Universidade Estadual de Londrina

THIAGO HENRIQUE DE OLIVEIRA ALBINO

GENERALIZANDO AS ÁREAS DE POLÍGONOS REGULARES: UMA PROPOSTA À LUZ DA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

Londrina

2021

THIAGO HENRIQUE DE OLIVEIRA ALBINO

GENERALIZANDO AS ÁREAS DE POLÍGONOS REGULARES: UMA PROPOSTA À LUZ DA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Prof. Dra. Pamela Emanueli Alves Ferreira

Londrina

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL.

A336 ALBINO, THIAGO HENRIQUE DE OLIVEIRA.

GENERALIZANDO AS ÁREAS DE POLÍGONOS REGULARES: UMA PROPOSTA À LUZ DA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM / THIAGO HENRIQUE DE OLIVEIRA ALBINO. - Londrina, 2021. 97 f.

Orientador: Pamela Emanueli Alves Ferreira.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2021.

Inclui bibliografia.

1. Trajetória Hipotética de Aprendizagem - Tese. 2. Geometria - Tese. 3. Educação Matemática - Tese. I. Ferreira, Pamela Emanueli Alves. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

THIAGO HENRIQUE DE OLIVEIRA ALBINO

GENERALIZANDO AS ÁREAS DE POLÍGONOS REGULARES: UMA PROPOSTA À LUZ DA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Prof.ª. Drª. Pamela Emanueli Alves Ferreira
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof.ª Dr.ª Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Rudolph dos Santos Gomes Pereira
Universidade Estadual Norte do Paraná - UENP

Londrina, 26 de fevereiro de 2021.

Não andem ansiosos por coisa alguma, mas em tudo, pela oração e súplicas, e com ação de graças, apresentem seus pedidos a Deus.

(Filipenses 4:6)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus que proporcionou esta oportunidade em minha vida. A Ele toda honra, toda glória e todo louvor.

Agradeço a minha amada esposa, que sempre me apoiou e esteve ao meu lado, incentivando-me a concluir o Mestrado, dando-me suporte físico e espiritual.

Agradeço a minha amada filhinha, Ana. Em vários momentos que estava cansado e sobrecarregado, ela vinha até mim com o sorriso mais puro e sincero do mundo, renovando as minhas forças.

Agradeço a minha professora, doutora Pamela. Ela sempre foi muito compreensiva e atuante para que eu me motivasse a concluir esse trabalho. Em meio à pandemia da COVID-19, estava com uma sobrecarga de trabalho e ela se dispôs a me orientar da forma mais precisa possível. Ela teve muita empatia e se mostrou uma verdadeira professora.

Agradeço aos membros da banca, Prof.ª Dr.ª Magna Natalia Marin Pires e Prof.º Dr. Rudolph dos Santos Gomes Pereira, pelas orientações e pelos apontamentos para o melhoramento desse trabalho.

Agradeço a minha mãe, que orou por mim.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha vida como estudante. Aos professores do programa do PROFMAT e em especial aos professores Estênio César Messias da Silva e Silvia Eckert que me mostraram o modelo de professor de Matemática que eu queria seguir.

ALBINO, Thiago Henrique de Oliveira. **Generalizando as áreas de polígonos regulares:** uma proposta à luz da Trajetória Hipotética de Aprendizagem**.** 2021. 97f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

RESUMO

A proposta deste trabalho foi pensada na direção de auxiliar os alunos e professores de Matemática da Educação Básica a refletirem sobre a sua perspectiva com relação ao ensino de Geometria. Apresentaremos algumas informações sobre baixos índices da aprendizagem da Matemática observados em avaliações de larga escala. Será discutida a importância de adotar novas metodologias e práticas de trabalho para um melhor aproveitamento das aulas e possível rendimento dos alunos. Será proposta uma atividade para realizar generalizações para a área de polígonos regulares. Para tal, utilizaremos a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) na perspectiva de seu precursor, Martin Simon. As THA possibilitam ao professor fazer análises antecipadas sobre os processos de ensino e de aprendizagem, conduzindo a aprendizagem de forma mais significativa aos alunos. Apresentaremos diálogos hipotéticos entre o professor e os estudantes, a fim de mostrar que aprender por meio desta abordagem auxilia o professor em seu planejamento e proporciona aos alunos um melhor aproveitamento e interpretação dos conteúdos trabalhados.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Geometria. Generalização.

ALBINO, Thiago Henrique de Oliveira. **Generalizing the areas of regular polygons**: a proposal in the light of the hypothetical learning Trajectory. 2021. 97f. Dissertation (Professional Master in Mathematics – PROFMAT) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

ABSTRACT

The purpose of this study was designed to help Basic Education students and mathematics teachers to improve their perspective regarding the teaching of Geometry. We will present some information on low mathematics learning rates observed in large scale assessments. The importance of adopting new methodologies and work practices will be discussed for a better use of the lessons and possible student performance. An activity will be proposed to carry out generalizations for the area of regular polygons. For such, we will use the Hypothetical Learning Trajectory (HLT) in the perspective of its precursor, Martin Simon. The HLT allows the teacher to make advance analyzes of the teaching and learning processes, leading the learning process in a more meaningful way to the students. We will present hypothetical dialogues between the teacher and the students, in order to show that learning through this approach helps the teacher in his planning and provides students with a better use and interpretation of the contents worked on.

Key words: Mathematics teaching. Hypothetical Learning Trajectory. Geometry. Generalization.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Durante todas as aulas que tivemos no programa do PROFMAT de todas as disciplinas, sempre me indaguei sobre a arte de entender a Matemática e, o quão “infinita” ela parece ser. Na graduação, já tinha me encantado ainda mais pela Matemática do que na época do Ensino Médio e sempre gostei dos desafios que ela nos propõe.

Analisando o que fui aprendendo de novo durante o programa de Mestrado PROFMAT, fiquei pensando em como fazer com que meus alunos gostassem mais da Matemática e encontrassem nela, além de respostas para o dia a dia, uma satisfação de sempre querer resolver seus desafios, levando esta filosofia para a vida.

De acordo com o PCN[1] (Parâmetros Curriculares Nacionais),

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. (BRASIL, 1997, p.40)

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 1997, p.40)

Por gostar muito de Geometria, sempre procurei fazer deduções das fórmulas na preparação das minhas aulas e replicar isso para os meus alunos em sala de aula. Por conseguinte, selecionei um tema da Geometria e iniciei algumas generalizações, a fim de mostrar para os alunos o quanto a Matemática pode ser prática e instigante no processo de aprendizagem.

O que proponho neste trabalho é a realização de uma generalização de fórmula para o cálculo de área de polígonos regulares, no contexto de uma

---

[1] PCN são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal que orientam a educação no Brasil.

proposta de aula, utilizando como estratégia metodológica a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA).

Esse trabalho está dividido em seis capítulos, sendo que o primeiro traz alguns índices sobre a situação em que o Brasil se encontra nos principais meios de avaliação (Prova Brasil, PISA e ENEM) no que diz respeito à aprendizagem da Matemática. Já no segundo capítulo, será abordada a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) segundo o seu precursor, Martin A. Simon (1995) e outros autores. O terceiro capítulo aborda alguns conceitos básicos da Geometria que servirão de base para as deduções, tais como definições de polígonos regulares, bissetriz de um ângulo, soma dos ângulos internos de um polígono, o teorema de Pitágoras, razões trigonométricas, lei dos senos e cossenos. No quarto capítulo, trataremos dos procedimentos metodológicos desse trabalho. No quinto capítulo, traremos algumas deduções para as áreas de polígonos regulares através de uma THA e será mostrada uma generalização para tal cálculo e a sua dedução, passo a passo. E, por fim, o sexto capítulo é destinado às considerações finais do trabalho, bem como às explanações sobre a importância da aplicabilidade do que foi proposto.

CAPÍTULO I – ÍNDICES ATUAIS DAS AVALIAÇÕES EM MATEMÁTICA NO BRASIL

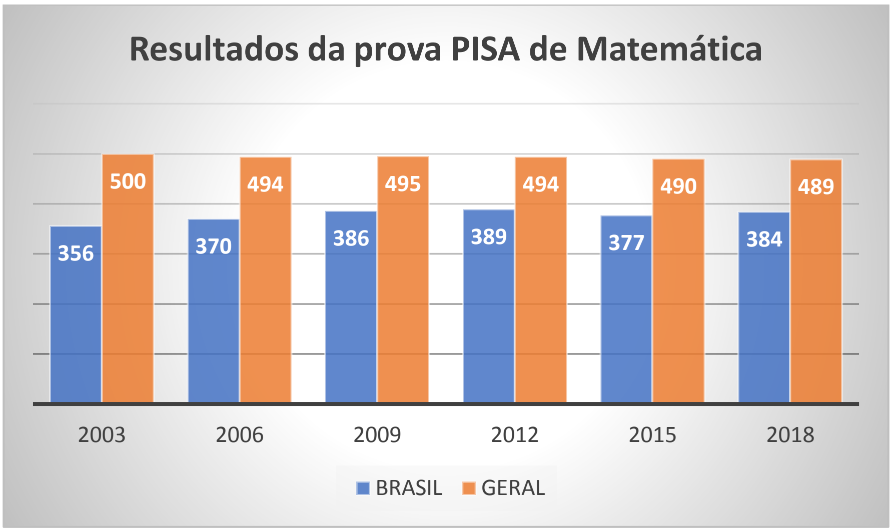
O Brasil tem passado por muitos resultados negativos no que diz respeito à evolução do ensino da Matemática. Existem diversos mecanismos de avaliação que permitem fazer uma análise de uma escola, cidade, de um estado, de uma região e de um país. Entre os principais estão a Prova Brasil, o PISA e o ENEM.

Segundo os últimos resultados da Prova Brasil[2], por exemplo, em 2015, 55% dos estudantes de 9º ano apresentaram pouco aprendizado e 31%, quase nenhum aprendizado em Matemática (Inep, 2019). Já em 2017 este número foi de 54% com pouco aprendizado e 31% com quase nenhum aprendizado em Matemática (Inep, 2017). Ou seja, aproximadamente 85% dos estudantes de 9º ano não estão aprendendo a Matemática programada para este período escolar que antecede o Ensino Médio, logo, não trazem a bagagem necessária para uma melhor compreensão dos conceitos que virão.

Já na prova do PISA[3] (Programa Internacional de Avaliação de Alunos), a realidade não é diferente. Segundo dados divulgados da prova aplicada em 2018, o Brasil ocupa entre a 69ª e 72ª posição de um ranking com 79 países participantes, sendo a média brasileira de 384 pontos, bem abaixo da média da OCDE, (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico) (Inep/MEC, 2020), como mostra o Gráfico 1. O Brasil fica atrás de países vizinhos, como Chile, Colômbia, Uruguai e Peru, e atrás de países com economias bem menos desenvolvidas, tais como Estônia (9ª colocada) e Vietnã (25ª colocada).

[2] A Prova Brasil é uma avaliação censitária das escolas públicas das redes municipais, estaduais e federal, com o objetivo de avaliar a qualidade do ensino.
[3] O PISA é uma avaliação internacional que mede o nível educacional de jovens de 15 anos por meio de provas de Leitura, Matemática e Ciências.

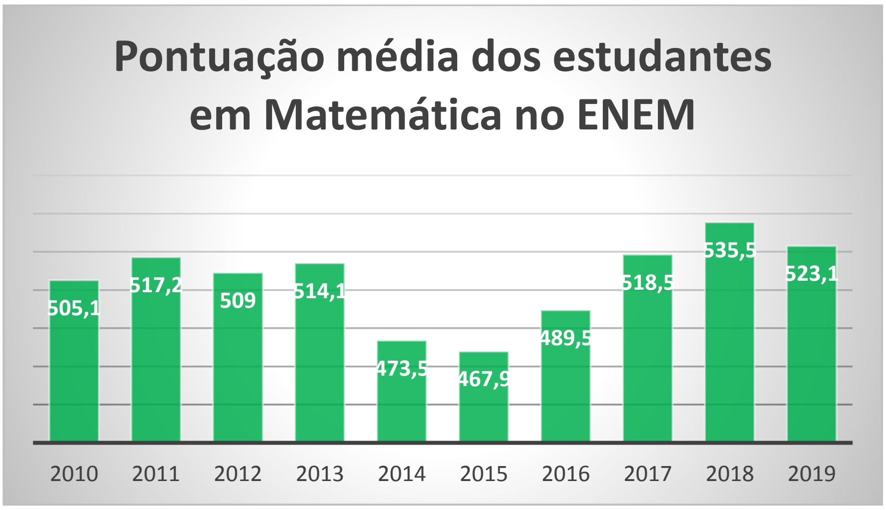
Gráfico 1 - Resultados da prova PISA de Matemática 2003 - 2018



Fonte: Inep/MEC (2020, p. 109 - 110).

No ENEM[4] (Exame Nacional do Ensino Médio), os resultados também não são os desejados. O Inep[5] (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas) divulgou que, em 2018, a média em Matemática dos estudantes era de 535,5. Já em 2019, este número caiu para 523,1.

Gráfico 2 - Pontuação média dos estudantes em Matemática no ENEM 2010 - 2019



Fonte: Inep (2020).

[4] O ENEM é uma prova anual que inicialmente tinha como objetivo avaliar o nível dos alunos da Educação Básica. Hoje já foram agregadas outras funções, como por exemplo, o ingresso a Universidades.
[5] O Inep é uma autarquia federal vinculada ao Ministério da Educação (MEC).

Estes resultados nos fazem refletir sobre como estamos abordando a Matemática em sala de aula. Será que os meios utilizados para ensinar Matemática estão sendo reformulados na prática? Há um engessamento no que diz respeito a como transmitir o conhecimento? Muitas vezes, sabemos as respostas para estas e outras indagações, porém, por vários fatores pessoais ou sistemáticos, acabamos não adotando outras formas de ensino, o que prejudica o próprio professor e, mais ainda, os seus alunos.

Ao deparar com estes números e resultados, vale a reflexão sobre os meios que são utilizados para transmitir o conhecimento matemático para nossos alunos. Por se tratarem de sistemas avaliativos de larga escala, vemos que o problema é difundido no país, sendo algumas regiões mais afetadas do que outras. Porém, o professor, durante a sua vida magistral, deve procurar ferramentas que o instrumentalize a transmitir os conteúdos com o maior teor de qualidade possível.

A responsabilidade para reverter a realidade dos índices apresentados pelas avaliações mencionadas deve ser dos profissionais da área da educação, desde as resoluções de autarquias superiores como os PCN e BNCC, até a comunidade escolar[6]. Utilizar-se de metodologias diversificadas e ativas, aprimorar o conhecimento dos profissionais de educação e instrumentalizá-los (fazendo atualizações de conceitos e conteúdos por meio de formações continuadas, com a apresentação de novas tendências - como a THA, que trataremos nesse trabalho), além de transformar o aluno em um ser ativo no processo de aprendizagem (dando-lhe mais voz e responsabilidades e contribuindo para a evolução do seu pensamento crítico-construtivo) são algumas das atitudes que podem ser adotadas para que a realidade apresentada nos índices seja revertida e melhorada, e não apenas documentada.

Nesse sentido, pensamos que a THA pode ser um instrumento que faz com que o professor reflita antecipadamente sobre todo o processo, ou sobre um planejamento específico para suas aulas. Ao estar seguro das atitudes e atividades a serem desenvolvidas, ele pode se aproximar mais das compreensões de seus alunos, sendo solidário e preciso em suas tomadas de decisões. Escutar os alunos é um

[6] A **comunidade escolar** é formada por professores e profissionais que atuam na **escola**, por alunos matriculados que frequentam as aulas regularmente e por pais e/ou responsáveis dos alunos. (Secretaria de Educação do Paraná, 2021).

recurso fundamental para que eles tenham cada vez mais voz em sala de aula e possam agir de formas mais autônomas.

Também é importante salientar que os alunos devem aprender a matemática por diversas abordagens e, nesses processos, as generalizações, as abstrações e os processos indutivos próprios da matemática são tão importantes quanto os contextos nos quais eles serão aplicados, uma vez que podem fazer conexões com a realidade.

Ao progredirmos na direção de termos uma aula de matemática mais dinâmica, com diferentes abordagens e estratégias metodológicas que promovam mais autonomia aos estudantes em seus processos de pensar matematicamente, esses índices, que tanto nos assustam, poderão apresentar melhores resultados futuramente.

CAPÍTULO II – TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM (THA)

No contexto da aprendizagem Matemática, é sempre válido buscar novos conhecimentos para uma abordagem mais efetiva, menos excludente e potencialmente eficaz. Para Brito (1996, p.298)

> não é a Matemática que produz atitudes negativas. Aparentemente, elas se desenvolvem ao longo dos anos escolares, muito relacionadas a aspectos pontuais: o professor, o ambiente na sala de aula, o método utilizado, a expectativa da escola, dos professores e dos pais, a auto percepção do desempenho, etc.

Ao se deparar com uma realidade no processo de aprendizagem, o professor tem dois caminhos simples: aceitar o que está sendo adotado (seja por comodismo ou por ser uma abordagem que acredita ter sucesso), ou manifestar-se de forma ativa para resolver os problemas pontuais, a fim de estabelecer melhores resultados.

“Ensinar por ensinar” vai contra ensinar com qualidade e contra os princípios de autarquias como os PCN (BRASIL, 1997, p.26), que dizem “[...] que a Matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua sensibilidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação”.

Para buscar resolver alguns destes embates na educação matemática, uma das propostas que pode ser levantada é a elaboração e subsequentes aplicações de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA), propostas por Simon (1995). Ele diz que a consideração dos *objetivos de aprendizagem*, *as atividades de aprendizagem* e *as hipóteses de aprendizagem* nos quais os alunos podem se envolver compõem uma trajetória hipotética de aprendizagem (SIMON, 1995).

Simon (1995) considera que uma trajetória hipotética de aprendizagem é composta por três componentes:

- o objetivo de aprendizagem, que define uma direção para o planejamento do professor;

- o plano que o professor elabora com as atividades de aprendizagem;
- o processo hipotético de aprendizagem, que apresenta uma previsão de como o pensamento e a compreensão dos estudantes evoluirão no contexto das atividades de aprendizagem.

À luz do que Simon diz, os objetivos de aprendizagem são elaborados pelo professor a fim de estabelecer metas a serem alcançadas no processo. Já as atividades de aprendizagem são as formas com as quais o professor buscará atingir os objetivos. E, por fim, as hipóteses de aprendizagem referem-se ao que o professor imagina que acontecerá durante o processo, tais como questionamentos por parte dos alunos, tanto certos como errados, possíveis faltas de conceitos básicos como pré-requisitos para a concepção do conteúdo, prováveis erros de interpretação ou cálculos, entre outros. Simon (1995, p. 136-137, tradução nossa) explica a THA através da seguinte analogia:

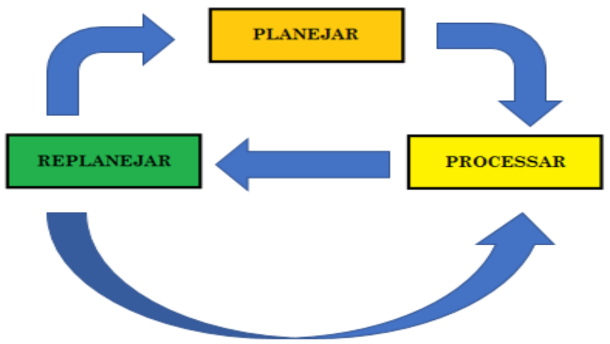
> Considere que você decidiu viajar ao redor do mundo, a fim de visitar lugares que você nunca viu. Não se faz isso de forma aleatória (por exemplo, ir para a França, depois Havaí, depois Inglaterra), mas também não há um itinerário a seguir. Então, você adquire o máximo de conhecimento relevante para planejar a sua possível viagem. Você, então, elabora um plano. Você pode inicialmente planejar a viagem inteira ou apenas parte dela. Você estabelece o caminho de acordo com o seu plano. No entanto, você deve constantemente ajustar sua viagem, por causa das condições que você encontrar. Você continua a adquirir conhecimentos sobre a viagem, sobre as condições atuais, e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus planos com relação à ordem dos seus destinos. Você modifica a duração e a natureza de suas visitas, de acordo com o resultado das interações com as pessoas ao longo do caminho. Você pode adicionar destinos que antes de sua viagem eram desconhecidos para você. O caminho que você utilizará para viajar é sua "trajetória". O caminho que você antecipa a qualquer ponto no tempo é a sua "trajetória hipotética".

As THA surgem para associar as ideias norteadoras do ensino, o planejamento de um aluno e suas possíveis antecipações com a prática dos professores em sala de aula, bem como para que os professores que a estudam consigam pensar e refletir a respeito da sua prática docente.

É fato que, na elaboração da THA, provavelmente não estarão elencadas todas as situações que podem acontecer durante o processo. Para isso, o professor tem que estar preparado para possíveis intercorrências no processo e lidar com elas de forma natural para passar confiança aos alunos. São válidas todas as intercorrências para que o replanejamento seja feito e melhorado para uma próxima aplicação.

O desenvolvimento de uma THA pode ser imaginado da seguinte forma:

Figura 1 – Modelo de uma dinâmica de uma THA

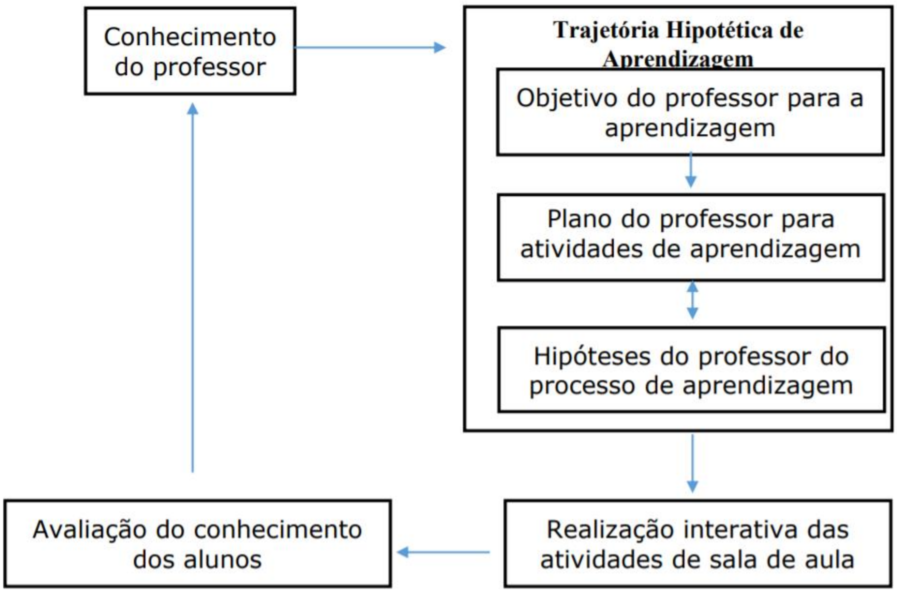


Fonte: O autor

Neste modelo, podemos observar que, ao conceber sua THA, o professor estabelece um ciclo em que, ao planejar-se para trabalhar com um determinado conceito, ele elenca todas as possíveis intercorrências que podem existir na aplicação, lembrando que o engessamento não é algo aceitável. Durante o processo, o professor analisa todas as possibilidades viáveis que foram aplicadas e/ou modificadas a fim de passar para a próxima fase, que é a do replanejamento. Quando replanejada, a THA pode ser processada novamente com as alterações feitas ou, se a proposta não foi efetivada com sucesso, volta-se à fase de planejamento para começar o ciclo outra vez, tendo como base o que deu ou não certo no processo.

Simon (1995) apresentou a trajetória hipotética de aprendizagem por meio do Ciclo de Ensino de Matemática que ele desenvolveu como um modelo do inter-relacionamento cíclico de aspectos que envolvem o conhecimento do professor, seu pensamento e a tomada de decisões com relação ao seu planejamento.

Figura 2 – Ciclo de ensino de matemática (abreviado) de Simon (1995)



Fonte: Rosseto (2016, p. 47)

Enquanto os objetivos de aprendizagem fornecem uma direção para a elaboração da trajetória hipotética de aprendizagem, a seleção de tarefas e as hipóteses sobre o processo da aprendizagem dos estudantes são interdependentes (OLIVEIRA, 2014, p. 48). As tarefas são selecionadas com base nas hipóteses que o professor tem quanto ao processo de aprendizagem, e a hipótese do processo de aprendizagem está baseada nas tarefas que estarão envolvidas (SIMON, TZUR, 2004).

> Por um lado, as possíveis perguntas e dúvidas previstas na elaboração da THA podem permitir ao professor maior segurança no gerenciamento da elaboração da proposta. Por outro lado, durante o desenvolvimento da THA em sala de aula, as perguntas e dúvidas previstas ou não na elaboração da THA podem permitir ao professor maior segurança no gerenciamento da execução da proposta. Ao relatar as hipóteses, professores podem utilizar diálogos hipotéticos com os alunos para prever perguntas que possam levar os alunos a refletirem, pensarem a respeito da tarefa. (ROSSETO, 2016, p.25)

Portanto, ao analisarmos o que o PCN nos traz a respeito da educação matemática para nossos alunos, bem como os índices preocupantes da aprendizagem da Matemática de acordo com os principais meios avaliativos e a visão da elaboração de uma THA, vamos propor uma atividade que consiste em determinar a área de um polígono regular utilizando-se de conceitos básicos de Geometria para alunos do Ensino Médio.

CAPÍTULO III – CONCEITOS DE GEOMETRIA

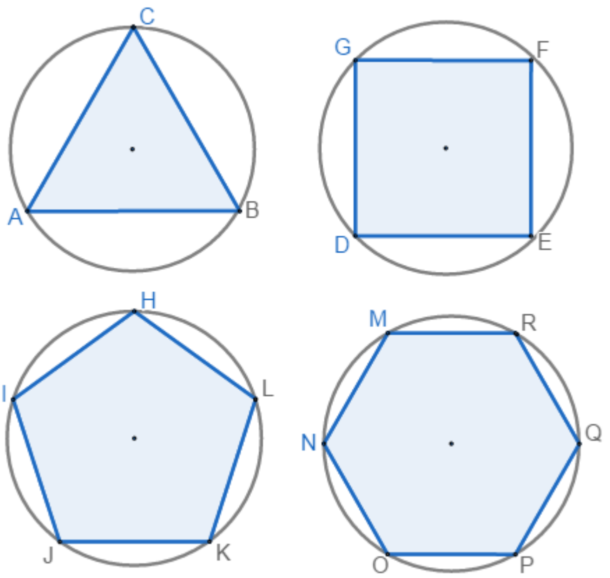
Como o objetivo desse trabalho é propor e analisar uma generalização para a área de polígonos regulares, vamos estabelecer alguns conceitos básicos de Geometria. Esses mesmos conceitos seriam revisitados[7] junto aos alunos de uma turma, antecipadamente, para favorecer a aplicação da atividade de generalização que seria proposta posteriormente.

Os conceitos dos conteúdos abordados nesse capítulo foram baseados nas definições encontradas em Dante (2010).

3.1 Polígonos Regulares

Polígonos **regulares** têm como característica todos os lados e ângulos internos e externos congruentes. Sempre poderá ser inscrito em uma circunferência. A seguir, temos alguns exemplos de polígonos regulares inscritos em circunferências.

Figura 3 – Polígonos regulares



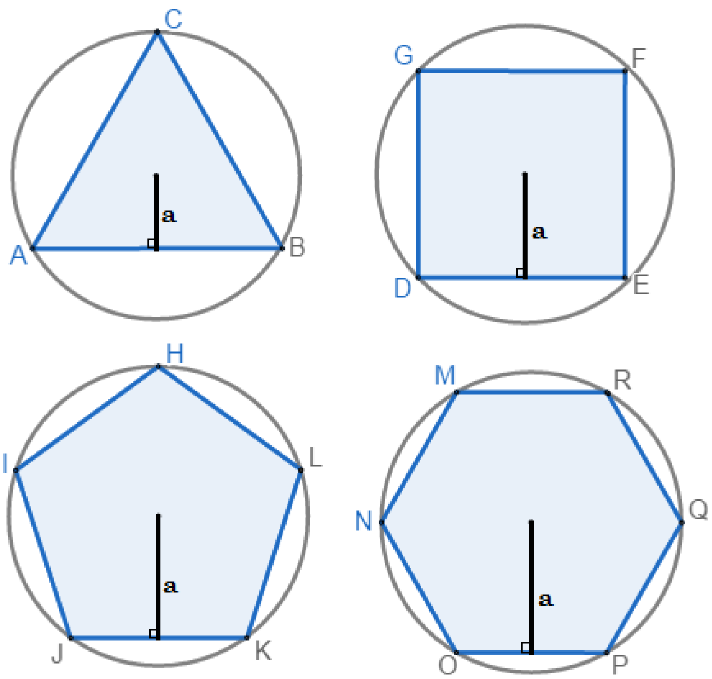
Fonte: O autor

[7] Considerando que os alunos já tenham estudado esses conteúdos anteriormente.

3.2 APÓTEMA DE POLÍGONOS REGULARES

O apótema (representaremos pela letra **a**) **de um polígono regular** é o segmento de reta que tem extremidades no centro da circunferência circunscrita e no ponto médio de um dos lados do polígono, formando com este lado um ângulo reto.

Figura 4 – Apótema dos polígonos regulares

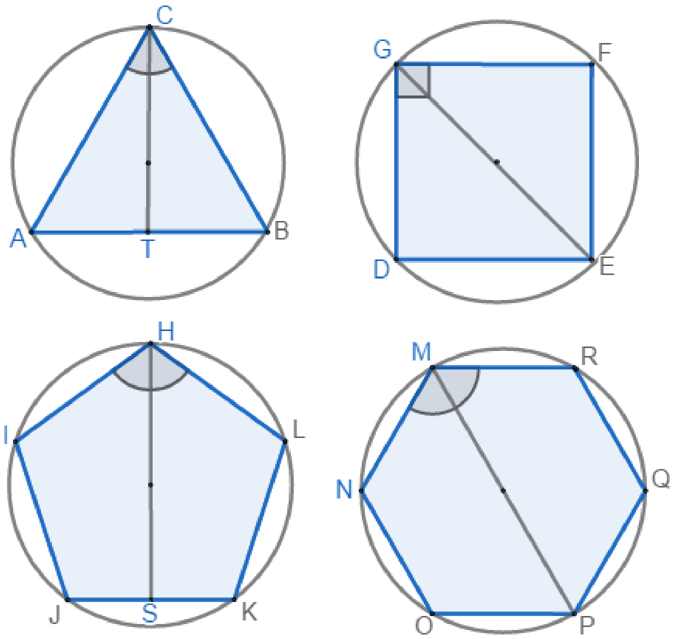


Fonte: O autor

3.3 BISSETRIZ DE UM ÂNGULO INTERNO DE UM POLÍGONO

Bissetriz de um ângulo interno de um polígono é o segmento de reta com origem no vértice desse ângulo e que o divide em dois outros ângulos congruentes.

Figura 5 – Bissetriz de um ângulo interno de um polígono



Fonte: O autor

Dos polígonos regulares apresentados, temos que:

No triângulo ABC, $\overline{CT}$[8] é bissetriz de $A\hat{C}B$;

No quadrado $DEFG$, $\overline{GE}$ é bissetriz de $D\hat{G}F$;

No pentágono $HIJKL$, $\overline{HS}$ é bissetriz de $I\hat{H}L$;

No hexágono $MNOPQR$, $\overline{MP}$ é bissetriz de $N\hat{M}R$;

3.4 Soma Dos Ângulos Internos De Um Polígono

A soma dos ângulos internos de um polígono qualquer é dada pela relação:

$$S_i = 180° \, . \, (n - 2)$$

Sendo que S_i é a soma dos ângulos internos do polígono e n é o número de lados do polígono.

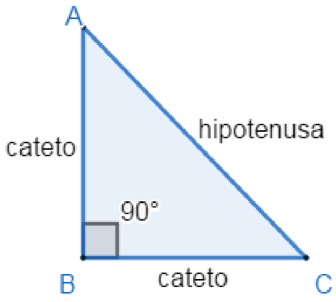
---

[8] $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$ é igual a segmento de reta limitado pelos pontos A e B.

3.5 TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras, na geometria euclidiana, indica que em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Figura 6 – Triângulo retângulo



Fonte: O autor

3.6 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

As razões trigonométricas no triângulo retângulo são relações que existem entre os lados de um triângulo retângulo. As que abordamos com mais frequência são seno, cosseno e tangente. Dados os três lados de um triângulo retângulo, temos que:

Seno de um ângulo: é a razão entre a medida do cateto oposto a este ângulo dividido pela hipotenusa do triângulo retângulo.

$$sen\ \theta = \frac{cateto\ oposto\ a\ \theta}{hipotenusa}$$

Cosseno de um ângulo: é a razão entre a medida do cateto adjacente a este ângulo dividido pela hipotenusa do triângulo retângulo.

$$cos\ \theta = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \theta}{hipotenusa}$$

Tangente de um ângulo: é a razão entre a medida do cateto oposto a este ângulo dividido pelo cateto adjacente a este ângulo.

$$tg\ \theta = \frac{cateto\ oposto\ a\ \theta}{cateto\ adjacente\ a\ \theta}$$

3.7 Quadro dos ângulos notáveis

O quadro dos ângulos notáveis é bastante útil para cálculos de razões trigonométricas, pois em diversas situações os ângulos de 30°, 45° e 60° aparecem.

Quadro 1 - Ângulos notáveis

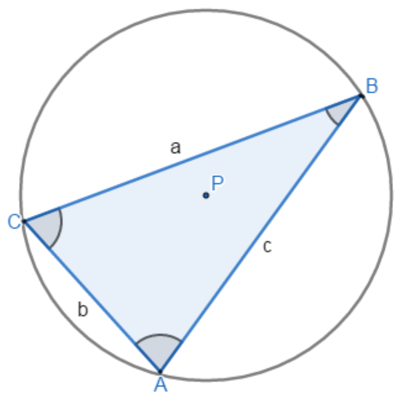
	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: O autor

3.8 Lei dos Senos

A lei dos senos determina que, em um triângulo qualquer, vale a relação de que o seno de um ângulo qualquer deste triângulo é proporcional a medida do seu lado oposto.

Figura 7 – Lei dos Senos



Fonte: O autor

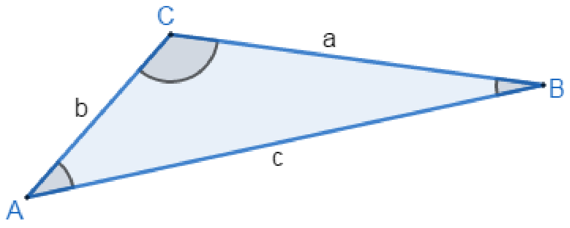
$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C} = 2R$$

Sendo R a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

3.9 LEI DOS COSSENOS

A Lei dos Cossenos é utilizada quando, num triângulo qualquer, deseja-se encontrar as medidas de um lado ou de um ângulo, sendo já conhecidas as outras medidas.

Figura 8 – Lei dos Cossenos



Fonte: O autor

Do esboço anterior, valem as seguintes relações:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \,.\, b \,.\, c \,.\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \,.\, a \,.\, c \,.\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \,.\, a \,.\, b \,.\cos C$$

3.10 FÓRMULA DE HERON

A fórmula de Heron[9] de Alexandria permite calcular a área de um triângulo qualquer, sem a necessidade de saber a sua altura. Basta saber as medidas dos lados do triângulo e estabelecer a seguinte relação:

$$Área = \sqrt{p \,.\, (p-a).\,(p-b).\,(p-c)}$$
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Neste caso, a, b e c são os três lados conhecidos do triângulo e p é o seu semi-perímetro. O semi-perímetro é a medida da metade do perímetro P de uma figura geométrica, sendo o perímetro a soma das medidas dos lados da figura.

[9] Heron de Alexandria, ou Hero, ou Herão (10 d.C. – 80 d.C.), foi um matemático, geômetra, engenheiro, físico e inventor. Suas principais obras foram a fórmula que leva o seu nome e a eolípila (primeiro motor a vapor documentado na história).

CAPÍTULO IV – PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa que apresentamos aqui tem natureza qualitativa. Para Bogdan e Biklen (1994, p.11), a pesquisa qualitativa é aquela que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais. Os autores apresentam as seguintes características de uma pesquisa qualitativa: a investigação qualitativa é descritiva; os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; os pesquisadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; e o significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Este trabalho tem como objetivo ilustrar uma THA, a qual pode instrumentalizar o trabalho docente, no sentido de o professor conhecer um modo pelo qual pode orientar um trabalho de dedução e generalização em sala de aula. Por outro lado, pode mostrar para os alunos que trabalhar de forma algébrica na Matemática é um processo interessante para a sua aprendizagem, além de justificar que as deduções algébricas são construtivas não apenas para resolução de problemas da Matemática, mas em outros processos reflexivos, como, o processo de raciocínio, o que é muito válido para a vida. Moura (2007) diz que:

> Aprender matemática não é só aprender uma linguagem, é adquirir também modos de ação que possibilitem lidar com outros conhecimentos necessários a sua satisfação, às necessidades de natureza integrativas, com o objetivo de construção de solução de problemas tanto do indivíduo quanto do coletivo (MOURA, 2007, p. 62).

De acordo com a BNCC[10] (BRASIL, 2017) são válidas as diversas abordagens para o aprimoramento do conhecimento. O documento diz que:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BNCC, 2017, p.9)

[10] A BNCC (Base Nacional Comum Curricular) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. (MEC)

Ainda com base na BNCC, o documento orienta que é importante os professores mostrarem para os alunos que a Matemática tem diversas linguagens.

> Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. (BNCC, 2017, p.523)

Baseado nestes parâmetros da BNCC pode-se analisar a importância da dedução de fórmulas matemáticas no processo de aprendizagem para a obtenção de um conhecimento mais claro, capaz de fazer o aluno compreender com nitidez o que está sendo trabalhado de conteúdo e exercitar sua capacidade de raciocínio lógico não apenas na Matemática, mas também um raciocínio que pode servir para muitas situações da vida.

Abordar este conceito de dedução de fórmulas em sala de aula através de uma THA faz com que o professor se empodere ainda mais durante o processo, possibilitando-o conhecer e dominar o conteúdo abordado e, especialmente, motivar ainda mais o seu aluno, fazendo-o refletir sobre os conteúdos antes aprendidos e o que é possível realizar a partir deles, em termos da matematização[11]. Com relação ao aluno, esse processo pode torná-lo mais ativo e participativo, mostrando como a interpretação mais profunda de um conceito matemático pode ser favorável às outras áreas do pensamento matemático e, consequentemente, à vida.

Além do objetivo geral desse trabalho, a THA em específico possui seus objetivos, os quais são voltados a sua própria execução em sala de aula, e que serão descritos no próximo capítulo.

As atividades que serão apresentadas aos alunos na THA proposta têm por finalidade deduzir áreas de polígonos regulares de maneiras distintas. Faremos uma THA através de um diálogo hipotético entre um professor (P) e seus

[11] “Matematizar é organizar a realidade usando ideias e conceitos matemáticos. É a atividade de organização, segundo a qual os estudantes utilizam os conhecimentos e as habilidades adquiridas para descobrir regularidades, relações e estruturas desconhecidas” (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 109, tradução nossa).

alunos (A1, A2, A3, ...). Esses diálogos têm como inspiração aulas ministradas no decorrer de anos da prática docente.

Para todas as deduções, serão usadas as seguintes abreviações:

n: número de lados do polígono regular

l: medida dos lados do polígono regular

a: apótema do polígono

h: altura relativa a um dos lados do polígono

CAPÍTULO V - DEDUÇÃO DAS FÓRMULAS ATRAVÉS DE UMA THA

Nesta seção, vamos descrever nossa Trajetória Hipotética de Aprendizagem, com os objetivos de:

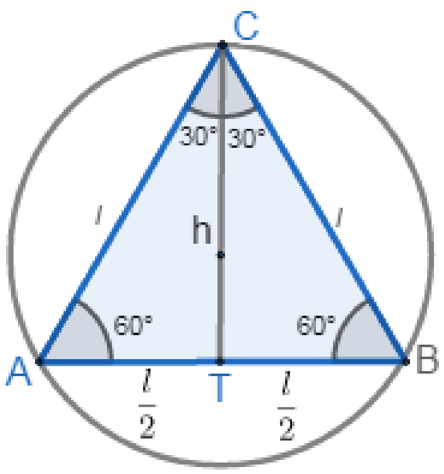
- Visualizar que a abordagem algébrica na Matemática é uma forma de estabelecê-la de maneira mais abrangente;
- Refletir sobre a explicitação de outros conteúdos matemáticos, utilizando da mesma linha de raciocínio;
- Reinventar o modo de ver a Matemática através de uma abordagem indutiva;
- Promover um conhecimento capaz de aperfeiçoar o raciocínio lógico;
- Aprender conceitos de geometria plana;
- Desenvolver competências associadas à generalização.

As tarefas de aprendizagem que são pertinentes a essa THA não são dadas convencionalmente, como por enunciados e comandos escritos, ou como tarefas e atividades rotineiras de um livro didático. A ideia é que os comandos das tarefas sejam dados oralmente pelo professor regente da proposta, em forma de diálogos convidativos, que serão explicitados ao longo das subseções seguintes.

O caráter hipotético do processamento está embutido nos diálogos hipotéticos apresentados, que são frutos do conhecimento do professor-pesquisador sobre o conteúdo, sobre os alunos, acrescido de sua experiência de sala de aula.

5.1 ÁREA DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Figura 9 – Triângulo equilátero



Fonte: O autor

5.1.1 Primeiro modo de calcular a área do triângulo equilátero

Começa o diálogo.

P: - Nas próximas aulas, vamos deduzir as áreas de quatro polígonos regulares: triângulo equilátero, quadrado, pentágono e hexágono, utilizando os conceitos de Geometria que vimos nas aulas anteriores.

P: - Primeiramente, vamos determinar a área de um triângulo equilátero. Alguém pode me responder quais as características de um triângulo equilátero?

A1: - Tem todos os lados de mesma medida.

P: - Ok. Mais alguma característica?

A2: - Todos os ângulos também têm a mesma medida.

P: - Muito bom. Qual a medida de cada ângulo em graus?

A2: - Sessenta graus?

A3: - Por que sessenta graus?

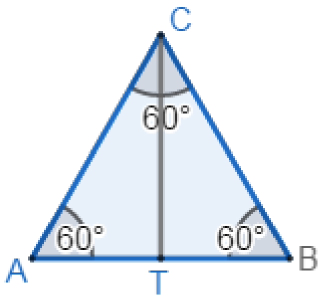
P: - Alguém sabe responder?

A1: - Porque a soma dos ângulos internos de um triângulo equivale a cento e oitenta graus. Como todos os ângulos tem a mesma medida, então basta dividir por três.

P: - Entendeu, A3? Muito bem, A1. Agora, o que acontece se traçarmos um segmento de reta de um dos vértices até o ponto médio do lado oposto a este vértice como este exemplo?

(*professor faz o desenho no quadro*)

Figura 10 – Triângulo equilátero II



Fonte: O autor

A4: - Formará dois triângulos semelhantes.

P: - Muito bem, A4. E como ficarão os ângulos desse novo triângulo (ACT), por exemplo?

A1: - Um ângulo de sessenta graus, um de noventa graus e o outro de trinta graus.

P: - Então esse novo triângulo será um triângulo retângulo?

Alunos: - SIM!

P: - Quando nos deparamos com situações que contêm o triângulo retângulo, qual conceito matemático vem à mente?

A5: - Teorema de Pitágoras?

P: - Isso mesmo. O Teorema de Pitágoras. Mais algum conceito matemático?

A1: - Seno, cosseno e tangente, professor?

P: - Isso. Muito bem. No caso, seriam relações trigonométricas no triângulo retângulo. Alguém lembra de alguma Lei que estudamos que se aplica em triângulos?

A2: - Lei dos senos e cossenos, professor?

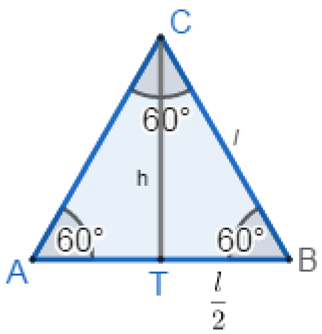
P: - Exatamente. Vamos determinar a área de um triângulo equilátero dessas maneiras que vocês disseram. Trabalhando com o teorema de Pitágoras primeiro, quem lembra qual a fórmula?

A1: - A soma dos quadrados dos catetos é igual a hipotenusa ao quadrado.

A2: - É a ao quadrado igual a b ao quadrado mais c ao quadrado.

P: - Isso mesmo. Apenas lembrando que, nesse caso, o valor da variável a será a hipotenusa. Qual o valor da hipotenusa nesse caso?

Figura 11 – Triângulo equilátero III



Fonte: O autor

A3: - A hipotenusa será o l e os catetos serão h e $\frac{l}{2}$.

A5: - Por que um dos lados mede $\frac{l}{2}$?

P: - Alguém saberia responder?

A1: - Porque, quando traçamos o seguimento $\overline{CT}$, estaremos dividindo o seguimento $\overline{AB}$ em duas partes de mesma medida, no caso seria $\frac{l}{2}$.

P: - Isso mesmo. Agora, vamos colocar na fórmula. Ficaria assim:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

P: - Neste caso, qual variável temos que deixar em evidência?

A2: - Como assim em evidência?

P: - Isolado. Tipo, l é escrito em função das demais variáveis ou pode ser h é igual a outras variáveis.

A1: - Temos que isolar o valor do h.

P: - Por quê?

A1: - Porque a área de um triângulo é base vezes altura dividido por dois.

A5: - Eu ainda não entendi. Porque não podemos isolar o l?

P: - Poderíamos isolar o valor do l, no entanto teríamos a fórmula em função da altura do triângulo. Vamos convencionar a deixar as fórmulas em função do lado. Ok? Portanto, como ficaria a resolução?

(*esperar alguns minutos para ver se algum aluno resolve*).

P: - Como temos que isolar o valor do h, temos o seguinte:

$$l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$l^2 - \frac{l^2}{4} = h^2$$

$$\frac{3l^2}{4} = h^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

P: - Agora que sabemos o valor da altura, como podemos calcular a área do triângulo?

A1: - A área do triângulo não é “base vezes altura dividido por dois”, professor?

P: - Exatamente. Quem é a base do nosso triângulo ABC?

A5: - O l?

P: - Isso. Então a área ficaria assim:

$$Área_{ABC} = \frac{b\,.\,h}{2}$$

$$Área_{ABC} = \frac{l\,.\frac{l\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$Área_{ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

P: - Tranquilo, pessoal. Qualquer dúvida é só perguntar.

Ao final dessa abordagem, busca-se mostrar ao aluno como trabalhar algebricamente, bem como evidenciar que um conceito matemático pode ser resolvido de outras formas que não as convencionais. No caso da área de um triângulo, o mais trivial é o pensamento de que a sua concepção é dada pela metade do produto das medidas de sua base e altura.

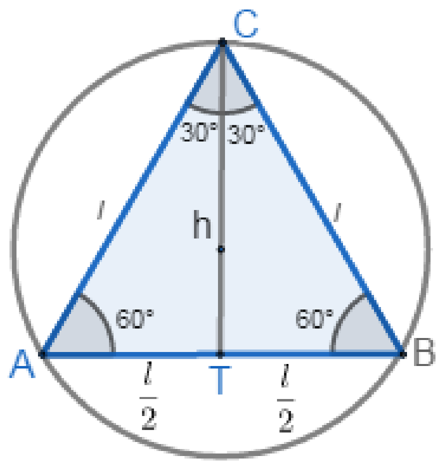
5.1.2 Segundo modo de calcular a área do triângulo equilátero

Começa o diálogo:

P: - Agora vamos determinar a área de um triângulo equilátero, utilizando conceitos de trigonometria. Primeiramente, analisem o seguinte esboço.

(*Professor desenha o esboço no quadro ou projeta*).

Figura 12 – Triângulo equilátero IV



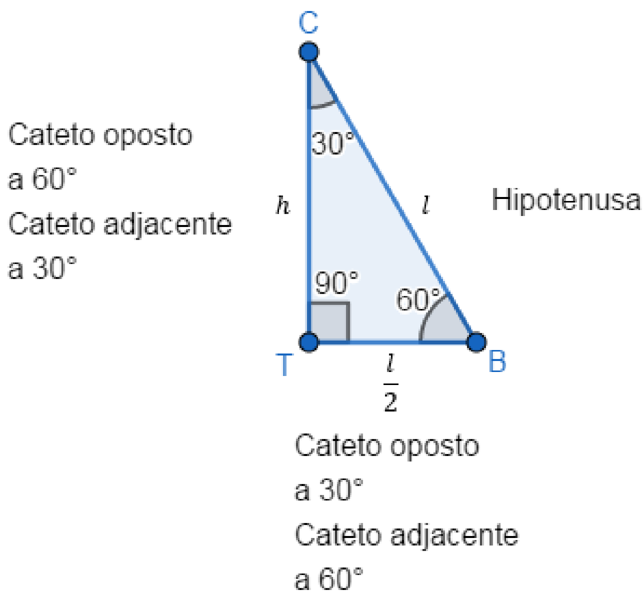
Fonte: O autor

A1: - Tem dois triângulos retângulos semelhantes.

P: - Exatamente. Então, temos dois triângulos da seguinte forma:

(Professor desenha o esboço no quadro ou projeta).

Figura 13 – Triângulo retângulo da retirado do triângulo equilátero



Fonte: O autor

P: - Com base nesse esboço, como podemos trabalhá-lo usando os conceitos de trigonometria?

A1: - Dá para trabalhar com seno, cosseno e tangente?

P: - Isso mesmo. Razões trigonométricas. Mas como é mesmo que se calcula a área de um triângulo?

A3: - É base vezes altura dividido por dois.

P: - Ok. Então precisamos encontrar o valor da altura do triângulo CTB que, no caso, seria o seguimento $\overline{CT}$. Como queremos determinar o cateto $\overline{CT}$, podemos determinar as razões trigonométricas através dos ângulos de sessenta graus ou o de trinta graus. Correto?

P: - Se adotarmos o ângulo de sessenta graus, o cateto $\overline{CT}$ será o cateto oposto e l será a hipotenusa. Logo, vamos ter qual razão trigonométrica?

A1: - Seno.

P: Agora, determinem o valor da altura h em função do lado l.

(Esperar alguns instantes para ver se algum aluno faz os cálculos).

P: - Vamos ver como ficou.

$$sen\ 60° = \frac{h}{l}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{l}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

P: - Agora que temos a medida h em função de l, podemos determinar a área do triângulo ABC. Vamos lá?

(Esperar alguns instantes para ver se algum aluno faz os cálculos).

$$Área_{ABC} = \frac{b\ .h}{2}$$

$$Área_{ABC} = \frac{l\ .\frac{l\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$Área_{ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Nesta segunda abordagem, busca-se o aprendizado mais detalhado do aluno com relação a calcular algebricamente uma situação matemática e analisar, novamente, que existem vários métodos para a obtenção de uma resolução matemática.

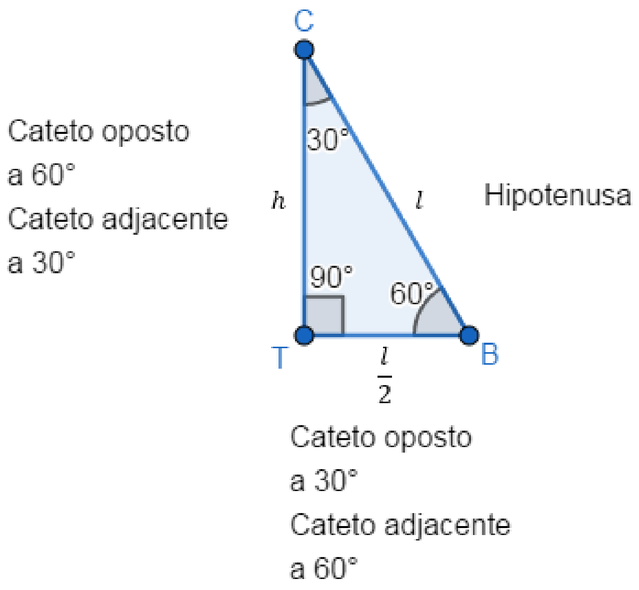
5.1.3 Terceiro modo de calcular a área do triângulo equilátero

Para este terceiro modo, o professor será mais direcionador, utilizando-se dos conceitos já obtidos nos métodos anteriores e de conhecimentos prévios.

Começo do diálogo:

P: - Pessoal. Para esta próxima dedução da área de um triângulo equilátero, vamos adotar o ângulo de trinta graus do triângulo CTB.

Figura 14 – Triângulo retângulo da dedução do triângulo equilátero



Fonte: O autor

P: - Qual o primeiro lado que temos que adotar para os nossos cálculos e por quê?

A2: - Não pode ser qualquer lado, professor?

P: - Lembre-se de que, para determinarmos a área de um triângulo, precisamos da base e da altura. Como vamos determinar a área em função do lado l, então temos que determinar qual medida em função de qual medida, primeiramente?

A6: - A medida da altura em função do lado, como na dedução anterior, professor?

P: - Exatamente. Como podemos fazer esta igualdade com as medidas que temos?

(*Aguardar a análise dos alunos*)

A1: - Usando cosseno de trinta graus.

P: - Isso mesmo. Está é uma opção. Teria mais alguma?

A3: - Pode ser através de tangente de trinta graus?

P: - Isso. Vamos fazer através de tangente de trinta graus. Ficaria assim:

$$tg\ 30° = \frac{\frac{l}{2}}{h}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{l}{2}}{h}$$

$$h\sqrt{3} = 3\ .\frac{l}{2}$$

$$h\sqrt{3} = \frac{3l}{2}$$

$$h = \frac{3l}{2\sqrt{3}}$$

P: - Como ficamos com uma raiz quadrada no denominador, o que devemos fazer agora?

A1: - Racionalizar.

A7: O que é racionalizar?

P: Alguém sabe responder?

(Ver se algum aluno manifesta alguma resposta)

A1: É multiplicar o numerador e o denominador da fração pela raiz do denominador.

P: De certa forma é isso mesmo. Mais precisamente seria transformarmos um número irracional no denominador em um número racional. Portanto, para este caso, basta fazermos o que o A1 disse.

$$h = \frac{3l}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{3l\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{9}}$$

$$h = \frac{3l\sqrt{3}}{2 \cdot 3}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

P: - Agora, basta fazemos o mesmo procedimento nas outras deduções.

$$Área_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$Área_{ABC} = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$Área_{ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

P: Alguma dúvida, pessoal?

Nesta terceira abordagem, espera-se que o aluno já esteja familiarizando com o pensamento algébrico e com os benefícios de fazer essas generalizações para o aperfeiçoamento de concepção dos conteúdos não apenas matemáticos, mas, também, de outras disciplinas.

5.1.4 Quarto modo de calcular a área do triângulo equilátero

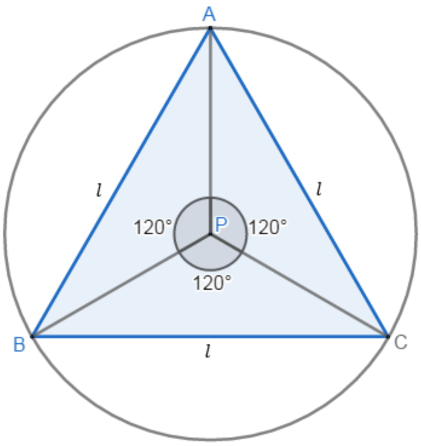
Para esta abordagem, o professor também terá que ser um direcionador, pois vamos fazer uma abordagem diferente das três primeiras.

Começa o diálogo.

P: - Pessoal. Agora que já determinamos a área de um triângulo equilátero de três modos distintos, vamos fazer de uma quarta maneira, porém analisando o triângulo de uma forma diferente. Analisem o seguinte triângulo equilátero.

(professor esboçará o desenho no quadro).

Figura 15 – Triângulo equilátero inscrito na circunferência



Fonte: O autor

P: - O que é possível analisar do esboço apresentado?

A1: - Fica com três triângulos semelhantes.

P: - Por quê?

A1: Porque todos têm um ângulo de cento e vinte graus e a base tem como medida l.

P: - O que podemos fazer para determinar a área de cada um desses triângulos? Alguém tem alguma sugestão?

A3: - Multiplicar a base pela altura?

P: - Isso. Mas qual é a base e qual é a altura do triângulo BPC, por exemplo?

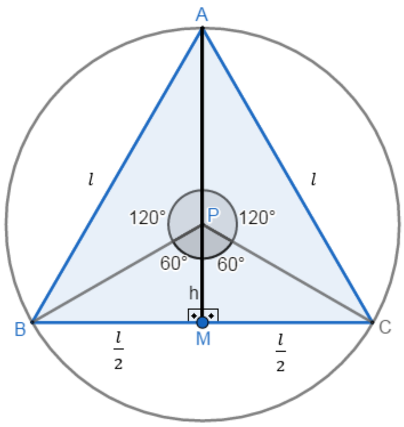
A4: - A base é l, mas a altura eu não sei.

A1: - Tem que fazer um segmento de P até o ponto médio da base, professor.

P: - Exatamente. Então ficaríamos com o seguinte esboço:

(professor esboçará o desenho no quadro)

Figura 16 – Triângulo equilátero inscrito na circunferência II



Fonte: O autor

P: - Quando traçamos o segmento de reta $\overline{PM}$, estamos determinando qual medida do triângulo?

A1: - A altura?

P: - A altura relativa do triângulo BPC em relação ao lado $\overline{BC}$, que também é o apótema do triângulo. Lembram do conceito de apótema que vimos nas aulas anteriores?

(Esperar algum aluno se manifestar quanto ao conhecimento deste conceito)

P: - **O apótema** (representaremos pela letra **a**) **de um polígono regular** é o segmento de reta que une o centro da circunferência circunscrita ao ponto médio do lado formando um ângulo reto. (conforme **3.2**)

P: - Então, para determinarmos a área do triângulo BPC, temos que expressar a altura h em função de l. Correto? Como podemos fazer isso?

A1: - Usando trigonometria?

P: - Isso mesmo. A altura h é qual cateto do triângulo BPC em relação ao ângulo de sessenta graus? E a medida do cateto $\frac{l}{2}$?

A4: - A medida $\frac{l}{2}$ seria o cateto oposto e a medida h seria o cateto adjacente?

P: - Perfeito. Então vamos utilizar qual das razões trigonométricas que tem cateto oposto e cateto adjacente?

A1: - Tangente.

P: - Isso mesmo. Tangente que é a razão entre o cateto oposto pelo cateto adjacente. Então ficaríamos com o seguinte:

$$tg\ 60° = \frac{\frac{l}{2}}{h}$$

P: - Vocês podem determinar a medida de h em função da medida l sem substituir o valor da tangente de 60°? Como ficaria?

(aguardar alguns instantes para ver se algum aluno expressa o resultado)

A1: - Por que não vamos substituir o valor de tangente de sessenta graus?

P: - Nós podemos substituir, porém, vamos deixar para fazer isso no final, pois faremos uma análise posterior do resultado. Ok? Ficaria assim então:

$$tg\ 60° = \frac{\frac{l}{2}}{h}$$

$$h = \frac{\frac{l}{2}}{tg\ 60°}$$

$$h = \frac{l}{2\,.\,tg\ 60°}$$

P: - Agora que temos a medida da altura h em função do lado l, vamos determinar a área do triângulo BPC.

(Aguardar para ver se algum aluno expressa o resultado)

P: - Ficaríamos com o seguinte resultado:

$$Área_{BPC} = \frac{l \cdot \frac{l}{2 \cdot tg\ 60°}}{2}$$

$$Área_{BPC} = \frac{\frac{l^2}{2 \cdot tg\ 60°}}{2}$$

$$Área_{BPC} = \frac{l^2}{4 \cdot tg\ 60°}$$

P: - Esta seria a área do triângulo BPC. Mas qual seria a área do triângulo ABC?

A1: É só multiplicar este resultado por três.

P: - Perfeito. Então ficaríamos com a seguinte relação:

$$Área_{ABC} = 3 \cdot Área_{BPC}$$

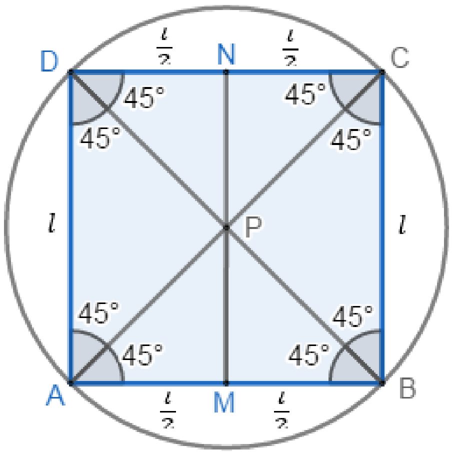
$$Área_{ABC} = 3 \cdot \frac{l^2}{4 \cdot tg\ 60°}$$

P: - Vamos deixar esta relação desta forma, pois quando determinarmos as áreas de outros polígonos regulares, veremos as particularidades que encontraremos nela. Tudo bem?

Nesta etapa das deduções, os alunos podem ficar questionando os "porquês" de não substituirmos o valor de tangente de sessenta graus. Deve-se deixar claro de que retornaremos para uma avaliação mais criteriosa desta relação comparando-a com as de outros polígonos regulares.

5.2 ÁREA DO QUADRADO

Figura 17 – Quadrado



Fonte: O autor

5.2.1 Primeiro modo de calcular a área do quadrado

Para esta primeira abordagem, o professor trabalhará alguns conceitos básicos de Geometria, a fim de elucidar o que será trabalhado posteriormente de forma mais clara e direta.

Começa o diálogo.

P: - Quais são as características de um quadrado?

A3: - Tem todos os congruentes.

A7: - Tem todos os ângulos congruentes também.

P: - Isso mesmo. E qual a medida de cada um destes ângulos congruentes?

A4: - Noventa graus.

P: - Beleza. Agora, como podemos calcular a área de um quadrado?

A1: - Lado vezes lado.

A6: - Lado ao quadrado.

P: - Estas são duas formas válidas para calcularmos a área de um quadrado. Mas, como vimos no triângulo, será que temos outras formas de calcular a área de um quadrado? Alguém tem alguma sugestão?

(Aguardar para ver se algum aluno se manifesta)

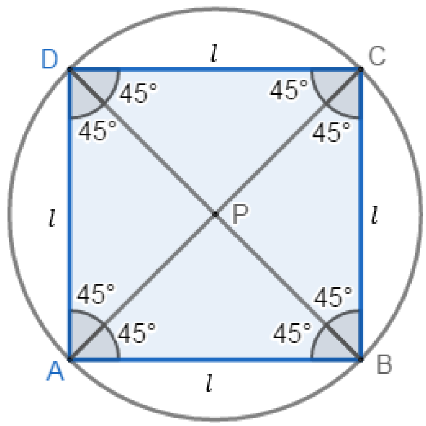
P: - Podemos trabalhar com triângulos utilizando o quadrado? Se sim, como?

A1: - Traçando a diagonal do quadrado.

P: - Vamos ver como ficaria?

(Professor desenha ou projeta o esboço no quadro)

Figura 18 – Quadrado inscrito na circunferência



Fonte: O autor

P: - Quando traçamos as duas diagonais, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, ficamos com quais tipos de triângulos?

A1: - Quatro triângulos semelhantes.

A8: - Quatro triângulos com dois lados congruentes e um diferente.

A5: - Seriam triângulos isósceles, professor?

P: - Isso mesmo. Como podemos determinar a área do quadrado através destes quatro triângulos?

A4: - Calculando a área de um triângulo e depois multiplicar por quatro.

P: - Exatamente. Então, vamos tomar o triângulo APB e calcular a sua área. Para isso, precisamos determinar qual medida em função de quem? Lembrem-se do exemplo que fizemos na área do triângulo equilátero.

Neste momento, espera-se que os alunos remetam a como determinar a altura h em função do lado l, como foi mostrado anteriormente.

A1: - Achar a altura em função do lado?

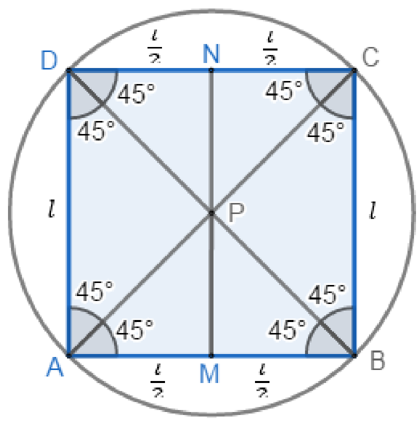
P: - Isso mesmo. Mas, qual segmento de reta temos que traçar para determinar a altura?

A1: - Do ponto médio de $\overline{AB}$ ao ponto médio de $\overline{CD}$.

P: - Exatamente. Então ficaríamos com o seguinte esboço.

(Professor desenha ou projeta o esboço no quadro)

Figura 19 – Quadrado inscrito na circunferência II



Fonte: O autor

P: - Neste esboço, qual seria a altura do triângulo APB? E por quê?

A3: - Seria o segmento $\overline{PM}$, por exemplo, professor?

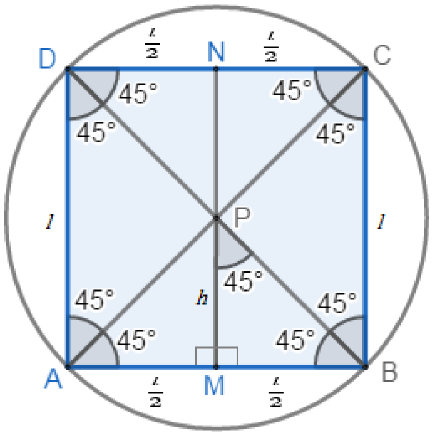
P: - Sim. E como podemos afirmar que o segmento $\overline{PM}$ é a altura de APB?

A1: - O segmento $\overline{MN}$ está unindo os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Como a figura é um quadrado, M está dividindo $\overline{AB}$ em duas partes iguais. Como o segmento $\overline{MN}$ é paralelo aos lados do quadrado, o ângulo $B\widehat{M}P$ é de noventa graus.

P: - Boa explicação. Então, temos o seguinte esboço:

(Professor desenha ou projeta o esboço no quadro)

Figura 20 – Quadrado inscrito na circunferência III



Fonte: O autor

P: - Vamos determinar a altura h em função do lado l, utilizando qual conceito matemático?

A1: - Razões trigonométricas.

P: - Exatamente. Como os dois ângulos agudos medem quarenta e cinco graus, podemos adotar tanto o ângulo $M\hat{B}P$ quanto o ângulo $M\hat{P}B$. Se tomarmos o ângulo $M\hat{B}P$, temos que $\frac{l}{2}$ e h são quais catetos?

A3: - O lado $\frac{l}{2}$ seria o cateto adjacente e o lado h seria o cateto oposto. Então usaríamos a tangente, professor?

P: - Isso mesmo. Ficaríamos com o seguinte cálculo.

$$tg\ 45° = \frac{h}{\frac{l}{2}}$$

$$1 = \frac{h}{\frac{l}{2}}$$

$$\frac{l}{2} = h$$

P: - Agora que sabemos o valor da altura h em função do lado l, podemos calcular a área do triângulo APB.

(Aguardar algum aluno expressar que conseguiu chegar no resultado)

$$Área_{APB} = \frac{l \cdot \frac{l}{2}}{2}$$

$$Área_{APB} = \frac{l^2}{4}$$

P: - Agora, como determinamos a área do quadrado ABCD utilizando a área do triângulo APB?

A8: - É só multiplicar por quatro.

P: - Isso mesmo. Façam isso e digam qual resposta encontraram.

(Aguardar a resposta de algum aluno)

A1: - Deu o valor do lado ao quadrado, professor.

P: - Exatamente. Ficou assim.

$$Área_{ABCD} = 4 \cdot \frac{l^2}{4}$$

$$Área_{ABCD} = l^2$$

P: - Alguma dúvida, pessoal?

Nesta abordagem, espera-se que o aluno compreenda que um polígono pode ser dividido em triângulos e, com isso, pode-se aplicar as deduções feitas anteriormente nos triângulos aos polígonos regulares com maior números de lados.

Neste momento da THA, espera-se que o pensamento algébrico do aluno para a concepção da altura de um triângulo em função do lado já esteja mais aprimorado.

5.2.2 Segundo modo de calcular a área do quadrado

Para esta abordagem, o professor poderá sugerir, inicialmente, que os alunos façam a dedução utilizando-se da lei dos cossenos. Assim, espera-se que os alunos, mediante às deduções anteriores do triângulo equilátero, tenham a percepção de determinar, no quadrado, ângulos em triângulos e sejam capazes de aplicar esse conceito matemático. Algumas orientações podem ser dadas pelo docente em grupos para motivar a dedução por parte dos alunos.

Começa o diálogo, no coletivo:

P: - Vamos, então, determinar a área do quadrado agora, utilizando-se do conceito da lei dos cossenos. Para isso, o que devemos fazer com o quadrado?

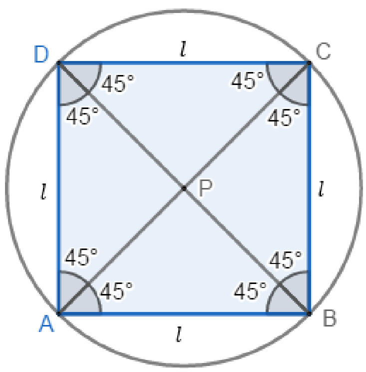
A3: - Transformar em triângulos?

P: - Mas transformar em triângulos utilizando quais recursos?

A2: - Traçando as diagonais?

P: - Perfeito. Ficaria assim, então. *(Professor desenha ou projeta o esboço no quadro)*

Figura 21 – Quadrado inscrito na circunferência IV



Fonte: O autor

P: - Traçando as diagonais, o que podemos observar na figura?

A1: - Ficamos com quatro triângulos semelhantes.

P: - Isso mesmo. Como todos os triângulos são semelhantes, como podemos calcular a área do quadrado através da área dos triângulos?

A5: - Calcular a área de um triângulo e depois multiplicar por quatro.

P: - Exatamente. Mas, para determinarmos a área de um dos triângulos, vamos adotar, por exemplo, o triângulo APB. Deste triângulo, qual a medida do ângulo $A\hat{P}B$?

A1: - Como os outros dois ângulos deste triângulo medem quarenta e cinco graus cada, temos que o ângulo $A\hat{P}B$ é igual a noventa graus, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é de cento e oitenta graus.

P: - Perfeito. Agora, vamos determinar a área do triângulo APB utilizando a fórmula de Heron. Para isso, precisamos determinar quais medidas, primeiramente?

A1: - Mas a fórmula de Heron não precisa de todos os lados?

P: - Isso mesmo. Neste caso, temos que colocar todos os lados em função de l. Como sabemos que o lado oposto ao ângulo $A\hat{P}B$ mede l, precisamos determinar a medida dos outros dois lados em função de l também. Para isso, temos várias possibilidades, e dentre elas, temos a lei dos cossenos. Aplicando-a, alguém pode me dizer como ficaria?

(Esperar para ver se algum aluno se manifesta, no mínimo, na montagem inicial da fórmula da lei dos cossenos).

P: - A lei dos cossenos é a seguinte:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,.\,b\,.\,c\,.\cos\hat{A}$$

P: - No nosso caso, quem seria a, b e c? E o ângulo $A\hat{P}B$?

A6: - O a seria o segmento $\overline{AB}$, e os lados b e c são iguais, portanto, podemos chamar de “xis” (x). Já o ângulo $A\hat{P}B$ é igual a noventa graus.

P: - Perfeito. Agora é só substituir na fórmula. Vamos lá.

$$l^2 = x^2 + x^2 - 2\,.\,x\,.\,x\,.\cos 90°$$
$$l^2 = 2x^2 - 2x^2.0$$

$$l^2 = 2x^2$$

P: - O nosso objetivo é determinar o valor do l ou do x?

A1: - Seria x em função de l.

P: - Ok. Então ficaria assim:

$$\frac{l^2}{2} = x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{l^2}{2}}$$

$$x = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

P: - Como temos um número irracional no denominador, o que fazemos agora?

A1: - Racionaliza.

P: - Perfeito.

$$x = \frac{l}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

P: - Agora que temos as três medidas do triângulo APB em função de l, podemos aplicar a fórmula de Heron. O que devemos fazer primeiro antes de aplicar a fórmula de Heron?

A1: - Determinar o semi-perímetro.

P: - Exatamente. Vamos fazer isso.

(Esperar para ver se algum aluno explicita o resultado do semi-perímetro).

$$p = \frac{l + \frac{l\sqrt{2}}{2} + \frac{l\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$p = \frac{l + \frac{2l\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$p = \frac{l + l\sqrt{2}}{2}$$

P: - Deixamos valor do semi-perímetro p em função do lado l. Agora, vamos determinar a área de APB utilizando a fórmula de Heron. Vamos lá?

(Esperar para ver se algum aluno explicita o resultado correto).

$$\text{Área}_{APB} = \sqrt{p\,.\,(p-a).\,(p-b).\,(p-c)}$$

$$\text{Área}_{APB} = \sqrt{\frac{l + l\sqrt{2}}{2}\,.\left(\frac{l + l\sqrt{2}}{2} - l\right).\left(\frac{l + l\sqrt{2}}{2} - \frac{l\sqrt{2}}{2}\right).\left(\frac{l + l\sqrt{2}}{2} - \frac{l\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$\text{Área}_{APB} = \sqrt{\frac{l + l\sqrt{2}}{2}\,.\left(\frac{l + l\sqrt{2} - 2l}{2}\right).\left(\frac{l}{2}\right).\left(\frac{l}{2}\right)}$$

$$\text{Área}_{APB} = \sqrt{\frac{l + l\sqrt{2}}{2}\,.\left(\frac{-l + l\sqrt{2}}{2}\right).\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$\text{Área}_{APB} = \sqrt{\frac{-l^2 + l^2\sqrt{2} - l^2\sqrt{2} + l^2\sqrt{4}}{4}\,.\frac{l^2}{4}}$$

$$\text{Área}_{APB} = \sqrt{\frac{-l^2 + 2l^2}{4}\,.\frac{l^2}{4}}$$

$$\text{Área}_{APB} = \sqrt{\frac{l^2}{4}.\frac{l^2}{4}}$$

$$\text{Área}_{APB} = \frac{l}{2}\,.\frac{l}{2}$$

$$\text{Área}_{APB} = \frac{l^2}{4}$$

P: - Agora que sabemos a área do triângulo APB, podemos determinar a área do quadrado $ABCD$.

(Aguardar os alunos concluírem)

P: - Ficaríamos com o seguinte:

$$\text{Área}_{ABCD} = 4\,.\,\text{Área}_{APB}$$

$$Área_{ABCD} = 4\,.\frac{l^2}{4}$$

$$Área_{ABCD} = l^2$$

P: - Esta seria outra forma de deduzirmos a área do quadrado. Tranquilo, pessoal?

Nessa abordagem, além do professor ter que instruir os alunos a utilizarem a fórmula de Heron e a lei dos cossenos, também é bem provável que ele tenha que auxiliar nos cálculos, por se tratar de frações algébricas em raízes quadradas. Nesses momentos, o professor pode aproveitar para aplicar conceitos básicos da matemática como “mínimo múltiplo comum”, “racionalização”, “operações entre números racionais e irracionais”, entre outros.

Vale ressaltar que a abordagem dessa forma implica em uma série de conhecimentos para o aluno e, por mais trabalhoso que seja aplicar para uma turma heterogênea, a validade do produto final compensa o trabalho, visto que, quanto mais o aluno se aproxima de relações matemáticas, principalmente as de generalizações, mais ele obtém os conceitos abordados, e, em um processo a médio e longo prazo, os resultados esperados, para a maioria, envolvem uma aprendizagem mais abrangente e conclusiva.

5.2.3 Terceiro modo de calcular a área do quadrado

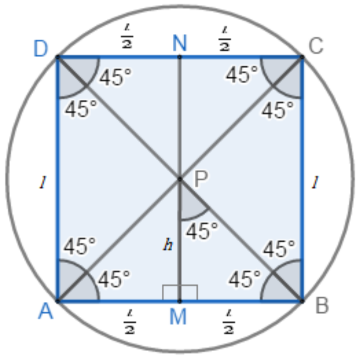
Para este modo de deduzir a área do quadrado, o professor instruirá os alunos, tal como fez na quarta abordagem do cálculo da área do triângulo equilátero.

Começa o diálogo:

P: - Para esta dedução da área do quadrado, vamos tomar o triângulo MPB do esboço a seguir.

(O professor desenha ou projeta o esboço no quadro)

Figura 22 – Quadrado inscrito na circunferência V



Fonte: O autor

P: - Se tomarmos o ângulo $M\hat{P}B$, os seguimentos $\overline{MB}$ e $\overline{MP}$ serão quais catetos?

A1: - O segmento $\overline{MB}$ será o cateto oposto ao ângulo $M\hat{P}B$ e o segmento $\overline{MP}$ será o cateto adjacente.

P: - Perfeito. Então podemos aplicar qual razão trigonométrica, adotando estas medidas?

A7: - Tangente, professor.

P: - Isso aí. Então ficaríamos com o seguinte:

(Aguardar para ver se algum aluno manifesta o resultado esperado)

$$tg\ 45° = \frac{\frac{l}{2}}{h}$$

P: - Para esta dedução, não vamos substituir o valor de tangente de quarenta e cinco por um. Vamos simplesmente deixar em função da tangente mesmo (logo vocês entenderão o motivo[12]). Como ficaria?

(Aguardar para ver se algum aluno manifesta o resultado esperado)

$$h\,.tg\ 45° = \frac{l}{2}$$

[12] O professor também pode argumentar com os alunos que, como se trata de uma atividade de dedução matemática, quanto mais genéricos forem os resultados, mais eles podem ser aplicáveis em outros contextos.

$$2h\,.\,tg\;45° = \frac{l}{2}$$

P: - Como a área do triângulo é base vezes altura dividido por dois, temos que determinar a medida da altura que, neste caso, ficaria assim:

$$h = \frac{l}{2\,.\,tg\;45°}$$

P: - Agora que temos a altura h em função do lado l, vamos determinar a área do triângulo APB.

$$Área_{APB} = \frac{l\,.\,\frac{l}{2\,.\,tg\;45°}}{2}$$

$$Área_{APB} = \frac{l^2}{4\,.\,tg\;45°}$$

P: E agora, como determinar a área do quadrado $ABCD$?

A9: - É só multiplicar por quatro.

P: Muito bem. Ficaríamos com o seguinte.

$$Área_{ABCD} = 4\,.\,Área_{APB}$$

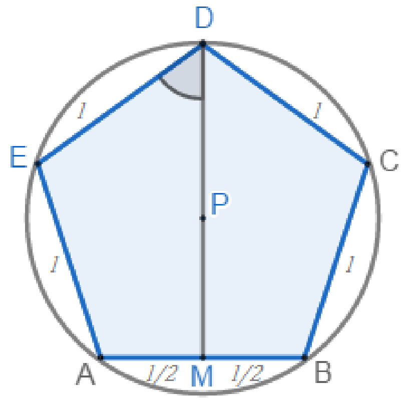
$$Área_{ABCD} = 4\,.\,\frac{l^2}{4\,.\,tg\;45°}$$

P: - Para esta dedução, tal como na quarta dedução do triângulo equilátero, vamos deixar desta forma, pois faremos uma análise comparativa dos resultados no final, utilizando os resultados que encontraremos nos outros polígonos regulares. Tudo bem, pessoal?

Nesta abordagem, tal como foi no quarto modo de calcular a área do triângulo equilátero, os alunos podem questionar o porquê de não substituir o valor da tangente do ângulo descrito. Nesses momentos, o professor deve frisar que a análise dos porquês será feita no final da proposta, juntamente com a dedução das outras fórmulas de áreas de outros polígonos regulares, com o intuito de mostrar que, quanto mais genérico os resultados estiverem, mais a sua aplicação poderá ser realizada em outros contextos.

5.3 ÁREA DO PENTÁGONO REGULAR

Figura 23 – Pentágono regular



Fonte: O autor

5.3.1 Primeiro modo de calcular a área do pentágono regular

Para deduzir a fórmula para o cálculo da área de um pentágono regular, o professor terá que instruir os alunos em várias etapas, uma vez que este polígono não é muito usado em situações problemas ou exercícios de fixação durante as aulas. Porém, sua importância, principalmente para exercitar a linguagem algébrica é notória, justamente por não ser usual e apresentar ângulos que não são múltiplos de cinco.

Começa o diálogo.

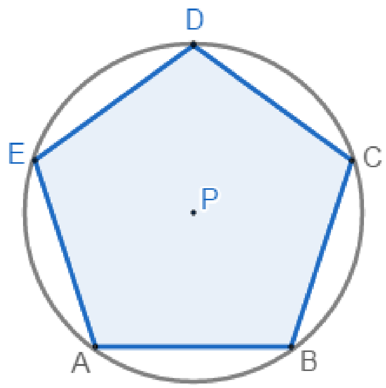
P: - Pessoal. Nesta aula, vamos deduzir como calcular a área de um pentágono regular. Para isso, vamos precisar determinar alguns elementos durante o processo.

A9: - Quais elementos, professor?

P: - Medida de apótema, ângulos internos e alturas relativas. Primeiramente, vamos desenhar um pentágono regular.

(*Neste momento, o professor pode desenhar um pentágono regular com o auxílio de régua e compasso, ou desenhar um pentágono aparentemente* *regular, usando suas habilidades com régua e compasso. Porém, neste caso, é preciso ressaltar aos alunos que se trata de um esboço ou, ainda, é possível projetar no quadro um pentágono regular*).

Figura 24 – Pentágono regular inscrito na circunferência



Fonte: O autor

P: - Quais segmentos de reta podemos traçar neste pentágono, a fim de trabalharmos com triângulos?

A6: - Podemos ligar os pontos A e C, por exemplo?

P: - Podemos sim, porém teríamos que ligar outros pontos da mesma forma. O segmento $\overline{AC}$ é uma das diagonais deste pentágono.

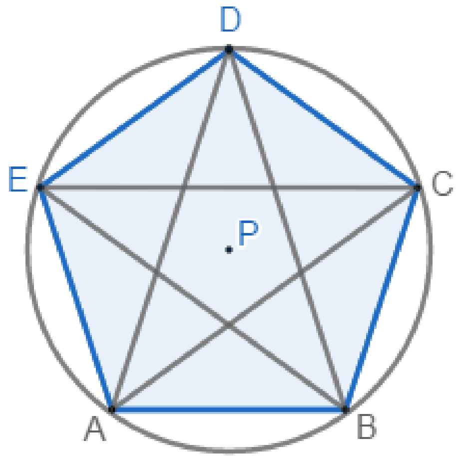
A7: - Mas a diagonal não tem que passar no meio do polígono? Nesse caso, não teria que passar pelo ponto P?

P: - Não necessariamente, A7. O conceito de diagonal de um polígono é um segmento de reta entre dois vértices não consecutivos do polígono. Por exemplo, o segmento $\overline{AC}$. Neste caso, quais são as outras diagonais do pentágono regular que mostramos?

A2: - Seria os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$, mais o segmento $\overline{AC}$.

P: - Isso mesmo. Então temos estas cincos diagonais. Vamos traçá-las no esboço. Ficaríamos com o seguinte:

Figura 25 – Pentágono regular inscrito na circunferência II



Fonte: O autor

A2: - Nossa, professor. Que desenho complicado.

A1: - O desenho ficou com muitos triângulos com medidas diferentes. Dá para determinar a área usando esses triângulos?

P: - Realmente são muitos triângulos com medidas de lados e ângulos distintos. E com certeza dá para determinarmos a área do pentágono regular utilizando esse esboço. Porém, podemos, ao invés de traçar as diagonais, traçar as alturas relativas a cada um dos vértices.

A5: - Como assim, professor?

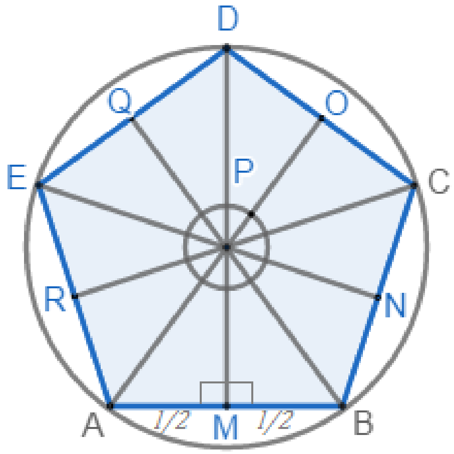
P: - Alguém poderia mencionar algum segmento de reta que é uma das alturas relativas a um dos vértices?

A1: - Seria, por exemplo, o segmento de reta que une o vértice D ao ponto médio do segmento $\overline{AB}$?

(Espera-se esta resposta de algum aluno, uma vez que já foi trabalhado esse mesmo conceito em outras deduções. Caso não haja manifestação por parte dos alunos, o professor os instruirá a fazê-la).

P: - Exatamente. Então, traçando todas as alturas relativas, temos o seguinte esboço:

Figura 26 – Pentágono regular inscrito na circunferência III



Fonte: O autor

P: - O ângulo $A\hat{P}M$ medirá quantos graus? Como determinar essa medida?

(Aguardar alguns instantes para ver se algum aluno responde à pergunta do professor corretamente).

A1: - Basta dividir trezentos e sessenta graus por dez, uma vez que o ângulo $A\hat{P}M$ é a décima parte?

P: - Isso mesmo. Ou seja, o ângulo $A\hat{P}M$ medirá 36°. Correto?

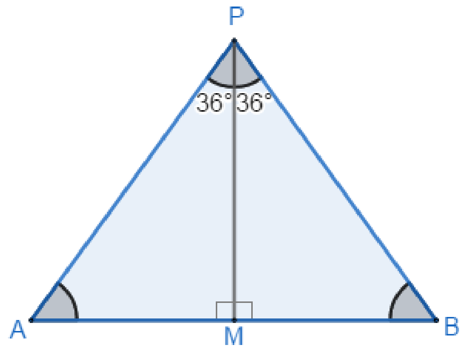
Alunos: - Sim.

P: - Agora, qual triângulo podemos adotar para calcular a área do pentágono regular através dele?

A3: - O triângulo APB, professor?

P: - Isso mesmo. Vamos fazer um esboço das medidas que temos do triângulo APB.

Figura 27 – Triângulo extraído do pentágono regular



Fonte: O autor

P: - Agora, qual a medida dos ângulos $P\hat{A}M$ e $P\hat{B}M$?

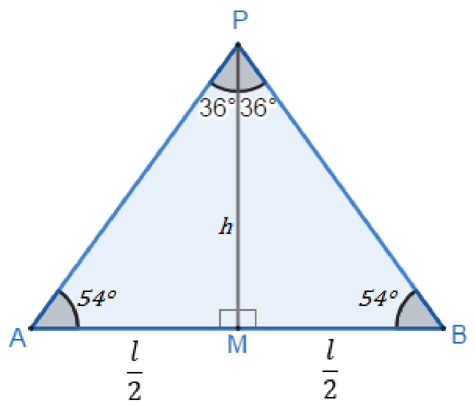
A1: - Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a cento e oitenta graus, temos que um ângulo mede trinta e seis graus e o outro mede noventa graus, portanto, o terceiro ângulo medirá cinquenta e quatro graus.

P: - Perfeito. E o segmento $\overline{PM}$ seria qual medida do triângulo APB?

A8: - Seria a altura, professor?

P: Isso mesmo. Então ficaríamos com o seguinte esboço:

Figura 28 – Triângulo extraído do pentágono regular II



Fonte: O autor

P: - Pronto. Agora, qual medida temos que determinar em função de outra medida para encontrar a área do triângulo APB?

A1: - Devemos encontrar a altura em função do lado.

P: - Isso mesmo. Se tomarmos o ângulo de 54°, qual medida seria o cateto oposto e qual medida seria o cateto adjacente?

A5: - O cateto oposto seria o h e o cateto adjacente seria o $\frac{l}{2}$.

P: - Perfeito. Daí, ficaríamos com qual igualdade utilizando as razões trigonométricas?

(Esperar algum aluno se manifestar com a resposta).

A7: - Seria tangente, professor?

P: - Isso mesmo. Nesse caso, teríamos o seguinte:

$$tg\ 54° = \frac{h}{\frac{l}{2}}$$

A7: - Mas quanto vale a tangente de cinquenta e quatro graus?

P: - Nesse caso, temos que recorrer à tabela dos ângulos trigonométricos ou a uma calculadora. Alguém poderia visualizar e nos dizer quanto vale a tangente de cinquenta e quatro graus, por favor?

A9: - Aproximadamente: um vírgula três sete seis quatro (1,3764).

P: - Ok. Agora, vamos substituir este valor na igualdade que temos, ou simplesmente deixar a igualdade em função de tangente de cinquenta e quatro graus. Assim:

$$1{,}3764 = \frac{h}{\frac{l}{2}}$$

$$h = \frac{1{,}3764l}{2}$$

$$OU$$

$$h = \frac{l\,.\,tg\ 54°}{2}$$

P: - E agora? Como podemos determinar a área do triângulo APB?

A6: - É só multiplicar a base l pela altura que encontramos e depois dividir por dois.

P: - Isso mesmo. Então ficaríamos com o seguinte cálculo:

$$Área_{APB} = \frac{l\,.\frac{l\,.tg\ 54°}{2}}{2}$$

$$Área_{APB} = \frac{l^2.tg\ 54°}{4}$$

P: - Agora que temos a área do triângulo APB, como podemos determinar a área do pentágono regular?

A5: - É só multiplicar a área do triângulo APB por cinco.

P: - Perfeito. Ficaria assim:

$$Área_{ABCDE} = 5\,.\frac{l^2.tg\ 54°}{4}$$

P: - Ok, pessoal. Muito bem.

Nessa abordagem, espera-se que a maioria da turma já esteja familiarizada com os cálculos algébricos e com as deduções partindo de triângulos. As dúvidas mais comuns nessa etapa são esperadas na parte de cálculos básicos. Assim, o professor pode conduzir a situação utilizando exemplos anteriores, bem como conceitos primários sobre o assunto, a fim de proporcionar uma melhor compreensão aos alunos.

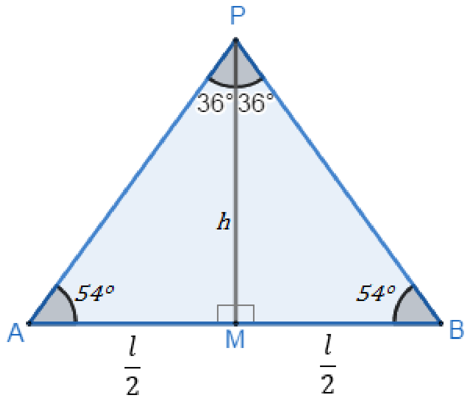
5.3.2 Segundo modo de calcular a área do pentágono regular

Para esta abordagem, o professor pode recorrer à parte da dedução anterior, otimizando o tempo e mostrando ao aluno que, no decorrer de uma dedução, outros caminhos podem ser adotados para atingir o resultado final.

Começa o diálogo.

P: - Pessoal, para esta segunda dedução da área de um pentágono regular, vamos partir do seguinte triângulo que construímos na dedução anterior.

Figura 29 – Triângulo extraído do pentágono regular III



Fonte: O autor

P: - Na dedução anterior, adotamos o ângulo de cinquenta e quatro graus. Nesta, podemos fazer o mesmo processo, no entanto, vamos adotar o ângulo de trinta e seis graus. Para este ângulo, quais seriam o cateto oposto e o cateto adjacente?

A5: - O cateto oposto seria o $\frac{l}{2}$ e o cateto adjacente seria o h.

P: - Isso mesmo. Então, qual razão trigonométrica usaríamos?

A1: - Usaríamos a tangente.

P: - Isso. E como ficaria a igualdade?

(Aguardar alguns instantes para que algum aluno mostre a resposta correta).

$$tg\ 36° = \frac{\frac{l}{2}}{h}$$

$$h = \frac{\frac{l}{2}}{tg\ 36°}$$

$$h = \frac{l}{2\,.\,tg\ 36°}$$

P: - Agora, determinem a área do triângulo APB.

(Aguardar algum aluno mostrar o resultado previsto)

$$Área_{APB} = \frac{l\,.\frac{l}{2\,.\,tg\;36°}}{2}$$

$$Área_{APB} = \frac{l^2}{4\,.\,tg\;36°}$$

P: - Perfeito. E agora, determinem a área do pentágono regular como na dedução anterior, ou seja, multiplicando a área do triângulo APB por cinco.

(Aguardar algum aluno mostrar o resultado previsto)

$$Área_{ABCDE} = 5\,.\frac{l^2}{4\,.\,tg\;36°}$$

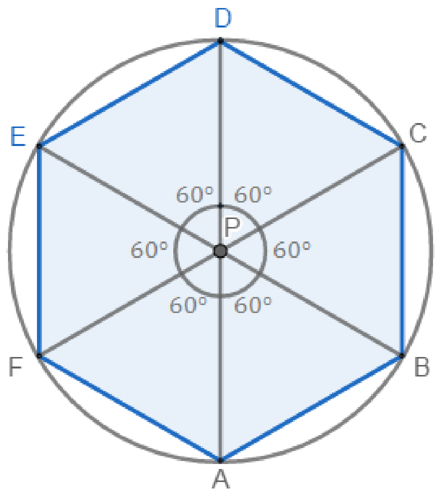
P: - Vamos deixar a fórmula desta forma para, juntamente com as outras que deduzimos dos polígonos anteriores, façamos uma comparação ao final. Tudo bem, pessoal.

Nesta etapa, seria bem provável que algum aluno já se manifestasse de forma curiosa em como fazer o comparativo com as deduções dos outros polígonos. Caso isso ocorra, o professor pode atender o(s) aluno(s) em particular e analisar o que eles já encontraram de padrão do que já foi exposto, e observar a veracidade do que for exposto, bem como orientar possíveis erros.

Por se tratar de uma THA, temos total liberdade para alterar o percurso do que foi previsto, haja vista que um dos pilares para a construção do processo de uma THA é, justamente, a possibilidade de se fazer releituras e novas conduções durante ou depois do processo.

5.4 ÁREA DO HEXÁGONO REGULAR

Figura 30 – Hexágono regular



Fonte: O autor

5.4.1 Primeiro modo de calcular a área do hexágono regular

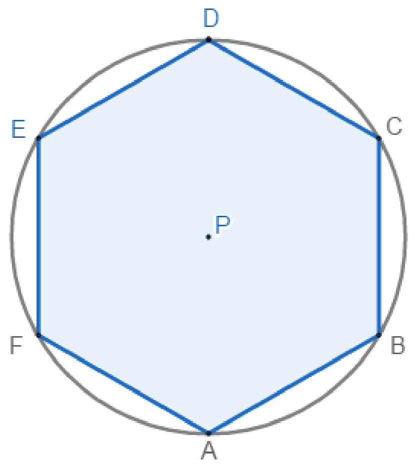
Para esta primeira abordagem, o professor orientará os alunos a traçar segmentos de retas que sejam auxiliares para formar polígonos no intuito de determinar a área total do hexágono regular somando-se os polígonos determinados.

Começa o diálogo.

P: - Nesta aula, deduziremos a fórmula para o cálculo da área de um hexágono regular. Primeiramente, vamos desenhar um hexágono regular.

(Neste momento, o professor pode ensinar aos alunos a construção de um hexágono regular com o auxílio de régua e compasso, ou simplesmente fazer um esboço com o auxílio de régua, ou apenas projetar o hexágono regular no quadro).

Figura 31 – Hexágono regular inscrito na circunferência



Fonte: O autor

P: - Quais segmentos de retas podemos traçar a fim de formar polígonos que nos auxiliarão no cálculo da área do hexágono regular?

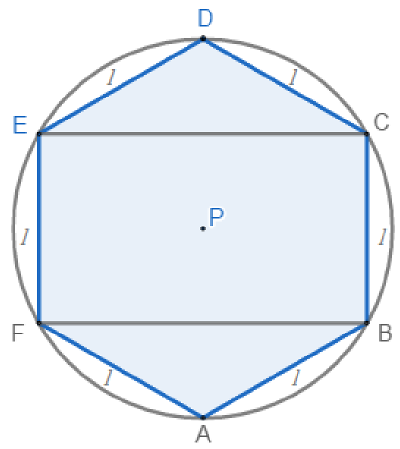
A1: - As diagonais?

P: - Pode ser. Mas lembre-se de que, quando traçamos as diagonais do pentágono regular, formaram-se vários triângulos de medidas distintas.

A5: - E se traçar um segmento de E até C e outro segmento de F até B? Daí ficaríamos com dois triângulos e um retângulo.

P: - Muito bem. Pode ser sim. Vamos fazer isso.

Figura 32 – Hexágono regular inscrito na circunferência II



Fonte: O autor

P: - E agora? Que medidas precisamos determinar para calcular as áreas dos polígonos formados?

A6: - Temos que determinar as medidas dos segmentos $\overline{EC}$ e $\overline{FB}$.

P: - E como podemos fazer isso? Alguém tem alguma ideia?

(*Neste momento, espera-se que algum aluno diga para trabalharmos com as razões trigonométricas*).

A1: - Vamos ter que usar trigonometria?

P: - Seria uma solução. Mas, para isso, temos que ter medidas angulares. Qual a medida do ângulo $E\widehat{D}C$, por exemplo?

A8: - Mais de noventa graus.

P: - Ok. Mas como podemos determinar a medida de um ângulo interno de um polígono regular?

A2: - Temos que saber qual a medida de todos os ângulos e, depois, dividir por seis.

P: - Exatamente. E como podemos determinar a medida de todos os ângulos internos, ou seja, a soma dos ângulos internos do hexágono regular?

A1: - Tem uma fórmula que permite calcular isso, professor?

P: - Tem sim. É a seguinte fórmula:

$$S_i = 180° \,.\, (n - 2)$$

P: - O S_i é a soma dos ângulos internos e n é a quantidade de lados que este polígono tem. Portanto, qual seria a soma dos ângulos internos de um hexágono regular?

(*Aguardar alguns instantes para que algum aluno esboce o resultado esperado*).

A7: - Seria setecentos e vinte graus, professor?

P: - Isso mesmo. Ficou assim:

$$S_i = 180° \,.\, (6 - 2)$$

$$S_i = 180° \,.\, 4$$

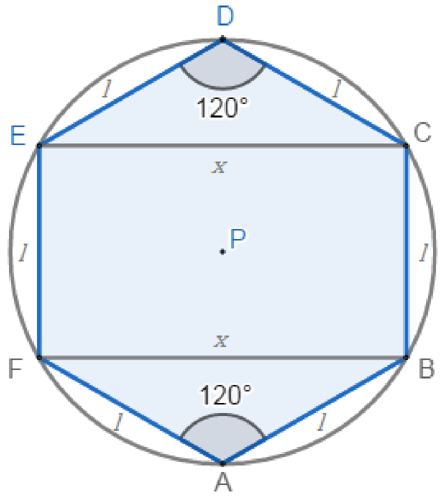
$$S_i = 720°$$

P: - Agora que sabemos que a soma dos ângulos internos do hexágono regular é de setecentos e vinte graus, qual a medida do ângulo $E\hat{D}C$?

A9: - Seria setecentos e vinte dividido por seis, o que resultaria em cento e vinte graus.

P: - Isso mesmo. Então agora ficaríamos com o seguinte esboço:

Figura 33 – Hexágono regular inscrito na circunferência III



Fonte: O autor

P: - Como poderíamos determinar a medida x em função do lado l?

A1: - Dá para usar a lei dos cossenos?

A5: - Dá para traçar a altura do triângulo ECD partindo do ponto D?

P: - As duas ideias são válidas. Vamos fazer a primeira, que é utilizando a lei dos cossenos. Vamos lembrar a fórmula?

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \,.\, b \,.\, c \,.\, \cos A$$

P: - Agora, vamos substituir as variáveis a, b e c por quais letras?

A5: - O a seria o x, o b e o c seria l?

P: - Isso mesmo. Então, ficaríamos com o seguinte:

$$x^2 = l^2 + l^2 - 2 \,.\, l \,.\, l \,.\, \cos 120°$$

P: - Qual o valor de cosseno de cento e vinte graus? Lembram como determinar?

(Aguardar alguns instantes para ver se algum aluno manifesta a resposta correta).

A1: - É a mesma coisa que cosseno de sessenta graus?

P: - Só que negativo, pois cento e vinte graus está no segundo quadrante, e cosseno no segundo quadrante é negativo.

(Neste momento, se preciso, o professor explica os sinais nos quadrantes das razões seno, cosseno e tangente).

P: - Continuando.

$$x^2 = 2l^2 - 2l^2.\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$x^2 = 2l^2 + l^2$$
$$x^2 = 3l^2$$
$$x = \sqrt{3l^2}$$
$$x = l\sqrt{3}$$

P: - Agora que sabemos o valor de x em função de l, como podemos calcular as áreas dos polígonos ABF, CDE e $BCEF$?

A1: - O $BCEF$ é um retângulo, então é só fazer base vezes altura, ou seja, x vezes l.

P: - Perfeito. Então, como ficaria a área deste polígono?

(Aguardar alguns instantes para ver se algum aluno manifesta a resposta correta).

$$\text{Área}_{BCEF} = l\,.\,l\sqrt{3}$$
$$\text{Área}_{BCEF} = l^2\sqrt{3}$$

P: - E a área dos dois triângulos? Como podemos determinar sabendo que dois lados medem l e o outro mede $l\sqrt{3}$?

A6: - Mas para determinar a área do triângulo não precisa da altura? Não temos que encontrá-la?

P: - Podemos sim. Mas tem uma fórmula que permite calcular a área de um triângulo usando apenas as medidas de seus lados. Nós já usamos em uma das deduções anteriores. Alguém lembra?

A1: - Seria a fórmula de Heron?

P: - Isso mesmo. Vamos aplicar a fórmula de Heron para determinar a área dos triângulos. Primeiramente, vamos determinar o semi-perímetro, que é a metade do perímetro do polígono.

$$p = \frac{l + l + l\sqrt{3}}{2}$$

$$p = \frac{2l + l\sqrt{3}}{2}$$

P: - Agora, podemos substituir na fórmula de Heron que é:

$$Área = \sqrt{p\,.(p-a).(p-b).(p-c)}$$

P: - Sabendo que a, b e c são os lados do triângulo. Vamos lá?

$$Área_{ECD} = \sqrt{\left(\frac{2l + l\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{2l + l\sqrt{3}}{2} - l\right).\left(\frac{2l + l\sqrt{3}}{2} - l\right).\left(\frac{2l + l\sqrt{3}}{2} - l\sqrt{3}\right)}$$

Nesta parte, espera-se um pouco mais de dificuldade por parte dos alunos na resolução dos cálculos apresentados. O professor pode ser minucioso na explicação de conceitos básicos novamente, firmando ainda mais o conteúdo para futuras usualidades.

$$Área_{ECD} = \sqrt{\left(\frac{2l + l\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{2l + l\sqrt{3} - 2l}{2}\right).\left(\frac{2l + l\sqrt{3} - 2l}{2}\right).\left(\frac{2l + l\sqrt{3} - 2l\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$Área_{ECD} = \sqrt{\left(\frac{2l + l\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{2l - l\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$Área_{ECD} = \sqrt{\left(\frac{2l + l\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{2l - l\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{3l^2}{4}\right)}$$

$$\acute{A}rea_{ECD} = \sqrt{\left(\frac{4l^2 - 2l^2\sqrt{3} + 2l^2\sqrt{3} - 3l^2}{4}\right) \cdot \left(\frac{3l^2}{4}\right)}$$

$$\acute{A}rea_{ECD} = \sqrt{\frac{l^2}{4} \cdot \frac{3l^2}{4}}$$

$$\acute{A}rea_{ECD} = \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$\acute{A}rea_{ECD} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

P: - Agora que sabemos a área do triângulo ECD, como podemos determinar área do hexágono regular $ABCDEF$?

A5: - É só somar as áreas dos triângulos ECD e ABF que são iguais com a área do retângulo $BCEF$.

P: - Isso mesmo. Vamos fazê-lo.

$$\acute{A}rea_{ABCDEF} = \acute{A}rea_{ABF} + \acute{A}rea_{ECD} + \acute{A}rea_{BCEF}$$

$$\acute{A}rea_{ABCDEF} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + l^2\sqrt{3}$$

$$\acute{A}rea_{ABCDEF} = \frac{2l^2\sqrt{3} + 4l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\acute{A}rea_{ABCDEF} = \frac{6l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\acute{A}rea_{ABCDEF} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

P: - Portanto, esta é a fórmula para determinar a área de um hexágono regular. Tranquilo, pessoal?

Nessa abordagem, como já mencionado, os alunos podem apresentar dificuldades de cálculos básicos. Porém, ela é extremamente válida para a aquisição de muitos conceitos matemáticos, bem como para o exercício de praticar o raciocínio lógico para as deduções apresentadas.

O professor, como intermediador, fica livre para adotar dinâmicas para a abordagem destes conceitos básicos durante o processo, sempre desafiando os alunos à construção do produto final.

5.4.2 Segundo modo de calcular a área do hexágono regular

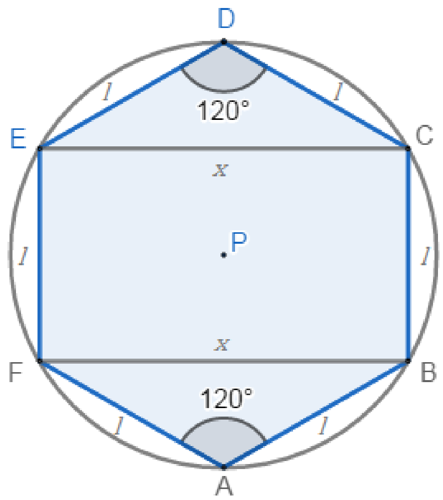
Nesta abordagem, vamos iniciar recorrendo à parte do raciocínio da dedução anterior. O professor conduzirá os alunos nesse início.

Começa o diálogo.

P: - Pessoal, para a próxima dedução da fórmula do hexágono regular, vamos iniciar por uma parte da dedução anterior, mais precisamente deste esboço.

(Professor desenha ou projeta o esboço novamente no quadro).

Figura 34 – Hexágono regular inscrito na circunferência IV

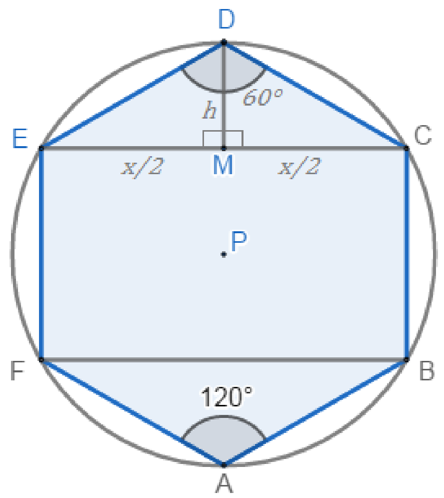


Fonte: O autor

P: - Um de vocês disse que poderíamos traçar a altura relativa ao lado $\overline{CE}$ no triângulo ECD. Vamos fazer isso.

(Professor desenha ou projeta o esboço no quadro).

Figura 35 – Hexágono regular inscrito na circunferência V



Fonte: O autor

P: - Partindo deste esboço, qual conceito matemático podemos utilizar para determinar a medida x?

A2: - Seno, cosseno e tangente, professor?

P: - Isso mesmo. No caso, dizemos que vamos utilizar as razões trigonométricas. Os lados h e $\frac{x}{2}$ são quais catetos em relação ao ângulo de sessenta graus apresentado?

A6: - O h seria o cateto adjacente e o $\frac{x}{2}$ seria o cateto oposto. Portanto, usaríamos a tangente, professor?

P: - Exatamente. Vamos fazer isso.

$$tg\ 60° = \frac{\frac{x}{2}}{h}$$

$$h\,.\,tg\ 60° = \frac{x}{2}$$

$$h = \frac{x}{2\,.\,tg\ 60°}$$

$$h = \frac{x}{2\,.\sqrt{3}}$$

Neste ponto, espera-se que os alunos já saibam racionalizar um número irracional. Se não conseguirem, o professor intervém com uma explicação rápida novamente.

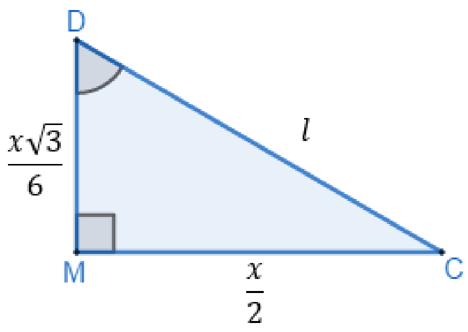
$$h = \frac{x}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2\,.\,3}$$

$$h = \frac{x\sqrt{3}}{6}$$

P: - Como queremos determinar a área do hexágono regular em função de seu lado, agora que sabemos a medida da altura h em função de x, vamos analisar o seguinte triângulo:

Figura 36 – Triângulo extraído do hexágono regular I



Fonte: O autor

P: - Como podemos determinar a medida x em função do lado l?

A3: - Usar razão trigonométrica novamente.

A1: - Dá para fazer um teorema de Pitágoras, professor?

P: - Como temos dois lados em função de x e o outro em função de l, vamos aplicar o teorema de Pitágoras. Como ficaria?

(Aguardar alguns instantes para ver a análise dos alunos).

$$l^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$l^2 = \frac{3x^2}{36} + \frac{x^2}{4}$$

$$l^2 = \frac{3x^2 + 9x^2}{36}$$

$$l^2 = \frac{12x^2}{36}$$

$$l = \sqrt{\frac{12x^2}{36}}$$

$$l = \frac{x\sqrt{4 \,.\, 3}}{6}$$

$$l = \frac{2x\sqrt{3}}{6}$$

$$l = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

$$3l = x\sqrt{3}$$

$$x = \frac{3l}{\sqrt{3}}$$

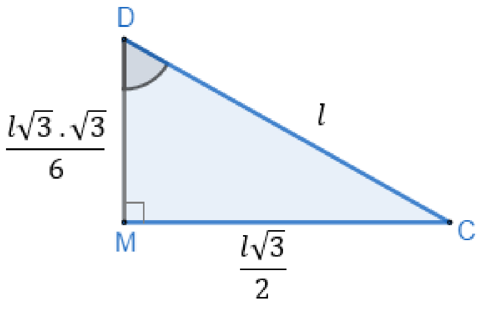
$$x = \frac{3l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{3l\sqrt{3}}{3}$$

$$x = l\sqrt{3}$$

P: - Agora que sabemos a medida x em função do lado l, teríamos o seguinte triângulo:

Figura 37 – Triângulo extraído do hexágono regular II



Fonte: O autor

P: - Como podemos determinar a área do triângulo ECD agora?

A2: - É só fazer base vezes altura dividido por dois, professor.

P: - Perfeito. Vamos fazer então.

(Aguardar alguns instantes para que algum aluno explicite o resultado esperado)

$$\text{Área}_{ECD} = \frac{l\sqrt{3}\,.\frac{l.\sqrt{3}\,.\sqrt{3}}{6}}{2}$$

$$\text{Área}_{ECD} = \frac{l\sqrt{3}\,.\,3l}{12}$$

$$\text{Área}_{ECD} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

P: - Agora que sabemos a área do triângulo ECD, como obtemos a área do hexágono regular $ABCDEF$?

A5: - É só somar as áreas dos triângulos ECD e ABF que são iguais com a área do retângulo $BCEF$.

P: - Isso mesmo. Vamos fazê-lo.

$$\text{Área}_{ABCDEF} = \text{Área}_{ABF} + \text{Área}_{ECD} + \text{Área}_{BCEF}$$

$$\text{Área}_{ABCDEF} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + l^2\sqrt{3}$$

$$\text{Área}_{ABCDEF} = \frac{2l^2\sqrt{3} + 4l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Área}_{ABCDEF} = \frac{6l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Área}_{ABCDEF} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

P: - Pronto. Esta é a área de um hexágono regular em função do seu lado.

Nesta abordagem, como recorremos à parte da dedução anterior, espera-se que o entendimento, apesar de ser feito de uma forma diferente, seja mais instantâneo.

Espera-se que, neste nível, boa parte da turma já esteja familiarizada como alguns termos e com o conceito de determinar uma medida em função de outra para o aprimoramento dos cálculos necessários.

5.4.3 Terceiro modo de calcular a área do hexágono regular

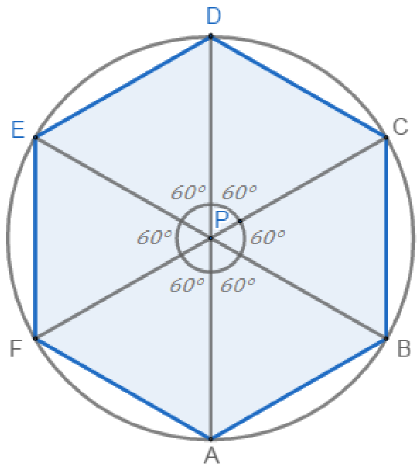
Para este modo de dedução da área do hexágono regular, o professor direcionará os alunos na etapa inicial do processo.

Começa o diálogo.

P: - Para a nossa próxima dedução da área de um hexágono regular, vamos analisar o seguinte esboço.

(Professor desenha ou projeta o esboço no quadro).

Figura 38 – Hexágono regular inscrito na circunferência VI



Fonte: O autor

P: - O que podemos observar na análise deste esboço?

A7: - Tem seis triângulos iguais?

P: - Por que podemos afirmar isso?

A1: - Porque todos têm um ângulo de sessenta graus e um dos lados medindo l.

P: - Tem mais um detalhe que faz com que possamos considerar todos os triângulos iguais. Analisem e digam o que todos os triângulos têm em comum também.

A6: - O segmento $\overline{AP}$ é o mesmo que os outros segmentos de P até os pontos do hexágono?

P: - Isso mesmo. O correto seria dizer que todos os triângulos têm dois segmentos que são o raio da circunferência circunscrita ao hexágono regular, logo, todos os estes segmentos são iguais. Ou seja, temos a seguinte igualdade:

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP} = \overline{DP} = \overline{EP} = \overline{FP}$$

P: - Como já vimos nas deduções anteriores, quanto mede cada ângulo interno de um hexágono regular?

A2: - Cento e vinte graus, professor.

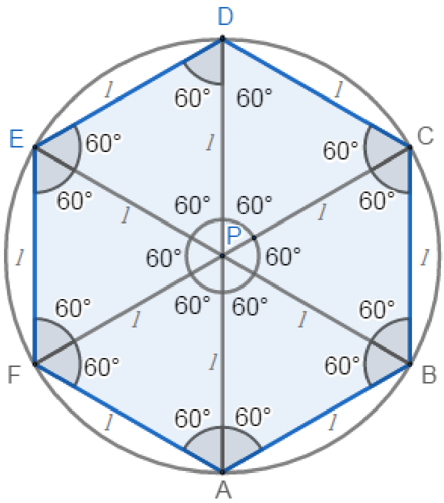
P: - Isso. Portanto, qual a medida do ângulo $P\hat{A}B$, por exemplo?

A1: - Seria de sessenta graus, assim como todos os outros.

P: - Isso mesmo. Então ficaríamos com o seguinte esboço:

(Professor desenha ou projeta o esboço no quadro).

Figura 39 – Hexágono regular inscrito na circunferência VII



Fonte: O autor

P: - O que podemos perceber neste esboço?

A4: - Tem seis triângulos com todos os lados de mesma medida.

A1: - Seriam seis triângulos equiláteros.

P: - Isso mesmo. Então, como poderíamos determinar a área do hexágono regular em questão?

A8: - Basta encontrar a área de um triângulo equilátero e multiplicar por seis.

P: - Exatamente. E qual a área de um triângulo equilátero? Nós já fizemos esta dedução. Lembram? Verifiquem nas anotações de vocês.

(Aguardar algum aluno verificar e explanar a fórmula da área de um triângulo equilátero conforme já foi deduzida).

P: - Agora, basta multiplicar por seis a área de um triângulo equilátero. Como ficaria?

(Aguardar algum aluno manifestar a fórmula esperada).

$$Área_{ABCDEF} = 6 \, . \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$Área_{ABCDEF} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

P: - Portanto, esta é a fórmula para determinar a área de um hexágono regular. Ok, pessoal?

Nesta abordagem, os alunos entenderam ainda mais profundamente que, por vezes, uma fórmula depende de outras para ser deduzida. Esta correlação entre as fórmulas aprimora ainda mais o pensamento dedutivo dos alunos e seu raciocínio lógico matemático.

5.4.4 Quarto modo de calcular a área do hexágono regular

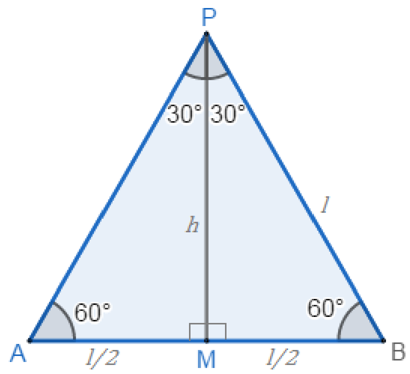
Para esta abordagem, o professor irá propor aos alunos que encontrem as medidas, utilizando, para tal, a trigonometria.

Começa o diálogo.

P: - Pessoal. Para a próxima dedução da área de um hexágono regular, vamos partir do princípio de que ele é formado por seis triângulos equiláteros, como vimos na dedução anterior. Portanto, vamos calcular a área de um triângulo equilátero e, depois, multiplicar o resultado por seis. Então, vamos analisar o seguinte esboço:

(Professor desenha ou projeta o esboço no quadro).

Figura 40 – Triângulo extraído do hexágono regular IV



Fonte: O autor

P: - Partindo deste triângulo, podemos determinar a altura em função do lado adotando o ângulo de trinta graus ou o ângulo de sessenta graus. Como já fizemos nas deduções das áreas do triângulo equilátero, do quadrado e do pentágono regular, vamos adotar o ângulo de trinta graus e analisar os catetos do triângulo MBP.

A1: - O cateto oposto seria o $\frac{l}{2}$ e o cateto adjacente seria o h.

P: - Isso mesmo. Usaremos qual razão trigonométrica neste caso, assim como nos anteriores?

A5: - Tangente, professor?

P: - Exato. Como ficaria então?

(Aguardar alguns instantes para algum aluno manifestar a resposta correta).

$$tg\ 30° = \frac{\frac{l}{2}}{h}$$

P: - Com nas deduções anteriores em que adotamos o ângulo central do polígono, não vamos substituir o valor da tangente de trinta graus. Então ficaria assim:

$$h\,.\,tg\,30° = \frac{l}{2}$$

$$h = \frac{l}{2\,.\,tg\,30°}$$

P: - Agora que temos a altura em função do lado, como calculamos a área do triângulo ABP?

A7: - Base vezes altura dividido por dois, professor.

A2: - Neste caso a base seria l, professor?

P: - Isso mesmo. Então ficaríamos com o seguinte:

$$Área_{ABP} = \frac{l\,.\,\frac{l}{2\,.\,tg\,30°}}{2}$$

$$Área_{ABP} = \frac{l^2}{4\,.\,tg\,30°}$$

P: - Agora que sabemos a área do triângulo ABP, como determinamos a área do hexágono regular?

A9: - Só multiplicar por seis.

P: - Isso mesmo. Como ficaria?

(Aguardar alguns instantes para algum aluno manifestar a resposta correta).

$$Área_{ABCDEF} = 6\,.\,Área_{ABP}$$

$$Área_{ABCDEF} = 6\,.\,\frac{l^2}{4\,.\,tg\,30°}$$

P: - Ok, pessoal? Alguma dúvida?

A1: - Não podemos simplificar o seis e o quatro por dois?

P: - Podemos sim. No entanto, como pretendemos fazer uma generalização das fórmulas, vamos deixá-la desta maneira por enquanto. Ok?

Depois desta abordagem, é esperado que alguns alunos percebam alguma relação entre as últimas deduções de cada um dos polígonos apresentados. Se isso ocorrer, será muito interessante visto que mostra o processo como bem sucedido e indo além das expectativas.

O próximo passo será fazer uma análise dos resultados obtidos nos itens 4.1.4, 4.2.3, 4.3.2 e 4.4.4.

5.5 GENERALIZAÇÃO DA ÁREA DE UM POLÍGONO REGULAR

Nesta etapa, vamos fazer um comparativo dos itens 4.1.4, 4.2.3, 4.3.2 e 4.4.4 para deduzir uma generalização da fórmula de um polígono regular.

O objetivo deste processo é fazer com que o professor, como mediador, conduza os alunos, através de alguns questionamentos, a terem a percepção do padrão determinado entre as fórmulas deduzidas anteriormente e, assim, encontrarem a generalização para a área de um polígono regular.

Começa o diálogo.

P: - Pessoal. Agora que já fizemos a dedução das áreas do triângulo equilátero, do quadrado, do pentágono regular e do hexágono regular, vamos fazer uma análise dos resultados obtidos nas seguintes fórmulas, conforme a tabela a seguir:

(Professor escreve as fórmulas no quadro em uma tabela, ou as projeta)

Quadro 2 - Áreas dos polígonos regulares

Área do triângulo equilátero	**Área do quadrado**	**Área do pentágono regular**	**Área do hexágono regular**
$A = 3\,.\dfrac{l^2}{4\,.\,tg\,60°}$	$A = 4\,.\dfrac{l^2}{4\,.\,tg\,45°}$	$A = 5\,.\dfrac{l^2}{4\,.\,tg\,36°}$	$A = 6\,.\dfrac{l^2}{4\,.\,tg\,30°}$

Fonte: O autor

P: - Comparando as quatro fórmulas, o que elas têm em comum?

A5: - Todas tem l^2 na parte de cima da fração.

P: - No numerador da fração. Ok. Mas o que elas têm em comum?

A7: - Todas têm um quatro multiplicando no denominador.

P: - Bem observado. O que mais?

A2: - No triângulo equilátero, a fórmula começa multiplicando por três. No quadrado, multiplica por quatro. No pentágono regular, por cinco. No hexágono regular, por seis.

P: - Bem observado. Então temos um padrão. Podemos denominar o número de lados do polígono em questão por n. Desta forma, como ficaria a fórmula para um polígono de n lados?

A5: - Como assim, n lados, professor?

P: - Se o polígono tem três lados, substituímos o n por três. Se o polígono tiver quatro lados, substituímos o n por quatro. Se o polígono tiver dez lados, substituímos o n por dez. E assim por diante. Então, como ficaria uma fórmula para um polígono de n lados?

A1: - Seria:

(Escrever a dedução do aluno no quadro)

$$A = n \, . \frac{l^2}{4 \, . \, tg \, x}$$

P: - Todos concordam com esta dedução?

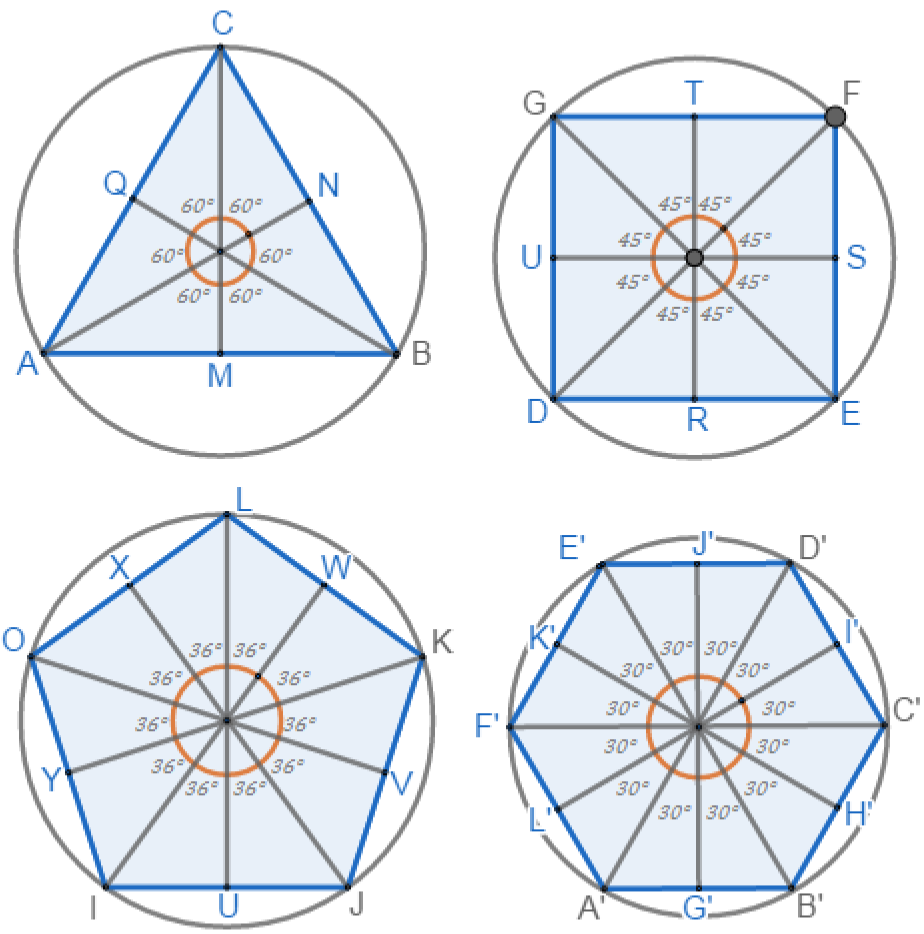
(Aguardar algum questionamento de dúvidas. Espera-se, neste momento, que os alunos já estejam familiarizados com as notações utilizadas e que as dúvidas com relação ao exposto sejam mínimas).

A5: - Mas o que vamos substituir no lugar do x?

P: - Boa pergunta. Neste caso, x é um ângulo. Para o triângulo equilátero, o ângulo foi de sessenta graus. Para o quadrado, foi de quarenta e cinco graus. Para o pentágono regular, foi de trinta e seis graus. E para o hexágono regular, foi de trinta graus. Vamos analisar como determinamos estes ângulos de acordo com as deduções que fizemos de cada um dos polígonos regulares anteriores? Vejam este esboço:

(Professor desenha ou projeta o esboço no quadro).

Figura 41 – Polígonos regulares inscritos na circunferência



Fonte: O autor

P: - O que podemos observar com relação aos ângulos apresentados nos esboços?

(Aguardar algum aluno manifestar ideias que remetem à percepção do esboço).

A2: - Conforme o número de lados vai aumentando, o valor do ângulo vai diminuindo.

P: - Ok. Mais alguma observação?

A5: - A soma de todos os ângulos é igual a trezentos e sessenta graus.

P: - Isso mesmo. E como estes ângulos estão divididos?

A6: - No triângulo equilátero, tem seis ângulos. Já no quadrado, tem oito. No pentágono regular, dez. E no hexágono regular, doze ângulos.

P: - Muito bem. Estamos chegando lá. Qual a relação entre o número de lados e a quantidade de ângulos determinados?

A4: - O número de ângulos é igual ao dobro do número de lados?

P: - Isso mesmo. Então, qual seria o valor de cada ângulo, se tivéssemos calculando a área de um heptágono regular? E de um octógono regular?

A1: - No heptágono regular, teria quatorze ângulos iguais e, no octógono regular, teriam dezesseis ângulos iguais.

P: - Bem observado. Ou seja, como podemos determinar o valor do ângulo x na fórmula apresentada?

A5: - É só dividir trezentos e sessenta graus pelo dobro do número de lados do polígono.

P: - Exatamente. Todos concordam?

A8: - Então seria trezentos e sessenta divididos por $2n$, professor?

P: - Isso mesmo. Vamos ver como fica na fórmula?

$$A = n \, . \frac{l^2}{4 \, . \, tg \left(\frac{360°}{2n} \right)}$$

P: - Tem como simplificar algum número nesta fórmula?

A1: - Podemos simplificar o ângulo de trezentos e sessenta graus com o dois. Daí ficaria cento e oitenta graus divididos por n.

P: - Muito bem. Então ficaria como?

(Aguardar algum aluno manifestar o resultado esperado)

$$A = n\,.\frac{l^2}{4\,.\,tg\,\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

P: - Muito bom, pessoal. Com esta fórmula podemos calcular a área de qualquer polígono regular. Vamos testá-la? Determine a área de um triângulo equilátero, de um quadrado, de um pentágono regular e de um hexágono regular, todos com dez centímetros de medida do lado.

(Aguardar os alunos fazerem a tarefa proposta)

A5: - Mas, professor, no pentágono regular pede para calcular a tangente de trinta e seis graus. Porém este valor não tem na tabela dos ângulos notáveis. Como vamos fazer?

P: - Vocês terão que recorrer a tabela dos ângulos trigonométricos ou digitar na calculadora. Se for cobrado em um processo seletivo, o enunciado terá que explicitar o valor numérico da tangente de trinta e seis graus, ou de outro ângulo que não se encontra na tabela dos ângulos notáveis, ou que não seja um múltiplo de quinze.

A1: - Como assim, múltiplo de quinze, professor?

P: - É que existem fórmulas para soma e subtração de arcos, além de sua duplicação ou divisão. Nestes casos, poderíamos ter ângulos de quinze graus, trinta graus, quarenta e cinco graus, sessenta graus, setenta e cinco graus e assim por diante. Ou seja, todos eles, múltiplos de cinco.

A1: - Entendi. Obrigado, professor.

P: - Vamos ver como calculamos os exercícios que propomos?

5.5.1 Área do triângulo equilátero de lado 10

$$A = 3\,.\frac{10^2}{4\,.\,tg\,\left(\frac{180°}{3}\right)}$$

$$A = 3\,.\frac{100}{4\,.\,tg\;60°}$$

$$\mathrm{A} = \frac{300}{4\,.\sqrt{3}}$$

$$\mathrm{A} = \frac{75}{\sqrt{3}}$$

$$A = \frac{75}{\sqrt{3}}\,.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$A = \frac{75\sqrt{3}}{3}$$

$$A = 25\sqrt{3}\ cm^2$$

5.5.2 Área do quadrado de lado 10

$$A = 4\,.\frac{10^2}{4\,.tg\ \left(\frac{180°}{4}\right)}$$

$$A = 4\,.\frac{100}{4\,.tg\ 45°}$$

$$A = \frac{400}{4\,.1}$$

$$A = \frac{400}{4}$$

$$A = 100\ cm^2$$

5.5.3 Área do pentágono regular de lado 10

$$A = 5\,.\frac{10^2}{4\,.tg\ \left(\frac{180°}{5}\right)}$$

$$A = 5\,.\frac{100}{4\,.tg\ 36°}$$

$$A = \frac{500}{4\,.0{,}7265}$$

$$A = \frac{500}{2{,}906}$$

$$A \cong 172{,}06\ cm^2$$

5.5.4 Área do hexágono regular de lado 10

$$A = 6\,.\frac{10^2}{4\,.tg\,\left(\frac{180°}{6}\right)}$$

$$A = 6\,.\frac{100}{4\,.tg\;30°}$$

$$A = \frac{600}{4\,.\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$A = \frac{600}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

$$A = 400\,.\frac{3}{4\sqrt{3}}$$

$$A = \frac{1200}{4\sqrt{3}}\,.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$A = \frac{1200\sqrt{3}}{4\,.3}$$

$$A = \frac{1200\sqrt{3}}{12}$$

$$A = 100\sqrt{3}\;cm^2$$

P: - O que acharam da fórmula generalizada para cálculo da área de um polígono regular?

A1: - Muito prática.

A2: - Fácil.

A3: - Bem mais fácil para calcular, pois daí a gente só precisar decorar uma fórmula que valerá para todas.

A4: - Só não compensa fazer quando for para calcular a área do quadrado, pois é mais fácil fazer lado vezes lado.

A5: - Só temos que melhorar quando tiver que racionalizar a fração.

A6: - Muito prática mesmo.

A7: - Podemos usá-la sempre, professor?

P: - Com certeza. Assim como deduzimos esta fórmula, outras também podem ser deduzidas utilizando-se de conceitos básicos da Geometria. Espero que vocês tenham gostado e se empolgado para deduzir novas fórmulas.

Nesta abordagem final, espera-se que os alunos tenham uma clareza ainda maior e entendam a importância de trabalhar estas generalizações. Além disso, esperamos que os alunos se empolguem com a Matemática, uma vez que, durante o processo de aprendizagem, o enfoque foi mostrar a eles que a capacidade de deduzir uma fórmula matemática é possível e pode se tornar algo prazeroso para a vivência escolar. E, mais do que isso, a filosofia de se desafiar diante daquilo que sempre pareceu impossível pode ser uma habilidade levada para a vida como um todo, nas suas mais diversas áreas.

CAPÍTULO VI – CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta deste trabalho foi a de apresentar uma linguagem não habitual na maioria das aulas de Matemática do ensino regular, utilizando-se de uma proposta idealizada por Simon (1995) que é a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA). A partir dela, o professor tem a oportunidade de fazer previsões e estabelecer uma espécie de "roteiro" para sua aula. Vale ressaltar que esse modelo não tem a intenção de ser seguido literalmente, mas serve para orientar e fornecer subsídios ao trabalho docente.

Ao adotar diversificadas estratégias metodológicas, como Resolução de Problemas, Jogos matemáticos, uso de softwares, THA, entre outros, o professor se muni para que os alunos possam obter uma qualidade significativa de todos os conceitos que foram abordados durante as aulas, mesmo em uma sala de aula heterogênea. Para Vygotsky (1996), o educador deve ter metodologias de ensino diferenciadas para atender os estudantes, visto que estes não detêm os mesmos conhecimentos nem aprendem da mesma forma e no mesmo espaço de tempo. A dedicação do professor no processo de ensino aprendizagem é fundamental para o sucesso dos alunos. D'Ambrosio (2012) diz que

> Ninguém poderá ser um bom professor sem dedicação, sem preocupação com o próximo, sem amor num sentido amplo. O professor passa ao próximo aquilo que ninguém pode tirar de alguém, que é o conhecimento. Conhecimento só pode ser passado adiante por meio de uma doação. O verdadeiro professor passa o que sabe não em troca de um salário (pois, se assim fosse, melhor seria ficar calado 49 minutos!), mas somente porque quer ensinar, quer mostrar os truques e os macetes que conhece (D'AMBRÓSIO, 2012, p. 77).

Com calendários restritos e materiais a serem concluídos no decorrer do período letivo, muitos professores deixam de usar uma linguagem mais algébrica com os alunos e, muitas vezes, transmitem um conteúdo esperando que o aluno decore as fórmulas matemáticas para a aplicação durante as tarefas propostas. Esta percepção, além de se mostrar fracassada na maioria das vezes, faz com que o aluno passe a anular cada vez mais a ideia de gostar e apreciar a vivência de aprender a

Matemática, tornando todo o processo de concepção deste aprendizado uma frustação para si, para o professor e para o colégio, o que desencadeia resultados negativos em processos de seleção e que contam como índices educacionais.

O que propomos neste trabalho foi deduzir, de várias formas distintas, as áreas de alguns polígonos regulares utilizando-se de outros conceitos matemáticos, fazendo com que o processo de concepção destes conteúdos fosse aprimorado e revisitado, tais como razões trigonométricas, razões métricas no triângulo retângulo, lei dos senos e cossenos, bissetriz de um ângulo, apótema de um polígono, entre outros.

Ao inserir conteúdos que levam o aluno a construir o conhecimento sem o artifício de ter que decorá-lo durante o processo, mediante a um diálogo responsivo, além de torná-lo mais crítico, faz com que haja maior participação nas aulas, uma vez que a figura do professor como o único detentor do conhecimento é desconstruída. O aluno é instigado a querer mais conteúdos, pois reformulou o modo de pensar sobre determinados conceitos matemáticos e ampliou a sua visão acerca do significado de alguns entes no universo matemático. Além disso, essa iniciativa desenvolve o pensamento lógico, melhora a questão de raciocínio, proporciona um conhecimento mais amplo da Matemática além dos livros, auxilia o aluno na concepção de uma opinião, além de trabalhar a tomada de decisão diante de problemas – o que leva a um pensamento construtivo para a vida também.

O processo da THA torna a aprendizagem mais eficaz, pois quando o professor, ao preparar sua aula, a emprega com objetivos claros, tarefas específicas para cada situação e projeções de possíveis intercorrências no processo, há uma grande chance de se obter êxito no final. Se as abordagens não forem eficazes, o professor tem a autonomia para mudar os objetivos, as tarefas e projeções, a fim de que o aprendizado por parte dos alunos e do professor seja o mais abrangente e conclusivo possível. A THA não necessariamente fica perfeita em sua primeira proposição e aplicação. São os elementos do processo, somados aos resultados obtidos em suas execuções que servirão para o professor fomentá-la e reorganizá-la conforme necessário.

Espera-se que este trabalho sirva de inspiração para que professores que estão na caminhada há algum tempo e que se deparam com dificuldades no processo de aprendizagem descubram formas de fazer com que seus alunos sejam mais ativos, deixando de relativizar a abrangência do conhecimento deles ao mínimo. Espera-se, ainda, que os professores, que estão assumindo o papel de educadores, saibam que os alunos possuem sim a capacidade de abstração de conhecimento. Basta instrumentalizá-los da forma correta e com processos que os motivem a explorar resultados. Os estudantes precisam se envolver com atividades de matematização que façam sentido para eles, mesmo dentro de um contexto puramente matemático.

REFERÊNCIAS

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução de M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Ed. Porto. 1994.

BRASIL, Base Nacional Comum Curricular, 2017.Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio/a-area-de-matematica-e-suas-tecnologias>. Acesso em: 08 de janeiro de 2021

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Brasil no Pisa 2018 [recurso eletrônico]. – Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2020. 185 p.: il.

BRASIL. PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em 26 dez. 2020

BRASIL. PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 26 dez. 2020

BRASIL. Prova Brasil, 2020. Disponível em: https://qedu.org.br/brasil/proficiencia?gclid=CjwKCAiA25v_BRBNEiwAZb4-ZROPNJdkyUpapxO-Vh7E89cS57oShGEShOqdpa9xbcWpD7jrd6UCxoCmXEQAvD_BwE. Acesso em 26 dez. 2020

BRITO, M. R. F. **Um estudo sobre as Atitudes em Relação à Matemática em Estudantes de 1º e 2º graus**. Tese de Livre Docência, UNICAMP, Campinas, 1996, p. 298. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/251566/1/Brito_MarciaReginaFerreirade_LD.pdf. Acesso em: 20 de jan. 2021.

D’AMBRÓSIO, U. Matemática, ensino e educação: uma proposta global. Temas & Debates, São Paulo, 1991.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**. São Paulo: Ática S.A., 2010

MOURA, M. O. . Matemática na infância. In: MIGUEIS, M. R.; AZEVEDO, M. G. (Org.). **Educação Matemática na infância**: abordagens e desafios. Serzedo – Vila Nova de Gaia: Gailivro, 2007, p. 62.

OLIVEIRA, Julio Cezar Rodrigues de. **Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem para o Ensino de Logaritmos na Perspectiva da Resolução de Problemas**. 2015. 122 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

PISA - Relatório PISA - Programa Internacional de Avaliação de Alunos, 2020. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/relatorio_brasil_no_pisa_2018.pdf Acesso em 26 dez. 2020.

ROSSETTO, Hallynnee Héllenn Pires. **Trajetória Hipotética de Aprendizagem sob um olhar realístico**. 2016. 104f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

SILVA, Matheus Terleski. **Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem para a educação financeira**. 2020. 108f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

SIMON, M. A.; TZUR, R. **Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning:** an elaboration of the hypothetical learning trajectory. Mathematical Thinking and Learning, vol. 6, n. 2, p. 91-104, 2004.

SIMON, Martin A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, vol. 26, n. 2, pp. 114-145, 1995.

TREFFERS, A.; GOFREE, F. Rational analysis of realistic mathematics education – the wiskobas program. 1985. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/BF03172570 . Acesso em: 16 jan. 2021.

VYGOTSKY, L. S. A Formação Social da Mente: O Desenvolvimento dos Processos Psicológicos Superiores. 5.ed. São Paulo (Brasil): Martins Fontes, 1996.