Lúcia Andréia de Souza Rocha

A Utilização de Softwares no Ensino de Funções Quadráticas

Rio Grande-Rio Grande do Sul-Brasil

Agosto, 2013

Lúcia Andréia de Souza Rocha

A Utilização de Softwares no Ensino de Funções Quadráticas

Dissertação submetida por Lúcia Andréia de Souza Rocha como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT

Orientador: Dra. Cristiana Andrade Poffal

Coorientador: Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Rio Grande-Rio Grande do Sul-Brasil

Agosto, 2013

R672u Rocha, Lúcia Andréia de Souza

A utilização de softwares no ensino de funções quadráticas / Lúcia Andréia de Souza Rocha. – 2013.

120 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – Mestrado Profissional em Matemática.

Orientadora: Dra. Cristiana Andrade Poffal.
Coorientadora: Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti.

1. Matemática. 2. Funções quadráticas. 3. Exercícios (Funções quadráticas) 4. Softwares (Funções quadráticas). I. Poffal, Cristiana Andrade. II. Meneghetti, Cinthya Maria Schneider. III. Título.

CDU 51

Catalogação na fonte: Bibliotecário Clériston Ribeiro Ramos CRB10/1889

Lúcia Andréia de Souza Rocha

A Utilização de Softwares no Ensino de Funções Quadráticas

Dissertação submetida por Lúcia Andréia de Souza Rocha como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Rio Grande-Rio Grande do Sul-Brasil, 03 de Agosto de 2013:

Dra. Cristiana Andrade Poffal

Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Dra. Fabíola Aiub Sperotto

Dra. Lisandra de Oliveira Sauer

Rio Grande-Rio Grande do Sul-Brasil
Agosto, 2013

Este trabalho é dedicado a todos os Professores que buscam novas formas de ensinar e aprender tentando despertar em seus alunos o prazer pela matemática.

Colaboradores

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

http://www.furg.br/

INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E FÍSICA

http://www.imef.furg.br/

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

http://www.profmat-sbm.org.br/

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

http://www.sbm.org.br/

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR

http://www.sbm.org.br/

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado forças para concluir esta jornada.

Ao meu esposo e filhos, por todo amor, apoio e compreensão que tiveram durante estes dois anos de estudos intensos e pouco tempo de dedicação a eles.

A minha mãe por todo amor e colaboração.

À Universidade Federal do Rio Grande - FURG, por ter ofertado o curso.

Às orientadoras as Professoras Dra. Cristiana Andrade Poffal e Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti, por toda colaboração, dedicação e empenho que tiveram durante a elaboração deste trabalho.

A todos os colegas que, na troca de experiências em sala de aula, contribuíram na aquisição de novos conhecimentos.

À CAPES pelo apoio financeiro.

"Nenhuma investigação humana pode ser chamada Ciência se não puder ser demonstrada matematicamente."Leonardo da Vinci

Resumo

Este projeto tem como objetivo apresentar uma maneira diferente de abordar os conceitos de funções quadráticas, propondo exercícios de motivação e de fixação de conteúdos, com questões contextualizadas e voltadas para o dia-a-dia do educando. Pretende-se auxiliar os docentes e tornar, assim, a aprendizagem de seus discentes mais prazerosa, desmistificando a Matemática, oportunizando aos alunos a utilização dos conceitos matemáticos em seu cotidiano. Utilizando as ferramentas tecnológicas já disponíveis na maioria das escolas de Educação Básica, apresentar-se-ão atividades usando pelo menos um *software* livre para inspirar os professores na elaboração de suas aulas e consequentemente ajudar os discentes na construção do seu conhecimento.

Palavras-chaves: Função Quadrática. Exercícios de contextualização de funções. Tecnologia.

Abstract

This project aims to present a different way of approaching the concepts of quadratic functions, proposing exercises of motivation and content fixation, with contextualized issues facing the student day-to-day. It is intended to assist teachers and making, this way, learning from their students more pleasurable, demystifying mathematics, providing opportunities for students to use mathematical concepts in their daily lives. Using technological tools already available in most schools of Basic Education, will be presenting activities using at least one free software to inspire teachers in preparing their lessons and consequently help students in building their knowledge.

Keywords: Quadratic function. Contextualizing Function Exercises. Technology.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

Nas últimas décadas, o ensino da Matemática no Brasil vem apresentando progressos importantes com propostas de novas metodologias como a utilização de jogos educativos, materiais concretos, pesquisas que visam relacionar a matemática com o cotidiano dos alunos, além de *softwares* especialmente desenvolvidos para o ensino da matemática. Porém, em muitos locais, ainda é ensinada de forma tradicional, sem muitos atrativos para o aluno e por esse motivo, a matemática acaba, para um grande número de alunos, se tornando difícil e severa. Difícil no sentido de que o aluno estudando dessa forma tradicional não a compreende. Severa no sentido de que a matemática escolar tem a fama de ser uma disciplina classificatória, pois um bom ou mau desempenho na matéria acaba rotulando o aluno como "inteligente" ou "menos capaz". "Na escola é aquela que ajuda a ordenar a pirâmide escolar ou a que dá acesso às carreiras mais aquinhoadas pelo status social".(ALMEIDA, 1987)

Percebe-se que a informática está cada vez mais presente nas escolas. Até mesmo as escolas públicas possuem computadores que podem ser utilizados tanto por professores quanto por alunos. Muitos desses equipamentos foram adquiridos através do PROINFO (Programa Nacional de Tecnologia Educacional), programa do governo federal que visa à informatização das escolas públicas, tanto municipais quanto estaduais, com a criação de laboratórios de informática. De acordo com SEB (Secretaria de Educação Básica), a escolha das escolas que receberão os laboratórios se dará da seguinte forma: no âmbito estadual, a escolha é feita pelas coordenadorias, e no âmbito municipal a seleção das escolas é feita pelos prefeitos.

Apesar de grande parte das escolas já possuírem computadores, na maioria das vezes tais equipamentos não são utilizados pelos professores de Matemática. Geralmente são usados como ferramenta de pesquisa por professores de História, Educação Artística ou Geografia.

Segundo (ALMEIDA, 1998), as resistências ao uso do computador na escola não se dão por má vontade dos professores ou por dificuldades de utilizá-lo, mas sim pela estrutura curricular escolar, que acaba com qualquer projeto que não se adapte ao esquema de grades com aulas de cinquenta minutos. No entanto, ao conversar com alguns professores, principalmente os de Matemática, constata-se a resistência que eles têm em tentar utilizar tal ferramenta. Às vezes por falta de tempo de preparar as atividades. Outras, por acomodação, pois levar as turmas para o laboratório de informática demanda tempo e preparo, tirando o professor de sua zona de conforto. Mas muitas vezes por desconhecimento, isto é, não sabem como utilizar tecnologias. Faz pouco tempo que os cursos de licenciatura inseriram disciplinas voltadas à utilização de tecnologias na educação.

Na Universidade Federal do Rio Grande do Sul[1], são ministradas disciplinas como *Computador na Matemática Elementar I*, que visa o desenvolvimento de conceitos e aplicações dentro do ambiente virtual LOGO, e *Educação Matemática e Tecnologia* disciplina que analisa a utilização de *softwares* diversos no ensino-aprendizagem de matemática, além de construção de referencial teórico na área de tecnologias aplicadas à Educação Matemática.

A Universidade Federal do Rio Grande[2], oferece nas disciplinas do curso de matemática *Tecnologias Aplicadas à Educação I e II* e a Universidade Federal de Pelotas[3] ministra *Tecnologias Avançadas no Ensino de Matemática* e *Programação em softwares de matemática*, disciplinas de caráter obrigatório que visam desenvolver habilidades no uso de tecnologias no ensino aprendizagem de matemática assim como a análise de diferentes *softwares* destinados ao ensino de conteúdos matemáticos.

Atualmente, tanto os currículos quanto os professores devem se adaptar a essa nova realidade. É passado o tempo em que para alcançar seus objetivos bastava que o educador preparasse seu aluno para um vestibular, ou algo parecido. De acordo com (SANCHO, 1998) ao interagir com novas tecnologias o ser humano transforma profundamente a si e ao meio no qual vive, daí a importância da inseri-las na educação.

A fim de que os professores de matemática possam utilizar os computadores em suas aulas já existem vários *softwares* livres, ou seja, aquele tipo de programa que não necessita do pagamento de licença tais como o *Régua e Compasso*, *Cabri*, *Wingeom*, *Geogebra*, *Octave*, *Winplot* e *Logo*, por exemplo. Com eles é possível trabalhar e ilustrar quase todo o conteúdo das últimas séries do Ensino Fundamental e todo o Ensino Médio. *Softwares* como *Régua e Compasso*, *Cabri*, *Wingeom*, e *Geogebra* auxiliam em conteúdos de Geometria Plana e Espacial, assim como na Trigonometria. Enquanto, com o *Octave*, é possível trabalhar álgebra, matrizes e determinantes e com o *Winplot* pode ser abordado o conteúdo de funções, dentre tantos outros conteúdos que os alunos têm dificuldades de compreensão.

O estudo de funções constitui dos temas mais importantes do programa de Matemática do Ensino Básico. Sua abordagem pode iniciar no Ensino Fundamental e se estender até a Educação Superior. O objetivo deste trabalho não é revisar conceitos rela-

---

1 Grade curricular disponível em *http://www.ufrgs.br/ufrgs/ensino/graduacao/cursos/exibeCurso?cod_curso = 335* acessado em 5.07.2013.

2 Grade curricular disponível em *http://www.furg.br/bin/cursos/tela_qsl_visual.php?cd_curso = 102*, acesso em 5.07.2013

3 Lista de disciplinas disponíveis em *http://ifm.ufpel.edu.br/dme/?page_id = 110*, acesso em 5.07.2013

tivos ao estudo de funções, mas sim contribuir para facilitar a aprendizagem dos discentes propondo atividades para serem resolvidas com o auxílio de *softwares* matemáticos e situações contextualizadas para ilustrar os conceitos de funções quadráticas. (FONSECA, 2011) fez um trabalho interessante sobre funções afins contextualizadas e seu trabalho motivou o estudo de funções quadráticas através de situações contextualizadas e exercícios de motivação e fixação. Pretende-se, com este estudo auxiliar os professores dinamizando suas aulas e tornando o conteúdo mais significativo para os educandos.

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. No Capítulo 1, aborda-se um pouco sobre a história das funções. No Capítulo 2, trata-se sobre o estudo de funções e sua abordagem nos livros didáticos. No terceiro capítulo, apresentam-se os objetivos e metas a serem alcançadas. No Capítulo 4, relata-se uma pesquisa bibliográfica sobre a utilização de tecnologias no estudo de funções e no Capítulo 5, disponibilizam-se atividades resolvidas, divididas por temas específicos para que o professor possa escolher qual tema e o tipo de exercícios. As atividades foram resolvidas detalhadamente, com ilustrações das telas dos programas, utilizando os *softwares Winplot* ou *wxMaxima*, porém o professor pode optar por resolvê-las com outros *softwares* de sua preferência.

1 Um pouco de história sobre funções

O princípio de dependência entre as grandezas data de milhares de anos. Usava-se a correspondência de uma pedra para uma ovelha ou um risco no chão para cada animal do rebanho. Os Babilônios já construíam tabelas em argila nas quais cada valor da primeira coluna correspondia a um valor na segunda coluna, semelhantes às tabelas feitas, atualmente, pelos professores, para melhor compreensão das leis de função.

A função afim tem seu conceito diretamente ligado à evolução histórica dos processos de solução das equações do primeiro grau. Os primeiros registros de resolução desse tipo de equações são de aproximadamente 2.000 a.C., no antigo Egito. Também nesta época, há registros na civilização Babilônica de resolução de equações e sistemas do primeiro grau. Muitos matemáticos estudaram resoluções de equações, como Diofanto de Alexandria e os hindus Aryabhata $(476 - 550)$ e Brahmagupta $(598 - 670)$, por exemplo.

Já entre os séculos IX e XI, os estudos árabes deram grande contribuição à solução de problemas algébricos, as técnicas por eles desenvolvidas influenciaram vários matemáticos europeus da Idade Média, dentre eles destacou-se Fibonacci $(1.170 - 1.250)$ por apresentar solução para equações do primeiro grau. Só após a obtenção de uma notação algébrica mais adequada para funções, na obra de Descartes $(1.596 - 1.656)$, encontra-se a representação gráfica para a equação que nada mais é que a equação de uma reta. Nesta obra encontra-se também o gráfico de uma função afim.

Da mesma forma, a função polinomial do segundo grau tem seu conceito ligado à resolução de equações do segundo grau. Os antigos egípcios e os babilônios já apresentavam resolução para vários tipos de equações do segundo grau, com métodos semelhantes aos utilizados atualmente. Brahmagupta (por volta de $598 - 670$), AlKhawarism $(790 - 850)$ e Baskara $(1.114 - 1.185)$ desenvolveram técnicas para resolução equações quadráticas.

Por volta do fim do século XIV e início do século XV, a ideia de função que teve início a partir da latitude[1] das formas também estava presente nos estudos de Newton e Leibniz e na Geometria de Fermat e Descartes. Thomas Bradwardine[2] $(1.290 - 1.349)$ e Nicole Oresme[3] $(1.323 - 1.382)$, que viveram no primeiro período citado, já faziam referências a funções. Bradwardine propôs uma alternativa para a lei de movimento de Aristóteles. Veja como era feita a escrita da Lei do Movimento:

1 Forma como Oresme se referia às ordenadas
2 Arcebispo de Canterbury estudou os polígonos estelares, que tiveram a primeira aparição com Pitágoras e sua escola.
3 Um bispo da Normandia que foi o primeiro a conceber a noção de expoente fracionário.

> para dobrar uma velocidade que resulta de uma dada razão ou proporção $\frac{F}{R}$, ele dizia, é necessário elevar ao quadrado a razão $\frac{F}{R}$; para triplicar a velocidade deve-se elevar ao cubo a proportio ou razão $\frac{F}{R}$; para multiplicar por n a velocidade deve-se tomar a n-ésima potência da razão $\frac{F}{R}$. Isto equivale a afirmar que a velocidade é dada, em nossa notação $V = Klog\frac{F}{R}$, pois $log(\frac{F}{R})^n = nlog\frac{F}{R}$. Isto é, se $V_0 = log\frac{F}{R}$, então $V_n = log(\frac{F_0}{R_0})^n = nlog\frac{F_0}{R_0} = nV_0$ (BOYER, 1999).

Como se pode perceber, a fórmula resultante proposta por Bradwardine é uma função de uma variável, fixando-se uma velocidade inicial.

Nicole Oresme, por sua vez, deu grande contribuição para o estudo de funções, foi dele, segundo (BOYER, 1999), o primeiro registro na história da matemática de uma função transcendente, apesar de ele não ter dado esse nome à função. Também são dele os registros antigos das primeiras representações gráficas de funções. Além disso, ele percebeu que podia representar uma função de uma variável por uma curva, o que era uma novidade na época.

Para Oresme tudo o que era mensurável poderia ser representado graficamente e por isso ele traçou gráficos relacionando *velocidade* $\times$ *tempo* para um corpo em movimento com aceleração constante. Naquela época ele trabalhava com latitudes e longitudes, que atualmente são nossas ordenadas e abscissas.

> a representação gráfica de funções até então conhecida como a latitude das formas, continuou a ser um tópico popular desde o tempo de Oresme até o de Galileu" (BOYER, 1999).

Apesar de existirem registros sobre o estudo de funções durante a Idade Média, segundo (CAJORI, 2007), a relação de dependência numérica de uma quantidade em relação a outra, como é encontrada na obra de Descartes, não era comum entre os matemáticos daquela época. E os termos coordenadas e eixos coordenados foram vistos pela primeira vez em 1678 em um manuscrito de Leibniz.

No começo do século XVII surgem as primeiras ideias sobre o conceito de função. Isso ocorre, segundo (YOUSSEF; SOARES; FERNANDES, 2004), quando o estudo da natureza começou a se basear na observação dos fenômenos naturais e nas leis que tentavam explicá-los. Os conceitos de função eram variados. Para Bernoulli, função era "uma quantidade composta de qualquer modo de uma variável qualquer e constantes quaisquer". Para Euler, função era "qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes".

Em 1748, em *Introductio*, Euler escreveu que toda expressão analítica em x, isto é, toda expressão feita de potências, logaritmos e funções trigonométricas era chamada de função de x. Vários foram os conceitos dados por diversos estudiosos ao longo dos anos, mas somente na primeira metade do século XIX é que Dirichlet (1805 – 1859) apresentou uma definição de função que está bem próxima da atual, diferenciando-se desta apenas pelo fato de que, naquela época ainda não havia a Teoria dos Conjuntos e a definição atual baseia-se em relações entre conjuntos.

Diversas notações de função foram usadas pelos matemáticos ao longo dos anos. Segundo (BOYER, 1999), Bernoulli experimentou várias notações para uma função de uma variável até chegar à que foi a notação mais próxima a atual conseguida por ele. Leibniz, por sua vez, também contribuiu, mesmo não sendo o responsável pela notação atual de função, deve-se a ele o uso da palavra função quase no sentido atual. A notação algébrica atual se deve a François Viète (1540 – 1603), que também se fez notável ao desenvolver métodos de resolução para as equações quadráticas.

No próximo capítulo revisa-se a abordagem sobre o tema de funções nos livros didáticos de Ensino Fundamental e Médio.

2 O estudo de funções

O aprendizado faz parte da natureza humana e o ser humano aprende a todo o momento, em situações cotidianas, na relação com outras pessoas, e com o passar do tempo, tudo flui naturalmente e a aprendizagem se torna significativa. O problema da aprendizagem escolar é que muitas vezes “a escola pode levar o aluno a situações nas quais o mesmo tem que decorar os estudos para passar nas provas” (SHITSUKA et al., 2012).

O excesso de cálculos, a predominância de processos algorítmicos e a quantidade de regras, na maioria das vezes, desvinculadas das situações reais, tornam o aprendizado da matemática deficiente, monótono e desinteressante para grande parte dos alunos, inibindo suas fantasias e sua espontaneidade. Se, ao invés de proporem questões do tipo “arme e efetue”, “calcule”, “resolva as expressões”, os professores apresentassem aos seus alunos problemas contextualizados com situações que se aproximassem da vida cotidiana, os estudantes teriam mais interesse e procurariam solucionar os problemas com criatividade e perspicácia, utilizando sua base de conhecimento adquirida ao longo do tempo, aprimorando sua capacidade de compreensão e interpretação. O cotidiano é riquíssimo, está repleto de situações matemáticas. Observe os exemplos citados por (TOLEDO, 1997):

> Sempre que precisamos tomar uma decisão importante, pesamos todos os fatores envolvidos e procuramos um meio de organizá-los da melhor forma, estudando as várias possibilidades; nesse momento, estamos utilizando o raciocínio combinatório. As pessoas que cozinham utilizam seus próprios algoritmos, e para aumentar ou diminuir o tamanho da receita empregam o raciocínio proporcional (“se para 4 xícaras de farinha coloco 3 ovos para 6 xícaras devo colocar...”); o mesmo faz um viajante ao calcular que velocidade média deverá imprimir ao carro para chegar ao seu destino em um determinado tempo (TOLEDO, 1997).

Tendo em vista o exposto, deve-se melhorar a abordagem dada à matemática, visando uma educação de qualidade e mais significativa, pois a falta de sentido nos conteúdos acaba tornando-os mais difíceis do que realmente são.

O conteúdo de funções é um dos mais estudados na Educação Básica começando no Ensino Fundamental com uma breve introdução, sendo ampliado no Ensino Médio e até mesmo no Superior, em alguns casos. Apesar disso, ainda gera grandes dificuldades, muitas delas em virtude da forma como é abordado. Talvez teoria e o quadro não estejam sendo suficientes para tornar o assunto claro para os alunos. Alguns professores também

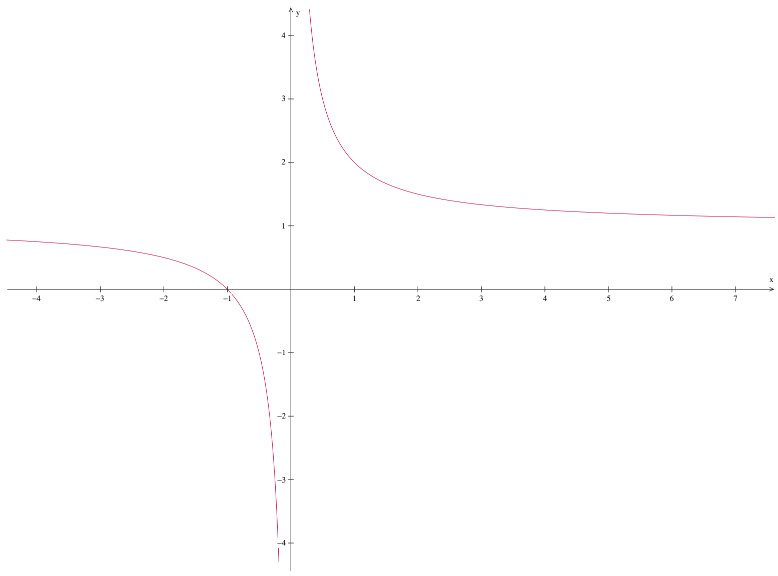


Figura 1 – Gráfico de $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ com $D(f) = \mathbb{R}^*$, referente ao exemplo 1

têm dúvidas a respeito de certos conceitos que talvez não tenham sido bem estudados durante sua formação acadêmica.

De acordo com (COSTA, 2008) em pesquisa realizada através de questionário com professores que cursavam Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, foi possível perceber dúvidas com relação a conceitos básicos de funções, como a unicidade da função inversa e igualdade de funções, por exemplo. Houve professores que afirmaram que uma função poderia ter duas inversas distintas.

Segundo (ÁVILA, 2003), quando se fala em função, é de grande importância definir o seu domínio, pois geralmente se fornece a lei e o domínio fica implícito como sendo o maior conjunto possível. Essa situação não é verdadeira, pois, às vezes, pode-se querer analisar o comportamento de uma função num certo intervalo do seu domínio, restringindo-o a um subconjunto. Observe os exemplos.

Exemplo 1. Sejam as funções $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$, cujo domínio é o conjunto dos números reais não nulos $\mathbb{R}^*$, e $g(x) = \dfrac{x+1}{x}$ cujo domínio é $\mathbb{R}_+$. Têm-se duas funções distintas. Observe os gráficos nas Figuras 1 e 2. As duas funções possuem mesma lei, mas não são iguais. A igualdade de funções ocorre quando possuem domínios e imagens iguais, ou seja, "duas funções f e g são iguais se, e somente se, forem conjuntos iguais de pares ordenados."(IEZZI; MURAKAMI, 2004)

Exemplo 2. Pode-se, ainda, analisar a igualdade ou não das funções definidas por $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ e $g(x) = x - 1$. Simplificações algébricas resultam em $f(x) = g(x) = x - 1$ o que leva a inferir que as funções são iguais. De fato, esse é um exemplo que gera muitas dúvidas nos alunos. Portanto, deve-se dar atenção especial, pois embora as funções pareçam iguais,

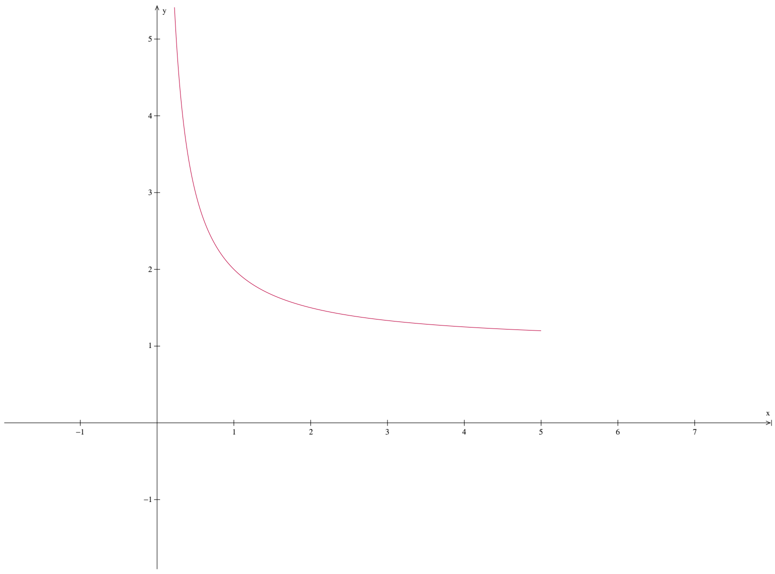


Figura 2 – Gráfico de $g(x) = \dfrac{x+1}{x}$ com $D(g) = \mathbb{R}_+$, referente ao exemplo 1

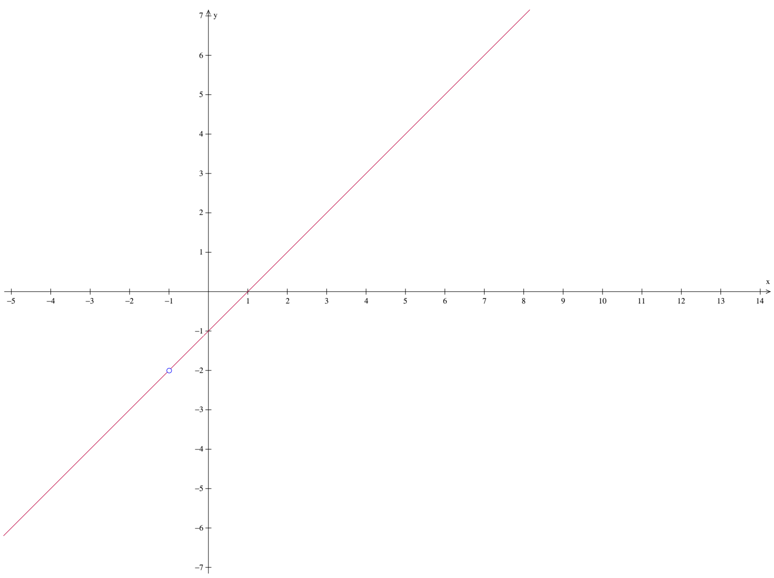


Figura 3 – Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$, referente ao Exemplo 2

o domínio de $f(x)$ é o conjunto $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$ e o domínio de $g(x)$ é $D(g) = \mathbb{R}$. Mostra-se a diferença gráfica entre as duas funções nas Figura 3 e Figura 4. Observe que na figura 3 o gráfico da função possui uma interrupção, já que $f(-1)$ não existe.

Em geral, os alunos são apresentados à álgebra no sétimo ano, começando por equações do primeiro grau e sistemas. O conteúdo de funções deveria ser iniciado nas séries finais do Ensino Fundamental, em específico no último ano, segundo os (PCN..., 2000) de matemática para o 3^o e 4^o ciclos[1]. Porém na maior parte das escolas os alunos

[1] Ciclos são períodos de dois ou três anos nos quais o Ensino Básico é dividido. Por exemplo, o 3^o ciclo

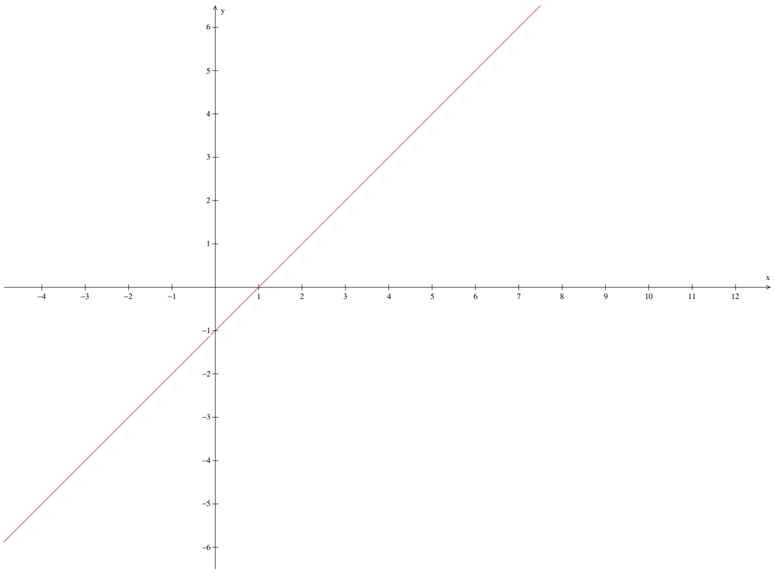


Figura 4 – Gráfico de $g(x) = x - 1$, referente ao Exemplo 2

só se deparam com funções no Ensino Médio.

Ainda no sétimo ano, começa-se o estudo de pares ordenados, plano cartesiano, equações com duas incógnitas, para só no nono ano iniciar o conteúdo de funções. Essa descontinuidade ou fragmentação dos conteúdos pode prejudicar em muito a aprendizagem dos alunos, já que quando chegam ao último ano já não conseguem relacionar o que foi estudado anteriormente com conteúdo atual. Se houvesse continuidade no nono ano, talvez os educandos conseguissem relacionar os conhecimentos já adquiridos facilitando a sequência de ensino pretendida pelo professor. Por exemplo, considerando que para as equações do primeiro grau com duas incógnitas, os alunos sabem que existem infinitas soluções, pois para cada valor dado a x tem-se um valor distinto para y. Porém, não há representação gráfica que o relacione ao estudo de funções. Veja o que consta em (ÁVILA, 2004) MEC/SEB[2] Arquivos:

> ... o estudo de funções, na sua fase mais elementar, poderia iniciar-se, com grande vantagem, na sexta série, logo após o (ou simultaneamente ao) estudo das equações. De fato, ao estudar equações a duas incógnitas, é da maior conveniência ensinar sua representação gráfica... o aluno pode ser levado, por um processo gradual de aprendizado, a descobrir, por si próprio que toda equação do primeiro grau a duas incógnitas tem por representação gráfica uma linha reta. (ÁVILA, 2004)

Na maioria das vezes, quando se pensa em função, acredita-se que deve haver uma fórmula ou lei que relacione as grandezas envolvidas, mas deve ficar claro para os alunos

corresponde aos 6º e 7º anos e o 4º ciclo 8º e 9º anos.

2 Funções e Gráficos num problema de frenagem – adaptado do artigo de Geraldo Ávila – coleção Explorando o ensino - matemática vol. 3 – disponível site do MEC em 02/2013

que muitos exemplos práticos envolvendo funções não são definidos por fórmulas, dentre eles os exames cardíacos (onde tem-se a relação número de batimentos em função do tempo) ou os gráficos encontrados em jornais e revistas que estão relacionados a assuntos diversos, como o crescimento de uma empresa durante um determinado período de tempo, por exemplo.

Para iniciar este trabalho pesquisou-se em livros didáticos de Ensino Fundamental e Médio suas abordagens dos conceitos relacionados a funções: motivação ao estudo, definições, aplicações, gráficos, exercícios e utilização de recursos computacionais.

2.1 A abordagem dada ao estudo de funções nos livros didáticos

A sociedade, atualmente, está informatizada, no entanto parece que toda essa tecnologia não está sendo repassada para a elaboração de livros didáticos para aperfeiçoar o processo ensino-aprendizagem, tornando-o mais atrativo aos olhos dos alunos. A parte teórica é bem abordada: o estudo de regras, propriedades, conceitos e definições, mas a aplicação de todo esse estudo é insuficiente, visto que na maior parte dos livros analisados, o estudo de funções é feito de forma extremamente teórica com pouca ou nenhuma relação com o cotidiano do aluno, sem ter por objetivo uma aplicação real desse conhecimento.

No livro de Ensino Fundamental de (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2000), *Matemática e Realidade – 9º ano* (6ª edição), o estudo de funções inicia com a noção de função, relacionando o conteúdo com a realidade do aluno e se chega diretamente ao conceito de função, para depois representar os pontos no plano cartesiano com a utilização de pares ordenados.

> Quando há correspondência entre duas grandezas x e y, de modo que para cada valor de x fica determinado um único valor de y dizemos que y é uma função de x. (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2000)

Este livro aborda funções cujo gráfico é uma reta (linear, afim, constante) e a função quadrática. Há exemplos práticos, porém não mostra exemplos que utilizem *softwares* para resolução ou mesmo para conferência dos resultados. Os gráficos são construídos através da atribuição de valores para x, do cálculo de y e da ligação desses pontos no plano cartesiano. Ou seja, os gráficos são feitos através de tabelas, conforme Exemplo 3 e Figura 5.

Exemplo 3. O preço do eletricista[3] : Um eletricista cobra uma taxa de R$ 20,00 pela visita ao cliente e mais R$ 30,00 por hora trabalhada. Como calcular o preço final a ser pago já que este depende do tempo de duração do serviço?

[3] Exemplo extraído do livro Matemática e Realidade – 9º ano de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado, 2009 – página 270

Horas de serviço	Preço (em reais)
x	y = 30x + 20
0	20
1	50
2	80
3	110
4	140
5	170

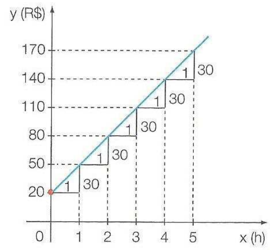


Figura 5 – Tabela e gráfico que ilustram o Exemplo 3

Outra obra de Ensino Fundamental analisada foi a primeira edição de *Matemática Construindo Consciências* de (RIBEIRO; SOARES, 2006). Apresenta alguns exemplos práticos de função. O conteúdo é diretamente introduzido, diferentemente da bibliografia anterior, relaciona os pares ordenados e sua localização no plano no capítulo anterior ao de funções. Não apresenta em destaque um conceito de função. O esboço gráfico é feito da mesma forma que na obra *Matemática e Realidade*. Também não há menção ao uso de informática no estudo de funções.

Analisaram-se os livros de Ensino Médio *Matemática de olho no mundo do trabalho*, 1ª edição, (YOUSSEF; SOARES; FERNANDES, 2004), *Matemática contexto e aplicações vol.1*, 3ª edição, de (DANTE, 2006) e *Fundamentos de matemática elementar vol.1*, 8ª edição, de (IEZZI; MURAKAMI, 2004).

No primeiro, o estudo de funções inicia com uma breve revisão sobre produto cartesiano e sua representação gráfica. Revisar é importante uma vez que os alunos, de modo geral, estudam esses conceitos no sétimo ano e deveriam retomá-lo no último ano do Ensino Fundamental. Fato que geralmente não ocorre (tomando como referência escolas públicas municipais de Pelotas-RS). Esta bibliografia especifica um objetivo geral para o estudo de funções, que é o domínio da linguagem mais utilizada para a expressão das relações existentes entre as grandezas das mais diversas áreas do conhecimento.

Ainda em *Matemática de olho no mundo do trabalho*, o conteúdo é introduzido com exemplos práticos, relacionados ao dia-a-dia dos alunos. É através desses exemplos que se chega ao conceito de função. Nesta obra, a abordagem do conteúdo apresenta inclusive relações com outras áreas do conhecimento como Química e Física. Apesar de exemplificar com funções no dia-a-dia, nos exercícios propostos são cobradas aplicações de fórmulas, representações de funções cujas leis são dadas, reconhecimento de gráficos, determinação de domínio e imagem. Ao final de cada capítulo, há resumos das propriedades e das fórmulas estudadas. Os exercícios direcionados à aplicação de funções aparecem com maior frequência na parte complementar e testes de concursos.

Em *Matemática contexto e aplicações*, a noção intuitiva de função é explorada, há apresentação do conteúdo através de conjuntos. Sua abordagem é ampla, são estudados vários tópicos e para cada seção são fixados os conceitos através de exercícios. Assim como no livro citado anteriormente, relaciona o estudo com outras áreas do conhecimento. Dante apresenta relações que não foram mostradas nos outros livros analisados. Em sua obra, relaciona função com progressão e calcula a taxa de variação de funções.

Geralmente a taxa de variação de uma função não é abordada no Ensino Médio, exceto em algumas instituições como os Institutos Federais de Educação. Outro destaque dessa bibliografia é a relação da função quadrática com a parábola na geometria analítica, fato não visto nos outros livros analisados. A abordagem dos conceitos de funções assemelha-se muito à forma como ele é tratado no livro *A Matemática do Ensino Médio – vol 1* de (LIMA et al., 2006) [4], que não é destinado a alunos do Ensino Médio, mas sim a professores.

Na obra de (IEZZI; MURAKAMI, 2004), o estudo de funções é iniciado por relações, estudo de pares ordenados e a representação gráfica até chegar ao conceito de função propriamente dito. Diferentemente da obra de Iezzi para o Ensino Fundamental que não relembra a representação gráfica de pares ordenados. É um livro que não apresenta muitos exemplos práticos relacionados com a vivência do aluno, também não costuma ser adotado em escolas como livro didático, talvez seja de grande valia para professores, por apresentar uma abordagem teórica clara.

Nos três livros analisados, o esboço do gráfico de uma função é feito a partir da construção de uma tabela onde são atribuídos valores para x e calculados os valores de $y = f(x)$. As obras mostram gráficos bem claros, mas não apresentam nenhuma relação com o uso de informática no estudo de funções. Em dois dos três livros analisados é mostrado ao aluno como identificar se um dado gráfico representa ou não uma função, fato interessante, já que grande parte dos educandos tem dificuldades em identificar apenas pela curva quando se trata ou não de uma função. Um possível teste para verificar se um gráfico representa uma função, de acordo com (YOUSSEF; SOARES; FERNANDES, 2004), consiste em verificar se qualquer reta paralela ao eixo y corta o gráfico em apenas um ponto. Caso o gráfico seja cortado em mais de um ponto ter-se-ia um ponto do domínio com duas imagens distintas, descaracterizando uma função de x.

Essas obras desenvolvem bem a parte teórica das funções afim, quadrática, modular, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, mas não existem seções específicas com exercícios de aplicação. É o conteúdo por si e, dessa forma, a aprendizagem pode se tornar sem significado para os alunos.

O Quadro 1 apresenta um resumo da análise dos três livros de Ensino Médio citados de acordo com a preocupação com revisão de conteúdos, a existência de exemplos e exercícios aplicados a situações cotidianas e a utilização de *softwares* no Ensino de

[4] A Matemática do Ensino Médio – vol.1 obra de Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado; Coleção do Professor de Matemática da SBM.

funções.

Quadro 1: Análise dos Livros Didáticos de Ensino Médio

Título do Livro	Revisão de Conteúdos	Exemplos Aplicados	Exercícios Aplicados	Utilização de *Softwares* no Ensino de Funções
Matemática de olho no mundo do trabalho	sim	sim	sim	não
Matemática contexto e aplicações	não	sim	sim	não
Fundamentos de Matemática Elementar V.1	sim	não	não	não

Segundo os (PCN+. . . , 2000) [5] de matemática para o Ensino Médio, ao estudo de funções deve ser dada menor ênfase à linguagem formal que cerca esse tema, assim como ao estudo de funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares. Também pelos (PCN+. . . , 2000) os problemas de aplicação e contexto devem ser o motivo para o estudo de funções e não podem ser deixados para o final, devido à riqueza de situações que envolvem funções. O ensino não deve deixar de mostrar que o conteúdo estudado permite analisar de forma crítica e analítica as situações cotidianas. Porém durante o Ensino Médio, o estudo de funções não vem cumprindo esses requisitos: são fórmulas, leis, definições e teoremas que ao final significam pouco na vida dos estudantes, contribuindo para que eles concluam o curso sem cumprir objetivos do ensino de matemática, tais como:

- Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- Aplicar seus conceitos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- Analisar, valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade. (PCN. . . , 2000)

[5] Está sendo feita uma distinção entre PCN e PCN^+, pois há os dois tipos de PCN's disponíveis no site do Ministério da Educação

Acredita-se que com a utilização de *softwares* nas aulas de matemática, mesmo os alunos com dificuldades em questões de aritmética, por exemplo, se mostrariam interessados e teriam maior incentivo para participar da solução dos problemas propostos pelo professor. Este deixa de ser um mero expositor que transmite instruções passo a passo, e se torna um incentivador e orientador das ideias geradas pelos alunos. Assim, os discentes participam ativamente da aula "fazendo matemática", isto é, construindo seus próprios conceitos matemáticos e não ficam mais passivamente, apenas observando a "matemática ser feita pelo professor".

No próximo capítulo serão expostos os objetivos e metas deste trabalho.

3 Objetivos e Metas

Tendo em vista o exposto no capítulo 2, o presente trabalho tem como objetivo apresentar uma maneira diferente de abordar o conteúdo de funções quadráticas, propondo exercícios de motivação e de fixação de conteúdos utilizando *softwares* como *Winplot* e *wxMaxima*. As questões serão contextualizadas e voltadas para o dia-a-dia do educando. Também serão disponibilizadas questões de produção gráfica, nas quais serão construídas máscaras, objetos e paisagens através de translações de parábolas. Todas as atividades propostas são resolvidas passo a passo, possuem dicas, pré-requisitos, estão separadas por tema e são classificadas segundo seu grau de dificuldade.

Nas atividades contextualizadas, o aluno necessita: fazer a transferência da linguagem natural para a expressão matemática, definir a lei da função através de dados fornecidos, utilizar o *software* para resolver problemas práticos, sabendo que o programa é um acessório e não resolve o exercício sozinho, necessita do conhecimento do educando para operá-lo.

Pretende-se auxiliar os docentes e tornar, assim, a aprendizagem de seus discentes mais prazerosa, desmistificando a Matemática, oportunizando aos alunos a utilização dos conceitos matemáticos em seu cotidiano. Segundo (AMBRÓSIO, 2002), a escola não se justifica pelo conhecimento obsoleto e ultrapassado, mas sim por falar em ciências e tecnologias. Utilizando as ferramentas tecnológicas já disponíveis na maioria das escolas de Educação Básica, tem-se por objetivo apresentar atividades usando pelo menos um *software* matemático livre[1] para auxiliar os professores na elaboração de suas aulas e consequentemente ajudar os discentes na construção do seu conhecimento.

No próximo capítulo será apresentado um breve estudo sobre a utilização de tecnologias no ensino de funções.

[1] *softwares* para os quais não é necessário o pagamento de licença para sua utilização

4 As Tecnologias e o Ensino de Funções

A matemática é uma ciência exata e por necessitar de tantos cálculos acaba se tornando difícil aos olhos dos alunos, que se preocupam em decorar fórmulas, pensando que assim terão maior facilidade na hora de testar seus conhecimentos numa prova. É uma disciplina de popularidade negativa e talvez por não parecer muito atrativa, seja responsável por altos índices de reprovação e de evasão escolar. De acordo com (GONZATTO, 2012), a combinação de aulas pouco atrativas com o desinteresse dos alunos e a formação deficiente dos professores, também contribuem para os resultados ruins do ensino da matemática no país.

Atualmente existem muitos recursos, tecnológicos ou não, que têm como objetivo facilitar a aprendizagem e, consequentemente, a aquisição ou construção do conhecimento. Na matemática, embora não sejam muito usados, não é diferente. Segundo (AMBRÓSIO, 1986), o professor pode utilizar o computador como um quadro negro e mesmo assim o uso dele permite um grau maior de interação com a aula, pois apenas o uso da máquina, por si só, já envolve os alunos, deixando-os mais entusiasmados pela resolução dos problemas propostos, que pode ser feita individual, em grupos ou coletivamente. Porém, essa utilização não é a mais adequada, pois já existem inúmeros *softwares* matemáticos para auxiliarem aprendizagem dos alunos e que podem ser utilizados nos mais variados ramos da Matemática.

Todos sabem que a maior parte dos problemas dessa disciplina está na forma como ela é abordada. São cálculos, desenhos e gráficos soltos em folhas de exercícios nos cadernos dos estudantes, sem nenhuma significação real para eles. Veja o que diz (NEVES, 2008) sobre matemática e sua relação com as tecnologias.

> A matemática sempre teve uma relação muito especial com as tecnologias, desde as calculadoras, o computador, os sistemas multimídia e a internet (NEVES, 2008).

O uso de tecnologias no ensino de matemática traz novas formas de ensinar e de aprender. E essas novas formas vêm provocando uma revolução nas práticas tradicionais de ensino que avançam em direção a uma prática pedagógica interdisciplinar voltada para a aprendizagem do aluno-sujeito, envolvido no processo de ensino-aprendizagem. Também estabelecem uma nova relação professor-aluno marcada por uma maior interação e cooperação. Observe o que diz (VALENTE, 1998) com relação ao uso do computador em sala de aula.

> O computador pode ser um excelente recurso para promover a passagem da informação para o usuário ou promover a aprendizagem. No entanto, da análise dos *software* é possível entender que o aprender não deve estar restrito ao *software* mas à interação professor- aluno-*software* (VALENTE, 1998).

O uso do computador em sala de aula pode se dar de diversas formas, de acordo com os (PCN..., 2000) de matemática para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental eles podem ser utilizados no ensino de matemática com várias finalidades (PCN'S DE MATEMÁTICA 3º E 4º CICLOS, 1998, p. 44):

- como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem;
- como auxiliar no processo de construção de conhecimento;
- como meio para desenvolver autonomia pelo uso de *softwares* que possibilitem pensar, refletir e criar soluções;
- como ferramenta para realizar determinadas atividades – uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados etc.

Ainda de acordo com os (PCN..., 2000), o uso de tecnologias traz contribuições significativas para o processo de ensino-aprendizagem ao passo que:

- relativiza a importância do cálculo e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio desses instrumentos os cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
- evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de vários problemas;
- possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
- permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo.

((PCN..., 2000) 3º e 4ºciclos, p. 43 – 44)

Assim como a maior parte dos conteúdos de Matemática, o estudo de funções também costuma ser desenvolvido de forma tradicional, geralmente com o auxílio de um livro didático. Apesar de, atualmente, se encontrar vários trabalhos que envolvam a utilização de tecnologias para esse estudo. São monografias, dissertações, artigos e até mesmo apostilas que mostram como utilizar determinados *softwares* matemáticos no ensino desse conteúdo.

(MAIA, 2007)[1] avalia livros didáticos de Ensino Fundamental e Médio para verificar como é desenvolvido o conteúdo de funções quadráticas. Posteriormente apresenta um tutorial, ensinando como utilizar o *Winplot*, para a seguir serem resolvidos exercícios de funções quadráticas no *software*. Os exercícios resolvidos visam analisar o comportamento

[1] Diana Maia – Dissertação de Mestrado em Educação Matemática pela PUC/SP, 2007

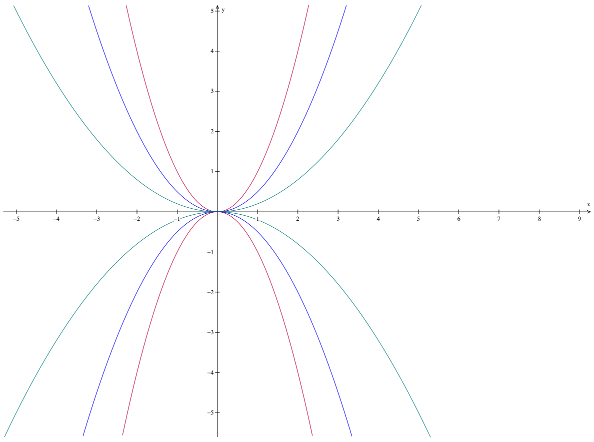


Figura 6 – Representação da variação da abertura e da concavidade da parábola de acordo com o valor de a

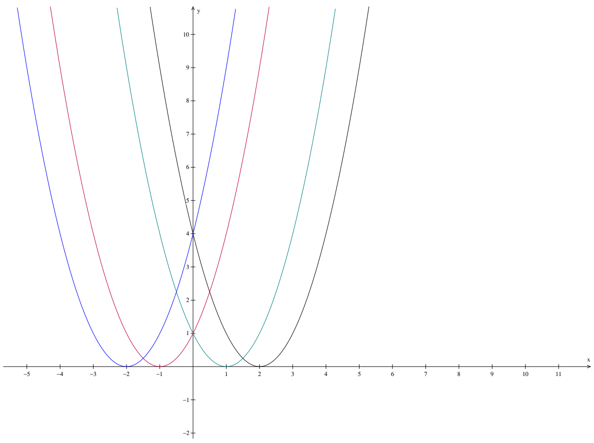


Figura 7 – Representação da translação horizontal de funções quadráticas

gráfico das funções quadráticas do tipo $f(x) = ax^2$ quando altera-se o valor de a, além de translações. Essas questões levam o aluno a analisar visualmente o que ocorre com o gráfico da função inicial $f(x) = x^2$ ao somar ou diminuir constantes, assim como o que ocorre com a parábola quando se altera o valor de a fazendo $0 < a < 1$, $a > 1$ e $a < 0$. Os exercícios desenvolvidos no trabalho eram semelhantes às representações gráficas das Figuras 6, 7 e 8.

O trabalho de (FONSECA, 2011) [2] faz um estudo de funções lineares através do *Nippe Descartes*, programa desenvolvido por um órgão vinculado ao Ministério da Educação da Espanha. Tal aplicativo possibilita que sejam criadas atividades interativas através da internet para as aulas dos professores. Nessa obra são trabalhadas áreas de figuras planas, variação dessas áreas através de funções lineares, cálculos de proporcionalidade, distância em função do tempo. Apesar do programa não ser conhecido, parece ser bas-

[2] Vilmar Gomes da Fonseca, dissertação do programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, 2011

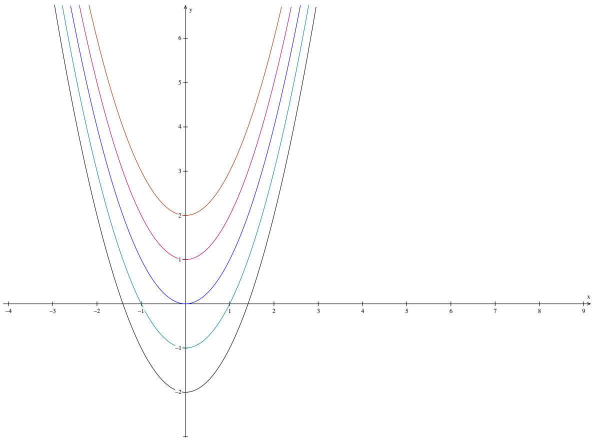


Figura 8 – Representação da translação vertical de funções quadráticas

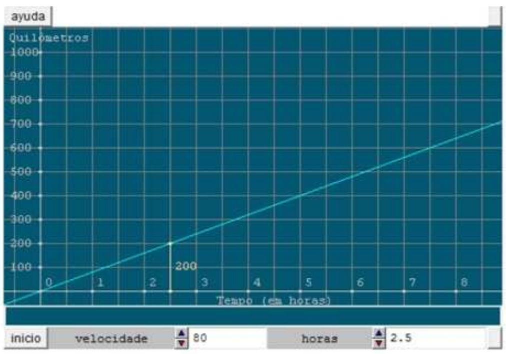


Figura 9 – Gráfico da atividade 3 de Fonseca, p.82.

tante interessante devido às possibilidades por ele oferecidas. Observe na Figura 9 um exemplo de atividade resolvida por Fonseca nesse programa.

Grande parte dos professores, que trabalham no Ensino Médio, faz a construção gráfica de funções a partir de tabelas onde são atribuídos valores de x e calculados os valores de y. Tendo em vista o exposto, pode-se ter como aliado para a construção gráfica as planilhas de cálculo como o *Excel* e *Br Oficce*, por exemplo, programas conhecidos, muitas vezes utilizados para fechamento de notas, mas pouco utilizado nas aulas. Este tipo de programa vem sendo utilizado em diversos ramos da matemática. (CONCEIÇÃO, 2013) utilizou planilhas da cálculo para fazer o estudo de transformações lineares no plano, ele explica passo a passo como são feitas as transformações, inclusive ilustra tais transformações com gráficos esboçados na própria planilha. São feitas também, detalhadamente, reflexões em torno dos eixos, origem e retas.

Como (CONCEIÇÃO, 2013), utilizou gráficos feitos por planilhas para ilustrar transformações, eles também podem ser utilizados para dar uma ideia de representação gráfica de funções. Observe a Figura 10 que mostra a representação gráfica feita numa planilha de cálculo, a partir da Tabela 1.

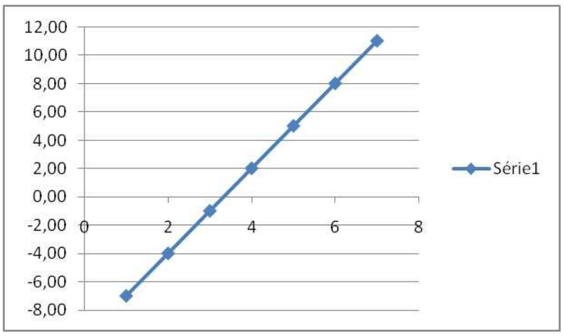


Figura 10 – Gráfico obtido em planilha de cálculo.

Tabela 1 – Variação de valores com intervalos iguais

x	$y = 3x + 2$
-3	-7
-2	-4
-1	-1
0	2
1	5
2	8
3	11

Quando se está utilizando planilhas de cálculo é preciso dar atenção especial à variação dos valores de x, caso as variações não sejam iguais, pode ocasionar uma distorção gráfica. Veja o que ocorre no gráfico da Figura 11 , esboçado a partir da Tabela 2.

Tabela 2 – Variação de valores com intervalos diferentes

x	$y = 3x + 2$
-10	-28
-3	-7
-2	-4
-1	-1
0	2
1	5
2	8
3	11
10	32

(ALEXANDRE, 2012), estuda diversos tipos de funções utilizando o *software excel*. No estudo de funções quadráticas ele faz a construção gráfica com base numa tabela de

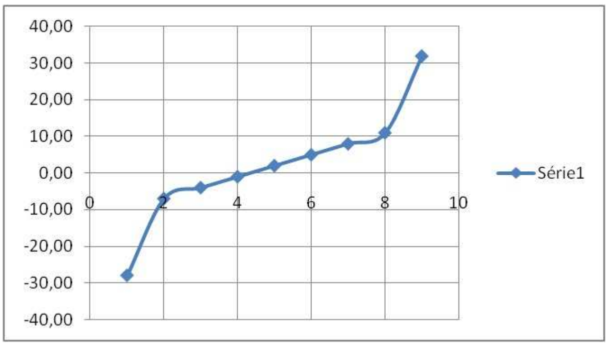


Figura 11 – Distorção devido à variação de -10 para -3 e de 3 para 10 nos valores de x

Figura 12 – Tela do aplicativo desenvolvido, página 38 do trabalho de (SANTOS, 2013)

valores, na qual são atribuídos valores para x e calculados os valores de y, no esboço gráfico feito por ele, é possível analisar as raízes da função assim como a concavidade da parábola. Todo o trabalho é descrito passo a passo, facilitando, assim, o entendimento.

(SANTOS, 2013) desenvolveu um aplicativo para o estudo de funções quadráticas, tal *software* roda sobre a plataforma *Barland Delphi 7* e calcula as raízes de funções polinomiais de segundo grau, pontos de máximo e mínimo e faz gráficos. Na Figura 12 apresenta-se a tela do aplicativo desenvolvido.

(RIBEIRO, 2013), inicia seu trabalho fazendo um estudo histórico de funções, posteriormente faz uma abordagem formal sobre funções quadráticas, definição, zeros e forma canônica. Diferentemente de outros trabalhos, o autor faz relação de funções quadráticas com progressões aritméticas e faz o estudo de funções sobre o contexto da Geometria Analítica.

Nesse trabalho são apresentadas atividades no *Winplot* e *Geogebra*, além de atividades contextualizadas. Nas atividades resolvidas com o *Winplot* são feitas translações de gráficos de funções quadráticas e nas que são resolvidas com o *Geogebra* são feitos gráficos e marcados o vértice, os focos e a diretriz. São feitas também animações dos parâmetros para estudar as variações gráficas de acordo com a variação dos coeficientes. (RIBEIRO, 2013) faz a construção de parábolas pela definição da Geometria Analítica.

(JUNIOR, 2013), apresenta atividades de análise gráfica no *software Geogebra*, são atividades que exercitam translações verticais e horizontais, assim como variações na concavidade da parábola de acordo com o coeficiente a. Após cada atividade há um questionário que deve ser respondido pelos alunos e uma avaliação do autor quanto ao número de acertos e erros cometidos por eles ao fazerem a interpretação gráfica.

(MAGARINUS, 2013), fez um trabalho baseado na utilização dos *softwares Tracker* e *Geogebra* no qual foram apresentadas atividades que exploram o conceito de função e a relação entre as variáveis e atividades de análise gráfica de funções afins e quadráticas. Todos os exercícios são devidamente ilustrados com telas do programa no qual foram resolvidas, fato que facilita a compreensão dos mesmos.

Para Gómez (apud (NEVES, 2008)), o uso de tecnologias pode não ser a solução para os problemas que estão presentes no processo de ensino-aprendizagem de matemática, mas há grandes possibilidades de ele ser um agente catalizador no processo de mudança no ensino da matéria. Visando mudanças positivas no processo de ensino-aprendizagem de matemática é que realiza-se esse trabalho, no qual utilizam-se *softwares* livres para fixar, revisar e motivar os alunos à estudarem funções quadráticas.

Apesar de haver vários trabalhos nos quais são utilizados *softwares* no estudo de funções, a abordagem dada a esse estudo é diferente. No presente trabalho serão apresentadas resoluções de situações problemas envolvendo função quadrática com a utilização de *software* livre, além de atividades de fixação e motivação, diferentemente da forma como é feito o estudo de funções nos trabalhos pesquisados.

No próximo capítulo, são apresentadas atividades propostas divididas por temas (esportes, conhecimentos gerais, geometria) com sua solução e dicas para auxiliar o trabalho do professor. Na resolução explica-se o passo a passo de cada *software* utilizado. No anexo A, encontram-se as instruções de instalação e utilização desses *softwares* e no anexo B encontram-se as atividades propostas para serem impressas e aplicadas em sala de aula.

5 Atividades propostas

Neste capítulo apresentam-se situações problemas envolvendo funções quadráticas. São exercícios contextualizados e também de análise gráfica, que visam a motivação dos alunos através de gráficos que ao se interseccionarem formam desenhos, semelhantes a máscaras. Os exercícios podem ser aplicados para introduzir, revisar ou fixar os conceitos, fica a cargo do professor decidir como prefere utilizá-los. Nos anexos, encontram-se os exercícios sem a resolução para que eles possam ser impressos para os alunos, assim como sugestões de materiais que podem ser utilizados para revisar conceitos relativos aos exercícios propostos.

5.1 Problemas envolvendo esportes

Nesta seção apresentam-se situações-problemas envolvendo esportes como futebol e voleibol. Nas questões seguintes deverão ser encontradas as leis das funções, assim como seus pontos de máximo e raízes.

Atividade 1. Futebol

Nesta atividade sugerem-se dois exercícios com o tema futebol. O professor poderá optar por resolver apenas um ou os dois. Cabe a ele avaliar o tempo disponível, assim como, o interesse da turma. Antes de cada exercício, serão apresentados os pré-requisitos, o material e o tempo necessário para a sua resolução.

Pré-requisitos: resolução de sistemas lineares (com três incógnitas) e funções quadráticas.
Material necessário: equipamento que tenha instalado o *software Winplot* ou similar, além do material escolar usual.
Tempo necessário: uma hora aula.

Exercício 5.1.1. Num jogo da Seleção Brasileira de Futebol, Neymar percebeu que o goleiro estava adiantado e resolveu jogar a bola por cobertura. Sabendo que o jogador encontrava-se a $40m$ do gol, o goleiro está a $13m$ do gol e consegue alcançar $3,5m$ ao saltar, e a altura da bola em função da distância ao gol é mostrada na Tabela 3, responda:

Tabela 3 – Altura em função da distância da bola ao gol 5.1.1

Distância da bola ao gol m	Altura da Bola m
40	0
35	2
30	$3,5$
25	$4,5$

a) É possível expressar a lei que relaciona a distância com altura da bola através de uma função quadrática?

c) Qual é a altura máxima alcançada pela bola?

d) O goleiro consegue alcançar a bola ou a bola o encobre?

e) Considerando que a trave do gol tem $2,4m$ de altura e que o goleiro não pegue a bola. Ela vai entrar na goleira?

Resolução:

Dicas para o professor

- ☞ Explique aos alunos como as equações devem ser digitadas, lembrando que não se deve colocar vírgula nos números decimais e sim um ponto;
- ☞ As operações são realizadas com os mesmos símbolos das planilhas de cálculo. Observe:

  $+$ para soma e $-$ para subtração;

  $/$ para divisão e $*$ para multiplicação;

  $\wedge$ para potenciação;
- ☞ Para visualizar melhor os gráficos pode-se afastar a imagem ou aproximá-la utilizando as teclas *PgUp* e *PgDn* assim como usar as setas do teclado para enquadrar a imagem;
- ☞ Se achar necessário, dramatize a situação descrita no problema.

a) É possível expressar a lei que relaciona a distância com altura da bola através de uma função quadrática?

Observe que ao lançar um objeto, neste caso uma bola, sua trajetória pode ser aproximada por uma parábola e nesse caso a altura da bola pode ser calculada como $f(x) = ax^2 + bx + c$. Assim, para resolver esse item o aluno deverá encontrar a solução do sistema de três equações e três incógnitas (a, b, c), já que o *software Winplot* não resolve sistemas lineares.

Considere que a goleira está na origem dos eixos coordenados. Segundo a Tabela 3 quando a bola está a $40m$ do gol está no chão (altura $0m$), quando está a $35m$, sua altura é de $2m$ e quando está a $30m$ sua altura é de $3,5m$, ou seja, $f(0) = 40$, $f(35) = 2$ e $f(30) = 3,5$. Com base nesses dados será formado o seguinte sistema de equações:

$$1.600a + 40b + c = 0$$

$$1.225a + 35b + c = 2$$

$$900a + 30b + c = 3,5.$$

Para chegar neste sistema basta fazer as substituições dos valores de x e de y na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, pois a trajetória da bola será aproximada por uma parábola e por isso a substituição na fórmula de uma função quadrática, onde x é a distância da bola ao gol e y é a altura dessa bola.

O sistema tem como solução $a = -\dfrac{1}{100} = -0,01$, $b = \dfrac{7}{20} = \dfrac{35}{100} = 0,35$ e $c = 2$. Logo a equação encontrada como resposta para o item a é:

$$f(x) = -\frac{1}{100}x^2 + \frac{35}{100}x + 2, \text{ ou seja, } f(x) = -0,01x^2 + 0,35x + 2.$$

b) Faça o gráfico da função que relaciona distância da bola ao gol com sua altura no *winplot*.

Na tela inicial *winplot* escolhe-se a opção *2-dim*, isto é, o gráfico será esboçado em duas dimensões. De acordo com a Figura 13.

Em seguida, escolhe-se *Equação→ 1. Explícita*. Observe a Figura 14.

O comando anterior abre a janela da Figura 15, onde deve ser digitada a equação da forma $ax^2 + bx + c$ com os valores de a, b e c encontrados no item a. Lembre-se de que, caso seja escolhido trabalhar com números decimais, deve ser colocado um ponto no lugar da vírgula.

Para que o gráfico do exercício apareça no intervalo adequado deve-se fixar o intervalo, clicando em *travar intervalo* e fazer x variar de 0 a 40, conforme Figuras 15 e 16.

Ao pressionar *Enter* aparecerá a tela da Figura 17, com o gráfico desejado. Para se ter uma visualização melhor do gráfico deve-se pressionar *Pg Dn* , assim como usar as setas do teclado.

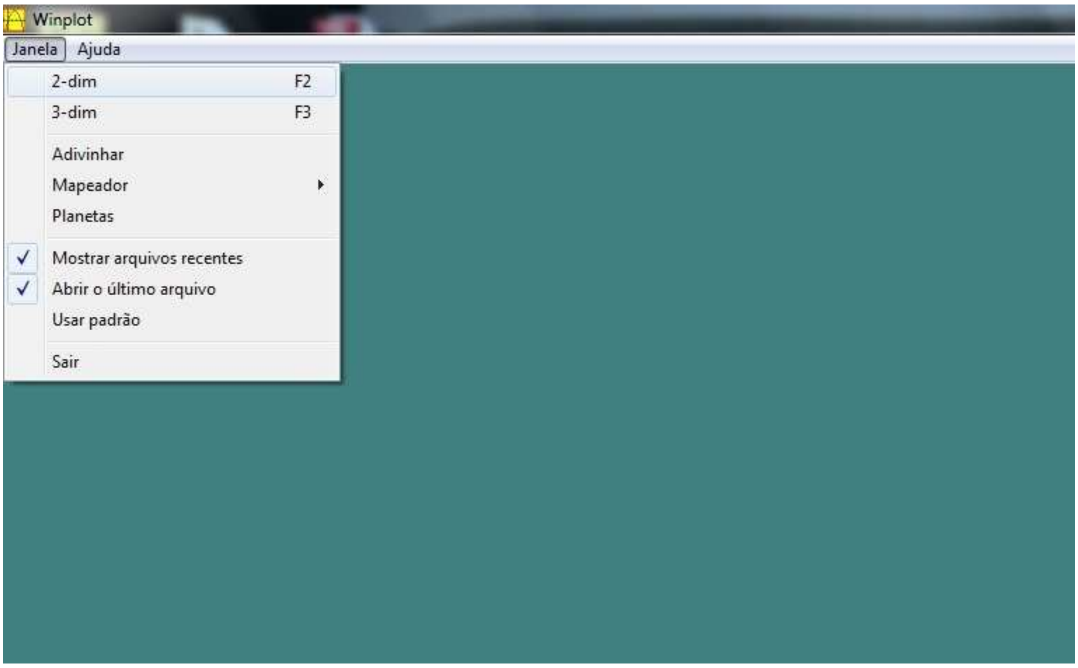


Figura 13 – Seleção da janela em 2D

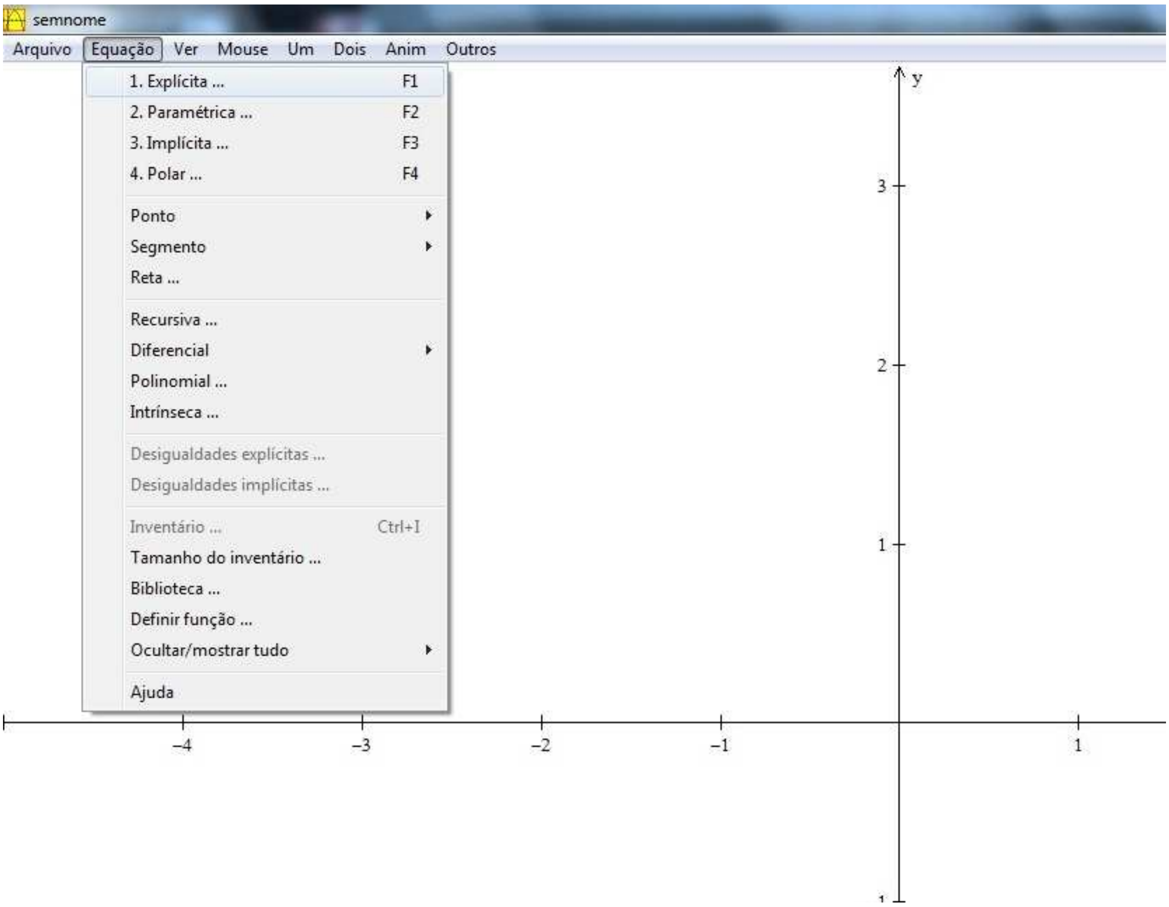


Figura 14 – Selecionando Equação Explícita

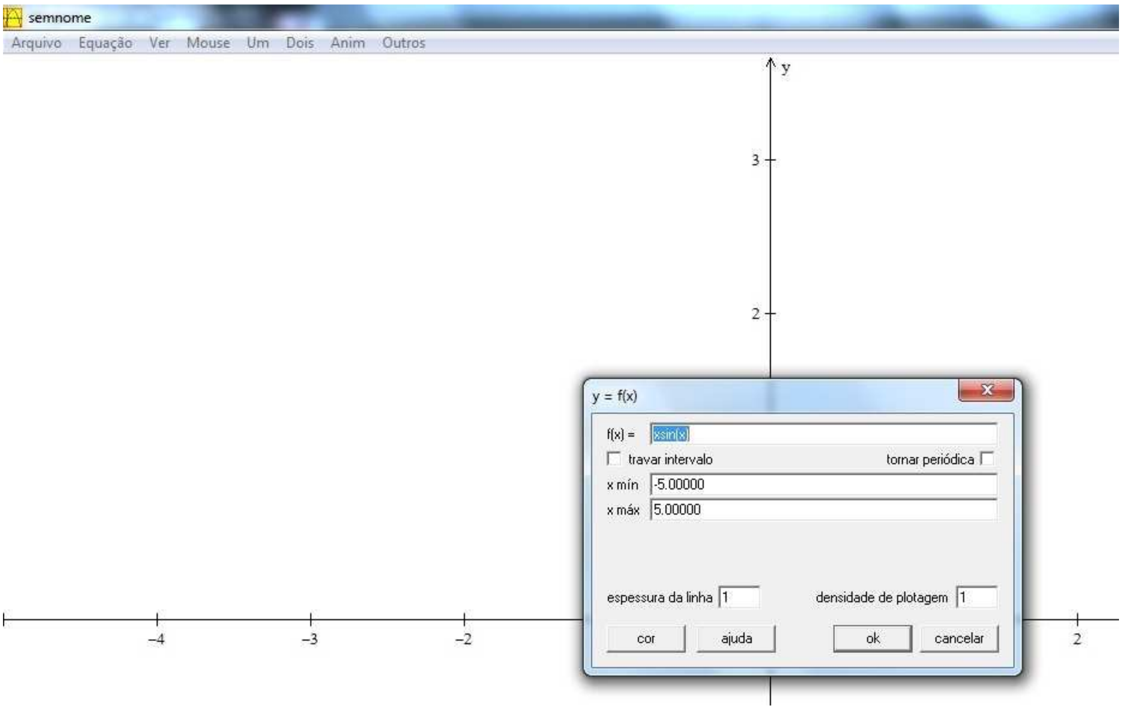


Figura 15 – Janela para digitar Equação Explícita

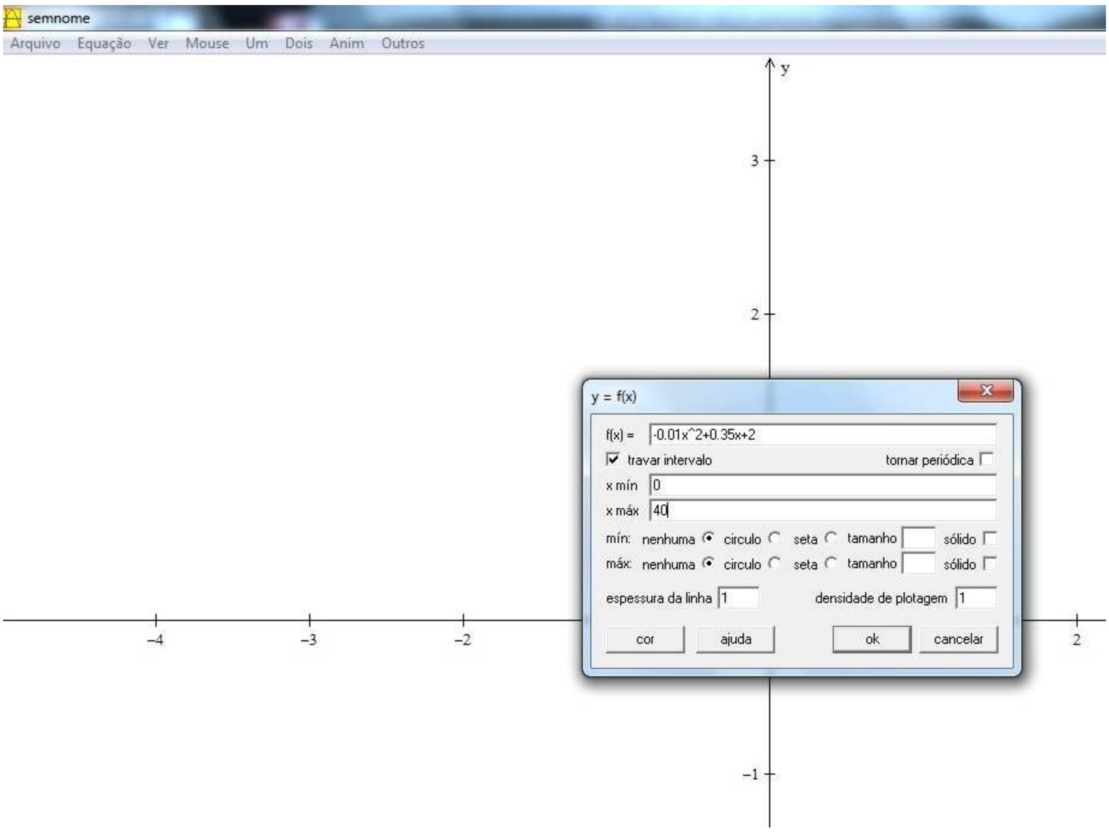


Figura 16 – Equação digitada e intervalo fixado de acordo com o exercício

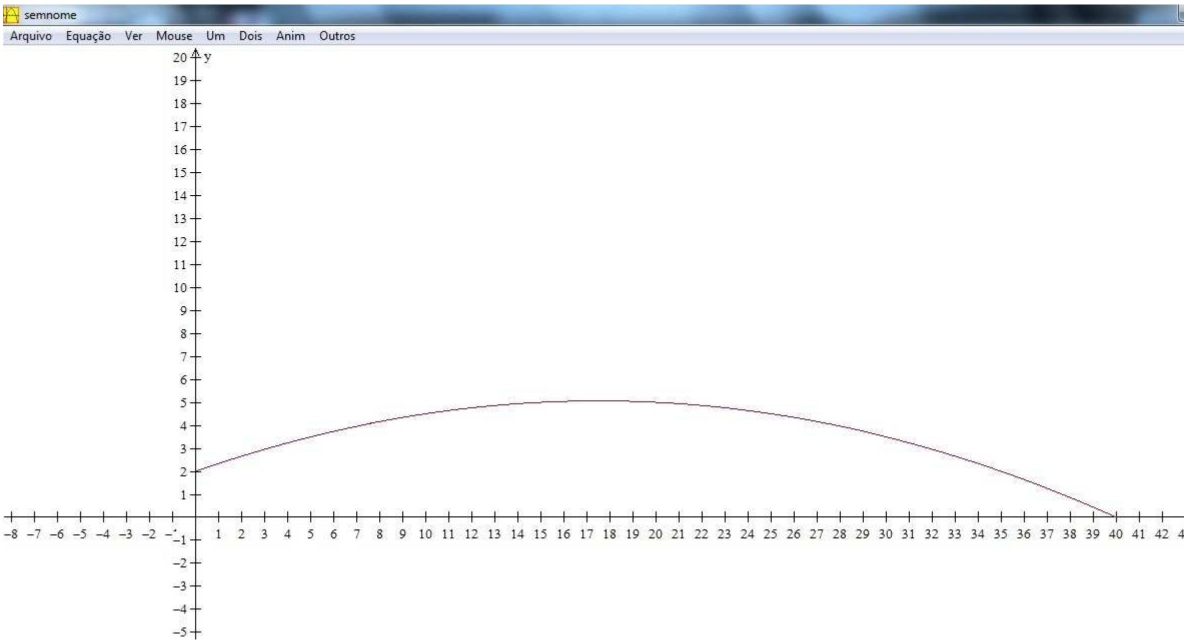


Figura 17 – Gráfico da função

c) Qual é a altura máxima alcançada pela bola?

Para determinar a altura máxima atingida pela bola, pode-se calcular as coordenadas do vértice da parábola através das fórmulas $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$. Também pode-se calcular as raízes da equação e, utilizando-se da simetria da parábola, determinar a abscissa do vértice, através do ponto médio das abscissas das raízes, para posteriormente calcular a ordenada. Em ambos casos, a resposta é a mesma e igual a $5,0625 \approx 5,06m$.

d) O goleiro consegue alcançar a bola ou a bola o encobre?

Deve-se entrar em *equação* $\rightarrow$ *ponto* $\rightarrow$ (x, y). Conforme Figura 18. Em seguida digitar o ponto com abscissa $x = 13$ e ordenada $y = 3,5$ que é a altura máxima alcançada pelo goleiro, de acordo com a Figura 19. Na Figura 20 é mostrado o ponto marcado no plano. Observe na Figura 20 que o ponto que indica a altura máxima do goleiro está abaixo da trajetória da bola e por isso ele não consegue alcançá-la quando está a $13m$ do gol.

Você também pode fazer o gráfico da função $y = 3,5$, que é a altura máxima atingida pelo goleiro, nos intervalos onde a trajetória da bola fica abaixo da reta o goleiro tem possibilidade de defendê-la. Observe a Figura 21 que para $x = 13$ a trajetória da bola está acima da reta.

Pode-se perceber na Figura 20 que o ponto está abaixo da parábola, e na Figura 21 que a reta está abaixo da parábola quando $x = 13$. Logo o goleiro não consegue alcançar

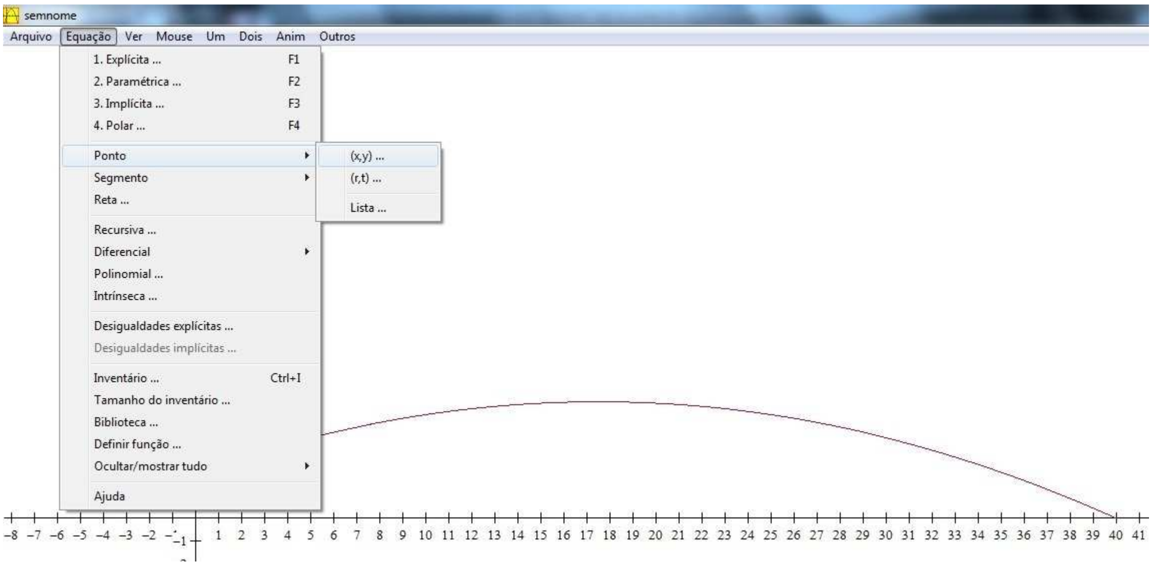


Figura 18 – Janela que mostra quais comandos devem ser seguidos para marcar um ponto no plano

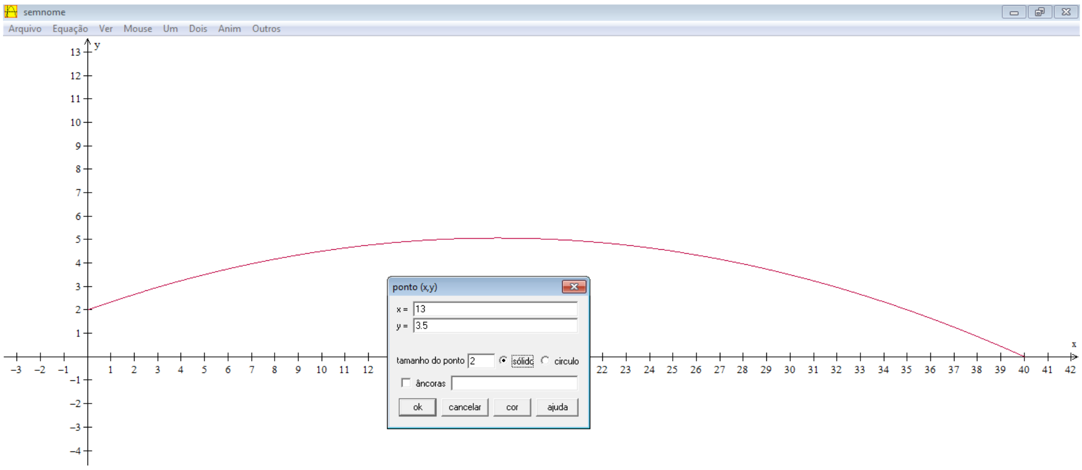


Figura 19 – Digitação da Abscissa e Ordenada do ponto

a bola quando está a $13m$ do gol e não consegue defender o chute do atacante.

e) Considerando que a trave do gol tem $2,4m$ de altura e que o goleiro não pegue a bola. Ela vai entrar na goleira?

Para resolução do item é suficiente que o aluno observe o gráfico e perceba que $f(0) = 2$ ou lembre que o valor de c, termo independente, indica onde o gráfico corta o eixo das ordenadas.

Conclui-se que a bola entrará no gol, pois $f(0) = 2$ e a trave tem $2,4m$ de altura.

Com a resolução do item *e* termina-se esse primeiro exercício. A seguir os pré-requisitos, material e tempo necessários para a resolução do próximo exercício, que ainda trata do tema futebol.

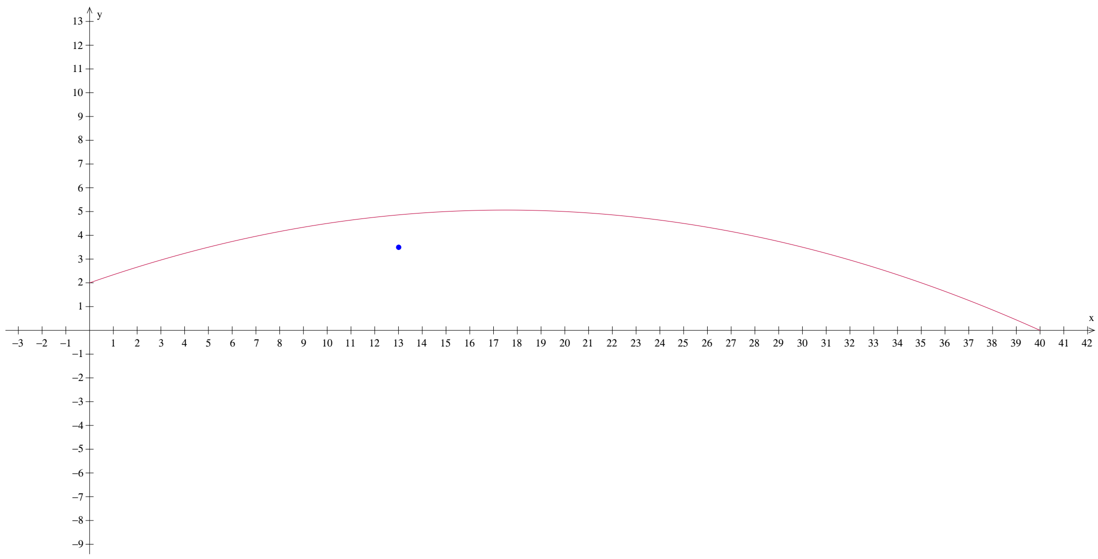


Figura 20 – Ponto marcado abaixo da parábola

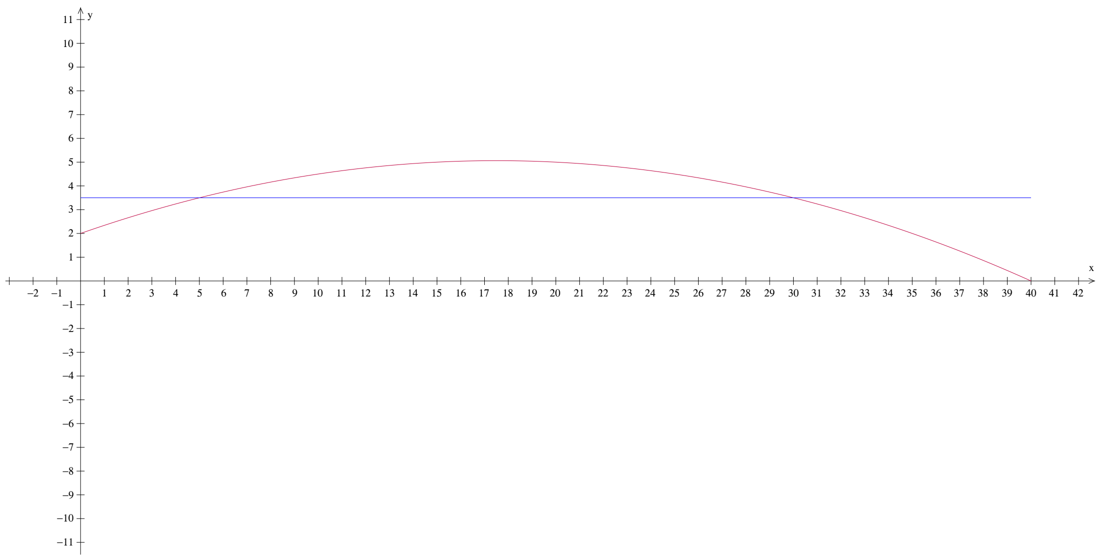


Figura 21 – Gráfico da parábola e da reta $y = 3,5$ na mesma janela

Pré-requisitos: Funções quadráticas: raízes de uma função, pontos de máximo e mínimo de uma função.
Material Necessário: *Software wxMaxima* instalado.
Tempo necessário: Uma aula de 35 a 45 minutos ou uma hora/aula.

Exercício 5.1.2. Dois garotos estão jogando bola, um na frente do outro. Um deles joga a bola segundo a trajetória dada pela função $f(x) = -0,25x^2 + 1,75x$, onde x corresponde ao deslocamento horizontal e $f(x)$ é a altura da bola. Responda:

a) Se a bola cai no pé do segundo jogador, qual é a distância entre os jogadores?

b) A bola bate na cabeça do segundo jogador quando este está à $6m$ do primeiro, pergunta-se: qual é sua altura?

c) Faça o gráfico de $f(x)$ no *software wxMaxima*.

Resolução:

Dicas para o professor

- ☞ Pergunte aos alunos como é possível aproximar a trajetória da bola;
- ☞ Peça aos alunos que considerem um dos jogadores na origem dos eixos coordenados e comente que a altura máxima alcançada pela bola nada mais é do que o ponto máximo de uma função quadrática;
- ☞ Também lembre-os de que a parábola é simétrica em relação ao seu eixo de simetria (reta que contém o vértice), ou seja, eles podem calcular as raízes da função e saberão que a abscissa do vértice está no ponto médio entre elas;
- ☞ A forma de digitar as equações é a mesma do *software Winplot*.

a) Se a bola cai no pé do segundo jogador, qual é a distância entre os jogadores?

Considere que os pés dos jogadores estão sobre o eixo das abscissas, a bola nesses pontos tem altura zero e, por isso, devem ser determinadas as raízes da equação $-0,25x^2 + 1,75x = 0$. Executa-se a seguinte sequência de comandos no *software wxMaxima*.

Após abrir o programa clique em *Equações* $\rightarrow$ *resolver*, conforme Figura 22. Na Figura 23 é mostrado como a equação deve ser digitada.

A Figura 24 apresenta as raízes da equação.

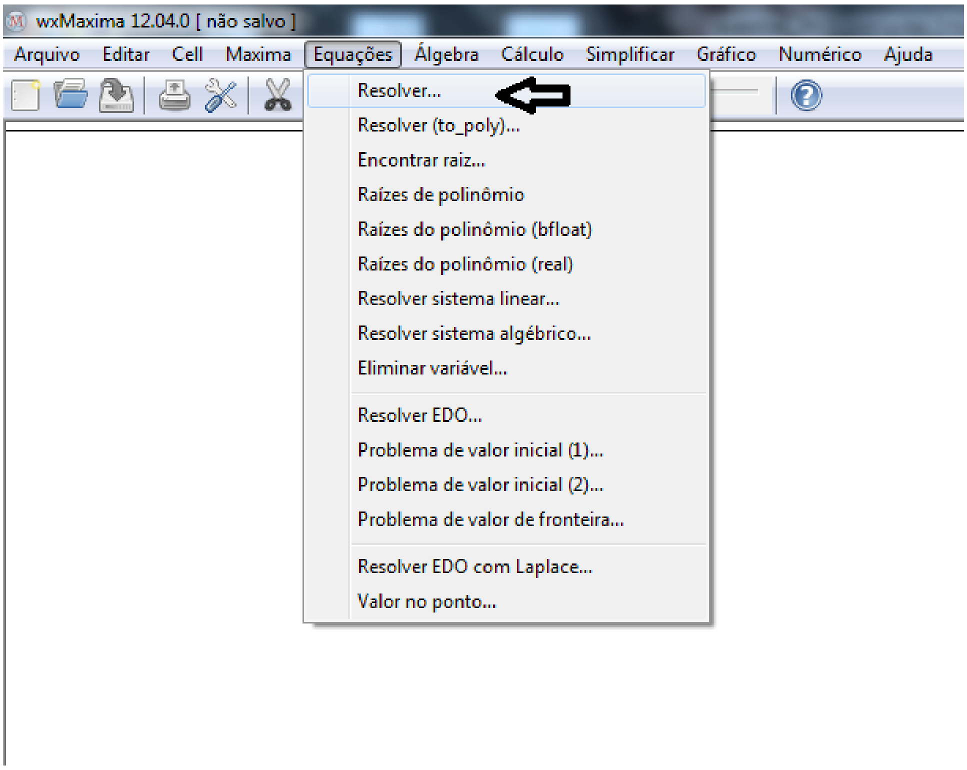


Figura 22 – Janela do *wxMaxima*, menu Equações

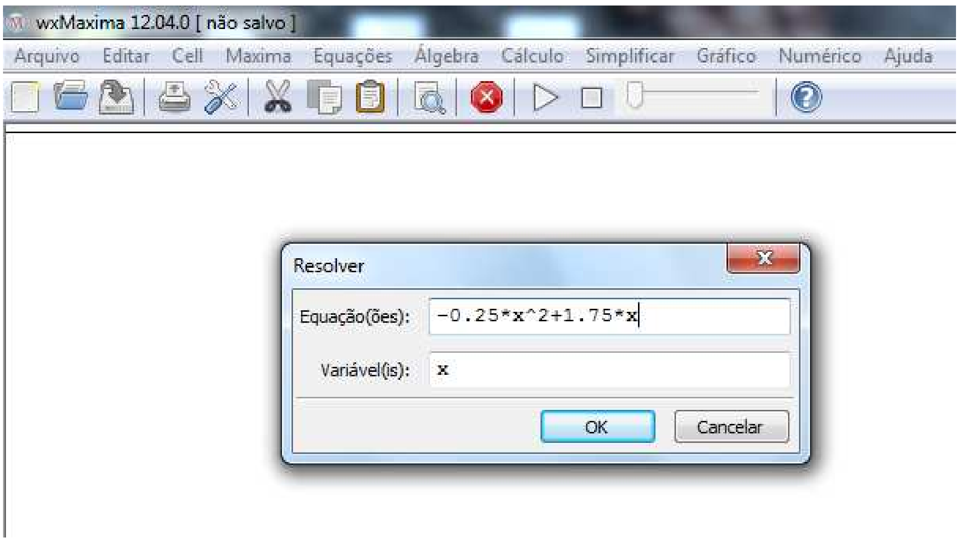


Figura 23 – Janela para digitar a equação

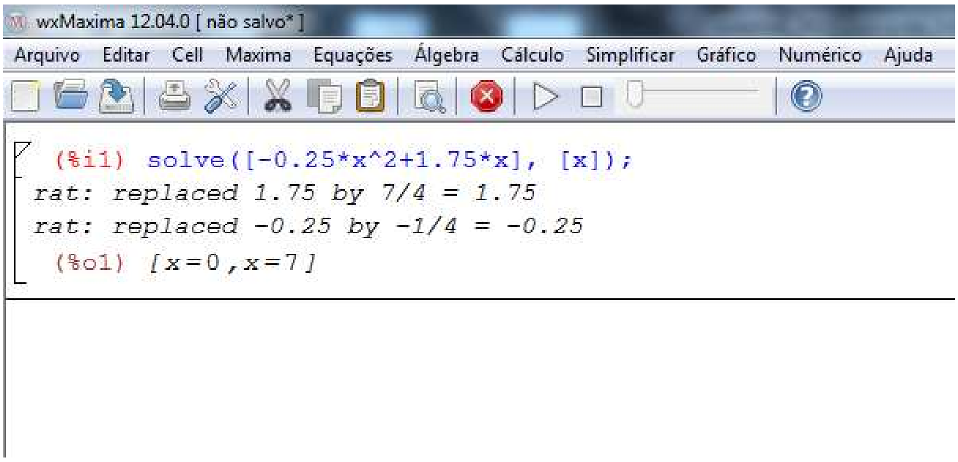


Figura 24 – Raízes da equação

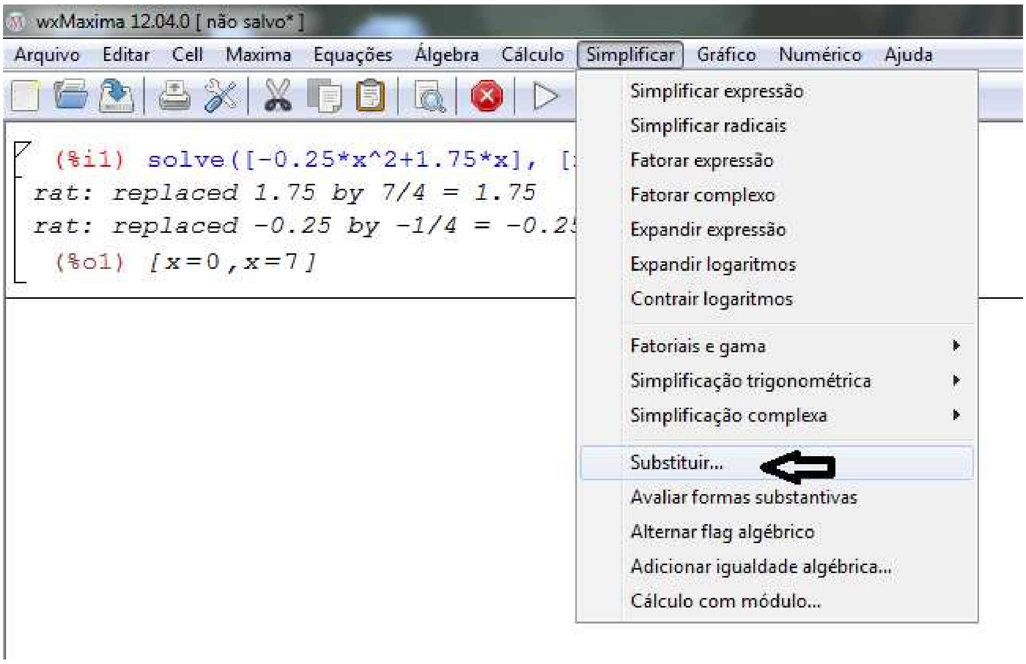


Figura 25 – Menu *Menu Simplificar → Substituir*

Logo, há uma raiz em $x = 0$ e outra em $x = 7$. Conclui-se que a distância entre os garotos é de $7m$.

b) A bola bate na cabeça do segundo jogador quando este está à $6m$ do primeiro, pergunta-se: qual é sua altura?

Precisa-se saber determinar a imagem para $x = 6$. Basta calcular o valor da função na abscissa $x = 6$, isto é, $f(6)$. Siga os comandos das Figuras 25, 26 e 27.

Na Figura 28, obtém-se a resposta. O garoto tem $1,50m$ de altura.

c) Faça o gráfico de $f(x)$ no *software wxMaxima*.

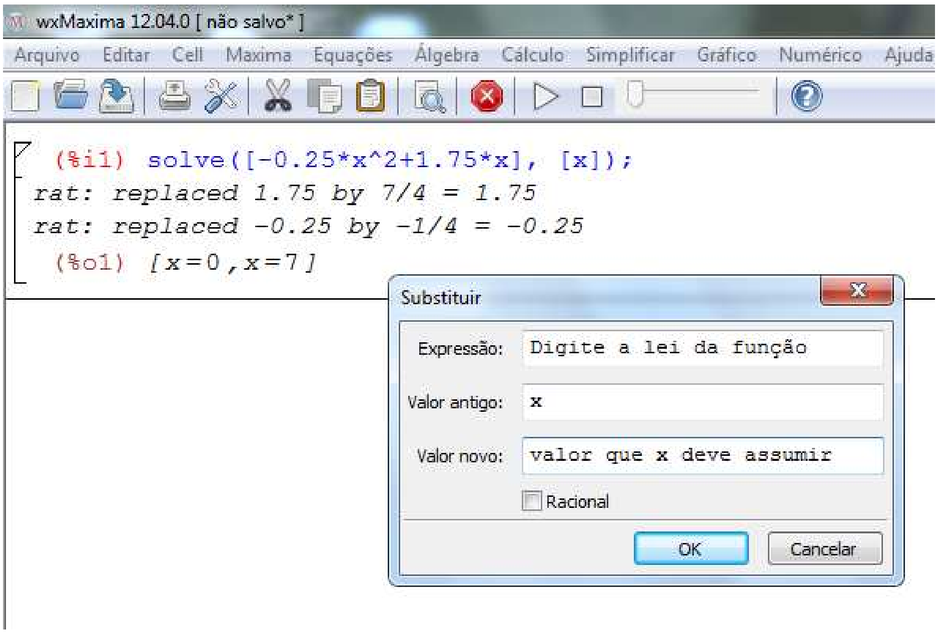


Figura 26 – Digite a função para a qual se deseja calcular o valor no ponto

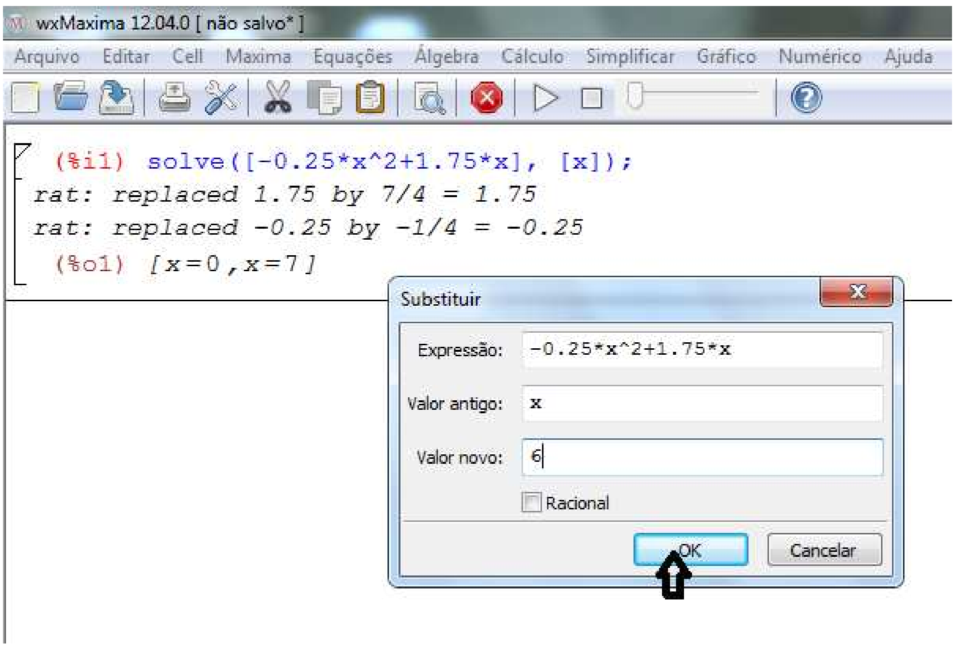


Figura 27 – Função digitada

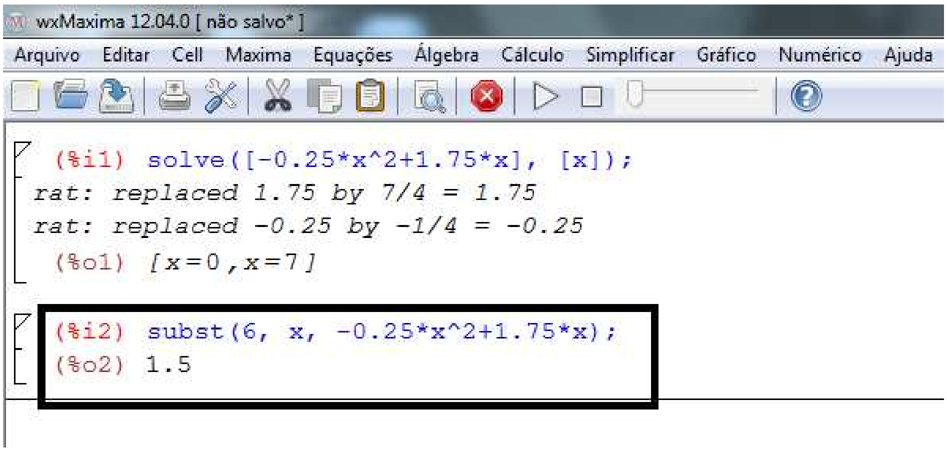


Figura 28 – Resposta do item *b*

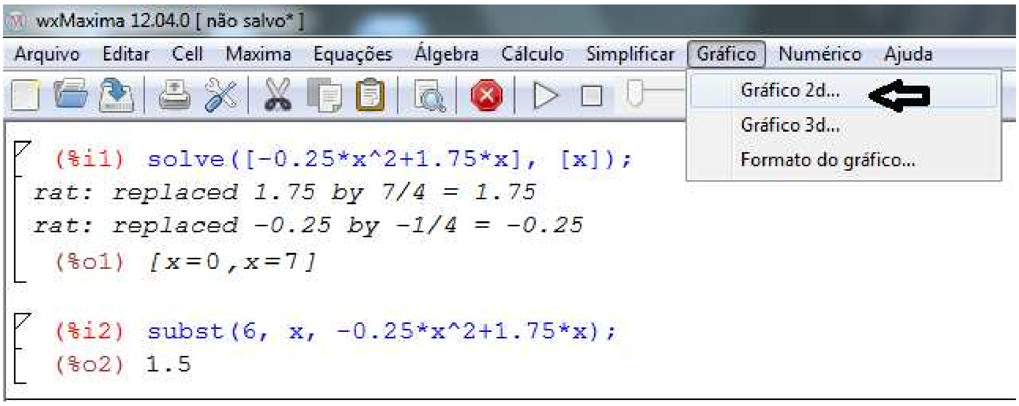


Figura 29 – Menu *Gráfico* → *2D*

No *wxMaxima* é preciso clicar em *Gráfico* → *2D* e posteriormente digitar a equação restringindo o intervalo de variação de x. As Figuras 29 e 30 mostram como se deve proceder. Já na Figura 31 é mostrado o gráfico solicitado.

Também poderia ter sido solicitada a altura máxima atingida pela bola, para isso bastaria observar o gráfico e concluir que a altura máxima ocorre quando $x = 3,5$ e seguir os passos do item *b* ou ainda calcular $y = -\dfrac{\Delta}{4a}$. Na Figura 32 está a resposta para esse possível questionamento, a altura máxima atingida pela bola é de $3,06m$.

Com o término da resolução desse exercício, tem-se o início de uma nova atividade, que tem como tema o voleibol.

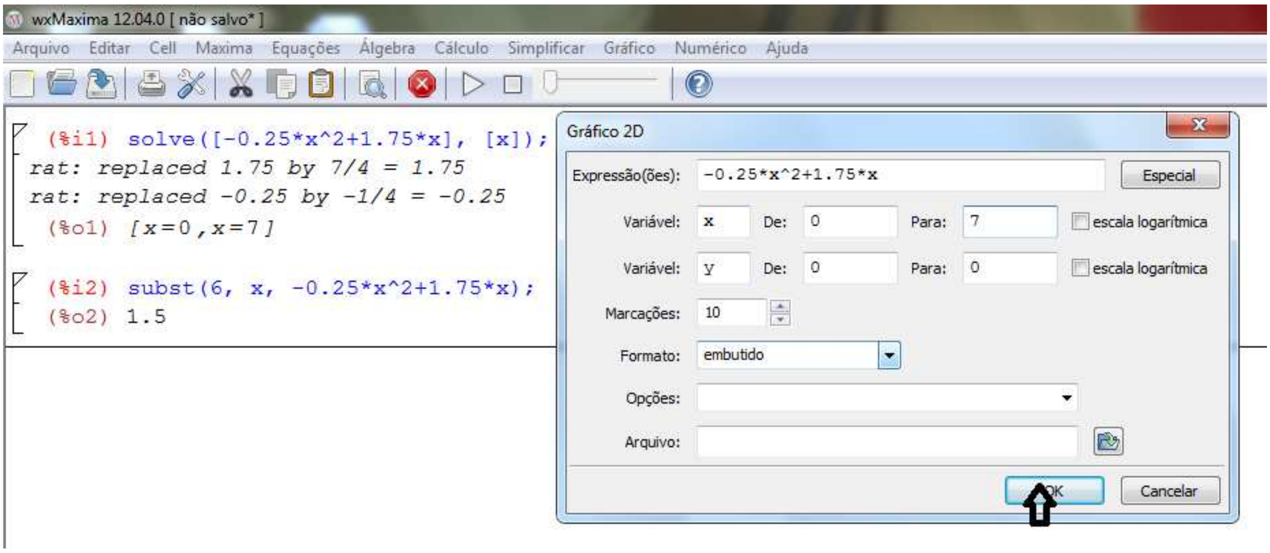


Figura 30 – Lei da função digitada

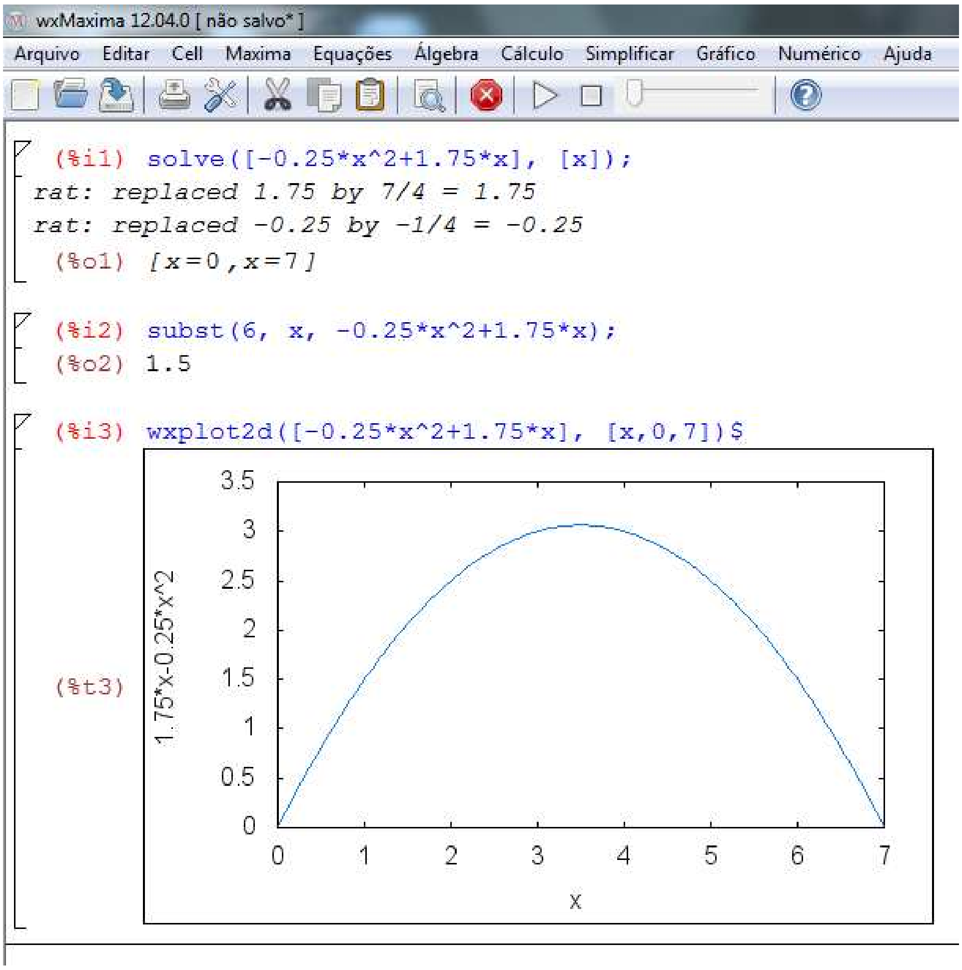


Figura 31 – Resposta do item *c*

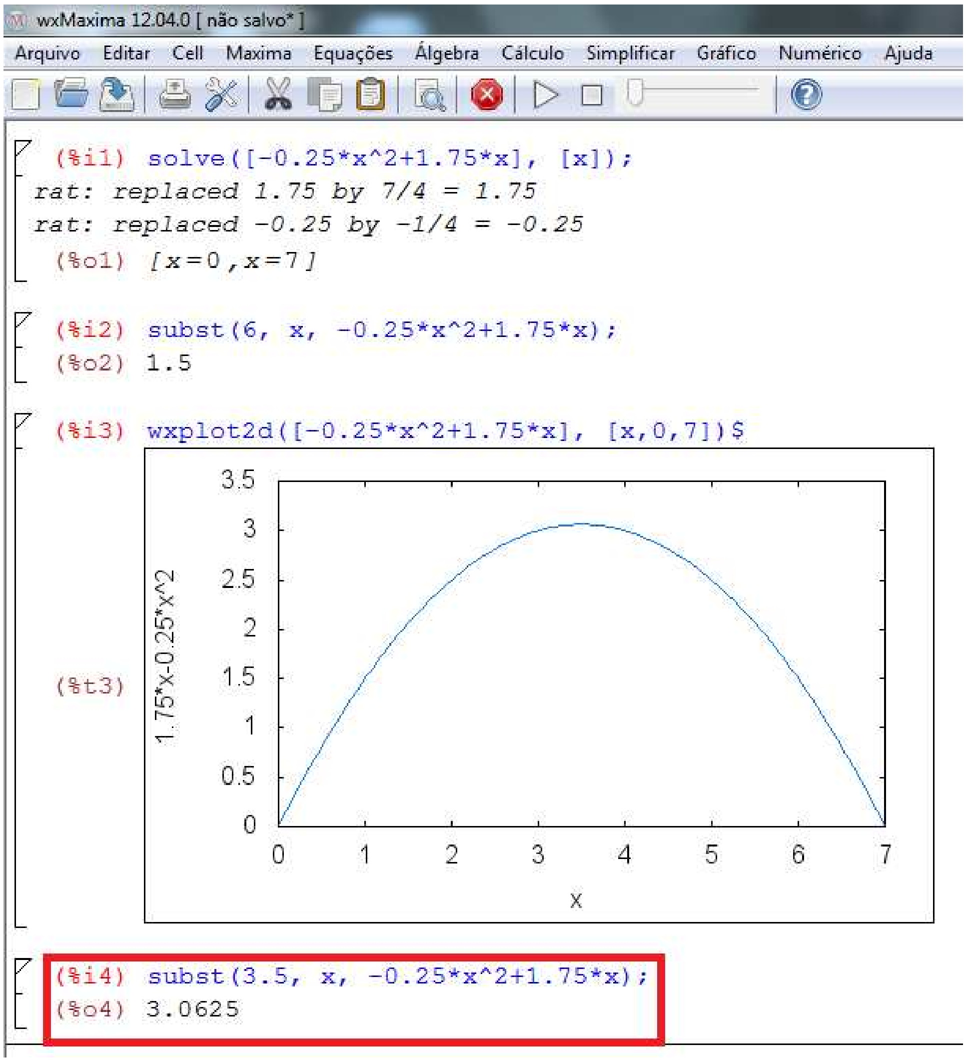


Figura 32 – Altura máxima atingida pela bola

Atividade 2. Voleibol

Nessa atividade é proposto um exercício sobre o tema voleibol para ser resolvido utilizando o *software wxMaxima*.

Pré-requisitos: Funções quadráticas - raízes, pontos de máximo e de mínimo, interpretação gráfica;
Material Necessário: *Software wxMaxima* instalado;
Tempo necessário: uma hora/aula.

Exercício 5.1.3. Considere um jogador de voleibol posicionado no fundo da quadra, que saca. Sabendo que a trajetória da bola obedece a função $f(x) = \dfrac{-x^2 + 12x + 13}{7}$, onde x é a trajetória horizontal da bola com relação ao jogador que a sacou e $f(x)$ é a sua altura.

Para resolver os itens, considere que:

- a altura da rede para jogos oficiais é de $2,42m$ nos jogos oficiais masculinos e de

$2,24m$ nos jogos femininos;

- a quadra tem $18m$ de comprimento, e a rede divide a quadra em duas partes iguais;

a) A bola ultrapassa a rede? Cai dentro ou fora do lado adversário da quadra?

b) Considerando o jogador que dará o saque na origem dos eixos, a que distância dele a bola toca o chão?

c) Utilizando o *software*, determine qual é a altura máxima atingida pela bola?

d) Faça o gráfico de $f(x)$. O que acontece com o gráfico caso não se considere o denominador 7, que diferenças gráficas podem ser notadas?

Resolução:

Dicas para o professor

☞ Peça aos alunos que considerem o jogador que vai sacar na origem dos eixos coordenados;

☞ Lembre aos alunos que para saber se a bola ultrapassa a rede, eles devem calcular $f(9)$ para concluir se a altura da bola será suficiente para passar para a quadra adversária;

☞ Para resolver o problema devem ser seguidos passos semelhantes aos do exercício anterior, no qual também se utiliza o *software wxMaxima*.

a) A bola ultrapassa a rede? Cai dentro ou fora do lado adversário da quadra?

Para concluir se a bola ultrapassa a rede, deve ser calculado $f(9)$, pois a rede está a $9m$ do jogador que sacou a bola e este deve ser considerado na origem dos eixos. No *wxMaxima*, clique em *simplificar→ substituir*. Seguindo os passos das Figuras 33, 34 e 35.

Na Figura 36 tem-se a altura da bola na rede, que é $f(9) = \dfrac{40}{7} \approx 5,7143 \approx 5,71m$. Como a bola está mais alta do que a rede, cuja altura varia entre $2,24m$ e $2,42m$, segue que consegue ultrapassá-la.

Agora precisa-se responder se a bola cai dentro ou fora do lado adversário da quadra, para isso determine as raízes da equação, seguindo os passos das Figuras 37, 38 e 39.

Na Figura 40 têm-se as raízes da equação. Observe que uma raiz é $x = -1$ e a outra é $x = 13$, segue que a bola cai a $13m$ da origem, ou seja, na quadra adversária já que cada metade da quadra tem $9m$ de comprimento.

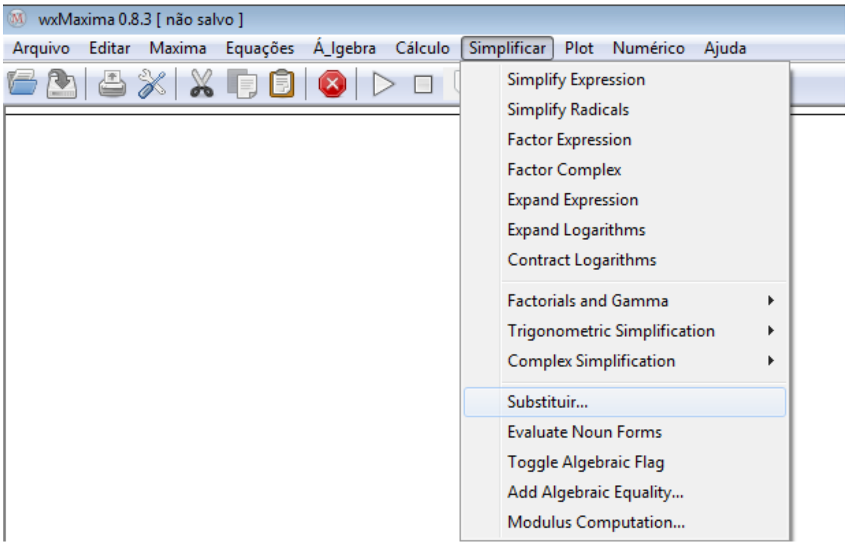


Figura 33 – Menu *Simplificar*→ *substituir*

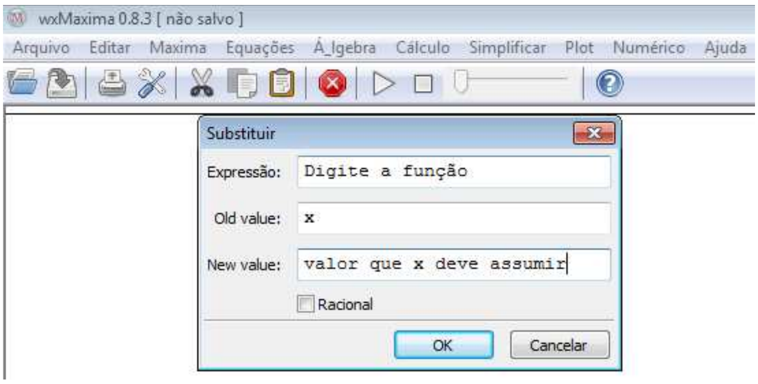


Figura 34 – Digite a equação e o novo valor para x

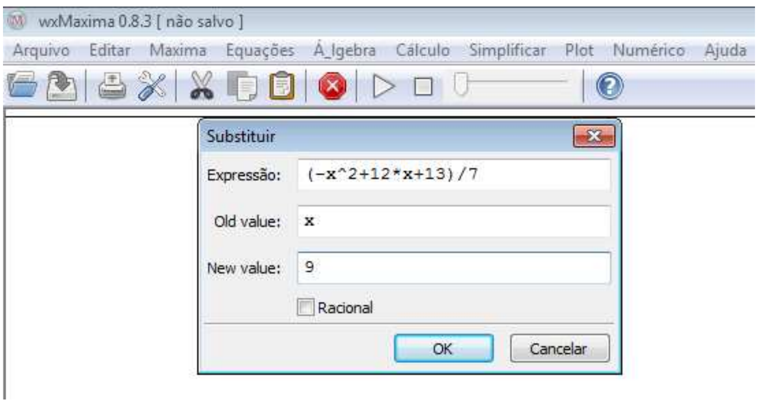


Figura 35 – Equação e novo valor digitados

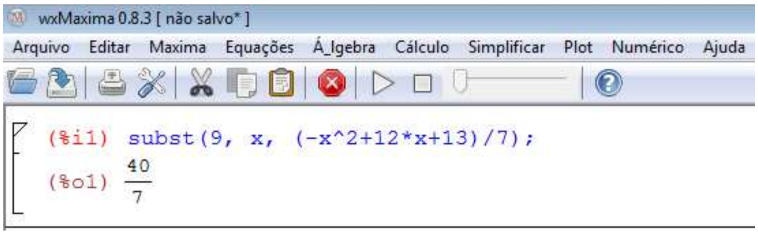


Figura 36 – Valor de $f(9)$

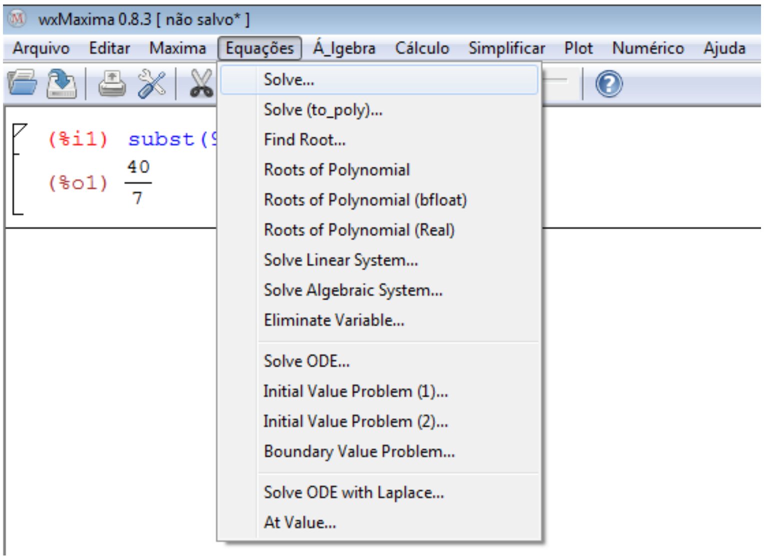


Figura 37 – Menu *equações* → *resolver*

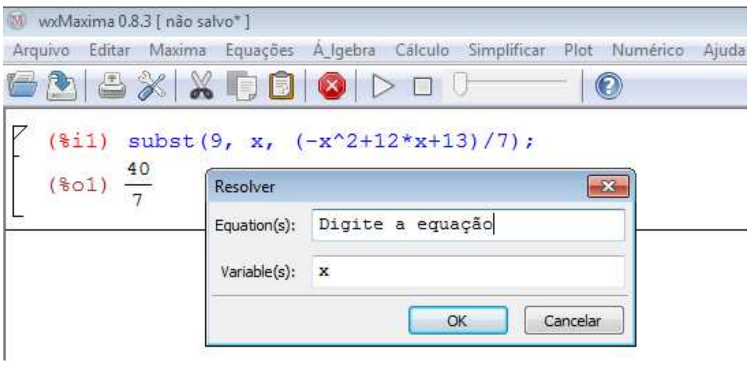


Figura 38 – Digite a equação a ser resolvida

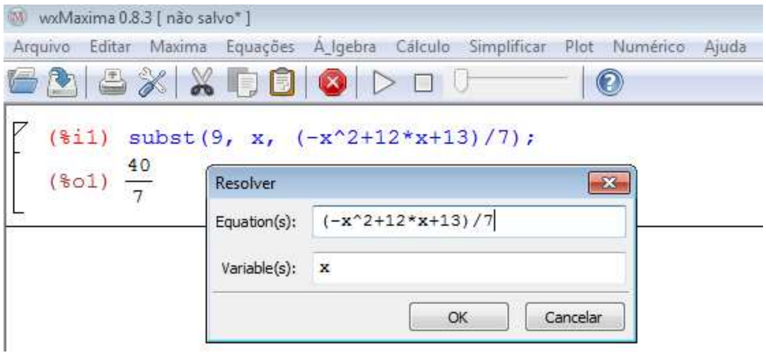


Figura 39 – Equação digitada

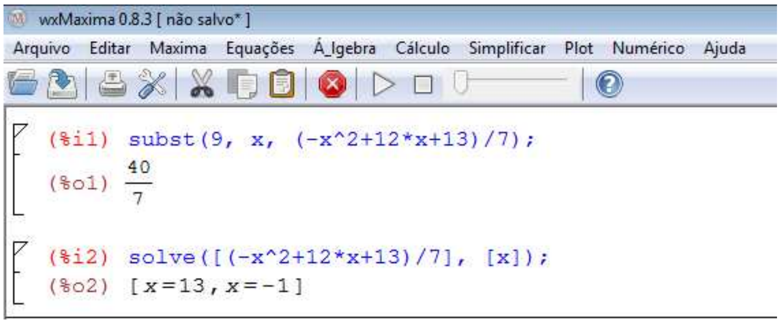


Figura 40 – Raízes da equação

b) Considerando o jogador que dará o saque na origem dos eixos, a que distância dele a bola toca o chão?

Para determinar a que distância do jogador a bola toca o chão, basta considerar a raiz positiva da equação, observe na Figura 40 que a raiz positiva é $x = 13$, isto é, a bola toca o chão à $13m$ do jogador que a sacou.

c) Utilizando o *software*, determine qual é a altura máxima atingida pela bola?

Para determinar a altura máxima atingida pela bola, proceda como nas Figuras 33, 34 e 35. Lembre-se que pela simetria da parábola o x_v está equidistante de -1 e de 13, logo $x_v = 6$. Na Figura 41 está o valor da altura máxima atingida pela bola, isto é, $f(6) = 7m$.

d) Faça o gráfico de $f(x)$. O que acontece com o gráfico caso não se considere o denominador 7, que diferenças gráficas podem ser notadas?

Para resolver esse item deve-se clicar em *plot→2D* conforme Figuras 42, 43. Observe na Figura 44, o gráfico de $f(x)$.

Para fazer uma comparação gráfica, considere duas funções $f(x)$ e $g(x)$ e faça os dois gráficos em uma só janela, digitando as leis das funções conforme Figura 45.

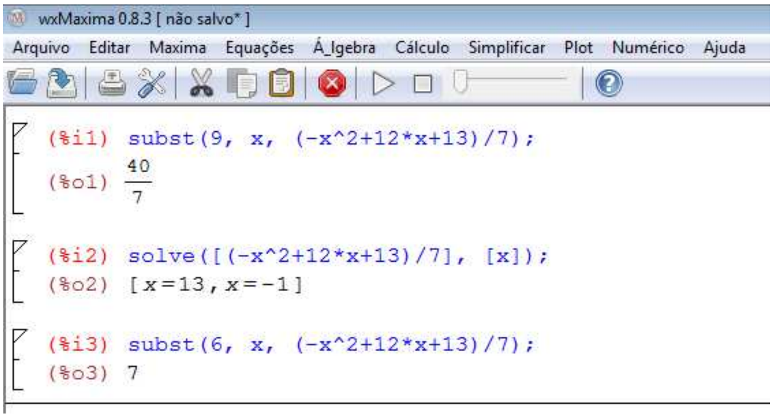


Figura 41 – Valor da altura máxima atingida pela bola

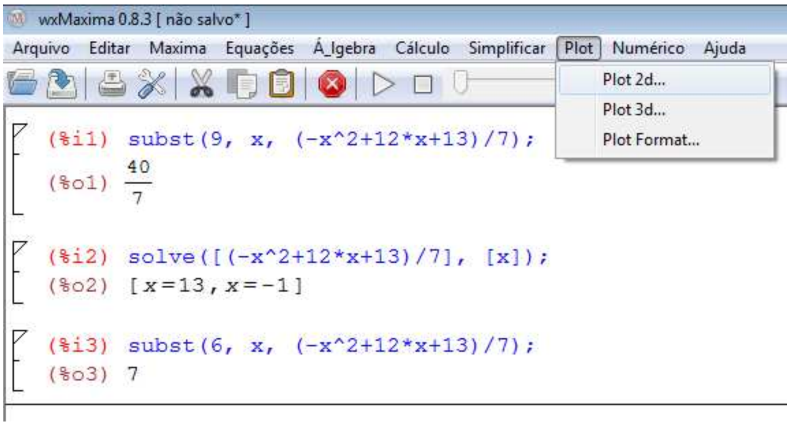


Figura 42 – Menu *plot* →2D

Figura 43 – Digite a lei da função

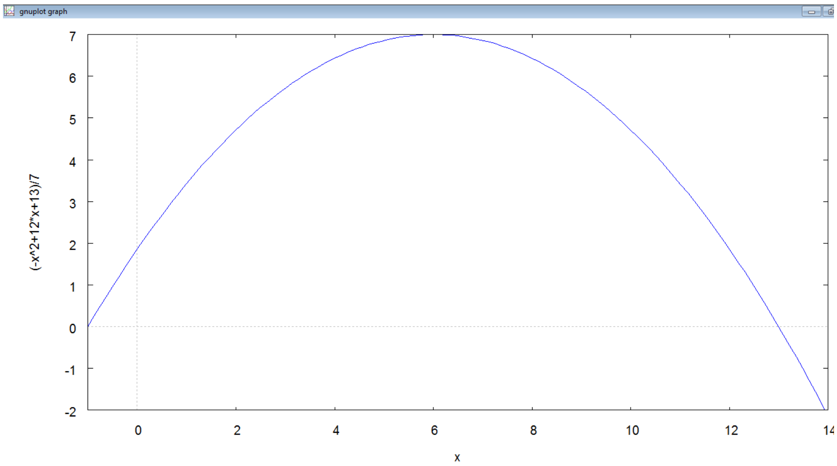


Figura 44 – Gráfico de $f(x)$

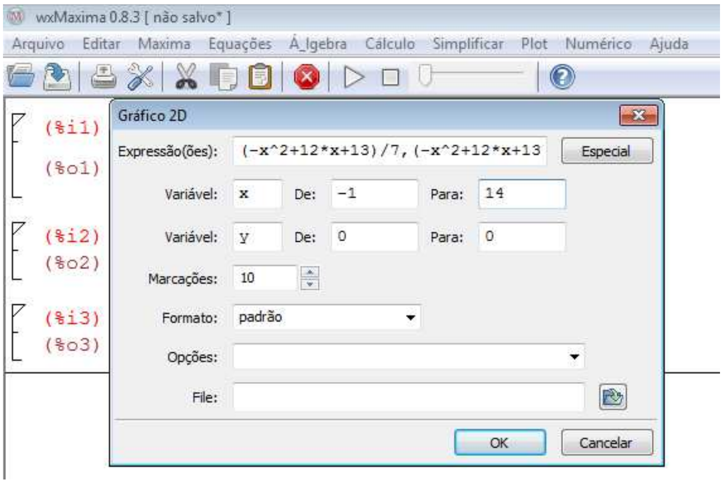


Figura 45 – Leis das funções digitadas e intervalo fixado

Na Figura 46, tem-se o gráfico de $f(x) = \dfrac{-x^2+12x+13}{7}$ e $g(x) = -x^2+12x+13$, observe que mesmo as funções tendo as mesmas raízes, existe diferença gráfica, pois para todo $x \in D(f), g(x) = 7f(x)$, daí a importância de não eliminar o denominador de $f(x)$.

Na próxima seção serão apresentados alguns problemas envolvendo conhecimentos gerais como custo, valor unitário, percentual sobre vendas (comissão), entre outros.

5.2 Problemas envolvendo finanças

Nesta seção serão apresentados problemas envolvendo conhecimentos diversos como porcentagens, cálculo do salário com base num valor fixo acrescido de percentual de ven-

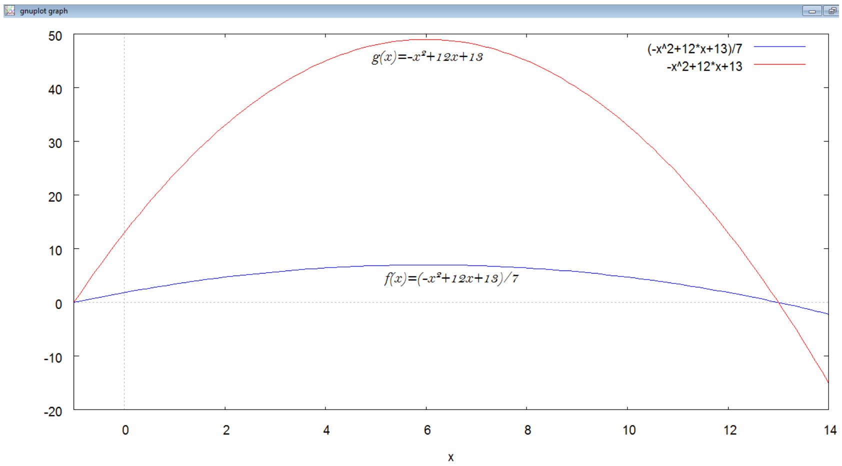


Figura 46 – Gráficos de $f(x)$ e $g(x)$

das, por exemplo. Serão trabalhados pontos de máximo e mínimo e a escrita da lei da função com base em dados fornecidos pelo problema.

Atividade 3. Problemas envolvendo finanças

Nessa atividade serão apresentados dois exercícios, cada um com a necessidade de uma hora aula para sua resolução. Cabe, então, ao professor escolher a resolução de um ou dos dois exercícios. Assim como na atividade anterior, antes de cada exercício serão descritos os pré-requisitos, material e tempo necessários. Antes da resolução são apresentadas dicas para o professor.

Pré-requisitos: resolução de sistemas lineares (com três incógnitas) e funções quadráticas.
Material necessário: equipamento que tenha instalado o *software* *wxMaxima* ou similar, além do material escolar usual.
Tempo necessário: uma hora aula.

Exercício 5.2.1. Uma turma de 9º ano quer produzir uma camiseta de formatura. A gráfica fez uma promoção, se forem confeccionadas 15 camisetas, cada uma custará R$35, 00, para 17 camisetas o custo será de R$32, 00 por unidade e se forem 19, o custo unitário cai para R$29, 50. Nessas condições, responda:

a) Se possível, construa no *software wxMaxima*, o gráfico da função quadrática que relaciona número de camisetas com o custo unitário.

b) Quantas camisetas devem ser encomendadas para que o custo unitário seja mínimo?

c) Se forem encomendadas 23 camisetas, qual será o custo unitário para o cliente?

d) O que deve acontecer com o valor unitário a partir da vigésima nona camiseta? Se esta função estivesse definida no conjunto dos números reais, como seria seu gráfico?

Resolução:

Dicas para o professor

- ☞ Lembre aos alunos que o gráfico destas funções não é uma parábola, apenas os pontos pertencentes a uma parábola;
- ☞ Para resolução dos exercícios, primeiro deve ser encontrada a lei que define a função;
- ☞ Deixe que os alunos discutam a respeito do gráfico da função, estimule-os a pensar sobre a possibilidade de, a partir de certo ponto, não ser vantajoso à gráfica confeccionar as camisetas.

a) Se possível, construa no *software wxMaxima*, o gráfico da função quadrática que relaciona número de camisetas com o custo unitário.

Primeiramente deve-se determinar os valores de a, b e c para assim poder escrever a lei da função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para melhor visualização dos alunos pode-se fazer uma tabela de valores, relacionando cada abscissa a sua respectiva ordenada. Então, conforme Tabela 4 pode-se substituir x e $f(x)$ formando o sistema que deve ser resolvido com a finalidade de encontrar os valores de a, b e c. Para isso siga os mesmos passos das Figuras 47 e 48, posteriormente digite as equações obtidas a partir dos dados do problema, de acordo com a Figura 49.

Tabela 4 – Valor unitário da camiseta em função da quantidade de camisetas encomendadas 5.2.1

Número de camisetas encomendadas	Valor unitário em R$
15	35
17	32
19	$29,50$

De acordo com os dados fornecidos pelo problema, o sistema a ser resolvido é

$$225a + 15b + c = 35$$

$$289a + 17b + c = 32$$

$$361a + 19b + c = 29,5.$$

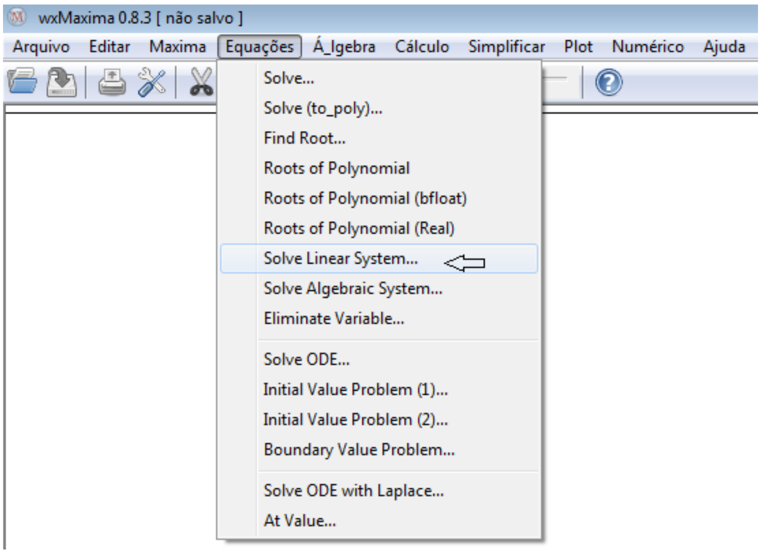


Figura 47 – Menu *equações→ resolver sistema linear*

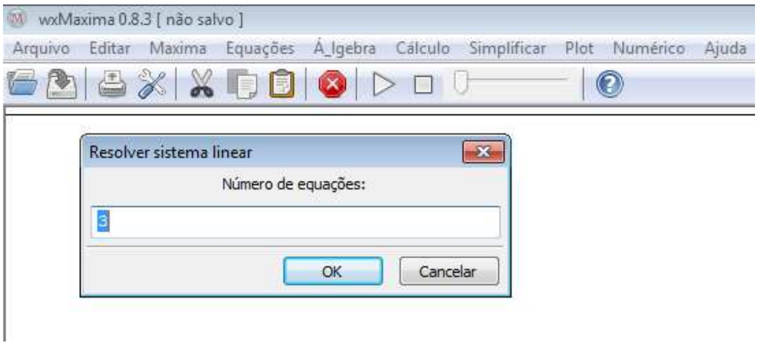


Figura 48 – Número de equações do sistema

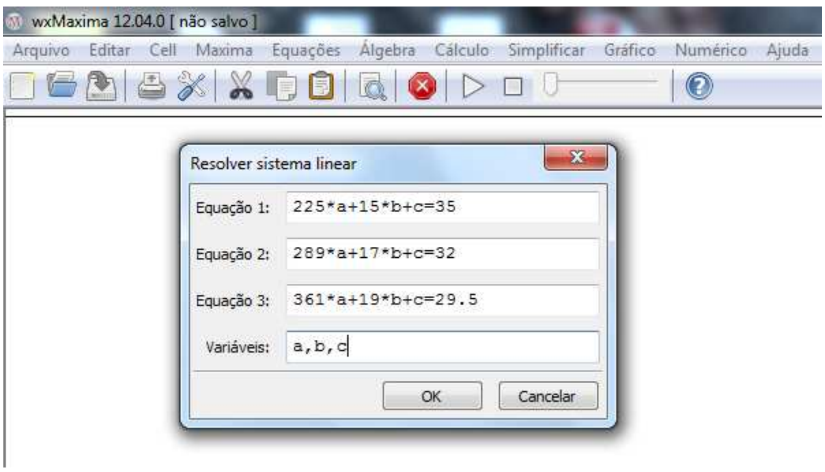


Figura 49 – Digitação do sistema obtido a partir dos dados do problema

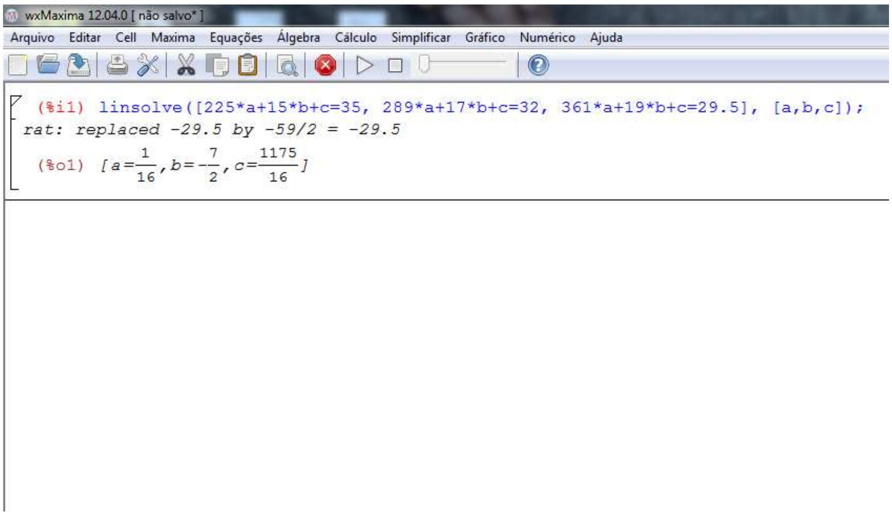


Figura 50 – Resultado do sistema

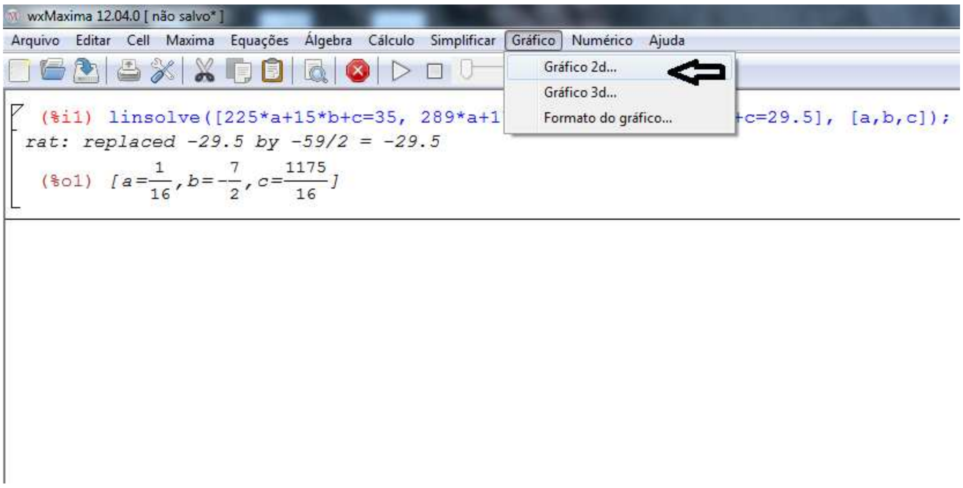


Figura 51 – Janela que deve ser acessada para fazer o gráfico

A Figura 50 mostra o resultado do sistema, $a = \dfrac{1}{16}$, $b = -\dfrac{7}{2}$ e $c = \dfrac{1.175}{16}$. Assim $f(x) = \dfrac{1}{16}x^2 - \dfrac{7}{2}x + \dfrac{1.175}{16}$.

Para fazer o gráfico devem ser seguidos os passos das Figuras 51, 52, na Figura 52 limite o domínio ao intervalo $[0, 40]$. Na Figura 53 encontra-se o gráfico solicitado.

b) Quantas camisetas devem ser encomendadas para que o custo unitário seja mínimo?

Para saber quantas camisetas devem ser encomendadas para que o custo unitário seja mínimo, deve-se encontrar a abscissa do vértice (ponto de mínimo, já que a parábola obtida no item anterior é voltada para cima). Seguindo as orientações das Figuras 54 , 55 o ponto de mínimo da parábola será encontrado. Na Figura 56, está a resposta para o item *b*.

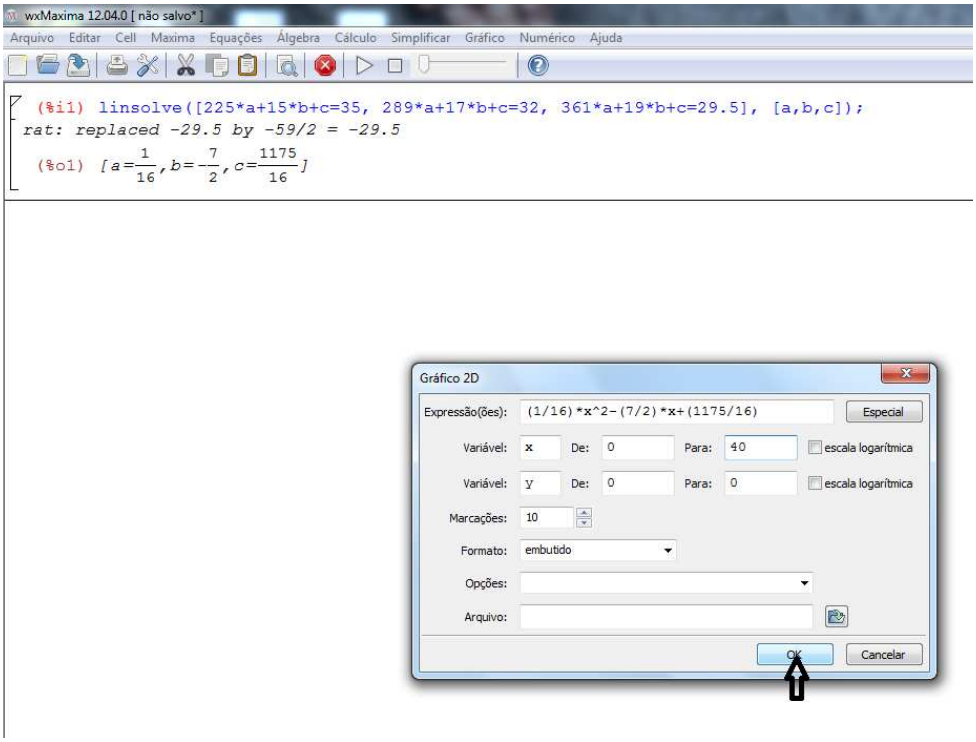


Figura 52 – Digite a lei da função e limite o seu domínio

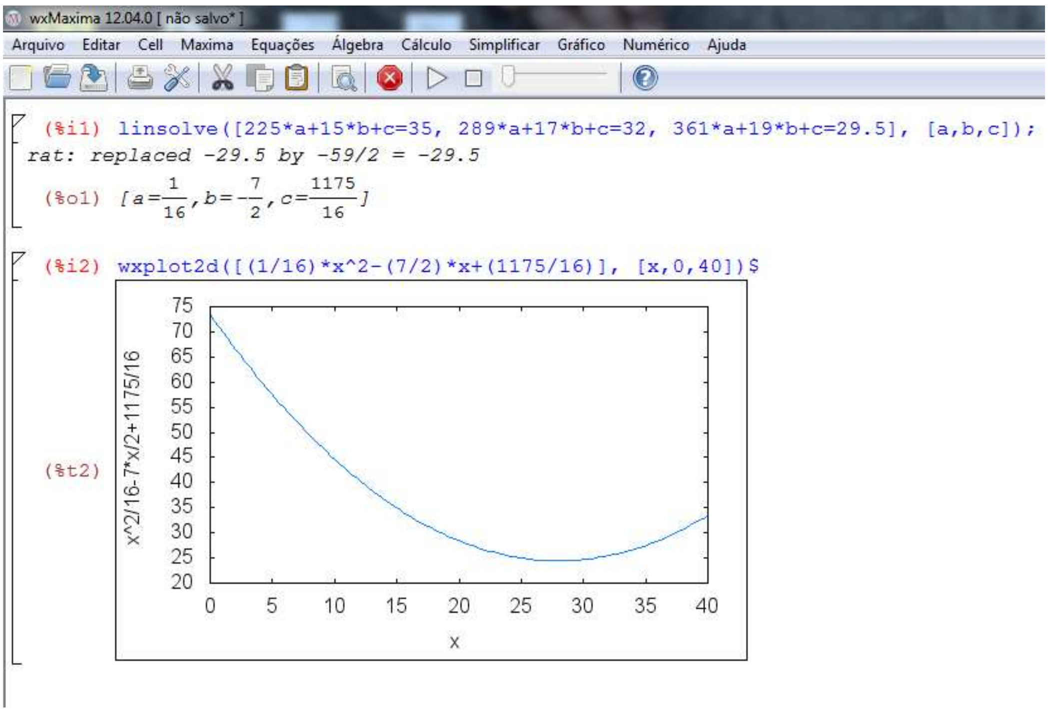


Figura 53 – Gráfico obtido

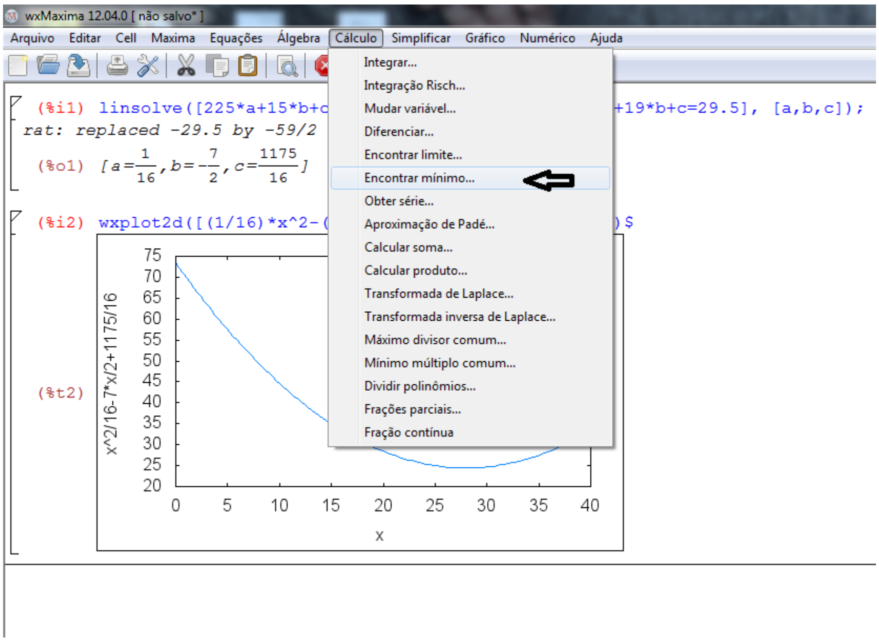


Figura 54 – Encontrar ponto de mínimo

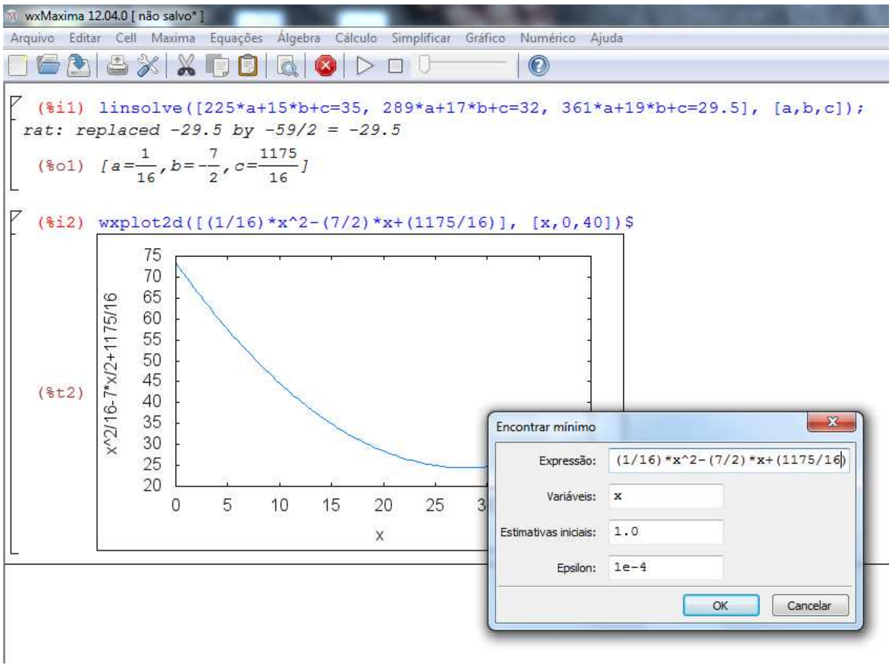


Figura 55 – Janela para digitar a expressão

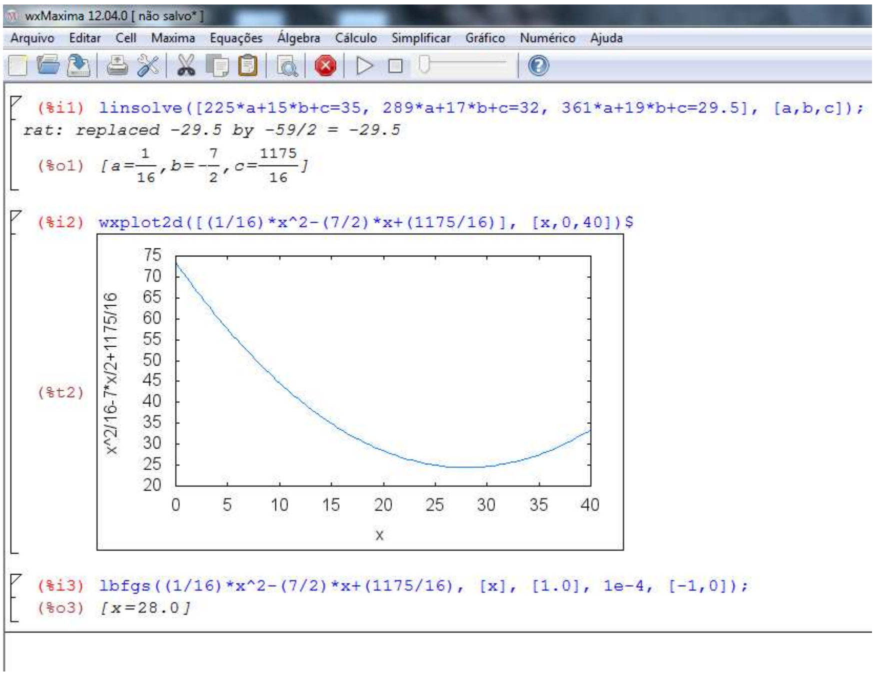


Figura 56 – Resposta do item *b*

Logo o preço de cada camiseta é mínimo quando são encomendadas 28 camisetas. Poderia ser pedido para calcular de quanto seria esse custo para isso basta proceder da mesma forma que a resolução do item a seguir.

c) Se forem encomendadas 23 camisetas, qual será o custo unitário para o cliente?

Nesse caso deve-se calcular o valor da função quando $x = 23$, para isso siga os passos das Figuras 33, 34 e 35 digitando os dados deste problema.

A resposta encontrada é $\dfrac{391}{16}$ e efetuando a divisão chega-se em $24,4375$. Ou seja, quando são encomendadas 23 camisetas o custo unitário é de R$$24,44$ aproximadamente.

d) O que deve acontecer com o valor unitário a partir da vigésima nona camiseta? Considere essa função definida no conjunto dos números reais e esboce seu gráfico.

Para resolver o item de basta estimular os alunos a pensarem sobre o que acontece com o gráfico da função após o ponto de mínimo, eles devem se dar conta de que a partir da 29ª camiseta o custo é constante, pois não faria sentido algum o custo unitário voltar a subir para um número maior de encomendas.

Observe o gráfico na Figura 57.

Com a resolução deste item encerra-se o exercício.

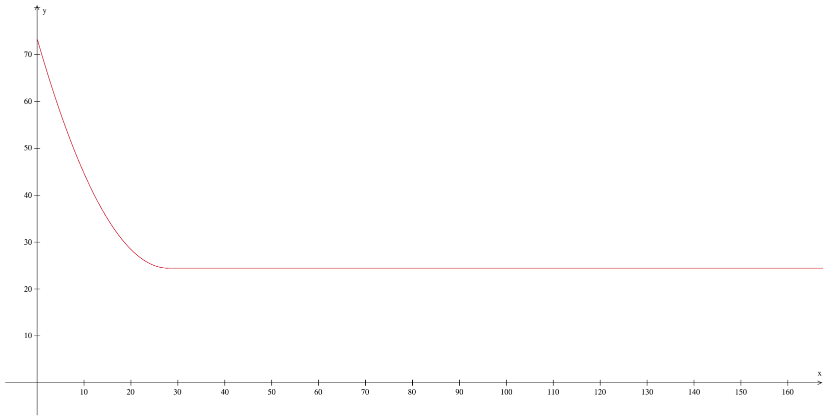


Figura 57 – Representação gráfica do problema no *Winplot*

O próximo exercício refere-se a percentual de comissão sobre vendas e cálculo de salário acrescido de comissão. A fim de realizar todos esses cálculos serão utilizados conhecimentos sobre funções quadráticas, além de noções de porcentagem. A seguir serão fornecidos os pré-requisitos, material e tempo necessários para a resolução de problema.

Pré-requisitos: resolução de Sistemas Lineares (com três incógnitas), Funções Quadráticas, noção de comissão, percentual sobre vendas;
Material necessário: equipamento que tenha instalado o *software* *wxMaxima* ou similar, além do material escolar usual;
Tempo necessário: uma hora aula.

Exercício 5.2.2. Uma vendedora que trabalha na loja de preço único "Tudo por R$39, 90", recebe seu salário mais comissão por vendas. A comissão, em percentual sobre o valor das vendas, varia de acordo com o número de produtos vendidos, conforme Tabela 5.

Tabela 5 – Percentual em função do número de peças vendidas 5.2.2

Número de peças vendidas	Percentual sobre as vendas
1	2
6	10
11	16
16	20

a) Qual será o rendimento mensal se a vendedora tiver um salário fixo de R$1.150, 00 e tiver vendido 15 produtos nesse mês?

b) Qual será o percentual máximo de comissão que a vendedora poderá receber? Segundo a política da loja, a vendedora deveria se esforçar para vender 30 produtos num mês? Por quê?

c) Utilize o *software wxMaxima* para esboçar o gráfico que representa essa situação e conclua o que acontece com esse gráfico após um certo número de vendas.

Resolução:

Dicas para o professor

Lembre os alunos que:

- ☞ o gráfico desta função não é uma parábola, são pontos pertencentes a uma;
- ☞ após um certo número de vendas, a vendedora não aumentará seu percentual de comissão, mas sua comissão não diminuirá;
- ☞ os valores das abscissas são sempre números inteiros, pois se trata do número de peças vendidas. Porém as ordenadas não obrigatoriamente;
- ☞ caso resolvam trabalhar com frações, devem colocá-las dentro de parênteses e em caso de números decimais, substituir a vírgula pelo ponto.

a) Qual será o rendimento mensal se a vendedora tiver um salário fixo de R$$1.150,00$ e tiver vendido 15 produtos nesse mês?

Observe que a progressão aritmética da primeira coluna da Tabela 5, através da lei da função, é transformada numa progressão aritmética de segunda ordem, fato que caracteriza uma função quadrática. Assim o primeiro passo que deve ser seguido, é encontrar os valores de a, b e c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Assim, para chegar à resposta deste item deve-se fazer $s(x) = 1.150 + 39,90 \times x \times \dfrac{f(x)}{100}$, onde $f(x)$ é o percentual de comissão recebido pela vende. Utilizando o *software wxMaxima* deve-se resolver o sistema de equações formado a partir da substituição dos valores da primeira coluna da Tabela 5, 1, 6 e 11 e os valores da segunda coluna 2, 10 e 16 em $f(x) = ax^2 + bx + c$ forma-se o seguinte sistema a ser resolvido:

$$a + b + c = 2$$

$$36a + 6b + c = 10$$

$$121a + 11b + c = 16.$$

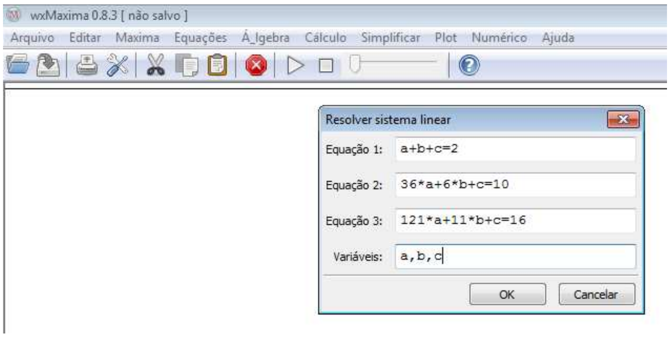


Figura 58 – Sistema a ser resolvido

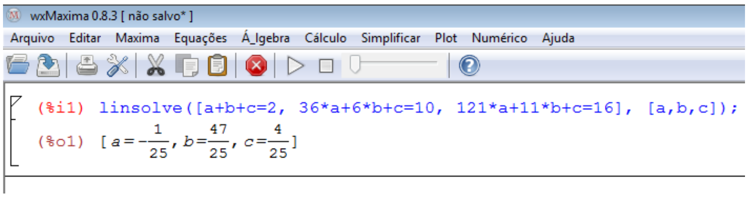


Figura 59 – Resultado do sistema

Siga os passos das Figuras 47 e 48. Em seguida, proceda como na Figura 58, digitando os dados do sistema. Na Figura 59 está a solução do sistema. Resolvendo o sistema encontra-se:
$a = -\dfrac{1}{25} = -\dfrac{4}{100} = -0,04$, $b = \dfrac{47}{25} = \dfrac{188}{100} = 1,88$ e $c = \dfrac{4}{25} = \dfrac{16}{100} = 0,16$.
Logo, como o sistema possui solução única, a lei da função procurada é:

$$f(x) = -\frac{2}{50}x^2 + \frac{94}{50}x + \frac{8}{50} = -0,04x^2 + 1,88x + 0,16.$$

Utilizando a lei de função obtida deve-se calcular $f(15)$, de acordo com os dados do problema. Para isso, clique em *Simplificar* $\rightarrow$ *substituir* e digite a expressão encontrada, conforme Figura 60. Na Figura 61, tem-se o resultado de $f(15) = 19,36\%$.

Precisa-se determinar o valor da comissão da vendedora que é o produto do preço do produto, pelo número de peças vendidas e pelo valor percentual, isto é, $39,90 \times 15 \times f(15)$ e fazer a soma da resposta com R\$1.150,00 para concluir o item. A resposta encontrada é: $s(15) = 1.150,00 + 115,87 = 1.265,87$, que é o rendimento mensal da vendedora quando esta vende 15 itens.

b) Qual será o percentual máximo de comissão que a vendedora poderá receber? Segundo a política da loja, a vendedora deveria se esforçar para vender 30 produtos num mês? Por quê?

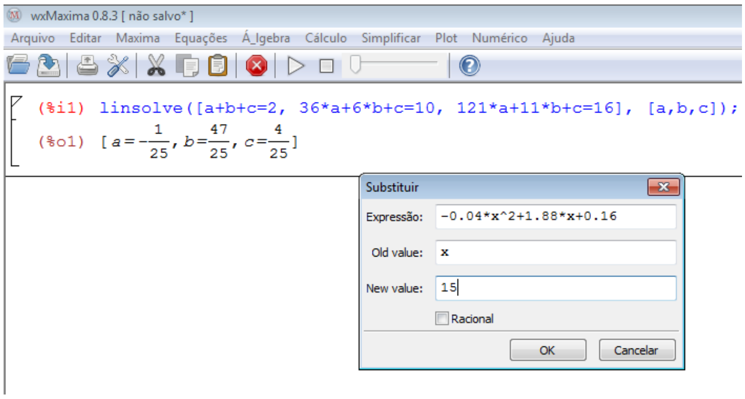


Figura 60 – Equação digitada

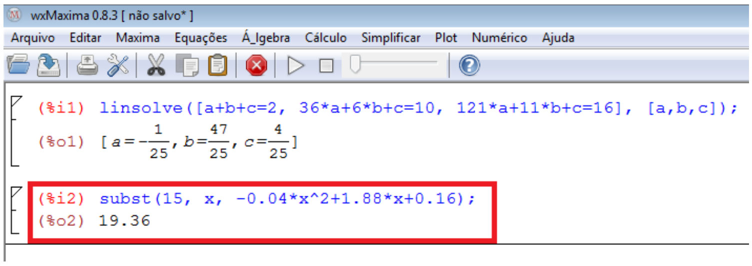


Figura 61 – Valor de $f(15)$

Para calcular o percentual máximo de comissão pode-se determinar a ordenada do vértice ou calcular as raízes da equação da mesma forma que nas Figuras 37 e 38 substituindo nesta última, a equação por $-0,04x^2 + 1,88x + 0,16$. Nas Figuras 62 e 63 tem-se os cálculos das raízes da equação. Após calcular as raízes, fazendo seu ponto médio tem-se o x_v. Devido ao fato de as raízes serem não exatas, é mais fácil calcular x_v, abscissa do vértice, através da fórmula $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{\frac{-47}{25}}{\frac{-2}{25}} = \dfrac{47}{2} = 23,5$. Como os pontos pertencentes a essa parábola que satisfazem o problema são inteiros, segue que o percentual máximo de comissão ocorre quando são vendidas 23 ou 24 peças.

Em seguida siga os passos das Figuras 33 e 34 para calcular os valores da função nas abscissas 23 e 24, nas Figuras 64 e 65 tem-se o cálculo de $f(x)$ para $x = 23$ e $x = 24$, mostrando que $f(23) = f(24)$, considerando que $22,239999999 = 22,24$.

Quanto à segunda pergunta, estimule os alunos a pensarem sobre a questão e leve-os a concluir que a partir de certo ponto, a função torna-se constante, ou seja, a vendedora receberá o mesmo percentual sobre as vendas, porém, mesmo com o percentual constante, quanto mais ela vender, maior será sua comissão. Logo, vale a pena ela se esforçar para vender um maior número de peças.

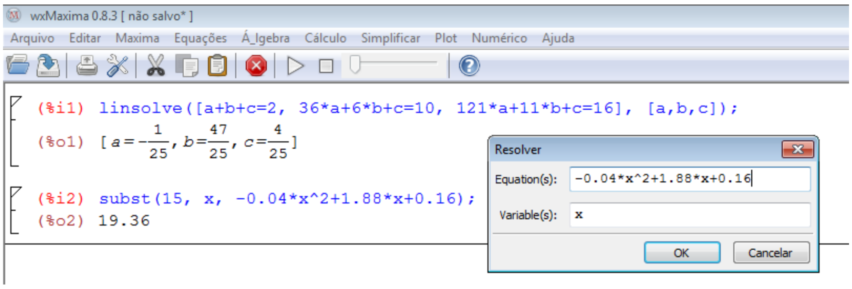


Figura 62 – Equação digitada

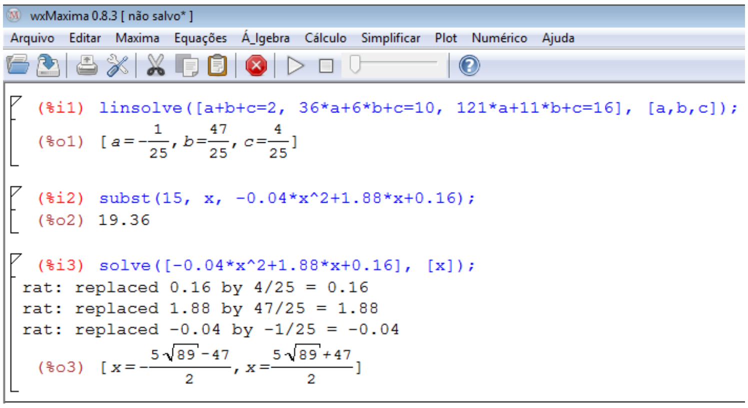


Figura 63 – Raízes da equação

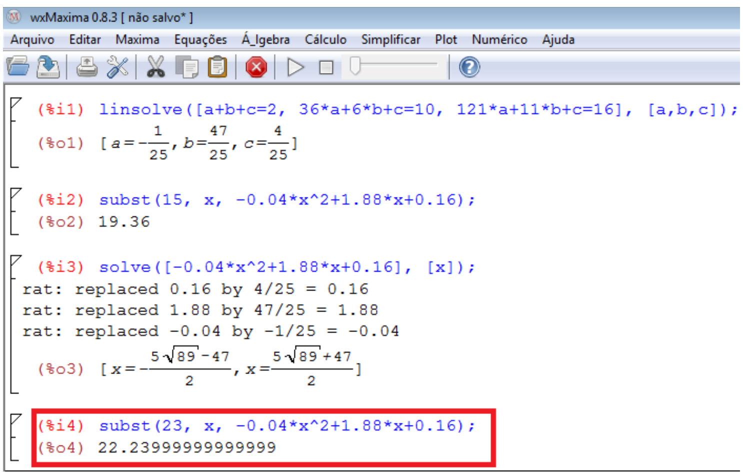


Figura 64 – Cálculo de $f(23)$

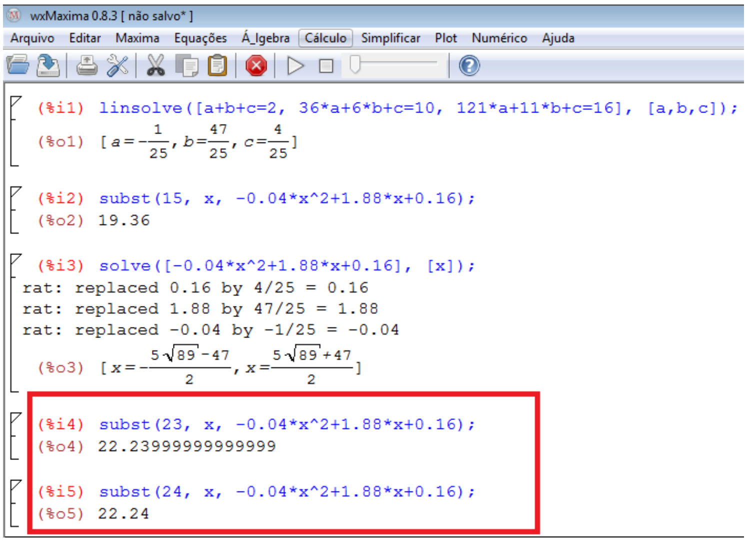


Figura 65 – Igualdade entre $f(23)$ e $f(24)$

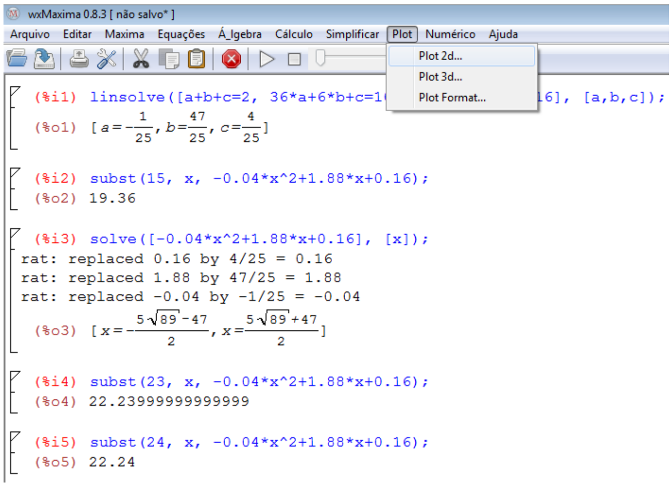


Figura 66 – *Plot* → *2D*

c) Utilize o *software wxMaxima* para esboçar o gráfico que representa essa situação e conclua o que acontece com esse gráfico após um certo número de vendas.

Para fazer o gráfico que representa a situação deve-se clicar em *Gráfico* → *2d* e digitar a lei da função, conforme Figuras 66 e 67. Na Figura 68, encontra-se o gráfico solicitado.

Com a resolução do item *c* encerra-se este exercício. O próximo trata da produção semanal de uma fábrica de celulares. A seguir os pré-requisitos, o material e o tempo necessários para a sua resolução.

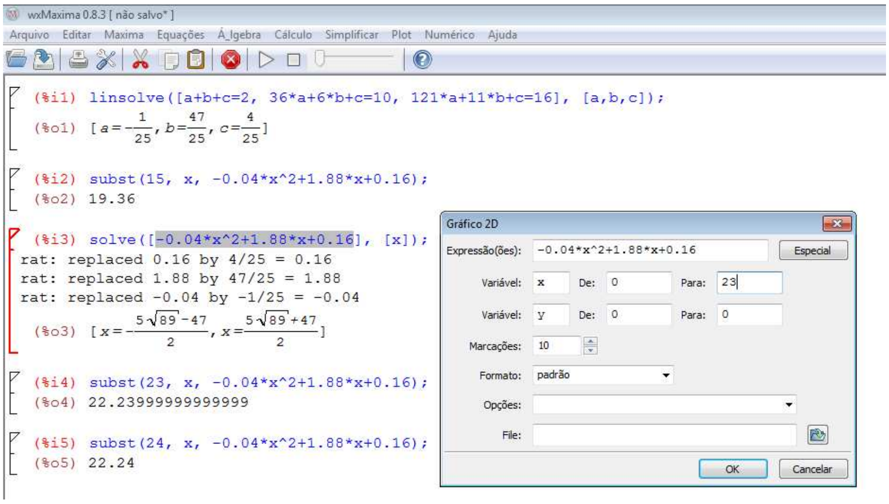


Figura 67 – Lei da função digitada

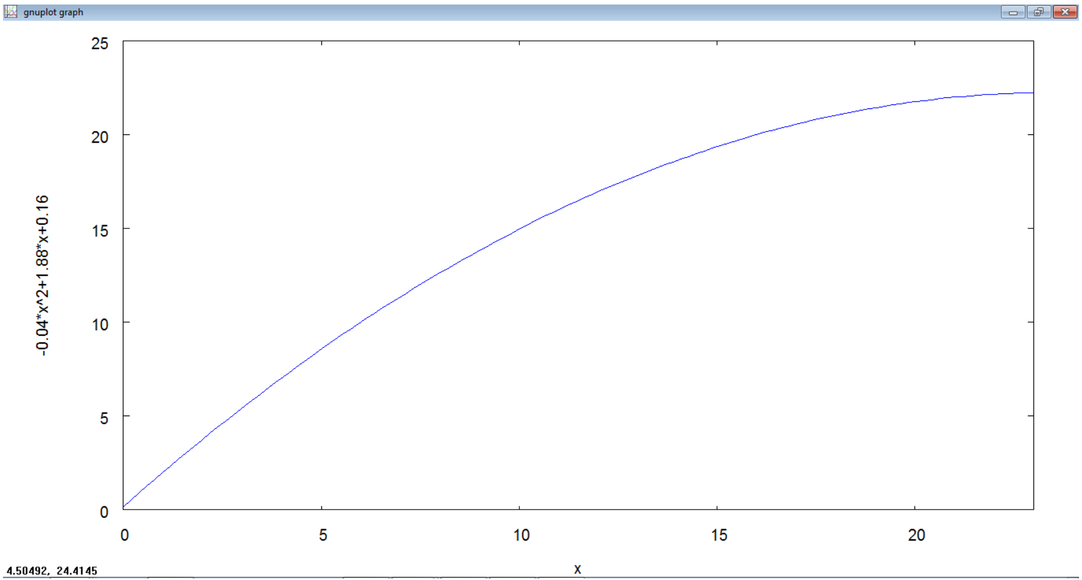


Figura 68 – Gráfico solicitado

Pré-requisitos: funções quadráticas, noções de percentual e cálculo de receita e lucro; **Material necessário:** equipamento que tenha instalado o *software* *wxMaxima* ou similar, além do material escolar usual; **Tempo necessário:** Uma hora aula.

Exercício 5.2.3. A produção semanal de uma empresa de celulares é descrita pela função $f(x) = -10x^2 + 300x + 18.000$, onde x é o número de funcionários envolvidos no setor de produção. Responda:

a) Qual deve ser o número de funcionários que precisam estar envolvidos na produção semanal para que ela seja máxima?

b) Qual é a produção semanal máxima?

c) Quantos aparelhos serão produzidos se houver dez funcionários no setor?

d) Considere que o domínio da função seja o conjunto $\mathbb{R}$ e esboce, utilizando o *software*, o gráfico que representa a produção semanal de celulares.

e) Esboce, utilizando o *software*, o gráfico que representa a produção semanal de celulares.

f) Quando a empresa atinge a produção semanal máxima, reduz o preço dos celulares em 20% para a venda. Se cada aparelho custa R\$250,00, qual será a receita da empresa quando vende a produção máxima?

g) Sabendo que o custo de produção de cada celular é de R\$98,75, calcule o lucro semanal da empresa quando vende a produção máxima.

Resolução:

Dicas para o professor

☞ Revise as noções de porcentagem;

☞ Lembre aos alunos de que o domínio e imagem da função são os números naturais, já que trata-se de número de pessoas e de aparelhos produzidos, respectivamente;

☞ O gráfico não é uma parábola, mas sim pontos pertencentes a uma.

a) Qual deve ser o número de funcionários que precisam estar envolvidos na produção semanal para que ela seja máxima?

Observe que deve ser calculado o x_v, para isso pode-se utilizar a fórmula $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ ou encontrar as raízes e por simetria encontrar o vértice da parábola. Como o trabalho é sobre a utilização de *softwares*, o mais adequado é utilizá-lo. Assim, encontre as raízes de $f(x)$, conforme Figuras 69 e 70 digitando a lei da função f. Na Figura 71 tem-se o valor das raízes.

Veja que as raízes são $x = -30$ e $x = 60$, assim como o vértice encontra-se no eixo de simetria tem-se $x_v = 15$. Logo são necessários 15 funcionários para que a produção semanal seja máxima.

b) Qual é a produção semanal máxima?

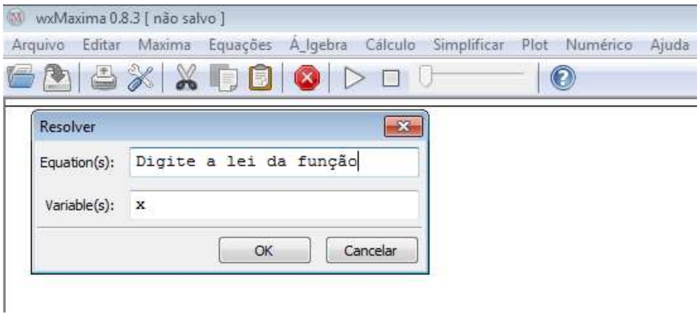


Figura 69 – Digite a lei da função

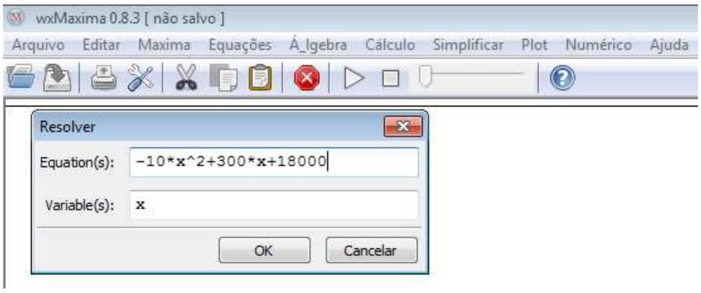


Figura 70 – Lei da função digitada

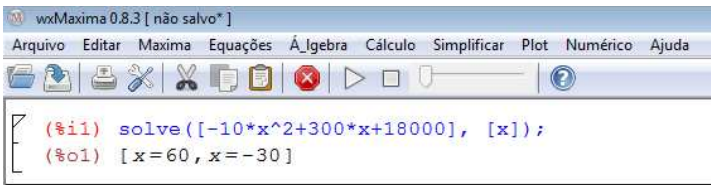


Figura 71 – Raízes da equação

Para saber qual é a produção semanal máxima deve ser calculado y_v, como se tem $x_v = 15$ seguindo os passos das Figuras 72 e 73 tem-se na Figura 74 o valor de $f(15) = y_v = 20.250$.

c) Quantos aparelhos serão produzidos se houver dez funcionários no setor? Nesse caso deve-se calcular $f(10)$ para isso clique em *simplificar* $\rightarrow$ *substituir*, e digite a equação e o novo valor para x. Na Figura 75, encontra-se o valor de $f(10) = 20.000$ que é o número de celulares produzidos quando há 10 funcionários no setor de produção.

d) Qual deve ser o número de funcionários para que a produção semanal seja de 19.890 aparelhos?

Para saber qual é o número de funcionários necessários para que sejam produzidos 19.890 aparelhos deve ser calculado $-10x^2 + 300x + 18.000 = 19.890$, que resulta em $-10x^2 + 300x - 1.890 = 0$ ao determinar as raízes dessa última equação será determinado, também, o número de funcionários. Para encontrar as raízes da equa-

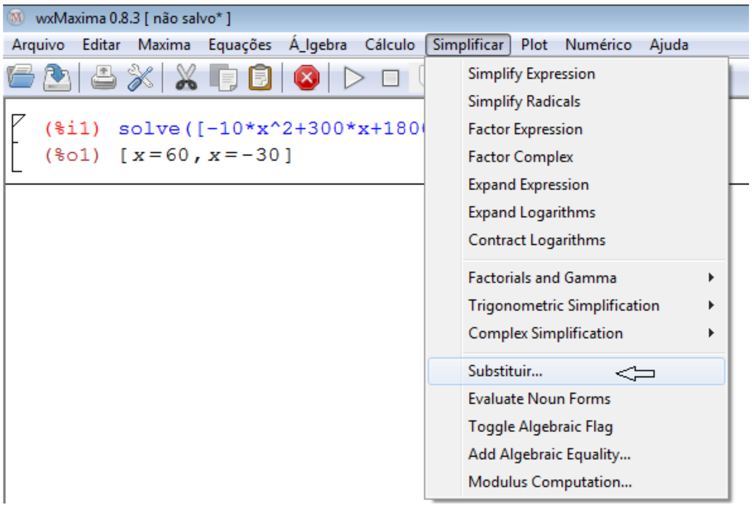


Figura 72 – Menu *simplificar* → *substituir*

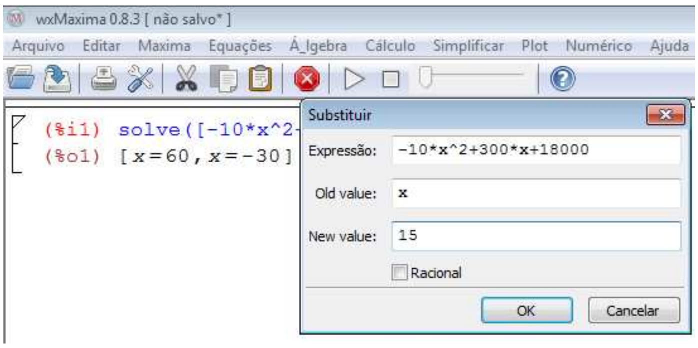


Figura 73 – Digite a lei da função e o valor que x deve assumir

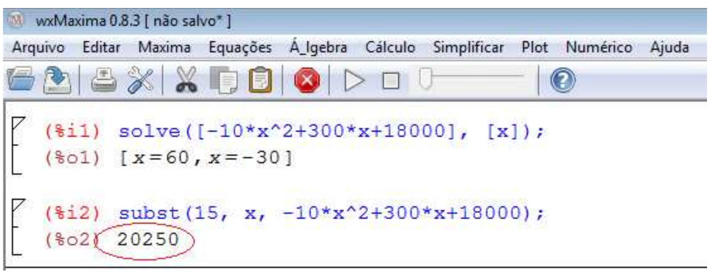


Figura 74 – Valor encontrado para y_v

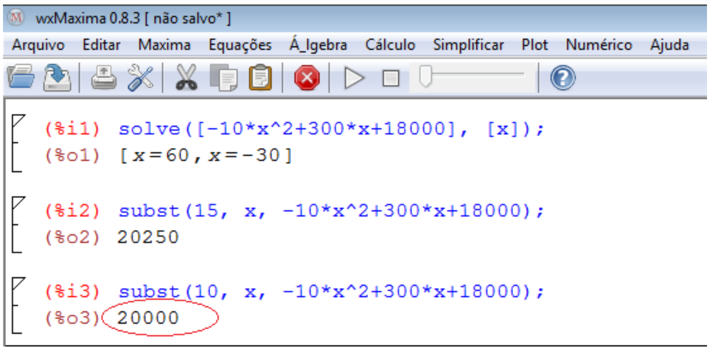


Figura 75 – Valor de $f(10)$

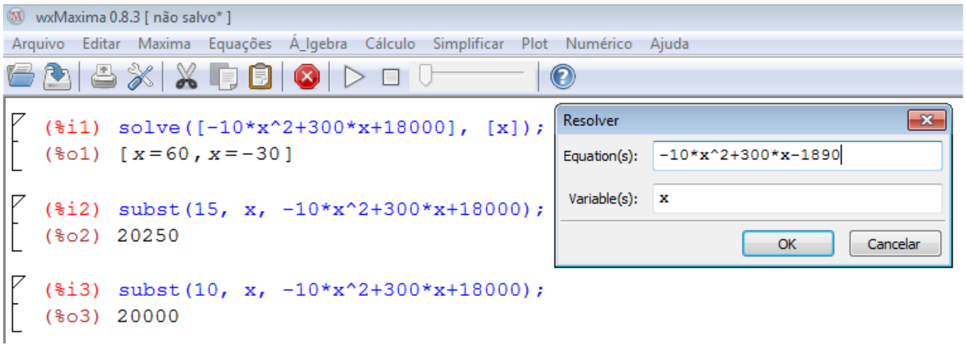


Figura 76 – Digite a equação a ser resolvida

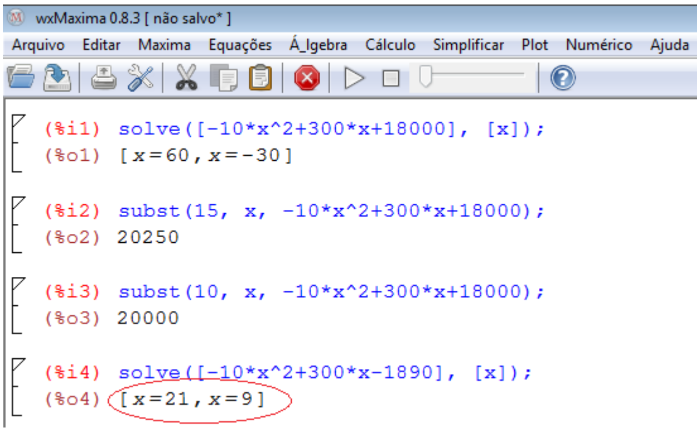


Figura 77 – Resposta do item *d*

ção clique em *equação→ resolver* e siga os passos das Figuras 69 e 70 e 76. Na Figura 77, está a resposta para a questão. Para serem produzidos 19.890 aparelhos, precisa-se de 9 ou de 21 funcionários, mas observe que o domínio da função está entre 0 e 15 que é o x_v, e não faria sentido a empresa contratar 21 funcionários para fazer o mesmo serviço realizado por 9. Logo, 9 funcionários são suficientes para que se tenha uma produção semanal de 19.890.

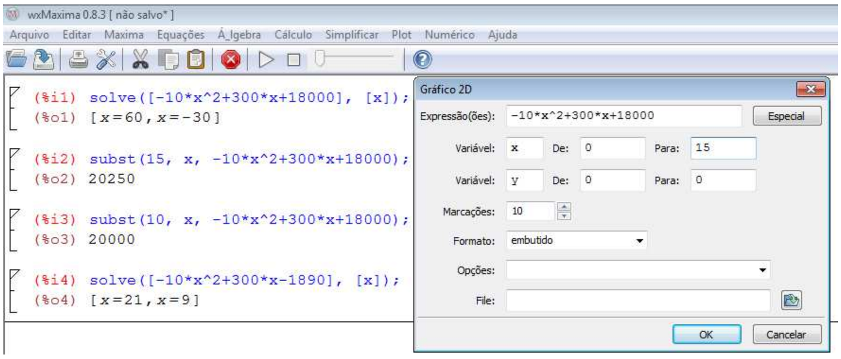


Figura 78 – Lei da função digitada e intervalo fixado

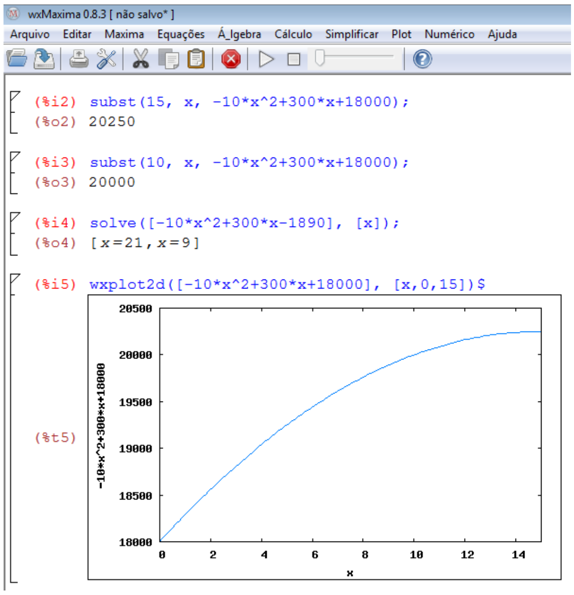


Figura 79 – Representação gráfica da função

e) Considere que o domínio da função seja o conjunto $\mathbb{R}$ e esboce, utilizando o *software*, o gráfico que representa a produção semanal de celulares.

Para esboçar o gráfico da função deve-se clicar em *Plot* $\rightarrow$ 2*D* seguindo os passos da Figura 78, já na Figura 79 tem-se o gráfico solicitado. Observe que o gráfico foi esboçado com o $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 15\}$, já que não faz sentido o domínio negativo e nem domínio maior que 15, pois ao contratar mais de quinze funcionários, a empresa aumentaria seus custos e não produziria mais celulares, o que não seria vantajoso para ela.

Como pode-se observar o domínio dessa função são os número naturais. Caso você deseje fazer o gráfico discreto, pode seguir a sequência de comandos das Figuras 80, 81 e 82. Para acrescentar um novo comando mantenha pressionada a tecla *shift* e tecle *enter*.

Na Figura 83 encontra-se o gráfico solicitado.

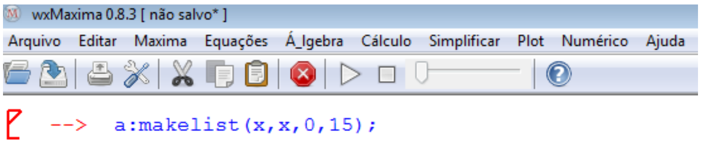


Figura 80 – Defina *a* e pressione *shift+enter*

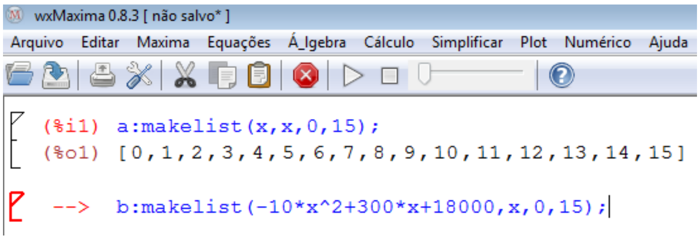


Figura 81 – Defina *b* e pressione *shift+enter*

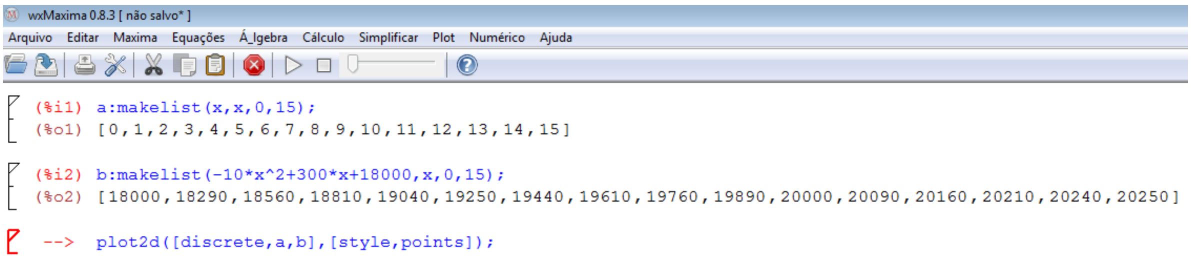


Figura 82 – Plot2d - discrete

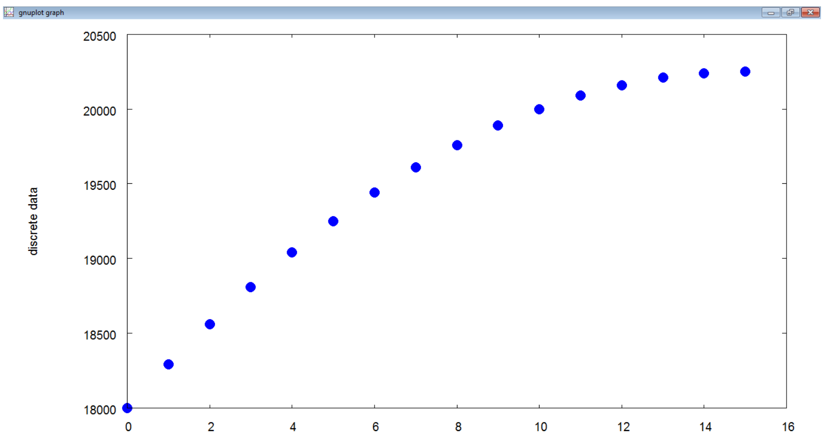


Figura 83 – Gráfico solicitado

f) Quando a empresa atinge a produção semanal máxima, reduz o preço dos celulares em 20% para a venda. Se cada aparelho custa R$250, 00, qual será a receita da empresa quando vende a produção máxima?

Sabe-se que a produção máxima ocorre quando $x = 15$, isto é, o valor da produção máxima é $f(15) = y_v$. Daí se cada aparelho custa R$250, 00 e quando a produção é máxima tem-se desconto de 20% o cálculo a ser executado é $y_v \times 250 \times 0,8 = 4.050.000$. Logo a receita quando a empresa vende a produção máxima semanal é de R$4.050.000, 00.

g) Sabendo que o custo de produção de cada celular é de R$98, 75, calcule o lucro semanal da empresa quando vende a produção máxima?

Observe que $L(x) = R(x) - C(x)$, onde $L(x)$ é o lucro semanal, $R(x) = f(x) \times 250 \times 20\%$ é a receita e $C(x) = f(x) \times 98,75$ é o custo em função do número de aparelhos produzidos. Como se deseja calcular o lucro semanal máximo, sabe-se que ele ocorrerá quando a produção for máxima, assim:

$$L(x) = f(x) \times 250 \times 20\% - f(x) \times 98,75 = f(x) \times (250 \times 20\% - 98,75) = f(x) \times 101,25.$$

Logo o lucro semanal máximo é $L(15) = f(15) \times 101,25 = 20.250 \times 101,25 = 2.050.312,5$. Assim o lucro é de R$2.050.312, 50.

Com a resolução deste item encerra-se o exercício.

A seguir apresenta-se um problema sobre o fretamento de um ônibus para uma excursão.

Pré-requisitos: funções quadráticas, pontos de máximo e mínimo; **Material necessário:** equipamento que tenha instalado o *software* *wxMaxima* ou similar, além do material escolar usual; **Tempo necessário:** Uma hora aula.

Exercício 5.2.4. Um ônibus de 42 lugares foi fretado para a excursão de uma turma de primeiro ano ao Museu Oceanográfico O custo por passageiro era de R$20, 00, com um acréscimo de R$2, 00 por lugar vago. Responda:

a) Qual é a expressão que representa o valor pago por cada passageiro?

b) Qual é a expressão que representa a rentabilidade da empresa?

c) Qual deve ser o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima? Qual é a rentabilidade máxima?

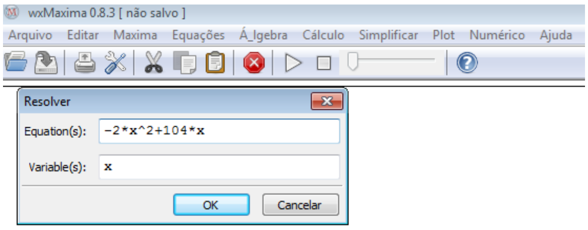


Figura 84 – Lei da função digitada

d) Quanto pagará cada passageiro quando a rentabilidade for máxima?

e) Esboce no *software wxMaxima* o gráfico da função que representa a rentabilidade da empresa. Considere que o domínio da função seja $D(r) = [0, 42]$.

Resolução:

Dicas para o professor

☞ lembre aos alunos que o domínio da função são números naturais, mas a imagem pode não ser;

☞ o gráfico não é uma parábola, mas pontos pertencentes a uma.

a) Qual é a expressão que representa o valor pago por cada passageiro?

Para escrever a expressão que representa o valor pago por cada passageiro deve-se considerar que cada um pagará R$$20,00$ acrescido de R$$2,00$ por lugar vago. Assim, sendo x o número de lugares ocupados, o valor pago por cada passageiro será $v(x) = 20 + 2(42 - x)$.

b) Qual é a expressão que representa a rentabilidade da empresa?

Considere a expressão encontrada no item anterior, como o custo para cada passageiro é representado por $v(x)$ e a rentabilidade da empresa é dada pelo produto do número de passageiros pelo valor pago por cada um. Tem-se que a receita da empresa é dada por $R(x) = x[20+2(42-x)] = x[20+84-2x] = x(104-2x) = -2x^2+104x$.

c) Qual deve ser o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima? Qual é a rentabilidade máxima?

Observe que deseja-se determinar a abscissa do vértice, para isso, você pode encontrar as raízes da equação e através de seu ponto médio determinar a abscissa desejada. Para efetuar estes cálculos, clique em *equação* $\to$ *resolver* e digite a lei da função encontrada no item anterior. Conforme Figura 84. Na Figura 85 encontram-se as raízes solicitadas.

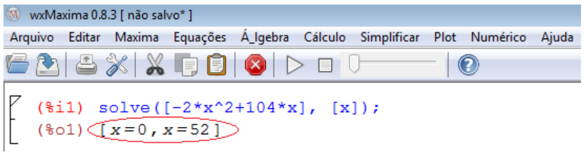


Figura 85 – Raízes determinadas

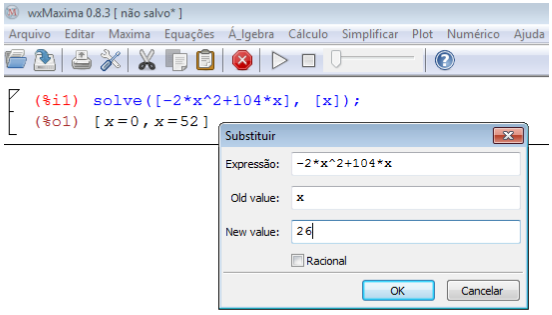


Figura 86 – Expressão digitada e novo valor para x

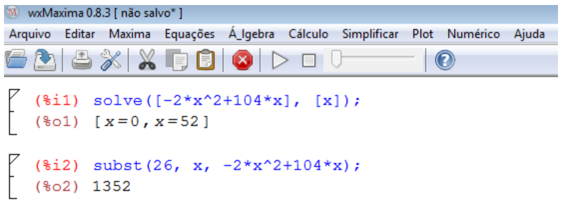


Figura 87 – Valor da rentabilidade máxima

Observe que as raízes são $x = 0$ e $x = 52$ segue que $x_v = 26$, ou seja, a rentabilidade é máxima quando 26 alunos participam do passeio. E a rentabilidade máxima ocorre em $R(26)$, para calcular a rentabilidade máxima clique em *simplificar* → *substituir* e digite a expressão e o novo valor para x. Conforme Figura 86, na Figura 87 encontra-se o resultado para a rentabilidade máxima da empresa. A rentabilidade máxima é R$1.352,00.

d) Quanto pagará cada passageiro quando a rentabilidade for máxima?

Nesse caso, deseja-se determinar o valor de $v(x)$ no ponto $x = 26$. Proceda como no item *a*, clicando em *simplificar* → *substituir* conforme Figura 84. Na Figura 88 tem-se o valor de $v(26)$.

Logo, cada passageiro pagará R$52,00 quando a rentabilidade for máxima.

e) Esboce no *software wxMaxima* o gráfico da função que representa a rentabilidade da empresa. Considere que o domínio da função seja real e $D(r) = [0, 42]$.

Para fazer o gráfico solicitado clique em *plot* → *plot 2D* e digite a lei da função e o intervalo de variação para x. Na Figura 89 tem-se o gráfico solicitado.

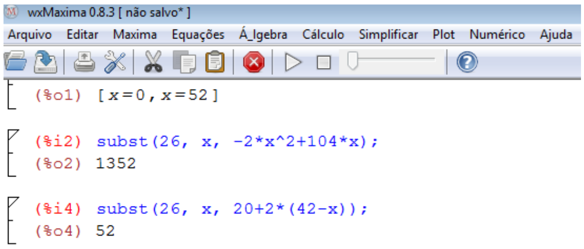


Figura 88 – Valor de $v(26)$

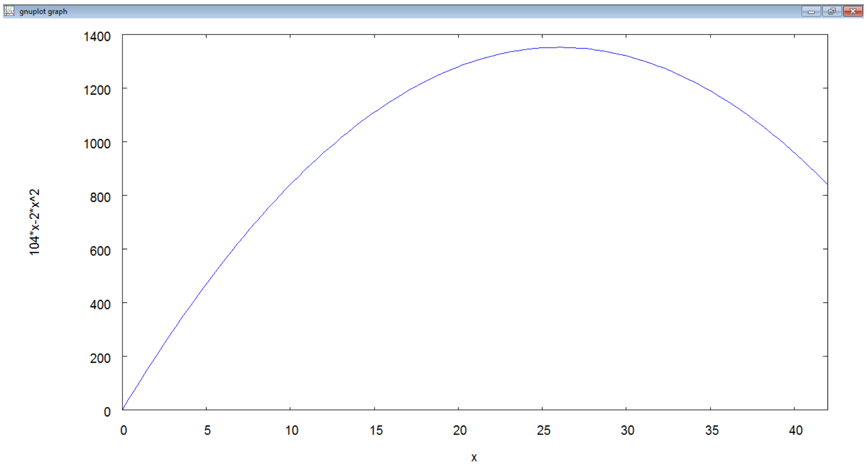


Figura 89 – Gráfico que representa a rentabilidade em função do número de alunos

Com a resolução deste item encerra-se este exercício e também a atividade com problemas envolvendo compra e venda. Na próxima seção serão apresentados exercícios de produção gráfica.

5.3 Problemas de Produção Gráfica

Nesta seção serão apresentadas atividades de produção gráfica.

Atividade 4. Exercícios de Produção Gráfica

Nessa atividade serão propostos exercícios de análise gráfica envolvendo conhecimentos de construção gráfica, translações verticais e horizontais. Os pré-requisitos, material e tempo necessários para a resolução são os mesmos para todos os exercícios de análise gráfica e motivação.

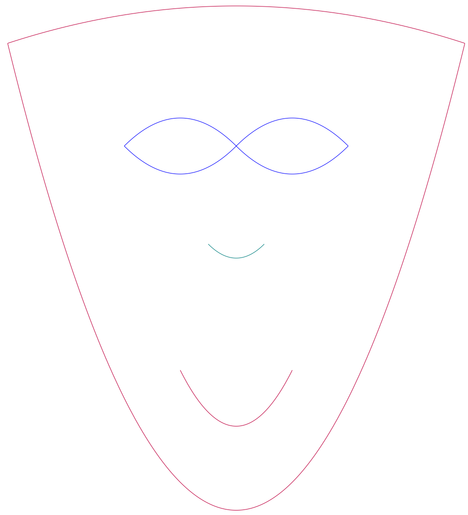


Figura 90 – Faça essa máscara

Pré-requisitos: funções quadráticas, construção gráfica e translações verticais e horizontais.
Material necessário: equipamento que tenha instalado o *software* *Winplot* ou similar.
Tempo necessário: Uma hora aula.

Exercício 5.3.1. Observe a Figura 90 e tente reproduzi-la. Essa máscara é formada por intersecções de gráficos de funções.

Resolução:

Dicas para o professor

- ☞ Relembre com seus alunos como fazer as translações horizontais e verticais das parábolas, assim como as equações paramétricas da reta. Para revisar translações você pode utilizar o trabalho de (MAIA, 2007) e para equações paramétricas o livro de Dante, bibliografia no Anexo A;

- ☞ Lembre-os de que para obter uma reta horizontal, y deve ser constante e para que a reta seja vertical, x deve ser constante e deve-se variar y;

- ☞ Incentive-os a buscar soluções diferentes da solução apresentada;

- ☞ Lembre-se de que se você sabe onde quer colocar o vértice da parábola, pode utilizar a fórmula $y - y_v = (x - x_v)^2 \rightarrow y = (x - x_v)^2 + y_v$, onde x_v e y_v transladam a parábola horizontal e verticalmente;

- ☞ Peça a eles que façam um desenho diferente dos que foram apresentados.

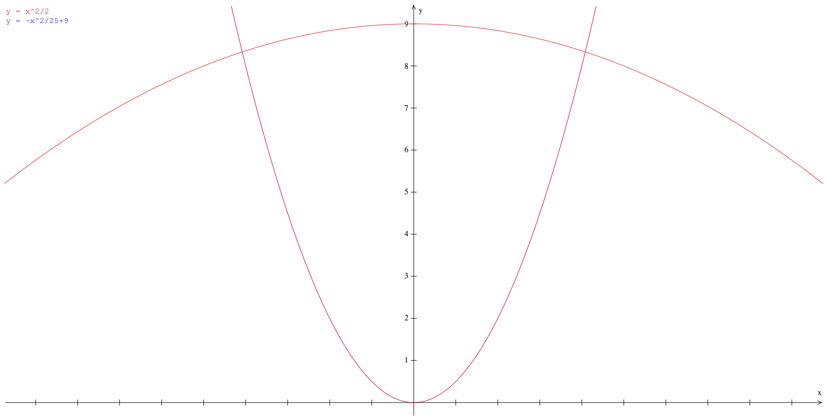


Figura 91 – Gráficos que formam o contorno do rosto

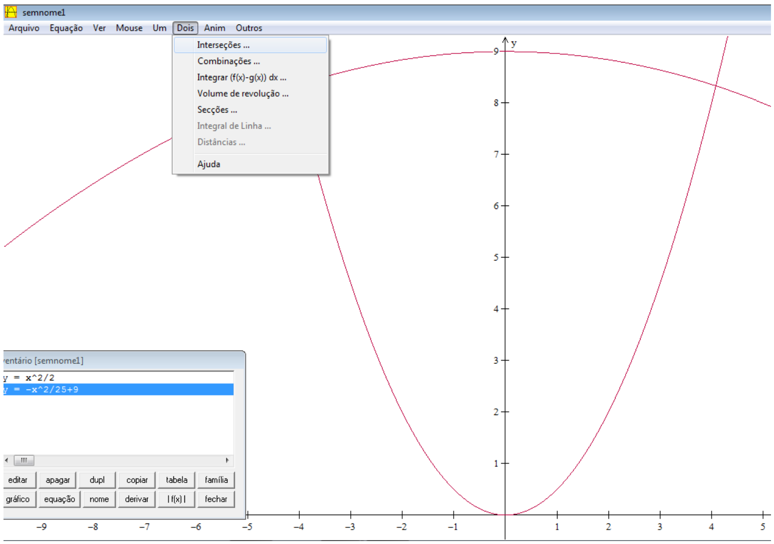


Figura 92 – Menu *Dois* $\rightarrow$ *intersecções*

Para reproduzir a máscara, primeiramente esboce os gráficos que formam o contorno do rosto da máscara. Para fazer o contorno do rosto, foram escolhidas funções quadráticas simples como $y = \dfrac{x^2}{2}$ e $y = -\dfrac{x^2}{25} + 9$. Lembre-se que quanto maior o denominador do coeficiente a, maior a abertura da parábola e ao somar ou diminuir uma constante, translada-se o gráfico para cima ou para baixo. Observe a Figura 91.

Para que dois gráficos terminem na sua intersecção, clique em *Dois* $\rightarrow$ *intersecções*, conforme Figura 92, para determinar em que valor de x os dois gráficos se interseccionam.

Observe na Figura 93 que é possível selecionar as funções que se deseja e obter as intersecções. Veja que as abscissas da intersecção são $x = -4,082$ e $x = 4,082$. Com esses dados, retorne na janela *inventário* clique em *editar* e restrinja o intervalo de domínio das funções. Veja a Figura 94.

Na Figura 95 já se tem o gráfico de $y = \dfrac{x^2}{2}$. Faça o mesmo para a função $y = \dfrac{x^2}{25} + 9$.

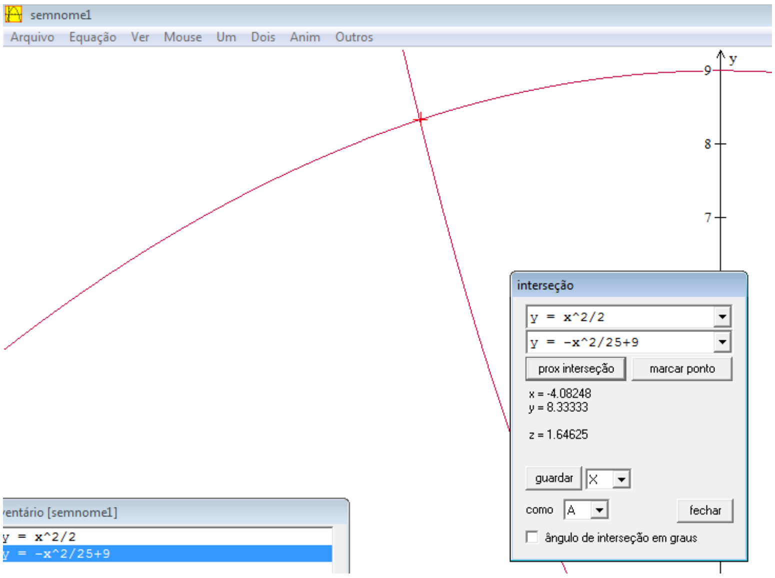


Figura 93 – Selecione os gráficos que deseja encontrar as intersecções

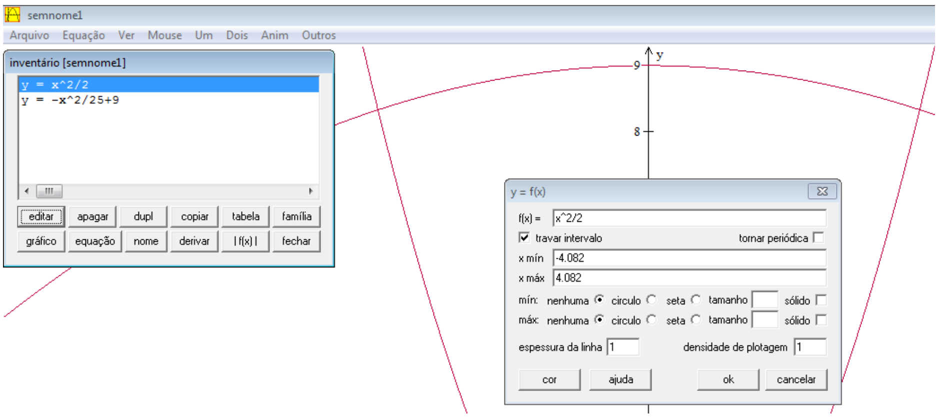


Figura 94 – Defina o domínio da função

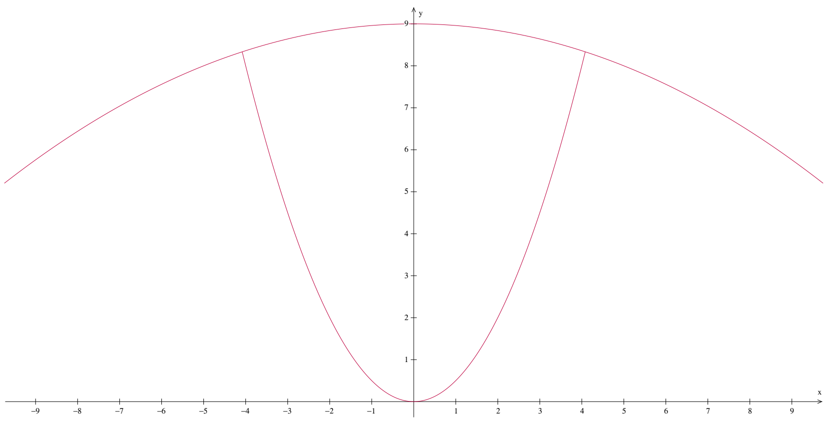


Figura 95 – Função $y = \dfrac{x^2}{2}$ definida no intervalo $[-4.082, 4.082]$

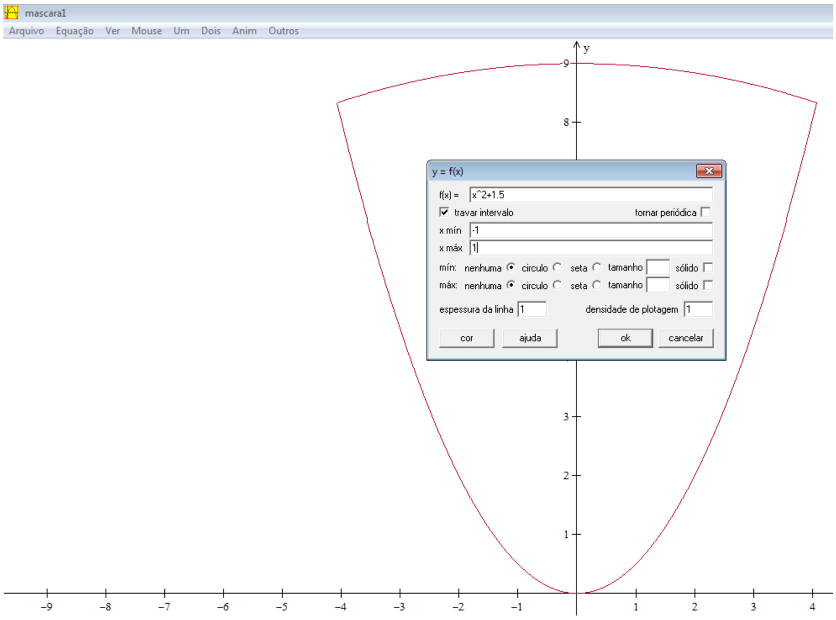


Figura 96 – Digite a função $b(x) = x^2 + 1,5$ limitada no intervalo $[-1, 1]$

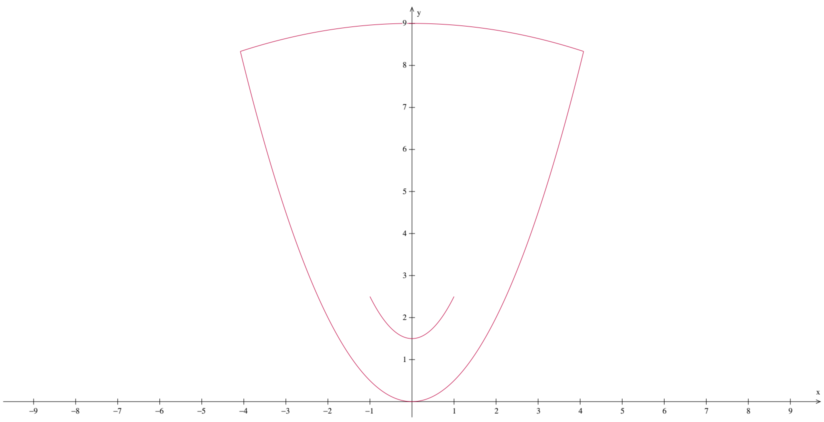


Figura 97 – Boca da máscara

Para fazer a boca na máscara deve-se transladar verticalmente a parábola $y = x^2$, nesse caso foi utilizada a função $y = x^2 + 1,5$ limitada ao intervalo $[-1, 1]$. De acordo com a Figura 96. Na Figura 97 pode-se visualizar a boca sorridente da máscara.

Agora devem ser feitos os olhos e o nariz, para isso, lembre-se que a parábola para fazer os olhos deve ser transladada vertical e horizontalmente. Para fazer a parte de baixo dos olhos, serão usadas as funções $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2} + 6$ e $g(x) = \dfrac{(x-1)^2}{2} + 6$, limitadas nos intervalos $[-2, 0]$ e $[0, 2]$, respectivamente. Na Figura 98, já é possível ver a parte inferior dos olhos.

Para fazer a parte superior dos dos olhos utilize as funções $f_1(x) = -\dfrac{(x+1)^2}{2} + 7$ e $g_1(x) = -\dfrac{(x-1)^2}{2} + 7$, também limitadas de $[-2, 0]$ e de $[0, 2]$. Na Figura 99 os olhos

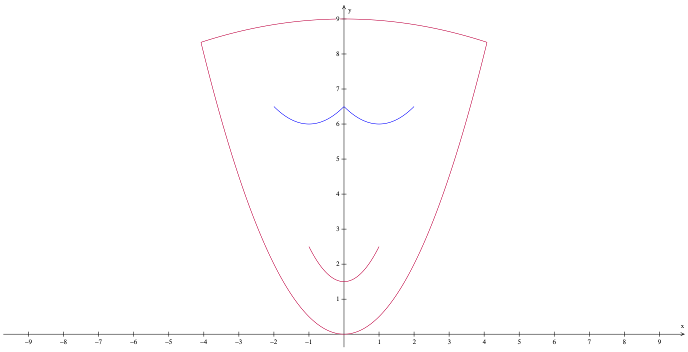


Figura 98 – Parte inferior dos olhos

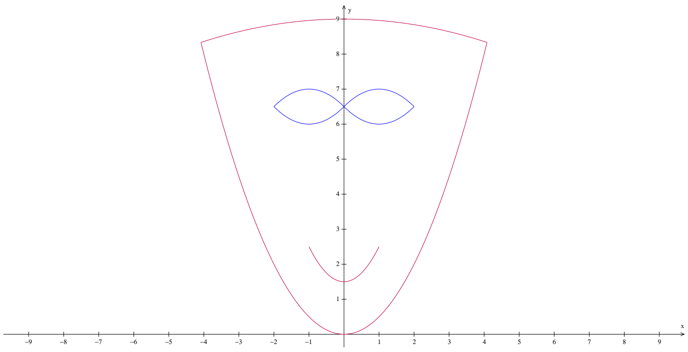


Figura 99 – Máscara com os olhos completos

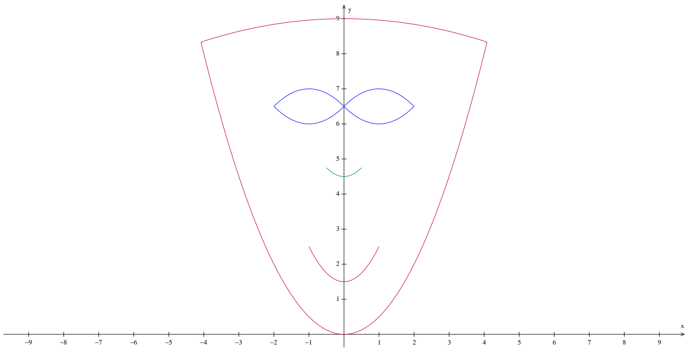


Figura 100 – Máscara concluída

estão completos.

Para concluir o desenho resta fazer o nariz, para isso use a função $h(x) = x^2 + 4,5$ limitada no intervalo $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ e a máscara está pronta. Veja na Figura 100.

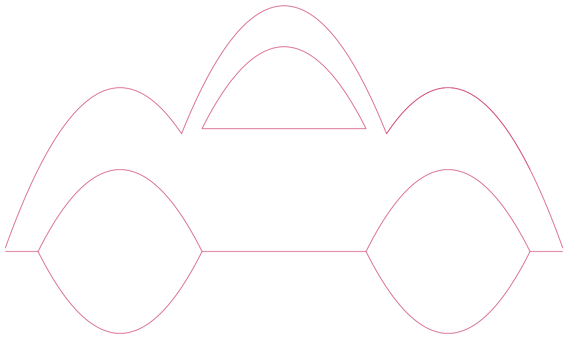


Figura 101 – Carrinho

Exercício 5.3.2. Faça com seus alunos o desenho do carrinho da Figura 101.

Resolução:

Dicas para o professor

- ☞ Relembre com seus alunos como fazer as translações horizontais e verticais das parábolas;
- ☞ Incentive-os a buscar soluções diferentes da solução apresentada, pois pode-se chegar a um desenho muito semelhante utilizando outras funções quadráticas;
- ☞ Lembre-os de que para ter uma reta paralela ao eixo OX deve-se fazer $y = c$, onde c é uma constante qualquer;
- ☞ Explique aos alunos que não precisam fazer um desenho igual ao dado, mas semelhante, pois o objetivo é exercitar como transladar funções.

A solução apresentada é uma possibilidade, mas outras soluções podem ser elaboradas pelo professor e pelos alunos.

Você pode começar fazendo a parte de cima do carrinho. Faça o gráfico da função $y = -x^2 + 3$ restrita ao intervalo $[-1, 25, 1, 25]$, para fazer o gráfico limitado, acesse *Equação* $\rightarrow$ *explicita*, digite a função e clique em *travar intervalo*. Veja na Figura 102 o resultado obtido.

Agora devem ser feitos os para-lamas, para isso deve-se deslocar horizontal e verticalmente a parábola, assim faça os gráficos das funções $y = -(x-2)^2 + 2$ limitada no intervalo $[1, 25, 3, 41]$ para o para-lama dianteiro ou traseiro. Para fazer o outro para-lama faça o gráfico da função $y = -(x+2)^2 + 2$ com $x \in [-3, 41, -1, 25]$. Veja na Figura 103 a construção de um para-lama.

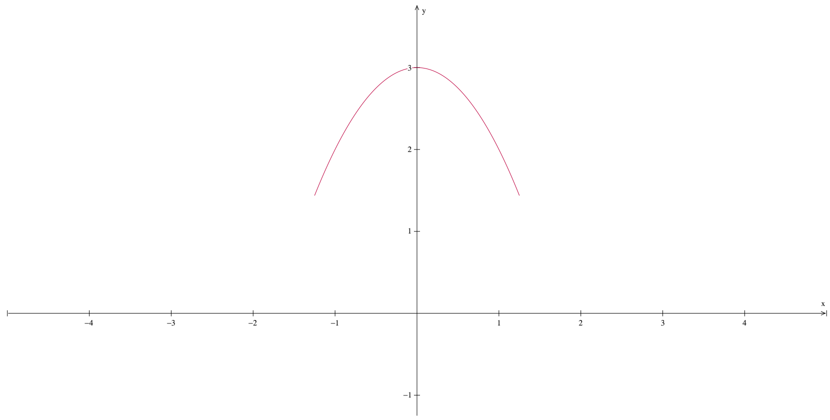


Figura 102 – Gráfico que representa a parte superior do carrinho

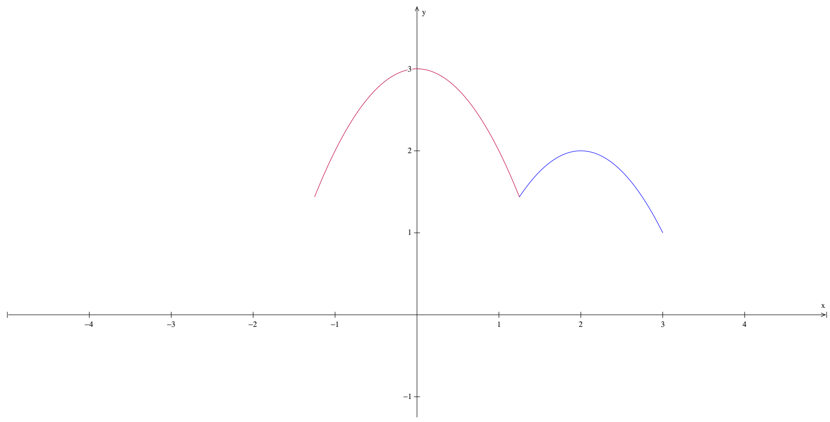


Figura 103 – Gráfico que representa a parte superior e um dos para-lamas

Para fazer o esboço da roda traseira ou dianteira, utilize as funções $y = (x-2)^2-1$ e $y = -(x-2)^2+1$, ambas limitadas ao intervalo $[1, 3]$, veja na Figura 104. Para construir a outra roda, use as funções $y = (x+2)^2 - 1$ e $y = -(x-2)^2 + 1$, limitadas no intervalo $[-3, -1]$. Observe a Figura 105. Agora faltam apenas a janela e os acabamentos entre as rodas.

Para a construção da janela, use a função $y = x^2 + 2,5$ e $y = 1,5$ com x variando em $[-1, 1]$. Nas Figuras 106 e 107 encontra-se o carrinho quase concluído, faltando apenas o acabamento entre as rodas.

O acabamento do carrinho é feito pela função $y = 0$ com x variando nos intervalos $[-3, 41, -3], [-1, 1]$ e $[3, 3, 41]$, veja que esses intervalos foram escolhidos por estarem próximos às raízes das funções que formam os para-lamas e rodas. Nas Figuras 109, 108 e 110 mostram a conclusão do desenho do carrinho.

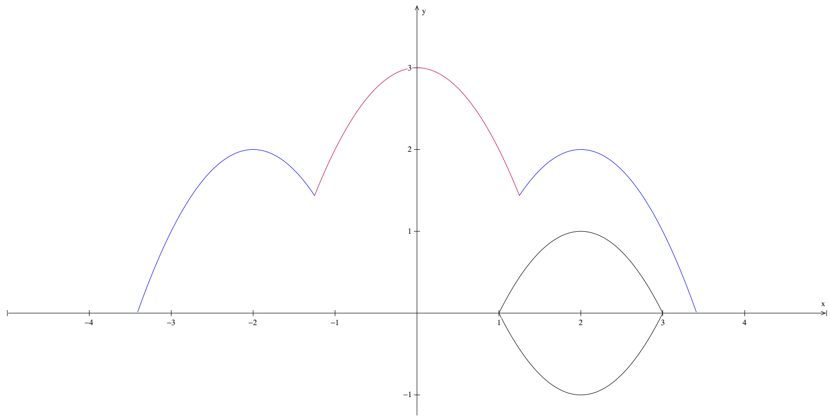


Figura 104 – Construção da roda dianteira ou traseira

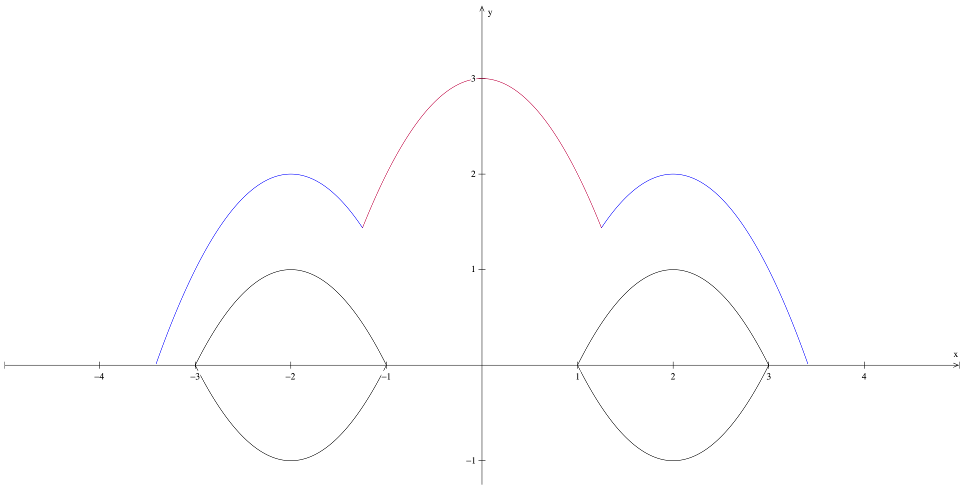


Figura 105 – Carrinho com as duas rodas

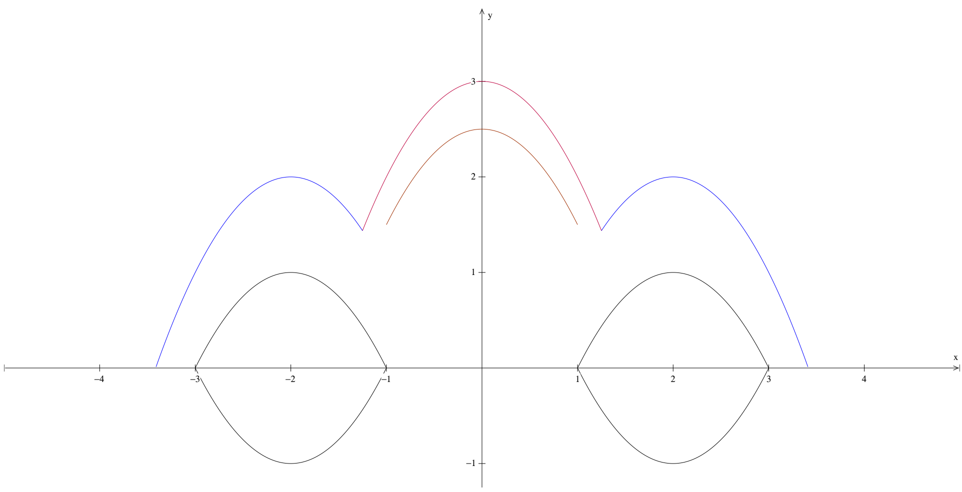


Figura 106 – Construção da janela

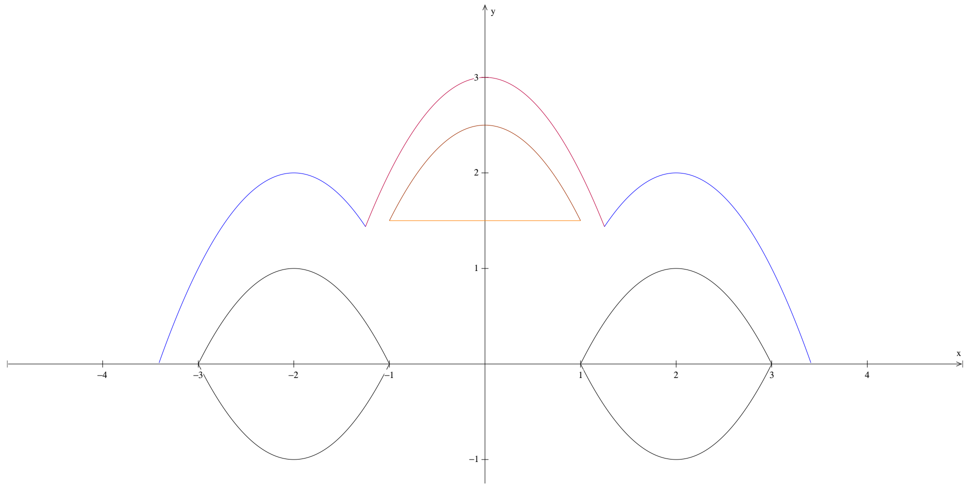


Figura 107 – Janela concluída

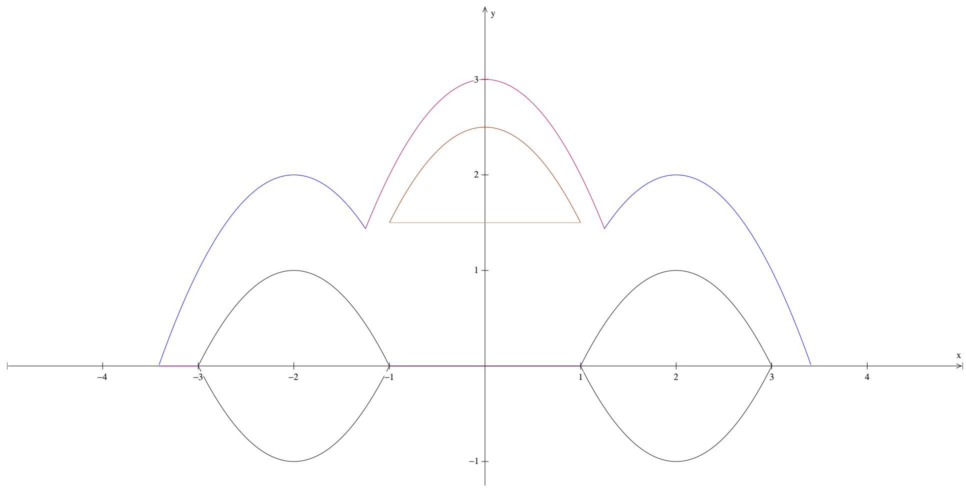


Figura 108 – $y = 0$ com x pertencente ao intervalo $[-3,41,-3]$

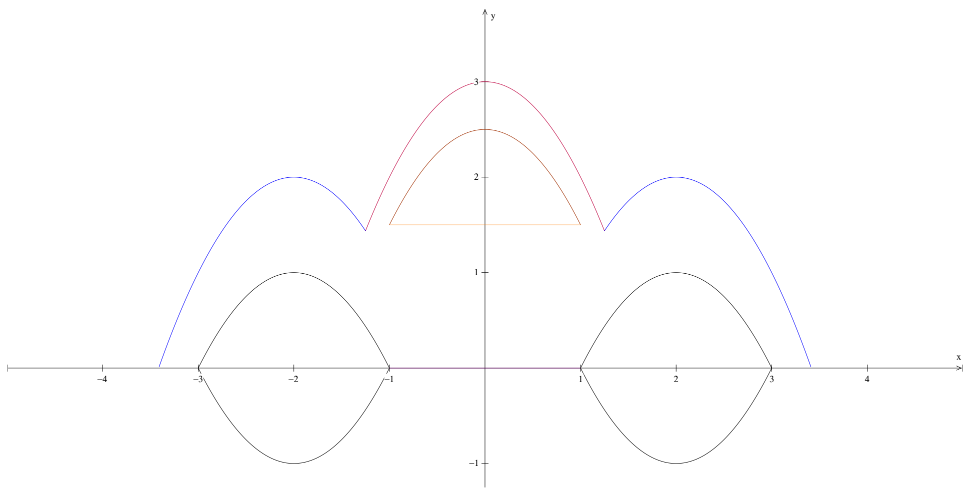


Figura 109 – $y = 0$ com x pertencente ao intervalo $[-1,1]$

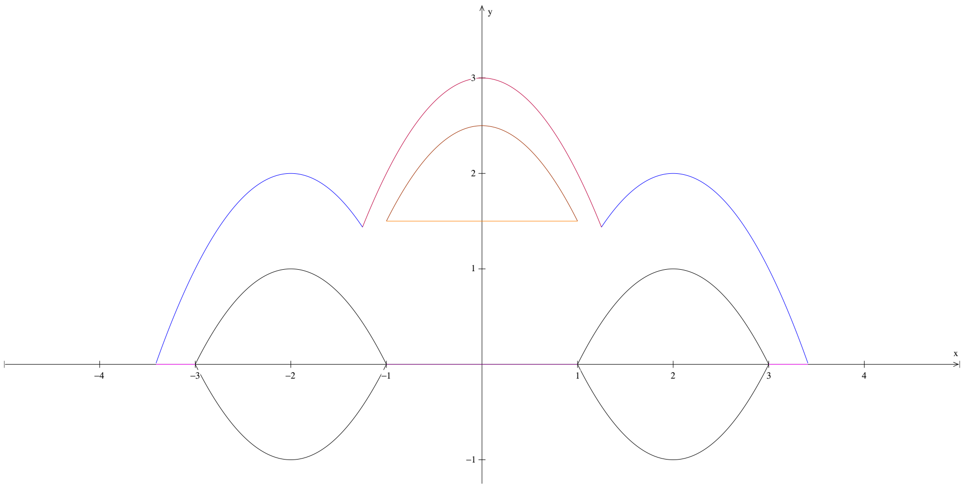


Figura 110 – Desenho concluído

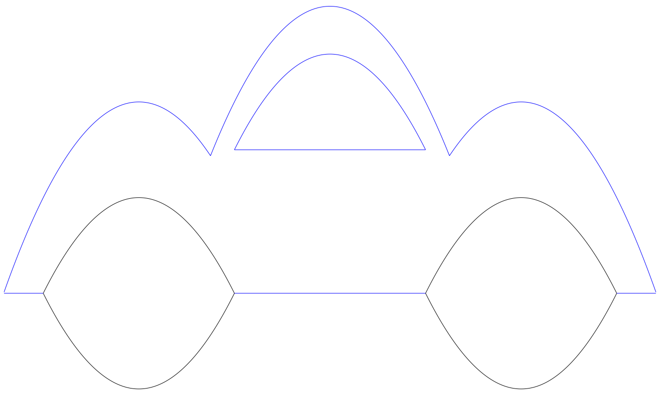


Figura 111 – Desenho do carro em cor única

Se você quiser deixar todo o carrinho na mesma cor, pode na janela *inventário* escolher uma a uma as funções e clicar em *editar* e após em *cor* e definir a cor desejada. Veja a Figura 111.

Outros modelos encontram-se no Anexo C.

5.4 Problema de Geometria Espacial

Atividade 5. Exercícios envolvendo Geometria Espacial

Nessa atividade será proposto um exercício envolvendo geometria, áreas, volumes, perímetro. Para sua resolução é necessária uma hora/aula.

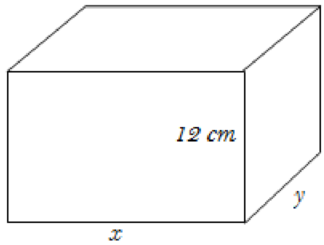


Figura 112 – Caixa em cartolina

Pré-requisitos: funções quadráticas, noções de áreas, volumes e perímetros.
Material necessário: equipamento que tenha instalado o *software* *wxMaxima* ou similar, além do material escolar usual.
Tempo necessário: uma hora aula.

Exercício 5.4.1. Uma turma de Ensino Médio está construindo caixas retangulares em cartolina, semelhante a caixa da Figura 112. Considere que o perímetro da base deve ser de $60cm$ e que a altura será de $12cm$.

a) Escreva a função que representa o volume da caixa em função de um dos lados da caixa a ser construída e construa seu gráfico no *software*.

b) Quais devem ser as dimensões da base para que o volume seja máximo? Qual é o volume máximo?

c) Faça variações no valor da altura da caixa e verifique o que acontece com o gráfico da função.

Resolução:

Dicas para o professor

☞ Lembre aos alunos de que o valor do coeficiente da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ influencia a abertura e a concavidade de uma parábola;

☞ Faça uma revisão sobre área, perímetro e volume de paralelepípedo;

☞ Para revisar geometria espacial você pode utilizar o livro de Dante, bibliografia no Anexo A.

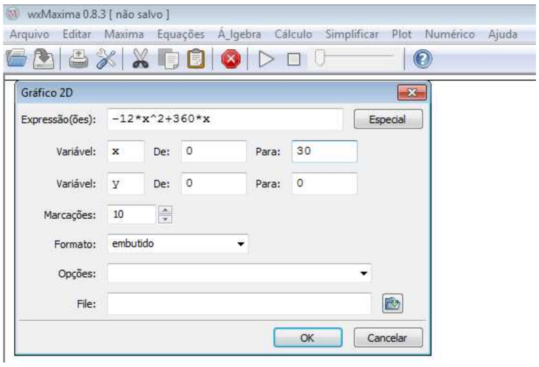


Figura 113 – Digite a lei da função que representa o volume

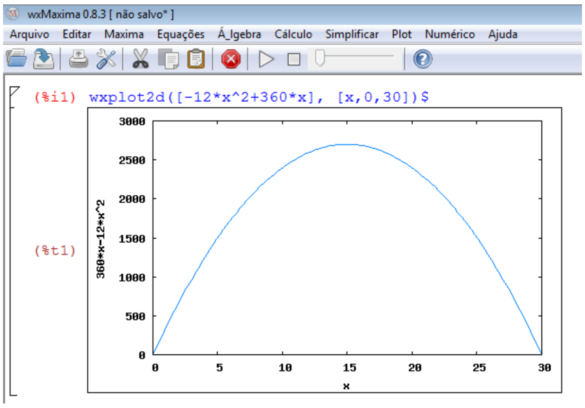


Figura 114 – Gráfico solicitado

a) Escreva a função que representa o volume da caixa em função de um dos lados da caixa a ser construída e construa seu gráfico no *software*.

Considere a base como sendo um retângulo de dimensões x e y, dessa forma seu perímetro é $2p = 2x + 2y = 60$, assim, $x + y = 30$ e $y = 30 - x$. Então para calcular a área desse retângulo, utiliza-se a fórmula $A = b \times h = xy = x(30 - x) = 30x - x^2$, onde b é a base e h é a altura do retângulo.

Como o volume $v(x)$ de um prisma retangular calcula-se multiplicando a área da base pela altura, tem-se que $v(x) = 12(30x - x^2) = -12x^2 + 360x$. Logo a função que representa o volume da caixa é $v(x) = -12x^2 + 360x$.

Primeiramente deve-se definir o intervalo de variação de x para que o problema tenha sentido. Observe que $v(x)$ deve ser positiva, já que trata-se do volume de um sólido. Assim, $-12x^2 + 360x > 0$ portanto $0 < x < 30$.

Para fazer o gráfico clique em *plot* $\rightarrow 2D$ e digite a lei da função, conforme Figura 113. Na Figura 114 encontra-se o gráfico solicitado.

b) Quais devem ser as dimensões da base para que o volume seja máximo? Qual é o volume máximo?

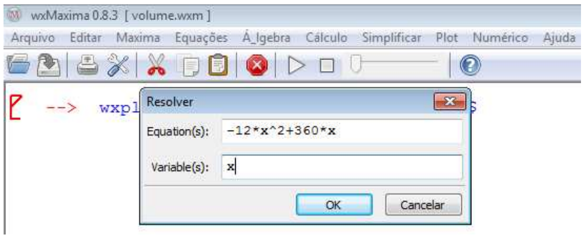


Figura 115 – Função digitada

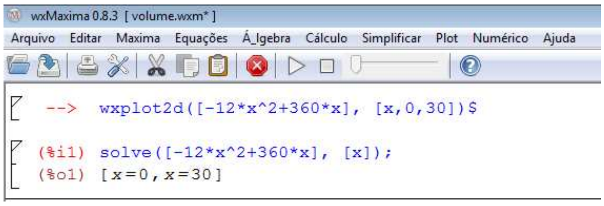


Figura 116 – Raízes da função

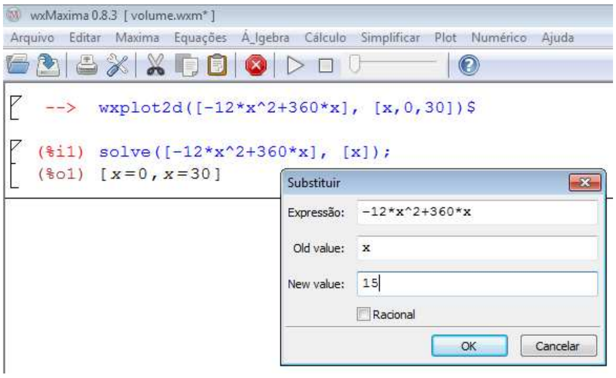


Figura 117 – Digite a lei da função e o novo valor de x

Observe que a função que determina o volume varia de acordo com um dos lados. Portanto, para determinar as dimensões para que o volume seja máximo, deve-se calcular a abscissa do vértice. Para isso determine as raízes da função e por simetria o x_v. Clique em *Equações* $\rightarrow$ *resolver* e digite a lei da função conforme Figura 115. Na Figura 116 encontram-se os valores das raízes.

Veja que as raízes são $x = 0$ e $x = 30$, assim como x_v pertence ao eixo de simetria da parábola, segue que $x_v = 15$. Então, $x + y = 30$ e $y = 15$. Logo, as dimensões da base são $x = y = 15$.

Resta calcular o volume máximo, para isso clique em *simplificar*$\rightarrow$ *substituir* e digite a lei da função, conforme Figura 117. Na Figura 118 pode-se verificar que o volume máximo é $v(15) = 2.700cm^3$.

c) Faça variações no valor da altura da caixa e verifique o que acontece com o gráfico da

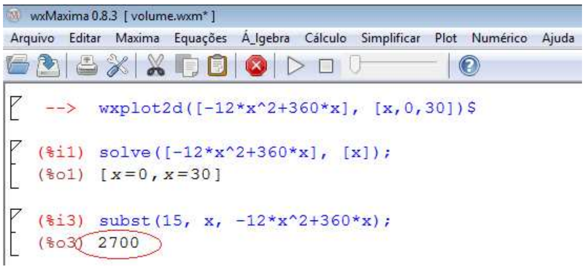


Figura 118 – Volume máximo

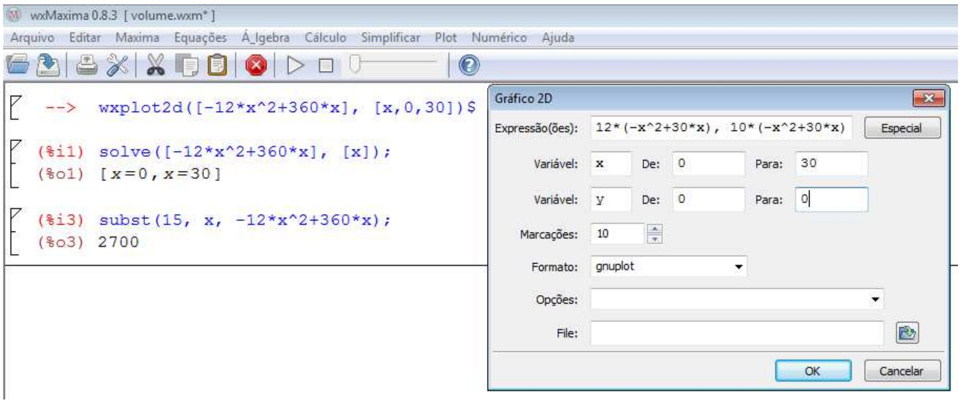


Figura 119 – Digite as leis das funções

função.

Observe que para solucionar esse item, você deve fazer a altura do sólido variar e ver o que acontece com o gráfico de $v(x)$, para isso clique em *plot* $\rightarrow$ *plot 2D* e digite numa só janela as leis das funções $v(x) = 12(-x^2 + 30x)$, $v_1(x) = 10(-x^2 + 30x)$, $v_2(x) = 8(-x^2+30x)$, $v_3(x) = 14(-x^2+30x)$ e $v_4(x) = 16(-x^2+30x)$, por exemplo, conforme Figura 119.

Na Figura 120 pode-se ver que o volume dos sólidos, representado pelos gráficos das funções v, v_1, v_2, v_3 e v_4, aumenta ou diminui de acordo com o valor atribuído à altura.

Com a resolução desse exercício, encerram-se as atividades propostas. No próximo capítulo encontram-se as considerações finais.

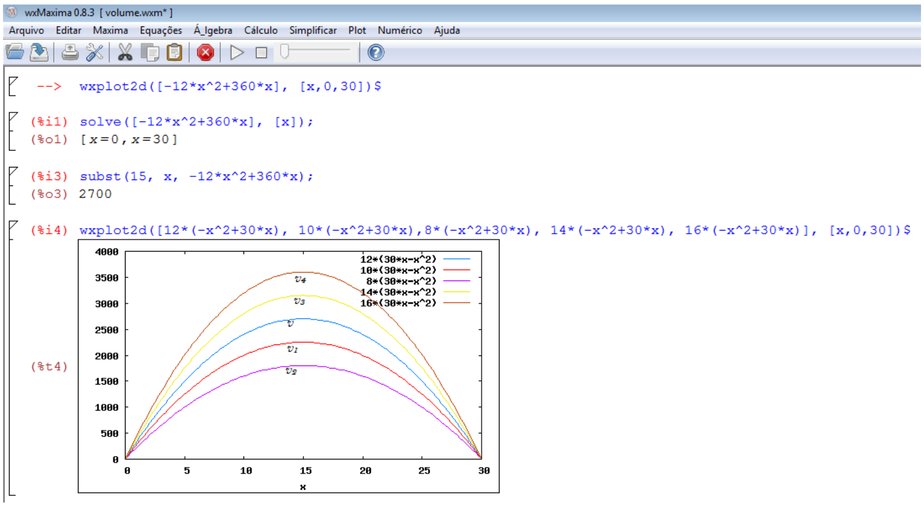


Figura 120 – Gráficos das funções

6 Considerações finais

O ensino de matemática enfrenta, nos últimos tempos, grandes problemas devido aos altos índices de reprovação, de evasão escolar e até mesmo a falta de interesse dos alunos. Também existe a falta de contextualização da matéria, que acaba por torná-la cada vez mais incompreensível aos olhos dos alunos, pois "embora pura e abstrata em sua nascente, a matemática sempre atendeu a objetivos essenciais e práticos"(ALMEIDA, 1987).

Tentando resgatar esse caráter prático da matemática, através desse trabalho disponibilizou-se aos professores de ensino médio, exercícios contextualizados e de produção gráfica para serem resolvidos utilizando *softwares* matemáticos livres, trazendo assim mais tecnologia e motivação para a sala de aula. Procurou-se dar ao estudo de funções quadráticas um enfoque semelhante ao que foi dado na disciplina de Funções durante o curso do Profmat, privilegiando o raciocínio do aluno e não a utilização direta de fórmulas nas resoluções.

No decorrer deste trabalho foi realizada uma pesquisa bibliográfica em livros didáticos de Ensino Fundamental e Médio. Nesta pesquisa ficou constatado que, dos livros consultados, poucos relacionam o estudo de funções com situações cotidianas e que nenhum deles utiliza recursos tecnológicos para desenvolver ou revisar tal conteúdo.

Fez-se também uma pesquisa sobre a utilização de *softwares* no estudo de funções e pode-se constatar que na maior parte das vezes, os *softwares* são utilizados para fazer estudo gráfico das funções quadráticas ou para estudar funções lineares contextualizadas. O grande diferencial deste trabalho foi que tentou-se revisar conceitos importantes de funções quadráticas resolvendo exercícios contextualizados e de produção gráfica e utilizando os *softwares winplot* e *wxMaxima.*

Foram apresentados três exercícios envolvendo esportes, dois tratam sobre o tema futebol e um sobre o voleibol. Quatro exercícios envolvendo comércio, compra e venda, dois exercícios de produção gráfica e um exercício sobre geometria espacial, totalizando dez exercícios propostos. Os exercícios são, em sua maioria, contextualizados excetuando-se os de produção gráfica, nos quais são revisadas translações de funções quadráticas. Em todos os exercícios são disponibilizados os pré-requisitos, o material e o tempo necessários para a resolução dos mesmos em sala de aula.

Os exercícios são todos resolvidos, os contextualizados foram resolvidos no *software wxMaxima*, exceto o primeiro do tema futebol, e os de gráficos foram resolvidos no *winplot*, mas fica a critério do professor decidir que programa utilizar, neste trabalho foi apresentada uma solução, mas muitas outras podem ser desenvolvidas em sala de aula, juntamente com os alunos. Além desses, nos anexos foram disponibilizados três exercícios gráficos extras, caso o professor julgue necessária sua aplicação, poderá resolvê-los com seus alunos, baseando-se nos que já estão resolvidos.

Pôde-se perceber ao longo do trabalho, que a utilização de tecnologias no estudo de funções quadráticas pode ser um excelente recurso para auxiliar os professores nas suas aulas. Tornando-as mais atrativas e significativas aos olhos dos alunos que com certeza se sentirão mais entusiasmados com o estudo dessa disciplina, temida por muitos deles. Também através da resolução dos exercícios é possível perceber que os *softwares* utilizados não resolvem os problemas sozinhos, eles são resolvidos através da interação professor-aluno-software, fortalecendo, assim, as relações entre eles.

7 Trabalhos futuros

Uma boa continuação do presente trabalho é sua aplicação, pois a utilização dessas atividades em uma escola de Ensino Médio da cidade de Pelotas no Rio Grande do Sul permitirá verificar o impacto desse trabalho na aprendizagem dos alunos e na satisfação dos docentes com o material elaborado.

Também seria bastante interessante elaborar atividades aplicadas ao estudo de funções polinomiais de grau maior que 2, assim como funções exponenciais e logarítmicas nos mesmos moldes do presente trabalho, incluindo o uso de mais tecnologia nas aulas de matemática.

Referências

ALEXANDRE, E. *O estudo de funções quadráticas utilizando o Excel.* [s.n.], 2012. Disponível em: <http://ntmsaojose.blogsplot.com.br>. 36

ALMEIDA, F. J. de. *Educação e Informática: Os computadores na escola.* São Paulo: Cortez, 1987. 16, 100

ALMEIDA, F. J. de. As aparências enganam. In: MEC SECRETARIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA. *TV e informática na educação.* Brasília, Brasil: MEC, 1998. cap. 12, p. 73–85. 16

AMBRÓSIO, U. D. *Da reflexão à ação*: reflexões sobre educação matemática. Campinas, Brasil: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1986. 32

AMBRÓSIO, U. D. *Educação Matemática*: da teoria a prática. Campinas, Brasil: Papirus, 2002. 31

BOYER, C. B. *História da Matemática.* São paulo, Brasil: Edgar Blücher Ltda, 1999. 20, 21

CAJORI, F. *Uma história da matemática.* São Paulo, SP, Brasil: Ciência Moderna, 2007. 20

CONCEIÇÃO, M. R. F. *Transformações no Plano*: uma aplicação do estudo de matrizes com o uso de planilhas eletrônicas. 63 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, Brasil, 2013. 35

COSTA, C. B. de Jesus da. *O conhecimento do professor de matemática sobre o conceito de função.* 117 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2008. 23

DANTE, L. R. *Matemática*: contexto e aplicações vol 1. São Paulo, Brasil: Ática, 2006. 27

FONSECA, V. G. da. *O uso de tecnologias no Ensino Médio*: a integração de mathlets no ensino da função afim. 141 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2011. 18, 34

GONZATTO, M. Por que 89 dos estudantes chegam ao final do ensino médio sem aprender o esperado em matemática? *Jornal Zero Hora*, 2012. Porto Alegre, RS, Brasil, 2012. 32

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e realidade*: 9 ano. São Paulo, Brasil: Atual, 2000. 26

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar*: conjuntos e funções. São Paulo, Brasil: Atual, 2004. 23, 27, 28

JUNIOR, R. C. V. de A. *Desenvolvimento de conceitos e resolução de atividades de função quadrática com o uso do software Geogebra*. 56 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, Brasil, 2013. 38

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*: Volume 1, 9.ed. Rio de Janeiro, Brasil: SBM, 2006. 28

MAGARINUS, R. *Uma proposta para o ensino de funções através da utilização de objetos de aprendizagem*. 99 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil, 2013. 38

MAIA, D. *Função quadrática*: Um estudo didático de uma abordagem computacional. 141 f. Dissertação (Mestrado) — PUC São Paulo, São Paulo, Brasil, 2007. 33, 85

NEVES, C. D. dos S. *Uso de tecnologias no estudo de funções reais de uma variável real*. 122 f. Dissertação (Monografia) — Universidade Jean Piaget, Cabo Verde, 2008. 32, 38

PCN+ Parâmetros Curriculares Nacionais + - Ensino Médio. [S.l.], 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br>. 29

PCN Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio. [S.l.], 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br>. 24, 29, 33

RIBEIRO, D. M. A. de A. *Uma abordagem didática para a função quadrática*. 58 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Norte Fluminense - Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2013. 37, 38

RIBEIRO, J.; SOARES, E. *Matemática construindo consciências*: 9 ano. São Paulo, Brasil: Scipione, 2006. 27

SANCHO, J. M. *Para uma tecnologia educacinal*. Porto Alegre, Brasil: Artmed, 1998. 17

SANTOS, D. S. dos. *O desenvolvimento de um aplicativo para o estudo de funções quadráticas*. 53 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí, Teresina, Brasil, 2013. 10, 37

SHITSUKA, R. et al. *Estudo e aplicações em ensino aprendizagem de matemática*. Rio de Janeiro, Brasil: Ciência Moderna, 2012. 22

TOLEDO, M. *Didática de matemática*: como dois e dois, a construção da matemática. São Paulo, Brasil: FTD, 1997. 22

VALENTE, J. A. Análise dos diferentes tipos de software usados na educação. In: MEC SECRETARIA DE EDUCAçãO A DISTâNCIA. *TV e informática na educação*. Brasília, Brasil: MEC, 1998. cap. 14, p. 91–111. 32, 33

YOUSSEF, A. N.; SOARES, E.; FERNANDES, V. P. *Matemática de olho no mundo do trabalho*: Volume único. São Paulo, Brasil: Scipione, 2004. 20, 27, 28

ÁVILA, A. de G. *Funções e gráficos num problema de freagem*. Brasília, Brasil, 2004. 90-95 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br>. 25

ÁVILA, G. *Cálculo das funções de uma variável*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: LTC, 2003. 23

Anexos

ANEXO A – Instalação dos *softwares* e sugestões de materiais para revisão

Primeiramente você deve instalar os *softwares Winplot* e *wxMaxima*. Para isso acesse os *links* abaixo para fazer o *download* dos programas e siga as instruções de instalação.

***download* Winplot:**

http : //www.mat.ufmg.br/ espec/tutoriais/winplot/

Manual *winplot*:

http : //www.mat.ufpb.br/ sergio/winplot/winplot.html

Acesso em 05.07.2013

***download* wxMaxima:**

http : //www.windows7download.com/win7−wxmaxima−for−windows/oquitumy.html

Manual *wxMaxima*:

http : //www.professores.uff.br/hjbortol/disciplinas/2006.2/esp00000/arquivos/max_pt.pdf

acesso em 05.07.2013

Sugestões de materiais para revisão:

- Translações de funções quadráticas

  Diana Maia - Um estudo didático de uma abordagem computacional, disponível em *http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/diana_maia.pdf*

- Geometria plana, espacial e analítica

  Luiz Roberto Dante - Matemática contexto e aplicações - volume único

- Funções

  Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado - A matemática do Ensino Médio - volume 1

ANEXO B – Exercícios para Impressão

EXERCÍCIOS PARA IMPRESSÃO

Num jogo da Seleção Brasileira de Futebol, Neymar percebeu que o goleiro estava adiantado e resolveu jogar a bola por cobertura. Sabendo que o jogador encontrava-se a $40m$ do gol, o goleiro está a $13m$ do gol e consegue alcançar $3,5m$ ao saltar, e a altura da bola em função da distância ao gol é mostrada na Tabela, responda:

Distância da bola ao gol m	Altura da Bola m
40	0
35	2
30	$3,5$
25	$4,5$

a) É possível expressar a lei que relaciona a distância com altura da bola através de uma função quadrática?

c) Qual é a altura máxima alcançada pela bola?

d) O goleiro consegue alcançar a bola ou a bola o encobre?

e) Considerando que a trave do gol tem $2,4m$ de altura e que o goleiro não pegue a bola. Ela vai entrar na goleira?

Dois garotos estão jogando bola, um na frente do outro. Um deles joga a bola segundo a trajetória dada pela função $f(x) = -0,25x^2 + 1,75x$, onde x corresponde ao deslocamento horizontal e $f(x)$ é a altura da bola. Responda:

a) Se a bola cai no pé do segundo jogador, qual é a distância entre os jogadores?

b) A bola bate na cabeça do segundo jogador quando este está à $6m$ do primeiro, pergunta-se: qual é sua altura?

c) Faça o gráfico de $f(x)$ no *software wxMaxima*.

Considere um jogador de voleibol posicionado no fundo da quadra, que saca. Sabendo que a trajetória da bola obedece a função $f(x) = \dfrac{-x^2+12x+13}{7}$, onde x é a trajetória horizontal da bola com relação ao jogador que a sacou e $f(x)$ é a sua altura.

Para resolver os itens, considere que:

- a altura da rede para jogos oficiais é de $2,42m$ nos jogos oficiais masculinos e de $2,24m$ nos jogos femininos;
- a quadra tem $18m$ de comprimento, e a rede divide a quadra em duas partes iguais;

a) A bola ultrapassa a rede? Cai dentro ou fora do lado adversário da quadra?

b) Considerando o jogador que dará o saque na origem dos eixos, a que distância dele a bola toca o chão?

c) Utilizando o *software*, determine qual é a altura máxima atingida pela bola?

d) Faça o gráfico de $f(x)$. O que acontece com o gráfico caso não se considere o denominador 7, que diferenças gráficas podem ser notadas?

Uma turma de 9º ano quer produzir uma camiseta de formatura. A gráfica fez uma promoção, se forem confeccionadas 15 camisetas, cada uma custará R$35, 00, para 17 camisetas o custo será de R$32, 00 por unidade e se forem 19, o custo unitário cai para R$29, 50. Nessas condições, responda:

a) Se possível, construa no *software wxMaxima*, o gráfico da função quadrática que relaciona número de camisetas com o custo unitário.

b) Quantas camisetas devem ser encomendadas para que o custo unitário seja mínimo?

c) Se forem encomendadas 23 camisetas, qual será o custo unitário para o cliente?

d) O que deve acontecer com o valor unitário a partir da vigésima nona camiseta? Se esta função estivesse definida no conjunto dos números reais, como seria seu gráfico?

Uma vendedora que trabalha na loja de preço único "Tudo por R$39,90", recebe seu salário mais comissão por vendas. A comissão, em percentual sobre o valor das vendas, varia de acordo com o número de produtos vendidos, conforme Tabela.

Número de peças vendidas	Percentual sobre as vendas
1	2
6	10
11	16
16	20

a) Qual será o rendimento mensal se a vendedora tiver um salário fixo de R$1.150,00 e tiver vendido 15 produtos nesse mês?

b) Qual será o percentual máximo de comissão que a vendedora poderá receber? Segundo a política da loja, a vendedora deveria se esforçar para vender 30 produtos num mês? Por quê?

c) Utilize o *software wxMaxima* para esboçar o gráfico que representa essa situação e conclua o que acontece com esse gráfico após um certo número de vendas.

A produção semanal de uma empresa de celulares é descrita pela função $f(x) = -10x^2+300x+18.000$, onde x é o número de funcionários envolvidos no setor de produção. Responda:

a) Qual deve ser o número de funcionários que precisam estar envolvidos na produção semanal para que ela seja máxima?

b) Qual é a produção semanal máxima?

c) Quantos aparelhos serão produzidos se houver dez funcionários no setor?

d) Considere que o domínio da função seja o Conjunto $\mathbb{R}$ e esboce, utilizando o *software*, o gráfico que representa a produção semanal de celulares.

e) Esboce, utilizando o *software*, o gráfico que representa a produção semanal de celulares.

f) Quando a empresa atinge a produção semanal máxima, reduz o preço dos celulares em 20% para a venda. Se cada aparelho custa R$250, 00, qual será a receita da empresa quando vende a produção máxima?

g) Sabendo que o custo de produção de cada celular é de R$98, 75, calcule o lucro semanal da empresa quando vende a produção máxima.

Um ônibus de 42 lugares foi fretado para a excursão de uma turma de primeiro ano ao Museu Oceanográfico. O custo por passageiro era de R$$20,00$, com um acréscimo de R$$2,00$ por lugar vago. Responda:

a) Qual é a expressão que representa o valor pago por cada passageiro?

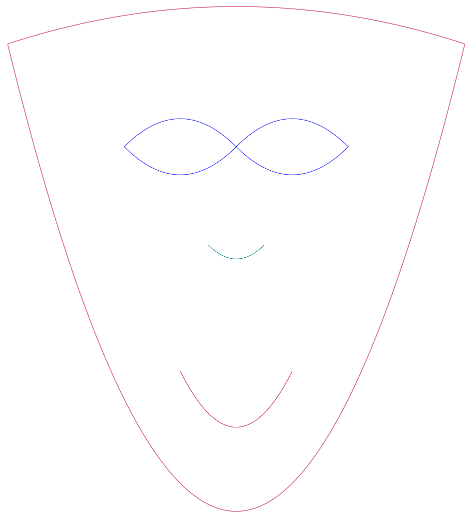
b) Qual é a expressão que representa a rentabilidade da empresa?

c) Qual deve ser o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima? Qual é a rentabilidade máxima?

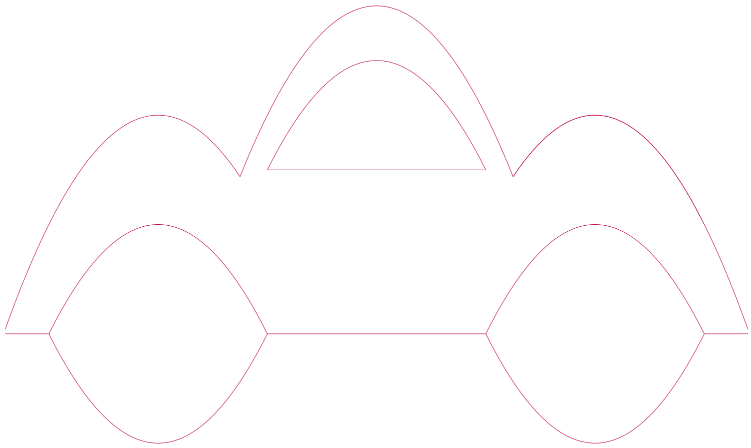
d) Quanto pagará cada passageiro quando a rentabilidade for máxima?

e) Esboce no *software wxMaxima* o gráfico da função que representa a rentabilidade da empresa. Considere que o domínio da função seja real e $D(r) = [0, 42]$.

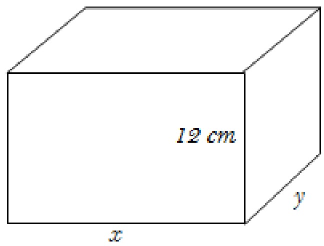
Observe a Figura e tente reproduzi-la. Essa máscara é formada por intersecções de gráficos de funções.



Faça com seus alunos o desenho do carrinho da Figura.



Uma turma de Ensino Médio está construindo caixas retangulares em cartolina, semelhante a caixa da figura abaixo. Considere que o perímetro da base deve ser de $60cm$ e que a altura será de $12cm$.



a) Escreva a função que representa o volume da caixa em função de um dos lados da caixa a ser construída e construa seu gráfico no *software*.

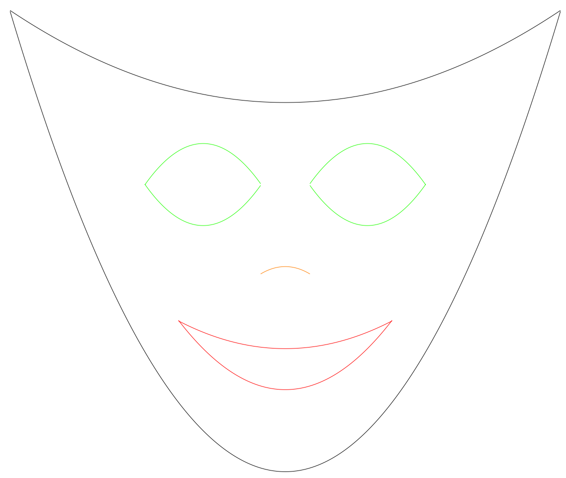
b) Quais devem ser as dimensões da base para que o volume seja máximo? Qual é o volume máximo?

c) Faça variações no valor da altura da caixa e verifique o que acontece com o gráfico da função.

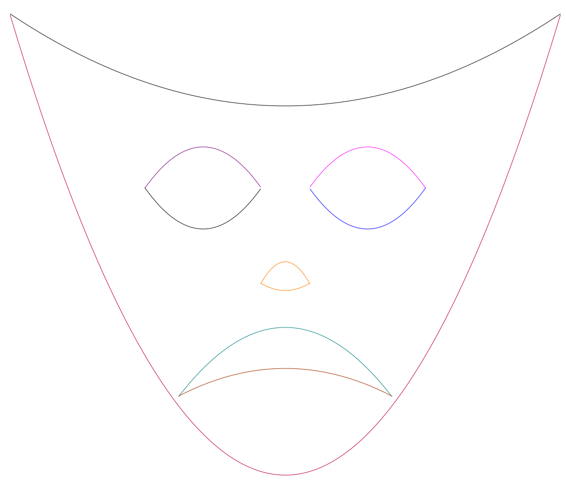
ANEXO C – Exercícios de produção gráfica complementares

Reproduza as seguintes imagens utilizando o *software winplot*.

1. Máscara sorridente



2. Máscara triste



3. Paisagem