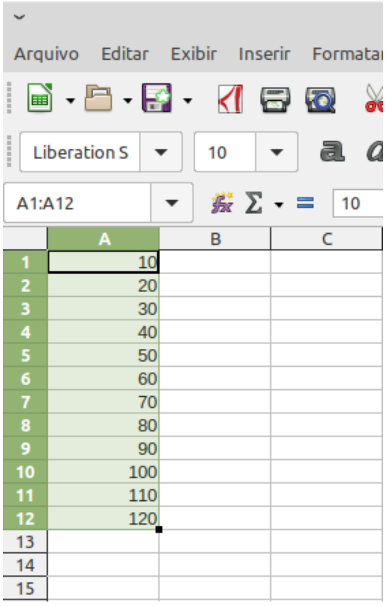
O LibreOffice Calc faz parte do pacote gratuito LibreOffice e possibilita criar, editar e apresentar planilhas eletrônicas, permitindo a realização de cálculos diversos, como orçamentos domésticos e repercussões financeiras corporativas. E, também, possibilita apresentar graficamente os dados trabalhados.

O professor, por meio de um recurso multimídia como uma lousa eletrônica, caso esteja disponível, ou um notebook, poderá mostrar a diferença entre Progressões Aritméticas e Geométricas (PA e PG), da seguinte forma:

a) Uma criança, recebendo dez reais todo mês, teria ao final de um ano 120 reais, valor que poderia ser calculado o décimo segundo termo de uma PA de com primeiro termo valendo 10 e razão dez. Também poderia através de uma planilha eletrônica (LibreOffice Calc v.6.4.6.2) colocar 10 em uma célula, 20 na célula logo abaixo desta, e então selecionando as duas e arrastando dez células para baixo pela alça de preenchimento poderíamos observar os doze termos dessa sequência.

$$\begin{gathered} \textit{Termo Geral da PA} \\ a_n = a_1 + (n-1)r \\ a_{12} = 10 + (12-1)10 = 120 \end{gathered}$$

Figura 8 - LibreOffice Calc - Termos da PA



Fonte: o autor

b) Agora o aluno realizará o cálculo uma PG, buscando encontrar o trigésimo termo, onde o primeiro termo vale dois e a razão dois (problema da mesada). Também poderia através de uma planilha eletrônica (LibreOffice Calc v.6.4.6.2) visualizar os trinta termos dessa PG, do seguinte modo:

➔ selecione trinta células de cima para baixo, A1 até A30;

➔ no menu, selecione planilha, preencher células, preencher séries;

➔ na janela série de preenchimento, configure, direção para baixo, tipo de série crescente, valor inicial 2, incremento 2;

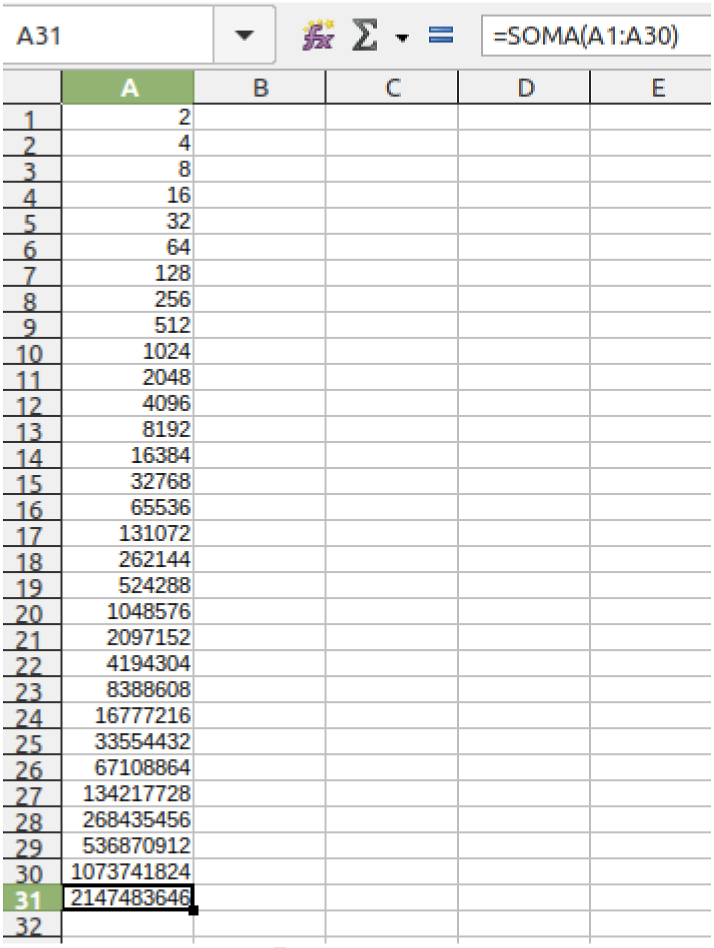
➔ e para finalizar selecione a célula A31, inserindo a fórmula =SOMA(A1:A30) na linha de entrada, conforme a figura 9.

$$\textit{Soma dos } n \textit{ primeiros termos de uma } PG$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_{30} = \frac{2(1-2^{30})}{1-2} = -2\cdot(1-1073741824) = 2147483646$$

Figura 9 - LibreOffice Calc - Termos e Soma da PG



A31 | =SOMA(A1:A30)

	A	B	C	D	E
1	2				
2	4				
3	8				
4	16				
5	32				
6	64				
7	128				
8	256				
9	512				
10	1024				
11	2048				
12	4096				
13	8192				
14	16384				
15	32768				
16	65536				
17	131072				
18	262144				
19	524288				
20	1048576				
21	2097152				
22	4194304				
23	8388608				
24	16777216				
25	33554432				
26	67108864				
27	134217728				
28	268435456				
29	536870912				
30	1073741824				
31	2147483646				
32					

Fonte: o autor.

O professor também terá a possibilidade de explorar a leitura do Capítulo XVI do livro O Homem que Calculava, e de utilizar o vídeo “Pra lá de Bagdá” como atividade preparatória a esta aula, buscando ter um aluno mais participativo.

4.1.5 Soma dos termos de uma PG infinita

O professor, antes de abordagem da P.G. infinita, pode explorar o conceito com a turma através da pergunta: como surgiu a ideia de infinito? O que vocês entendem por infinito?

Podemos observar a própria etimologia da palavra: in (não) junto com finis (fim), ou seja, algo que não tem fim. Isto nos ajuda a compreender a ideia de infinito.

O professor, após falar um pouco sobre infinito, traz o seguinte questionamento para a turma: será que, ao somarmos uma quantidade infinita de termos, poderemos ter como resposta um número finito?

Essa pergunta objetiva introduzir uma ideia fundamental para o entendimento da matéria. E então, a turma poderá ser convidada a imaginar que, se somarmos números de uma sequência com diferença cada vez menor para o antecessor, daí podemos concluir que poderemos chegar a um valor finito.

Voltando à apresentação técnica do assunto:

Suponha que tenhamos uma P.G. infinita na forma:

$(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots)$

Importante lembrar que uma P.G. é classificada como decrescente, atendendo a duas características:

- Quando a razão está entre zero e um ($0 < q < 1$) e os termos são positivos ou;
- Quando a razão é maior que um ($q > 1$) e os termos são negativos.

Contudo, podemos observar que, quando o módulo da razão da P.G. estiver entre 0 e 1 ($0 < |q| < 1$), a soma dos seus n primeiros termos poderá ter um limite finito quando n tender ao infinito, isto é, q^n pode se aproximar de zero quando n for suficientemente grande, então:

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0$$

Como a soma dos n primeiros termos da P.G. é dada por:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Então,

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} = \frac{a_1 \cdot q^n}{q-1} - \frac{a_1}{q-1}$$

Sabendo que $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$ e 0 < |q| < 1, temos que,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} = 0 - \frac{a_1}{q-1} = \frac{a_1}{q-1}$$

Concluímos que a soma dos infinitos termos de uma P.G. quando a razão corresponde a 0 < |q| < 1, é:

$$S_n = \frac{a_1}{q-1}$$

Observações:

A condição –1 < q < 1 é necessária para a convergência da sequência, mas se $a_1=0$, esta condição se torna desnecessária.

Mas, se $a_1 \neq 0$ e $q < -1$ ou $q > 1$, a sequência $(S_1, S_2, S_3, \cdots)$ não converge e se torna impossível calcular a soma dos termos desta P.G.

Momento Impressionante: O Professor Afirma Que 0.999...= 1.

O professor dará um enfoque a este resultado fantástico: 0,999… é igual a 1. Analogamente, 1,999… é igual a 2, 9,999… é igual a 10. Há uma convergência de um limite acontecendo a parte decimal: 0,999… pode ser observada como uma soma infinita de frações cada vez menores, por exemplo 9/10 + 9/100 + 9/1000…. Daí pode-se inferir, conforme afirmado anteriormente, que somando infinitos termos, poderemos ter como resposta um número finito.

Algo leve que o professor também poderá expor com o propósito de aclarar essa verdade é o seguinte exercício:

Encontrar a fração geratriz da dízima 0,999...

Seja 0,999... igual a x:

x=0,999....(I)

Multiplicando os dois lados dessa igualdade por 10:

10x=9,999....(II)

Fazendo (II) – (1):

9x=9

x= 9/9 = 1

O professor poderá informar aos alunos que, com o conhecimento da soma dos termos de uma P.G. infinita é possível encontrar a solução procurada.

Qual seria o primeiro passo? Enxergar que há uma sequência implícita no número 0.9999… Como isso pode ser feito? Através da decomposição desse número, teremos 0.9 + 0.09 + 0.009 + …, ou seja, a soma de uma PG de razão q = 0,09/0,9 = 0,1.

Pronto, (0.9, 0.09, 0.009, …) é a P.G., cuja soma pode ser representada pelo número 0.9999…

Agora, aplicando a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S_n = \frac{0{,}9}{1-0{,}1} = 1$$

Um fato interessante nesse estudo é que podemos obter a fração geratriz da dízima 0,333333…

Decompondo, temos:

0,3 + 0,03 + 0,003 + ...

Note que temos a soma dos infinitos termos de uma PG, onde o primeiro (1º) termo é 0,3 e a razão é q = 0,03/0,3 = 0,1.

Assim,

$$S_n = \frac{0{,}3}{1-0{,}1} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{3}$$

Portanto, um terço $\left(\frac{1}{3}\right)$ é a fração geratriz da dízima 0,333333…

Também há outras formas de mostrar essa verdade:

Multiplicando ambos lados da igualdade abaixo por 3:

$$0{,}3333... = \frac{1}{3} \Rightarrow 0{,}3333...\times\mathbf{3} = \frac{1}{3}\times\mathbf{3} \Rightarrow 0{,}9999... = 1$$

Outro fato interessante é que buscando um valor entre 0,999… e 1, concluímos que não é possível. Isto também pode ser passado aos alunos.

4.1.6 Paradoxo de Zenão

Na introdução do conteúdo, de forma informal, utilizando-se das próprias mãos como recurso e visando atrair a atenção e simplificar o entendimento de um assunto que vai além da intuição, explica-se que um objeto será lançado à parede. Gesticulando, o professor diz que o objeto precisará antes percorrer metade da distância até a parede, e então percorrerá metade da metade restante da distância até a parede, e assim sucessivamente. Como sempre haverá uma metade a ser percorrida, a turma poderá ser induzida a pensar que o objeto nunca conseguirá atingir a parede.

Momento Impressionante (mas obviamente esperado): O professor confirma que sim, apesar de um pensamento paradoxal inicialmente sugerir o contrário, o objeto atingirá a parede.

4.1.7 Resolvendo o Problema de Forma Motivadora

O professor, de forma descontraída, buscando a atenção e participação da turma, convida-os a imaginar a seguinte situação:

Uma pessoa está parada a 1km de sua casa.

E então passa a proceder do seguinte modo:

- Ele anda a metade do caminho, finca uma bandeira no chão (primeira), e vê que ainda falta metade a percorrer.
- Ele anda metade do caminho desta primeira bandeira até sua casa, e vê que ainda falta metade do caminho. Finca uma segunda bandeira.
- Ele anda metade do caminho desta segunda bandeira até sua casa e finca uma terceira bandeira.
- E continua andando metade da bandeira anterior até sua casa e fincando uma bandeira.

Daí, o professor dará alguns minutos para o debate com os alunos sobre o que acontecerá nesse problema. O pensamento comum é que o homem sempre tem uma metade de caminho a percorrer, logo nunca chegará à sua casa, por mais que ande.

Entretanto, vimos em questões anteriores que a soma dos termos de uma P.G. infinita pode convergir a um número. Por exemplo: 0,666… é igual a 0,6 + 0,06 + 0,006 + …, que por sua vez é a soma de termos de uma P.G. infinita, cuja fração geratriz é

$$S_n = \frac{0{,}6}{1-0{,}1} = \frac{0{,}6}{0{,}9} = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{3}$$

De modo semelhante, temos que as distâncias percorridas pelo homem antes de fincar as bandeiras são ½ km, ¼ km, 1/8 km, …, ou seja, os termos de uma P.G. infinita com razão igual a um quarto dividido para um meio (1/4)/(1/2) que é ½. Assim, fazendo os cálculos, temos:

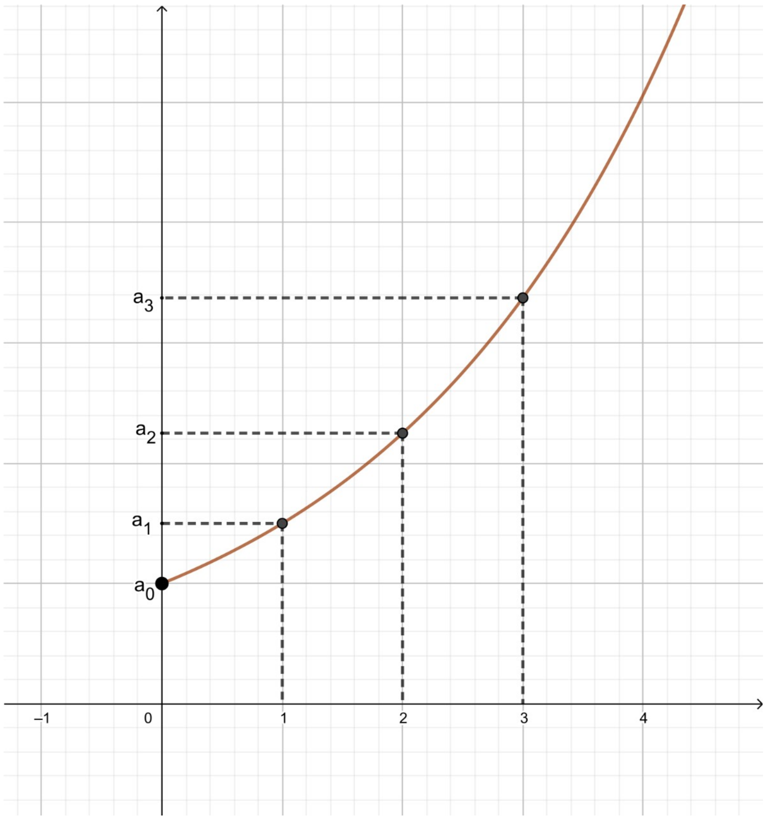
$$S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

O raciocínio para o entendimento desse paradoxo é que a soma de termos (distâncias) cada vez menores pode convergir a um número.

4.1.8 Interpretação Geométrica da P.G.

A fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é equivalente à $a_n = a_0 \cdot q^n$, em que os termos iniciam por a_0. Logo, podemos associar esta relação como sendo uma função exponencial restrita a números naturais (domínio = $\mathbb{N}$) do tipo $a(n) = a_0 \cdot q^n$.

O gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial.



4.1.9 Problema das Vitórias-Régias

Algo a ser ressaltado à turma de uma forma bem leve, escrevendo bem pouco no quadro, é sobre o crescimento da P.G., que difere muito do crescimento da P.A. Isso acontece devido ao fato de os alunos estarem habituados ao crescimento lento da progressão aritmética. O problema das vitórias-régias poderá ser formalmente apresentado assim:

Imagine que em um lago exista uma vitória-régia. E, a cada dia que passa, essa vitória-régia se reproduz e gera outra vitória-régia. Se depois de 30 dias, toda a superfície do lago está coberta de vitórias-régias, qual é o dia em que o lago teria metade da sua superfície coberta por vitória-régia?

Os alunos tendem a inferir que, se em 30 dias temos um lago lotado de vitórias-régias, em quinze dias teremos metade desse lago ocupado delas. Porém, o crescimento da P.G. é muito rápido.

Nesse momento uma pausa é muito importante para a turma perceber que, devido ao fato de a população de vitórias-régias dobrar a cada dia, no dia anterior sempre teremos metade da população do dia seguinte. E então conduzir a turma sem realizar nenhuma conta no quadro que, no vigésimo nono dia, o lago estaria com metade da população total.

Uma característica interessante desse problema é que, com o entendimento de que no dia seguinte a quantidade de vitórias-régias dobrará, já é possível solucionar a questão sem muitos cálculos, algo que poderá trazer ao aluno uma surpresa e uma satisfação.

4.1.10 Utilizando o LibreOffice Calc durante a aula:

A ideia é conduzir a turma a um ponto onde fique evidente a diferença entre a natureza das progressões aritmética e geométrica. Primeiramente, o professor irá perguntar aos alunos em quanto tempo a população de vitórias-régias chegará à metade, usando a mente. Após isso, explicará que, por se tratar de uma progressão geométrica de razão dois, o termo anterior a qualquer termo da sequência vale metade do termo seguinte. E então o docente conduzirá o aluno, utilizando uma planilha eletrônica (LibreOffice Calc v.6.4.6.2) a visualizar os trinta termos dessa PG, do seguinte modo:

- ➔ selecione trinta células de cima para baixo, A1 até A30;
- ➔ no menu, selecione planilha, preencher células, preencher séries;
- ➔ na janela série de preenchimento, configure, direção para baixo, tipo de série crescente, valor inicial 1, incremento 2.

Figura 10 - LibreOffice Calc - Termos de uma PG

	A
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32
7	64
8	128
9	256
10	512
11	1024
12	2048
13	4096
14	8192
15	16384
16	32768
17	65536
18	131072
19	262144
20	524288
21	1048576
22	2097152
23	4194304
24	8388608
25	16777216
26	33554432
27	67108864
28	134217728
29	268435456
30	536870912

Fonte: o autor

4.1.11 Resumindo…

Com o intuito de fixar os conteúdos, o professor poderá apresentar um resumo acerca do tema P.G., ressaltando os pontos relevantes.

4.1.11.1 Definição da P.G.

Toda sequência de números não nulos, em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado pela razão (q) , que é obtida, dividindo o termo seguinte ao anterior, a partir do segundo:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=...=\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$$

4.1.11.2 P.G. de três termos

$$\left(\frac{x}{q},\ x,\ x\cdot q\right)$$

4.1.11.3 Relação entre termos

$b=\sqrt{a\cdot c}\ \Rightarrow\ b^2=a\cdot c$, sendo $(a,\ b,\ c)$

4.1.11.4 Elementos da P.G.

a_1 é o primeiro termo;
a_2 é o segundo termo;
a_n é o n-ésimo termo ou termo geral;
n é o número de termos;
q é a razão.

4.1.11.5 Classificação de uma P.G.

- P.G. crescente

$$a_1 > 0 \ e \ q > 1$$
$$a_1 < 0 \ e \ 0 < q < 1$$
$$(3, 6, 12, 24, \ldots, a_n), \ onde \ q=2$$

- P.G. decrescente

$$a_1 > 0 \ e \ 0 < q < 1$$
$$a_1 < 0 \ e \ q > 1$$
$$(-3, -6, -12, -24, \ldots), \ onde \ q=2$$

- P.G. constante

$$q = 1$$
$$(-3, -3, -3, -3, \ldots)$$

4.1.11.6 Termo Geral de uma P.G.

$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$, para dedução da fórmula usa-se a definição

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q$$
$$a_4 = a_3 \cdot q$$

e a substituição, colocando todos termos em função do primeiro

$$\ldots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

termo:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = \boldsymbol{a_2} \cdot q = \boldsymbol{a_1 \cdot q} \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = \boldsymbol{a_3} \cdot q = \boldsymbol{a_1 \cdot q^2} = a_1 \cdot q^3$$
$$\dots$$
$$a_n = \boldsymbol{a_{n-1}} \cdot q = \boldsymbol{a_1 \cdot q^{n-2}} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

4.1.11.7 Soma dos termos de uma P.G. finita

$S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, para dedução considere $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ e então,

- multiplique a igualdade por q

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \ldots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

- use a definição $\begin{matrix} a_2 = a_1 \cdot q \\ \ldots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \end{matrix}$, reescrevendo a igualdade

$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_n \cdot q$$

- Substitua $a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ por $S_n - a_1$, obtendo

$$S_n \cdot q = S_n - a_1 + a_n \cdot q$$

- Agora, é só realizar algumas operações algébricas e encontrar a fórmula procurada.

4.1.11.8 Soma dos termos de uma P.G. infinita

$$S_n = \frac{a_1}{q - 1}$$

4.2 PROBABILIDADES

- **Público-alvo:** alunos do ensino médio.
- **Conteúdo abordado:** probabilidade e análise combinatória.
- **Quantidade de aulas:** 4.
- **Tempo de cada aula:** 50 minutos.
- **Conteúdo de Probabilidade:** princípio fundamental do cálculo, permutações simples, arranjos, combinações simples e a definição de probabilidade.

Este texto trata de um tutorial para uma aula de probabilidades para o Ensino Médio. Analogamente ao que foi feito para Progressões Geométricas, será apresentado um passo a passo comentado, detalhando atitudes que o professor deve ter para que a aula seja fluida, interessante e motivadora, destacando-se os momentos chamados de impressionantes, que têm potencial para captar a atenção do aluno.

4.2.1 Primeira Parte da Aula: Atraindo a Atenção para o Tema

O professor buscará atrair a atenção e aguçar a curiosidade dos alunos, pois o tema que será abordado é desafiador. Tradicionalmente, os problemas de combinatória costumam exigir bastante da capacidade de raciocínio lógico para serem interpretados.

O professor deverá apresentar o problema dos aniversários de forma falada, com pouca escrita no quadro, buscando o contato visual e uma informalidade, propiciando um ambiente de conversa e descontração. O problema será explorado (numa turma com 50 ou mais alunos) com a seguinte fala ousada:

Duas pessoas nesta sala nasceram no mesmo dia do ano.

A ousadia está no fato de que esta afirmação não é uma verdade absoluta, mas é um risco que vale muito correr. Depois, este risco deverá ser devidamente explicado. Também deve-se salientar a suposição de um ano ser composto por 365 dias, o que influencia a turma a pensar que é muito pouco provável que, entre 50 colegas de turma, haja dois que aniversariem no mesmo dia.

Neste momento também há uma grande oportunidade de explorar o princípio da casa dos pombos, sem nomeá-lo como uma técnica. O professor pode informalmente comentar sobre o princípio dando um exemplo simples: ele pede para que 8 alunos formem um grupo, e explica que 2 nasceram no mesmo dia da semana, uma vez que há somente 7 dias possíveis. O mesmo raciocínio pode ser repetido para o problema dos aniversários, exigindo 367 pessoas para garantir duas aniversariando no mesmo dia. Entretanto, isso serve para aumentar a sensação de que é improvável que numa turma de 50 alunos isso possa ocorrer.

Os alunos terão um tempo para imaginar essa situação, e o professor deverá consultar as datas de nascimento dos próprios alunos em sala de aula, buscando mostrar para os alunos como a matemática pode ser aplicada em situações rotineiras das pessoas. Além de dar oportunidade aos alunos de exporem seus raciocínios.

Momento Impressionante: o momento em que, após chamar um por um, ele realmente mostra que dois nasceram no mesmo dia do ano. O professor diz a resposta: com 50 alunos já temos 97% de probabilidade! Mas como, se para ter 100% são necessários 367 alunos?

4.2.2 Momentos de Interação Aproveitando a Empolgação

Como a turma está estimulada a entender como isto é possível, o professor abre um espaço durante a aula para ouvir os alunos, provocando-os através de possíveis perguntas: Havia a expectativa desse resultado? Alguém imaginava uma chance tão alta de isso acontecer?

4.2.3 Aproveitando um Pouco Mais

O professor, de modo informal, busca convencer a turma sobre a importância de estudar a matemática, pois nesse problema percebemos mais uma vez como o pensamento comum e simplista não conduz à solução do problema. E, para entender o que está acontecendo, é imprescindível um saber matemático, que é conquistado através de esforço e um desejo que deve ser alimentado cada vez mais em aprender matemática.

Cumpre ressaltar que há muitas pessoas que compartilham uma crença limitante a respeito da aplicação de conceitos da ciência que aprendemos na escola no cotidiano de nossa vida. Este é um momento em que isto deve ser combatido.

4.2.4 Segunda Parte da Aula: Iniciando o Assunto Tecnicamente

Esta parte conceitual foi adaptada e inspirada no artigo Análise Combinatória que pode ser acessada neste endereço https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/analise-combinatoria.htm.

Um exemplo clássico e simples é, muitas vezes, a melhor alternativa para iniciarmos esse tema de uma forma divertida, buscando a participação da turma. O professor poderá apresentar o problema de forma falada escrevendo o suficiente no quadro para entendimento do problema que será estudado.

Então, o professor pergunta aos alunos de quantos modos ele pode se vestir, se tem em seu guarda-roupas três camisas e duas calças.

Um diagrama de árvores pode ser utilizado para ajudar o entendimento, mostrando aos alunos que, para cada uma das três camisas podem ser combinadas uma das duas calças ou vice-versa, chegando a um total de seis possibilidades de se vestir.

Após esse exemplo simples, será apresentado o Principio Fundamental da Contagem (PFC) à turma:

Se, tomando n decisões (ações) em sequência: há p_1 possibilidades (modos, maneiras ou formas) para primeira decisão, há p_2 possibilidades para segunda decisão e assim sucessivamente até p_n possibilidades, então a quantidade de formas para tomar essas decisões é o produto $p_1.p_2. \ldots .p_n$.

4.2.5 Aproveitando Para Preparar o Assunto (Permutação Simples) de Forma Motivadora Através de um Exemplo

De forma semelhante ao PFC, o professor apresentará um problema simples e clássico, para motivar os alunos e conquistar a confiança deles sobre permutação simples.

A seguinte questão poderá ser trabalhada em sala: quantos anagramas podemos formar com a palavra ALUNO?

A seguinte explicação poderá ser abordada: alguns anagramas são launo, ulano, nluao, oluna, laonu etc.

Há cinco posições a serem ocupadas pelas letras; para primeira posição, temos cinco possibilidades (a, l, u, n e o). Quatro possibilidades (quatro letras restantes que não foram escolhidas para primeira posição) para segunda posição, três possibilidades (três letras restantes que não foram escolhidas para segunda posição) para terceira posição, duas possibilidades (duas letras restantes que não foram escolhidas para terceira posição) para quarta posição e uma possibilidade (uma letra restante que não foi escolhida para quarta posição) para quinta posição.

Agora, sobre a quantidade de possibilidades de ordenar em fila n objetos distintos, isto é, agrupamentos ordenados formados com n objetos distintos:

Há n modos de escolher o objeto que ocupará a primeira posição;

Há n - 1 modos de escolher o objeto que ocupará a segunda posição;

E assim sucessivamente até escolher 1 objeto que ocupará a última posição;

Logo, a quantidade de modos de ordenar n objetos distintos em fila é $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$

4.2.6 Aproveitando para Preparar o Assunto (Arranjo) de Forma Motivadora através de um Exemplo

O seguinte problema simples e clássico poderá ser apresentado para a turma: se em uma olimpíada, na corrida dos 100m há oito atletas, quais as possibilidades de formarem o pódio (ouro, prata e bronze)? É de suma importância que a turma seja conduzida a perceber a lógica da ordenação e a diferenciar essa questão com o problema de permutação simples, em que todos os objetos permutavam em todas as posições.

Nessa questão há somente três posições a serem preenchidas por todos os atletas para encontrarmos todos agrupamentos possíveis.

Quantidade de possibilidades de escolher p objetos distintos, de forma ordenada, dentre n objetos distintos, isto é, agrupamentos ordenados formados com p objetos distintos de um conjunto de n objetos distintos.

Como cada agrupamento é formado por p objetos, há p posições.

Assim, há n modos de escolher o objeto que ocupará a primeira posição;

Há n - 1 modos de escolher o objeto que ocupará a segunda posição;

E assim sucessivamente até (n – (p – 1)) modos de realizar a última escolha de objeto que ocupará a posição p.

Logo, a quantidade de modos de escolher p objetos distintos de forma ordenada, dentre n objetos distintos é:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(p-1))\cdot\frac{\boldsymbol{(n-p)!}}{\boldsymbol{(n-p)!}}$$

$\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ foi multiplicado no final da igualdade para gerar a conhecida fórmula de arranjo, pois (n - p) é antecessor de (n – (p – 1)).

4.2.7 Combinação Simples

A quantidade de possibilidades de escolhas de p objetos distintos dentre n objetos distintos, isto é, agrupamentos não ordenados formados com p objetos distintos de um conjunto de n objetos distintos será tratada agora:

Há n modos de realizar a escolha do primeiro objeto;

Há n - 1 modos de realizar a escolha do segundo objeto;

E assim sucessivamente até (n – (p – 1)) modos de realizar a última escolha de objeto.

Como, a ordenação dos p objetos escolhidos em cada agrupamento não geram agrupamentos diferentes, dividimos por p!.

Assim, não contaremos agrupamentos repetidos.

Exemplo: escolher três alunos para representarem uma turma de dez alunos. Sejam os alunos A, B e C os escolhidos. Podem ser escolhidos dos seguintes modos: ABC, ACB, BAC, BCA, CBA, CAB, diferentemente do arranjo onde as posições têm relevância, essas configurações não geram agrupamentos diferentes na combinação, por isso divide-se por p! A fim de contarmos uma única vez cada subconjunto formado de p objetos.

Logo, a quantidade de modos de escolher p objetos distintos dentre n objetos distintos é:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\cdot(n-p)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(p-1))}{p!}\cdot\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

4.2.8 Definição de Probabilidade

Esta parte conceitual foi adaptada e inspirada no artigo Definições básicas de probabilidade que pode ser acessada através do link https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/definicoes-basicas-probabilidade.htm.

A probabilidade de um evento é igual à razão entre o número de casos favoráveis à ocorrência do evento e o número total de casos possíveis. Comumente, o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória é chamado de espaço amostral.

Por exemplo, no lançamento de uma moeda honesta com duas faces, uma cara e outra coroa, qual a probabilidade de cair cara? Temos dois resultados possíveis, cara e coroa, mas só há um caso favorável para esse problema que é cara. Assim, a probabilidade de cair cara é meio (½).

4.2.9 Aproveitando para Preparar o Assunto (Probabilidade) de Forma Motivadora através de um Exemplo

Um exemplo clássico a ser abordado em sala de aula é a probabilidade de lançar uma moeda e observar a face que caiu voltada para cima. E então, o professor poderia iniciar o diálogo com a turma e até lançar uma moeda algumas vezes para observar os resultados e realizar algumas perguntas à turma. Qual o espaço amostral, ou seja, o conjunto das possibilidades quando lançada a moeda? Qual a probabilidade de o resultado ser cara?

Após essa interação, aproveitando a empolgação da turma, o problema dos aniversários poderá então ser trabalhado da seguinte maneira:

Para que duas pessoas aniversariem em dias diferentes, a primeira pessoa tem 365 dias possíveis dias para aniversariar, e a outra terá de aniversariar em um dos 364 dias restantes. Os casos possíveis são claramente o produto 365 vezes 365.

Daí, a probabilidade de duas pessoas aniversariarem em dias diferentes é $\frac{365\times364}{365\times365}$, sendo o numerador correspondendo aos casos favoráveis e o denominador aos casos possíveis.

Podemos escrever os casos favoráveis da forma

$$365\times364 = 365\times364\times\frac{363!}{363!} = \frac{365!}{(365-2)!} =$$
$$= \frac{365!}{(365-2)!}\times\frac{2!}{2!} = \frac{365!}{(365-2)!\times2!}\times2!$$

e os casos possíveis como 365^2.

Observemos que na primeira linha multiplicou-se por $\frac{363!}{363!} = 1$ que não altera a igualdade para chegarmos na fórmula de arranjo. Na segunda linha multiplicou-se por para obtermos a fórmula da combinação, a qual aparece multiplica por 2!. O propósito dessas operações algébricas é mostrar ao aluno como podemos manipular algebricamente essas igualdades para encontrarmos as respostas em função do arranjo ou da combinação. Assim, pode-se utilizar planilhas eletrônicas para realizarmos esses cálculos, visto que são números grandes.

Mas o aluno poderá questionar: e na hora da avaliação, como farei para realizar esse cálculo?

Uma possível resposta seria que, para números grandes, a resposta pode ser dada na forma fatorial como acontece em algumas questões do Exame Nacional do Ensino Médio.

Portanto, para n pessoas aniversariem em dias distintos conjecturamos a fórmula $\frac{\frac{365!}{(365-n)!\times n!}\times n!}{365^n}$, sendo n o número de pessoas. Mas a probabilidade de que n pessoas façam aniversário no mesmo dia é $\mathbf{1} - \frac{\frac{365!}{(365-n)!\times n!}\times n!}{365^n}$.

4.2.10 Utilizando o LibreOffice Calc durante a aula:

Analisados os dados do problema, pode-se construir uma tabela no LibreOffice Calc, do seguinte modo:

➔ digitar 1 na célula A2, 2 na célula A3, e então selecionando as duas e arrastando até a célula A29 pela alça de preenchimento;

➔ na célula B2 digita a fórmula =1-COMBIN(365;A2)*FATORIAL(A2)/365^A2, e então arrastá-la até a célula B29 pela alça de preenchimento.

➔ Selecionar as células da coluna B com as probabilidades, clicando em **formatar células, na guia números, na categoria porcentagem**, formatando-as como porcentagem com zero casas decimais.

Figura 11 - Problema dos Aniversários

B2 =1-COMBIN(365;A2)*FATORIAL(A2)/365^A2

	A	B	C	D	E
1	**Pessoas**	**Probabilidade**			
2	1	0%			
3	2	0%			
4	3	1%			
5	4	2%			
6	5	3%			
7	6	4%			
8	7	6%			
9	8	7%			
10	9	9%			
11	10	12%			
12	11	14%			
13	12	17%			
14	13	19%			
15	14	22%			
16	15	25%			
17	16	28%			
18	17	32%			
19	18	35%			
20	19	38%			
21	20	41%			
22	21	44%			
23	22	48%			
24	23	51%			
25	24	54%			
26	25	57%			
27	26	60%			
28	27	63%			
29	28	65%			

Fonte: o autor

O aluno se surpreenderá com os números, pois com 23 pessoas temos mais de 50% de chance de duas aniversariarem no mesmo dia. Caso o aluno explore a planilha introduzindo mais pessoas, perceberá que com 50 pessoas há pouco mais de 97% de chance de duas terem a mesma data de aniversário.

Interessante notar que, durante a reescrita dos casos favoráveis, partindo de um exemplo simples, temos na primeira igualdade o arranjo $365 \times 364 = \frac{\mathbf{365!}}{\mathbf{(365-2)!}}$ e na igualdade seguinte a combinação $365 \times 364 = \frac{365!}{(365-2)!} = \frac{\mathbf{365!} \times 2!}{\mathbf{(365-2)!} \times \mathbf{2!}}$. Isso possibilitou a construção das fórmulas utilizadas na planilha e podem ainda ajudar no esclarecimento do conceito de arranjo e combinação.

Na fórmula do cálculo da probabilidade, foi usado o comando COMBIN(n;k) referente a combinação, mas pode-se usar PERMUTAR(n;k) referente ao arranjo, conforme figura 12.

Figura 12 - Tabela - Arranjo

B2 =1-PERMUTAR(365;A2)/365^A2

	A	B	C	D
1	**Pessoas**	**Probabilidade**		
2	5	3%		
3	10	12%		
4	15	25%		
5	20	41%		
6	23	51%		
7	25	57%		
8	30	71%		
9	35	81%		
10	40	89%		
11	45	94%		
12	50	97%		

Fonte: o autor

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi apresentar um conjunto de atividades para o ensino de progressões geométricas e probabilidades na forma de sequências didáticas, apresentando e explorando problemas curiosos e instigantes, de maneira a manter a atenção e o interesse dos alunos do ensino médio. Esse objetivo foi parcialmente atingido, tendo em vista que a prática pedagógica é muito rica e sempre tem muito a agregar em trabalhos como este. O norte deste trabalho foi a crença no fato de que a motivação é a ferramenta fundamental para que o aluno volte sua atenção e suas energias para a aula, e que a utilização de um problema motivador no momento certo da aula pode fazer a provocação necessária para que o discente dê uma chance ao que está sendo apresentado.

Diante de tantos recursos tecnológicos competindo pela atenção dos alunos, a busca por formas e meios que tornem o ensino da matemática mais prazeroso, potencializado, deve ser uma constante na vida dos professores. Com esse objetivo foi feita a proposição da utilização dessas sequências didáticas com tantos problemas motivadores (e com tantas pausas para a motivação) como um recurso didático.

O uso de problemas motivadores e pausas para a participação ativa, de vídeos da internet e outros materiais multimídia possibilita a atuação mais direta do aluno, mostrando um meio muito rico de aquisição do conhecimento. Esse conteúdo poderá ser visualizado em computadores ou nos celulares dos educandos, o que também os conscientiza das ferramentas poderosas que estão à disposição.

Este trabalho foi pensado desde o início como um produto educacional que pudesse ser usado por professores do ensino médio para o enriquecimento de suas aulas.

Uma proposta imediata para trabalhos futuros é a extensão deste modelo de sequência didática com problemas motivadores para uma gama maior de assuntos de matemática, uma vez que são vários os temas que podem ser explorados com suas inúmeras questões polêmicas e impressionantes. Também pode-se encaminhar as sequências didáticas para alguns professores atuantes no ensino médio, para que eles possam aplicá-las em sala de aula e avaliarem a experiência que eles tiveram com seus alunos.

REFERÊNCIAS

BARICHELLO, Leonardo; NEHRING, Marta; W. PAQUES, Otília. **Pra lá de Bagdá – Coleção de recursos educacionais – Matemática multimídia**. [*S. l.*], [*s. d.*]. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1158. Acesso em: 12 nov. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília: MEC / SEB, 2018. 595 p. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 11 set. 2021.

BRASIL. **PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (ENSINO MÉDIO) - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2000. 58 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 11 set. 2021.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 144 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 11 set. 2021.

FREITAS, Hélia Maria Soares de; BARRENECHEA, Miguel Angel de. **Filosofia e educação - UNIRIO.** Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2012. v. único

LOURENÇO, Abílio Afonso; ALMEIDA DE PAIVA, Maria Olímpia. **A motivação escolar e o processo de apredizagem**. [*s. l.*], 2010.

MAXIMIANO, Cesar Amaru. **Introdução à administração**. São Paulo: Atlas, 2003.

MORGADO, Augusto Cézar; PINTO CARVALHO, Paulo Cezar. **Matemática Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção Profmat, v. 12).

POSAMENTIER, ALFRED S.; KRULIK, STEPHEN. **a arte de motivar os estudantes do ensino médio para a matemática**. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda., 2014.

RAMOS RIFO, Laura Leticia; ROMAN, Patrícia; DE ANDRADE CAMPELLO JUNIOR, Antonio Carlos. **À espera da meia-noite – Coleção de recursos educacionais – Matemática multimídia**. [*S. l.*], [*s. d.*]. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1041. Acesso em: 12 nov. 2020.

RPM 39 - O PARADOXO DE ZENÃO. [*S. l.*], [*s. d.*]. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/39/2.htm. Acesso em: 10 set. 2021.

TAHAN, Malba. **O Homem que Calculava**. 89. ed. Rio de Janeiro: Record, 2016.