



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

RODRIGO ALVES VICARRI

**HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E LIVRO DIDÁTICO:
ALGUMAS CONSIDERAÇÕES**

RODRIGO ALVES VICARRI

**HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E LIVRO DIDÁTICO:
ALGUMAS CONSIDERAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Estadual de Londrina - UEL, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa.Dra. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho

Londrina-PR
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

R696 VICARRI, RODRIGO ALVES .
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E LIVRO DIDÁTICO: ALGUMAS
CONSIDERAÇÕES / RODRIGO ALVES VICARRI. - Londrina, 2021.
71 f. : il.

Orientador: Ana Márcia F. Tucci de Carvalho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -
Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2021.
Inclui bibliografia.

1. Livro Didático - Tese. 2. História da Matemática - Tese. 3. Origami - Tese. 4.
Razão Áurea - Tese. I. Carvalho, Ana Márcia F. Tucci de. II. Universidade
Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação
em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

RODRIGO ALVES VICARRI

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E LIVRO DIDÁTICO: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual de Londrina - UEL, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Ana Márcia F. Tucci de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina

Prof^a. Dr^a. Susimeire Vivien Rosotti de Andrade
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Foz do Iguaçu

Prof^a. Dr^a. Regina Célia Guappo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 21 de junho de 2021.

Aos meus familiares; em especial aos meus pais: Sebastião e Maria; minha filha Lorena.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, saúde e capacitação em todos os momentos.

Aos meus pais Sebastião e Maria, pela minha formação, apoio nas conquistas alcançadas e por permitir realizar tantos sonhos, sendo este mais um e muito importante. Suas palavras nos momentos certos significam paz, tranquilidade e a abertura da estrada do sucesso. Obrigado por ser a referência dos atos corretos da vida.

À minha filha Lorena, meu grande amor, por todo o apoio durante todo período de estudos.

À Professora Doutora Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho, minha orientadora e amiga de todas as horas, principalmente por acreditar no meu potencial, pela paciência, informações precisas e compreensão durante o longo caminho desde o início até chegar neste momento.

Ao Professor Doutor Rudolph Pereira Gomes dos Santos, grande amigo e apoiador.

À Professora Doutora Anágela Cristina Moreti Felix, que me incentiva com seu exemplo de profissional desde o ensino Médio.

Aos professores participantes da banca, um grande agradecimento. Seus apontamentos e observações foram importantes para melhorar este trabalho.

A todos os professores e colegas do programa PROFMAT pelos momentos compartilhados durante dois anos, pelo crescimento intelectual e também pela amizade, em especial ao amigo Rogério.

Agradeço ao Colégio Estadual Rui Barbosa, Universidade UNOPAR – Unidade Bandeirantes, Colégio Sesi – Unidade Bandeirantes, por onde trabalhei durante o período do curso.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Por fim, a todos que de algum modo tornaram este trabalho possível.

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.”

Galileu Galilei

VICARRI, Rodrigo Alves. **História da Matemática e Livro Didático: algumas considerações**. 2021. 73 fls. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

RESUMO

A História da Matemática (HM) contribui para a formação do estudante pois o ajuda a refletir sobre como foram construídos os conceitos matemáticos e entender a Matemática como manifestação cultural desenvolvida pela humanidade, desde as civilizações mais antigas até as contemporâneas. O Livro Didático (LD) é um instrumento para auxiliar no planejamento e desenvolvimento das aulas. Esse livro deve conter metodologias que forneçam suporte para o docente. Neste sentido, o presente trabalho busca analisar a presença de HM em uma coleção de LD para o Ensino Médio. Essa coleção faz parte do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) do triênio 2018-2020. O estudo apontou para uma quantidade pequena do uso da HM na coleção analisada e ausência de atividades didáticas com base na aplicação da HM. Assim, nesta dissertação foi proposta uma atividade didática para alunos do 1º ano do Ensino Médio lançando mão das técnicas de Origami para a construção de um pentágono e o cálculo da área pela Razão Áurea; o número áureo está presente no pentagrama e nos triângulos e pentágono inferiores que são formados pelo traçado de seus diagonais. Em virtude do cenário atual da pandemia do novo Corona vírus (Sars-Cov2), essa atividade não foi aplicada aos alunos, porém acreditamos que a integração entre a HM, técnica de Origami e razão Áurea tem potencial para ser utilizada em plano de aula visando o ensino da Matemática no Ensino Médio.

Palavras-chave: Livro Didático. História da Matemática. Origami. Razão Áurea.

VICARRI, Rodrigo Alves. **History of Mathematics and Textbook: some considerations**. 73p. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

ABSTRACT

The History of Mathematics (HM) contribute to the student's education, as it helps him to reflect on how mathematical concepts were constructed and to understand Mathematics as a cultural manifestation developed by humanity, from the most ancient to the contemporary civilizations. The textbook (LD) is an instrument to assist in the planning and development of classes. These books must contain methodologies that provide support for the teacher. In this sense, the present work seeks to analyze the presence of HM in a collection of LD for High School. This collection is part of the National Textbook Program (Plano Nacional do Livro Didático – PNLN) of 2018-2020. The study pointed to a small amount of the use of HM in the analyzed collection and the absence of didactic activities based on the application of HM. Thus, in this dissertation, a didactic activity was proposed for students of the 1st year of High School using Origami techniques for the construction of a pentagon and the calculation of the area by the Golden Ratio; the Golden number is present in the pentagram and in the lower triangles and pentagon that are formed by the layout of their diagonals. Due to the current pandemic scenario of the new Corona virus (Sars-Cov2), this activity was not applied to students, but we believe that the integration between HM, Origami technique and Golden ratio has enough potential to be used in teaching mathematics in High School.

Keywords: Textbook. History of Mathematics. Origami. Golden Ratio.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Relação dos capítulos com História da Matemática.....	44
Figura 2 – Fatos históricos e contribuições de pesquisadores para desenvolvimento da Matemática presentes no volume 1 de um livro didático de Matemática do Ensino Médio.....	46
Figura 3 – Fatos históricos e contribuições de pesquisadores para desenvolvimento da Matemática presentes no volume 2 de um livro didático de Matemática do Ensino Médio.....	47
Figura 4 – Fatos históricos e contribuições de pesquisadores para desenvolvimento da Matemática presentes no volume 3 de um livro didático de Matemática do Ensino Médio.....	48
Figura 5 – Relação existente entre o número ouro e a reprodução de coelhos	55
Figura 6 – Partenon, templo grego do século V a.C, mostrando os retângulos (em branco)construídos utilizando a proporção áurea.	55
Figura 7 – Obra de Leonardo Da Vinci, o homem Vitruviano que foi construindo utilizando a proporção áurea.	56
Figura 8 – Representação de uma proporção	56
Figura 9 – Os triângulos internos (A) e externos (B) a estrela do pentágono regular utilizados para estabelecer a relação entre os senos dos ângulos.....	63

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –Passos e demonstrações para construção do pentágono regular utilizando a técnica do Origami	58
Tabela 2 –Demonstração da determinação do cálculo da área do pentágono regular que foi construído conforme pela técnica do Origami conforme passos da tabela 1	62
Tabela 3 –Resultados do cálculo da área de um pentágono de raio de 13 cm que foi construído utilizando a técnica de Origami.....	64
Tabela 4 –Proposta de outras atividades didáticas com foco na História da Matemática.....	71

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Análise crítica da presença de conteúdos da História da Matemática separada por capítulos dos três volumes do livro didático do Ensino Médio com título Matemática: ciência e aplicações.....	37
Quadro 2 – Análise dos recursos visuais relacionados à História da Matemática no livro-didático de IEZZI et.al. (2016) <i>et al</i> (2016).....	38
Quadro 3 – Outros critérios para análise dos recursos visuais relacionados à História da Matemática nos volumes 1, 2 e 3 de IEZZI et.al. (2016) <i>et al</i> (2016)	44
Quadro 4 – Proposta de um plano de aula	65

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
DCE	Diretrizes Curriculares Estaduais
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
HM	História da Matemática
LD	Livro Didático
MEC	Ministério da Educação e Cultura
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
UEL	Universidade Estadual de Londrina
UEM	Universidade Estadual de Maringá
UNOPAR	Universidade Norte do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
1. REVISÃO DA LITERATURA	17
1.1 O USO DO LIVRO DIDÁTICO NA SALA DE AULA.....	17
1.2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM LIVROS DIDÁTICOS	20
1.3 USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA SALA DE AULA.....	23
2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	28
2.1 DESCRIÇÃO DO LIVRO DIDÁTICO	28
2.3 DISCUSSÃO.....	49
3. PROPOSIÇÃO DE UMA ATIVIDADE DIDÁTICA.....	52
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS	67
5. REFERÊNCIAS.....	68
6. APÊNDICE	72

INTRODUÇÃO

O presente trabalho de dissertação é um retrato da minha experiência no magistério, em quase uma década, em instituições públicas e privadas nos níveis Fundamental, Médio e Superior. O ensino da Matemática em sala de aula sempre foi um desafio diante da dificuldade dos alunos em adquirir os conhecimentos matemáticos por várias razões como, por exemplo, a falta de contextualização histórica dos conteúdos e a relação entres os conteúdos e a vida cotidiana dos estudantes.

A Matemática, como as demais ciências, tem História e não está finalizada, mas em constante crescimento. Porém, a História não deve ser relegada apenas à curiosidade. Deve servir para guiar o desenvolvimento do conteúdo, já que, ao seguir os passos originalmente dados em direção a um novo conceito, a construção do conhecimento pode se tornar mais espontânea ou natural.

Quando nos voltamos para os Livros Didáticos (LD), temos que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) orientam sobre a importância dos mesmos possuírem metodologias como a História da Matemática para o ensino.

Nesse contexto, a História da Matemática tem sido abordada e relacionada nos LD de Matemática de forma reduzida e superficial, possibilitando aos professores e alunos conhecerem apenas informações pontuais e superficiais. Nessa perspectiva, pode-se inferir que é válido contemplar a presença da História da Matemática no livro didático, para que o professor possa fazer uso de tal campo do conhecimento durante o desenvolvimento de suas atividades com os estudantes.

Visto que a contextualização é fundamental para o processo de ensino e aprendizagem, nos LD a História da Matemática pode ser abordada em categorias teórica, ilustrativa e atividades (BIFFI (2016)). Essas categorias são divididas de acordo com os lugares em que aparece a História da Matemática (BIANCHI, 2006, p. 48). Na parte teórica, apresenta a História da Matemática de diversas maneiras, como acontecimentos, datas e biografias (BIANCHI, 2006, p. 48). Nas ilustrações, geralmente encontra-se apenas a imagem do matemático com um resumo da vida e dos trabalhos desenvolvido por ele. Na categoria das atividades, a História da Matemática fica restrita apenas a nome de equações e teoremas como

por exemplo, equação de Heron e Teoremas de Pitágoras. Assim, em muitos casos, ocorrem poucas proposições de atividades didáticas utilizando a História da Matemática.

A proposta do trabalho de Santos (2013) tem por objeto o estudo da História da Matemática como recurso para o ensino de Matemática e “[...] propor aos educadores que adotam o conteúdo de História da Matemática nos primeiros anos do Ensino Fundamental como parte integrante e fundamental do processo de aprendizagem” (SANTOS, 2013, p. 7). No decorrer do trabalho, o autor apresenta a História da Matemática e seu diálogo com a educação; sua origem e evolução, o uso da HM como metodologia para o ensino da Matemática, pautando-se nos PCN e discute modos de se ensinar Matemática em sala de aula, apresenta também a importância da preparação dos professores de Matemática para o uso desse recurso metodológico. Santos (2013, p. 152) conclui o trabalho afirmando que “apesar de todos os discursos favoráveis e das recomendações oficiais do governo, pouquíssimas são as ações no sentido de efetivar o estudo da HM pelos professores dos primeiros anos do Ensino Fundamental.

Considerando preliminarmente esses estudos, o objetivo geral dessa dissertação foi realizar uma análise qualitativa da presença de tópicos da História da Matemática em livros didáticos de uma coleção do Ensino Médio, aprovada pelo PNLD (2018). O objetivo geral apresentou desdobramentos em objetivos específicos que foram (i) análise a presença dos conteúdos da História da Matemática; (ii) verificar como a História da Matemática é abordado no LD; (iii) analisar a presença de recursos virtuais, imagem, esquemas e gráficos, sobre a História da Matemática nos LD; (iv) relacionar a razão Áurea e a técnica do Origami a História da Matemática; (v) elaborar uma proposta de atividade didática utilizando a História da Matemática; (vi) utilizar a técnica de Origami para construção de pentágono regular e (vii) determinar a área do pentágono utilizando a razão Áurea.

Neste sentido, dentro do desenvolvimento dessa dissertação, a fim de oferecer a necessária base a construção do trabalho foi utilizado como base, o livro-didático de título “Matemática: ciência e aplicações” escrito por IEZZI et.al. (2016) *et al.*, (2016). Esse livro é um dos livro-didático da disciplina da Matemática presentes no Plano Nacional do Livro Didático do triênio 2018-2020. Ele foi adotado

por um colégio público de uma cidade do interior do Paraná, donde a escolha foi feita. A referida cidade é de pequeno porte. Assim, tem poucos colégios nessa região com a modalidade de Ensino Médio.

No capítulo 1 desta dissertação faz-se considerações teóricas sobre História da Matemática, livros didáticos e ensino da Matemática.

Os Procedimentos Metodológicos utilizados nesta dissertação são temas do segundo capítulo. Faz-se uma análise qualitativa de uma coleção de livros didáticos do Ensino Médio de um colégio público de uma cidade do norte do Paraná. Esse município tem aproximadamente 8 mil habitantes (IBGE, 2018). A coleção de livros dos autores IEZZI et.al. (2016), et al. (2016) foi utilizada nessa análise, por ser a adotada no único colégio público de uma cidade de pequeno porte do interior do Paraná.

No terceiro capítulo, foi proposta uma atividade que envolve a História da Matemática, mais especificamente a construção de um pentágono e obtenção da área dessa figura geométrica pela razão áurea. Nesse capítulo, também foi feita a determinação e comparação entre quatro diferentes maneiras de calcular a área de um pentágono regular.

Finalmente, no último capítulo, tecemos considerações sobre o trabalho, onde são mencionados a importância da História da Matemática na contextualização das aulas, o potencial da técnica de Origami para no ensino da geometria e a validação da razão Áurea para cálculo da área de um pentágono regular.

1. REVISÃO DA LITERATURA

O desenvolvimento da Matemática como uma disciplina ao longo do tempo tem sido um processo que se tornou fundamental não somente dentro da sociedade, como também, na própria maneira às quais os Livros Didáticos (LD) são construídos e desenvolvidos.

Lara (2013, p. 52) observou em seu trabalho sobre o ensino dessa disciplina no ambiente escolar que:

A Matemática ensinada em sala de aula é o resultado de práticas desenvolvidas historicamente pela humanidade que originaram técnicas, estratégias e instrumentos como ação para lidar com situações de um determinado contexto e para garantir sua sobrevivência. No entanto, a articulação entre a Matemática e a sua História nem sempre é feita pelo professor.

A ausência da História da Matemática durante o ensino em sala de aula pode também ser reflexo dos conteúdos contidos nos livros didáticos. O foco principal na descrição dos conteúdos nesses livros são os conceitos e os teoremas da Matemática, sem uma abordagem contextualizada dos fatos históricos que contribuíram para o advento dos conhecimentos matemáticos.

1.1 O USO DO LIVRO DIDÁTICO NA SALA DE AULA

O livro didático (LD) é uma ferramenta importante no processo de ensino em sala de aula, mas não deveria ser absoluta ou único. Bastos (2004, p.1) descreve o livro didático como um instrumento de auxílio no processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, observa-se que o uso do Livro Didático pelo professor é importante para o planejamento e execução das aulas, porém não pode ser única fonte de apoio.

É necessário que o professor saiba que o atual ensino não é perfeito, em especial, dentro de um tempo, onde por vezes, o elemento científico perde lugar para o senso comum, mas, mesmo diante dessas dificuldades, entender os fundamentos de seu campo em conjunto com a História da Matemática, é fundamental para um aprofundamento nessa ideia e na melhoria daquilo ao qual é transmitido aos alunos. Além disso, o Livro Didático é um elemento fundamental na organização do trabalho do docente, tendo em vista, que não é algo que ensina o

professor a falar alguma coisa, mas auxilia no processo de desenvolvimento do aluno. Em adição, o Ministério da Educação (MEC) tem incentivado a elaboração de guia para orientação do uso de livros didáticos (BASTOS, 2004).

O LD é essencial no trabalho do professor, mas não substitui o planejamento e organização do docente e não reduz a importância do professor como mediador do conhecimento. Diante disso, Bastos (2004, p. 4) aponta que:

O livro didático desempenha um papel muito importante na realização do trabalho docente, o que tem feito com que o MEC tenha elaborado um Guia de orientação do livro didático para que o professor tenha subsídios para realizar melhor sua escolha.

Então, desde que o LD moderno começou a ser produzido no final do século XIX, ele se mostra fundamental e permanece no contexto das escolas.

O Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) foi criado ainda na década de 1980 e estabeleceu normas e critérios para avaliação de livros didáticos utilizados na educação brasileira. Esse processo avaliativo possui o objetivo de avaliar se os livros possuem erros conceituais, se manifestam qualquer forma de preconceito ou discriminação e se as metodologias são adequadas para o desenvolvimento das mais variadas capacidades do aluno, dentro das especificidades de cada disciplina.

No Ensino Médio foi estabelecido o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) que, em 2004, distribuiu livros de Português e Matemática para o 1º ano das escolas do Norte e Nordeste. Em 2005, “houve distribuição de livros de Português e Matemática para todos os anos e regiões” (BRASIL, 2016). As escolas passaram a receber livros didáticos de Biologia, em 2007; de Química e História, em 2008; de Física e Geografia, em 2009; com reposição anual dos livros já distribuídos. Em 2012 começou a distribuição integral de livros didáticos para todos os anos do Ensino Médio, que ocorre a cada três anos.

A institucionalização da avaliação do LD trouxe um conjunto de consequências positivas e desafios. Tal como mostra Bastos (2004, p. 1): “[...] as ações do professor são influenciadas por sua concepção sobre como se dá o processo ensino e aprendizagem da Matemática e isto pode contribuir para uma ação em sala de aula que enfatize o pensamento autônomo e o raciocínio [...]”. Isso

significa que se o professor tiver um material inadequado em mãos, fatalmente, também poderá oferecer ao aluno algo cuja compreensão esteja equivocada ou que apresente erros conceituais.

Observa-se que o LD é uma ferramenta indispensável por se tratar de algo físico e um elo entre o aluno e o professor. Os exercícios, as figuras, os textos do LD contribuem para dinamismos do ensino. Isso aumenta a importância do papel do LD, o qual precisa acompanhar também as demandas expressas pela sociedade.

Atualmente, os LD são escolhidos a cada três anos, período ao qual, serão renovados mais uma vez. Sobre isso, é possível observar ainda, que dentro do processo de escolha dos livros, existem reuniões com professores de várias escolas que analisam, estudam, e opinam sobre o conteúdo a ser oferecido, em um trabalho em conjunto com as editoras, que por sua vez, vão até as escolas.

Um outro ponto que é expresso por Bastos (2004, p.3) em seu trabalho é que:

[...] os professores [...] veem o livro didático como manual de exercícios na medida em que enfatizam em suas falas que o livro didático deve conter uma quantidade suficiente de exercícios para garantir a aprendizagem dos alunos.

A possibilidade dos professores das escolas básicas opinarem sobre a escolha do LD no processo democratiza a escolha, permitindo que se atenda às necessidades do grupo de professores, e tem uma metodologia mais adequada.

Na rede pública, todos os alunos recebem o LD, ao final de cada ano têm o compromisso de o devolver à escola, para que esses livros possam ser usados por novos alunos. Os livros são cedidos aos alunos, tendo os pais, por sua vez, que assinar um compromisso de responsabilidade por esse material, onde o aluno deve ter cuidado, pois será utilizado por outros alunos em anos seguintes.

Todavia, é um equívoco imaginar que somente o livro é capaz de suprir tudo ao qual o aluno necessita. A presença do professor é essencial para fazer a ponte entre o saber do LD e os estudantes. De acordo com Silva Júnior (2007, p. 21), podemos observar que:

O livro didático destina-se a dois leitores: o professor e o aluno, em que o professor é o mediador dos conteúdos que estão nesses livros, e o aluno é o receptor de tais conteúdo. E através desses livros que o aluno vai aprender, construir e alterar significados, em relação a um padrão social, que a própria escola estabeleceu como projeto de educação, quando da adoção desse livro didático para utilização na escola. (SILVA JUNIOR, 2007. p. 17).

Ogliari (2014, p. 100) aponta ainda que: “O livro didático de Matemática acompanha o ensino da disciplina no Brasil desde o século XVIII, constituindo, em companhia de os professores de cada época, o ideário do que seria a Matemática “ensinável””.

A regulamentação do livro didático no Brasil ocorreu na década de 1930 e após diversas modificações, em 1985 foi criado o Plano Nacional do Livro Didático (PNLD). E somente em 1993 que a qualidade dos livros didáticos começou a ser examinada, com a aprovação de número reduzido de livros (BIFFI, 2016).

1.2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM LIVROS DIDÁTICOS

Oliveira e Sousa (2018) apontam que, muitas vezes, os professores utilizam apenas o livro didático como recurso para preparar e ministrar as aulas. Desta forma, o livro pode ou não contemplar a História da Matemática como meio para se entender o contexto histórico dos conteúdos e razões do surgimento daquele conteúdo da Matemática, dentro do contexto das necessidades humanas. Para os autores, identificar como o livro didático pode auxiliar na inclusão da História no ensino de Matemática é fundamental. Os autores realizaram trabalho sob a perspectiva de uma pesquisa de campo exploratória de abordagem qualitativa. Nesse trabalho, os autores analisam duas coleções de livros do ensino Médio, aprovadas pelo PNLD (2015), utilizadas no estado do Ceará. Os livros são da coleção Matemática: contexto & aplicações (DANTE, 2013) e da coleção Matemática: Ensino Médio (SMOLE, DINIZ, 2013). Segundo Oliveira e Souza (2018), os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), reconhecem a História da Matemática como uma possível área do conhecimento a ser trabalhada em aula. Em especial, as OCEM (2006) orientam que por meio da História da Matemática estaremos, dentre outros pontos, ajudando os alunos a entender a Matemática de forma mais contextualizada e por consequência mais humanizada, como construção

social e cultural.

De acordo com Oliveira e Sousa (2018), os professores apresentam como argumentos favoráveis à contextualização histórica dos conteúdos o fato de que a História pode despertar o interesse dos alunos pelos conhecimentos matemáticos e pode possivelmente também os possibilitar a aquisição de uma apropriação mais significativa dos conteúdos trabalhados. Ainda, segundo estes autores, podemos observar que cabe ao professor diante de sua prática a decisão de seguir o livro de 'capa a capa', ou não, e que o mesmo tem a liberdade para aplicar, reformular, e abordar os conteúdos e atividades propostas conforme as suas próprias concepções e habilidades.

De posse destas considerações, torna-se interessante fazer uma análise crítica de LD, para compreender como tais instrumentos apresentam a História da Matemática aos professores e alunos. Na coleção analisada, foi feita uma contextualização dos conhecimentos matemáticos com à História da Matemática. Porém, não se pode inferir que a forma como é realizada tal abordagem seja suficiente para extrair da História suas potencialidades para o ensino. Pelo observado, em alguns momentos são apresentados, nesta coleção, de forma muito pontual, tópicos da História de determinados conteúdos matemáticos, contudo, não se pode inferir também que tal abordagem seja suficiente para possibilitar aos alunos uma aprendizagem significativa.

O trabalho de Biffi (2016) apresenta a importância da História da Matemática como ferramenta metodológica na construção do conhecimento, por diversos estudiosos. Nesse estudo é feita uma análise de três coleções de livros didáticos de Matemática de Ensino Médio, à luz do Guia do PNLD (2015). Os livros analisados em tal trabalho são aquelas mais adotadas pelas escolas estaduais da cidade de Maringá-PR. A análise tinha por objetivo verificar a maneira como a História da Matemática é abordada nos conteúdos dos livros. A autora relata que grande parte dos professores do estudo utilizam apenas o livro didático como recurso pedagógico nas aulas. Isso ratifica a importância do LD que traga estratégias metodológicas, como a História da Matemática, de modo que essa possa ser ativamente trabalhada em sala de aula.

Santos (2013) destaca os trabalhos de Mendes, Fossa e Valdés (2011) e Miguel *et. al.* (2009) como importantes para a aprendizagem Matemática. O autor contempla teorias em relação ao ensino da Matemática, traz seções sobre as práticas históricas sobre o ensino da Matemática; A História da Matemática nas Civilizações Pré-Colombianas; discorrendo ainda sobre os Maias, os Incas, os Astecas, a História da Matemática no Brasil; a História do ensino de Matemática no Brasil e o ensino da Matemática tomada como ciência em desenvolvimento. No capítulo III dessa obra, Práticas e perspectivas metodológicas no ensino da Matemática na atualidade, o autor traz seções que discorrem sobre os PCN e a organização do Ensino de Matemática. Para finalizar tratando da formação docente e do conhecimento da História da Matemática. O trabalho de Santos (2013) mostra a importância da História da Matemática e o desenvolvimento do conhecimento dessa ciência em várias civilizações humanas.

Outro trabalho sobre a História da Matemática é o de Soares (2004), intitulado “História da Matemática na formação de professores do Ensino Fundamental – (1ª a 4ª série)”. Essa dissertação objetivou propor a um grupo de professoras das séries iniciais do Ensino Fundamental o estudo sobre a História dos conceitos matemáticos, dando ênfase ao sistema de numeração hindu-arábico. A autora investigou as possibilidades e as limitações, na percepção dessas professoras, da vivência pedagógica em que a mediação principal foi a História da Matemática. Para isso, foram realizadas reuniões com um grupo de professoras do Ensino Fundamental – Séries Iniciais, composto por quatro integrantes. Durante as reuniões o foco dos estudos foi voltado para os conteúdos trabalhados nas primeiras séries: início da contagem, as civilizações antigas e suas contribuições e o sistema de numeração decimal.

Soares (2004, p.125) destaca que “nas primeiras manifestações das professoras, os significados atribuídos à História e ao ensino de Matemática revelavam uma certa ingenuidade por nunca terem convivido com a reflexão sobre o tema”. No que se refere à relação existente entre História e Ensino da Matemática “inferiam se tratar de acontecimentos históricos, com destaque para pessoas e os lugares onde ocorriam (Soares, 2004). Por sua vez, a produção dos conhecimentos matemáticos era um processo cumulativo de conteúdo, ao longo do tempo, estabelecido por pessoas especiais” (Soares, 2004, p. 125). No decorrer dos

encontros houve uma mudança na percepção das professoras em relação à História da Matemática. As leituras, discussões e sínteses elaboradas se traduziram em oportunidades de registros para credenciar a afirmação de que os conceitos matemáticos estudados, antes considerados bem definidos no tempo e mantidos fechados para qualquer possibilidade de ser um processo evolutivo, passa a ser visto como um processo carregado de intencionalidade, questões éticas e políticas (SOARES, 2004, p. 126). Mesmo sendo o primeiro contato das professoras com a História de um conteúdo matemático, “avalizaram a importância de conhecer as origens e o processo de formação/produção dos conceitos que ensinam a seus alunos” (SOARES, 2004, p. 126), e passaram a admitir a História da Matemática como indispensável “para a reelaboração de seus próprios conhecimentos que, de certa forma, foram abalados por se constituírem de frágeis técnicas operatórias e de ênfase para a nomenclatura” (SOARES, 2004, p. 126).

Esses trabalhos trazem que a História da Matemática tem sido abordada e relacionada nos LD de Matemática de forma reduzida, possibilitando aos professores e alunos conhecerem apenas informações pontuais e superficiais. Nessa perspectiva, pode-se inferir que é válido contemplar a presença da História da Matemática no livro didático, para que o professor possa fazer uso de tal campo do conhecimento durante o desenvolvimento das atividades com os estudantes.

1.3 USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Tanto professores em exercício na Educação Básica como também pesquisadores têm buscado fundamentos teórico-práticos que venham contribuir para o desenvolvimento das aulas de matemática e o aprender e ensinar matemática. Segundo Brito (2007), pode-se observar tanto em pesquisas desenvolvidas na área específica de História da Matemática como também em trabalhos voltados para a Educação Matemática a presença da História da Matemática como uma possível área do conhecimento que pode apresentar subsídios ao professor para a execução de uma prática em que a Matemática possa ser visualizada em contexto com a realidade.

A História da Matemática não deve fazer parte das aulas como coadjuvante, por meio da narração de fatos isolados, mas deve sugerir caminhos para a problematização em forma de atividades que visem à construção de

conceitos por parte dos alunos. É importante que os professores tenham a oportunidade de elaborar atividades com esta História e de utilizá-la em suas aulas, pois, nesse processo pressupõe a articulação entre pesquisa e ensino, teoria e prática, os docentes se percebem produtores de novos conhecimentos e a História da Matemática assume plenamente seu potencial de formação. (BRITO, 2007, p.15)

Pereira e Pereira (2015, p. 70) também apontam qual o papel do professor pesquisador no contexto da História da Matemática e sua função na sala de aula,

Ao trabalhar com fontes documentais históricas, o pesquisador precisa ter um cuidado especial, pois a obra possui ideias entrelaçadas do autor, e mesmo examinando minuciosamente, algumas questões podem ficar sem respostas. A função do pesquisador em História da Matemática é então tentar descobrir as origens e em seguida a evolução de ideias, noções e métodos científicos, “desdogmatizando” a formação Matemática, sendo muitas vezes imparcial com situações que possam fornecer dúvidas.

Enfatizando a importância do contexto para o processo de ensino e aprendizagem Miguel e Brito (1996) apresentam um quadro organizado com a coleta de dados de duas coleções de livros didáticos que são foco da pesquisa. Em uma das coleções, foi observado que aparece de forma muito sucinta a História da Matemática, já na outra, há uma breve descrição biográfica de alguns pesquisadores da Matemática e as principais contribuições dos mesmos para determinados temas abordados no livro. Em alguns momentos, os autores expõem uma imagem que pode instigar a busca pelas curiosidades da parte histórica do conteúdo. É descrito nas considerações finais que nas coleções de livros analisadas, mesmo que apresentem de forma sucinta trechos de História da Matemática, são válidas para o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. Pois, mesmo que o professor não tenha conhecimento sobre a História da Matemática, pode apoderar-se das notas nos livros e buscar nos referenciais o aprofundamento do conhecimento.

Para D’Ambrósio (2013), os processos de ensino e aprendizagem da disciplina de Matemática podem ser auxiliados pelo conteúdo de História da Matemática, proporcionando resultados na consolidação do conhecimento numérico, algébrico e geométrico. Segundo esse autor, a importância da História de Matemática vem sendo defendida por profissionais da Educação, incluindo, pedagogos, gestores e, principalmente os professores que lecionam a referida disciplina. No entanto, Fragoso (2011) mostra que há divergências quanto às

perspectivas relacionadas com a disciplina de História da Matemática lecionada em cursos de formação de professores e o contexto da institucionalização curricular. O autor observou durante uma pesquisa sobre a formação de professores de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora dois redirecionamentos na condução da disciplina de HM. Os conteúdos de Matemática, a exemplo definições de operações unitárias e teoremas geométricos são primeiramente abordados na disciplina. Em seguida, volta-se para ensino da História da Matemática e no final da disciplina, a História do ensino da Matemática no ambiente escolar é abordada (FRAGOSO, 2011). Essa fragmentação da disciplina em três temas principais pode ser devido as diferentes áreas de atuação do corpo docente. Nesse contexto, um caráter híbrido na disciplina de formação de docente foi observado.

Um caráter híbrido, mesclando História e Matemática, como grandes eixos de estudo, todavia, permite uma abordagem múltipla da disciplina. Além disso, a História da Matemática tem sido analisada como metodologia para auxiliar na aprendizagem e despertar nos discentes o interesse pelo estudo dessa ciência (D'AMBRÓSIO, 2013).

No Brasil, por exemplo, os livros de Euclides Roxo publicados no final da década de 1920 apresentam diversas notas históricas relativos a ensino da Matemática (CARAÇA, 2002). Essas notas podem ser utilizadas na disciplina da Matemática com objetivo de mostrar a evolução do conhecimento e da pedagogia associada ao ensino e a aprendizagem da Matemática no Brasil.

Conforme descrito por Mendes e Chaquiam (2016, p. 12), as construções históricas da Matemática, concebidas ao longo do tempo pelas civilizações, estimulam o potencial dos estudantes para estudos e pesquisas de estratégia para solucionar problemas cotidiano envolvendo os conteúdos da Matemática.

Desafiar a capacidade dos alunos para exercitarem estudos, pesquisas e problematizações que estimulem suas estratégias de pensamento e, daí culminar na sua produção de conhecimento durante a atividade de estudar. (MENDES, CHAQUIAM, 2016, p. 12).

Nesse contexto de abordagem dos conteúdos da Matemática com problemas da vida cotidiano, Roque e Carvalho (2012, p. IX) mencionam que os estudantes têm uma percepção abstrata da Matemática e não conseguem relacionar

os conhecimentos obtidos na disciplina com o labor diário.

Fala-se muito, hoje em dia, em inserir o ensino de um conceito matemático em um 'contexto'. Da experiência que temos da Educação Básica, notamos que os alunos consideram a Matemática por demais "abstrata", ouvimos muitos pedidos para que ela se torne mais próxima ao "quotidiano", que percebam sua utilização no dia-a-dia (ROQUE e CARVALHO, 2012, XII).

Diante disso, para solucionar o impasse entre o ensino da Matemática e a aplicação dos conhecimentos da disciplina no dia-a-dia, Roque e Carvalho (2012) propõem a utilização da História da Matemática com o objetivo da aplicação de um ensino contextualizado aos fatos históricos da antiguidade aos dias contemporâneos.

Roque (2013, p. 6) reitera que a História da Matemática pode contribuir para o esclarecimento de situações problemas históricas e cotidianas a fim de uma compreensão dos conceitos da disciplina de Matemática.

Os professores e estudantes devem compreender que as situações problemas estudadas e sustentadas pela Matemática Contemporânea são complexas e não facilmente manuseáveis, haja vista o alto nível de simbolismo e rigor matemático (D'AMBRÓSIO, 2013). Porém, os conceitos lecionados na disciplina de Matemática do Ensino Básico e na graduação têm uma fundamentação histórica, com a contribuição de pesquisadores dessa ciência desde há muito.

Nesse contexto, as Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná para o Ensino Médio (PARANÁ, 2008), incorporam a História da Matemática como um método de ensino.

A História da Matemática é um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação das situações-problema, na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos. Possibilita ao aluno analisar e discutir razões para aceitação de determinados fatos, raciocínios e procedimentos (PARANÁ, 2008, p. 40).

De acordo com essas diretrizes, os professores devem fazer uso da História da Matemática para qualificar e enriquecer o processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Matemática.

Diante dos apontamentos desses autores, podemos perceber que o

uso da História da Matemática na sala de aula, se possível, apoiado nos conhecimentos oriundos do Livro Didático, pode proporcionar ao estudante a percepção da construção humana da matemática, apontando seu papel para solução de problemas cotidianos e, ainda, sendo objeto metodológico para o professor de matemática.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os procedimentos metodológicos são aspectos importantes, inclusive, para a definição da natureza da pesquisa desenvolvida.

Neste trabalho foi desenvolvida uma pesquisa de natureza qualitativa, caso em que se pretende descrever um certo fenômeno. No caso desse trabalho, o objeto de estudo a ser descrito é a presença de tópicos da História da Matemática em livros didáticos pertencentes a uma coleção específica de Matemática, do Ensino Médio, aprovada pelo PNLD (2018).

Não se trata, pois, de um método linear, mas de um método que vai possibilitar a análise de um conjunto de dados, buscando uma maior consistência entre os dados encontrados nesse modelo de pesquisa, o que acaba possibilitando um tipo de visão que está muito além do lugar-comum e que conduz a uma análise, sobre o fato, que possibilita com maior clareza, saber e entender os impactos positivos e negativos ao longo do tempo, por meio do que mostram os fatos históricos.

Assim, nosso recorte dá-se na intersecção da análise de um particular instrumento de trabalho, o livro didático, na perspectiva de localização dos conteúdos de História da Matemática nele abordados.

2.1 DESCRIÇÃO DO LIVRO DIDÁTICO

A coleção de livro utilizada foi “Matemática: ciência e aplicações”, dos autores Gelson Iezzi; Osvaldo Dolce; David Degenszajn; Roberto Périco e Nilza de Almeida, 9ª. edição de 2016. Esta compõe o Plano Nacional do Livro Didático do triênio 2018-2020. A escolha dessa coleção deu-se por ser a adotada por um colégio público de uma cidade do interior norte do Paraná. A referida cidade é de pequeno porte, deste modo há apenas este colégio com a modalidade de Ensino Médio.

Na análise qualitativa de cada capítulo dos três volumes da coleção foi observada a presença de conteúdos da História da Matemática, conforme mostrado nos quadros 1 a 3. Para essa análise foi considerada a presença de conteúdos históricos escritos no texto (quadro 1) e ilustrações ou recursos visuais (quadros 2 e

3). As perguntas norteadoras para as análises dos quadros 2 e 3 foram baseadas em Vasconcelos (2009), tratando-se aqui de uma adaptação. A escala norteadora para a classificação, utilizada no quadro 2, foi baseada no número de menção da História da Matemática nos capítulos e volumes do livro: 1 < Fraco < 2, 3 < regular < 5, bom > 5 menções. Trata-se de uma escala subjetiva.

Quadro 1. Descrição crítica da presença de conteúdos da História da Matemática separada por capítulos dos três volumes do livro didático do Ensino Médio com título Matemática: ciência e aplicações, IEZZI et.al. (2016).

Capítulo	Conteúdo	Paginação	Presença de conteúdos históricos	
			Sim	Não
Volume 1				
1	Noções de conjuntos	7-17		X
2	Conjuntos numéricos	18-38	X	
3	Funções	39-69	X	
4	Função afim	70-93		X
5	Função quadrática	94-114		X
6	Função definida por várias sentenças	115-126		X
7	Função exponencial	127-147		X
8	Função logarítmica	148-170	X	
9	Progressões	171-193	X	
10	Semelhança e triângulos retângulos	194-213	X	
11	Trigonometria no triângulo retângulo	214-227	X	
12	Áreas de figuras planas	228-249	X	
13	Estatística básica	250-271		X
Volume 2				
1	A circunferência trigonométrica	7-19		X
2	Razões trigonométricas na circunferência	20-33		X
3	Trigonometria em triângulos quaisquer	34-43		X
4	Funções trigonométricas	44-64		X
5	Matrizes	65-96	X	
6	Sistemas lineares	97-124	X	
7	Geometria espacial de posição	125-148	X	
8	Poliedros	149-190		X
9	Corpos redondos	191-225		X
10	Análise combinatória	226-251		X
11	Probabilidade	252-275	X	

continua

Volume 3				
1	O ponto	7-23	X	
2	A reta	24-65		X
3	A circunferência	66-86		X
4	As cônicas	87-119		X
5	Estatística básica	120-151		X
6	Matemática financeira	152-177		X
7	Números complexos	178-199	X	
8	Polinômios	200-216		X
9	Equações algébricas	217-239	X	

Fonte: IEZZI et.al. (2016).

Quadro 2. Descrição dos recursos visuais relacionados à História da Matemática no livro-didático de IEZZI et.al. (2016).

PARÂMETRO	Volume 1 – Capítulos												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Qualidade das ilustrações históricas (nitidez, cor, etc.)	N	+++	+++	N	N	N	+++	+++	+++	+++	+++	+++	N
Grau de relação com as informações contidas no texto	N	++	++	N	N	N	+++	+++	++	+++	++	++	N
Inserção dos recursos de imagens históricos ao longo do texto (diagramação)	N	+++	R	N	N	N	++	++	+++	+++	+++	+++	N
Concordância da informação contida na ilustração (do ponto de vista histórico)	N	+++	+++	N	N	N	++	+++	+++	++	++	+++	N
Grau de coerência entre as informações apresentadas (ausência de contradições)	N	++	++	N	N	N	+++	++	++	+++	++	+++	N
Possibilidade de contextualização do conteúdo de História da Matemática	N	+	+	N	N	N	+	+	+	+	+	+	N
As ilustrações são apropriadas e importantes para a compreensão do texto referente à História da Matemática?	N	+++	+++	N	N	N	++	+++	++	++	++	+++	N
Induzem a interpretação incorreta?	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N

continua

PARÂMETRO	Volume 2 – Capítulos												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
Qualidade das ilustrações históricas (nitidez, cor, etc.)	N	N	N	N	+++	+++	+++	N	N	N	+++		
Grau de relação com as informações contidas no texto	N	N	N	N	+++	+++	+++	+++	N	N	+++		
Inserção dos recursos de imagens históricas ao longo do texto (diagramação)	N	N	N	N	++	++	++	++	N	N	+++		
Veracidade da informação contida na ilustração (do ponto de vista histórico)	N	N	N	N	++	++	++	++	N	N	++		
Grau de coerência entre as informações apresentadas (ausência de contradições)	N	N	N	N	+++	+++	+++	N	N	N	+++		
Possibilidade de contextualização do conteúdo de História da Matemática	N	N	N	N	+++	+++	+++	+++	N	N	+++		
As ilustrações são apropriadas e importantes para a compreensão do texto referente à História da Matemática?	N	N	N	N	++	+	++	N	N	N	++		
Induzem a interpretação incorreta?	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N		

continua

PARÂMETRO	Volume 3 – Capítulos												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9				
Qualidade das ilustrações históricas (nitidez, cor, etc.)	+++	N	N	N	N	N	+++	N	+++				
Grau de relação com as informações contidas no texto	+++	N	N	N	N	N	+++	N	+++				
Inserção dos recursos de imagens históricas ao longo do texto (diagramação)	++	N	N	N	N	N	+++	N	+++				
Veracidade da informação contida na ilustração (do ponto de vista histórico)	++	N	N	N	N	N	+++	N	+++				
Grau de coerência entre as informações apresentadas (ausência de contradições)	+++	N	N	N	N	N	+++	N	+++				
Possibilidade de contextualização do conteúdo de História da Matemática	++	N	N	N	N	N	++	N	+++				
As ilustrações são apropriadas e importantes para a compreensão do texto referente à História da Matemática?	+	N	N	N	N	N	+	N	+				
Induzem a interpretação incorreta?	N	N	N	N	N	N	N	N	N				

Fonte: IEZZI et.al. (2016). Adaptação Vasconcelos (2009). Legenda: Não há(N), bom (+++), regular (++) e fraco (+). Cada classificação refere-se da quantidade e qualidade virtuais das imagens. A escala para classificação foi baseada no número de menção da História da Matemática nos capítulos e volumes do livro: 1 < Fraco < 2, 3 < regular < 5, bom > 5 menções. Trata-se de uma escala subjetiva.

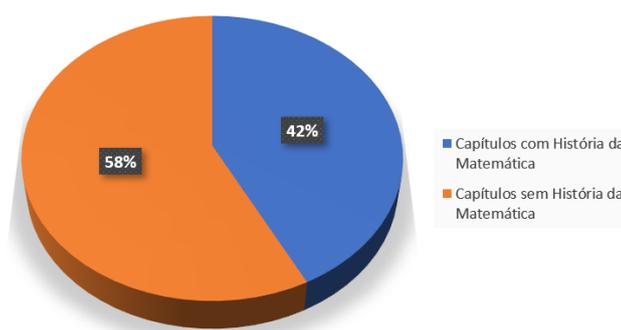
Quadro 3. Outros critérios para análise dos recursos visuais relacionados à História da Matemática nos volumes 1, 2 e 3 de IEZZI et.al. (2016)

PARÂMETRO	Volume		
	1	2	3
Propõe questões relacionadas à conteúdos de História da Matemática ao final de cada capítulo/tema?	Não há		
As questões têm enfoque multidisciplinar (e incluem História da Matemática)?	Não há		
As questões priorizam a problematização histórica?	Não há		
Propõe atividades em grupo e/ou projetos para trabalho que envolvam conteúdos de História da Matemática?	Não há		
As atividades são facilmente executáveis?	Não há		
As atividades têm relação direta com o conteúdo de História da Matemática?	Não há		

Fonte: IEZZI et.al. (2016). Adaptação Vasconcelos (2009).

No volume 1, aproximadamente 53,85% dos capítulos fazem uma contextualização dos conteúdos abordados com a História da Matemática. No volume 2, aproximadamente, 36,36% dos capítulos tem informações históricas. No volume 3, há apenas, aproximadamente, 33,33% de presença de HM nos capítulos. Em geral, todos os volumes têm-se em média 42,42% de conteúdos históricos em relação com os capítulos (Figura 1).

Figura 1. Relação dos capítulos com História da Matemática.



Fonte: o autor.

No livro de IEZZI et.al. (2016), volume 1, na versão do professor, encontramos o seguinte comentário:

Nesta seção, o trabalho com a História da Matemática coloca os

estudantes em contato com um processo de construção do conhecimento e com os encaminhamentos na resolução de problemas enfrentados pela humanidade no decorrer do tempo, situando também os conhecimentos ao longo do tempo. (IEZZI *et al.* p. 298, 2016).

Neste volume da coleção, a saber, o volume 1, há a descrição de vários fatos históricos relacionados ao desenvolvimento da Matemática e a contribuição de pesquisadores para essa ciência (Figura 2).

No capítulo 2 deste volume, IEZZI *et.al.* (2016, p. 33), encontramos uma referência histórica ao número de ouro, representado pela letra grega ϕ (Figura 2A). Há dois parágrafos sobre Escola Pitagórica e menção ao livro '*Liber Abaci*' de Fibonacci e ao retângulo áureo. Apresenta uma relação de segmentos proporcionais e relaciona com uma equação do segundo grau para encontrar as raízes sendo que uma delas, a positiva, é aproximadamente 1,61803. Esse número irracional foi considerado o valor que mais se aproxima da razão áurea. Apresenta também uma ilustração do busto de Pitágoras, que, segundo os autores, pode ser encontrada nos Museus Capitolinos em Roma.

Embora o livro descreva a razão Áurea em um contexto histórico (Figura 2A), o autor não faz nenhuma proposta de atividade envolvendo a História da Matemática. Assim, nesta dissertação vamos ampliar esse estudo da proporção de ouro, com elaboração de uma proposta de atividade didática de cálculo da área de um pentágono regular.

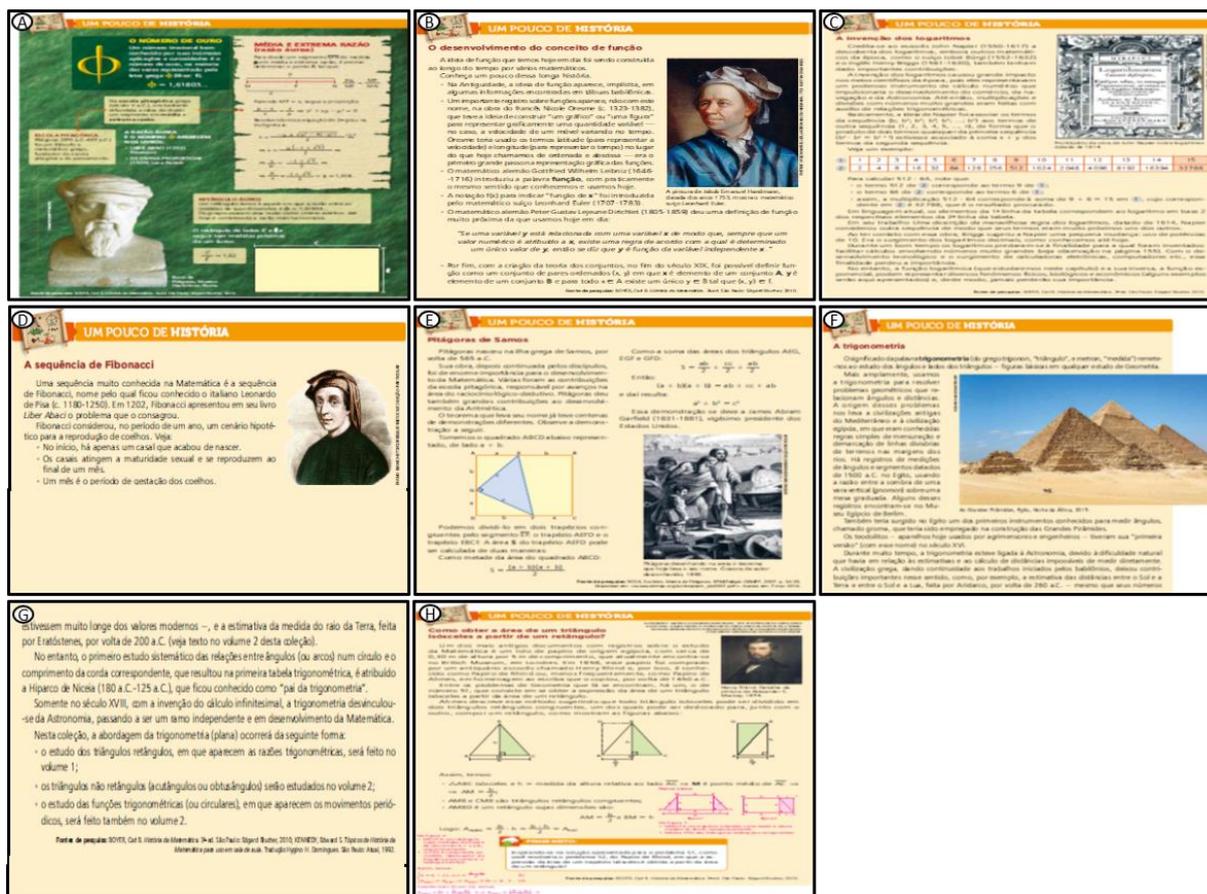
Funções é o tema do capítulo 3 de IEZZI *et.al.* (2016, p. 49). Esse capítulo traz algumas referências históricas relacionadas ao desenvolvimento do conceito de função e uma ilustração do matemático Leonard Euler, que introduziu a notação do conceito de função, $f(x)$, até hoje utilizada em Matemática (Quadro 1, figura 2B). Encontramos menção a diversos matemáticos que trabalharam com o conceito de função: Nicole Oresme (1323-1382), Leonhard Euler (1707-1783), Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646--1716) (Figura 2B).

Durante a descrição do tema logaritmos, já no capítulo 8 desse volume 1, IEZZI *et.al.* (2016, p. 152) traz novamente um recorte sobre fatos históricos (Figura 2C), comentando sobre a 'invenção' dos logaritmos por Napier.

São citados os seguintes matemáticos: John Napier (1550-1617); JobstBürgi (1552-1632) e Henry Briggs (1561-1630).

No capítulo 9 de IEZZI *et.al.* (2016, p. 192 - 193) encontramos outro recorte histórico, sobre a sequência de Fibonacci, que foi utilizada para o cálculo do número ouro (Figura 2D).

Figura 2. Fatos históricos presentes no volume 1 de IEZZI *et.al.* (2016).



Fonte: IEZZI *et.al.* (2016).

A contribuição de Pitágoras de Samos para o desenvolvimento do teorema das somas das abscissas e dos catetos ao quadrado, denominado de Teorema de Pitágoras, que é muito utilizado para calcular a área de triângulos retângulos está descrito no capítulo 10 deste volume de IEZZI *et.al.* (2016, p. 211)

Uma menção ao matemático Hiparco de Niceia (180 a.C.-125 a.C.) que é conhecido como “pai da trigonometria” foi feita no capítulo 11. Nesse recorte, comenta-se brevemente sobre o significado da palavra Trigonometria, sobre o uso e registro de conceitos trigonométricos desde antes de Cristo, além de outras

curiosidades (Figuras 2F e 2G).

As áreas de figuras planas são temas do capítulo 12 do volume 1 de IEZZI *et.al.* (2016). A nota sobre História da Matemática desse capítulo é denominada de “Como obter a área de um triângulo isósceles a partir de um retângulo?” (Figura 2H). Pode se observar na nota menção ao papiro de Rhind, no qual encontra-se o problema que dá título à nota.

Passando ao volume 2 de IEZZI *et.al.* (2016), encontramos no capítulo 5, cujo tema é Matrizes, uma referência histórica a Arthur Cayley (Figura 3A). Uma cronologia histórica para mostrar as contribuições das civilizações orientais e ocidentais para os estudos dos sistemas lineares e determinantes de matrizes, respectivamente, é observado no capítulo 6 desse volume (Figura 3B e 3C). Os matemáticos que contribuíram para os estudos da geometria e da estatística são mencionados nos capítulos 7 e 8, respectivamente (Figura 3D e 3E).

Figura 3. Fatos históricos presentes no volume 2 de IEZZI *et.al.* (2016).



Fonte: IEZZI *et.al.* (2016)

O livro da terceira série para o Ensino Médio, volume 3 de IEZZI *et.al.* (2016) possui 9 (nove) capítulos. Notas sobre a História da Matemática podem ser encontradas nos capítulos 1, 7 e 9 (Figura 4).

O volume 3 é aberto com a nota histórica “Introdução à Geometria Analítica”. As contribuições de René Descartes na obra ‘Discurso sobre o método’ em cujo apêndice podemos encontrar ‘*Le Géométric*’, texto inaugural da Geometria Analítica, com a construção dos conhecimentos da geometria analítica e dos planos cartesianos são mencionadas na nota (IEZZI *et.al.* , vol 3, p 7- 8, 2016, Figuras 4A e 4B).

O capítulo 7 é destinado aos estudos dos números complexos e também começa com uma nota histórica, com destaque para os matemáticos Girolando Cardano e Rafael Bombelli que desenvolveram fórmulas Matemática para resoluções de equações do terceiro grau (Figura 4C), faz também menção à Gauss e Hamilton. A última nota histórica desse volume 3 encontra-se no início do último capítulo do volume, o capítulo 9. Trata-se de uma nota sobre a história da das resoluções de equações do 2º. grau, fazendo breves comentários desde a Grécia antiga, passando pelo Renascimento no século XVI e finalizando no século XIX quando ocorre a consolidação da Álgebra Moderna, e para tanto citando Galois (Figura 4D).

Importante destacar que está indicado em cada um dos volume a fonte de pesquisa para as notas históricas, sendo que a obra ‘História da Matemática’ de Carl Boyer é a fonte mais utilizada pelos autores IEZZI *et.al* (2016).

Todas essas menções à História da Matemática no livro-didático de IEZZI *et.al.* (2016) podem contribuir para o ensino e aprendizagem da Matemática, uma vez que mostram, mesmo que de forma muito reduzida, alguns episódios relacionados às descobertas dos conhecimentos matemáticos e como a busca de soluções para os problemas cotidianos da sociedade impulsionaram muitas das áreas hoje conhecidas e que constituem parte dos currículos escolares. Segundo os autores, os pequenos textos e referências históricas colocam os estudantes

em contato com um processo de construção do conhecimento e com os encaminhamentos na resolução de problemas enfrentados pela humanidade no decorrer do tempo, situando também os

A contextualização histórica da Matemática mostrando as contribuições dos matemáticos durante o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, tem sido uma tendência pedagógica como observado em diversos estudos (Biffi, 2016; Bastos, 2004; Soares, 2004; Santos, 2013). Nesse caso, a inclusão da presença de conteúdos da HM entre os critérios de qualidade do PNLD seria importante para manter essa tendência pedagógica e contribuir para um melhor para o processo de ensino aprendizagem. Como observado por Silva Junior (2007. p. 17), o LD é destinado a dois leitores, o professor e o aluno. Assim, o LD estabelece um diálogo com ambos os leitores de forma a contribuir para construir e alterar significados e padrões sociais (SILVA JUNIOR, 2007. p. 17).

Os professores têm sido favoráveis a contextualização histórica dos conteúdos a fatos histórico e cotidianos (OLIVEIRA e SOUSA, 2018). Segundo esses autores, a HM pode despertar o interesse dos alunos pelos conhecimentos matemáticos. Para D'Ambrósio (2013), a abordagem de conteúdo da HM no processo de ensino-aprendizagem tem obtidos excelentes resultados na consolidação do conhecimento numérico, algébrico e geométrico. Logo, a presença das notas históricas e dos trechos referentes às bibliografias dos matemáticos que desenvolveram os conteúdos matemáticos são um fator positivo para a coleção analisada.

Dentro dos critérios estabelecidos nessa dissertação e apresentados no quadro 2, consideramos a avaliação do LD de IEZZI *et al.*, (2016) como positiva, com variação entre a qualidade das imagens e conteúdos do texto de fraco a bom.

A HM no LD de IEZZI *et al.*(2016) não está presente em todos os capítulos dos três volumes conforme demonstrado no Quadro 1, além disso, conforme mostrado no Quadro 3, a abordagem da HM não completa os critérios (adaptados) do Guia para avaliação de LD de ciência (VASCONCELOS, 2009). Dessa forma, o LD analisado não prioriza a problematização histórica dos conteúdos da Matemática e, também, não propõem atividades práticas envolvendo a HM e os conteúdos.

Nos cursos de Licenciatura, de acordo com Fragoso (2011), há preferência na abordagem de conteúdos de Matemática em detrimento de conteúdos pedagógicos e ou históricos, como a HM. Além disso, a menção da HM em apêndices de curiosidade e ausência de atividade prática envolvendo a HM nos livros-didáticos da disciplina de Matemática tem pouca ou nenhuma contribuição para inclusão da HM nos planos de aula do docente. Nesse sentido, a obra *Iezzi et al.* (2016) não apresenta atividades diretamente relacionadas com a HM e não se utiliza de HM como metodologia de ensino no desenvolvimento de uma atividade matemática. Importante lembrar que os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio reconhecem a HM como uma possível área do conhecimento a ser trabalhada em aula, mas o papel do LD nesse sentido é fundamental.

3.PROPOSIÇÃO DE UMA ATIVIDADE DIDÁTICA

Apresentamos nesse trabalho, uma atividade com caráter interdisciplinar, mesclando a História da Matemática e a Geometria e fazendo uso de materiais manipuláveis.

De acordo com Lauro (2005), o número de ouro pode ser encontrado em várias construções humanas, desde os gregos, e em obras de artes. Para a autora, os antigos gregos consideravam mais harmoniosos os retângulos que eram obtidos com uso da razão áurea. O templo grego Partenon é um dos exemplos do uso dessa razão em construções humanas na Grécia antiga (LAURO, 2005). Nesse exemplo de atividade com o número de ouro, imediatamente já seria possível correlacionar com a HM, pois durante o desenvolvimento da civilização grega muitos matemáticos podem ser localizados e com contribuições matemáticas que até os dias atuais figuram nos livros didáticos, a exemplo de Pitágoras (Figure 2E) e Euclides, cujos nomes estão ligados ao triângulo retângulo e outras figuras geométricas dos currículos.

Por sua vez, o Origami é uma técnica japonesa de representação de objetos ou figuras geométricas em papel. Essa técnica tem sido utilizada no ensino da Matemática pois é uma forma prática para a obtenção de uma figura geométrica (SILVA et al., 2017). A relação entre a HM e a técnica de Origami pode ser efetuada em acordo com a figura geométrica que será construída. No nosso caso, o pentágono tem relação com o número de ouro e podemos introduzir tópicos de HM (CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 1). Dessa forma, a proposição de uma atividade didática envolvendo a razão Áurea e a técnica de Origami incorpora a HM no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, conforme descrito nos subtítulos a seguir.

Em virtude do cenário atual da pandemia do novo Corona vírus (Sars-Cov2), essa atividade não foi aplicada aos alunos.

3.1 ORIGAMI E O ENSINO DA MATEMÁTICA

Segundo o dicionário Houaiss (2009), origami é “1 arte tradicional

japonesa de dobrar pedaços de papel em formas representativas de animais, objetos, flores ... cf. *dobradura 2* objeto de papel assim dobrado”

De acordo com Kobayashi e Yamada (2013, p. 7)

O Origami, de origem desconhecida, tem etimologia japonesa e significa dobrar (ori) papel (kami). No Brasil, utiliza-se também a palavra dobradura, mas o termo Origami é mundialmente reconhecido e utilizado.

O origami é a arte de dobrar papel, muito difundida no Japão com uma origem remota e interligada à História do próprio papel e das civilizações ocidentais, por exemplo, documentos históricos mostram a utilização de origami em rituais religiosos no século VI (IMENES 2004, p. 7). Além disso, no Japão, é tradição presentear as pessoas com um origami para lembrar a tragédia atômica ocorrido no final da Segunda Guerra Mundial em 1945 (ASCHENBACH *et al.*, 1997, p. 36).

A relação entre a História da Matemática e a técnica de origami pode ser estabelecida no estudo da geometria (CAVACAMI, FURUYA, 2010, p. 1). Os matemáticos estabeleceram teoremas e relações numéricas, a exemplo da proporção áurea, para determinação das dimensões de figuras geométricas (SILVA *et al.*, 2017). Esses autores acrescentam que a técnica de Origami, por sua vez, faz a representação das figuras geométricas utilizando folhas de papel. Essa técnica realiza várias dobraduras no papel para construção de figuras geométricas, a exemplo de triângulos, quadrados, pentágonos e paralelepípedos. Não há consenso na utilização de instrumento cortantes na técnica de origami (LANG, 2003).

As faces do objeto final podem apresentar cores diferentes para melhorar a apresentação, formado após várias dobraduras. Por outro lado, quando se faz o uso de corte, a técnica é denominada de Kirigami. Segundo esses autores, o Kirigami é uma técnica mista que utiliza as dobras no papel e cortes no papel (“kiru” – verbo “cortar”) (CAVACAMI, FURUYA, 2010).

Neste contexto, Silva *et al.* (2017) mencionam que o origami pode auxiliar no ensino da geometria devido facilitar a visualização das figuras geométricas em um plano definido na folha de papel. Esses autores acrescentam que a utilização da técnica de Origami parece ser uma alternativa viável e

promissora ao desafio do ensino de geometria.

O origami permite a construção desses conceitos por meio da confecção de variadas peças, da manipulação, tanto como da observação das formas assumidas pelo papel (OLIVEIRA, 2005, p. 48). Para a autora, os estudantes utilizando o origami como ferramenta para construção de conceitos geométricos têm a oportunidade de explorar uma linguagem simbólica universal e estabelecem uma forma de comunicação que difere da oral e da escrita formais Matemáticas. De acordo com Aschenbach et al. (1997, p.24), “o origami é uma forma de auxiliar o aluno a entender e compreender conteúdos matemáticos com o material concreto”.

Oliveira (2005, p.6) argumenta ainda que

O trabalho manual das dobraduras estimula também as habilidades motoras com uma ênfase no desenvolvimento da organização, na elaboração de sequencias de atividades, na memorização de passos e coordenação motora fina do aluno. Atividades em grupo favorecem a cooperação, bem como a paciência e a socialização. O resultado das dobraduras, além de um incentivo à realização pessoal e à autoestima, é um motivo especial para presentear pais, amigos criando uma saudável conexão escola/casa.

Assim, diante de toda a importância dos origamis, nessa dissertação fará o uso desta técnica para o desenvolvimento da proposição da atividade visando auxiliar no desencadeamento de obtenção de figura geométrica regular e suas propriedades, a saber a razão áurea e o cálculo da área.

3.2 A RAZÃO ÁUREA

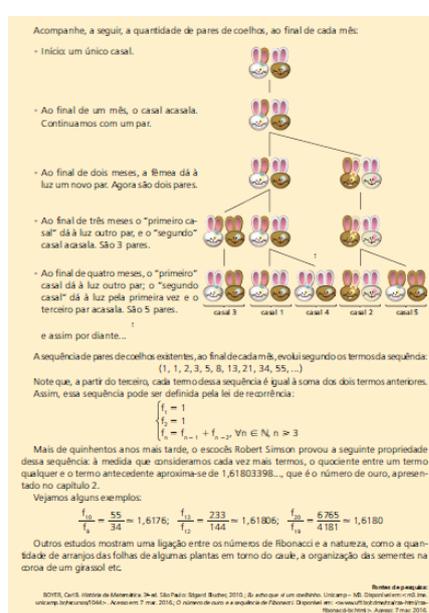
A razão áurea, também conhecida como número de ouro, está presente em distintas situações e em figuras geométricas. Esse número foi observado e utilizado desde as civilizações gregas antigas. “O número de ouro, proporção áurea, número áureo ou divina proporção é uma constante real algébrica irracional denotada pela letra grega (Φ), em homenagem a Phideas que teria utilizado essa razão para conceber o Parthenon” (LIMA et.al., 2012, p. 2)

A relação entre o número de ouro e uma situação de reprodução de

coelhos foi descrita no livro de Iezzi et al. (2016, vol1, p. 192). Esse número consagrou Fibonacci na Matemática e é considerado o número mais próximo da razão Áurea (Figura 5).

Mais de quinhentos anos mais tarde, o escocês Robert Simson provou a seguinte propriedade dessa sequência: à medida que consideramos cada vez mais termos, o quociente entre um termo qualquer e o termo antecedente aproxima-se de 1,61803398..., que é o número de ouro [...].

Figura 5. Relação existente entre o número ouro e a reprodução de coelhos



Fonte: IEZZI et al. (2016, p.193)

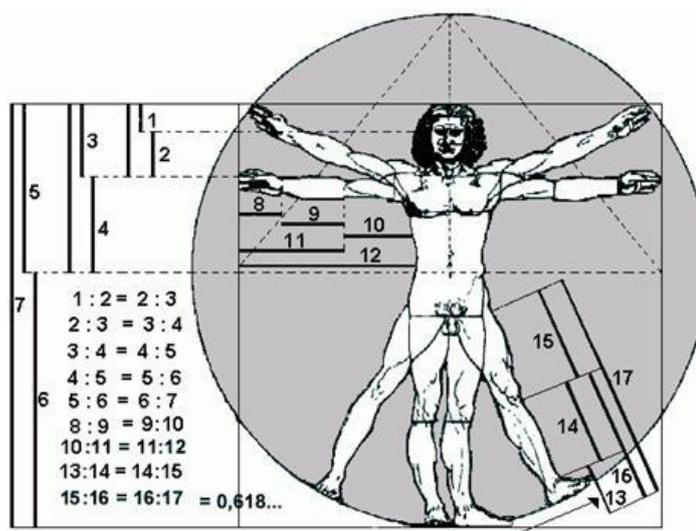
Na arquitetura, tem-se desde a antiguidade, a presença da proporção áurea, como exemplo no Partenon, templo grego construído do século V a.C., na região central da antiga cidade de Atenas (Figura 6). Há a relação dessa razão também nas pinturas e esculturas produzidas por Leonardo Da Vinci (Figura 7).

Figura6. Partenon, templo grego do século V a.C, mostrando os retângulos (em branco)construídos utilizando a proporção áurea.



Fonte: Lima et. al. (2012, p.4)

Figura 7. Obra de Leonardo Da Vinci, o homem Vitruviano que foi construindo utilizando a proporção áurea.



Fonte: Lima et. al. (2012, p.4)

O número de ouro é um número irracional, logo está relacionado ao problema da incomensurabilidade, conforme citado por Roque e Carvalho (2012, p. 73):

Suponhamos, por exemplo, que queiramos comparar dois segmentos A e B (Figura 3). Como B não cabe um número inteiro de vezes em A , podemos dividir B em 3 e tomar a unidade como sendo um terço de B . Como esta unidade cabe 4 vezes em A , a comparação de A com B nos fornece a razão $4 : 3$. É deste tipo de comparação que surge as medidas expressas por relações entre números inteiros, que chamados hoje de “racionais” (justamente por serem associados a uma razão) [...] dadas duas grandezas A e B é sempre possível subdividir uma delas, por exemplo, em um número finito de partes, de modo que uma destas partes caiba um número inteiro de

vezes em A? [...] a descoberta das grandezas incomensuráveis mostra que isto não é verdade...

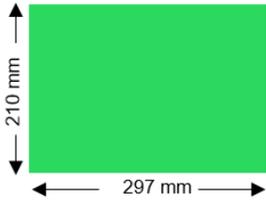
No pentágono regular observa-se a proporção áurea quando relacionamos a diagonal com o lado do pentágono. Essa relação será a parte principal da atividade proposta nesta dissertação que utiliza a técnica de origami para obtenção de um pentágono regular.

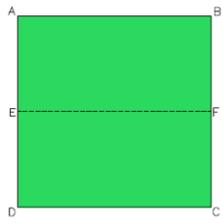
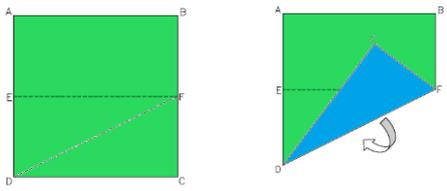
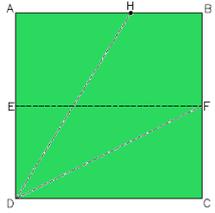
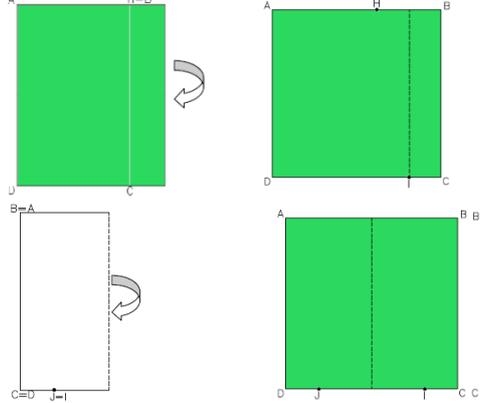
3.3 PROPOSIÇÃO DE ATIVIDADE

Durante a aula da disciplina de Matemática, para estudantes do Ensino Médio, uma proposta de construção de um pentágono utilizando a técnica de origami, previamente discutida pelo professor na sala de aula será proposta aos alunos (Tabela 1). A mesma atividade pode ser utilizada para o cálculo da área desse pentágono utilizando os triângulos internos, como também da razão áurea, que é a razão entre a diagonal e o lado do pentágono.

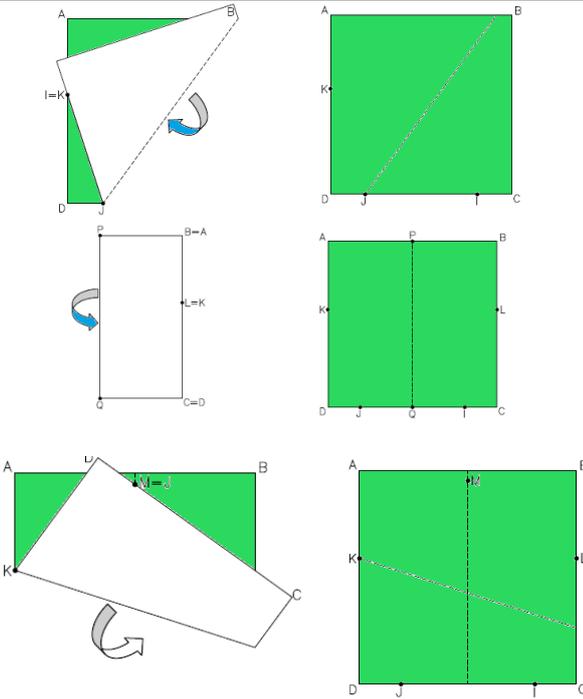
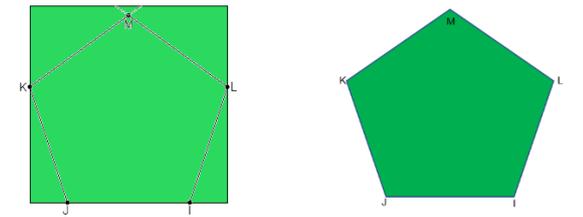
Esta atividade foi adaptada de Leroy (2010) e Cavacami e Furuya (2010). Os passos e as imagens ilustrativas para demonstrar a construção de pentágono utilizando uma folha de papel A está mostrado na tabela 1. Observa-se que a técnica de Origami é baseada na realização de várias dobraduras no papel. Geralmente essas dobraduras são realizadas em formato de um quadrado e ou triângulo. Após os sete passos, é possível observar a formação de um pentágono regular. (Tabela 1, passo 8).

Tabela 1. Passos e demonstrações para construção do pentágono regular utilizando a técnica do Origami

Passos	Descrição	Demonstração
1	Pegue uma folha de papel A4 de qualquer coloração (sulfite) e dimensões 210 mm x 297 mm, conforme a figura ao lado. Observação: A cor verde da figura é ilustrativa, ou seja, a folha de papel de cor branca pode ser utilizada.	 <p>Fonte: O autor</p>

2	<p>Façam um quadrado com dimensões: 210 mm por 210 mm. Utilizando uma caneta, faça uma linha identificando a metade da altura da folha. Coloque em cada vértice da folha e na linha desenhada (segmento) uma letra maiúscula.</p> <p>Observação: Veja a nomenclatura dos vértices (ABCD) e do segmento (EF) na figura.</p>	 <p>Fonte: Adaptação de Leroy (2010, p. 72)</p>
3	<p>Unir o vértice DC ao segmento EF, de modo que se obtenha um triângulo na dobradura. Esse triângulo está demonstrado pelo segmento DF e vértice C.</p>	 <p>Fonte: Adaptação de Leroy (2010, p. 72)</p>
4	<p>Façam uma dobradura unindo os segmentos DH e o vértice D.</p>	 <p>Fonte: Adaptação de Leroy (2010, p. 72)</p>
5	<p>Façam as dobraduras no papel conforme os esquemas até a obtenção de uma figura semelhante a um cone.</p>	 <p>Fonte: Adaptação de Leroy (2010, p. 72)</p>

Continua

6	Façam as dobraduras no papel conforme os esquemas até a obtenção de uma figura semelhante a um cone.	 <p>Fonte: Adaptação de Leroy (2010, p. 72)</p>
7	Façam cortes no papel utilizando uma tesoura para separação do pentágono (KLMJI).	 <p>Fonte: O autor</p>
8	Pentágono regular construído pela técnica de Origami.	

3.4 MANEIRAS DE CALCULAR A ÁREA DO PENTÁGONO DA PROPOSTA DE ATIVIDADE DIDÁTICA

Um pentágono regular de vértices MKLJI (Passo 7 da tabela 1) foi utilizado para demonstrar as diferentes maneiras de calcular a área dessa figura geométrica. É importante mencionar que essas maneiras de cálculo têm a contribuições de vários matemáticos, por exemplo Heron de Alexandria, Fibonacci e Pitágoras.

A primeira maneira utilizada para esse cálculo foi a divisão do pentágono em três triângulos (Tabela 2, passo 1a). Esses triângulos têm base (B) e altura (H) igual 13 cm e 21 cm, respectivamente.

Em seguida, o cálculo da área (Tabela 2, passo 2a) foi realizado utilizando-se a fórmula de Heron (equação 1).

Equação 1. Fórmula Heron para cálculo da área de um pentágono.

$$At = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (1)$$

O cálculo se inicia com obtenção da área de dois triângulos, conforme demonstrado a seguir:

$$\text{Dados: } a = b = 13 \text{ cm; } c = 21 \text{ cm; } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+13+21}{2} = \frac{47}{2} \text{ cm}$$

$$A = \sqrt{\frac{47}{2} \left(\frac{47}{2} - 13\right) \left(\frac{47}{2} - 13\right) \left(\frac{47}{2} - 21\right)} = \sqrt{\frac{47}{2} \left(\frac{21}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$A = \frac{21}{2} \sqrt{\frac{235}{2^2}} = \frac{21}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{235} = \frac{21}{4} \cdot \sqrt{235}$$

$$A \cong 5,25.15,33 \cong 80,4825 \text{ cm}^2.$$

$$A(1 \text{ e } 2) \cong 2.80,4825 \cong 160,965 \text{ cm}^2.$$

Em seguida foi realizado o cálculo da área do terceiro triângulo, também utilizando a fórmula de Heron, conforme demonstrado a seguir:

$$\text{Dados: } a = b = 21 \text{ cm; } c = 13 \text{ cm; } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{21+21+13}{2} = \frac{55}{2} \text{ cm}$$

$$A = \sqrt{\frac{55}{2} \left(\frac{55}{2} - 21\right) \left(\frac{55}{2} - 21\right) \left(\frac{55}{2} - 13\right)} = \sqrt{\frac{55}{2} \left(\frac{13}{2}\right)^2 \left(\frac{29}{2}\right)}$$

$$A = \frac{13}{2} \sqrt{\frac{1595}{2^2}} = \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{1595} = \frac{13}{4} \cdot \sqrt{1595}$$

$$A \cong 3,25 \cdot 39,94 \cong 129,805 \text{ cm}^2.$$

A área do pentágono foi obtida pela soma das áreas dos três triângulos:

$$Ap \cong 160,965 + 129,805 \cong 290,77 \text{ cm}^2.$$

A segunda maneira utilizada para o cálculo da área do pentágono considerou a divisão do pentágono em cinco triângulos, pela união dos vértices, com a construção de uma estrela de cinco pontas (Tabela 2, passo 1b). Esses triângulos tem base (B) e altura (H) igual 13 cm e 8,8 cm, respectivamente. Em seguida, o cálculo foi realizado pela aplicação da equação 2 (Tabela 2, passo 2b).

Equação 2. Fórmula Matemática para cálculo da área de um triângulo

$$A = \frac{bh}{2}$$

Assim, o cálculo da área de triângulo foi:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{13,8,8}{2} = 57,2 \text{ cm}^2.$$

Considerando os cinco triângulos, a área do pentágono (Tabela 2, passo 2b) foi a multiplicação das áreas dos triângulos:

$$AT = 5 \cdot 57,2 = 286 \text{ cm}^2$$

A terceira maneira, assemelha-se aos passos da segunda maneira, mas com a aplicação da equação 3, a qual se utiliza do seno dos ângulos dos triângulos (Tabela 2, passos 1b e 2b).

Equação 3. Fórmula Matemática para cálculo da área de um triângulo utilizando o seno do ângulo θ .

$$A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \text{sen}\theta$$

Considerando a formação de cinco triângulos, o ângulo θ foi:

$$\theta = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Substituindo na fórmula 2, $a = b = 11 \text{ cm}$, e o seno do ângulo $\theta = 0,951$, foi obtido área do pentágono regular:

$$Ap = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 11 \cdot 0,951 = 287,69 \text{ cm}^2$$

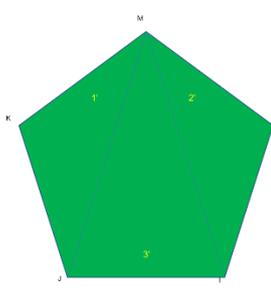
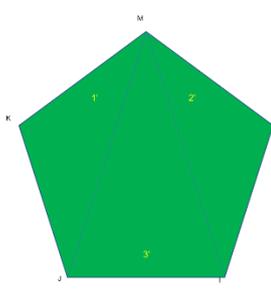
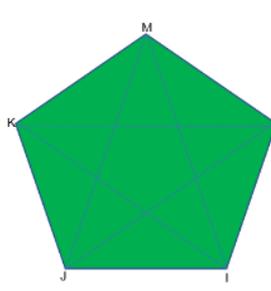
Na quarta maneira, a razão áurea, representada pela equação 4, foi utilizada para obtenção da área do pentágono regular (Tabela 2, passo 2b.2). Para isso, será realizado uma adaptação proposta por Afeitos (2013).

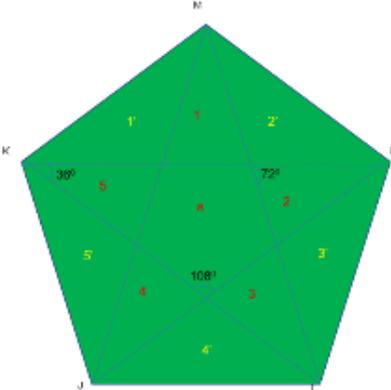
Equação 4. Fórmula Matemática da razão áurea.

$$\frac{a}{b} \cong \phi$$

Sendo a e b a relação entre a área e ou ângulos de uma figura geométrica, a exemplo do pentágono KLMJI (Tabela 1).

Tabela 2. Demonstração da determinação do cálculo da área do pentágono regular que foi construído conforme pela técnica do Origami conforme passos da tabela 1

Passos	Descrição	Demonstração
1a	Utilizando uma caneta desenhe segmentos unindo os vértices MJ e MI do pentágono. O aluno pode observar a formação de três triângulos no interior do pentágono.	
2a	Determinar a área dos três triângulos externos a estrela (em amarelo). Observe a nomeação dos triângulos de 1' a 3'.	
1b	Utilizando uma caneta desenhe segmentos unindo os vértices KL, KI, MJ, MI e LJ do pentágono. O aluno pode observar a formação de uma estrela no interior do pentágono.	
2b	Determinar a área dos cinco triângulos externos a estrela (em amarelo). Observe a nomeação dos triângulos de 1' a 5'.	
2b.1	Determinar a área dos cinco triângulos formados pela cinco pontas da estrela (em vermelho). Observe a nomeação dos triângulos de 1 a 5.	

2b.2	Determinar a área do pentágono menor no interior da estrela de cinco pontas (nomeado pela letra a em vermelho).	
------	---	---

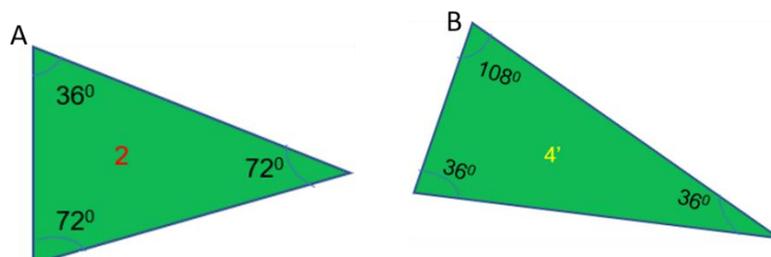
Fonte: O autor

Para utilização da razão áurea, no pentágono também foi realizado a formação de uma estrela de cinco pontas pela união dos vértices KL, KI, MJ, MI e LJ (Tabela 2, passo 1b). Em cada ponta da estrela pode ser observado a formação de cinco triângulos com numeração de 1 a 5 (Tabela 2 passo 2b). Cinco outros triângulos, identificados na figura da tabela com coloração amarelo e numeração de 1' a 5', podem ser observados externos à estrela. Também é possível observar no interior da estrela um pentágono menor marcado com a letra a (Tabela 2, passo 2b.2).

Pela medida dos ângulos dos triângulos internos no pentágono menor podem ser observados a formação de ângulos de 36° , 72° e 108° (Tabela 2, passo 2b.2). A relação entre o seno desses ângulos foi utilizada para cálculo da área do pentágono maior (pentágono MKLJI).

Para facilitar a compreensão, os triângulos foram ampliados na figura 9. A figura 9A mostra o triângulo de ângulos 36° , 36° e 108° . A medida desses ângulos foi realizada utilizando o ângulo interno do pentágono menor (Tabela 2, passo 2b.2). Na figura 9B mostra-se um triângulo de ângulos 36° , 72° e 72° .

Figura 9. Os triângulos internos (A) e externos (B) a estrela do pentágono regular utilizados para estabelecer a relação entre os senos dos ângulos.



Fonte: O autor.

A relação senos dos ângulos dos triângulos da Figura 5 foi obtida pela equação 5.

Equação 5. Fórmula Matemática estabelecer uma relação entre os ângulos dos triângulos da tabela 2 (passo 2b).

$$\frac{a}{\text{sen}108^\circ} = \frac{b}{\text{sen}36^\circ}$$

Fazendo a substituição dos ângulos dos triângulos na equação 5 foi observado a razão áurea.

$$\frac{a}{\text{sen}108^\circ} = \frac{b}{\text{sen}36^\circ} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\text{sen}108^\circ}{\text{sen}36^\circ} = \frac{\text{sen}72^\circ}{\text{sen}36^\circ} = \phi$$

Considerando o pentágono MKLJI, com de raio (R) de 13 cm tem se a equação 6 para o cálculo da área

Equação 6. Fórmula Matemática cálculo da área de um pentágono pelo raio e o ângulo.

$$Ap = \frac{5}{2} R^2 \text{sen}72^\circ$$

Na equação 6, considerou-se a adaptação de Afeitos (2013) que representa:

$$\text{sen}72^\circ = \phi \cdot \text{sen}36^\circ$$

Realizando a substituição do raio, razão áurea e valor do seno de 36° na equação 6 tem se:

$$Ap = \frac{5}{2} R^2 \Phi . \text{sen } 36^\circ$$

$$Ap \cong 288,04 \text{ cm}^2$$

As quatro maneiras utilizadas para obtenção da área de um pentágono regular MKLJI tiveram resultados próximos (Tabela 3). Esses resultados validam a utilização da razão áurea para cálculo da área de um pentágono. Assim, um dos principais objetivos dessa dissertação foi alcançado.

Tabela 3. Resultados do cálculo da área de um pentágono de raio de 13 cm que foi construído utilizando a técnica de Origami.

Maneira	Método	Área (~) do pentágono (cm ²)
1	Divisão do pentágono em cinco triângulos. A área do pentágono corresponde a soma das áreas dos triângulos.	286,00
2	Divisão do pentágono em cinco triângulos. A área do pentágono é calculada pela equação 2 utilizando o seno dos ângulos dos triângulos.	287,69
3	Divisão do pentágono em três triângulos. A área do pentágono é calculada pela equação de Heron.	290,77
4	Divisão do pentágono em cinco triângulos internos e cinco triângulos externos a estrela formada pela união dos vértices. A área do pentágono é calculada pela razão áurea com adaptação de Afeitos (2013).	288,04

Fonte: O autor.

3.5 PROPOSIÇÃO DE UM PLANO DE AULA

O Quadro 4 mostra um plano de aula que foi elaborado visando o ensino do cálculo da área de um pentágono utilizando a técnica de Origami e a razão Áurea.

Quadro 4. Proposta de um plano de aula

Plano de Aula
Proponente: Rodrigo Alves Vicarri - Disciplina: Matemática - Duração da atividade: 80-100 minutos Nível: Ensino Médio: 1º. Ano - Tema da aula: Utilização de origami e da razão áurea para cálculo da área de um pentágono
Objetivo
Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de estabelecer relações entre as dobras no papel para formação de um pentágono e calcular a área dos triângulos de formados pelas dobras utilizando a razão áurea.
Conteúdo Programático
Técnica do Origami; Definição de um pentágono regular; Definição da área de um triângulo; Utilização da razão áurea para cálculo da área de um triângulo; Relação das dobras no papel para formação de triângulos que compõem o pentágono; Cálculo da área do pentágono do Origami.
Metodologia
Para facilitar o processo de Ensino e Aprendizagem a aula será participativa, dialogada, com utilização de material manipulável. Uso da técnica de Origami na formação de um pentágono. Também será demonstrado, conforme esquema do Datashow, a formação de triângulos pelas dobras do papel durante a construção do pentágono. A área desses triângulos será calculada utilizando a razão áurea dos ângulos de cada triângulo. A área do pentágono será a soma das áreas dos triângulos.
Modalidade e recursos didáticos
Aula participativa, dialogada. Conduzida utilizando projetor de multimídia (Datashow) como principal recurso audiovisual mediador da comunicação professor-aluno. Além disso, sempre que possível e necessário, será utilizada a técnica de Origami.
Avaliação
A avaliação será feita por uma atividade visando o cálculo da área de um pentágono formado pelas dobras em papel. Essas dobras podem formar até 6 triângulos.
Referências
BACCARO, D, Silva, A P. Razão Áurea auxiliando o ensino de alguns conteúdos de Matemática. <i>Perspectivas da Educação Matemática</i> , Campo Grande, MS, v. 2, n. 4, v. 3 n. 5, p. 175-193, jul./dez. 2009 - jan./jun. 2010. http://inma.sites.ufms.br/files/2015/08/PPGEDUMAT_matematica_vol_4_e_5.pdf#page=175
GAIO, A., Pesquita, I., Rafael, I. Materiais para a aula de Matemática. <i>Educação e Matemática</i> , 114, 2011. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1969
LEROY, Luciana. Aprendendo Geometria com Origami . Monografia UFMG 2010.
SILVA, L G; Lavor, O P; Oliveira, G F B. A construção do paralelepípedo utilizando origami como ferramenta no ensino de Matemática. Conedu, 2017. http://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2017/TRABALHO_EV073_MD1_SA_13_ID3043_16092017121149.pdf
How to make a pentagon from a square: Pentágono a partir de un cuadrado. https://www.youtube.com/watch?v=gExzB1MIAX8
www.google.com.br . Origami – figuras

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho pudemos perceber a importância o uso da História da Matemática nas aulas de matemática. Sua utilização desmistifica a matemática, mostra sua natureza como criação humana e proporciona explicação para as descobertas matemáticas. Também pudemos analisar uma coleção de livros didáticos que são utilizados numa escola pública no interior do Paraná. Na descrição da coleção de livros de *lezzi et al.* (2016), buscou-se analisar a presença de História da Matemática. Com a utilização de tabelas adaptadas de Vasconcelos (2009), todos os capítulos foram analisados, observando-se os itens definidos nas tabelas. Dessa análise conclui-se que os LD apresentam descrição da HM, mas essa descrição está contida em anexos ou apêndices, trazendo em algumas ocasiões referências biográficas do matemático que estudou determinado tema. Em poucos capítulos há uma contextualização dos conteúdos abordados com as notas históricas. Não foram encontradas atividades propostas em *lezzi et.al.* (2016) relacionando a HM com os conteúdos matemáticos abordados nos capítulos.

Em vista disso, propusemos no capítulo 3 desta dissertação uma atividade utilizando o HM, com auxílio de técnica de origami para a construção de um pentágono, ou seja, na interface da Geometria. Após confeccionada esta figura geométrica, foram levantadas algumas questões: medir os lados e as diagonais do pentágono; relacionar a diagonal e o lado do pentágono, encontrando a razão áurea. O estudante poderá perceber que o número áureo está presente no pentagrama e nos triângulos e pentágono inferiores que são formados pelo traçado de seus diagonais. Espera-se que com esta atividade os alunos tenham maior interesse na aula e consequência no estudo do conteúdo de geometria, haja vista que com a utilização de material manipulável, o contato direto com as relações Matemáticas fortalece o processo de aprendizagem.

Portanto, a integração entre a HM, técnica de Origami e razão Áurea poderá ser utilizada em plano de aula visando o ensino da Matemática no ensino Médio. Além disso, a incorporação de atividades didáticas semelhante a essa proposta nesta dissertação em Livros-didáticos pode também contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Ciência da Matemática.

5. REFERÊNCIAS

- AFEITOS, C. D. O número de ouro. **Dissertação** (Mestrado). Covilhã: Universidade da Beira Interior, 2013. Disponível em <http://hdl.handle.net/10400.6/1872>. Acesso em 23/09/2021.
- ASCHENBACH, M.H.C.V.; FAZENDA, I.; ELIAS, M. **A arte-magia das dobraduras: história e atividades pedagógicas com origami**. São Paulo: Scipione, 1997.
- BACCARO, D, Silva, A P. Razão Áurea auxiliando o ensino de alguns conteúdos de matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, MS, v. 2, n. 4, v. 3 n. 5, p. 175-193, jul./dez. 2009 - jan./jun. 2010.
http://inma.sites.ufms.br/files/2015/08/PPGEDUMAT_matematica_vol_4_e_5.pdf#page=175
- BASTOS, M. **O livro didático nas aulas de matemática: um estudo a partir das concepções dos professores**. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife: SBEM, 2004.
- BATISTA, A. A avaliação dos livros didáticos: para entender o Programa nacional do Livro Didático (PNLD). In: ROJO, R.; BATISTA, A. **Livro didático de língua portuguesa, letramento e cultura da escrita**. Campinas: Mercado de Letras, 2003.
- BIANCHI, M. I. Z. **Uma reflexão sobre a presença da História da Matemática nos livros didáticos**. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP, 2006.
- BIFFI, L. C. R. **História da Matemática nos Livros Didáticos do Ensino Médio: Uma Investigação**. Curitiba-PR, 2016.
- BRASIL/MEC, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 1998.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base**. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15dez. 2020.
- BRASIL. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2011. Matemática**. Brasília: MEC, 2010.
- BRASIL. **Guia de livros didáticos PNLD 2020: Apresentação**. Brasília: MEC, 2020.A.
- BRASIL. **Guia de livros didáticos PNLD 2020: Matemática**. Brasília: MEC, 2020.B.
- BRITO, A. J. **A História da Matemática e a Educação Matemática na formação de professores**. Educação Matemática em Revista, ano 13, n. 22, p. 11-15, 2007.
- CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. 4.ed. Lisboa: Gradiva, 2002.
- CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. Apostila

OBMEP, 83 pp., 2010.

D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. 2ª Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

D'AMBRÓSIO, U. Porque e como ensinar História da Matemática. **REMATEC**. Natal (RN) Ano 8, n.12/ Jan.-Jun. 2013, pp. 7-21

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto & Aplicações**. Obra em três volumes para os 1º, 2º e 3º anos do ensino Médio. 2ª ed. São Paulo: Ática, 2013.

FRAGOSO, W.C **História da Matemática: uma disciplina do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora**. Dissertação – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Instituto Antônio Houaiss, Editora Objetiva, São Paulo, 2001, 600p.

IEZZI G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R., ALMEIDA, N. **Matemática: ciência e aplicações**: ensino Médio, volume 1, 2 e 3, 9a. ed., São Paulo : Saraiva, 2016.

IMENES, L. M. **Vivendo a Matemática**. Geometria das dobraduras. 7ª ed. São Paulo: Scipione, 2004.

LANG, R. J. Origami. **Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education**. Massachusetts: A K Peters, 2009.

LARA, I. O ensino da Matemática por meio da História da Matemática: possíveis articulações com a etnomatemática. **VIDYA**, v. 33, n. 2. Santa Maria: UFN, 2013.

LIMA, I. M. R.; MACHADO, F; RYNDACK, D. G; BRUZ, I. C.; BATISTA, W. S.; CAMPOS, E. O número de ouro, seus mistérios e sua presença em nossas vidas. III **Escola de Inverno de Educação Matemática**, 2012. In: **Anais...**, 2012.

KOBAYASHI, M. C., YAMADA, T. R. U. Origami e kirigami: arte e cultura como recurso lúdico e educativo. **Revista Ciência em extensão**, 9, 2013.

LAURO, M. M. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. **Exacta**, São Paulo, v. 3, p. 35-48, 2005.

LEROY, L. **Aprendendo geometria com origami**. Monografia - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

MAIA, J. **Uma análise da linguagem utilizada em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2016.

MENDES, H. **Livro Didático (De Matemática): Discussões, Reflexões e Histórias**. Tiradentes: UNIT, 2016.

MIGUEL, A., BRITO, A. J. A História da Matemática na formação do professor de

Matemática. **Cadernos do CEDES** (UNICAMP), CAMPINAS - SP, v. 40, p. 47-61, 1996.

OGLIARI, L. N. O conteúdo de funções na escola: Rastros dos movimentos de reforma nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental. **Tese** (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

OLIVEIRA, F. W. S.; SOUSA, A. C. G. Concepções de professores de Matemática sobre o uso da História no ensino. 2017. 70 f. **Trabalho de Conclusão de Curso** (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE, Canindé, 2018.

OLIVEIRA, J. P. **A eficiência e/ou ineficiência do livro didático no processo de ensino-aprendizagem**. Goiânia: Anpae, 2007.

OLIVEIRA, F. F. **Origami: Matemática e Sentimento**. 2005.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Rede Pública do Estado do Paraná**. DCE, 2008.

PEREIRA, A.C.C., PEREIRA, D.E. Ensaio sobre o uso de fontes históricas no ensino de Matemática. IN: MENDES, I. A., SILVA, C. A. F. História da Matemática em pesquisas práticas. **REMATEC**: Revista de Matemática, Ensino e Cultura, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. 2015.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro, Brasil: Zahar, 2013.

SANTOS, W. L; CARNEIRO, M. H. S. Livro Didático de Ciências: Fonte de informação ou apostila de exercícios. **Contexto e Educação**, Ano 21. Julho/dezembro, Ijuí: Editora Unijuí. 2006.

SANTOS, M. L. S.; BARBOSA, E. J. T. A História da Matemática em livros didáticos. In: **Congresso Nacional de Educação**, Campina Grande. **Anais [...]**. Campina Grande, 2014. v. 1, p.1-1.

SANTOS, A. O. História da matemática como metodologia alternativa para o desenvolvimento da prática pedagógica nos primeiros anos do ensino fundamental. 2013. 170 f. **Dissertação** (Mestrado em Ciências Humanas) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2013. Disponível em <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/13936>. Acesso em 23/09/2021

SANTOS, F. **O professor e livro didático: implicações metodológicas na prática de ensino em Geografia**. Goiânia: Anpae, 2007.

SILVA JUNIOR, C. G. R. O livro didático de Matemática e o tempo. **Revista de Iniciação Científica da FFC**, v. 7, n. 1, p.13-21, 2007.

SILVA, L. G.; LAVOR, O.P.; OLIVEIRA, G. F. B. A Construção do paralelepípedo utilizando origami como ferramenta no ensino de Matemática. **IV Congresso Brasileiro de Educação**, IV Conedu, João Pessoa, PB, 2017. In: **Anais...**, 2017.

SMOLE, K. S., DINIZ, M. I. **Matemática: Ensino Médio**. Obra em três volumes para os 1º, 2º e 3º anos do ensino Médio. 8ª ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

SOARES, J. F.; DA COSTA FONSECA, I.; ALVARES, R. P.; DE MEIRELES, R. R.(Orgs.). **Exclusão interescolar nas escolas públicas brasileiras**: um estudo com dados da Prova Brasil de 2005, 2007 e 2009. Brasília: UNESCO, 2012.

SOARES, K. M. História da Matemática na formação de professores do Ensino Fundamental – (1ª a 4ª série). 132 p. **Dissertação** (Mestrado) – Universidade do Estado de Santa Catarina/UDSC, Florianópolis, 2004.

SOARES, N. M. F. Sobre o conhecimento e a difusão das obras de Arquimedes em Portugal. 2014. 110 f. **Dissertação** (Mestrado) - Curso de História e Filosofia das Ciências, História e Filosofia das Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014.

Disponível em:

<https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/15508/1/ulfc111904_tm_Natercia_Soares.pdf>. Acesso em: 30 out. 2020.

VASCONCELOS, J. S. **Guia para avaliação do livro didático de ciências. Uberlândia**: Uniminas, 2009.

6. APÊNDICE

OUTRAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Visando a utilização a contextualização histórica dos conteúdos de Matemática durante as aulas, nessa dissertação será proposta outras atividades didáticas conforme mostrado na tabela 4.

Os conceitos utilizados nessas atividades, por exemplo pentágono, congruentes, arestas, diagonal, razão áurea, retângulo, triângulo e área.

Tabela . Proposta de outras atividades didáticas com foco na História da Matemática

Questão	Descrição	Expectativa de resposta
1	As arestas deste pentágono são congruentes? Quais os tamanhos das arestas desta figura?	As arestas são congruentes. Os lados do pentágono têm tamanho de 13 cm ou 130 mm.
2	A diagonal é o segmento que liga dois vértices não consecutivos. Quantas diagonais tem esta figura geométrica? Quais as dimensões?	O pentágono possui 5 diagonais. O tamanho da diagonal do pentágono é de 21 cm ou 210 mm.
3	Há diversas relações que podemos encontrar no pentágono. A razão entre a diagonal e o lado do pentágono é aproximadamente igual a qual valor? Use as dimensões em milímetros.	A razão pedida é $\frac{210}{130} \approx 1,615$.
4	Unindo todas as diagonais forma-se uma estrela de cinco pontas. Observa-se que é formado um novo pentágono. Descreva as dimensões, respectivamente, das diagonais e do lado deste pentágono menor. Use as dimensões em milímetros.	Medindo, temos: 79 mm e 49 mm, aproximadamente.

5	Correspondente ao novo pentágono. A razão entre a diagonal e o lado do pentágono é aproximadamente? Use as dimensões em milímetros, e aproximação na ordem dos milésimos.	Obtém-se a razão $\frac{79}{49} \approx 1,612$.
6	Fazendo novamente o traçado das diagonais, forma-se, novamente, uma estrela de cinco pontas, menor. Tem-se um terceiro pentágono. Respectivamente, as diagonais e os lados deste pentágono, tem quais medidas. Use as dimensões em milímetros.	Aferindo, temos: 31,5 mm e 19,5 mm.
7	Continuamente pode-se obter novas estrelas de cinco pontas e novos pentágonos. Este procedimento é infinito. Efetuando a terceira razão, entre diagonal e lado do pentágono, obtemos qual resultado. Use as dimensões em milímetros.	A razão encontrada é $\frac{31,5}{19,5} \approx 1,615$.
8	Sendo conhecidas as áreas do retângulo e do triângulo. Como calcular a área do pentágono? Qual valor obtemos para a área do referido pentágono?	Sabendo que a área do triângulo é $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$, e observando o pentágono, percebemos que este pode ser dividido em 10 triângulos retângulos de dimensões 6,5 cm por 8,8 cm. A área de um triângulo será $A_T = \frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 8,8 = 28,6 \text{ cm}^2$. O pentágono terá área de 10 vezes um triângulo. Portanto, $A_P = 10 \cdot 28,6 = 286 \text{ cm}^2$.
9	Há outra maneira de calcular a área do pentágono? Qual seria o método?	Sim formas de calcular. 1) Pode-se pensar no semiperímetro vezes o apótema. 2) Formar triângulos internos e usar a fórmula de Heron. 3) Usar os triângulos e a fórmula $A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \theta$, onde $\theta = (360^\circ)/5 = 72^\circ$.
10	Considerando que a razão áurea é a razão: $\frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \phi$. Como expressar o número de ouro e a área do pentágono em função do lado do pentágono?	$A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin 72^\circ; \quad \sin 72^\circ = \phi \sin 36^\circ$ $A = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \phi \cdot \sin 36^\circ.$