Universidade Estadual de Londrina

Alexandre Maicher Neto

O TEMA DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU COMO ESPAÇO PARA A GENERALIZAÇÃO

Londrina

2021

Alexandre Maicher Neto

O TEMA DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU COMO ESPAÇO PARA A GENERALIZAÇÃO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Londrina - UEL, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho

Londrina
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

m217o Maicher Neto, Alexandre.
O tema de equações do segundo grau como espaço para a generalização / Alexandre Maicher Neto. - Londrina, 2021.
65 f. : il.

Orientador: Túlio Oliveira de Carvalho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2021.
Inclui bibliografia.

1. Generalização - Tese. 2. Equação do segundo grau - Tese. 3. Completar quadrados - Tese. 4. Fórmula de Bháskara - Tese. I. Carvalho, Túlio Oliveira de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

O TEMA DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU COMO ESPAÇO PARA A GENERALIZAÇÃO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Londrina - UEL, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Túlio Oliveira Carvalho

BANCA EXAMINADORA

Orientador
Professor Dr. Túlio Oliveira de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Professora Dra. Ana Márcia F. Tucci de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Professor Dr. Sérgio Carrazedo Dantas
Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR

Londrina 22 setembro de 2021

DEDICATÓRIA

Dedico essa dissertação aos meus filhos Gabriela, Vicente e Lívia, na esperança de que sirva de inspiração e no futuro possam ir além.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por conceder-me a vida e a capacidade de poder iniciar, desenvolver e concluir esse trabalho com sucesso, fortalecendo-me em meus momentos de deserto para que persistisse em alcançar esse objetivo.

Agradeço aos meus pais por terem ensinado a não desistir dos sonhos em razão das dificuldades que encontramos, mas sim superá-las.

Agradeço à minha esposa Simone, uma incentivadora desse projeto, que deu suporte cuidando dos nossos filhos e da nossa casa para que eu pudesse me concentrar nos estudos e concluir o mestrado.

Agradeço sem exceções, os professores que fizeram parte dessa trajetória nas disciplinas do curso, por terem contribuído para o sucesso dessa jornada, cito a professora Dra. Ana Lucia da Silva, que enquanto coordenadora do Profmat não mediu esforços em organizar grupos de estudos afim de que pudéssemos melhorar nossa compreensão acerca da matemática. Agradeço também aos idealizadores e mantenedores do Profmat-SBM bem como a Universidade Estadual de Londrina pela oportunidade de realizar esse mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Por fim agradeço imensamente o professor Dr. Túlio Oliveira de Carvalho, orientador dessa dissertação, por ter direcionado brilhantemente esse projeto, tendo serenidade nos encaminhamentos e na condução do processo. Obrigado por suas contribuições e os ensinamentos que muito contribuíram para o meu desenvolvimento enquanto professor.

RESUMO

MAICHER NETO, Alexandre. **O tema de equações do segundo grau como espaço para a generalização.** 2021. 65 páginas. Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (Profmat) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina 2021.

Essa dissertação apresenta uma proposta de ensino das equações de segundo grau, a ser apresentada a partir do final do ensino fundamental, sugerindo a abordagem da generalização de fórmulas matemáticas utilizadas no período escolar. Para tanto, consultamos os documentos oficiais que orientam o ensino da matemática no Brasil e no Estado do Paraná, entre eles a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE) e o Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP), constatando que os mesmos reiteram a relevância do tema. Do mesmo modo, buscamos subsídios na literatura referente à Educação Matemática para fundamentar a proposta sobre o ensino da álgebra na prática escolar. Abordamos ainda aspectos históricos que de fato foram imprescindíveis para o desenvolvimento dessa dissertação, uma vez que utilizamos a técnica de completar quadrados, empregada desde o século XII por Bháskara, para resolver situações problemas. O método de completar quadrados se constitui em técnica indispensável para obter a generalização da fórmula resolutiva de equações de segundo grau. Na sequência relacionamos as equações de segundo grau com uma representação geométrica, a fim de explanar a técnica do completamento de quadrados. Concluímos com sugestões de situações problemas que abordam o tema, confeccionadas pelo autor. Por fim, relatamos as impressões observadas diante da apresentação de um dos problemas a estudantes do nono ano de uma escola pública.

Palavras-chave: Generalização; demonstração; álgebra; equação de segundo grau; completar quadrados; fórmula de Bháskara; situações problemas.

MAICHER NETO, Alexandre. The theme of second degree equations: a room for generalizing. 2021. 65 pages. Dissertation from the Professional Master's Program in Mathematics (Profmat) - State University of Londrina, Londrina 2021.

ABSTRACT

This dissertation presents a proposal for teaching quadratic equations, to be presented from the end of elementary school onwards, suggesting an approach of generalizing mathematical formulas used in this period. We consulted the documents that regulate the teaching of mathematics in Brazil and in the State of Paraná, including the Base Nacional Comum Curricular (BNCC), the Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE) and the Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP), all of which confirm the relevance of the theme. Likewise, we gathered support, in the literature related to Mathematics Education, to the proposal that guided us on the teaching of algebra. We also address historical aspects that were in fact essential for the development of this dissertation, since the technique of completing squares was used as early as the 12th century by Bhaskara, to solve situations yielding quadratic equations. The method of completing squares proves itself an indispensable technique to obtain the formula for the roots of quadratic equations. We relate the second degree equations with a geometric representation, in order to explain the technique of completing squares. We conclude with suggestions of problems situations that address the topic, composed by the author. Finally, we report the impressions observed in the presentation of one of the situations suggested for the ninth grade students of a public school.

Keywords: Generalization; proof; algebra; quadratic equations; completing squares; Bhaskara’s formula; problems situations.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Instrumento imprescindível para o desenvolvimento de diversos setores da nossa sociedade, como a indústria, a tecnologia, a construção civil, o comércio, a medicina, entre tantos outros, a matemática é a ciência por meio da qual se pode tentar compreender e desenvolver o mundo em que vivemos.

Uma forma de ver o desenvolvimento da humanidade está em acompanhar, retrospectivamente, o desenvolvimento de instrumentos matemáticos: os números, as operações, as propriedades, as regras, os conceitos e definições, as fórmulas e os teoremas, construtos que se constituem em respostas a perguntas que vão se tornando mais abrangentes ao longo do tempo. Esta capacidade de abrangência ou generalidade da matemática é o alicerce principal desta dissertação

A matemática é um processo da construção humana. Em particular, a matemática escolar deve expressar essa realidade, ser fundamentada em conceitos, regras, definições e generalizações que posteriormente serão empregadas em situações problemas elementares da vida social.

> As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro. Como as entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a auto-estima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender. (Lima, 2007 p.155).

No decorrer de alguns anos de magistério lecionando em turmas de ensino fundamental e médio, trabalhando os conteúdos previstos na grade curricular, podemos perceber que as aulas de matemática muitas vezes são resumidas à manipulação numérica e algébrica, sem preocupações em explorar os conceitos algébricos e geométricos que de fato promovem a compreensão da essência do conteúdo.

As aulas em que são realizadas contextualizações a temas relacionados a atualidade são pontuais, geralmente no final da abordagem do conteúdo. Com isto, a rotina resume-se a aplicar técnicas resolutivas, utilizando procedimentos e fórmulas conectados tão somente ao conjunto de exercícios da subdivisão do currículo que esteja em pauta.

Os fatores que podem contribuir para que essas ações perdurem podem estar no fato de que os materiais orientadores das práticas em sala de aula, o principal deles sendo o livro didático, não faz referência a conceitos e generalizações como deveriam. Outra razão pode ser que nós professores não conhecemos os temas com a profundidade que deveríamos.

> A manipulação é tão marcante em nosso ensino que, para o público em geral (e até para muitos professores e alunos), é como se a matemática se resumisse a ela. (Lima, 2007 p.157)

Neste trabalho, são propostas abordagens dos conceitos matemáticos relacionados à equação do segundo grau. O processo de ensino deste tema específico toma grande tempo das aulas de matemática, cerca de três meses no nono ano do ensino fundamental. Oferecem-se conexões entre aspectos numéricos, algébricos e geométricos com vistas a contribuir para a compreensão deste tópico particular, ressaltando a interligação entre visões como característica essencial da matemática.

Com isso defendemos um ensino que contemple em sua prática o uso de generalização das fórmulas que são empregadas nas atividades de sala de aula, por entender que as generalizações envolvem conceitos importantes, que serão também ilustrados em situações problemas. Trata-se tornar manifesto que a matemática e os seus problemas se comunicam pelas ferramentas (matemáticas) que os resolvem.

Entende-se como *generalização matemática* a fixação de um modelo, obtido a partir da percepção da regularidade apresentada numérica ou algebricamente, podendo ser sintetizada afim de gerar uma expressão ou uma fórmula, que servirá como algoritmo para resolver casos análogos.

> Acreditamos que as questões relativas à apresentação da demonstração formal de um certo resultado em matemática são importantes e devem ser introduzidas desde a Educação Básica. Acreditamos que o estudante pode perceber que a Matemática é um conjunto bem organizado de resultados, e que uma demonstração é a resposta a um ‘por quê’, o que também traz aproximações, no nosso ponto de vista entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar. (Mosca, Carvalho, Carvalho, 2016 p. 328)

O objetivo deste trabalho é apresentar uma sistematização do desenvolvimento em linguagem algébrica da fórmula de Bháskara, que pode ser apresentado aos estudantes do nível fundamental. Com isto, esta sistematização deverá ter maiores possibilidades de ser efetivamente usada na prática escolar.

Embora o tema seja recorrente, o desenvolvimento do processo traz consigo o desafio de uma nova abordagem, uma vez que a forma tradicional usa diretamente a fórmula resolutiva para determinar as raízes. Para compreender e realizar a generalização, utilizamos o processo de completar quadrados, técnica essencial que é utilizada para determinar as raízes da equação de grau dois, exploradas nas atividades propostas neste trabalho e recomendada para que sejam utilizadas em sala de aula.

Apresenta-se brevemente a trajetória acadêmica, a carreira profissional do professor autor, e os objetivos que o nortearam nesta proposta.

Graduou-se na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Mandaguari (FAFIMAN), no curso de Ciências com habilitação em Matemática, curso com duração de três anos, iniciado em 1998 e concluído em 2000. Os dois primeiros anos correspondiam ao curso de ciências naturais, habilitando o professor a atuar nas disciplinas de ciências e matemática apenas no ensino fundamental II.

Nestes dois anos, a grade curricular era composta pelas disciplinas de matemática, desenho geométrico, física, química, biologia, metodologia de ensino, filosofia e língua portuguesa. Os conteúdos da disciplina de matemática eram equivalentes aos do ensino médio. No terceiro ano, chamado de habilitação em matemática, apresentaram-se os conteúdos do ensino superior, como cálculo, análise matemática, álgebra e geometria analítica, já consideradas mais complexas.

Concluída a graduação, fez o curso de especialização em Educação Matemática da UEL, em 2001. Na sequência, em 2003, inscreveu-se para a seleção do mestrado em Educação Matemática, também da UEL, mas não obteve sucesso. Este insucesso trouxe a percepção de que seria necessário melhorar muito os conhecimentos de matemática.

O segundo fator a trazer a percepção da necessidade de qualificação surgiu no momento em que as avaliações externas de aprendizagem, como a prova Brasil, começaram a fazer parte da rotina escolar, pois nessas avaliações os níveis de aprendizado que nossos alunos devem ter sobre um conteúdo são bem definidos, deixando claro para o professor que sua aula deve percorrer os vários níveis de complexidade: básico, adequado e avançado.

A Prova Brasil é uma avaliação que começou a ser aplicada pelo MEC em 2005 aos alunos formandos do ensino fundamental I, II e ensino médio, como instrumento para verificar o aprendizado. Essa prova é um dos itens que compõem o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), e sua correção serve para medir o nível de proficiência de cada estudante nas disciplinas de língua portuguesa e matemática em nível básico, adequado e avançado, e também apresenta o percentual de estudantes com conhecimento abaixo do básico.

Para o desenvolvimento e organização deste trabalho foram consultados os documentos oficiais que normatizam os conteúdos que devem ser contemplados na prática escolar. No capítulo 1 mencionamos as recomendações da BNCC sobre o ensino da matemática explorando o desenvolvimento algébrico das generalizações como proposta de ensino. Também consultamos as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (DCE), o Referencial Curricular do Paraná e o Currículo da Rede Estadual do Paraná (CREP) documentos norteadores que subsidiam o trabalho pedagógico a ser desenvolvido em sala de aula.

A análise dos documentos citados ratifica que a generalização a partir dos anos finais do ensino fundamental e sobretudo durante todo o ensino médio, é tema essencial e deve ser abordada e apresentada aos estudantes.

> Assim, é necessário conhecer as demonstrações das fórmulas, teoremas, conhecer e aplicar as regras e convenções matemáticas, tanto no estudo da geometria de posição como no cálculo de área de figuras geométricas planas e espaciais e de volume de sólidos geométricos, em especial de prismas, pirâmides (tetraedro), cilindro, cone e esfera. (Paraná, 2008 p. 56)

O capítulo 2 apresenta a fundamentação do ensino da álgebra na prática escolar, na perspectiva da Educação Matemática.

No capítulo 3, apresenta-se a história do desenvolvimento da resolução de uma equação do segundo grau, evidenciando que este processo resolutivo por meio de completar quadrados é conhecido desde o século XII.

O capítulo 4 traz propriamente a abordagem do tema equação do segundo grau, sendo apresentada no contexto algébrico e geométrico, justamente para fazermos as relações e desenvolver as técnicas de completar quadrados. Este mesmo capítulo traz duas seções, a primeira com sugestões de situações problemas desenvolvidas pelo autor, ou adaptadas de exames. Na seção 4.2, apresentamos as impressões observadas durante o desenvolvimento de uma das situações problemas elaboradas, quando aplicadas em sala para estudantes do nono ano de uma escola pública.

No último capítulo apresentamos os reflexos produzidos pelo Profmat na prática profissional do autor desta dissertação, e as impressões sobre a trajetória antes e depois do mestrado, chamando a atenção para a responsabilidade de ensinar.

1 A BNCC E O ENSINO DA ÁLGEBRA

A Base Nacional Comum Curricular, BNCC, é o mais recente documento normativo, que regulamenta os níveis de aprendizagens essenciais da educação básica no Brasil, que todos os estudantes devem ter assegurados durante o período escolar, compreendendo a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio.

Esse documento foi elaborado, sob a coordenação do Ministério da Educação, teve a participação da comunidade escolar de todos os Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, onde cada profissional pôde contribuir com seu parecer sobre os conteúdos que julgava ser adequado manter, ser suprimido ou ser trabalhado em outro ano/série.

Ele segue as determinações do Plano Nacional de Educação (PNE) e a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) que orienta para que os estudantes recebam uma formação integral com vistas para o desenvolvimento do cidadão e de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

> Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996)1, e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. (Brasil, 2018 p. 7)

A BNCC é uma referência nacional para a elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas das redes, estaduais, do distrito federal e dos municípios, além de contribuir com políticas e ações para estabelecer normas referentes à formação de professores, à avaliação, à classificação de conteúdos essenciais a serem trabalhados no ano ou série e aos investimentos necessários a serem realizados para o desenvolvimento da educação, induzindo uma homogeneização do ensino em todo o território nacional.

> Referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares, a BNCC integra a política nacional da Educação Básica e vai contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de professores, à avaliação, à elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação. (Brasil, 2018 p.8)

Ela foi fundamentada na Constituição Federal de 1988, embasada em dois artigos que são alicerces para uma educação efetiva e de qualidade: o primeiro, de número 205, afirma que a educação é direito de todo cidadão e um dever do Estado e da família e deve ser apoiada pela sociedade.

> a educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho (BRASIL, 1988).

O segundo artigo, de número 210, traz mais precisamente uma das metas da BNCC, ou seja, formar uma base curricular de conteúdos elementares para serem trabalhados em todos os estabelecimentos de ensino do território nacional, entretanto com espaço para a parte diversificada que deverá prestigiar as particularidades de cada região, objetivando portanto, um processo de aprendizagem homogêneo e democrático respeitando a diversidade cultural.

> Fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais (BRASIL, 1988 p. 10)

Partindo desse princípio normativo, garantido constitucionalmente, a BNCC fundamenta-se pedagogicamente em dois conceitos, o desenvolvimento de competências, e o compromisso com uma educação com formação integral.

O conceito de competências no trabalho pedagógico, consiste em organizar o currículo de forma a possibilitar o aluno a ***saber*** sobre os conteúdos da grade, dominar as técnicas de resolução de uma equação por exemplo, saber interpretar, representar algebricamente, conhecer o conceito de incógnita, estabelecer uma igualdade, expressar numérica e algebricamente a situação proposta e usar um algoritmo para resolver a equação.

No entanto isso não é tudo, é preciso aplicar esse conhecimento, é importante ***saber fazer***, saber aplicar o que foi apreendido, o aluno precisa conseguir transferir esse conhecimento para situações que possibilitem de alguma forma utilizar essa teoria na resolução de problemas que aparecem na sua vida, em casos particulares e em situações de trabalho.

> Por meio da indicação clara do que os alunos devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho). (Brasil, 2018 p. 13)

O desenvolvimento de competências vem sendo implantado no Brasil de forma oficial a partir da década de 1990, com a implementação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, cuja proposta metodológica é o desenvolvimento de competências e habilidades.

No entanto esse conceito metodológico não foi adotado por todos os estados brasileiros, destoando de outros países como Portugal, França, Estados Unidos, Austrália, Polônia, Chile e Peru, que utilizam essa metodologia.

Esse modelo também é empregado por avaliações externas, como o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa), aplicada por amostragem a cada dois anos no Brasil, avaliando a interpretação, resolução de problemas e a capacidade de explicar os fenômenos da natureza, envolvendo as disciplinas de português, matemática e ciências, com alunos de 15 anos de idade.

A BNCC propõe que a Educação Básica precisa também atentar para o desenvolvimento integral do indivíduo, não só privilegiando os aspectos cognitivos do saber e saber fazer, mas também os que se referem a questões afetivas, individuais e coletivas desse cidadão.

> Reconhece, assim, que a Educação Básica deve visar à formação e ao desenvolvimento humano global, o que implica compreender a complexidade e a não linearidade desse desenvolvimento, rompendo com visões reducionistas que privilegiam ou a dimensão intelectual (cognitiva) ou a dimensão afetiva. (Brasil, 2018 p. 14)

O Brasil é um país que apresenta uma grande diversidade cultural, marcado pela desigualdade social, onde os investimentos e os programas educacionais são muito divergentes de uma região para a outra, causando defasagem de conteúdo para estudantes de todo o Brasil.

Por isso a BNCC é um documento que vêm normatizar o currículo educacional no país. Ela propõe conteúdos essenciais que os estudantes matriculados nas escolas brasileiras precisam conhecer, os conhecimentos mínimos para que se tenha uma boa formação educacional, proporcionando uma base curricular em todo território nacional.

Por esse motivo as medidas pedagógicas das Secretarias de Educação precisam estar fundamentadas na BNCC contemplando as especificidades regionais do seu estado, para depois então elas nortearem o planejamento de trabalho das escolas, que por sua vez vai contemplar as particularidades da sua região.

O documento da BNCC prevê também a equidade, se referindo aos povos que historicamente foram excluídos e viveram à margem de praticamente todo o processo educacional, como os povos indígenas, as comunidades de quilombolas e demais afrodescendentes, os que não conseguiram estudar na idade correta e alunos com necessidades educacionais especiais.

Dessa forma, a BNCC e os currículos elaborados por cada Secretaria de Estado se completam, a BNCC assegura que os conteúdos essenciais sejam trabalhados em cada uma das etapas da Educação Básica, e o currículo fundamentado por ela, mas elaborado por secretarias e cada uma de suas escolas, sendo elaborado de forma autônoma, adequando tais conteúdos à realidade local, regional e global, oportunizando portanto uma visão macro principalmente de temas de interesse mundial como a educação ambiental, a educação para o trânsito, a educação alimentar e nutricional, entre outros.

Contemplado os aspectos regulamentares e normativos, mas tendo como foco o objeto deste trabalho, o uso de generalizações no ensino da matemática, foi realizada uma consulta para verificar se o tema é abordado pela BNCC, e se existe relevância dele no processo de ensino e aprendizagem da matemática no ensino fundamental e médio.

Constatamos que o ensino fundamental é dividido em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Embora as áreas do conhecimento encontram-se separadas, espera-se que os alunos, com as articulações propostas pelo professor, desde as séries iniciais, sejam estimulados a fazer relações entre o conhecimento empírico que trazem, com o conhecimento científico sistematizado por conceitos e propriedades, dentro de cada área do conhecimento, e utilizem esses conceitos e propriedades para resolver problemas nos contextos de sua necessidade.

Dentro desse trabalho de sistematização, a utilização das propriedades operatórias da matemática é uma oportunidade de generalização que pode ser estimulada, já ao final do Ensino Fundamental.

> A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental. (Brasil, 2018 p. 265)

A unidade temática Números, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, tem por objetivo que os alunos resolvam problemas com números naturais e racionais de representação decimal finita, fazendo uso dos algoritmos operatórios, espera-se que façam cálculo mental e estimativas, tenham capacidade de argumentar e justificar seus resultados, e também utilizem a calculadora, que tenham uma boa leitura e escrita dos números, e saibam o valor posicional dos algarismos em um numeral.

Para os anos finais do Ensino Fundamental, além de operar com números racionais, é apresentado o conjunto dos números irracionais, formando então o conjunto dos números reais, e espera-se que os alunos consigam reconhecer, comparar, classificar e localizar os números reais na reta numérica, e resolver problemas nos mais diferentes contextos usando os algoritmos operatórios fundamentais. A unidade temática Números portanto, não faz referência ao tema generalizações.

A unidade temática Álgebra tem como objetivo o desenvolvimento do pensamento e da escrita algébrica, processo que leva o aluno a perceber uma regularidade em uma sequência numérica e induz o mesmo a generalizá-la, por meio de uma representação que utiliza letras e símbolos no lugar de números, obtendo, um modelo genérico daquela sequência.

As primeiras escritas algébricas são as equações e inequações. Elas possuem a representação literal ou simbólica para uma incógnita. O conceito de incógnita está presente desde as séries iniciais, não com utilização de letras, mas símbolos para representar um valor desconhecido, como é o caso de se trabalhar com os algoritmos operatórios, na falta de uma das parcelas de uma soma por exemplo, usa-se o símbolo de um quadradinho para representar a parcela oculta.

> Anos Iniciais: como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação. (Brasil, 2018 p. 270)

Para os anos finais do ensino fundamental, são intensificados os estudos desenvolvidos no ciclo anterior. Espera-se que ao final dessa etapa os alunos compreendam os significados de variáveis numéricas nas expressões algébricas e nas funções, o conceito de incógnita nas equações, e sejam capazes de resolvê-las. Além disto, tenham capacidade de reconhecer a regularidade de uma sequência numérica e a generalize.

Com isto, o desenvolvimento da álgebra, vêm contribuir para o pensamento computacional, processo que estimula a capacidade de traduzir uma situação da linguagem coloquial para a generalização em uma fórmula, e essa generalização passa a ser utilizada para resolver outros problemas de contexto semelhante por outra pessoa ou um computador após sua programação. Dessa forma a relação entre a álgebra e o pensamento computacional proporciona o desenvolvimento da habilidade de identificar um padrão para ser generalizado.

> Outro aspecto a ser considerado é que a aprendizagem de Álgebra, como também aquelas relacionadas a Números, Geometria e Probabilidade e Estatística, podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos, tendo em vista que eles precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa. (Brasil, 2018 p. 271)

Notadamente percebe-se a necessária integração da tecnologia e a matemática em sala de aula, com o propósito de favorecer, por exemplo, o entendimento do comportamento do gráfico de uma função em razão da variação de seus coeficientes, do uso de simuladores matemáticos para resolver uma equação, da sua utilização como representação gráfica e de organização. Em resumo, entende-se que o uso da tecnologia na interpretação e representação de problemas matemáticos é um dos significados condizentes com pensamento computacional, tal como proposto na BNCC.

Além disto, quando a BNCC faz relação do pensamento algébrico com o pensamento computacional pode estar sugerindo que os conceitos de uma são profundamente relacionados com os conceitos da outra, quando na verdade não são totalmente, pois o conceito de variável no ensino da álgebra é um, podemos exemplificar como o símbolo dado ao valor desconhecido na escrita de uma expressão algébrica, enquanto esse mesmo conceito representa no campo da programação um espaço físico, destinado ao preenchimento no momento em que se realiza um cadastro por exemplo, na memória do computador que recebe um nome e um valor.

Desse modo percebe-se que existem relações entre os pensamentos algébricos e o computacional que podem ser exploradas, no entanto a própria BNCC não os define com a clareza necessária para orientar e direcionar os encaminhamentos na relação entre esses conceitos conforme se espera.

Porém, a unidade temática Álgebra contempla a necessidade do desenvolvimento algébrico durante todo o curso fundamental, e expõe a importância do trabalho de generalização de situações como sendo um processo relevante para sintetizar propriedades e sua aplicação, como por exemplo, em contextos de programação de computadores.

A unidade temática Geometria caracteriza-se por estudar a posição e deslocamento no espaço, formas de figuras planas e espaciais, com a intenção de desenvolver o pensamento geométrico do aluno, para futuras investigações de propriedades geométricas.

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, espera-se que os alunos possuam capacidade de localização e registro dessa localização no plano, estimem medidas, saibam classificar um polígono por meio de suas propriedades, conheçam as figuras espaciais elementares, e sua respectiva planificação.

Para os anos finais do Ensino Fundamental, o estudo da Geometria é consolidado e aprofundado, abordando questões de homotetia que culminam com os estudos de congruência e semelhança de figuras planas, especialmente o triângulo com suas relações de medidas de ângulos, que podem ser utilizadas como introdução para realizar pequenas generalizações, onde é possível verificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, e essa generalização é base para falar dos demais polígonos.

Portanto a Geometria vai além de aplicar fórmulas para resolver exercícios, ela é um campo que, em conjunto com a álgebra, possibilita o desenvolvimento do raciocínio abstrato, fazendo o estudo de questões geométricas, e assim tendo condições de desenvolver o conceito lógico de uma generalização ou da formulação de um teorema.

> Assim, a Geometria não pode ficar reduzida à mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. (Brasil, 2018 p. 272)

Na unidade temática Grandezas e Medidas, anos iniciais, se faz a integração e consolidação dos conhecimentos abordados nas unidades temáticas Números trabalhando questões relativas a medidas de comprimento, massa, tempo e temperatura, e a Geometria com atividades de cálculo de área do quadrado e do triângulo e volume do cubo e do paralelepípedo sem uso de fórmulas, fazendo uso das malhas e blocos retangulares.

> Essa unidade temática contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico. (Brasil, 2018 p. 273)

Para os anos finais com essa unidade temática espera-se que os estudantes reconheçam as medidas comprimento, área, volume e ângulo em diferentes contextos, resolvam problemas consolidando assim as expectativas da fase anterior e avancem, de modo a articular essas grandezas a outras derivadas como velocidade e densidade e tenham conhecimento sobre medida de capacidade de armazenamento em computadores, quilobyte, megabyte e gigabyte. Nesta fase espera-se que os alunos tenham capacidade de escrever expressões que permitam calcular área e volume de figuras elementares.

> Nessa fase da escolaridade, os alunos devem determinar expressões de cálculo de áreas de quadriláteros, triângulos e círculos, e as de volumes de prismas e de cilindros. Outro ponto a ser destacado refere-se à introdução de medidas de capacidade de armazenamento de computadores como grandeza associada a demandas da sociedade moderna. (Brasil, 2018 p. 273)

Desse modo a unidade temática Grandezas e Medidas deixa claro que durante os anos finais do ensino fundamental o estudante deve reconhecer o algoritmo de calcular área e volume, o que de fato é um processo algébrico de generalização.

Na unidade temática Probabilidade e Estatística observa-se a necessidade de saber coletar dados, interpretá-los, analisá-los para poder ser capaz de tomar a melhor decisão, nas situações problemas que costumeiramente enfrentamos em nosso dia-a-dia, bem como calcular para prever a possibilidade de ocorrência ou não de um evento. Nesta unidade, não há referência direta sobre uma abordagem algébrica, mas está implícita no cálculo pela chamada regra de três.

Com relação ao Ensino Médio a BNCC também tem a abordagem seguindo o modelo de competências, como descrito no Ensino Fundamental, com o propósito de desenvolver habilidades de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para alcançar essas habilidades, o fazer, o aluno precisa ter a competência, que é o saber raciocinar, saber representar, saber comunicar, saber argumentar para que ao longo do processo desenvolva o pensamento matemático cada vez mais elaborado.

> Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (Brasil, 2018 p. 529)

A competência de raciocinar é desenvolvida pela interação entre os envolvidos em sala de aula, ao investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática.

A competência de representar pressupõe a elaboração de registros diante de um objeto matemático.

A competência de comunicar é importante para que os estudantes desenvolvam a capacidades de justificar suas conclusões por meio de sustentação oral, não somente por meio de expressões matemáticas.

A competência de argumentar se apoia nas competências de raciocinar e representar, pois pressupõe a formulação e a verificação de conjecturas, com a apresentação de justificativa matemática.

Com isso a proposta do ensino da matemática para o Ensino Médio é de consolidação e aprofundamento das habilidades propostas no Ensino Fundamental.

Observa-se uma estrutura diferente de apresentar os conteúdos da disciplina em relação ao Ensino Fundamental, pois no Ensino Médio os conteúdos não são apresentados por meio de unidades temáticas, embora seja possível organizá-los dessa forma. A proposta é articular as competências conforme a necessidade, e conectá-las sempre que o desenvolvimento de uma suscitar o desenvolvimento de outra, a qualquer tempo, independente do ano escolar.

> As competências não têm uma ordem preestabelecida. Elas formam um todo conectado, de modo que o desenvolvimento de uma requer, em determinadas situações, a mobilização de outras. (Brasil, 2018 p. 530)

A competência 1 é pautada em uma matemática voltada para o desenvolvimento da formação do cidadão, uma vez que a proposta é de desenvolver a capacidade de interpretar situações em diferentes contextos, para poder ser capaz de tomar decisões relacionadas ao cotidiano.

A competência 2 consolida a anterior e propõe a articulação de conceitos e procedimentos matemáticos, por meio da investigação de temas da atualidade, como saúde, tecnologia, meio ambiente e trabalho, estando ligada com a formação e conscientização do cidadão.

A competência 3 faz uso de conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em contexto que tenha significado concreto, portanto, relacionado ao dia a dia do estudante, e ao mundo do trabalho de forma geral, embora essa mesma competência destaque que é preciso construir significados para os problemas próprios da Matemática, fazendo referência à construção de modelos matemáticos, e à escrita algébrica de um exercício.

A competência 4 sugere a utilização das diversas formas de registros matemáticos, o algébrico, o geométrico, o estatístico e o computacional. Essa capacidade de ressignificar um problema por meio de mais de um registro, quando possível, eleva e amplia a capacidade de resolver problemas e de pensar matematicamente.

A competência 5 sugere a investigação de conceitos e propriedades matemáticas, lançando mão de diferentes recursos como a observação de padrões, experimentações e a tecnologia, com o intuito de uma demonstração formal das conjecturas envolvendo os conceitos e propriedades investigadas.

Essa competência está voltada à capacidade de generalização e demonstração matemática, tendo extrema relevância para a formação dos estudantes, pois permite compreender a matemática como uma ciência viva pois é apoiada em estudos, interpretações, métodos, procedimentos e verificações.

Assim a BNCC torna explícito que o estudo e o desenvolvimento de generalização no processo de ensino da matemática, sobretudo ao final do ensino fundamental e durante todo o ensino médio é relevante, pois consta como conteúdo, portanto, é conhecimento que deve ser disseminado em sala de aula.

Fato importante a se registrar é que esse documento começou ser discutido, embora não como muitos desejavam, com a comunidade educacional e a sociedade a partir 2014. Ao longo desse processo, antes de ser concluído sua redação, o país passou em 2016 por interrupção do governo que idealizou a formulação desse documento, ficando a cargo de outro grupo político a redação final do mesmo.

Com isso setores de expressão ligados à educação como a Associação Nacional de Pesquisa e Pós Graduação em Educação ANPEd e diversos outros departamentos ligados à educação no Brasil, afirmam que a BNCC teve seu texto modificado no que se refere ao currículo do ensino médio, alterando os encaminhamentos que haviam sido debatidos até 2016.

A redação final insere as disciplinas por áreas do conhecimento, Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas deixando claro que as disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática serão ofertadas em todos os anos, entretanto possibilitando ao estudante compor parte do seu currículo conforme seu interesse ou afinidades que venha a ter por alguma área do conhecimento, denominando essa organização de itinerários formativos.

> Os itinerários formativos – estratégicos para a flexibilização da organização curricular do Ensino Médio, pois possibilitam opções de escolha aos estudantes – podem ser estruturados com foco em uma área do conhecimento, na formação técnica e profissional ou, também, na mobilização de competências e habilidades de diferentes áreas, compondo itinerários integrados... (Brasil, 2018 p. 477)

Desse modo o documento que inicialmente se mostra ser norteador, normativo para regulamentar os conhecimentos mínimos que todos os estudantes devem ter ao longo do processo de escolarização nos diferentes componentes curriculares é interrompido com essa medida, pois quebra o princípio da isonomia de uma base comum, uma vez que um estudante poderá estudar um componente curricular diferente de outro estando no mesmo ano de escolarização.

Com isso, essa flexibilização pode não contribuir para uma formação integral do indivíduo, uma vez que o estudante pode prestigiar uma área do conhecimento em detrimento de outra e isso poderá trazer prejuízo para sua formação enquanto cidadão, uma vez que é nesse período escolar que muitos deles terão a única oportunidade de conhecer ou aprofundar seus conhecimentos e refletir, debater, argumentar, representar sobre questões de filosofia, artes, sociologia, política e língua estrangeira por exemplo, e reconhecer-se enquanto cidadão e identificar-se na sociedade na qual está inserido.

> Reconhecer apenas a matemática e a língua portuguesa como disciplinas curriculares e transformar as demais disciplinas do atual currículo em componentes e temas transversais, traz certamente um enorme prejuízo do ponto de vista da formação humana e técnico-científica para os estudantes. (Anped, 2018 p. 2)

Entende-se que essas são ações reducionistas, cuja finalidade a pequeno e médio prazo pode ser de suprimir a oferta de algumas disciplinas, dificultando o acesso ao conhecimento historicamente acumulado e com isso quebrar a proposta de educação integral do cidadão a qual a BNCC se refere, reduzindo o processo educacional a questões relacionadas ao mundo do trabalho e refutando reflexões que permeiam o entendimento político sobre a sociedade a que pertence.

Procurou-se também orientação nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (DCE), documento que regulamenta os conteúdos básicos de cada disciplina que deve ser apresentado ao longo de todo o ensino fundamental e médio, bem como orienta sobre as tendências metodológicas que podem ser empregadas para desenvolver esses conteúdos previstos.

Constatou-se que no ensino médio, dentro do conteúdo estruturante geometria, é recomendado o aprofundamento dos conceitos geométricos adquiridos na fase anterior de escolarização, e esse aprofundamento envolverá mais abstração e representações algébricas a partir do estudo da geometria analítica.

Portanto esse aprofundamento pedirá a relação dos conhecimentos aritméticos e algébricos, uma vez que o trabalho relacionando conceitos e propriedades demanda essas relações.

Com isso essa relação entre geometria e álgebra proporcionará a generalização de resultados, a demonstração de fórmulas que será empregada na solução de situações problema. Entretanto a recomendação é que o ensino da geometria, em nenhuma fase de escolarização deve resumir-se a demonstração de fórmulas.

> Entende-se que a valorização de definições, as abordagens de enunciados e as demonstrações de seus resultados são inerentes ao conhecimento geométrico. No entanto, tais práticas devem favorecer a compreensão do objeto e não reduzir-se apenas às demonstrações geométricas em seus aspectos formais. (Paraná, 2008 p. 57)

Durante nossos estudos sobre os documentos que normatizam e orientam o ensino da matemática no Brasil e no Paraná, a Secretaria Estadual de Educação elabora um novo documento que se adequa ao proposto na BNCC, trata-se do Referencial Curricular do Paraná, entretanto esse referencial contém recomendações somente sobre o ensino fundamental, o referencial do ensino médio está sendo construído.

Pudemos constatar que o referencial se alinha aos documentos já postos, inclusive citando os encaminhamentos metodológicos recomendados pela DCE para o ensino da matemática, resolução de problemas, a modelagem matemática, a etnomatemática, a história da matemática, a investigação matemática, as mídias tecnológicas, entre outras. Portanto mostra a relevância e a importância de trabalhar a demonstração no ensino da matemática.

> As variadas estratégias para o ensino da Matemática devem possibilitar ao estudante: a capacidade de investigação, leitura, interpretação, comunicação, comparação, análise, síntese e generalização; o desenvolvimento de hipóteses e de estratégias de

> solução, de verificação, de argumentação e de representações (manipuláveis, textuais, gráficas, geométricas, pictóricas entre outros). A partir de problematização proposta, o estudante deve, no seu processo de resolução, compreender o conhecimento matemático envolvido e não apenas aprender a aplicar um algoritmo ou uma regra e, assim, permitir a transferência e a intervenção na realidade. (Paraná, 2018 p. 811)

O Referencial Curricular do Paraná complementa-se com o Currículo da Rede Estadual de Educação (CREP), que traz as recomendações dos conteúdos essenciais que devem ser trabalhados, entre estas, a necessidade de demonstrar o teorema de Pitágoras. Com isso, o referencial é documento que servirá de subsídio para a elaboração do plano de trabalho docente, permitindo as adaptações conforme características regionais, alinhando-se com a BNCC.

Desse modo concluímos que a proposta de usar a generalização no processo de ensino da matemática é respaldada por todos os documentos orientadores analisados e apresentados até aqui.

2 O ENSINO DA ÁLGEBRA NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Pesquisamos outras fontes para conhecer o que autores ligados à Educação Matemática discutem acerca da álgebra e de seu ensino. Cabe advertir que a escolha dos autores jamais teve a intenção de esgotar todas as visões a respeito do assunto.

Pais (2013) traz reflexões sobre as estruturas metodológicas praticadas em sala de aula, confrontando a escola tecnicista com um modelo que coloca o aluno como centro do processo de aprendizagem. No primeiro, o professor propõe as situações problema e o aluno as resolve fazendo uso de algoritmos e fórmulas sem a sua devida compreensão, enquanto no segundo o professor é mediador das situações propostas encaminhando-as por meio da resolução de problemas.

Para o autor, mais importante do que usar os algoritmos e fórmulas é a compreensão do seu funcionamento, é entender o conceito de seu desenvolvimento, de como essa generalização foi obtida, e explorar desta forma a matemática é uma oportunidade de oferecer a nossos alunos a compreensão, rica algebricamente, que quase sempre fica sem ser explorada.

Para esse fim, a metodologia empregada no processo de ensino deve oferecer condições para explorar a matemática indo além de se responder uma questão, uma vez que em toda aula há a oportunidade para estimular o aluno a novos desafios, a argumentar, a fazer articulações entre a teoria e prática, destacando conceitos importantes da matemática. Por outro lado, a escolha da metodologia pode levar à não exploração de certos conhecimentos. Trata-se portanto, de aproveitar o momento para expandir as competências, ampliar a capacidade de compreensão de conceitos, algoritmos e modelos, em vez de usá-los repetidamente.

> Em suma, entre os objetivos da educação matemática está a intenção de contribuir no desenvolvimento da capacidade intelectual do aluno, expressa pelas competências de formular hipóteses, fazer estimativas, realizar cálculos mentais, estabelecer relações, organizar e interpretar dados, resolver e propor problemas, observar regularidades, generalizar ou particularizar afirmações, redigir textos, entre outras. (Pais, 2013, p. 33)

A argumentação didática é destacada pelo autor como processo de condução, para levar o aluno a compreender a validade de um enunciado, teorema ou fórmula, fazendo uso de recursos físicos como papel, desenhos, régua, transferidor, entre outros, que contribuem para a verificação ou não de uma afirmação teórica. Além destas, ele coloca as demonstrações matemáticas como sendo uma argumentação didática que pertence ao campo científico do saber. Por exemplo, ela pode ser explorada a partir do oitavo ano do ensino fundamental para demonstrar que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes e que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

O autor também aborda a argumentação no livro didático, relatando que esta precisa ser entendida como o processo de generalização, deduções matemáticas que culminam com a validação de teoremas e fórmulas. Sendo a argumentação matemática um processo validado pela comunidade científica, muitas vezes esse método se distancia dos saberes pertencentes à educação escolar, inclusive não estando contemplados no livro didático. O autor aponta que o desafio didático é perceber, *medir*, a proximidade que as demonstrações e generalizações têm com o saber escolar.

Isso não significa que todo o processo de escolarização deva ser pautado pelo raciocínio lógico dedutivo das demonstrações e generalizações, mas excluí-lo nesta fase de aprendizado não se mostra honesto com um ensino que essencialmente deve ser comprometido com a compreensão daquilo que está sendo estudado.

> Como existem conexões e diferenças entre o saber escolar e científico, não se trata de priorizar, no contexto escolar, a utilização das demonstrações típicas de argumentações lógicas da matemática. A atitude extrema consiste em um engano de mesma natureza, ou seja, excluir as demonstrações do ensino seria negar uma parte considerável da especificidade desse saber escolar. (Pais, 2013 p. 55)

Conclui-se que a introdução das generalizações e demonstrações nos livros didáticos a partir das séries finais do ensino fundamental pode garantir um aprendizado mais sólido, em oposição àquele que é baseado na memorização de regras e fórmulas. Apesar de importantes as regras e fórmulas não necessariamente contêm os argumentos que as explicam. Consequentemente, as generalizações e demonstrações precisam ganhar espaço nos livros didáticos, pois além de ser conteúdo matemático, é objeto da construção humana e faz parte do contexto histórico, do desenvolvimento da matemática e de outras ciências.

A educação matemática defende a postura de oferecer um processo de ensino pautado na compreensão daquilo que está sendo estudado. Por exemplo, partindo de certo contexto vivenciado pelo educando envolvendo números, medidas e figuras, tem-se um alicerce para que no decorrer da situação problema, à medida que ele atinja um patamar de compreensão, outros saberes possam ser articulados ampliando seu entendimento dentro do que foi proposto, e outros conceitos matemáticos, presentes na mesma situação problema, possam ser desencadeados, como por exemplo um algoritmo, uma generalização ou uma demonstração.

As generalizações são regularidades obtidas por meio da percepção lógica de um padrão, por exemplo repetições ao longo de uma sequência numérica, bem como com a manipulação algébrica de uma equação obtendo uma fórmula que pode passar a ser utilizada para resolver uma categoria de problemas.

A compreensão do processo de conseguir generalizar uma situação alcançando uma fórmula é importante. Assim em algum momento da atividade escolar, ela precisa ser realizada, para justificar sua utilização como modelo, para simplificar e economizar o raciocínio na resolução de outros problemas correlatos.

> A regularidade está relacionada ao princípio da economia do pensamento porque torna possível o envolvimento de um grande número de situações possíveis de serem resolvidas pela aplicação do modelo. [...] a regularidade aparece na construção de modelos, fórmulas e algoritmos, entre outras estruturas repetindo um conjunto de ações. (Pais, 2013, p. 109)

Dessa forma a matemática escolar precisa ir além de questões relacionadas à prática vivenciada pelo aluno, algo que aborde também os conceitos, generalizações e demonstrações que permeiam esses assuntos, até porque os conceitos são criados a partir da resolução de problemas que estão presentes nas dificuldades do dia-dia da humanidade, que depois de resolvidos, passam a fazer parte do ensino em contexto escolar.

A atividade de generalizar não é uma atividade trivial por envolver abstrações e a linguagem algébrica, sobretudo quando pensada em ser desenvolvida em séries iniciais do ensino fundamental.

Por essa razão o professor precisa ter a sensibilidade de introduzir o tema de forma mais concreta possível, e pode dar início a esse desenvolvimento a partir do suporte geométrico, preferencialmente contextualizado, que permite certa “materialização” de parte do processo do desenvolvimento da generalização, aumentando com isso a compreensão da demonstração proposta.

> Assim sendo, compete ao professor diversificar as atividades. Visto que um momento pedagógico resulta da convergência de vários elementos, o tratamento dessa variabilidade situa-se na essência do trabalho do professor. (Pais, 2013 p. 146).

As provas por demonstrações com representações geométricas possuem um certo poder de convencimento, talvez em razão da materialidade da prova, pois ela envolve o sentido da visão, tornando os seus resultados mais aceitáveis.

Essa prática vai contribuir diretamente a formação do intelecto do aluno pois pode apurar o seu raciocínio, que por sua vez ele levará esse benefício para todas as outras áreas do conhecimento e atividades de sua vida.

A matemática é a ciência que nos permite quantificar, calcular, fazer estimativas, representar e generalizar diversos casos e fazemos isso por meio de representação numérica ou algébrica. A álgebra se coloca com extrema relevância quando passamos a aprofundar nosso entendimento, além da representação numérica, ou seja, quando pretendemos fazer representações gerais.

Estudar álgebra é um desafio, sobretudo em seu início quando a simbologia é empregada para representar valores numéricos. Para entender esse processo, e ter uma referência como alternativa de proposta de trabalho, destacamos os estudos de Souza *et al* (2014), que fazem a abordagem do tema, partindo do conceito de incógnita, descrevendo a construção que esse conceito teve ao longo da história, até chegar à simbologia que empregamos hoje.

Para os autores, umas das dificuldades encontradas no ensino da álgebra é a de que os alunos tem de fazer a relação entre o simbolismo algébrico com o que ele representa. Eles destacam as concepções de álgebra que pesquisadores como Usiskin (1988/1995) e Fiorentini *et al* (1993) (apud SOUZA, 2014), puderam identificar por meio de pesquisa com professores e por meio de investigação histórica, que a álgebra é entendida como uma linguagem, como método desenvolvedor do pensamento e como recurso técnico para resolver problemas.

> A análise dessas concepções nos permite entender que a álgebra pode ser compreendida tanto como uma linguagem quanto um mero conjunto de procedimentos que valorizam ora o desenvolvimento do pensamento, ora a compreensão da linguagem algébrica. (Souza, Panossian e Cedro, 2014 p. 28).

Entre as concepções observadas por Fiorentini *et al* (1993) destaca-se a linguístico-sintático-semântica, como sendo a concepção algébrica trabalhada no Brasil até o início do século XX, que tinha como objetivo o desenvolvimento das técnicas e regras de resolução das equações, totalmente despreocupado com a significação daqueles símbolos. A justificativa para essa abordagem era que o aluno, tendo dominado a técnica, seria capaz de aplicá-la na resolução de problemas.

Posterior a esta concepção, instala-se com o movimento da Matemática Moderna na década de 1970, a concepção fundamentalista-estrutural que defende que o aluno passaria a compreender a álgebra se compreendesse as transformações subjacentes. Para caminhar neste sentido, adotam a resolução de problemas como recurso técnico iniciada por George Polya, mas que essencialmente neste momento não se diferenciava muito das ideias trabalhadas anteriormente.

Por fim a última proposta de ensino da álgebra, segundo Fiorentini *et al* (1993), denominada fundamentalista-analógica, vinculada à concepção linguístico-sintático-semântica, alia o trabalho algébrico com a representação por meio de recursos geométricos e materiais como a balança de dois pratos, proporcionando visualização e uma possível materialização dos conceitos algébricos.

A perspectiva de outro pesquisador, Kieran (2004) (apud SOUZA, 2014), coincide com as apontadas por Fiorentini *et al* (1993) até a década de 1970. Na década de 1980, diante das dificuldades apresentadas pelos estudantes com as manipulações algébricas, tem início o desenvolvimento do ensino da álgebra por meio da generalização de padrões, afim de tornar o processo de aprendizado mais significativo.

> Esse contexto impulsionou o desenvolvimento de experimentos didáticos, principalmente nos países de língua inglesa, que valorizavam a generalização de padrões como um modo de transformar a álgebra em algo mais significativo para os estudantes. (Souza, Panossian e Cedro, 2014 p. 35).

Essa generalização de padrões a que se refere a citação acima não é a generalização proposta nesse trabalho. Mencionada, por exemplo, em Lins e Gimenez (1997) (apud SOUZA, 2014), esta tem origem no pensamento empírico, pois seria a generalização de uma sequência numérica na qual se identifica um padrão, que deve ser escrito algebricamente, não havendo, entretanto, necessidade de operações algébricas.

Nossa proposta é do trabalho que leve o aluno a compreender os procedimentos algébricos, mas para isso terão que fazer uso, conforme Lins e Gimenez (1997), do pensamento teórico, algo que vá além da simples constatação, exigindo certo grau de fluidez científica, mais substancial e com significação. Neste processo, o aluno toma ciência do conceito algébrico envolvendo a simbologia e os aspectos operacionais, alcançando no final um algoritmo que será utilizado como instrumento para resolver uma série de problemas de mesmo gênero.

Assemelhando-se às ideias de Artigue (2002) (apud SOUZA, 2014), propomos que o aprendizado do conceito algébrico possa ocorrer concomitantemente à construção, diante do olhar dos alunos, do algoritmo algébrico.

> Em outras palavras, em vez de pensar os conceitos e técnicas separadamente, ou seja, separar generalização da transformação, um ponto de vista mais interessante é perceber que as técnicas envolvem também os conceitos. Logo a aprendizagem de um envolve a aprendizagem do outro. (Souza, Panossian e Cedro, 2014 p. 36).

Nesta perspectiva, valoriza-se os dois aspectos, que entendemos ser de suma importância no ensino da álgebra: o significado (semântico) e o operacional das regras (sintático), uma construção onde um aspecto pode justificar o outro, e o conjunto deles poderá construir uma base sólida dos conceitos, oferecendo ao estudante uma visão geral do todo matemático, que não se resume a realizar operações sustentados por um modelo. Pode-se ainda ter como meta a compreensão do aspecto da ciência como fruto da construção histórica da humanidade.

Essa prática não é corriqueira, e faz oposição ao tratamento dos aspectos quando trabalhados separadamente, embora dificilmente seja observado o trabalho conceitual, o que predominantemente se vê em nossas salas de aula é a manipulação de regras e algoritmos já prontos e definidos.

A proposta dos autores Souza, Panossian e Cedro, (2014) vai além da proposta aqui almejada, eles defendem a ideia de que a álgebra deva ser ensinada a partir da construção do significado de incógnita e variável desde a época (histórica) em que não existia esse conceito, onde não era ainda dado ao termo desconhecido a representação simbólica que damos hoje.

Os autores advogam que a apresentação desse movimento de construção do conceito de incógnita deve ser realizado com os alunos, para que tenham uma melhor compreensão do que significa a incógnita e variável, para posteriormente conseguir compreender e operar com a simbologia que temos hoje.

> Neste livro defendemos que a educação algébrica deve se contrapor à ideia de que o ensino da álgebra deva se pautar pelo ensino do formalismo dos conceitos algébricos e na aplicação de tais conceitos na realidade objetiva. Tendo como base o entendimento de que a álgebra descreve os movimentos da prática social da vida, propomos que o ponto de partida das aulas seja o estudo de conceitos de movimento, fluência, número e álgebra não simbólica; variável e campo de variação presentes na vida fluente. (Souza, Panossian e Cedro, 2014 p. 43).

3 ACERCA DA HISTÓRIA DA ÁLGEBRA E DE SEU ENSINO

Certamente precisamos olhar para a história da construção do conhecimento algébrico, sobretudo no que se refere ao estudo da resolução de equações, para constatar como se desenvolveu o processo de resolução das mesmas, a fim de que este estudo proporcione uma melhor compreensão dos conceitos e definições que já temos hoje.

A história da matemática aponta que o grego Diofanto de Alexandria, que viveu por volta do século III d.C. foi o primeiro matemático a representar um valor desconhecido em um problema por um "termo". Recorta-se esta observação de seu livro chamado Aritmética. Este valor desconhecido recebeu o nome de Arithme, e em registros posteriores, os termos foram substituídos por símbolos.

> Uma das principais contribuições está em ter introduzido uma forma de representar o valor desconhecido em um problema, designando-o como arithme, de onde vem o nome aritmética. Já no livro 1, ele introduz símbolos, que ele chama "designações abreviadas", para representar diversos tipos de número. (Roque; Carvalho, 2012 p.168)

Embora Diofanto tenha iniciado o processo de simbologia na solução de uma equação, ele não foi difundido no meio matemático naquela época, e o que poderia ser o início para o desenvolvimento da álgebra simbólica acabou não acontecendo. Os estudos nesse sentido ficaram estagnados por aproximadamente seis séculos, e retomados somente a partir do século IX, que teve o persa al-Khawarizmi como matemático mais influente, vivendo entre 790 e 850.

Em um dos mais importantes livros da Idade Média escrito por al-Khawarizmi, *Tratado sobre o cálculo de al jabr e al muqabala*, os termos *al jabr* (restauração) e *al muqabala* (balanceamento) aparecem pela primeira vez. O termo *al jabr* deu origem ao que chamamos álgebra.

Daremos atenção à matemática a partir dos trabalhos do persa al-Khawarizmi e dos matemáticos ligados a ele, ou seja, dos árabes que contribuíram para o desenvolvimento da álgebra que temos hoje, sobretudo no que se refere a resolução das equações de segundo grau.

Registros apontam que al-Khawarizmi também utilizava termos específicos para se referir a coisas conhecidas e desconhecidas em uma equação, inclusive para as que chamamos hoje de equação de segundo grau. *Jidhr* (a raiz ou coisa) é hoje para nós a incógnita, o termo desconhecido no problema. *Mal* (possessão ou tesouro) é o termo desconhecido elevado ao quadrado. *Adad* (o número dado), a quantidade conhecida no problema.

Embora nesse período os problemas não fossem escritos e resolvidos com notação simbólica, já existia uma representação que nos possibilita associar ao conceito de incógnita que temos hoje. Até então, escreviam os termos desconhecidos e as operações que compunha o problema utilizando palavras.

A ideia de introdução aos conteúdos algébricos proposta por Souza (2014) vai justamente no sentido de oferecer aos alunos as experiências de construção do sentido de incógnita, para perceberem que a linguagem usada hoje é uma forma de sintetizar a situação proposta no problema, e portanto, a simbologia, de incógnita e de operações estão ligadas a situações concretas pertencentes a realidade da pergunta a ser respondida.

Neste período, as resoluções possuíam justificativas geométricas, mesmo que o problema não tratasse de geometria, sendo reduzidos a representações geométricas. Com esta condição, todos os valores dados no problema, coeficientes, raízes e números dados, eram positivos. Sobretudo para os números dados, esses valores sempre eram maiores que zero, mas os coeficientes poderiam ser zero.

O quadro abaixo apresenta os seis problemas enunciados por palavras, juntamente com sua notação atual, reproduzida de Roque e Carvalho (2012). Observe que em cada parâmetro a incógnita assume apenas valores positivos.

Quadrados iguais a raízes $(ax^2 = bx)$

Quadrados iguais a um número $(ax^2 = c)$

Raízes iguais a um número $(bx = c)$

Quadrados e raízes iguais a um número $(ax^2 + bx = c)$

Quadrados e um número iguais a raízes $(ax^2 + c = bx)$

Raízes e um número iguais a quadrados $(bx + c = ax^2)$

Quando o problema saía de uma das estruturas acima, por exemplo, algum termo negativo no problema, eles eram reduzidos a alguma dessas equações, fazendo o que chamavam de “restauração” (al jabr) e “balanceamento” (al muqabala), afim de que ficassem com uma estrutura cuja solução fosse de seu domínio, a um modelo cuja solução pudesse ser justificada usando a representação geométrica, da reta ou do quadrado.

Esta foi também uma estratégia dos gregos, pois quando precisavam resolver problemas, reduziam esses problemas difíceis a problemas mais simples, cuja solução já era conhecida. Desta maneira os Gregos estavam desenvolvendo uma gama de ideias e estruturas que permitiriam argumentos para uma prova por demonstração ou uma generalização.

O matemático indiano Bháskara Acharya, que significa Bháskara o professor, viveu no século XII. O nome é conhecido no Brasil, por lhe terem atribuído a invenção da fórmula resolutiva da equação de segundo grau. A história mostra que os indianos, embora dominassem técnicas de resolução e fizessem uso de alguns simbolismos, não dispunham, na época de Bháskara, de uma fórmula para resolver tais problemas, pois eles ainda eram enunciados e resolvidos por meio de palavras.

Bháskara também se valia de argumentos geométricos, adaptando os problemas a quadrados perfeitos, completando o quadrado com a finalidade reduzi-los a equações de primeiro grau.

> O método de resolução consiste em reduzir o problema a uma equação linear. Isto era feito por meio do método que Bháskara denominava de "eliminar o termo médio", equivalente ao nosso método de completar quadrados. (Roque e Carvalho, 2012 p.195)

Bháskara de certa forma possuía uma espécie de algoritmo para resolver os problemas, no entanto claramente podemos perceber que são ações que demonstram a intencionalidade de completar quadrados. Fazer com que a quantidade desconhecida tenha uma raiz, afim de que possa reduzir o problema a uma equação de primeiro grau.

> [é] por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar (Roque; Carvalho, 2012 p.195)

Um problema representado pela equação como $2x^2 + x = 15$ seria resolvido da seguinte forma:

$$4.2.2x^2 + 4.2.x + 1 = 4.2.15 + 1$$

$$16x^2 + 8x + 1 = 121$$

$$(4x + 1)^2 = 11^2$$

$$4x + 1 = 11$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Neste exemplo os dois lados da igualdade tornaram-se quadrados, mas o lado das quantidades conhecidas não é necessário que se torne um quadrado perfeito. Roque e Carvalho (2012) sintetizam o método resolutivo de Bháskara.

> Completar o quadrado do primeiro membro para transformar o termo que contém a quantidade desconhecida e seu quadrado em um quadrado perfeito. Diminuir o grau da equação extraindo a raiz quadrada dos dois membros, resolver a equação de primeiro grau que daí resulta. (Roque; Carvalho, 2012 p.196)

Com o que foi visto até aqui investigando os métodos resolutivos do persa al-Khwarizmi e do indiano Bháskara, podemos notar que eles já dominavam a técnica de resolver uma equação do 2º grau. No entanto esse processo não era uma generalização, pelo fato de não ser utilizado símbolos para representar os coeficientes dos termos desconhecidos, das incógnitas, embora já fosse utilizado simbolismo para designar algumas operações matemáticas e também para o termo desconhecido. Por essa razão o processo resolutivo era enunciado por palavras, porém ainda não se tratava de uma fórmula.

> Isto quer dizer que havia um método geral para resolução de equações, ainda que expresso por palavras. No entanto, não podemos dizer que já existisse uma "fórmula", no sentido que entendemos hoje, uma vez que não se usava nenhum simbolismo para os coeficientes. (Roque; Carvalho, 2012 p. 204)

Esse simbolismo para os coeficientes passa a ser introduzido pelo matemático francês Viète na segunda metade do século XV, entre 1540 e 1603, período em que viveu, trazendo o simbolismo para a incógnita e as operações.

Esse simbolismo algébrico é introduzido com a finalidade de generalizar situações que poderiam ser descritas por uma infinidade de exemplos. Esta nova forma de escrita, a algébrica, traz com ela uma nova forma de resolver problemas, utilizando a mesma aritmética já conhecida.

Sobre o simbolismo da incógnita em uma equação de segundo grau, antes do proposto por Viète tinha a seguinte estrutura: $A + 21 = 10B$ em que A é o quadrado de B.

Note que a raiz e seu quadrado são notados por símbolos diferentes, com o simbolismo de Viète isso também é mudado, se B é a raiz, seu quadrado será notado por B *quadratum*, (B elevado ao quadrado), não havia a notação de quadrado como temos hoje. Então a mesma equação ficaria escrita, $B\ quadratum +21 = 10B$.

Além disso propôs que as incógnitas seriam representadas pelas vogais e os coeficientes pelas consoantes do alfabeto, todas letras maiúsculas. (Roque; Carvalho, 2012 p. 223), portanto na equação $A + 21 = 10B$, B não poderia representar a incógnita, e uma possível escrita dessa equação com a simbologia de Viète seria: $Aquadratum + 21 = 10A$.

Assim uma generalização dessa equação com simbolismo proposto por ele ficaria: $A\ quadratum + B\ aequatur\ C \text{ in } A$, usando os símbolos operacionais $A\ quadratum + B = C.A$

Posteriormente ao século XVII, outras notações são sugeridas, os coeficientes passam a ser representados pelas primeiras letras do alfabeto, enquanto as incógnitas serão representadas pelas últimas letras. Com isso a equação escrita por al-Khwarizmi $A + 21 = 10B$, fazendo uso agora da notação proposta depois do século XVII ficaria assim: $x^2 + 21 = 10x$, e genericamente, $x^2 + b = cx$.

Em razão dessa nova forma de operar, agora algebricamente, a necessidade de representações geométricas foi perdendo relevância, embora seja totalmente possível e benéfico o desenvolvimento algébrico juntamente com o geométrico.

No entanto foi essa representação algébrica que trouxe o desenvolvimento do cálculo e a forma que utilizamos para representar e resolver muitos problemas da matemática.

Todo esse desenvolvimento histórico da matemática mostra-se extremamente importante para ser trabalhado em sala de aula, sobretudo o exercício das demonstrações matemáticas, para mostrar e ensinar a nossos alunos a estruturação algébrica lógica dos problemas que frequentemente resolvemos. Recriando isso estaremos dando ainda mais significado e contexto para as aulas de matemática.

Partindo de exemplos específicos, pode-se usar a linguagem algébrica para se chegar a uma generalização, que pode ser provada rigorosamente, preservando a mensagem de que os exemplos de onde se partiu têm características presentes em outros problemas correlatos.

No entanto, geralmente quando pensamos em prova matemática, automaticamente somos induzidos a associar esse tema ao nível superior, pois embora os currículos escolares contemplem as generalizações em seus programas, pouco vemos dessa produção em sala de aula.

Percebemos que embora os currículos façam apontamentos sobre a importância dessa atividade em sala de aula, pouco se produz efetivamente, até porque os livros didáticos, que são orientadores da organização curricular no Brasil, apesar de serem avaliados por comissões indicadas pelo MEC, pouco apresentam de generalização matemática.

Pode ser que isto aconteça pelo fato de que nós professores, e também os autores de livros, entendamos que esse tema não é relevante para ser trabalhado no ensino fundamental e médio, em razão da complexidade algébrica que envolve o tema, ficaria então somente para aqueles que enveredassem ao curso superior das ciências exatas.

Uma pesquisa sobre esse tema foi realizada nos Estados Unidos, envolvendo professores do ensino médio e fundamental e faz parte do artigo "*Concepções de Prova - Em Pesquisa e Ensino*", e ela descreve as concepções e crenças que professores e estudantes de matemática têm sobre o que é prova em matemática. Ela relata que as concepções dos professores se dividem em dois conceitos pedagógicos, as ideias genéticas de prova, e as pesquisas empíricas.

As concepções genéticas de prova circulam por diferentes estágios do seu desenvolvimento, a generalização, a argumentação e a representação dos argumentos por meios de símbolos.

> Uma linha de pensamento tenta conceber ideias genéticas de prova. Essas ideias são pedagogicamente motivadas na medida em que tentam conceber um caminho de aprendizagem a partir de um estado cognitivo em que um aluno individual é capaz de construir argumentações com alguns componentes dedutivos até um estado em que o aluno consegue compreender e desenvolver provas matemáticas em seu sentido adequado.[1] (Cabassut, 2012 p.170)

As concepções de pesquisa empíricas se baseiam na prática do aluno, em situações reais de medições e construções, podendo acontecer apontamentos algébricos nesses momentos, dependendo da capacidade argumentativa dos indivíduos.

> A outra linha de pensamento constrói concepções de prova com o intuito de fazer pesquisas empíricas. Ambas as linhas de pensamento definem categorias que permitem classificar os comportamentos e estratégias argumentativas dos indivíduos observados em salas de aula ou em situações de entrevista. Em ambos, é essencial distinguir entre argumentos que ainda não são provas de provas matemáticas adequadas.[2] (Cabassut, 2012 p.170)

Sobre as crenças que cercam aquilo que os professores entendem, pensam, e utilizam pedagogicamente como prova, foi possível detectar que esses professores não apresentam muita clareza para desenvolver e avaliar o processo de prova, uma vez que foi identificado que há professores que tratam as manipulações algébricas como prova, bem como a verificação de um caso particular como prova para um caso geral.

Com relação às crenças dos professores de matemática sobre o papel da prova matemática, foi observado que elas são importantes no sentido de serem explicativas e um meio de verificação, a fim de entenderem a matemática que estão fazendo.

Sobre o papel da prova em matemática, vários professores pensam que a prova não deve ser de extrema importância até o ensino médio, apenas em cursos superiores. Porém outra parcela acredita que a inclusão de provas sobretudo utilizando a geometria pode ser uma boa introdução para que futuros estudantes de ensino superior já possam ter certa experiência sobre esse tipo de desenvolvimento matemático.

A pesquisa também aponta que nos Estados Unidos e na Itália o conceito de

---

1 One line of thought tries to devise genetic ideas of proof. These ideas are pedagogically motivated in that they try to devise a learning path from a cognitive state in which an individual learner is able to construct argumentations with some deductive components to a state in which the learner manages to understand and develop mathematical proofs in their proper sense. (Cabassut, 2012 p.170)

2 The other line of thought builds conceptions of proof with the intention of doing empirical research. Both lines of thought defi ne categories that allow one to classify individuals' argumentative behaviours and strategies observed in classrooms or in interview situations. In both, it is essential to distinguish between arguments which are not yet proofs from mathematical proofs proper. (Cabassut, 2012 p.170)

prova é aplicado quase informalmente, sem uma obrigatoriedade do currículo, diferentemente de países como França, Alemanha e Japão, onde ela deve ser ensinada, fazendo parte dos capítulos dos livros didáticos a partir da 8º série.

Portanto, percebe-se que é um tema complexo, onde a dificuldade foi diagnosticada inclusive com os professores de matemática que trabalham no ensino fundamental e médio, que supostamente deveriam ter o domínio sobre o tema, e encaminhar esse conhecimento com maior propriedade.

4 ABORDAGEM DE EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU NO ENSINO FUNDAMENTAL

Resolver equações de segundo grau é uma atividade que podemos abordar em situações problemas a partir do sétimo e oitavo ano, não falando propriamente sobre equações de segundo grau, mas quando abordamos conteúdos envolvendo cálculo da área do quadrado.

No contexto de área do quadrado, no sétimo e oitavo ano, as situações problemas geralmente envolvem números naturais, em que a área é um quadrado perfeito. Para a obtenção da medida do lado do quadrado, basta determinar a raiz quadrada positiva de um número. Por outro lado, se for conhecida a medida do lado, a multiplicação do número que a representa por ele mesmo resultará na área procurada.

Do ponto de vista algébrico, a determinação da medida do lado do quadrado se traduz na redução de uma equação de grau 2 para uma equação de primeiro grau, na incógnita que representa a medida do lado. Essa era a estratégia que Bháskara utilizava para resolver problemas enunciados por equações de segundo grau, sobretudo equações que apresentavam ambos os termos (de grau dois e de grau um na incógnita), reduzindo a equação para um modelo onde a solução poderia ser encaminhada pela redução de grau.

Nas situações problemas que serão sugeridas aqui faremos uso dessa estratégia, partindo do cálculo da área do quadrado $A = \ell^2$, onde A e ℓ são respectivamente as medidas da área e do lado do quadrado, estabeleceremos a representação geométrica para dar suporte e melhor compreensão dos procedimentos operatórios e algébricos, uma vez que a representação geométrica, favorece o entendimento e a relação entre as medidas algébricas da equação em um contexto de aplicação.

A representação geométrica do quadrado de área A e lado ℓ é dado pela figura 1.

Figura 1

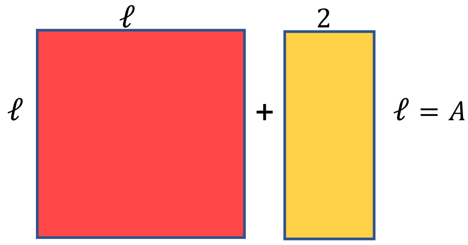
Fonte: O próprio autor

Em uma situação problema onde é perguntado a medida do lado de um quadrado que têm área A, o estudante aplicando a raiz dos dois lados da equação, encontrará a medida do lado do quadrado.

$$A = \ell^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{A}$$

Desse modo, tendo como referência a área do quadrado vamos encaminhar a solução de uma equação completa do segundo grau $\ell^2 + 2\ell = A$, obtendo uma representação geométrica para a equação. Interpretando cada termo da esquerda como área, a área total é dada pela soma de duas partes ilustrada pela figura 2: um quadrado de lado ℓ e um retângulo de lados ℓ e 2.

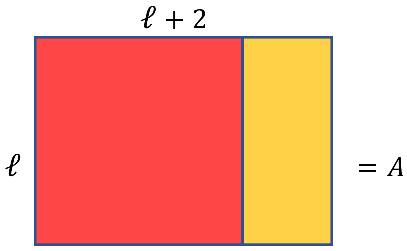
Figura 2



Fonte: O próprio autor

O retângulo e o quadrado podem compartilhar um lado comum, de medida ℓ, e assim o membro esquerdo representa a área de um retângulo de lados ℓ e $\ell + 2$, conforme figura 3. Mantivemos a cor do retângulo original, de lados ℓ e 2, pois a sequência da construção vai fazer referência a esta parte.

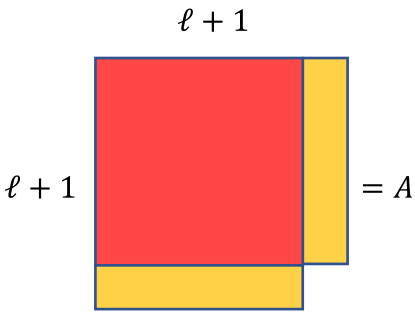
Figura 3



Fonte: O próprio autor

Dividindo o retângulo amarelo em dois retângulos de lado ℓ e 1, justapomos um deles horizontalmente e o outro verticalmente ao quadrado vermelho. A figura 4 retrata a construção até o momento.

Figura 4

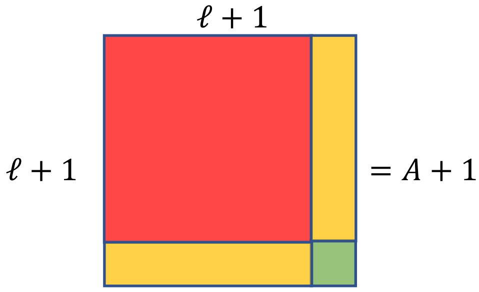


Fonte: O próprio autor

Percebe-se que a figura só não é um quadrado (de fato, é um hexágono não convexo de área A) por lhe faltar um pequeno quadrado abaixo à direita de lado 1. Adicionando assim um quadrado de lado 1 na figura teremos de fato um novo quadrado (grande) de lado $\ell + 1$ e área $A + 1$.

A figura 5 apresenta essa adaptação de modo a obtermos a figura quadrada.

Figura 5



Fonte: O próprio autor

Dessa forma temos agora um quadrado de lados $\ell + 1$ portanto, podemos expressar essa figura por meio da equação $(\ell + 1)^2 = A + 1$. Para resolver esta equação para determinar ℓ, basta extrair a raiz quadrada de ambos os membros, reduzindo a equação de segundo grau em uma de primeiro grau e determinar a medida do lado do quadrado.

$$(\ell + 1)^2 = A + 1$$

$$\sqrt{(\ell + 1)^2} = \sqrt{A + 1}$$

$$\ell + 1 = \sqrt{A + 1}$$

$$\ell = \sqrt{A + 1} - 1$$

Entendemos que essa técnica resolutiva de completar quadrado, proporciona uma melhor compreensão ao estudante, uma vez que até mesmo partindo de uma equação escrita sem contexto, podemos fazer associações de seus termos com figuras geométricas, tornando o processo matematicamente mais abrangente, uma vez que relaciona aspectos operatórios, algébricos e geométricos e pedagogicamente muito mais compreensível uma vez que a representação geométrica exerce uma capacidade maior convencimento.

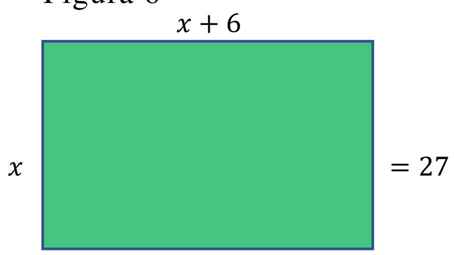
Abordar o conteúdo por esse ponto de vista pode favorecer a compreensão matemática de aspectos que, se abordados somente algebricamente, podem passar despercebidos. O principal aspecto entendemos ser a relação com a geometria da técnica (algébrica) de completar quadrado, pois essa técnica é fundamental para se obter a fórmula das raízes da equação de segundo grau, conhecida como fórmula de Bháskara.

Vamos abordar a situação problema a seguir, que se desdobrará em uma equação de segundo grau, determinando suas raízes, utilizando a técnica de completar quadrados.

Uma sala comercial de formato retangular tem comprimento 6 metros maior que a largura e área igual a 27 metros quadrados. Quais são as dimensões da sala comercial?

Geometricamente a situação problema fica representada pela figura 6.

Figura 6



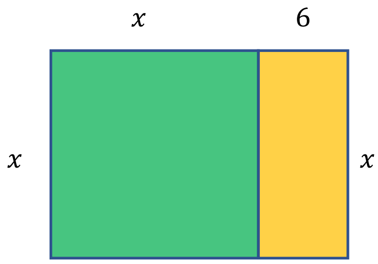
Fonte: O próprio autor

Representando agora de forma algébrica, calculando a área do retângulo, multiplicando as dimensões da figura e estabelecendo a igualdade teremos a equação.

$$x.(x+6) = 27$$
$$x^2 + 6x = 27$$

Fazendo agora a representação geométrica dessa última equação, figura 7, podemos notar que ela pode ser representada pela soma de duas figuras, um quadrado de lado x e um retângulo de dimensões x e 6 metros, que continua com a mesma área 27m².

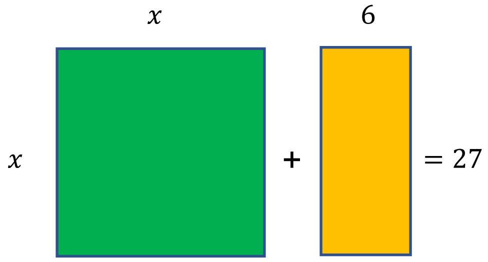
Figura 7



Fonte: O próprio autor

No entanto com essa equação não conseguimos utilizar os conceitos de área do quadrado como ele está, dessa forma precisamos adaptar a figura de modo que seja possível construir um quadrado. Podemos notar semelhança entre essa expressão que representa a área do retângulo e do quadrado com a questão anterior, figura 2, podendo ser útil para ajudar a concluir que devemos adaptar o retângulo à figura do quadrado. A figura 8 retrata geometricamente a equação $x^2 + 6x = 27$

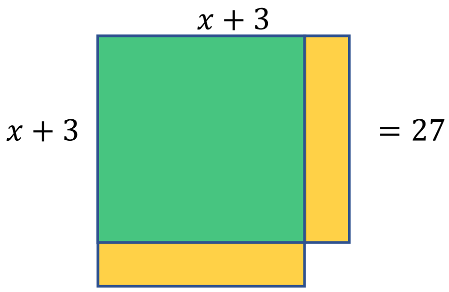
Figura 8



Fonte: O próprio autor

Para formar o quadrado é preciso, a partir do quadrado já existente, incorporar convenientemente a área do retângulo, a figura 9 ilustra essa passagem. Dividindo o retângulo em dois retângulos iguais, com um lado igual a x e outro lado igual a 3, obtemos

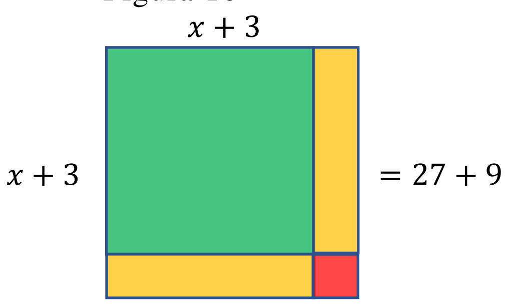
Figura 9



Fonte: O próprio autor

A tarefa final do professor é levar os alunos a compreenderem que se deve adicionar nove, a área do quadrado que completa a figura, de modo a efetivamente termos um quadrado de lado $x + 3$. Adicionando 9 aos dois membros da equação, poderemos resolver nosso problema utilizando novamente a fórmula para a área do quadrado. A figura 10 ilustra o completar do quadrado.

Figura 10



Fonte: O próprio autor

Temos então efetivamente um quadrado de lados $x + 3$, que quando elevado ao quadrado oferece-nos a expressão $x^2 + 6x + 9$, que comparada com a expressão do problema $x^2 + 6x$, notamos que foi acrescentado nove unidades a ela, correspondendo exatamente ao quadrado de lado 3 encaixado na figura 10.

$$x^2 + 6x = 27$$
$$x^2 + 6x + 9 = 27 + 9$$

Note que a equação está balanceada, uma vez que foi adicionado a mesma área dos dois lados da equação. Como $x^2 + 6x + 9$ representa a área do quadrado, podemos escrever essa expressão na forma de potência $(x + 3)^2$ e resolve-la utilizando o conceito de área do quadrado.

$$(x + 3)^2 = 36$$
$$\sqrt{(x + 3)^2} = \sqrt{36}$$
$$x + 3 = 6$$
$$x = 3$$

Dessa forma as dimensões da sala comercial são 3 metros por 9 metros. Esse processo se repete para solução de outras equações de segundo grau.

No oitavo ano é introduzido o assunto de polinômios, estimulando o pensamento, a escrita e os cálculos algébricos, quando são apresentados os produtos notáveis, sobretudo o quadrado da soma entre dois termos e o quadrado da diferença entre dois termos.

Notamos que a expressão algébrica resultante desse processo é de grau dois com as mesmas características de uma expressão algébrica da forma $ax^2 + bx + c$. A conexão com as interpretações geométricas aqui expostas pode ser realizada.

Dessa forma, se temos uma equação do segundo grau, independente da sua estrutura algébrica, se formarmos parte de um quadrado com os termos que contém a incógnita, poderemos resolver essas equações utilizando o mesmo argumento, o de completar quadrado. No entanto, a restrição ao uso da raiz quadrada positiva deve ser superada neste momento, tornando o argumento de “completar quadrados” mais afeito à álgebra.

Esse procedimento é o empregado para obter a generalização da fórmula resolutiva de uma equação de segundo grau, a fórmula de Bháskara, que é bastante difundida como instrumento para determinar as raízes da equação, e talvez como o único meio de resolver tais equações.

Vamos começar com um exemplo em que há uma raiz positiva e uma negativa.

$$x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 - 8 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 12$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{12}$$

$$x = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

Algebricamente o processo consiste em isolar a incógnita da equação representada pelo termo desconhecido, fazendo uso dos argumentos geométricos para sustentar e dar suporte às passagens algébricas, exceto pela passagem que considera também a raiz quadrada negativa. Esta deve ter uma justificativa separada.

Por fim, apresentamos a dedução das soluções de uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais com a diferente de zero.

Como o objetivo é determinar as raízes da equação, vamos realizar as operações necessárias utilizando os meios já apresentados nas soluções das situações problemas da página 40 envolvendo medidas numéricas.

Vamos relacionar os termos $ax^2 + bx$ com as figuras do quadrado e do retângulo, sabendo que os coeficientes a, b e c são números reais.

As manipulações algébricas se iniciam da seguinte forma:

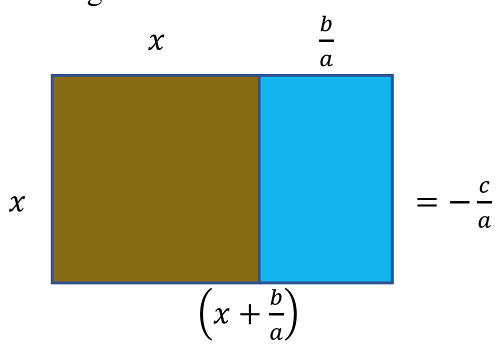
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = \frac{-c}{a}$$

Depois de isolar os termos que contêm a incógnita e dividir a equação por a, a expressão $x^2 + \frac{bx}{a}$, representa a "soma" das áreas de um quadrado e de um retângulo, pode ser representada por um retângulo de dimensões $\left(x + \frac{b}{a}\right)$ e x. A figura 11 é a representação geométrica da equação supondo $\frac{b}{a}$ e x maiores do que zero.

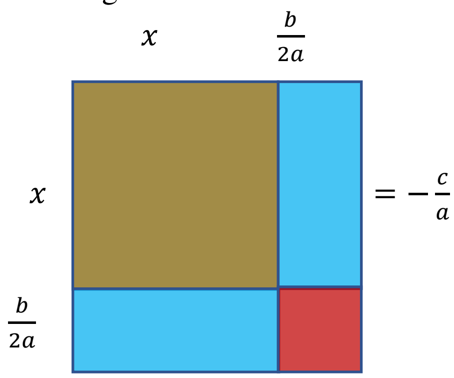
Figura 11



Fonte: O próprio autor

Decompondo o retângulo de dimensões $\left(x + \frac{b}{a}\right)$ e x de modo a reconstruí-lo usando a técnica de completar quadrado, partindo do quadrado existente, devemos dividir ao meio o retângulo de dimensões $\frac{b}{a}$ e x para formar dois retângulos iguais de dimensões $\frac{b}{2a}$ e x para recompor a figura conforme a representação a seguir. A figura 12 ilustra o completamento de quadrado desse caso.

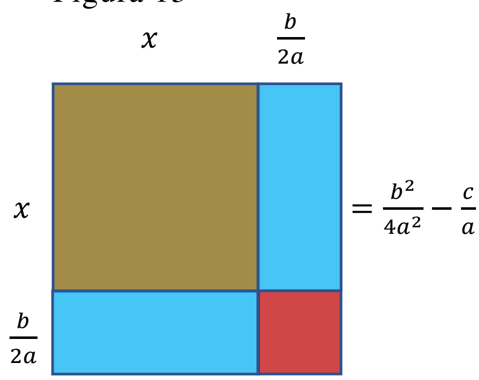
Figura 12



Fonte: O próprio autor

Podemos notar que o polígono formado terá a forma de um quadrado se adicionarmos a ele um quadrado de lado $\frac{b}{2a}$. Estamos imaginando que este valor é positivo, para facilitar a ilustração geométrica, mas se $\frac{b}{2a} < 0$, ainda é possível fazer a ilustração geométrica, com a parte azul se sobrepondo à parte marrom. Entretanto adicionando esse quadrado ao polígono, precisamos adicionar a mesma área do lado direito da igualdade, de modo a mantermos a equação balanceada, assim a equação ganhará a adição de $\frac{b^2}{4a^2}$ dos dois lados da igualdade. A figura 13 indica o balanceamento da equação.

Figura 13



Fonte: O próprio autor

Portanto agora temos um quadrado de lados medindo $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$, cuja área fica expressa por $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$. Se esse valor é positivo, podemos extrair sua raiz quadrada, obtendo em princípio dois valores possíveis (um positivo e um negativo). Com isto os valores possíveis da incógnita x são:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$
$$x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Acreditamos que essa proposta vai além do que apenas construir esse instrumento, uma fórmula que é aplicada para encontrar as raízes de uma equação de segundo grau, ela é também a oportunidade de fundamentar e estabelecer relações entre operações aritméticas, algébricas e geométricas com a finalidade de mostrar que a generalização é uma necessidade da ciência de sistematizar situações problemas. Ademais, esta dedução é suficientemente compreensível para o nível básico de ensino.

4.1 Formulações de Situações Problemas

Das atividades que fazem parte da prática do professor de matemática, destacam-se a proposição, discussão e a resolução dos problemas extraídos dos livros didáticos. Ações que são oportunidades de aplicação e contextualização do conteúdo curricular.

A atividade de encaminhar a solução dos problemas acontece de forma automática, e poucas vezes, há tempo para se ponderar sobre a confecção desses problemas.

A reflexão que se propõe agora não é referente à ordem: se o problema deve vir antes ou depois da apresentação do conteúdo, aspecto relevante quando tratamos de assuntos referentes à forma de condução do ensino, mas sim sobre a produção, o desenvolvimento, e a criação dessas situações problemas.

Este encaminhamento é um exercício para colocar à prova a capacidade de criação, de contribuir como autor de uma proposta de atividade original, tornando-se um colaborador mais ativo no processo de ensino, com situações problemas que serão eventualmente consultadas e usadas pela comunidade de professores de matemática.

Neste trabalho, as situações problemas abordam o tema equações de segundo grau.

Naturalmente o senso comum permitiria, mesmo ao professor mais experimentado, pensar que essa é uma tarefa rápida e fácil, afinal a experiência de ter abordado uma grande variedade de problemas contribui para imaginar que não faltariam ideias para a elaboração de novas situações.

Percebeu-se, no entanto, que a formulação de situações problemas demanda competências além das que estamos acostumados em sala de aula, que por certo envolvem conceitos, interpretações e resoluções. É preciso acrescentar a essa lista uma característica profissional que não estaria presente (na grande maioria de) em nós professores, a de ser pesquisador.

A pesquisa é uma atividade que historicamente é exercida frequentemente por professores formadores e é oferecida nos programas de formação de professores, no entanto é uma atividade pontual, geralmente obrigatória como atividade de conclusão de curso.

Por outro lado, a ideia de desempenhar a pesquisa e a produção intelectual dentro da atividade profissional não é desenvolvida ao longo da carreira da grande maioria dos professores, uma vez que desde a sua formação o foco no desenvolvimento profissional é fundamentado em aspectos técnicos do saber matemático, e pedagógicos do como fazer matemática, principalmente depois da universidade, levando o professor a se dedicar e pensar exclusivamente nessas duas vertentes.

> É preciso repensar essa perspectiva de racionalidade técnica, nessa justaposição hierarquizada de saberes científicos, mais saberes pedagógicos, mais momentos de prática, (entendida como uma "aplicação"), pois, apesar de muitos professores formadores sentirem-se à vontade nesse modelo, é necessário rediscutir e constituir uma nova profissionalização docente. (Cyrino, 2013 p. 80).

Para Cyrino (2013, p. 81), é importante formar o professor como um agente reflexivo e investigador da sua prática pedagógica, concebendo-o como produtor de saberes profissionais e principal responsável pelo seu desenvolvimento e emancipação profissional.

A pesquisa como objeto de desenvolvimento pessoal exige bastante dedicação e autonomia, uma vez que não há programas de estudos oferecidos e direcionados pela estrutura organizacional de ensino (no nosso caso, do estado do Paraná) que estimulem e valorizem essa prática do professor.

Dessa forma o desenvolvimento de pesquisa que poderia contribuir com a produção de material de estudo, aplicação em sala de aula e com o próprio desenvolvimento profissional e intelectual do professor é incipiente. Consequentemente, o processo de contextualização que sempre nos é recomendado e somos incentivados a preparar para ilustrar a aula, torna-se uma atividade extremamente complicada de ser realizada corriqueiramente.

> Essa preparação e emancipação profissional na formação inicial do professor poderá ocorrer se disponibilizarmos contextos teóricos e conceituais imersos em diversas práticas, estimulando hábitos de conversar, investigar, questionar, refletir e relacionar teoria e prática num processo interativo. (Cyrino, 2013 p. 81).

Porquanto as tentativas de elaboração, as reconsiderações sobre as situações que não se encaminham como o esperado, novas buscas, novas reflexões, para poder chegar a algo que possa ser considerado uma "boa" atividade para ser aplicada demandam tempo e pesquisa.

Entendemos como "boa" atividade aquela que contextualize um problema de vivência em alguma área da nossa vida, seja no trabalho, seja social, pessoal, familiar, enfim algo que possa ser relevante para aquele que recebe a questão e seja instigado a resolvê-la, mesmo sabendo que o que pode ser relevante para um leitor, pode não ser para outro.

As questões propostas neste trabalho foram pensadas com esse propósito, criar situações problema relevantes abordando o conteúdo científico e aproximando de situações problema aplicada. Produzi-las não foi nada fácil.

Foi possível perceber que, enquanto professor, temos limitações no que se refere à habilidade de produzir material didático. Isso leva à reflexão sobre as dificuldades que os autores de questões de vestibular, ENEM e de livros didáticos podem ter em produzir materiais que apresentem aplicações dos conteúdos desejados.

Dessa forma, entendemos a produção de material didático como uma atividade de dificuldade superior àquelas enfrentadas pelo professor no dia-a-dia de sala de aula, por exigir mais do que a capacidade interpretativa e resolutiva das questões, também exigi criatividade.

O desenvolvimento de situações problemas poderia fazer parte de nossa rotina enquanto profissionais, favorecendo inclusive abordagens de conteúdos usando as metodologias ativas, proposta de ensino que proporciona a investigação e a pesquisa antecipadamente à aula, por parte do aluno, oferecendo ao estudante a oportunidade de vivenciar na escola situações que promovam o seu movimento, incentivando a autonomia e a iniciativa em prol do seu aprendizado, caso da resolução de problemas e da sala de aula invertida.

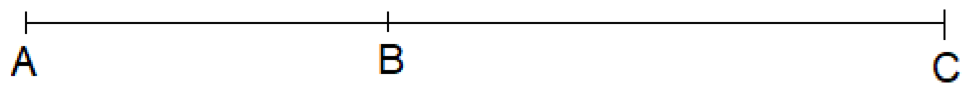
Segundo Fiorentini e Lorenzato, (2012 p. 77), "ser professor-pesquisador, portanto, configura-se como uma opção profissional", ou seja, é uma iniciativa que deve partir do professor que busca de alguma forma aperfeiçoar seu currículo profissional.

De fato, se a pesquisa e a investigação vierem a fazer parte de nossa prática, pode favorecer nosso entendimento sobre a aplicação da matemática e concomitantemente oportunizar a aplicação de novas técnicas pedagógicas que incentivam justamente uma característica que tem sido ausente.

As situações problema que estão neste trabalho foram produzidas dentro do contexto de compor ideias nossas com situações problema já publicadas em revistas, provas e concursos, havendo a necessidade de adaptação, para que se pudesse abordar o tema ao qual o presente trabalho se refere.

1) Considere B o ponto que divide AC de modo que AB<BC.

Figura 14



Fonte: O próprio autor

Sabendo que as medidas dos segmentos AB, BC e AC formam uma progressão geométrica, calcule a razão dessa progressão.

O desenvolvimento da solução começaria pela compreensão de que a progressão geométrica é formada por três termos, portanto finita, e que será preciso fazer a representação das medidas dos segmentos, escrevendo os termos em linguagem algébrica. A figura 14 dada, pode ajudar nessa interpretação.

Para continuar a exposição, denotamos por q a razão da progressão, e por a_1, a_2, a_3 as medidas dos segmentos AB, BC e AC, respectivamente.

Como o objetivo é calcular a razão da progressão, na sequência será preciso estabelecer as razões entre as medidas dos segmentos, ou seja, $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$, igualdade a partir da qual se pode chegar à resposta esperada.

Realizada essas passagens, teremos a equação escrita em função da razão q, entretanto, ainda será necessário operar uma soma entre um número inteiro e uma fração, afim de possibilitar a escrita de uma equação quadrática em função da razão da progressão, a incógnita, onde a solução dessa equação responderá à pergunta da questão.

A solução dessa equação vai oferecer duas raízes, uma positiva e outra negativa, e será importante que o aluno conclua que, pelo fato de estar sendo trabalhada com medida de segmentos, deve-se considerar apenas a raiz positiva da equação.

Essa atividade foi apresentada sob o contexto de medidas de segmentos, no entanto a razão obtida se refere à razão áurea, correspondendo a constante irracional φ (phi) 1,61803....., que normalmente é abordada sob o ponto de vista da construção do retângulo áureo, onde é possível apresentar a relação de proporcionalidade entre as medidas de segmentos, e também é possível estabelecer a relação de proporcionalidade entre as áreas da figura.

Porém no que se refere às relações de segmentos do retângulo, é possível, ao final da construção, fazer as mesmas relações entre os segmentos e obter a mesma constante irracional phi.

Esta questão, no contexto em que foi apresentada, seria encaminhada para alunos do ensino médio, uma vez que as passagens descritas desde o início, até se chegar à equação quadrática, necessitam que os alunos tenham conhecimentos sobre progressão geométrica.

Entretanto, uma abordagem possível para alunos do ensino fundamental, poderia acontecer, partindo das relações entre as medidas obtidas na construção do retângulo áureo. Nesta fase de escolarização, poderiam ser explorados os conceitos de proporcionalidade, onde as relações são tratadas usando os recursos de razão e proporção.

Nesta abordagem o estudante do ensino fundamental, que conhece as relações de proporcionalidade conseguirá escrever as razões, e operar algebricamente até obter a equação que relaciona as duas variáveis.

No entanto precisará de ajuda para compreender que precisa encontrar a razão, a constante de proporcionalidade que faz com que os segmentos sejam proporcionais, pois como está operando algebricamente essa visualização pode não ser elementar para ele, ou seja, precisará ser conduzido ao entendimento para fazer aparecer $\frac{a}{b}$ na equação, e substituir essa relação pela constante q, obtendo a mesma equação quadrática.

Situação problema a seguir foi elaborada pelo próprio autor deste trabalho.

2) A construção de quatro imóveis ocupará uma área total de 112 m². Cada um deles terá o formato retangular de modo que o lado maior terá três metros a mais que o lado menor. Sabendo que os quatro imóveis possuem a mesma área, calcule as dimensões de cada um.

A segunda questão apresentada relaciona-se ao cálculo de área, forma que tradicionalmente as questões envolvendo equações de segundo grau são abordadas. O problema se refere à construção de quatro imóveis de mesma área e dimensões.

A primeira dúvida que pode surgir é sobre a representação geométrica para a construção dos imóveis, uma vez que o texto não faz referência de como será a configuração deles no terreno, se serão construídos separadamente, ou se terão paredes em comum, inclusive tendo paredes em comum podem ser representados de mais de uma forma.

Portanto essa questão se destaca por oferecer pelo menos três representações geométricas diferentes que conduzem à solução do problema, deixa em aberto a representação da planta baixa do projeto, sem que haja prejuízo quanto à solução, uma vez que em quaisquer das representações, serão escritas equações equivalentes que conduzirão a solução da situação problema, e é provável que os alunos só se deem conta dessa variedade de representações no momento em que compartilhem as ideias.

Superada essa etapa de configuração geométrica, é preciso fazer as interpretações do enunciado e adaptar as medidas do imóvel à figura que o estudante utilizou para fazer a representação da planta baixa.

A solução da questão pode ser abordada sob o seguinte cenário: O estudante pode interpretar que cada imóvel terá área de 28m², representar as medidas de comprimento e largura conforme o enunciado indica e expressar o produto entre essas medidas igualando-o à área de 28m².

Efetuando as operações nesta igualdade chega-se a uma equação de segundo grau, cuja solução expressa as medidas de comprimento e largura de cada um dos quatro imóveis.

A próxima interpretação que pode acontecer, é entender a planta baixa como sendo uma construção em fila, onde teríamos um grande retângulo de largura $x + 3$ e comprimento $4x$, ou largura x e comprimento $4x + 12$. Expressando o produto entre as dimensões do retângulo e igualando a área de 112m² teremos também uma equação quadrática que permite encontrar as dimensões do imóvel.

Outra interpretação da planta baixa, seria uma configuração onde os imóveis estivessem dispostos dois na frente e dois atrás, com paredes adjacentes, nesta configuração o retângulo teria $2x$ de comprimento e $2x + 6$ de largura. Multiplicando essas dimensões e igualando a área de 112m² teremos a mesma equação de segundo grau, que é obtida na condição anterior.

O estudante que vai resolver essa atividade, pode encontrar dificuldades de interpretação de como o projeto pode ser configurado no terreno em que será construído, no entanto o seu desenvolvimento após esse processo, até escrever a equação que representa sua área, é relativamente compreensível para um estudante do último ano do ensino fundamental, uma vez que, os recursos matemáticos necessários são conceitos operatórios com medidas algébricas e os conceitos de cálculo de área de retângulo.

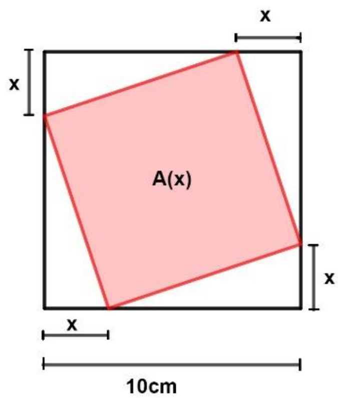
Depois disso será preciso resolver a equação de grau dois obtida, usando os recursos matemáticos que são apresentados a partir do 9º ano de escolarização, fase em que os estudantes conhecem o tema, portanto podem necessitar de encaminhamentos que os orientem a resolver a equação de segundo grau.

Resolvida a equação, será necessário interpretar as duas soluções obtidas e concluir que somente a de valor positivo é a solução do problema, uma vez que a atividade pede a medida das dimensões, e essa grandeza só faz sentido se for positiva.

A situação problema a seguir foi adaptada da questão 15 do ENA - 2015.

3) Em um quadrado cujo lado mede 10 cm, está inscrito um outro quadrado de área A(x), conforme a figura.

Figura 15



Fonte: – ENA 2015 www.profmat-sbm.org.br

Qual é a medida de x se A(x) mede 50 cm²?

A proposta de atividade apresentada na questão três, envolve conhecimentos matemáticos visitados ao longo da vida escolar do estudante, como área de um quadrado, mas também aborda conceitos que são vistos pela primeira vez no nono ano de escolarização: o teorema de Pitágoras, e a solução de equação de segundo grau, dessa forma é possível apresentar essa atividade a partir do nono ano.

A questão é apresentada com uma figura, que visa deixar clara a situação descrita no enunciado, indicando as medidas dadas.

Para encaminhar a solução é preciso interpretar a figura e concluir que a medida perguntada é o comprimento do cateto de um triângulo retângulo. Dessa forma será preciso fazer as conjecturas e representar algebricamente as medidas dos demais lados do triângulo retângulo para se encaminhar a solução. Será preciso concluir que o outro cateto do triângulo mede $10 - x$, o que pode não ser simples para todos.

Em seguida, há que se determinar a medida da hipotenusa, que coincide com a medida do lado do quadrado de área 50 cm² e portanto, mede $\sqrt{50}$cm.

Esses dois passos podem não ser claros para um estudante do nono ano, sobretudo com relação à medida da hipotenusa, pois será preciso um cálculo auxiliar recorrendo ao conceito de área do quadrado para definir sua medida, ou seja, será realizado um cálculo intermediário para se chegar à solução da questão.

A operação algébrica $10 - x$, pode causar certa insegurança no primeiro momento, mas com comentários pontuais, exemplificando com medidas numéricas, será certo a compreensão da medida deste lado do triângulo.

Definidas as medidas dos lados do triângulo, será preciso usar o teorema de Pitágoras para então verificar que sua aplicação encaminhará a questão. Novamente, a solução não é imediata, pois a aplicação do teorema de Pitágoras leva a uma equação de segundo grau, na incógnita x. A solução dessa equação será a resposta da situação problema.

Entendo essa atividade como uma possibilidade de aprofundamento de estudo para esse ano de escolarização, uma vez que proporciona a conexão entre vários conceitos matemáticos apresentados ao longo do ensino fundamental, mas principalmente os dois conceitos apresentados exatamente no nono ano.

As demais situações problemas ficam para apreciação e interpretação do leitor. Destacamos que elas procuraram atender aspectos apresentados acima, notadamente evitando o imediatismo e tocando no tema de equações do segundo grau.

A situação problema a seguir foi adaptada da questão 5.14 do livro Matemática Discreta, Morgado 2015 pag. 97.

4) Uma loja de departamentos realiza uma promoção e anuncia a venda de um violão sob duas condições de pagamentos:

a) à vista com 25% de desconto

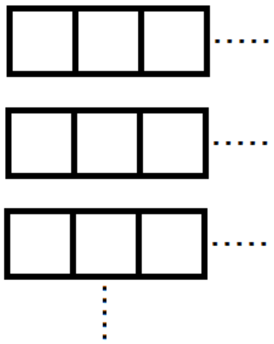
b) em duas parcelas mensais, iguais e consecutivas sendo o primeiro pagamento um mês após a compra.

Se o violão custa R$ 800,00 determine a taxa de juros embutida na venda a prazo.

A situação problema a seguir foi elaborada pelo próprio autor deste trabalho.

5) Em um salão de festas, as mesas para os eventos são montadas usando mesas de formato quadrado, onde cada lado desta mesa acomoda exatamente uma pessoa. Para os eventos, o proprietário encosta as mesas uma na outra de modo a formar mesas retangulares, possibilitando que os convidados se acomodem ao redor das mesas retangulares.

Figura 16 – Possível organização das mesas



Fonte: O próprio autor

Ele sempre organizou o salão de modo que o número de mesas quadradas em cada mesa retangular seja igual ao número de mesas retangulares. Entretanto, na sua última festa ele precisou colocar uma mesa quadrada a mais em cada uma das mesas retangulares. Quantas mesas quadradas foram utilizadas nessa festa, se havia 240 convidados?

A situação problema a seguir foi elaborada pelo próprio autor deste trabalho.

6) As arquibancadas do estádio do Maracanã têm capacidade de receber 78858 expectadores. Sabendo que a primeira linha de arquibancada, a mais próxima do gramado, acomoda 395 torcedores, a segunda fila 411, a terceira fila 427, e assim sucessivamente, quantas filas de arquibancadas há neste estádio?

4.2 Aplicação de uma situação problema a estudantes

Sabemos que a abordagem metodológica dos conteúdos matemáticos é fundamental para conseguir atingir nosso público de forma eficiente. A metodologia de resolução de problemas é reconhecida e muito recomendada de modo a permitir uma investigação ampla passando por diferentes conteúdos matemáticos dentro da mesma problemática, sobretudo se tiver relevância para o estudante.

Desta forma, o processo de aprendizagem ganha novo significado, pois ele possibilita ao aluno construir os conceitos, técnicas e generalizações, permitindo que ele tenha sua compreensão aumentada sobre o conteúdo, e sobre a matemática de modo geral, pois vai constatar, por meio da situação problema, que aquilo que generalizou fez parte de um problema, e que por extensão pode ser aplicado em outras situações de contexto semelhante.

> O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito e da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos). (Bicudo, 1999 p. 207).

Entretanto nessa proposta não utilizamos propriamente a resolução de problemas, mas talvez algo que se assemelhe a ela, uma vez que as situações problemas sugeridas são bem delimitadas e que se espera que o estudante aplique os conhecimentos que conhece sobre resolver equações do segundo grau.

Verdadeiramente esse era o entendimento inicial da resolução de problemas quando surgiu como metodologia de ensino, após conhecerem antecipadamente modelos, definições e conceitos matemáticos que necessitariam para resolver problemas, eram apresentados aos problemas que estimulavam a aplicação desses conceitos na sua resolução.

> Embora a aquisição de conhecimento matemático seja importante, a proposta essencial para aprender matemática é saber usá-la. Em consequência disso dá-se aos alunos muitos exemplos de conceitos e de estruturas matemáticas sobre aquilo que estão estudando e muitas oportunidades de aplicar essa matemática ao resolver problemas. (Bicudo, 1999 p. 206)

Nesta seção, faz-se uma narrativa da generalização proposta aos estudantes de nono ano de uma escola pública, da fórmula resolutiva da equação de segundo grau.

Inicialmente destaque-se que os reflexos da pandemia mundial do coronavírus se fizeram presentes, e nessa oportunidade as aulas ocorriam de forma remota.

A situação problema foi proposta para estudantes de 3 turmas de nono ano, que totalizam 105 alunos matriculados, porém apenas 30 alunos participaram de forma remota por meio das aulas via google meet com o professor da turma.

Outro ponto importante a ser observado é a dificuldade de trabalhar nessa modalidade de ensino, e não ser possível de constatar a interação dos alunos que estão participando remotamente da aula, como podemos quando os estudantes estão presentes em sala, uma vez que a grande maioria fica calada, sem fazer qualquer pergunta ou responder às perguntas que foram feitas.

As aulas que antecederam o tema “equações de segundo grau” foram a respeito dos produtos notáveis, quadrado da soma e da diferença entre dois termos, o produto da soma pela diferença entre dois termos e fatoração. Estes tópicos, eminentemente algébricos, serviram de subsídio para começarmos a resolver situações problemas envolvendo as equações de segundo grau usando inicialmente a fatoração e na sequência o método de completar quadrados.

Fizemos várias abordagens resolvendo equações usando a técnica de completar quadrados, por meio de argumentos operatórios parcialmente justificados geometricamente, com propósito de disseminar a técnica para usá-la no momento de propor a generalização das raízes da equação geral de segundo grau. Durante esse período os estudantes não foram apresentados, por este professor, à fórmula resolutiva da equação.

A situação problema apresentada foi a seguinte:

“Uma sala comercial de formato retangular tem comprimento 6 metros maior que a largura e área igual a 27 metros quadrados. Quais são as dimensões da sala?”

Resolvemos a questão e na sequência foram indagados sobre a possibilidade de “resolvermos” a equação $ax^2 + bx + c = 0$, já que ela possui as mesmas características das equações resolvidas.

Na aula remota, os alunos pensaram e acharam que seria possível, e então passamos a resolver a equação geral. Fazendo as intervenções pontuais, olhando para a equação que acabara de resolver, fomos aplicando as mesmas ações realizadas ao resolver a equação numérica $x^2 + 6x = 27$ da situação problema mencionada.

Lembrando-os que os coeficientes a, b e c são números reais e fazendo perguntas pontuais como: O que faremos para que o coeficiente de x^2 fique valendo um? O que faremos para isolar os termos que contêm a incógnita da equação? Fomos aplicando os mesmos procedimentos utilizados para resolver a equação numérica e chegamos à solução geral da equação de segundo grau, determinando suas raízes.

As dificuldades algébricas mais evidentes foram em reconhecer $\frac{b}{a}x$ como o dobro de sua metade, e subtrair algebricamente as frações: $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$. Foi preciso intervenção mais significativa do professor, pois esse tipo de operação causa muito desconforto até mesmo numericamente. Fazendo esses ajustes para compreensão deles, chegamos ao final do processo e foi possível perceber a satisfação de alguns alunos com a realização da generalização, inclusive reconhecendo que aquela era a conhecida fórmula de Bháskara. De fato, neste momento eles a conheciam por terem atendido à solicitação de fazer uma pesquisa anteriormente sobre o tema, e constataram que a equação de segundo grau poderia ser resolvida por meio de uma fórmula.

Nessa primeira experiência, sobretudo por ter acontecido de forma remota, não causou surpresa que os estudantes não fizessem tal demonstração sem a intervenção do professor. Cabe destacar a interação de alguns estudantes participando e conduzindo o processo verbalmente em parte da generalização, fazendo indicações dos procedimentos algébricos a serem realizados durante o desenvolvimento da aula.

Na sequência, o trabalho foi realizado de forma híbrida, com um número reduzido de alunos por sala, 3 alunos presentes e 30 de forma remota pelo fato da maioria dos pais entenderem que não deveriam enviar seus filhos para a escola. Desse modo, efetivamente o professor conseguiu interagir com cerca de 33 alunos para tratar desta situação problema.

Como implementação desse trabalho foi proposto aos alunos a situação problema número dois indicada na seção 4.1, onde a mesma foi desdobrada em outros itens. Essa proposta teve como finalidade experimentar a capacidade interpretativa, o raciocínio e aplicabilidade do tema estudado ao resolver uma situação problema.

Ao realizar a atividade com três alunos que participavam de forma presencial, percebeu-se apreensão em responder os itens, muita insegurança e dúvidas de como desenvolver a solução. Os alunos que participaram de forma remota apenas um interagiu com o professor fazendo perguntas para tirar dúvidas, os demais mesmo interpelados, permaneceram em silêncio.

Eis a situação problema cuja proposta era para ser desenvolvida em no máximo de duas aulas.

A situação problema apresenta mais de uma possibilidade de representação geométrica e de solução, portanto leia com atenção para responder cada um dos itens que segue e desenvolva seu raciocínio.

A construção de quatro imóveis ocupará uma área total de 112 m². Cada um deles terá o formato retangular de modo que o lado maior terá três metros a mais que o lado menor. Sabendo que os quatro imóveis possuem a mesma área, calcule as dimensões de cada um dos imóveis.

a) No espaço abaixo represente geometricamente a construção dos imóveis.

TERRENO PARA CONSTRUÇÃO DOS IMÓVEIS.

b) Qual é a área da(s) figura(s) representada(s) no item (a)?
c) Algebricamente qual a medida do comprimento e largura da(s) figura(s) representada(s) no item (a)?
d) Escreva a equação que representa a área da(s) figura(s) representada(s) no item (a)?
e) Resolva a equação que escreveu no item (d)
f) Quais são as dimensões de cada um dos imóveis?

No item (a), embora o enunciado deixe claro que seria possível mais de uma forma de representação geométrica, os alunos tiveram dificuldades de fazer esta representação. Um aluno dividiu o espaço que seria o terreno em quatro partes, ação que permite resolver a questão, mas torna impossível o acesso a pelo menos dois imóveis, os outros dois alunos distribuíram os imóveis dentro da figura, mas todos sem ter certeza que essas representações estivessem certas.

Esse fator de insegurança acaba sendo transferido para as questões seguintes e dificultando o andamento dos demais itens. No item (b) era preciso ficar atento ao enunciado pois os quatro imóveis têm área de 112m², desse modo quem apresentou os imóveis separados a área de cada um seria 28m²; quem representou juntos 112m², e isso trouxe ainda mais insegurança a sequência dos demais itens, a ponto dos alunos relatarem que não estavam "entendendo mais nada".

Com isso foi preciso fazer intervenções para mostrar as possibilidades em que os imóveis poderiam ser representados e que conforme essa representação, a figura teria uma área e medida de dimensões diferentes.

Antecipadamente era possível prever essa dificuldade na questão, em razão de na maioria das vezes, as situações problema não possuírem mais de uma possibilidade de solução, e esse fato pode ter causado essa insegurança que comprometeu o desenvolvimento sem as intervenções do professor.

Após isso, ficaram com a representação geométrica posta no quadro e desenvolveram os demais itens, uma vez que já haviam realizado outras atividades do cálculo da área e medidas dos lados de um retângulo e conheciam as técnicas de resolver equações de segundo grau.

O principal fator que provavelmente pode ter causado dificuldade foi a questão não apresentar a representação geométrica do imóvel, e também permitir mais de uma representação, além de provavelmente não terem passado por experiências similares a essa, onde o desenvolvimento de um item influencia no desenvolvimento de outro.

Após os comentários iniciais o restante do desenvolvimento ficou a cargo deles, e analisando as soluções apresentadas foi possível perceber a assertividade deles, bem como a preferência em utilizar a fórmula resolutiva para resolver a equação, mesmo tendo eles o conhecimento da resolução pelo método de completar quadrados.

5 O PROFMAT NA TRAJETÓRIA PROFISSIONAL - RELATO

Diante dos objetivos pessoais e profissionais traçados, buscar qualificação, a oferta do PROFMAT, a partir de 2011, desenhou-se como um caminho que contemplaria essa necessidade de abordagens matemáticas mais aprofundadas, de modo que os alunos tivessem condições de apreender mais e melhor, com o objetivo de que a escola de atuação avançasse nos números do IDEB e de outras avaliações.

O Exame de Acesso ao PROFMAT é nacional, chamado ENA. A preparação para ele teve início em 2014, e o primeiro ingresso ocorreu na turma de 2016 no polo da UEL.

Iniciadas as aulas, percebemos que o curso ofereceria o que realmente buscávamos e precisávamos: conhecer os conceitos e a essência de conteúdos que lhe faltavam quando os abordava em sala de aula. Por outro lado, notou que teria muitas dificuldades ao longo desse processo, em razão da complexidade dos conteúdos, pois muitos deles não eram conhecidos ou haviam sido esquecidos desde a época da graduação.

Essa dificuldade particular, as provas nas disciplinas e o exame nacional de qualificação, previsto no programa como critério fundamental para a conclusão do curso, constituem o conjunto de fatores a exercer grande pressão nos cursistas. É parte do processo de qualificação do programa PROFMAT.

De modo geral o curso fundamenta suas disciplinas em abordar conceitos, teoremas, provas e generalizações que serão posteriormente cobrados no exame nacional de qualificação (ENQ), indicando com isso que, de fato, esses conteúdos são importantes e que, portanto, o professor de matemática do ensino básico precisa conhecê-los a fim de poder fazer melhores abordagens sobre os temas a trabalhar em suas aulas.

A identificação com as questões ligadas ao processo de generalização pautou a escolha do tema da dissertação, tarefa que começou a ser pensada no final de 2019 quando finalmente foi obtida a aprovação no ENQ. De fato foi o que aconteceu no processo de orientação.

A proposta foi abordar os aspectos algébricos que encaminham as generalizações das fórmulas que utilizamos no decorrer das aulas de matemática. Posteriormente, delimitou-se as ações especificamente para a conhecida fórmula de Bháskara, com o propósito de oferecer ao professor leitor um estudo sobre um tema que ocupa grande parte das atividades do 8º e 9º anos do ensino fundamental. A importância está em mostrar que o professor do ensino básico pode demonstrar a fórmula de Bháskara, conhecendo mais sobre sua prática profissional.

A dissertação consiste ainda em uma proposta para abordar os conceitos algébricos de forma mais relevante com os alunos, pois é a oportunidade de proporcionar ao estudante a experiência de generalização de uma fórmula que será utilizada para resolver situações problema no decorrer de suas experiências com a matemática.

A proposta oferece um ponto de vista alternativo em relação ao tradicionalmente utilizado para resolver situações problemas da equação de segundo grau, que comumente são resolvidas pela fórmula resolutiva. Ela resgata as estratégias históricas utilizadas no século XII que se resumiriam em reduzir uma equação de segundo grau a uma equação grau um, e posteriormente usar essa técnica para deduzir a fórmula resolutiva.

Com o desenvolvimento dessa proposta, foi decidido elaborar situações problema que pudessem ser resolvidas utilizando as técnicas aqui apresentadas, com o propósito de oferecer aos leitores sugestões de aplicação de situações problema tendo como tema as equações de segundo grau.

Inicialmente a ideia era produzir situações problemas inéditas, afim de oferecer novas oportunidade de abordagem sobre o tema. O aspecto do ineditismo trouxe outras dificuldades: a produção de situações problemas é tarefa de grande complexidade, envolvendo muita pesquisa.

Para aqueles que não praticam a pesquisa, elaborar uma situação problema pode ser uma atividade ainda mais difícil do que a resolução de tais situações problemas quando são apresentadas pela primeira vez.

A partir dessa nossa experiência, questões relacionadas à produção de tais situações problemas nos chamaram a atenção, e lembramos que o ENQ produz em todos os seus exames situações problemas inéditas, versando sobre temas relacionados aos conteúdos das quatro disciplinas fundamentais do PROFMAT.

Essa atividade de produzir novas formas de apresentar o mesmo conteúdo é tarefa que as pessoas envolvidas por elaborar as questões do exame nacional de qualificação também precisam realizar, trabalho não trivial que demanda pesquisa. Este autor interpreta que, em razão da grande capacidade intelectual e teórica sobre a matemática, a equipe responsável pelo ENQ deve ter maior facilidade em articular as questões.

Na mesma medida, não é elementar resolver as situações problemas quando nos deparamos com elas pela primeira vez, fato recorrente que acontece nos exames que realizamos, ainda que tenhamos o conhecimento sobre as disciplinas que fazem parte do exame, não sabemos quais conteúdos e de que forma serão contemplados, e também os critérios de correção.

O exame que contribuiu definitivamente para mostrar a este autor a necessidade de qualificação (no sentido amplo), e que serviu para decidir sobre o objeto de pesquisa após aprovação no ENQ foi o segundo exame aplicado em 2017, especialmente a questão dois.

Essa situação problema pode ser tomada como emblemática do interesse para realizar essa pesquisa, pois foi também por meio dela que concluímos definitivamente que em sendo professor de matemática interessa saber relacionar situações algébricas que desencadeiam as generalizações e fórmulas que corriqueiramente utilizamos em sala de aula.

A questão ligada à disciplina de números e funções aborda as equações de segundo grau. Especialmente no item b a questão pede para concluir que as raízes da equação eram as apresentadas como r_1 e r_2, ferramenta que usamos corriqueiramente quando tratamos desse tema, entretanto sem fazer tal verificação.

Figura 17 – Questão do Exame Nacional de Qualificação 2017-2

Questão 02 [1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]

Sejam a, b e c números reais com $a \neq 0$. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(a) Escreva a expressão de f na forma $f(x) = a(x - m)^2 + k$.

(b) Utilizando o item anterior, prove que, se $b^2 - 4ac \geqslant 0$, as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, são dadas por

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Fonte: www.profmat-sbm.org.br

Chama a atenção como os símbolos são usados com fartura no enunciado. Entretanto, em razão de se tratar da equação de segundo grau e ser objeto de estudo em todas as salas de aula do nono ano, o tema e a própria “resposta” fazem parte da rotina dos professores por anos.

A fórmula resolutiva de equações do segundo grau é conhecida como instrumento para resolução de situações problemas, sem preocupações de como ela pode ser deduzida. Incomodar-se com esta dedução seria o objetivo da questão.

Abordamos esse tema na disciplina de resolução de problemas, meses antes desse exame, entretanto aula é uma coisa e prova é outra, pois na aula não há pauta de correção, e alguns detalhes sempre acabam passando despercebidos.

O fato de não se saber especificamente os conteúdos das quatro disciplinas fundamentais que vão aparecer no exame, e como serão as questões constitui-se na circunstância singular a ser superada, especialmente após o candidato professor se considerar versado nos variados assuntos. Certamente cada tema já terá sido apresentado, mas a forma é diferente a cada nova apresentação do exame, pois a questão é inédita e o candidato terá que naquele momento interpretar, organizar suas ideias, buscar os conceitos necessários, desenvolver e concluir acertadamente para pontuar.

Os exames de modo geral juntamente com as disciplinas estudadas durante o curso serviram para redirecionar a visão deste autor sobre ser professor de matemática, reconfigurar aspectos relevantes da matemática que, enquanto professor, deve-se conhecer e praticar para dar encaminhamento às aulas.

A apresentação de temas como os de generalização de fórmulas utilizadas em nossa prática escolar é uma oportunidade de mostrar aos alunos que essa não é uma atividade reservada exclusivamente a cientistas da área ou por estudiosos com alto grau de formação, mas sim algo possível de ser apresentado e compreensível enquanto estudante do ensino fundamental.

Essa discussão não há de se tornar necessariamente uma atividade que fará parte da avaliação trimestral do estudante, mas sim uma oportunidade de abordar e aprofundar os estudos sobre os conceitos algébricos. Uma vez que essa generalização é uma atividade prevista no currículo escolar, portanto é necessário expor os estudantes a esse tipo de conteúdo.

Cortela (2019), parafraseando São Beda, cita três caminhos para o sucesso, relacionados com a atividade de professor: ensinar o que se sabe, praticar o que se ensina e perguntar o que se ignora.

Dessa forma, deixamos essa proposta de abordagem do tema apresentado, na expectativa de ser apreciado por outros professores, e consequentemente ser implementado com os estudantes, afim de oferecer a eles, por meio da generalização, os conceitos matemáticos que muitas vezes não são oportunizados.

Nossa expectativa é de continuar pesquisando para elaborar novas experiências que venham contribuir para a continuidade desse processo, conhecer a generalização de outras fórmulas utilizadas no ensino fundamental e médio e aborda-las com os estudantes em sala de aula, explorando com isso os conteúdos algébricos juntamente com o processo de generalização de fórmulas.

Concomitantemente pesquisar recursos metodológicos e tecnológicos que contribua com as práticas pedagógicas afim de buscar meios que sejam facilitadores para promover a interação e a interatividade dos estudantes, como por exemplo a produção de simuladores, aumentando sua capacidade de compreensão da matemática e das fórmulas apresentadas nos livros didáticos.

REFERÊNCIAS

ANPED, Associação Nacional de Pesquisa e Pós Graduação em Educação. **A Proposta de BNCC do Ensino Médio: alguns pontos para o debate.** Rio de Janeiro, 14/05/2018. Disponível em: https://www.anped.org.br/news/nota-anped-proposta-de-bncc-do-ensino-medio-alguns-pontos-para-o-debate. Acesso em 01/08/2021

BICUDO, M. A. V. et al. **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

BRASIL (1988). **Constituição da República Federativa do Brasil:** Brasília: DF, Senado Federal, 1988. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicaocompilado.htm. Acesso em: 23/03/2020

BRASIL (2018). **Base Nacional Comum Curricular**: 1° versão. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acessso em 23/03/2020.

CABASSUT, R.; CONNER, A.; ISÇIMEN, F.A.; FURINGHETTI, F.; JAHNKE, H.N.; MORSELLI, F. **Conceptions of Proof – in Research and Teaching.** In: HANNA, G.; DE VILLIERS, M. (eds.) **Proof and Proving in Mathematics Education.** Heidelberg: Springer, 2012.

CORTELA, M. S. Três dicas para o sucesso. 2019. 1 vídeo (4m11s). Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=PydInO7_To4 >. Acesso em 07/07/2021.

CYRINO, M. C. C. T. **Preparação e emancipação profissional na formação inicial do professor de Matemática.** In: NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (org.). **A Formação do Professor que Ensina Matemática perspectivas e pesquisas**: 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

FIORENTINI, D; LOREZATO, S. **Investigações em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos:** 3° ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino**: coleção do professor de matemática. 3° ed. Rio de Janeiro: SBM 2007

MORGADO, A. C; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**: coleção Profmat. 2° ed. Rio de Janeiro: DRQ gráfica e editora, 2015.

MOSCA, M. A; CARVALHO, T. O; CARVALHO, A. M. F. T. Acerca da circularidade no estudo inicial dos números irracionais: uma proposta para a Educação Básica. **Acta Scientiae,** Canoas v.18, n.2 p.319-334, maio/ago 2016.

OLIVEIRA, K. I. M; FERNÁNDEZ, A. J. C. Iniciação à Matemática: um curso problemas e soluções: 1ºed. Rio de Janeiro: DRQ gráfica e editora, 2015.

PAIS, L. C. **Ensinar e apreender Matemática**: 2° ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2013.

PAIVA, M. A. V. **O Professor de matemática e sua formação: a busca da identidade profissional**. In: NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (org.). **A Formação do Professor que Ensina Matemática perspectivas e pesquisas**: 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática**. Curitiba: SEED, 2008.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Referencial Curricular do Paraná - Matemática.** Curitiba: SEED, 2018. Disponivel em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/bncc/2018/referencial_curricular_parana_cee.pdf. Acesso em 28/07/2021.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Currículo da Rede Estadual Paranaense - Matemática.** Curitiba: SEED, 2018. Disponivel em: https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-05/crep_matematica_2021_anosfinais.pdf . Acesso em 28/07/2021.

ROQUE, T; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática:** 1° ed. Rio de Janeiro: Editora Mangava, 2012.

SOUZA, M. C; PANOSSIAN, M. L; CEDRO, W. L. **Do Movimento Lógico e Histórico à Organização do Ensino o Percurso dos Conceitos Algébricos:** 1° ed. Campinas: Editora Mercado das Letras, 2014.