



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOCIEL MACHADO NUNES

A RELEVÂNCIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO BÁSICO.

Abaetetuba
2021

JOCIEL MACHADO NUNES

A RELEVÂNCIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO BÁSICO.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática, da Faculdade de Ciência Exatas – FACET da Universidade Federal do Pará – UFPA, campus de Abaetetuba, como requisito básico para obtenção do Título de Mestre em matemática.

Orientador: Prof.:Dr. José Francisco da Silva costa

Abaetetuba
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N972r Nunes, Jociel Machado.
A relevância dos números complexos no ensino básico. / Jociel
Machado Nunes. — 2021.
57 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. José Francisco Costa
Coorientador(a): Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,
Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação
em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2021.

1. História. 2. Geometria. 3. Ensino básico. 4. Aplicação.
5. Interpretação geométrica. I. Título.

CDD 510

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ – UFPA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA – FACET
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL –
PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

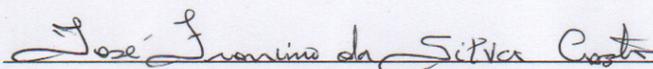
Jociel Machado Nunes

A RELEVÂNCIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO BÁSICO

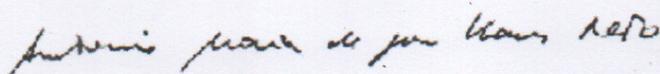
Dissertação apresentada como requisito final
para a obtenção do título de Mestre em
Matemática, pela Universidade Federal do Pará

Aprovada em 11 de junho de 2021.

Banca Examinadora:



Orientador: Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa, PROFMAT/UFPA



Membro Externo: Prof. Dr. Antonio Maia de Jesus Chaves Neto, UFPA



Membro Interno: Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro, PROFMAT/
UFPA

RESUMO

Esse trabalho aborda o estudo do número complexo e aplicação na área da geometria, com objetivo de compreender que tal conhecimento pode ser relevante no ensino básico. Historicamente o desenvolvimento dos números complexos levou cerca de 300 anos pra formalizar como um conjunto de números complexos onde fosse possível obter solução para equações do tipo $x^2 = -1$ e outra com as características semelhantes. **As soluções desse tipo de equação foram descritas por Euler como sendo do tipo $x = +\sqrt{-1} = +i$ e $x = -\sqrt{-1} = -i$, assim possibilitou a construção do conjunto dos números complexos, onde i é chamado unidade imaginária do número z . Entretanto, esse conjunto passou a ser melhor compreendido quando K. F. Gauss e Jean-Robert Argand descobriram de modo independente que Z poderia ser representado geometricamente.** É fato que o número z não é uma prioridade no ensino básico no Brasil, muito por conta da nova tendência de flexibilização do conteúdo que aparece cada vez menos nos vestibulares não sendo exigido no **Exame Nacional do Ensino Médio**. No entanto é importante que o aluno do ensino básico conheça a vantagem da utilização do conjunto para melhor compreensão de raízes de equação do 2º grau não reais. O formalismo do conjunto z é tratado nos cursos de graduação com varias aplicações nas áreas da matemática, Física, engenharia e etc. Apesar não utilidade no ensino básico, faz-se necessário realizar uma abordagem do conceito do número z como um operador algébrico responsável em girar um vetor 90º. A partir dessa abordagem foi possível aplicar alguns problemas na área da geometria, como no movimento lunar (aplicação da 2º fórmula de Moivre), ângulo entre retas, raiz cúbica de um número não real, soluções de sistemas a duas variáveis que envolve números complexos com ênfase na geometria plana. Observa-se, nesse sentido a grande vantagem em considerar aplicabilidade do conjunto dos números complexos em outras áreas do conhecimento e devido a essa vantagem, poderia fazer parte dos conteúdos a **nível do ensino básico**. Dessa forma, levando em conta os aspectos algébricos e geométricos na solução de vários problemas em que se faz necessário o conhecimento do conjunto z , o professor teria, sem dúvida, um recurso a mais para abordar alguns conteúdos que estão intrínsecos no ensino básico e que exige a buscar de métodos que facilitem o aprendizado. Conclui-se com a pesquisa que o conjunto dos números complexos têm as vantagens de ampliar o aprendizado utilizando os conceitos de número complexo como um operador algébrico e com a vantagem em aplicações na geometria e outros segmentos do conhecimento científico.

Palavras-chaves: História; Interpretação Geométrica; geometria; Ensino Básico; Aprendizagem e Aplicação.

ABSTRACT

This work addresses the study of the complex number and application in the area of geometry, with the aim of showing that such knowledge can be relevant in basic education. Historically, the development of complex numbers took about 300 years to formalize as a set of complex numbers where it was possible to obtain a solution for equations of the type $x^2 = -1$ and another with similar characteristics. The solutions of this type of equation were described by Euler as being of the type $x = +\sqrt{-1} = +i$ and $x = -\sqrt{-1} = -i$, thus enabling the construction of the set of complex numbers, where i is called an imaginary unit of the number z . However, this set came to be better understood when K. F. Gauss and Jean-Robert Argand independently discovered that Z could be represented geometrically. It is a fact that the number z is not a priority in basic education in Brazil, largely because of the new tendency of content flexibility that appears less and less in the entrance exams and is not required in the National High School Exam. However, it is important that the elementary school student knows the advantage of using the set to better understand non-real 2nd degree equation roots. The formalism of set z is treated in undergraduate courses with various applications in the areas of mathematics, physics, engineering and etc. Although not useful in basic education, it is necessary to approach the concept of the number z as an algebraic operator responsible for rotating a vector 90° . From this approach it was possible to apply some problems in the area of geometry, such as in the lunar movement (application of the 2nd Moivre formula), angle between lines, cube root of a non-real number, systems solutions to two variables involving complex numbers with emphasis on plane geometry. In this sense, there is a great advantage in considering the applicability of complex numbers in other areas of knowledge and due to this advantage, it could be part of the content at the level of basic education. Thus, taking into account the algebraic and geometric aspects in the solution of several problems in which it is necessary to know the set z , the teacher would undoubtedly have one more resource to address some contents that are intrinsic in basic education and that requires looking for methods that facilitate learning. It is concluded with the research that the set of complex numbers has the advantages of expanding the learning using the concepts of complex number as an algebraic operator and with the advantage in applications in geometry and other segments of scientific knowledge.

Key words: History; Geometric interpretation; geometry; basic education; Learning and Application.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meus pais JOSÉ DA SILVA NUNES e MARIA IZABEL CARDOSO MACHADO por terem sempre me apoiado durante esse curso e em especial a minha filha LAYS SOPHIA, que é a razão pela qual procuro sempre me qualificar.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente á Deus, pela minha existência e que sempre esta comigo em todos os momentos, sejam de alegria como também nos de tristeza, dando direcionamento correto para minha decisões.

À minha filha LAYS SOPHIA CARDOSO NUNES que sem duvida é a razão pela qual estou sempre procurando me qualificar e não desistir diante dos obstaculo encontrados nessa caminhada.

À meus pais MARIA IZABEL CARDOSO MACHADO e JOSÉ DA SILVA NUNES por terem sempre me influenciado a estudar e pelo exemplo de pessoa que é importantíssimo para minha educação.

Aos professores do curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da UFPA Campus de Abaetetuba - PA, pelo companheirismo durante todo o curso, pelos conhecimentos compartilhados e por sempre estarem dispostos a ajudar.

À sociedade Brasileira de Matemática – SBM e aos professores do IMPA pelo oferecimento deste curso em Rede Nacional.

Aos meus colegas da turma de mestrado de 2018 da UFPA Campus Abaetetuba, pela experiencia de ter convivido com eles que sem duvida contribuíram para minha formação docente, por sempre estarem dispostos a me ajudar, pela união que foi o alicerce em nossa preparação ao ENQ, onde todos compartilharam e contribuíram de maneira crucial para que todas conseguissem suas aprovações uns no primeiro e os outro no segundo.

À meu orientador Prof: Dr.: JOSÉ FRANCISCO DA SILVA COSTA, pelas orientações durante a produção dessa dissertação, pela paciência e amizade.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figure 1 – Representação da relação dos \mathbf{R} nos \mathbf{C}	18
Figure 2 – Representação geométrica da Adição de dois números complexos	19
Figure 3 – Representação geométrica da subtração de dois números complexos.	20
Figure 4 – Representação Geométrica do conjugado de z	20
Figure 5 – Representação geométrica do módulo de z	22
Figure 6 – Representação do argumento de z	23
Figure 7 – Representação do Par ordenado no plano de Argand-Gauss.	23
Figure 8 – Representação de $z = 1 + i$ no plano de Argand-Gauss.	24
Figure 9 – Produto de dois números complexos na forma Trigonométrica.	25
Figure 10 – Interpretação geométrica das raízes cubicas de $z = 8$	27
Figure 11 – Interpretação geométrica das raízes quartas de $z = 81$	28
Figure 12 – Representação geométrica das raízes cubicas de $z = 1$	29
Figure 13 – Rotação do vetor quando multiplicado por i	31
Figure 14 – Representação do ângulo entre duas retas.	32
Figure 15 – Representação do ângulo entre duas retas da aplicação 1.	33
Figure 16 – Representação do ângulo obtido quando multiplica-se uma reta por $z = a + bi$ e a reta que foi encontrada.	35
Figure 17 – Representação geométrica do problema proposto.	39
Figure 18 – Representação geométrico do problema proposto.	40
Figure 19 – Representação geométrica do caso que o ponto D fica entre os pontos A e B	41
Figure 20 – Representação geométrica da aplicação 1.	42
Figure 21 – Representação geométrica da aplicação 2.	43
Figure 22 – Pontos da Lua quando se movimenta em relação a terra.	45
Figure 23 – Representação das três posições da lua em relação a terra.	46
Figure 24 – Representação da posição da lua sob uma trajetória elíptica.	49
Figure 25 – Representação geométrica da aplicação 4.4	53

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	CONTEXTO HISTÓRICO	13
3	NÚMEROS COMPLEXOS	16
3.1	Definição	16
3.1.1	Propriedades da adição	17
3.1.2	Subtração	17
3.1.3	Propriedades da multiplicação	17
3.1.4	Divisão	17
3.2	Forma Algébrica	17
3.2.1	Unidade Imaginária	18
3.2.2	Conjugado de z	19
3.2.2.1	Propriedades do Conjugado de z	20
3.3	Forma Trigonométrica	21
3.3.1	Teorema 1	21
3.3.2	Teorema 2	21
3.3.3	Argumento de z	22
3.3.4	Plano de Argand-Gauss	23
3.3.5	Multiplicação de números complexos na forma Trigonométrica	25
3.3.6	Potenciação de números complexos na forma Trigonométrica	25
3.3.7	Radiciação de números complexos	26
3.3.7.1	Teorema	26
3.3.7.2	Interpretação geométrica	26
4	OBTENÇÃO DA UNIDADE IMAGINÁRIA ATRAVÉS DA ROTAÇÃO	30
4.1	Importância dos números complexos na geometria analítica	31
4.1.1	Ângulo entre duas retas	33
4.1.2	Caso geral do ângulo entre duas retas	35
4.2	A geometria plana como recurso para solução de problemas envolvendo números complexos	38
4.2.1	Caso geral	39
5	OUTRAS APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS	44
5.1	Aplicação no movimento da lua	44
5.2	Posição da lua considerando sua trajetória circular	46
5.3	Posição da lua considerando sua trajetória elíptica	48

5.4	Aplicação à Engenharia Elétrica	52
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
7	REFERÊNCIA	55

1 INTRODUÇÃO

O trabalho aborda como objetivo geral, estudar os números complexos com ênfase nas aplicações com intuito de compreender a relevância desse conjunto no ensino básico. Em relação aos objetivos específicos, Desenvolver historicamente a origem dos números complexos a partir de Cardano, K. F. Gauss e Jean-Robert Argand para uma melhor compreensão dos fatos e desenvolvimento e compreensão na representação geométrica desse números no plano cartesiano; Definir de maneira formal o conjunto dos números complexos e suas propriedades com a possível conexões entre os métodos algébricos e os conceitos geométricos, mostrando as representações geométricas das propriedades deles na forma algébrica e na forma trigonométrica no plano de Argand-Gauss com a utilização do auxílio do software matemático Geogebra. Compreender que a unidade imaginária representa um operador algébrico que intrinsecamente está ligado a rotação de uma reta ou um vetor de um ângulo de 90° que leva a expressão como um vetor obtido das varias rotações no plano cartesiano, tomando como resultado o resto da divisão o que conduz a a unidade imaginária a ser obtida a partir da rotação do vetor. Aplicação dos números complexos para determinar posição da lua com utilização da segunda fórmula de Moivre, demonstração dos ângulos entre retas e utilização do número complexo como operador na solução de diferentes aplicações e argumentos geométricos atrelados ao conceitos algébricos pra facilitar o entendimento.

Quanto a justificativa do trabalho, entende-se que o conceito de operador algébrico tem a vantagem de utilizar em diferentes problemas para complementar o ensino a partir de um olhar geométrico e analítico para a área da geometria o que vem ampliar o aprendizado de alguns conteúdos a nível de ensino básico com a utilização desse conceito.

No terceiro capítulo, define-se de maneira formal o conjunto dos números complexos e suas propriedades buscando sempre que possível conexões entre os métodos algébricos e os conceitos geométricos. Nesse contexto, faz-se as representações geométricas das propriedades dos números complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica no plano de Argand-Gauss com o auxílio do software matemático Geogebra. Mostra-se também como podem-se resolver alguns problemas com o auxílio dos conceitos de geometria.

No quarto capítulo, mostra-se que a unidade imaginária faz uma reta ou um vetor girar de um ângulo de 90° , com isso verifica-se que a unidade imaginária pode ser obtida a partir da rotação de um vetor. mostra-se também que os números complexos pode ser utilizados para determinar o ângulo entre duas retas, nesse caso utiliza-se a forma algébrica para determinar esse ângulo. Faz-se uso também dos conceito geométricos para determinar a solução de problemas envolvendo números complexos. desenvolve-se algumas aplicações a cerca dos números complexos enfatizando aspectos geométricos, visando proporcionar um significado mais amplo

para esse conjunto, uma vez as definições são pautadas em argumentos algébricos.

No quinto capítulo faz-se outras aplicações dos números complexos como por exemplo, como determinar posição da lua utilizando a segunda fórmula de Moivre, entre outros. Portanto, com base nos métodos de solução nas diferentes aplicações por vezes utilizando argumentos geométricos atrelados ao conceitos algébricos pra facilitar o entendimento, nota-se a importância dos números complexos. Nesse sentido busca-se abordagem que visa complementar o ensino dos números complexos a partir de um olhar geométrico, desta forma tentar facilitar o aprendizado, com isso mostrar que podem ser trabalhados de forma efetiva dentro das escolas e até nas universidades, uma vez que facilitam o entendimento da realidade.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

Neste capítulo fala-se um pouco de como foi o surgimento do que hoje conhecemos como conjunto dos números complexos, para da embasamento teórico utilizou-se as referências [6], [8], [9], [10] e [11].

Apesar de encontrarmos menções a raiz de números negativos em autores da antiguidade, como por exemplo a expressão $\sqrt{81 - 144}$, que aparece em uma obra de Heron de Alexandria (século *I*), ou $\sqrt{1849 - 2016}$, que apareceu na tentativa de Diofanto (século *III*) de resolver a equação $336x^2 + 24 = 172x$, mas foi apenas no século *XVI*, com os matemáticos Italianos que tais raízes começaram a aparecer frequentemente. Durante algum tempo, a resolução de equações sempre era um fato motivava vários matemáticos. Nessa época as equações polinomiais do 2º grau que apresentavam raízes quadradas de números negativos eram consideradas sem resolução, e com isso o objetivo dos matemáticos da época era desenvolver um método com o qual fosse possível determinar as soluções de uma equação polinomial do 3º grau.

No início do século *XVI*, Scipione del Ferro (1465 – 1526), que era professor da Universidade de Bolonha, conseguiu resolver uma equação cúbica do tipo $x^3 + bx = c$. Apesar de ter conseguido resolver esse tipo de equação Del Ferro não publicou seu método, apenas guardou o segredo para que pudesse usar em uma futura batalha intelectual, fato este era comum na época, o que frequentemente aconteciam e também serviam de avaliação científica dos participantes. Nesse contexto entra no cenário Niccolo Fontana (1499(?) – 1557), natural de Bréscia na Itália. No ano de 1512 sua cidade natal foi invadida pelos Franceses, Niccolo foi seriamente ferido por golpes de sabre, porém sobreviveu, mas ficou com sequela pro resto da vida a gagueira, daí o apelido Tartaglia (Gago). Felizmente sua brilhante mente não fora afetada e ainda bem jovem, como auto didata, se tornou um respeitável professor de matemática. Entretanto Scipione faleceu sem publicar seus resultados, divulgando-os apenas para um pequeno grupo de pessoas dentre eles Antônio Maria Del Fiore, de posse desse resultado Fiore tentou ganhar seu espaço entre os matemáticos e no ano de 1535 desafiou Tartaglia, para um duelo de resolução de problemas fato que era comum naquela época. O desafio consistia na resolução de trinta problemas para cada um, propostos pelo oponente. Tartaglia estava começando a se destacar no cenário matemático da época e prontamente aceitou o desafio. Todos os problemas propostos por Fiore para Tartaglia recaiam no caso particular da equação cúbica cuja solução ele conhecia, Tartaglia sabia que seu adversário conhecia a solução, mas o que Fiore não sabia era que Tartaglia também deduziu a fórmula e foi ainda mais longe deduzindo a fórmula para a equação do tipo:

$$x^3 + px^2 + q = 0$$

Tartaglia venceu o desafio com ampla vantagem, pois conseguiu resolver todos os

problemas propostos por Fiore, no entanto seu adversário não conseguiu resolver nem a metade dos problemas impostos por Tartaglia, e saiu humilhado do desafio. A esmagadora vitória de Tartaglia e sua descoberta fizeram com que sua fama crescer e gera grande repercussão entre os matemáticos da época.

Em 1539, Cardano (Girolamo Cardano, 1501-1576), convenceu Tartaglia a revelar seu método de resolução de equações cúbicas, sob o juramento de que não publicaria antes de Tartaglia. Ao começar a estudar a fórmula de Tartaglia, Cardano deparou-se com raízes de números negativos. E então escreveu para Tartaglia, relatando suas dificuldades com tais raízes, entretanto Tartaglia não o ajudou, pois estava arrependido de ter revelado sua fórmula. Muito provavelmente Tartaglia não tenha entendido que um novo conjunto de números estavam surgindo naquele momento na matemática.

Em 1543, Cardano descobriu, ao tomar conhecimento do trabalho de Del Ferro, que Tartaglia não era o único que tinha descoberto a solução das equações cúbicas. Assim na visão de Cardano isso desobrigava de sua promessa feita a Tartaglia. Havia jurado não revelar a fórmula de Tartaglia, mas não a de Del Ferro. E em 1545 publicou sua obra *Ars Magna (Arte Maior)*, na qual revelava a solução de equações cúbicas e quárticas, além de todo seu trabalho produzido após o conhecimento da fórmula de Tartaglia. Cardano e del Ferro receberam os créditos pela descoberta, Tartaglia ficou furioso, mas hoje em dia existe alguns livros no qual a fórmula que resolve as equações cúbicas é chamada de fórmula de Cardano-Tartaglia.

A importância do trabalho de Cardano foi apresentar raízes de números negativos nas aplicações da fórmula para resolver equações cúbicas nos casos irredutíveis. Em uma passagem da *Ars Magna*, Cardano estuda a divisão do número 10 em duas partes de modo que seu produto fosse 40. O que equivale a $x(10 - x) = 40$, ou seja, $x^2 - 10x - 40 = 0$, donde resulta $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$. Escreveu Cardano: “Desprezando a tortura mental envolvida, multiplicando $5 + \sqrt{-15}$ por $5 - \sqrt{-15}$, obtemos $25 - (-15) = 40$. (...) E assim vai toda sutileza aritmética, da qual isso, como eu havia dito, é tão sutil quanto inútil”. Nem mesmo Cardano compreendeu seu trabalho com as raízes de números negativos, durante muitas décadas, todos os que trabalharam com essas raízes não fizeram com fé. Não havia como negar a insuficiência dos números reais para se tratar das equações, uma vez que ao aplicar a fórmula na equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, obtive o seguinte resultado $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, daí não soube transformar no número 4, que era uma das soluções procuradas, a qual ele já conhecia.

Surge um novo personagem nessa história, e é quem vai tirar a matemática desse impasse que foi Bombelli (Rafael Bombelli, ca.1530-1579), um notável matemático, que estudou profundamente o trabalho de Cardano, principalmente os casos irredutíveis das equações cúbicas, que levavam a raízes de números negativos. Observou que ao fazer $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}$ (em notação atual), chegou ao seguinte resultado $a = 2$, $b = 1$ e assim $x = 4$. No entanto Bombelli foi ainda mais longe, em sua *Álgebra* (1572) aparece pela primeira vez uma teoria dos números complexos até então bem estruturada e com uma notação

específica. No entanto cada matemático que trabalhava a questão fazia de modo diferente, num trabalho de (Leonhard Euler, 1707-1783), de 1777, mas só publicado em 1794, define $\sqrt{-1} = i$, de forma que $i^2 = -1$. Essa notação foi usado por outro matemáticos da época, e a partir deste momento tornou-se a notação padrão para representar um número complexo.

Contudo os números complexos seguiam mantendo uma certa áurea de mistério, na virada do século *XVIII* para o *XIX*, com os trabalhos de Caspar Wessel (1745 – 1818), K. F. Gauss (1777 – 1855) e Jean-Robert Argand (1786 – 1822) onde descobriram, independentemente que um números dessa forma admite uma representação geométrica. Na atualidade um plano cartesiano pra representar um número complexo é conhecida como *plano de Argand-Gauss*.

Finalmente, em 1837, Hamilton (Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865), galgou os últimos degraus dessa descoberta reconhecendo que os números complexos como sendo um par ordenado de números reais (a, b) e rescrevendo as definições geométricas de Gauss na forma algébrica.

3 NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo faz-se de formal as definições e propriedades que contemplam esse conjunto. visa-se também uma interpretação geométrica, afim de facilitar o entendimento do tema abordado, as quais são norteadas pelas principais referências [1], [3], [4], [5], [7] e [16].

3.1 Definição

Dados os pares ordenados (a, b) e (c, d) , pertencentes ao R^2 valem as seguintes definições:

1) *Igualdade*: dois pares ordenados são iguais se, e somente se, os primeiros termos são iguais e os segundos termos são iguais.

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d$$

2) *Adição*: chama-se *Soma* de dois pares ordenado a um novo par ordenado cujo o primeiro e o segundo termos são, respectivamente, a soma dos primeiros e a soma dos segundos termos dos pares dados.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

3) *Multiplicação*: chama-se de *produto* de dois pares ordenados a um novo par cujo o primeiro termo é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares dados e cujo segundo termo é a soma dos produtos do primeiro termo de cada par dado pelo segundo termo do outro.

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

O conjunto C é um conjunto cujos elementos - número complexo - devem ser tais que possam ser somados e multiplicados, e também possibilitem a extração de raiz quadrada de um número negativo. uma boa maneira de definir esse conjunto é a proposta por Gauss em 1831 e reforçada por Hamilton em 1837, segundo o qual o conjunto dos números complexos é o conjunto de pares ordenados de números reais, em que estão definidas: as propriedades de adição e multiplicação.

Notação de um número complexo: um elemento $(x, y) \in C$ é representado por z . Assim portanto C

$$z \in C \iff z = (x, y), \text{ com } x, y \in R$$

3.1.1 Propriedades da adição

A operação de adição em C satisfaz as seguintes propriedades:

- A₁) Propriedade associativa;
- A₂) Propriedade comutativa;
- A₃) Existência do elemento neutro;
- A₄) Existência do elemento simétrico;

Demonstração vide [1], paginas 3 e 4.

3.1.2 Subtração

Decorre das propriedade anterior que, dados os complexos $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, existe um único $z \in C$ tal que $z_1 + z = z_2$.

O número z é chamado diferença entre z_2 e z_1 é denotado por $z_2 - z_1$, portanto:

$$z_2 - z_1 = z_2 - z_1' = (x_2, y_2) + (-x_1, -y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

3.1.3 Propriedades da multiplicação

A operação da multiplicação em C satisfaz as seguintes propriedades:

- M₁) propriedade associativa;
- M₂) propriedade comutativa;
- M₃) existência do elemento neutro;
- M₄) existência do elemento inverso;

Demonstração vide [1], paginas 4 e 5.

3.1.4 Divisão

Decorre da propriedade anterior que dados os complexos $z_1 = (x_1, y_1) \neq (0, 0)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, existe um único $z \in C$ tal que $z_1 \cdot z = z_2$ pois:

$$z_1 \cdot z = z_2 \implies z_1'' \cdot (z_1 \cdot z) = z_1'' \cdot z_2 \implies (z_1'' \cdot z_1) \cdot z = z_1'' \cdot z_2$$

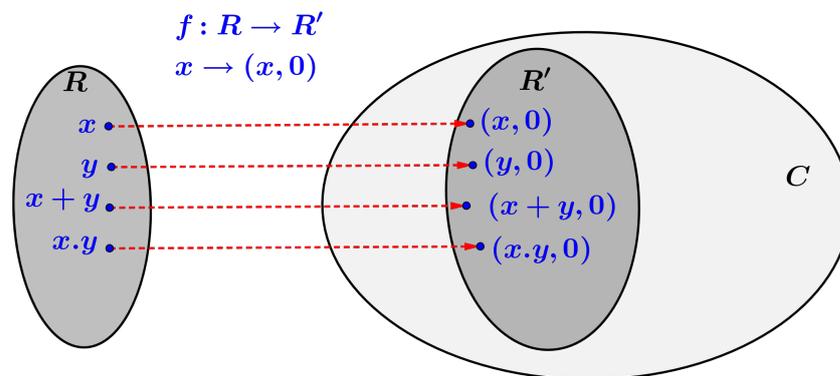
3.2 Forma Algébrica

Consideremos o subconjunto R' de C formado pelos pares ordenados cujo o segundo termo é zero:

$$R' = (x, y) \in C \mid y = 0$$

Fazem parte desse conjunto os pares $(0, 0), (1, 0), (x, 0), (y, 0), (x + y, 0), (x \cdot y, 0), etc.$

Seja f uma aplicação de R em R' que leva a cada $x \in R$ ao par $(x, 0) \in R'$.

Figure 1 – Representação da relação dos \mathbf{R} nos \mathbf{C} .

Fonte: Acervo do Autor.

Note que para todo par $(x, 0) \in R'$, existe um correspondente $x \in R$, isto mostra que f é uma aplicação sobrejetiva. Além disso dados $x \in R$ e $x_1 \in R$, com $x \neq x_1$, cujo seus correspondente são respectivamente $(x, 0) \in R'$ e $(x_1, 0) \in R'$ são também distintos, isto corresponde dizer que a aplicação f é injetiva, e portanto f é uma aplicação bijetiva.

3.2.1 Unidade Imaginária

Chama-se unidade imaginária e indica-se por i o número complexo $(0, 1)$. Note que:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

Ou seja a propriedade básica da uForma Trigonométricanidade imaginária é:

$$i^2 = -1$$

Aplicando a propriedade associativa da multiplicação, temos:

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

Mais geralmente, para todo $n \in \mathbf{N}$, tem-se:

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1 \text{ e } i^{4n+3} = -i$$

Dado um número complexo $z = (x, y)$, temos:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)$$

Isto é, z é da forma

$$z = x + y \cdot i$$

Desta maneira, todo número complexo $z = (x, y)$ pode ser escrito da forma $z = x + y \cdot i$, a qual é chamado forma algébrica. O número real x é denominado parte real de z e o número real y é a parte imaginária de z e indica-se por:

$$x = \text{Re}(z) \text{ e } y = \text{Im}(z)$$

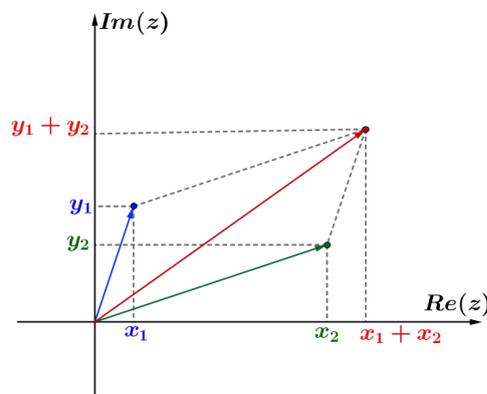
Assim um número complexo é um número real se a parte imaginária for nula. Por outro lado um número complexo com $y = \text{Im}(z) \neq 0$ é imaginário puro se a parte real for nula.

Exemplo: $z = x + 0i = x$ é real $z = 0 + yi = yi$ ($y \neq 0$) é imaginário puro.

É mais conveniente utilizar a forma ($z = x + yi$) do que o par ordenado (x, y) na representação dos números complexos, a qual facilita as operações. *Igualdade*: Dados dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, tal que $z_1 = z_2$ isto ocorre se, e somente se, tais números tem partes reais iguais e partes imaginárias iguais, ou seja, $a = c$ e $b = d$.

Adição: Dados dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, a soma $z_1 + z_2 = z_3$, onde $z_3 = (a + c) + (b + d)i$, ou seja, a parte real é soma das partes reais de z_1 e z_2 e a parte imaginária é a soma das partes imaginárias de z_1 e z_2 .

Figure 2 – Representação geométrica da Adição de dois números complexos



Fonte: Acervo do Autor.

Para caso da subtração tem-se:

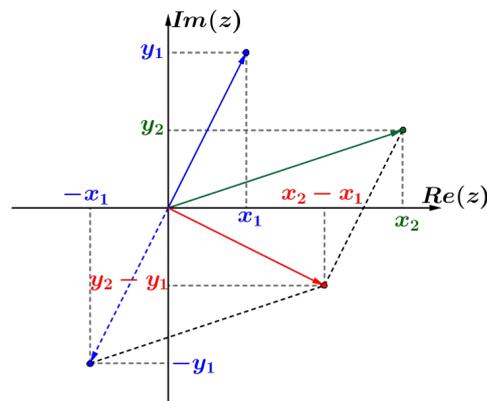
Multiplicação: Dados dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, o produto $z_1 \cdot z_2 = z_3$, onde $z_3 = (a + bi) \cdot (c + di)$, aplicando a propriedade distributiva e considerando que $i^2 = -1$, obtemos

$$z_3 = (a + bi) \cdot (c + di) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$$

3.2.2 Conjugado de z

Chama-se conjugado de $z = x + yi$ ao complexo $\bar{z} = x - yi$. Do ponto de vista geométrico, pode considerar o conjugado como um ponto simétrico em relação ao eixo x . Observe que o

Figure 3 – Representação geométrica da subtração de dois números complexos.



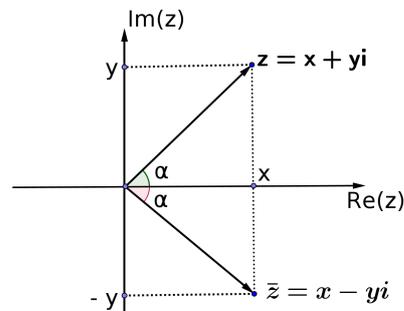
Fonte: Acervo do Autor.

afixo de z , (isto é, a representação gráfica do conjugado de \bar{z}). Consiste num ponto do plano simétrico ao afixo de z , em relação ao eixo real.

Exemplos:

$$1) z = 3 + 7i \implies \bar{z} = 3 - 7i$$

$$2) z = 9 - 5i \implies \bar{z} = 9 + 5i$$

Figure 4 – Representação Geométrica do conjugado de z .

Fonte: Acervo do Autor.

3.2.2.1 Propriedades do Conjugado de z

Se z e w são números complexos, então:

$$1) \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}.$$

$$2) \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}.$$

$$3) \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

$$4) \text{ Se } w \neq 0, \text{ tem-se: } \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

5) Se $z \in \mathbf{R}$, $z = \bar{z}$.

6) $\bar{\bar{z}} = z$.

7) Se n é um inteiro positivo, $(\bar{z})^n = \overline{z^n}$.

As demonstrações poder ser vistas pelos leitor em [3], paginas 164 e 165.

3.3 Forma Trigonométrica

Dado $z = x + yi$ um número complexo chama-se *Norma* o número real e positivo e é denotado por:

$$N(z) = x^2 + y^2$$

Denomina-se *módulo ou valor absoluto* de um número complexo $z = x + yi$ ao número real e positivo, dado por:

$$\rho = |z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemplo: Seja $z = 3 + 4i$, o módulo de z é:

$$\rho = |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} \implies \rho = |z| = 5$$

3.3.1 Teorema 1

Se $z = x + yi$ for um número complexo qualquer, então vale as seguintes propriedades:

(I) $|z| \geq 0$

(II) $|z| = 0 \implies z = 0$

(III) $|z| = |\bar{z}|$

(IV) $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$

(V) $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

3.3.2 Teorema 2

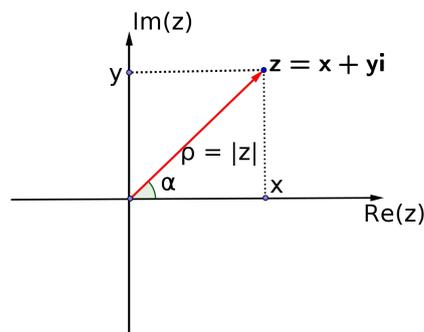
Sejam z_1 e z_2 números complexos quaisquer, então:

(I) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(II) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (z_2 \neq 0)$

(III) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Interpretação geométrica do módulo de z .

Figure 5 – Representação geométrica do módulo de z .

Fonte: Acervo do Autor.

3.3.3 Argumento de z

Denomina-se argumento de um número complexo $z = x + yi$, não nulo, ao ângulo θ e indica-se por $\arg(z)$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\rho} \text{ e } \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} \text{ onde } \rho = |z|$$

Observações:

- 1) A condição $z \neq 0$ garante $\rho \neq 0$
- 2) Existe pelo menos um ângulo satisfazendo a definição pois:

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{\rho^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

3) Fixado o complexo $z \neq 0$, estão também definidos $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$, porém o ângulo θ pode assumir infinitos valores, congruentes dois a dois (congruência módulo 2π). Assim, o complexo $z \neq 0$ tem argumento

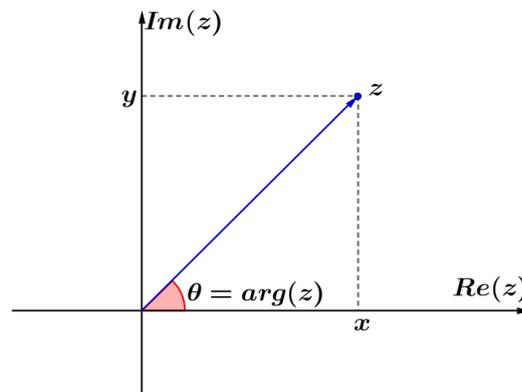
$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Onde θ_0 é chamado argumento principal de z , cujo $\cos(\theta_0) = \frac{x}{\rho}$, $\sin(\theta_0) = \frac{y}{\rho}$ e $0 \leq \theta_0 < 2\pi$.

Exemplo: determine o argumento dos números complexos a seguir:

a) $z = 1 + i$

Sol:

Figure 6 – Representação do argumento de z .

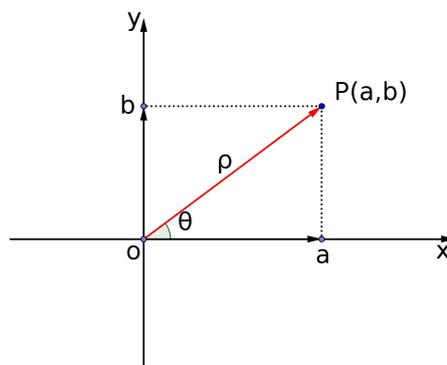
Fonte: Acervo do Autor.

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \arg(z) = \theta_0 = \frac{\pi}{4}$$

3.3.4 Plano de Argand-Gauss

O plano cartesiano no qual estão representados os números complexos é denominado *plano complexo ou plano de Argand-Gauss*. Um ponto $P(x, y)$ é chamado *afixo* do número complexo $z = x + yi$.

Figure 7 – Representação do Par ordenado no plano de Argand-Gauss.



Fonte: Acervo do Autor.

Onde xOy é denominado plano de Argand-Gauss, Ox de eixo real, Oy de eixo imaginário e P o afixo de z .

Note que a distância entre P e O é o módulo de z , ou seja,

$$d(P, O) = \rho$$

E o ângulo formado pelo eixo real com \vec{OP} é θ , assim:

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\rho} \text{ e } \sin(\theta) = \frac{y}{\rho}$$

Portanto, θ é o argumento principal de z .

Seja $z = x + yi$ um número complexo qualquer não nulo, tem-se:

$$z = x + yi = \rho \cdot \left(\frac{x}{\rho} + i \cdot \frac{y}{\rho} \right)$$

logo

$$z = \rho \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) \quad (3.1)$$

chamada *forma Trigonométrica ou polar* de z .

Exemplo: determinar a forma trigonométrica do número complexo $z = 1 + i$.

Solução:

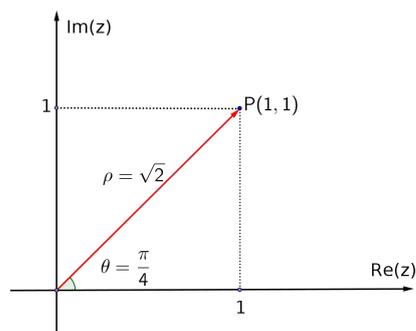
$$\left. \begin{array}{l} \rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \implies \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \implies \arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

Assim, a forma trigonométrica de z é dada por:

$$z = \rho \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

Interpretação geométrica

Figure 8 – Representação de $z = 1 + i$ no plano de Argand-Gauss.



Fonte: Acervo do Autor.

3.3.5 Multiplicação de números complexos na forma Trigonométrica

Considere os números complexos z_1 e z_2 , dados na forma trigonométrica:

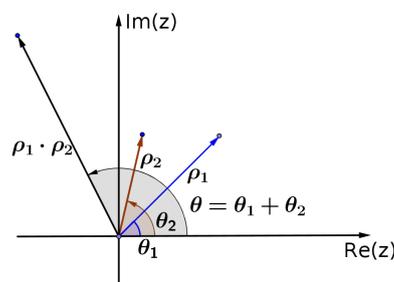
$$z_1 = \rho_1 \cdot (\cos(\theta_1) + i \cdot \sin(\theta_1))$$

$$z_2 = \rho_2 \cdot (\cos(\theta_2) + i \cdot \sin(\theta_2))$$

O produto $z_1 \cdot z_2$ é dado por:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Figure 9 – Produto de dois números complexos na forma Trigonométrica.



Fonte: Acervo do Autor.

Assim, o produto de dois números complexos escritos na forma trigonométrica é o número complexo cujo o módulo é igual ao produto dos módulos dos fatores e o argumento é igual a soma dos argumentos dos fatores, onde $0 \leq \arg(z_1 \cdot z_2) < 2\pi$

3.3.6 Potenciação de números complexos na forma Trigonométrica

Dado o número complexo $z = \rho \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$, não nulo, e o número $n \in \mathbf{Z}$, então:

$$z^n = \rho^n \cdot (\cos(n\theta) + i \cdot \sin(n\theta))$$

Chamada *1ª fórmula de Moivre*.

Demonstração:

Para demonstrar essa fórmula vamos utilizar o princípio da indução finita.

I) Para $n = 0$, tem-se;

$$\begin{cases} z^0 = 1 \\ \rho^0 \cdot (\cos(0) + i \cdot \sin(0)) = 1 \end{cases}$$

II) Supondo a fórmula válida para algum $n = k$, então:

$$z^k = \rho^k \cdot (\cos(k\theta) + i \cdot \sin(k\theta))$$

Mostraremos que vale também para $n = k + 1$.

Note que:

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z = \rho^k \cdot (\cos(k\theta) + i \cdot \sin(k\theta)) \cdot \rho \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) \\ &= (\rho^k \cdot \rho) \cdot (\cos(k\theta + \theta) + i \cdot \sin(k\theta + \theta)) \\ &= \rho^{k+1} \cdot (\cos((k+1)\theta) + i \cdot \sin((k+1)\theta)) \end{aligned}$$

Como a fórmula se verifica para $n = k + 1$, então a fórmula é válida para todo $n \in \mathbf{N}$. De modo, análogo mostra-se para o caso de $n \in \mathbf{Z}_-$.

3.3.7 Radiciação de números complexos

Dado um número complexo z , chama-se raiz enésima de z , e denota-se por $\sqrt[n]{z}$ a um número z_k tal que.

$$\sqrt[n]{z} = z_k \iff z_k^n = z$$

3.3.7.1 Teorema

Considere os números complexos $z = \rho \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$ e o número natural n ($n \geq 2$), então existem n raízes enésimas de z que são da forma

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \right]$$

Esta fórmula é chamada de *2ª fórmula de Moivre*, onde $\sqrt[n]{\rho} \in \mathbf{R}_+$ e $k \in \mathbf{Z}$.

3.3.7.2 Interpretação geométrica

Sabendo que $\sqrt[n]{z}$ pode assumir n valores distintos porém com o mesmo módulo. Desta forma, os afixos das n raízes são pontos da mesma circunferência, com centro na origem do plano de Argand-Gauss e raio igual a $\sqrt[n]{\rho}$.

Além disso, os argumentos principais de $\sqrt[n]{z}$ formam uma progressão aritmética que começam com $\frac{\theta}{n}$ e tem razão $\frac{2\pi}{n}$. Com isso, os afixos das n raízes enésimas de z dividem a circunferência em n partes congruentes.

Se $n = 2$ são pontos diametralmente opostos;

ou

Se $n \geq 3$ são vértices de um polígono regular inscrito na circunferência.

Exemplo 1: Encontre as raízes cúbicas de $z = 8$ e represente geometricamente o resultado.

Solução:

$$\begin{cases} z = 8 \\ \rho = 8 \\ \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} = 1 \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} = 0 \end{cases}$$

Então, $\theta = 0$, pela fórmula deduzida, temos:

$$z_k = \sqrt[3]{8} \cdot [\cos(k \cdot \frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(k \cdot \frac{2\pi}{3})], \text{ com } k \in \{0, 1, 2\}.$$

Para $k = 0$, tem-se:

$$z_0 = 2 \cdot [\cos(0) + i \cdot \sin(0)] = 2$$

Para $k = 1$, tem-se:

$$z_1 = 2 \cdot [\cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{3})] = -1 + i \cdot \sqrt{3}$$

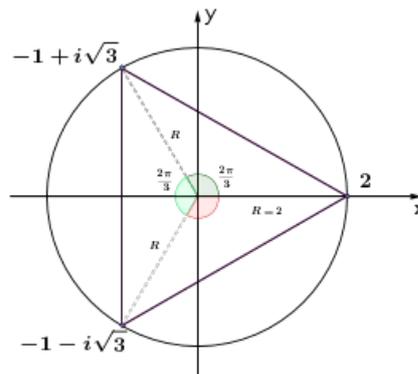
Para $k = 2$, tem-se:

$$z_2 = 2 \cdot [\cos(\frac{4\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{4\pi}{3})] = -1 - i \cdot \sqrt{3}$$

Portanto, os afixo de $\sqrt[3]{z}$ dividem a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 2 em três partes congruentes.

Geometricamente obtém-se o seguinte resultado.

Figure 10 – Interpretação geométrica das raízes cúbicas de $z = 8$.



Fonte: Acervo do Autor.

Exemplo 2: Encontre as raízes quádricas de $z = 81$ e represente geometricamente o resultado.

Solução:

$$\begin{cases} z = 81 \\ \rho = 81 \\ \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} = 1 \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} = 0 \end{cases}$$

Logo, $\theta = 0$, e pela fórmula deduzida, temos:

$$z_k = \sqrt[4]{81} \cdot [\cos(k \cdot \frac{2\pi}{4}) + i \cdot \sin(k \cdot \frac{2\pi}{4})], \text{ com } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Para $k = 0$, tem-se:

$$z_0 = 3 \cdot [\cos(0) + i \cdot \sin(0)] = 3$$

Para $k = 1$, tem-se:

$$z_1 = 3 \cdot [\cos(\frac{2\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{4})] = 3i$$

Para $k = 2$, tem-se:

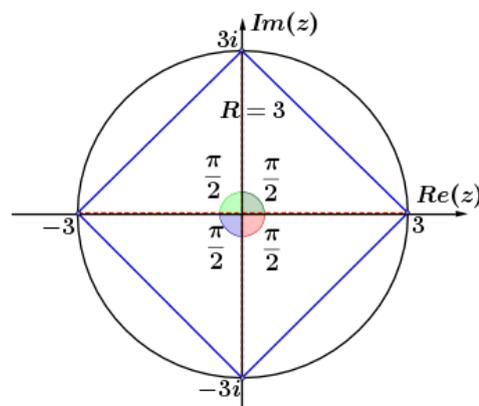
$$z_2 = 3 \cdot [\cos(\frac{4\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{4\pi}{4})] = -3$$

Para $k = 3$, tem-se:

$$z_3 = 3 \cdot [\cos(\frac{6\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{6\pi}{4})] = -3i$$

Portanto, os afixo de $\sqrt[4]{z}$ dividem a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 3 em quatro partes congruentes. Geometricamente tem-se:

Figure 11 – Interpretação geométrica das raízes quartas de $z = 81$.



Fonte: Acervo do Autor.

Exemplo 3: Encontre as raízes cúbicas de $z = 1$ e represente geometricamente o resultado.

Solução:

$$\begin{cases} z = 1 \\ \rho = 1 \\ \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} = 1 \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} = 0 \end{cases}$$

Então, $\theta = 0$ e pela fórmula deduzida, temos:

$$z_k = \sqrt[3]{1} \cdot [\cos(k \cdot \frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(k \cdot \frac{2\pi}{3})], \text{ com } k \in \{0, 1, 2\}.$$

Para $k = 0$, tem-se:

$$z_0 = 1 \cdot [\cos(0) + i \cdot \sin(0)] = 1$$

Para $k = 1$, tem-se:

$$z_1 = 1 \cdot [\cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{3})] = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

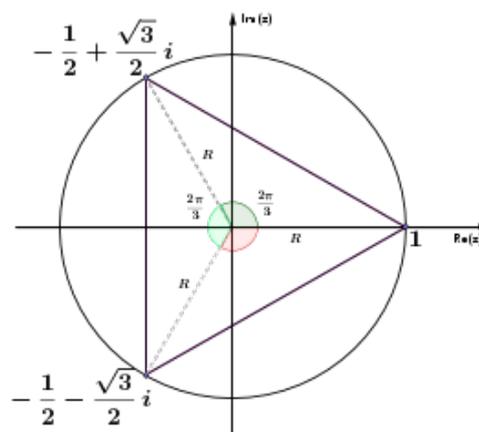
Para $k = 2$, tem-se:

$$z_2 = 1 \cdot [\cos(\frac{4\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{4\pi}{3})] = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, os afixos de $\sqrt[3]{z}$ dividem a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1 em três partes congruentes.

Geometricamente obtém-se o seguinte resultado.

Figure 12 – Representação geométrica das raízes cúbicas de $z = 1$.



Fonte: Acervo do Autor.

4 OBTENÇÃO DA UNIDADE IMAGINÁRIA ATRAVÉS DA ROTAÇÃO

Neste capítulo desenvolve-se uma abordagem sobre a aplicabilidade da forma algébrica dos números complexos e do conjugado na determinação dos ângulos entre duas retas s e r dadas. No entanto, procura-se considerar um significado físico a unidade imaginária quando considera-se como um operador algébrico que ao operar num vetor provoca uma rotação de 90. A partir dessa consideração, investiga-se qual será o entendimento da forma algébrica dos números complexos quando opera sobre uma reta. Faz-se uso das seguintes referências [1], [2], [3], [4], [7], [14], [15] e [16].

Ora se a unidade imaginária é responsável em rotacionar um vetor ou uma reta de um ângulo de 90, a forma algébrica passa a ser compreendida como um operador algébrico que faz a reta girar de um ângulo θ . No caso do conjugado, verifica-se que também representa um operador algébrico responsável pela rotação de um ângulo ϕ . Como será observado os dois operadores ao rotacionar a reta, o primeiro gira a reta de um ângulo agudo e o segundo, de um ângulo obtuso de maneira que a soma dos ângulos é suplementar.

Dessa maneira existe uma aplicabilidade dos números complexos em relação a geometria analítica e esse conhecimento se torna importante para uma melhor compreensão dos números complexos como operadores responsáveis por rotações de vetores e de retas no plano cartesiano.

Rafael Bombeli no seu trabalho de álgebra foi quem atribui a raiz quadrada de números negativos às unidades imaginárias. Sendo assim, foi possível resolver a equação Como:

$$x^2 + 1 = 0 \quad (4.1)$$

Ou seja:

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow x = \pm i \quad (4.2)$$

Cuja solução é $s = \pm i$, pois $\sqrt{-1} = i$, onde i é chamado número imaginário ou unidade imaginária. Leonard Euler (1707~1783) usou em 1777 a letra i para representar o número $\sqrt{-1}$, chamando-o de unidade imaginária. Isto é:

$$\sqrt{-1} = i \quad (4.3)$$

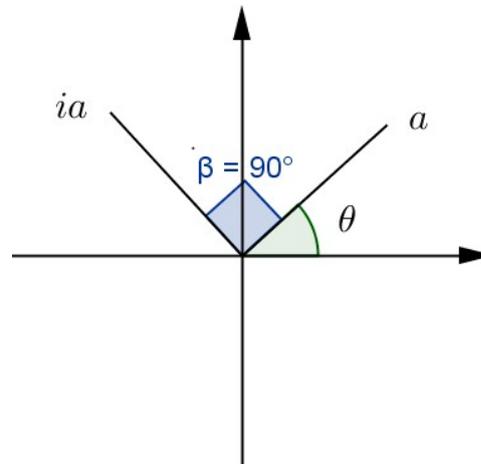
Ou

$$i^2 = -1 \quad (4.4)$$

Em termos geométricos a unidade imaginária representa um operador que faz um vetor girar 90 graus. Considere, Por exemplo, o vetor representado na figura 1 que tenha um comprimento arbitrário a . Observe um vetor de módulo a , ao multiplicar esse vetor pelo operador i , esse vetor tomará a direção dada por ai . Esse novo vetor será perpendicular ao primeiro vetor. Se girar novamente esse vetor de 90, o novo vetor tomará a direção $-a$ e, portanto, direção

oposta ao primeiro vetor. Portanto, tem-se que:

Figure 13 – Rotação do vetor quando multiplicado por i .



Fonte: Acervo do Autor.

O que mostra que a unidade imaginária i é um operador que faz um vetor girar 90° ou que o operador i^2 faz um vetor girar 180° . Isto é:

$$ai^2 = -a \Rightarrow i^2 = -1 \quad (4.5)$$

4.1 Importância dos números complexos na geometria analítica

Nesta secção faz-se uso da forma algébrica dos números complexos mostrando que pode ser aplicada para obter os valores dos ângulos entre duas retas s e r dadas. A priori mostraremos a importância da unidade imaginária como operador algébrico, mostrando como utilizá-lo para obter a relação entre os coeficientes de duas retas perpendiculares. Em seguida, estender essa teoria para a forma algébrica dos números complexos e de que forma se pode aplicar para determinar os ângulos agudo ou obtuso entre as retas s e r .

Como se pode observar a unidade imaginária i pode ser entendido como um operador algébrico responsável em rotacionar um vetor de 90° e assim sendo, mostra-se a relevância do operador no estudo de perpendicularismo entre retas. Posteriormente, verifica-se como obter uma dada reta com uma rotação diferente de 90° . A partir desse conhecimento, pode-se considerar a seguinte afirmativa: “Não existe diferentes retas que Passam por um ponto. O que existe é uma única reta que se modifica com as várias rotações, sendo essas rotações ligadas a forma algébrica dos números complexos ou da unidade imaginária”.

Considere uma reta r de equação reduzida

$$y = m_r \cdot x + b \quad (4.6)$$

Fazendo uma rotação de 90, o que equivale multiplicar por i , obtém-se que:

$$y \cdot i = m_r \cdot x \cdot i + b \cdot i \quad (4.7)$$

Onde, $y \cdot i = -x_1$, isto é, a ordenada y quando multiplicada pela unidade imaginária, o ponto recai na parte negativa do eixo X . Além disso, $x \cdot i = y_1$, nesse caso, usando o mesmo raciocínio o ponto que está na abscissa positiva recai na ordenada positiva quando multiplicada por i .

Portanto temos que:

$$-x_1 = m_r \cdot y_1 + i \cdot b \implies m_r \cdot y_1 = -x_1 - i \cdot b \quad (4.8)$$

$$y_1 = -\frac{1}{m_r} \cdot x_1 - i \cdot \frac{b}{m_r} \quad (4.9)$$

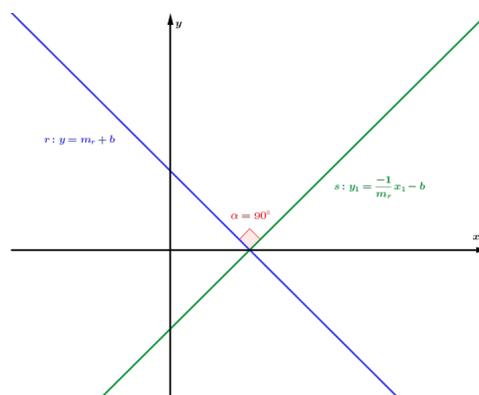
Considerando a reta 4.9 uma reta s e comparando 4.6 4.9, chegamos ao seguinte resultado:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} \implies m_s \cdot m_r = -1 \quad (4.10)$$

A expressão 3.11 mostra que a nova reta s obtida é perpendicular à reta dada r . Isto é, as duas retas r e s são perpendiculares, pois o coeficiente angular de s é igual o simétrico do inverso do coeficiente angular da reta r , como era de esse esperar.

Geometricamente temos:

Figure 14 – Representação do ângulo entre duas retas.



Fonte: Acervo do Autor.

Exemplos de Aplicação

1- Dada a reta $r : y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, obtenha uma reta s perpendicular à reta dada.

Solução:

Multiplicando r por i obtemos:

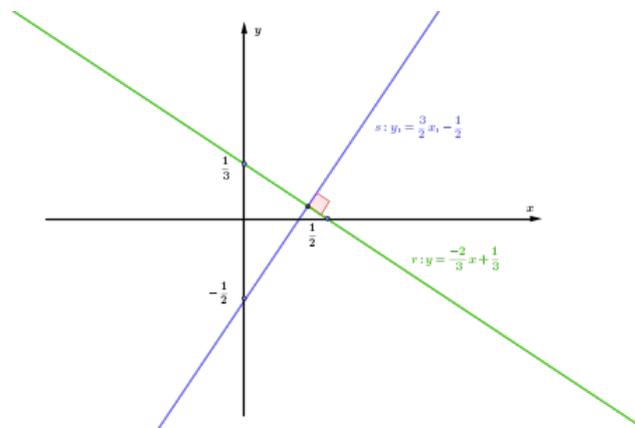
$$y \cdot i = -\frac{2}{3}x \cdot i + \frac{1}{3} \cdot i \implies -x_1 = -\frac{2}{3} \cdot y_1 + i \cdot \frac{1}{3}$$

De onde encontramos a seguinte reta s dada por

$$s: y_1 = \frac{3}{2} \cdot x_1 - \frac{1}{2}$$

Interpretação geométrica

Figure 15 – Representação do ângulo entre duas retas da aplicação 1.



Fonte: Acervo do Autor.

2. Determine p de modo que as retas $r: -2x + (p-7)y + 3 = 0$ e $s: px_1 + y_1 - 13 = 0$ sejam perpendiculares.

Solução:

Multiplicando a reta r pela unidade imaginária obtém-se:

$$-2 \cdot i + (p-7) \cdot y \cdot i + 3 \cdot i = 0 \implies -2y + (p-7) \cdot (-x) - 3 = 0 \implies$$

$$y = -\frac{(p-7)}{2} \cdot x - \frac{3}{2}$$

Sendo, a reta s dada por

$$px_1 + y_1 - 13 = 0 \implies y_1 = -px_1 + 13$$

Comparando a reta obtida com a reta s , encontra-se o valor de p .

$$-p = -\frac{(p-7)}{2} \implies 2p = p-7 \implies p = -7$$

4.1.1 Ângulo entre duas retas

Verifica-se a seguir que a forma algébrica do número complexo com o seu conjugado podem ser utilizados para determinar o ângulo entre duas retas. Anteriormente, observou-se que

a multiplicação da unidade imaginária antes e após os termos de uma função é equivalente em girar, geometricamente a reta em um ângulo equivalente a 90. A utilização dessa técnica leva a considerar uma relação entre os coeficientes angulares das duas retas. Isso nos induz a seguinte pergunta: E para uma rotação que não seja de 90?

Neste caso, para uma rotação diferente de 90, devemos considerar que para girar uma reta de um ângulo θ , multiplica-se por um número complexo na forma algébrica $z = a + bi$. Esse fato parece mostrar que quando se multiplica a variável y por $z = a + bi$, sendo considerado como um operador algébrico. Logo, temos que a reta do ponto de vista geométrico, sofre uma rotação de um ângulo θ .

Antes de fazermos qualquer demonstração, considere o seguinte exemplo. .

Sejam as retas $r : 3x - y + 5 = 0$ e $s : 2x + y + 3 = 0$, qual o ângulo formado pelas duas retas?

Solução:

Note que, $r : y = 3x + 5$ para obter a reta s a partir de r , multiplicando em ambos os membros pelo número complexo $z = a + bi$, isto é:

$$y \cdot (a + bi) = 3x \cdot (a + bi) + 5 \cdot (a + bi) \implies ya + byi = 3xa + 3bxi + 5 \cdot (a + bi)$$

Considerando que $yi = -x$ e $xi = y$, fazendo as operações apenas com os coeficientes das variáveis x e y . obtém-se;

$$ya - bx = 3xa + 3by \implies y(a - 3b) = x(3a + b)$$

Comparando os coeficientes da ultima expressão com os da reta $s : y = -2x - 3$, tem-se:

$$\begin{cases} a - 3b = 1 \\ 3a + b = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Sendo a razão entre a parte imaginária e a real do número complexo $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, igual a tangente do ângulo formado por r e s , então:

$$\tan(\theta) = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} \implies \tan(\theta) = 1$$

Portanto,

$\theta = 45$ é o ângulo agudo formado por r e s .

Considerando o mesmo problema para mostrar qual o ângulo entre as retas r e s , quando r for multiplicado pelo conjugado do número complexo $z = a + bi$. Isto é:

$$y \cdot (a - bi) = 3x \cdot (a - bi) + 5 \cdot (a - bi) \implies ya - byi = 3xa - 3bxi + 5 \cdot (a - bi)$$

De onde obtém-se;

$$ya + bx = 3xa - 3by \implies y(a + 3b) = x(3a - b)$$

Comparando os coeficientes da ultima expressão com os da reta $s : y = -2x - 3$, tem-se:

$$\begin{cases} a + 3b = 1 \\ 3a - b = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sendo a razão entre a parte imaginária e a real do número complexo $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, igual a tangente do ângulo formado por r e s , então:

$$\tan(\theta) = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} \implies \tan(\theta) = -1$$

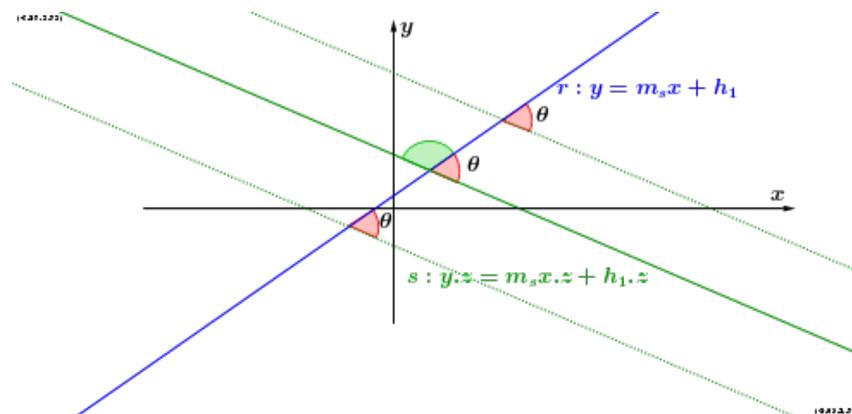
Portanto,

$\theta = 135^\circ$ é o ângulo obtuso formado por r e s .

O fato de apenas operar nos coeficientes de x e y é suficiente, pois quando rotacionamos a reta r de um ângulo θ , obtém-se como segunda reta, uma reta paralela a reta s , deste modo não se faz necessária operar com o termo independente. O que na verdade é o que nos importa, pois o ângulo entre duas retas será o mesmo que o ângulo entre r e qualquer reta paralela à s .

Geometricamente tem-se

Figure 16 – Representação do ângulo obtido quando multiplica-se uma reta por $z = a + bi$ e a reta que foi encontrada.



Fonte: Acervo do Autor.

4.1.2 Caso geral do ângulo entre duas retas

Em muitos livros a obtenção do ângulo entre duas retas é realizada considerando a lei do ângulo externo a um triângulo e as relações trigonométricas. Nessa seção, procura-se demonstrar o ângulo entre essas retas, considerando a aplicação do número complexo $z = a + bi$ como um operador algébrico que faz a reta rotacionar de um ângulo θ . Como no caso anterior, levar-se-á em conta apenas os coeficientes de x e y das retas r e s dadas.

Sejam as retas r e s dadas por:

$$\begin{cases} r : y = m_r \cdot x + h_1 \\ s : y = m_s \cdot x + h_2 \end{cases}$$

Considerando a reta r e multiplicando em ambos os membros pelo operador algébrico $z = a + bi$ tem-se que:

$$y \cdot (a + bi) = m_r \cdot x \cdot (a + bi) + h_1 \cdot (a + bi) \implies$$

$$ya + byi = m_r xa + m_r bxi + h_1 \cdot (a + bi) \implies$$

$$y(a - bm_r) = x(m_r a + b) + h_1 \cdot (a + bi) \quad (4.11)$$

Para que essa expressão tenha os mesmos coeficientes da reta s , tem-se que:

$$\begin{cases} a - m_r b = 1 \\ m_r a + b = m_s \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1 + m_r \cdot m_s}{1 + m_r^2} \\ b = \frac{m_s - m_r}{1 + m_r^2} \end{cases}$$

Logo, a tangente do ângulo θ entre as retas r e s , pode ser determinada por:

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a} \quad (4.12)$$

Substituindo os valores de a e b , na expressão 3.13, tem-se:

$$\tan(\theta) = \frac{\frac{m_s - m_r}{1 + m_r^2}}{\frac{1 + m_r \cdot m_s}{1 + m_r^2}} \implies \tan(\theta) = \frac{m_s - m_r}{1 + m_r \cdot m_s}$$

Neste sentido, se:

$$\begin{cases} \tan(\theta) > 0 \implies 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \tan(\theta) < 0 \implies \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$

Assim sendo podemos considerar:

$$\tan(\theta) = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_r \cdot m_s} \right|$$

Onde podem-se calcular o ângulo agudo ou obtuso entre as retas r e s .

Observações

1- Se no operador algébrico a parte real for nula, Isto é se $a = 0$ tem-se que expressão dada por

$$a = \frac{1 + m_r \cdot m_s}{1 + m_r^2} \implies \frac{1 + m_r \cdot m_s}{1 + m_r^2} = 0$$

Neste caso, obtém-se que:

$$m_r \cdot m_s = -1$$

Isto mostra que as retas r e s são perpendiculares.

2- Se no operador algébrico a parte imaginária for nula, Isto é se $b = 0$ segue que a expressão dada por

$$b = \frac{m_s - m_r}{1 + m_r^2} \implies \frac{m_s - m_r}{1 + m_r^2} = 0$$

Dai tem-se:

$$m_s = m_r$$

Nesse caso, observam-se que as retas apresentam o mesmo coeficiente angular, ou seja, a reta r é multiplicada por um número real ($a \neq 0$), logo a reta s é paralela a reta r .

Portanto, θ é o ângulo agudo ou obtuso entre as retas r e s dadas e z representa o operador algébrico que rotaciona quaisquer uma das duas retas. Onde z é dado por:

$$z = a[1 + i \cdot \tan(\theta)] \quad (4.13)$$

Aplicação

1- Dado o número complexo $z = 1 + i$ e uma reta $r : y = 2x - 1$ e outra reta s representada por $s : y = mx - 3$, determine o valor do ângulo agudo ente r e s e o valor de m .

Solução:

Sendo $z = 1 + i$, então $a = 1$ e $b = 1$ e substituindo na expressão abaixo.

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a} \implies \tan(\theta) = 1$$

Logo,

$$\theta = 45$$

Para encontrar o valor de m , deve-se fazer a seguinte operação, sendo $y = 2x - 1$ e multiplicando em ambos os membros por $z = 1 + i$, tem-se que:

$$y(1 + i) = 2x(1 + i) - 1(1 + i)$$

$$y + yi = 2x + 2xi + k$$

$$y - 2y = 2x + x + k$$

$$y = -3x - k$$

Comparando a reta $s : y = mx - 3$ com a reta $y = -3x - k$, obtém-se que:

$$m = -3$$

2- Qual é o número complexo z que transforma a reta $r : y = -\frac{1}{2}x + 3$ sob uma rotação, na reta $s : y = x + 3$.

Solução:

Das retas obtém-se,

$$\begin{cases} m_r = -\frac{1}{2} \\ m_s = 1 \end{cases}$$

Como,

$$\begin{cases} a = \frac{1+m_r \cdot m_s}{1+m_r^2} \\ b = \frac{m_s - m_r}{1+m_r^2} \end{cases}$$

Então:

$$\begin{cases} a = \frac{2}{5} \\ b = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Assim, o número complexo é dado por $z = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$

4.2 A geometria plana como recurso para solução de problemas envolvendo números complexos

Nesta secção utiliza-se os conceitos de geometria para determinar a solução de problemas envolvendo sistema de equações de números complexos, cuja a solução é um número complexo. Neste sentido, buscou-se mostrar uma outra forma de visualizar o problema, nesse caso, faz-se uso dos conhecimentos geométricos que vão possibilitar resolver de maneira prática o problema proposto, antes de fazer a demonstração do caso geral. Considere o exemplo a seguir.

Exemplo: Determine o número complexo z no sistema abaixo.

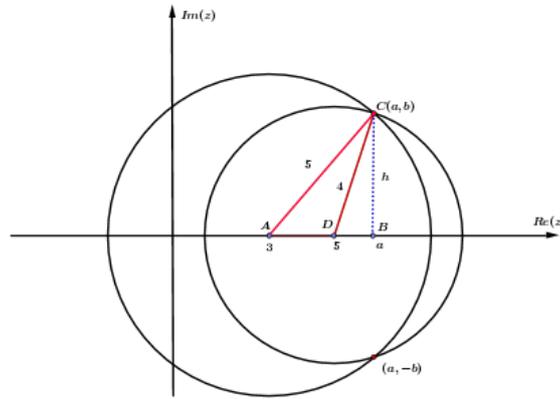
$$\begin{cases} |z - 3| = 5 \\ |z - 5| = 4 \end{cases}$$

Solução:

Note que o lugar geométrico $|z - 3| = 5$ é uma circunferência de centro $(3, 0)$ e raio 5 e $|z - 5| = 4$ outra circunferência de centro $(5, 0)$ e raio 4, cuja o ponto de interseção entre essas circunferências são as soluções do nosso problema, geometricamente tem-se:

Feito isso, considerando os triângulos retângulo ABC e DBC , aplicando o *Teorema de Pitágoras*, uma vez que a distância entre A e D é a distância entre os centros das circunferências que é igual a 2 e a $d(D, B) = x$, assim tem-se que:

Figure 17 – Representação geométrica do problema proposto.



Fonte: Acervo do Autor.

$$\begin{cases} 5^2 = h^2 + (2+x)^2 \\ 4^2 = h^2 + x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} 5^2 - 4^2 = (2+x)^2 - x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Com posse disso, obtém-se:

$$\begin{cases} h^2 = 4^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 \end{cases} \implies \begin{cases} h = \pm 3,8 \end{cases}$$

Note que $h = b$ e $a = 5 + x$.

Portanto, a solução é o número complexo $z = \frac{25}{4} + \frac{\sqrt{231}}{4}i$ e o seu conjugado.

4.2.1 Caso geral

Considere, o número complexo $z = a + bi$ onde z é solução do sistema a seguir, para determinar o valor das coordenadas de z , utiliza-se os conceitos de geometria, forma pouco explorada pelos livros que tratam do assunto, no sistema abaixo $a_1, a_2 + b_1$ são números reais.

$$\begin{cases} |z - (a_1 + b_1 i)| = R \\ |z - (a_2 + b_1 i)| = r \end{cases}$$

O lugar geométrico que representa $|z - (a_1 + b_1 i)| = R$ é uma circunferência de centro em (a_1, b_1) e raio R e uma circunferência de centro em (a_2, b_1) e raio r representa $|z - (a_2 + b_1 i)| = r$. A intersecção entre essas circunferências é a solução do sistema, geometricamente obtém-se:

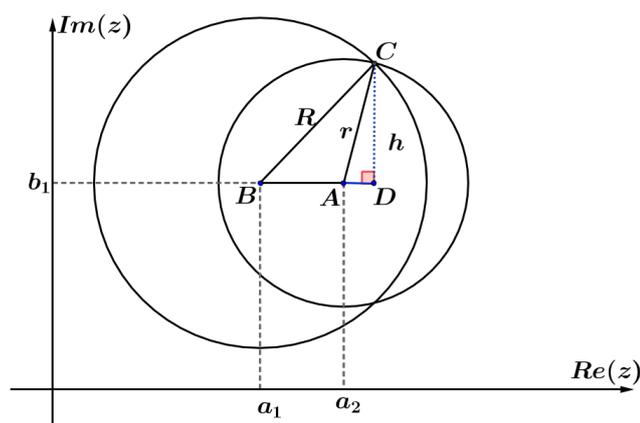
Como os triângulos DCB e DCA são retos em D , além disso considerando $\overline{AD} = x$ e $\overline{BD} = a + x$, onde $a = |a_1 - a_2|$ aplicando o Teorema de Pitágoras, nos dois triângulos obtém-se:

$$\begin{cases} R^2 = h^2 + (a+x)^2 \\ r^2 = h^2 + x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} R^2 - r^2 = (a+x)^2 - x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} R^2 - r^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot x + x^2 - x^2 \end{cases}$$

De onde obtém-se:

$$x = \frac{R^2 - (r^2 + a^2)}{2 \cdot a} \quad (4.14)$$

Figure 18 – Representação geométrica do problema proposto.



Fonte: Acervo do Autor.

Quando determina-se o valor de x , o valor de h fica também determinado, pois os valores de R , r e a podem ser extraídos dos dados do problema. nessas condições determina-se as coordenadas do número complexo $z = a + bi$.

Note que, com o auxílio da representação geométrica os valores pode-se ver que:

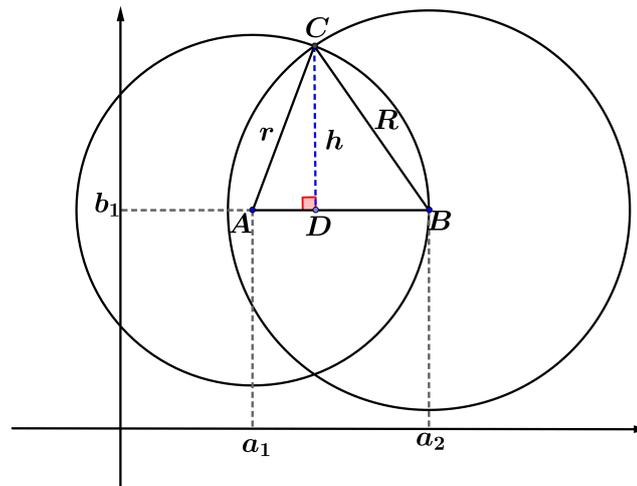
$$\begin{cases} a = a_2 + x \\ b = b_1 \pm h \end{cases} \implies \begin{cases} z = (a_2 + x) + (b_1 + h)i \\ \text{ou} \\ z = (a_2 + x) + (b_1 - h)i \end{cases} \quad (4.15)$$

Observações:

1- Antes de começar a fazer o cálculo é importante verificar se o sistema tem ou não solução, para isso basta verificar duas situações: A 1ª é para o caso do centro da circunferência 2 estiver fora da circunferência 1, verifica-se se soma dos raios for maior ou igual a distância entre os centro das circunferências o sistema tem solução, caso contrario não terá. A 2ª será no caso que o centro da circunferência 2 estiver no interior da circunferência 1, verifica-se se a diferença dos raios for menor ou igual a distância entre os centro das circunferências o sistema tem solução, caso isso não aconteça o referido sistema não tem solução.

2- As soluções neste caso são pontos simétricos a reta $y = b_1$. Note que se $b_1 = 0$, nestas condições as soluções serão o número complexo z e seu conjugado \bar{z} , de acordo com a equação 4.15.

3- Na equação 4.14, se $x > 0$ o ponto D que é a base da altura h em relação ao lado \overline{AB} do triângulo ABC fica fora do segmento \overline{AB} . Mas, se $x < 0$ o ponto D fica entre os pontos A e B , ou seja, a base da altura h fica no segmento \overline{AB} . Nesse caso o valor da coordenada $a = a_2 - x$, observe a figura abaixo para uma melhor compreensão do caso.

Figure 19 – Representação geométrica do caso que o ponto D fica entre os pontos A e B .

Fonte: Acervo do Autor.

Aplicação

1. Encontre as soluções do sistema, onde z é número complexos, tal que:

$$\begin{cases} |z - 1| = 4 \\ |z - 4| = 5 \end{cases}$$

Solução:

Note que $|z - 1| = 4$ é uma circunferência de centro em $(1, 0)$ com raio 4 e $|z - 4| = 5$ outra circunferência de centro em $(4, 0)$ e raio 5. Logo, as soluções são as interseções entre essas duas circunferências.

Aplicando a equação 4.14, visto que são conhecidos os raios e os centros das circunferências, obtém-se:

$$x = \frac{4^2 - (5^2 + 3^2)}{2 \cdot 3} \implies x = -3$$

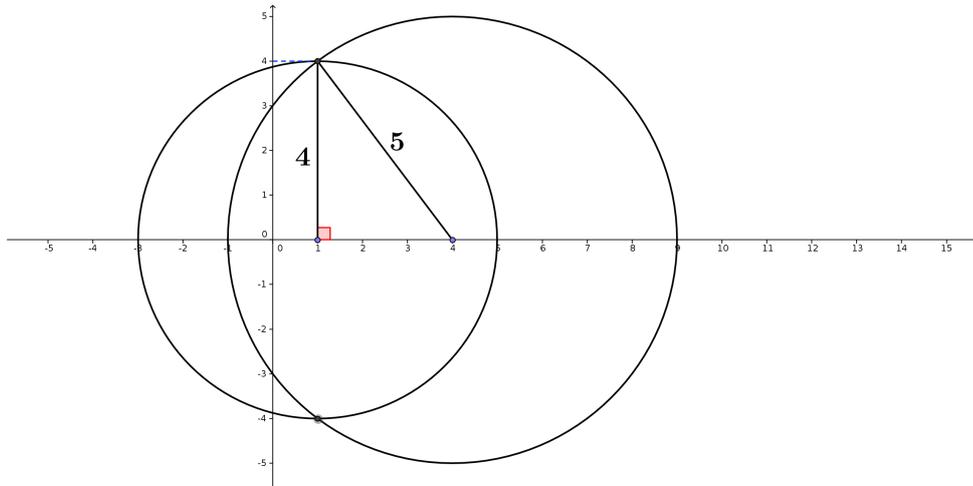
E assim, tem-se que:

$$\begin{cases} a = 4 - 3 = 1 \\ b = \pm\sqrt{5^2 - 3^2} = \pm 4 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} z = 1 + 4i \\ \text{ou} \\ z = 1 - 4i \end{cases}$$

Geometricamente tem-se a seguinte representação para esse sistema.

Figure 20 – Representação geométrica da aplicação 1.



Fonte: Acervo do Autor.

2. Determine caso existam as soluções do sistema abaixo.

$$\begin{cases} |z+3| = 4 \\ |z-3| = 5 \end{cases}$$

Solução:

Observe que $|z+3| = 4$ é uma circunferência de centro em $(-3, 0)$ com raio 4 e $|z-3| = 5$ outra circunferência de centro em $(3, 0)$ e raio 5. Logo, as soluções são as interseções entre essas duas circunferências. Note que para que esse sistema tenha solução, deve-se ter:

$$|C_2 - C_1| \leq R + r \implies 3 - (-3) \leq 4 + 5 \implies 6 \leq 9$$

Como a sentença é verdadeira o sistema tem solução. Substituindo os valores dos raios e da distância entre os centros em 4.14, obtém-se:

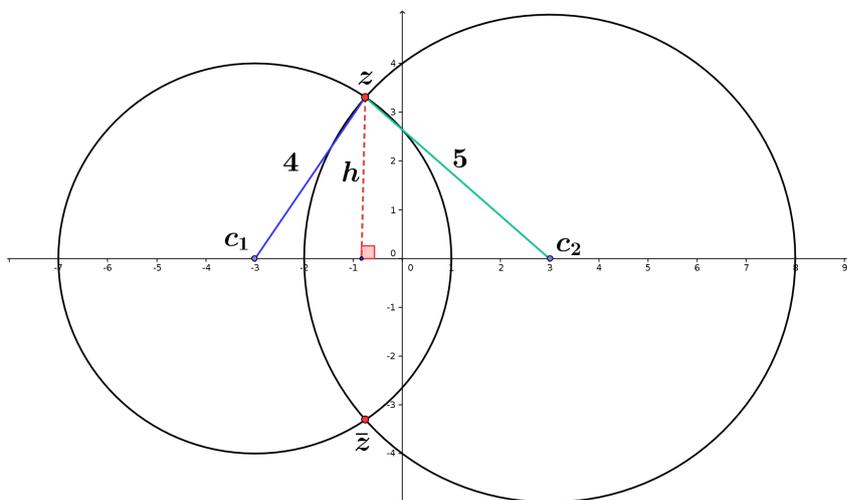
$$x = \frac{4^2 - (5^2 + 6^2)}{2 \cdot 6} \implies x = -\frac{15}{4}$$

E portanto, tem-se que:

$$\begin{cases} a = 3 - \frac{15}{4} = -\frac{3}{4} \\ b = \pm \sqrt{5^2 - \left(-\frac{15}{4}\right)^2} = \pm \frac{5\sqrt{7}}{4} \end{cases} \implies \begin{cases} z = -\frac{3}{4} + \frac{5\sqrt{7}}{4}i \\ \text{ou} \\ z = -\frac{3}{4} - \frac{5\sqrt{7}}{4}i \end{cases}$$

A figura a seguir mostra a representação geométrica para esse caso, onde c_1 e c_2 são os centros das circunferências 4 e 5 seus respectivos raios e os pontos z e \bar{z} são as soluções.

Figure 21 – Representação geométrica da aplicação 2.



Fonte: Acervo do Autor.

5 OUTRAS APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

5.1 Aplicação no movimento da lua

Sabe-se que a lua possui uma excentricidade de 0,0549006 e portanto, vamos considerar que seja praticamente uma órbita circunferencial. Supondo que a distância média da terra a lua seja de aproximadamente 385.000Km e que a 1ª posição seja a lua nova localizada no eixo x . Sabendo ainda que a lua executa uma volta completa em torno da terra num período de um mês, passando pelas quatro fases, podemos utilizar a 2ª *formula de Moivre* para obter a posição da lua em cada dia, usando os pontos fundamentais como as fases da lua. Sabendo ainda que a 2ª *formula de Moivre* é dada por

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right] \quad (5.1)$$

Em que $n = 30$ representa o período de aproximadamente 30 dias da lua em relação a terra e que $\theta = 0^0$ pode ser dada com a primeira posição da lua nova em relação a terra. Nesse caso, é possível obter 30 posições da lua em relação a terra onde as quatro posições determinam cada fase da lua que recai, justamente, em cada eixo coordenado x e y .

Supondo que $\rho = 385000000$ m como a distância média e que $n = 30$, tem-se que:

$$\sqrt[30]{z} = \sqrt[30]{385 \cdot 10^6} \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{30}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{30}\right) \right] \implies \quad (5.2)$$

$$\sqrt[30]{z} = \sqrt[30]{385 \cdot 10^6} \left[\cos\left(\frac{k\pi}{15}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{15}\right) \right] \implies \quad (5.3)$$

Logo,

$$\sqrt[30]{z} = 1,9328 \left[\cos\left(\frac{k\pi}{15}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{15}\right) \right] \implies \quad (5.4)$$

Onde $z = 385000000m$ seria o número complexo considerado para a posição da lua cheia. Vamos considerar os quatro principais pontos que determinam as fases da lua.

Para $k = 0$, tem-se:

$$z_0 = 1,9328 [\cos(0) + i \operatorname{sen}(0)] \implies z_0 = 1,9328 \quad (5.5)$$

Representa o ponto em que a lua é lua cheia.

Para $k = 7,5$, vem que:

$$z_{7,5} = 1,9328 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \implies z_{7,5} = 1,9328i \quad (5.6)$$

Representa a fase da lua crescente.

Para $k = 15$, obtém-se:

$$z_{15} = 1,9328[\cos(\pi) + isen(\pi)] \implies z_{15} = -1,9328 \quad (5.7)$$

Que é o ponto que representa a fase da lua nova.

Para $k = 22,5$, tem-se:

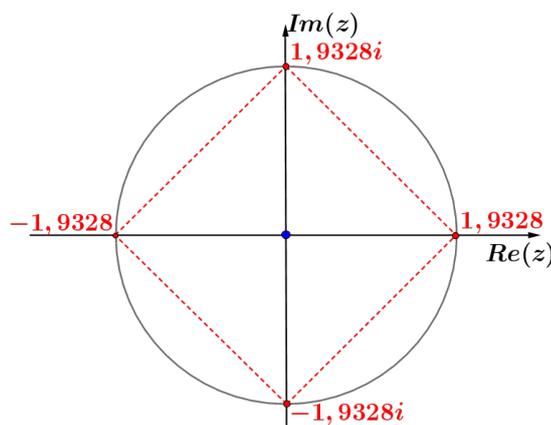
$$z_{22,5} = 1,9328[\cos(\frac{3\pi}{2}) + isen(\frac{3\pi}{2})] \implies z_{22,5} = -1,9328i \quad (5.8)$$

Ponto que representa a fase da lua minguante vista da terra.

Nesses casos, observe-se que a lua crescente e a quarto minguante representam pontos com números imaginários puros, enquanto que a lua nova e a cheia são números reais, ou seja, raízes de números reais. Todos os demais pontos da posição da lua são raízes de números complexos. Por exemplo, representar a posição da lua a 45° da lua cheia. Qual seria a representação da lua para essa posição, representa uma raiz complexa. Observe:

Como a lua translada ao longo de uma órbita praticamente circunferencial, podemos considerar que os pontos médios entre as quatro fases da lua representam um polígono regular de vértices dados por:

Figure 22 – Pontos da Lua quando se movimentam em relação a terra.



Fonte: acervo do autor.

O que mostra que todos os pontos são representações de raízes complexas. Podem-se construir uma tabela pra mostrar esses pontos que representam as raízes com as posições lunares, levando em conta algumas observações importantes. Os pontos ou melhor os oito pontos representam um octógono regular entre as quatro fases da lua e os respectivos pontos médios entre eles.

Representação das γ raízes complexas da localização da lua em relação a terra.

Posições lunares	Número Complexo	distância <i>km</i>
Lua cheia	1,9328	385000
Crescente	1,9328 <i>i</i>	385000
Lua nova	-1,9328	385000
Quarto Minguante	-1,9328 <i>i</i>	385000

Fonte: autoria própria.

5.2 Posição da lua considerando sua trajetória circular

A lua descreve uma orbita praticamente circular em torno do sol e suponha que as três posições do satélite natural seja dada pela raiz de cúbica de 1, ou seja, $z = \sqrt[3]{1} \cdot R$, onde R é o raio orbital da lua entorna da terra. Determinaremos as duas outras posições lunar em função de R e mostraremos ainda que é valida a segunda lei de Kepler para esse caso.

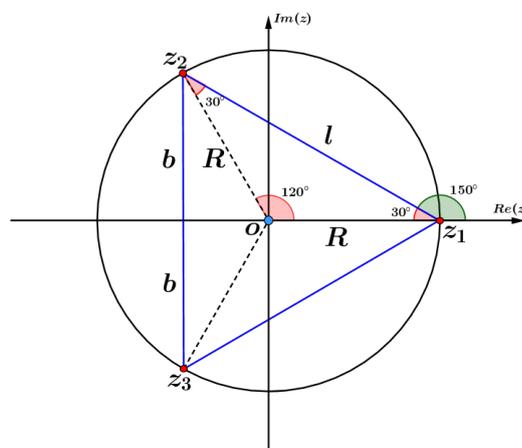
Solução:

Nesse caso, pode-se representar o ponto $z_2 = (a, b)$ e $z_3 = (a, -b)$, visto que z_2 e z_3 são simétrico em relação ao eixo $Re(z)$. Como as raízes de $z = \sqrt[3]{1} \cdot R$ representam vértices de um triangulo e tendo em vista que se trata de um polígono regular inscrito no circunferência como se verifica pela segunda lei de Moivre. temos que a reta que passa pelos pontos z_1 e z_2 forma um angulo de 150° com o eixo $Re(z)$. Assim, utilizando a equação de feixe de retas temos que:

$$\begin{cases} y - y_0 = \tan(\theta)[x - x_0] \\ y - 0 = \tan(150^\circ)[x - R] \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - R) \end{cases}$$

Interpretação Geométrica do problema.

Figure 23 – Representação das três posições da lua em relação a terra.



Fonte: acervo do autor.

Usando a lei dos cossenos no triangulo Oz_1z_2 , temos que:

$$\begin{cases} l^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos(120^\circ) \\ l^2 = 2 \cdot R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot (-\frac{1}{2}) \\ l^2 = 3 \cdot R^2 \\ l = \sqrt{3}R \end{cases}$$

Como, $2b = l$, logo $b = \frac{\sqrt{3}R}{2}$, assim os pontos z_2 e z_3 são dados pelas coordenadas $z_2 = (a, \frac{\sqrt{3}R}{2})$ e $z_3 = (a, -\frac{\sqrt{3}R}{2})$.

Tomando a equação da reta que passa pelos pontos z_1 e z_2 e como $z_2 = (a, \frac{\sqrt{3}R}{2})$ pertence a essa reta, então:

$$\begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - R) \\ \frac{\sqrt{3}R}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(a - R) \\ a = R - \frac{3R}{2} \\ a = -\frac{R}{2} \end{cases}$$

Desta forma a lua ocupa as posições $z_1 = (R, 0)$, $z_2 = (-\frac{R}{2}, \frac{\sqrt{3}R}{2})$ e $z_3 = (-\frac{R}{2}, -\frac{\sqrt{3}R}{2})$.

Vamos mostrar que o movimento da lua em torno da terra obedece a segunda lei de Kepler. Suponha que a terra esteja no centro O da circunferência, uma vez que a lua orbita em torno da terra sob uma trajetória praticamente circunferencial. Como o triângulo $z_1z_2z_3$ é equilátero e o triângulo Oz_1z_2 é isósceles, com isso o eixo $Re(z)$ é bissetriz do ângulo \hat{z}_1 . Considerando que a circunferência de raio R tem área $A = \pi R^2$, podemos assim concluir que o setor circular Oz_1z_2 tem área $A_s = \frac{\pi R^2}{3}$, considerando também que a frequência angular da lua em torno da terra seja constante, isto é:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Onde v é a velocidade translacional da lua, podemos concluir que o deslocamento da lua será de z_1 a z_2 .

$$\overrightarrow{\Delta X} = \overrightarrow{X}_{z_2} - \overrightarrow{X}_{z_1}$$

$$\overrightarrow{\Delta X} = (R, 0) - (-\frac{R}{2}, \frac{\sqrt{3}R}{2})$$

$$\overrightarrow{\Delta X} = \frac{3R}{2}i - \frac{\sqrt{3}R}{2}j$$

Supondo que este deslocamento da lua gaste um intervalo de tempo Δt_1 , podemos considerar que a velocidade da lua será:

$$\overrightarrow{v}_1 = \frac{\overrightarrow{\Delta X}_1}{\Delta t_1} = \frac{R}{\Delta t_1} (\frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}j)$$

Aplicando o mesmo raciocínio para z_2z_3 e z_3z_1 , temos que:

$$\overrightarrow{v}_2 = \frac{\overrightarrow{\Delta X}_2}{\Delta t_2} = \frac{R}{\Delta t_2} (-\frac{\sqrt{3}}{2}j)$$

e

$$\vec{v}_3 = \frac{\overrightarrow{\Delta X_3}}{\Delta t_3} = \frac{R}{\Delta t_3} \left(\frac{3}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j \right)$$

Fazendo os módulos de v_1 , v_2 e v_3 , obtemos que:

$$|\vec{v}_1| = \frac{R}{\Delta t_1} \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{R}{\Delta t_1} \sqrt{3}$$

$$|\vec{v}_2| = \frac{R}{\Delta t_2} \sqrt{3}$$

$$|\vec{v}_3| = \frac{R}{\Delta t_3} \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{R}{\Delta t_3} \sqrt{3}$$

O que mostra que na órbita circunferencial da lua em relação a terra possui uma velocidade constante. Vamos verificar que o movimento lunar está de acordo com a segunda lei de Kepler, ou seja, devemos mostrar que os intervalos de tempo Δt_1 , Δt_2 e Δt_3 são iguais. Sendo as velocidades $|\vec{v}_1|$, $|\vec{v}_2|$ e $|\vec{v}_3|$ constantes, daí temos:

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$$

$$\frac{R}{\Delta t_1} \sqrt{3} = \frac{R}{\Delta t_2} \sqrt{3}$$

$$\Delta t_1 = \Delta t_2$$

ou

$$|\vec{v}_2| = |\vec{v}_3|$$

$$\frac{R}{\Delta t_2} \sqrt{3} = \frac{R}{\Delta t_3} \sqrt{3}$$

$$\Delta t_2 = \Delta t_3$$

Logo, $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3$, ou seja, a lua gasta o mesmo intervalo de tempo nos deslocamentos de z_1 a z_2 , de z_2 a z_3 e de z_3 a z_1 .

Verifica-se ainda neste caso que sendo o triângulo $z_1 z_2 z_3$ equilátero e $l = \sqrt{3}R$, o deslocamento é o mesmo nos três percursos. Vamos verificar que se a órbita for elíptica, os tempos Δt_1 , Δt_2 e Δt_3 serão proporcionais às áreas a ser verificadas, este será o nosso próximo exemplo. Como cada setor circular tem área $\frac{\pi R^2}{3}$, verifica-se de acordo com a segunda lei de Kepler que o corpo celeste varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais.

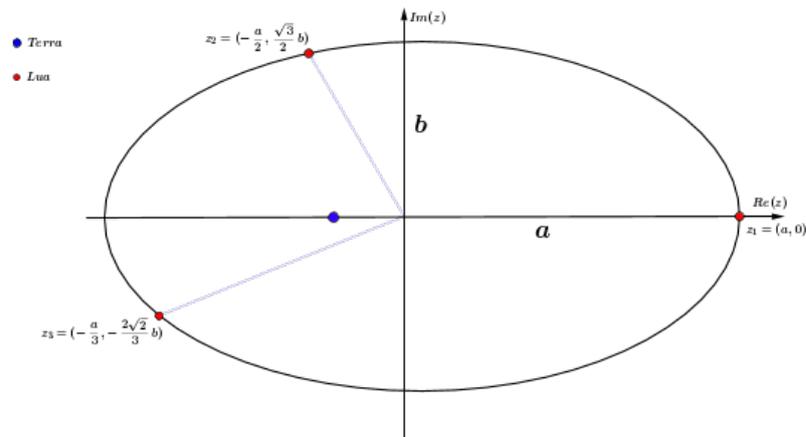
5.3 Posição da lua considerando sua trajetória elíptica

Considere a seguinte figura:

Na figura acima que representa a trajetória da lua em torno da terra, onde os pontos z_1 , z_2 e z_3 são pontos em que a lua ocupa quando orbita em torno da terra. Sabendo que a área da elipse varrida pela lua corresponde a $\pi \cdot a \cdot b$ para algum período T . Vamos mostrar que a segunda lei de Kepler é válida também para esse caso.

solução:

Figure 24 – Representação da posição da lua sob uma trajetória elíptica.



Fonte: acervo do autor.

vamos calcular os comprimentos dos arcos da elipse de z_1 a z_2 , de z_2 a z_3 e de z_3 a z_1 .

Dai obtemos:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$$

O comprimento do arco da elipse pode ser calculado da seguinte maneira:

$$c = \int \sqrt{(f')^2 + 1} dx$$

Onde,

$$\begin{cases} f = y = \frac{b}{a\sqrt{a^2-x^2}} \\ y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}} \end{cases}$$

Logo,

$$(y')^2 + 1 = \frac{b^2x^2 + a^2(a^2 - x^2)}{a^2(a^2 - x^2)}, \text{ como } a^2 = b^2 + c^2 \implies b^2 = a^2 - c^2, \text{ assim}$$

$$(y')^2 + 1 = \frac{a^2 - x^2 \frac{c^2}{a^2}}{a^2 - x^2}$$

Definindo, $e = \frac{c}{a}$, dai obtêm-se

$$(y')^2 + 1 = \frac{a^2 - x^2 e^2}{a^2 - x^2}, \text{ pode-se representar essa expressão em coordenadas polares, assim}$$

tem-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ fazendo } x = a \sin(\theta) \text{ e } y = b \cos(\theta), \text{ assim}$$

$$(y')^2 + 1 = \frac{1 - \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}$$

Logo, tem-se que:

$$C = \int \sqrt{\frac{1-e^2 \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} dx, \text{ como } x = a \sin(\theta) \implies dx = a \cos(\theta) d\theta, \text{ então}$$

$$C = a \int \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\theta)} d\theta$$

Como a resolução desta integral não é de fácil solução. Neste caso, sabendo que a excentricidade assume valor $e \ll 1$, pode-se expandir o integrando utilizando a fórmula de Taylor e calcular a integral de forma aproximada.

$$(1+h)^n = 1 + \frac{hn}{1!} + \frac{h^2 n(n-1)}{2!} + \frac{h^3 n(n-1)(n-2)}{3!} + \dots$$

$$\text{Tomando, } \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\theta)} = (1 - e^2 \sin^2(\theta))^{\frac{1}{2}}$$

Onde, $n = \frac{1}{2}$ e $h = -e^2 \sin^2(\theta)$, daí obtêm-se:

$$\begin{cases} \frac{hn}{1!} = -\frac{e^2 \sin^2(\theta)}{2} \\ \frac{h^2 n(n-1)}{2!} = -\frac{e^4 \sin^4(\theta)}{8} \\ \frac{h^3 n(n-1)(n-2)}{3!} = -\frac{e^6 \sin^6(\theta)}{16} \end{cases}$$

Como a excentricidade da lua é $e=0,0549$ podemos usar apenas os três primeiros termos da série, logo:

$$C = a \int \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\theta)} d\theta = a \int \left[1 - \frac{e^2 \sin^2(\theta)}{2} - \frac{e^4 \sin^4(\theta)}{8} \right] d\theta$$

Podemos ainda considerar apenas dois termos da série, assim:

$$C = a \int \left[1 - \frac{e^2 \sin^2(\theta)}{2} \right] d\theta = a \left[\int 1 d\theta - \frac{e^2}{2} \int \sin^2(\theta) d\theta \right]$$

E portanto, temos o seguinte resultado:

$$C = a \left[\theta - \frac{1}{2} e^2 \left(\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \right] + k = a \left[\theta \left(1 - \frac{1}{4} e^2 \right) + \frac{1}{8} e^2 \sin 2\theta \right] + k$$

Como, $x = a \sin(\theta)$ e $y = b \cos(\theta)$, assim fazendo as devidas substituições obtemos:

$$C = a \left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{4} e^2 \right) + \frac{1}{4} \frac{e^2 x \sqrt{a^2 - x^2}}{a^2} \right] + k$$

Suponha que a lua gaste um período de tempo T para varrer a área da elipse ou percorrer o perímetro dela. Neste caso, podemos considerar que a lua parta do ponto a e chegue ao ponto $-a$. Logo, o perímetro a ser varrido é:

$$C = 2a \left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{4} e^2 \right) + \frac{1}{4} \frac{e^2 x \sqrt{a^2 - x^2}}{a^2} \right] \Bigg|_a^{-a}$$

Substituindo temos;

$$C = 2a \left[(\arcsin(-1) - \arcsin(1)) \left(1 - \frac{1}{4} e^2 \right) + 0 \right]$$

$$C = 2a \left[\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{4} e^2 \right) \right]$$

$$C = 2a\pi(1 - \frac{1}{4}e^2)$$

Se a excentricidade fosse zero, teríamos $C = 2a\pi$ que é o caso do comprimento da circunferência. Assim a relação $C = 2a\pi(1 - \frac{1}{4}e^2)$, nos fornece o comprimento da elipse para valores pequenos da excentricidade. Como a excentricidade da lua é 0,0549, temos condições de mostra que é válida a segunda lei de Kepler, isto é, a lua vare áreas proporcionais aos intervalos de tempos. A priori vamos entender essa ideia de comprimento percorrido pela lua. Mostraremos ainda que numa trajetória orbital elíptica a lua possui aceleração, ou seja, variação de velocidade.

Temos, portanto, uma relação entre o comprimento elíptico que a lua realiza em função do eixo maior a e a excentricidade e . Agora devemos analisar o deslocamento da lua e a relação temporal, isto é, áreas varridas e intervalos de tempo.

Logo, pondo:

$$\begin{cases} \vec{z}_1 = ai + 0j = ai \\ \vec{z}_2 = -\frac{a}{2}i + \frac{\sqrt{3}b}{2}j \\ \vec{z}_3 = -\frac{a}{3}i - \frac{2\sqrt{2}b}{3}j \end{cases}$$

Calculando $\vec{\Delta z}_1 = \vec{z}_2 - \vec{z}_1$, $\vec{\Delta z}_2 = \vec{z}_1 - \vec{z}_3$ e suas respectivas normas, obtemos o seguinte resultado.

$$\begin{cases} \vec{\Delta z}_1 = -\frac{3a}{2}i + \frac{\sqrt{3}b}{2}j \implies \|\vec{\Delta z}_1\| = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3a^2 + b^2} \\ \vec{\Delta z}_2 = \frac{4a}{3}i + \frac{2\sqrt{2}b}{3}j \implies \|\vec{\Delta z}_2\| = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{2a^2 + b^2} \end{cases}$$

Dividindo $\|\vec{\Delta z}_1\|$ por $\|\vec{\Delta z}_2\|$, temos:

$$\frac{\|\vec{\Delta z}_1\|}{\|\vec{\Delta z}_2\|} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3a^2 + b^2}{2a^2 + b^2}}$$

Supondo, $a \gg b$ segue que:

$$\frac{\|\vec{\Delta z}_1\|}{\|\vec{\Delta z}_2\|} = \frac{9}{8} > 1 \implies \|\vec{\Delta z}_1\| > \|\vec{\Delta z}_2\|$$

Ora se o movimento da lua fosse circular, a velocidade seria uniforme, então:

$$v_1 = \frac{\|\Delta z_1\|}{\Delta t_1} \text{ e } v_2 = \frac{\|\Delta z_2\|}{\Delta t_2}$$

Logo,

$$\frac{\|\vec{\Delta z}_1\|}{\Delta t_1} = \frac{\|\vec{\Delta z}_2\|}{\Delta t_2} \implies \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\|\vec{\Delta z}_1\|}{\|\vec{\Delta z}_2\|} < 1 \implies \Delta t_1 > \Delta t_2$$

No entanto como o movimento não é uniforme a lua apresenta uma aceleração o que implica em variação de velocidade. Seja v a razão entre $v_1 = \frac{\|\Delta z_1\|}{\Delta t_1}$ e $v_2 = \frac{\|\Delta z_2\|}{\Delta t_2}$, dai temos:

$$v_1 = \frac{\|\Delta z_1\|}{\Delta t_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{3a^2 + b^2} \frac{1}{\Delta t_1}$$

e

$$v_2 = \frac{\|\Delta z_2\|}{\Delta t_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{2a^2 + b^2} \frac{1}{\Delta t_2}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \cdot \sqrt{\frac{3a^2 + b^2}{2a^2 + b^2}}$$

Conclui-se que $v_1 > v_2$

Isto implica que a lua aumenta sua velocidade quando se aproxima da terra e diminui quando se afasta.

5.4 Aplicação à Engenharia Elétrica

Em um circuito de corrente alternada, como, por exemplo, as instalações residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos números complexos, o que facilita muito os cálculos. A relação $U = Ri$, estudada na Física do ensino médio e que se utiliza-se de números reais, torna-se $U = Zi$, em que U é a tensão, Z é a impedância e i é a corrente elétrica, essas grandezas passam a ser representadas através de números complexos. Para que não haja confusão entre i , símbolo da corrente elétrica, e i , unidade imaginária, os engenheiros usam j como unidade imaginária na representação algébrica de $a + bj$. Além disso, usam a notação $|w| \angle \theta$ para a forma trigonométrica $|w| \cdot [\cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta)]$ do número complexo w . Com base nesse texto, vamos resolver o problema a seguir:

Uma fonte de tensão, de valor eficaz $220 \angle 0^\circ$, alimenta uma carga de impedância $Z = (10 + 10j) \text{ ohm}$. vamos obter a corrente elétrica fornecida pela fonte. ([7] p. 442).

Solução:

Note que:

$$U = Zi \implies i = \frac{U}{Z}$$

Para efetuar essa divisão, é preferível que U e Z esteja na forma trigonométrica.

Dos dados já se sabe que $U = 220[\cos(0^\circ) + j \cdot \sin(0^\circ)]$, basta obter agora a forma trigonométrica de Z .

Sendo $Z = 10 + 10j$, tem-se que:

$$\left. \begin{array}{l} |Z| = 10\sqrt{2} \\ \cos(\theta) = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \implies \theta = 45^\circ$$

$$\text{Logo, } Z = 10\sqrt{2}[\cos(45^\circ) + j \cdot \sin(45^\circ)]$$

Assim:

$$i = \frac{U}{Z} = \frac{220}{10\sqrt{2}}[\cos(0^\circ - 45^\circ) + j \cdot \sin(0^\circ - 45^\circ)]$$

$$= 11\sqrt{2}[\cos(-45^\circ) + j \cdot \sin(-45^\circ)]$$

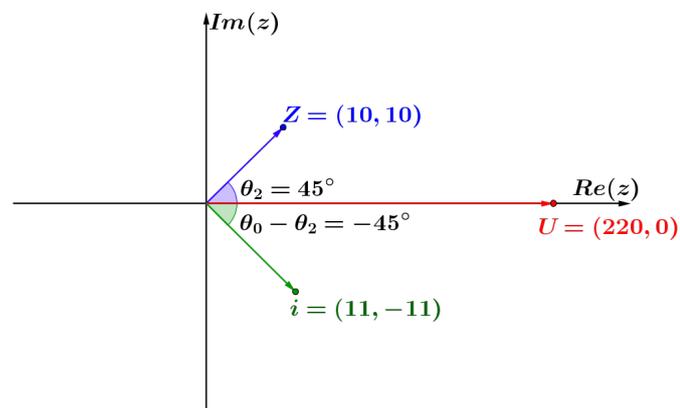
$$= 11\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot j\right] = 11 - 11j$$

ou

$$11\sqrt{2} \angle -45^\circ$$

Portanto, a corrente fornecida pela fonte é $11\sqrt{2} \text{ v}$.

Figure 25 – Representação geométrica da aplicação 4.4



Fonte: Acervo do autor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa dissertação, mostrou que os números complexos desde de sua origem meio conturbada, a qual levou aproximadamente 300 anos para se consolidar de Cardano à Hamilton. Nesse contexto a geometria foi de fundamental importância para essa consolidação. No entanto não basta apenas notar que os números complexos foram se desenvolvendo ao longo dos tempos, mas também olhar para as várias aplicações que pode-se fazer quando se conhece os aspectos algébricos e geométricos desse conjunto.

A partir da utilização de conhecimento geométricos, com o intuito de tentar melhorar a compreensão e resolução dos problemas propostos, visto que tais números possuem várias aplicações tanto na Matemática, quanto em outras áreas como na Física, na Engenharia entre outras, buscou-se mostrar que o conhecimento a respeito dos números complexos tem relevância para o ensino básico.

Com isso mostrar a importância de se ensinar e aprimorar o estudo dos números complexos, tendo em vista os aspectos geométricos como aliado para entender e resolver as mais diversas aplicações. E assim dar mais importância a parte geométrica do que apenas as operações algébricas que é a mais usual. Como os números complexos possuem a característica de serem representados de várias maneiras, isso possibilita e facilita a resolução de diversos problemas, apesar de terem uma parte imaginária os números complexos servem bem para que se possa entender a realidade.

Portanto, com base no que foi visto não se pode negar a importância dos números complexos, pois podem auxiliar estudos em diversos segmentos da matemática e fora dela também, estudos esses que possibilitam ampliar e conhecer novos fenômenos e até mesmo compreender os que já existem de um ponto de vista diferente do usual.

7 REFERÊNCIA

REFERÊNCIAS

- [1] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática elementar 6: Complexos, Polinômios e Equações**. 7ª edição. São Paulo: Atual, 2005. 250 p.
- [2] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática elementar 7: Geometria analítica**. 4ª edição. São Paulo: Atual, 1993. 273 p.
- [3] LIMA, Elon Lages. **A Matemática do ensino médio- volume 3**. 6ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 250 p.
- [4] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Trigonometria / Números Complexos**. 3ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2005. 165 p.
- [5] GOMÉS, Jorge J. Delgado. **Pré-cálculo**. 3ª edição. Rio de Janeiro: fundação CECIERJ, 2004. 158 p.
- [6] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2ª edição. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1999.
- [7] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Volume único**. 1ª edição. São Paulo: Ática, 2005. 504 p.
- [8] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 3ª edição. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2008.
- [9] GARBY, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. 4ª edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.
- [10] ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1ª edição. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 407 p.
- [11] ARAGÃO, Maria José. **História da Matemática**. 1ª edição. Rio de Janeiro: Interciência, 2009. 212 p.

- [12] MARTINS, Francisco José dos Santos. **Números complexos e suas aplicações na geometria**. 2018. 87p. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2018.
- [13] KLOSTER, Gilmar. **Números complexos e geometria plana**. 2014. 118p. Dissertação (mestrado profissional em matemática em rede nacional- PROFMAT) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2014.
- [14] BARBOSA, João Lucas Marques, **Geometria Euclidiana Plana**. 10^a edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [15] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática elementar 9: Geometria plana**. 7^a edição. São Paulo: Atual, 1993.
- [16] ÁVILA, Geraldo. **Variáveis Complexas e aplicações**. 3^a edição. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 271 p.
- [17] MOL, Rogério Santos. **Introdução à História da Matemática**. 1^a edição. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. 138 p.
- [18] ANTON, Howard. **Álgebra Linear com aplicações**. 8^a edição. Porto Alegre: BOOKMON, 2001. 578 p.
- [19] GASPAR, Alberto. **Física: Volume único**. 1^a edição. São Paulo: Ática, 2005. 552 p.
- [20] CARNEIRO, J. P. **A geometria e o ensino dos números complexos**. Revista do Professor de Matemática, n. 55, 2004.
- [21] MOREIRA, Agnaldo Antônio. **Motivação para o ensino e aprendizagem dos Números complexos: uma abordagem com aplicações**. 2018. 112p. Dissertação (mestrado profissional em matemática em rede nacional- PROFMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.
- [22] BAUGART, Jonh K. **Tópicos de História da Matemática - vol. 4**: 1^a edição. São Paulo: Atual, 1992. 62 p.