Universidade Federal de Viçosa
Dissertação de Mestrado

Edneia Soares Gonçalves

Utilização do Origami no ensino da Geometria com Recursos Computacionais

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2021

EDNEIA SOARES GONÇALVES

UTILIZAÇÃO DO ORIGAMI NO ENSINO DA GEOMETRIA COM RECURSOS COMPUTACIONAIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Mehran Sabeti

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

T

G635u
2021

Gonçalves, Edneia Soares, 1971-
Utilização do origami no ensino da geometria com recursos computacionais [recurso eletrônico] / Edneia Soares Gonçalves. – Florestal, MG, 2021.
99 f.: il. (algumas color.).

Inclui anexos.
Orientador: Mehran Sabeti.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.99.

1. Geometria. 2. Recursos tecnológicos. 3. Origami. I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. II. Título.

510

Bibliotecário(a) responsável: Maria Aparecida Alves de Oliveira 1174

EDNEIA SOARES GONÇALVES

UTILIZAÇÃO DO ORIGAMI NO ENSINO DA GEOMETRIA COM RECURSOS COMPUTACIONAIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 06 de agosto de 2021.

Assentimento:

Edneia Soares Gonçalves

Edneia Soares Gonçalves
Autor

Mehran Sabeti

Mehran Sabeti
Orientador

Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus, Ele nunca me abandonou nos momentos difíceis.

À minha família, por acreditar em mim. Em especial aos meus pais, pelo carinho, afeto, dedicação e cuidado durante toda a minha existência. Isso me estimula a seguir em frente.

Ao meu marido Márcio, aos meus filhos Agnes, Emanuelle e Márcio Gabriel que me mantiveram firme e não me deixaram desistir. Vocês são meu orgulho!

Dedico aos meus amigos, pela presença e toda ajuda durante o curso.

Ao meu orientador, Mehran Sabeti, cuja dedicação e paciência serviram como pilares de sustentação para a conclusão deste trabalho.

Agradecimentos

A Deus minha eterna gratidão, a Ele toda Honra e toda a Glória. “O que atenta prudentemente para a palavra achará o bem, e o que confia no Senhor será bem-aventurado.”(Provérbios, 16:20).

Aos meus familiares, em especial aos meus pais, Pedro e Maria Luiza, que sempre me incentivaram a buscar aprimoramento profissional através dos estudos.

Ao meu esposo Márcio, por toda paciência durante esses 25 anos de casamento e principalmente agora durante o curso.

À minha filha Agnes, a minha filha Emanuelle (Manu), ao meu filho Márcio Gabriel (Biel), por me ajudarem sempre com palavras de carinho e incentivo, nas inúmeras vezes que me viram cansada e abatida, não me deixaram esmorecer.

Ao meu amigo, professor Gleison Paulino Gonçalves, que despertou em mim o desejo de tornar Mestre em Matemática, por todo apoio, incentivo e respeito com que sempre me tratou, você é um exemplo de dedicação ao Ensino e Ciência.

Ao meu amigo de curso, professor Paulo Henrique Dorotéio, por toda ajuda, pelas caronas, por toda paciência em ficar ouvindo as minhas lamentações e, mesmo passando por todas as dificuldades, se manteve firme e me manteve firme até aqui.

Aos meus amigos: Carla, Claúdio, Eliane, Fernanda, Marcelo, Marcone e Rômulo, que juntos a mim formamos o G8, e assim passamos incansáveis finais de semana nos preparando para as provas, rimos, comemos, estudamos e como sempre disse o Rômulo: “somos parceiros, aqui é um pelo outro”, e foi nesse espírito de união que chegamos até aqui.

Ao meu orientador, professor Dr. Mehran Sabeti, você é muito mais que um doutor em matemática, você é um Doutor em relacionamentos, um exemplo de profissional que eu gostaria de ser para meus alunos, sempre tranquilo e sereno, nunca perde a calma, e esbanja simpatia, sabe ouvir, mas sabe se impor com a mesma tranquillidade, eu não poderia ter encontrado um orientador melhor, obrigado por todos os ensinamentos.

Aos colegas das unidades de ensino da FUNEC e da Escola Municipal José Lucas Filho, por todo companheirismo, em especial aos diretores, Darci, Rose e Nadir.

Por fim, agradeço a todos os professores e técnicos administrativos da UFV- Campus Florestal, por todo comprometimento e profissionalismo que dedicam ao curso de mestrado do PROFMAT.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

GONÇALVES, Edneia Soares, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2021. **Utilização do Origami no ensino da Geometria com Recursos Computacionais**. Orientador: Mehran Sabeti.

Este trabalho tem como objetivo apresentar aos graduandos em Licenciatura Matemática e aos professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio o Origami como ferramenta para o ensino da Geometria. Para tanto, foram elaborados roteiros de aulas utilizando a técnica do Origami construindo as dobras a partir dos axiomas de Huzita-Hatori. Em seguida foi apresentada uma explicação analítica dos axiomas bem como os conceitos básicos da geometria plana utilizados no Origami. E por fim foi apresentado ao leitor uma possibilidade de ensino da Geometria utilizando o software Origami Editor 3D como facilitador na construção das dobras.

Palavras-chave: Geometria. Origami. Possibilidades.

Abstract

GONÇALVES, Edneia Soares, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2021. **How to Write a PROFMAT Dissertation**. Adviser: Mehran Sabeti.

This work aims to present the Origami as a tool for teaching geometry to undergraduate students in Mathematics and to teachers in Mathematics in elementary and high school. To this end, lesson scripts were elaborated using the Origami technique building the folds from the axioms of Huzita-Hatori. Thus an analytical explanation of the axioms as well as the basic concepts of flat geometry used in Origami was presented. The reader was then presented with the possibility of teaching geometry using the Origami 3D Editor software as a facilitator in the construction of the folds.

Keywords: Geometry. Origami. Possibilities.

Lista de Símbolos

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

α Letra grega Alfa

β Letra grega Beta

γ Letra grega Gama

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Até algum tempo, o ensino da Geometria era pouco desenvolvido no currículo escolar, na maioria das vezes em aula expositiva na qual o aluno não assimilava conhecimentos porque não conseguia estabelecer relações entre o que se ensinava e suas vivências. Somente esta constatação bastaria para suscitar questionamentos sobre a contribuição da Geometria na formação dos indivíduos; no entanto, outros fatos vieram reafirmar essa necessidade: verifica-se, por exemplo, a pouca capacidade de percepção espacial em um grande número de pessoas nas múltiplas atividades profissionais. Como aponta Wheeler: [16]

> O ensino de geometria contribui na formação do aluno favorecendo um tipo particular de pensamento – que busca novas situações, sendo sensível aos seus impactos visual, interrogando sobre eles. Ela permite o desenvolvimento da "arte da especulação" traduzida na questão "o que aconteceria se...", que expressa o estilo hipotético-dedutivo do pensamento geométrico. (WHEELER, 1981, p. 352).

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo da Matemática na vida escolar do educando, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que ele vive. A Geometria apresenta-se como um campo profícuo para o desenvolvimento da capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível, que é um dos objetivos do ensino da Matemática, oferecendo condições para que níveis sucessivos de abstração possam ser alcançados. Partindo de um nível inferior, no qual reconhece as figuras geométricas, embora as percebendo como todos indivisíveis, o aluno passa, no nível posterior, a distinguir as propriedades dessas figuras; estabelece, num terceiro momento, relações entre as figuras e suas propriedades, para organizar, no nível seguinte, sequências parciais de afirmações, deduzindo cada afirmação de uma outra, até que, finalmente, atinge um nível de abstração tal que lhe permite desconsiderar a natureza concreta dos objetos e do significado concreto das relações existentes entre eles. Delineia-se, desta forma, um caminho que, partindo de um pensamento sobre objetos, leva a um pensamento sobre relações, as quais se tornam, progressivamente, mais e mais abstratas, segundo Abrantes: [1]

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão do significado: apreender significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. (ABRANTES, 1999, p. 17).

Podemos dizer que o conhecimento matemático geométrico faz parte do patrimônio cultural da humanidade, portanto, a sua apropriação é um direito de todos. É inconcebível à escola e ao professor não proporcionar ao aluno a oportunidade de assimilar esse conhecimento de forma significativa, estabelecendo relações com o mundo visível. Tirar do aluno o privilégio de aprender Geometria é a mesma coisa que lhe negar o direito à educação literária, científica e artística, pois nas formas geométricas presentes no nosso mundo visível a literatura, a ciência e a arte se evidenciam a todo o momento.

É nesse intuito de trazer novas formas de aprendizagem que construímos esse projeto, para que seja mais uma ferramenta a auxiliar no processo ensino-aprendizagem da Geometria durante a vida escolar do estudante, portanto o trabalho foi estruturado como se segue:

No capítulo 2 apresentamos o origami como e onde surgiu, os axiomas que fundamentam a Geometria do origami e uma explicação analítica dos mesmos.

O capítulo 3 traz um pouco sobre a história da Geometria bem como as noções básicas de geometria plana que são a base para o estudo do origami.

No capítulo 4 discutiremos a correlação entre o estudo da Geometria e do Origami ao longo da história.

No capítulo 5 abordamos sobre a temática Geometria no Ensino Fundamental e Médio dentro da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [3] .

No capítulo 6 apresentamos o software Origami Editor 3D [13] aos professores de Matemática e graduandos em Matemática no intuito de oferecer uma possibilidade de ensino.

No capítulo 7 trazemos roteiros de aulas que foram realizadas com os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio de duas escolas distintas da rede pública de ensino de Minas Gerais.

Finalmente no capítulo 8 trazemos as considerações finais deste trabalho.

2 Origami

Não podemos falar em origami sem falar da matéria-prima para construção dele que é o papel. Descreveremos a invenção do papel e assim o surgimento da arte do Origami, na sequência apresentaremos os axiomas de Huzita-Hatori, um conjunto de regras relacionadas aos princípios matemáticos do Origami, descrevendo as operações que podem ser feitas ao dobrar um pedaço de papel e, por fim passaremos à explicação analítica desses axiomas. Para escrever este capítulo foram utilizadas as seguintes referências: [4], [6], [8], [10] e [15].

2.1 Contexto histórico acerca do origami

Diversas culturas adotaram a arte do origami, porém no Japão, ela se trata de uma arte milenar, praticada por pessoas de todas as idades, principalmente por jovens e crianças. Acredita-se que o origami apareceu na China devido ao papel inventado por T'sai Lun por volta de 105 d.C., o administrador do Palácio do Imperador na China, antes de sua invenção havia uma mistura de casca de árvore, tecido e redes de pesca na tentativa de substituir a seda usada para escrever, uma vez que esta tinha altíssimo custo.

O origami é uma arte japonesa passada de geração em geração, faz parte do folclore e cultura japonesa há centenas de anos. Era muito usado para presentear e também em cerimônias e casamentos.

O papel só chegou ao Japão no século VI d.C. e quando começou a ser produzido em massa a preços baixos, o origami passou a ser usado por todas as classes sociais. Atualmente, na cultura japonesa, seu uso na vida cotidiana é muito importante, não só na fabricação de origamis, mas também na produção de materiais e objetos. Inicialmente, o origami era usado apenas nas cerimônias religiosas da nobreza e xintoísmo.

Quando o papel tornou-se um produto mais acessível, foram criados mais de 70 tipos de dobras que revelava, por exemplo, a classe social do portador, de acordo com o tipo de origami, era possível identificar se se tratava de um camponês ou samurai. Uma dobra muito antiga e famosa é o Tsuru, uma espécie de garça, feita com um único pedaço de papel quadrado.

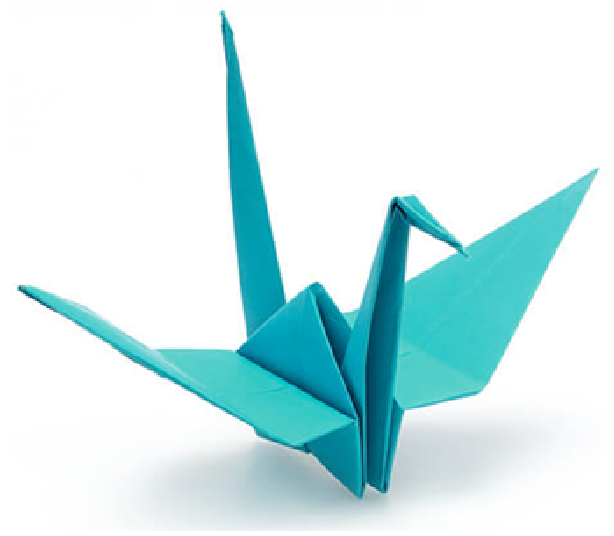


Figura 2.1: Tsuru

Fonte:<https://www.minutoseguros.com.br/quem-somos/lenda-tsuru>

Origami não só apareceu no Japão, mas os muçulmanos também praticavam esta arte e levaram-no para a Espanha. Faz parte da cultura popular desde o século XVII. Um dos maiores propagadores do origami na Espanha é Miguel de Unamuno. Depois de visitar o pavilhão japonês na exposição mundial da inauguração da Torre Eiffel, ele criou um espaço no seu país para ensinar o Origami.

Em meados do século XIX, com a industrialização, o papel passa a ser produzido em grande escala, com alta qualidade e por um valor bem mais baixo que normalmente era vendido.

Os americanos, em meados de 1950 a 1960, incentivaram e apoiaram o desenvolvimento da arte do origami ocidental, com a criação do New York Origami Center, o maior representante do origami moderno, o japonês Akira Yoshizawa, criou regras para representação gráfica das dobras.

Acredita-se que a sistematização de vincos e sombreados amplia a criatividade dos autores, que não só criam a obra final, mas também criam cores de fundo e a difusão de outras obras. Nas últimas três décadas, devido às trocas entre os origamistas e ao desenvolvimento de novas tecnologias, o origami experimentou um crescimento explosivo da criatividade, tornando possível fazer personagens cada vez mais complexos.

Ao longo dos anos, o origami formou duas tendências: Japão e Ocidente. Nas escolas japonesas, o origami é praticado e usado por artistas em Filosofia e arte. A filosofia inclui a expressão, o que cada um quer expressar com o menor número de vincos sendo que a perfeição dos vincos não é muito importante.

Muitos profissionais praticam e utilizam o origami. Matemáticos, engenheiros, físicos e arquitetos, levam em consideração a precisão e a perfeição do origami em seus trabalhos que envolvem formas, proporção e números, principalmente na área de Geometria e Computação.

O origami foi muito influenciado nos jardins de infância e na primeira série do Ensino Fundamental por Friedrich Wilhelm August Fröbel(1782-1852), educador alemão que usava vincos para desenvolver formas geométricas, segundo Mattos (2001, p. 38) [10]:

> Fröbel descreveu as dobras dividindo-as em três estágios.
>
> 1. Dobras reais: o objetivo deste estágio de origami é permitir que as crianças descubram todos os aspectos da geometria euclidiana de forma independente;
>
> 2. As dobras da vida: embora esta não seja uma fase que os seguidores de Froebel valorizem, sua finalidade é usar as dobras para construir plantas e animais, enfatizando as dobras tradicionais;
>
> 3. Belezas dobradas: este estágio visa estimular a criatividade das crianças e conectá-las com a arte. (FRÖBEL apud MATTOS, 2001, p. 38) [10].

Em alguns momentos da história, o ensino do origami foi duramente criticado, tendo sido citado como uma forma de alienação do aluno, onde havia apenas repetição de etapas e procedimentos. Com o passar dos anos, começa a ser visto como um exercício de criatividade e desenvolvimento educacional, principalmente após a internacionalização do origami promovida por Akira Yoshizawa.

No Japão, o registro mais antigo apareceu apenas em 1787. Quando foi publicado o primeiro livro de Origami, que apresentava como dobrar um Tsuru (também conhecido como Grou) que é o símbolo do origami e significa: paz, boa sorte, felicidade e saúde. Originalmente tinha uma função decorativa, mas começou a ser usado em orações para proteção. Este livro que menciona a lenda que diz que se alguém tiver um desejo e dobrar mil Tsurus o desejo irá se realizar.

No Brasil, as pessoas acreditam que o origami possa ter chegado de duas maneiras: pela Argentina, que tem influência cultural espanhola, ou pelos imigrantes japoneses. Quando os japoneses chegaram ao Brasil, eles trouxeram seus costumes e cultura para dar continuidade inclusive ao Origami. Na década de 1960, com o apoio do Consulado Geral do Japão em São Paulo, o professor Yachiyo Koda passou a ensinar origami em várias cidades por meio da Aliança Cultural Brasil-Japão.

Utiliza-se geralmente apenas o papel na arte do origami, em alguns casos, como por exemplo no origami modular, se faz necessário o uso da cola, pois o peso da montagem não suporta a arquitetura. O papel a ser utilizado na maioria das vezes é milimetrado e cortado em formato quadrado. No entanto, ao fazer esta criação artística, deve-se priorizar para caber todas as partes da colagem. O restante deve ser instalado, dobrado ou embutido de alguma forma, sem retirá-lo com tesoura.

A Bauhaus é uma conhecida escola de arquitetura e design na Alemanha. Ela incentiva os alunos a desenvolver trabalhos com a ajuda da pesquisa de origami e tem realizado muitos estudos e aplicações em ambiente de sala de aula.

O origami existe no cotidiano das pessoas, muitas vezes sua aplicabilidade nem é notada. Por exemplo, os airbags podem ser dobrados para criar equipamentos de segurança para carros. Em aviões, a envergadura é fornecida por um dispositivo ”dobre e desdobre”, que melhora a eficiência da aeronave e economiza espaço. Com a ajuda do origami, é possível criar e desenvolver embalagens para produtos que as pessoas acham mais práticos, como caixas de alimentos, sacolas de compras e até moda. Isso pode ajudar a criar novos "conceitos", novos trabalhos e estilos de dobrável e encaixável. Na realidade o que se percebe é que o origami pode ser usado para além da área educacional. Na indústria de marketing, objetos de decoração de festas e interiores e na arquitetura.

O origami é um recurso muito utilizado no tratamento da saúde pois é fácil de manusear e não causa perigo a quem utiliza. Como aponta LEIVAS; SOARES e LARA (2017):

> Além disso, o contato, o toque e a manipulação com esse material permitem um contato mais pessoal entre o sujeito, o objeto e o terapeuta, sendo possível expressar conflito emocional, ansiedade e medo. Origami pode ativar os dois hemisférios cerebrais, desenvolver a coordenação das mãos e inteligência não verbal, acuidade visual e visualização tridimensional. Como uma técnica de arte terapêutica, permite e inova comportamentos no papel e o utiliza para melhorar a saúde mental, o desenvolvimento cognitivo e emocional, a estrutura e ordem lógica e temporal, a expressão plástica e medidas preventivas para prevenir doenças neurológicas.(LEIVAS; SOARES e LARA, 2017, p. 7) [8].

O código de origami é um conjunto de símbolos convencionais que representam os gráficos, setas, linhas e réguas do papel a ser dobrado, permitindo a leitura e construção de modelos, plantas baixas e diagramas tridimensionais. O código é fixado em uma série de desenhos com instruções de ação e é um sistema de símbolos que representa vincos. Com poucas exceções, esta notação é universal. No final do século XX, vários matemáticos passam a se interessar pelo origami e entre estes, destacamos o japonês-italiano Humiaki Huzita, que descreveu 6 dos 7 axiomas básicos da dobragem do origami.

No origami, trabalha-se com conceitos básicos de geometria relacionados a ângulos, vértices, planos, paralelismo e semelhança. Pode-se comprovar através das dobras conceitos como proporções, frações, aritmética, álgebra e funções.

Ao dobrar o papel, realiza-se ações geométricas reais, construindo linhas, cantos, polígonos, poliedros, gráficos 2D e 3D. Ao usar origami, a pessoa pode ver ou modificar o conceito de geometria euclidiana plana e até mesmo espaço, de modo que possa construir triângulos equiláteros, tetraedros regulares, cubos, sólidos do céu estrelado, sem usar bússola, tesoura e cola, basta dobrá-lo.

Na concepção de (LARROSA, 2011, p. 17) [9] a infinita diversão do origami está no fato de que ele pode ser feito a qualquer hora, em qualquer lugar, apenas um pedaço de papel é necessário e qualquer pessoa, independentemente da idade, sexo, nível social, econômico e cultural, pode alcançá-lo. A atividade de fazer origami para reunir várias pessoas pode fortalecer o vínculo de amizade e emoção, relaxar a pessoa estressada e permitir que o paciente acamado passe mais tempo, aumentar a criatividade, concentração, organização e coordenação.

2.2 Axiomas de Huzita-Hatori

Embora a tecnologia de dobragem de papel já existisse por milhares de anos, só na década de 1970, o matemático Humiaki Huzita (1970), realizou uma pesquisa inicial para enumerar as possíveis dobras do origami e verificar as possíveis combinações entre elas. Huzita chegou à conclusão que existiam seis operações básicas de dobragem, que deu origem a descrição formal da construção geométrica do origami que ficou conhecido como Seis Axiomas de Huzita.

Segundo LANG (2004) [6], no final da década de 1980, Jacques Justin (1980) propôs que as operações de dobramento pudessem ser realizadas sete vezes em vez das seis vezes que Huzita(1970) propôs, mas foi em 2002 que Koshiro Hatori(2002) propôs as operações de dobramento que os axiomas de Huzita não fornecem. Portanto, o sétimo axioma formalizado é denominado axioma Huzita-Hatori. Isso redefine o mundo científico dos origamis. Essas operações básicas definem várias combinações de pontos e linhas com as quais um vinco pode ser alinhado. Analisando com detalhes a produção do origami é possível observar vários conceitos geométricos. Por exemplo, ao dobrarmos duas retas não paralelas, obtemos um ponto, que é intersecção destas retas. Assim, combinando estas dobras, obtemos construções elementares do Origami: paralelas, perpendiculares, mediatrizes e bissetrizes.

Abaixo mostraremos os axiomas de Huzita-Hatori [15].

Axioma 1: Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que os contém.

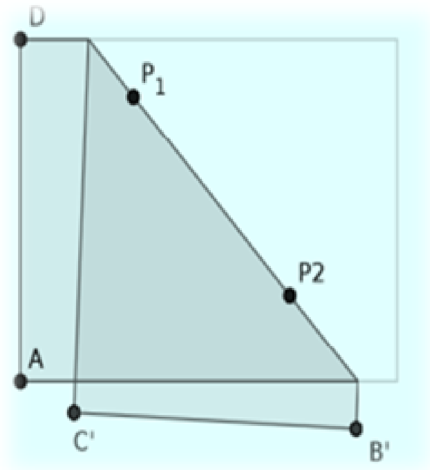


Figura 2.2: Axioma 1
Fonte:<https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/25833/25833_5.PDF>

O primeiro postulado de Euclides diz que através de quaisquer dois pontos é possível construir uma linha reta, ou seja, este axioma se refere ao primeiro postulado.

Axioma 2: Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2, existe apenas uma dobra capaz de torná-los coincidentes.

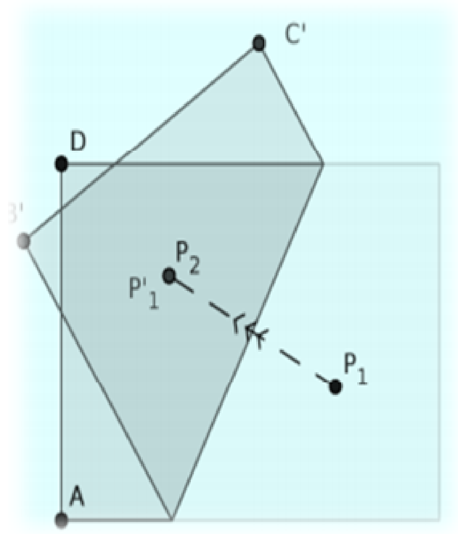


Figura 2.3: Axioma 2
Fonte:<https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/25833/25833_5.PDF>

Se desejamos encontrar a mediatriz de um segmento com extremidades em P_1 e P_2 fazemos uso deste axioma.

Axioma 3: Dadas duas retas distintas, r_1 e r_2, existem no máximo duas dobras capazes de colocar uma reta sobre a outra. Se r_1 e r_2 são paralelas ou o ponto de interseção encontra-se fora do papel, então, a dobra é única.

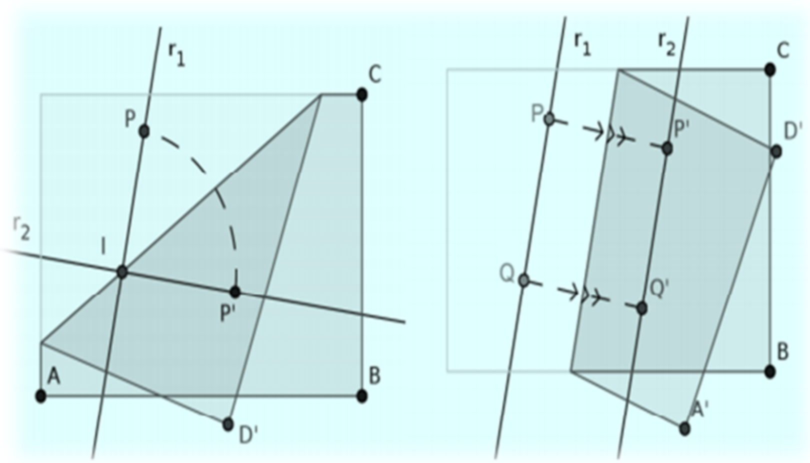


Figura 2.4: Axioma 3
Fonte:<https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/25833/25833_5.PDF>

Para encontrarmos a reta bissetriz dos ângulos formados entre duas retas. Sendo as retas paralelas, a bissetriz será uma dobra. Sendo as retas concorrentes, teremos duas soluções: uma em relação ao ângulo maior e a outra em relação ao ângulo menor formado entre as retas.

Axioma 4: Dados um ponto P e uma reta r, existe apenas uma dobra perpendicular a r que passa por P.

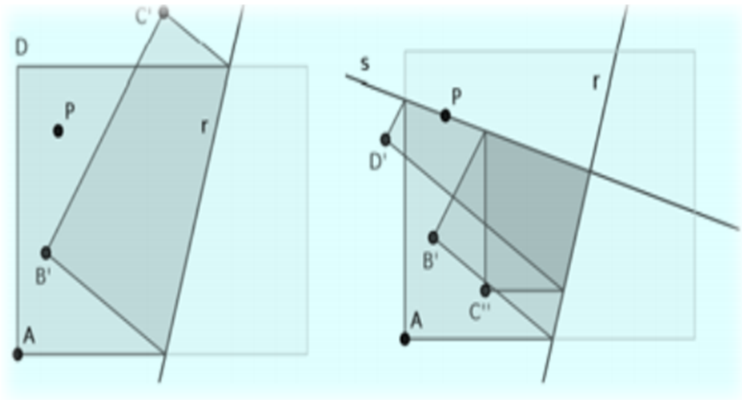


Figura 2.5: Axioma 4
Fonte:<https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/25833/25833_5.PDF>

Este axioma garante a unicidade e à existência da reta perpendicular que passa por um ponto P em relação a uma reta r qualquer.

Axioma 5: Dados dois pontos, P_1 e P_2 e uma reta r, se a distância entre P_1 e P_2 for maior ou igual à distância de P_2 à r, existe pelo menos uma dobra capaz de fazer com que P_1 incida em r de forma que a mesma passe pelo ponto P_2. Se a distância de P_1 a P_2 for igual a distância de P_2 a r, então, a dobra é única, caso contrário, existem duas dobras possíveis.

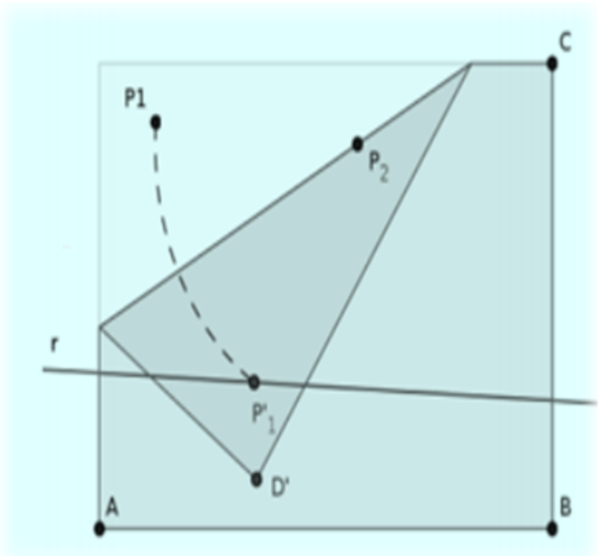


Figura 2.6: Axioma 5
Fonte:<https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/25833/25833_5.PDF>

O axioma 5 nos mostra como encontrar a intersecção da reta r_1 com a circunferência de centro P_2 passando por P_1. Sendo possível duas dobras dependendo das posições dos pontos e da reta r_1.

Axioma 6: Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2 e duas retas não paralelas r_1 e r_2 (se paralelas, a distância entre as mesmas não deve ser superior à distância entre os pontos) existe uma dobra que faz, simultaneamente, com que P_1 incida em r_1 e P_2 em r_2. O

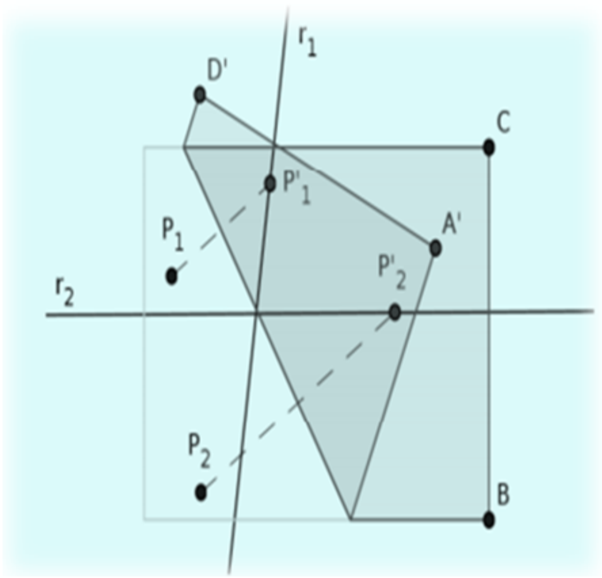


Figura 2.7: Axioma 6
Fonte:<https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/25833/25833_5.PDF>

Axioma 6 equivale a encontrar uma linha tangente a duas parábolas com focos em P_1 e P_2 com retas diretrizes em r_1 e r_2. A dobra obtida é a mediana de P_1P_1' e P_2P_2' onde P_1' e P_2' são os pontos obtidos com a sobreposição de P_1 e P_2 sobre as retas r_1 e r_2.

Axioma 7: Dadas duas retas r_1 e r_2 não paralelas e um ponto P não pertencente a r_1, existe uma dobragem que faz P incidir em r_1 de forma que o vinco gerado pela dobra seja perpendicular a r_2.

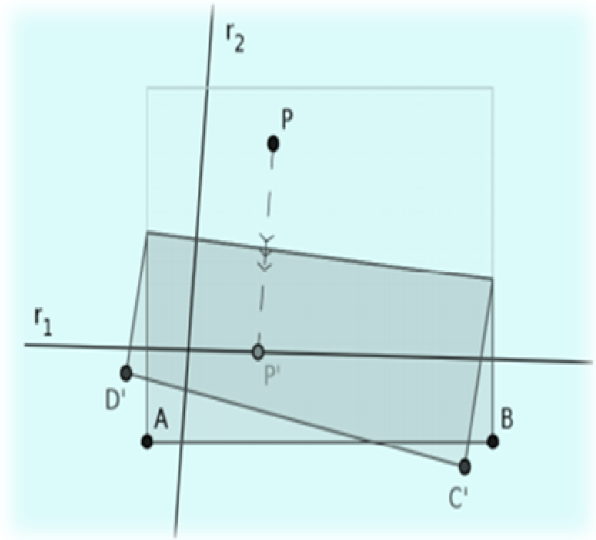


Figura 2.8: Axioma 7
Fonte:<https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/25833/25833_5.PDF>

Este axioma é desdobramento do axioma 4.

2.3 Explicação analítica dos Axiomas de Huzita-Hatori

Consideramos aqui uma folha de papel para realizar as dobragens.

Axioma 1: Uma única dobra passando por dois pontos

Para provar a existência dessa dobra, basta tomar dois pontos $P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2)$ e encontrar a equação da reta que passa por eles.

Assim, devemos encontrar os valores de m e n na equação $y = mx + n$ sendo $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e,
$n = y_1 - mx_1$ ou de forma equivalente $n = y_2 - mx_2$.

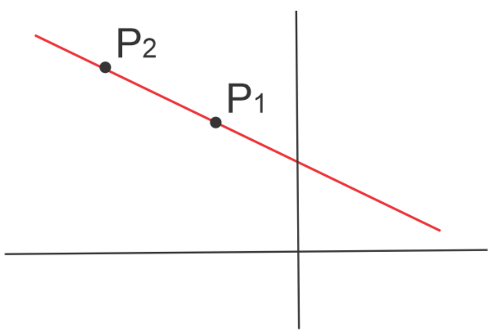


Figura 2.9: Reta que passa por dois pontos
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Axioma 2: Uma única dobra tornando dois pontos coincidentes

A dobra que torna dois pontos coincidentes é a mediatriz do segmento dado por estes pontos iniciais.

Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, devemos determinar uma reta perpendicular à reta definida por P_1 e P_2 e que passa pelo ponto médio do segmento $\overline{P_1P_2}$. Sabemos que o ponto médio do segmento $\overline{P_1P_2}$ é dado pelas coordenadas $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$, basta realizar uma dobra pela reta $y = mx + n$ onde $m = \dfrac{-x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ e $n = \dfrac{y_1+y_2}{2}$- $m\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

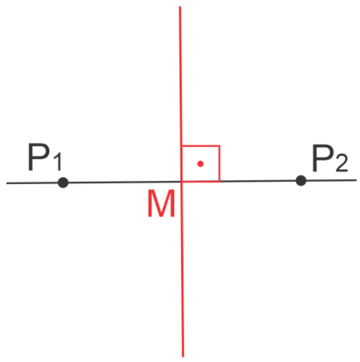


Figura 2.10: Mediatriz
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Axioma 3: Uma única dobra tornando duas retas coincidentes

Sejam as retas $s_1 : y = m_1x + n_1$ e $s_2 : y = m_2x + n_2$. Temos que as mesmas podem ser paralelas ou concorrentes, assume-se que as duas retas não são coincidentes. Começamos analisando a situação em que s_1 e s_2 são paralelas, sem perda de generalidade, seja $P = (x_1, y_1)$ um ponto escolhido da reta inicial s_1. Há dois casos a considerar: $m_1 = 0$ ou $m_1 \neq 0$.

Caso 1) Se $m_1 = 0$

Nesse caso, as retas serão da forma $s_1 : y = n_1$ e $s_2 : y = n_2$, e $P_1 = (x_1, n_1)$. A equação $X = X_1$, nos dá a reta perpendicular a s_1 que passa por P_1, sendo $P_2 = (x_1, n_2)$ o seu ponto de intersecção com a reta s_2. Resta aplicar a dobra descrita no axioma 2 que torna P_1 e P_2 coincidentes.

Caso 2) $m_1 \neq 0$

A equação da reta perpendicular a s_1, é dada por $y = -\dfrac{1}{m_1}x + \left(\dfrac{1}{m_1}x + y_1\right)$. O ponto de intersecção P_2 entre a reta acima e s_2 é a soluçao do sistema abaixo:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{m_1}x + \left(\dfrac{1}{m_1}x + y_1\right) \\ y = m_2x + n_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_2x + n_2 = -\dfrac{1}{m_1}x + \left(\dfrac{1}{m_1}x + y_1\right) \\ y = m_2x + n_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(m_2 + \dfrac{1}{m_1}\right)x = \dfrac{1}{m_1}x_1 + y_1 - n_2 \\ y = m_2x + n_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\dfrac{1}{m_1}x_1 + y_1 - n_2}{m_2 + \dfrac{1}{m_1}} \\ y = m_2x + n_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + y_1m_1 - n_2m_1}{m_2m_1 + 1} \\ y = m_2\dfrac{x_1 + y_1m_1 - n_2m_1}{m_2m_1 + 1} + n_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + y_1m_1 - n_2m_1}{m_2m_1 + 1} \\ y = \dfrac{x_1m_2 + y_1m_1m_2 - n_2m_1m_2 + n_2m_1m_2 + n_2}{m_2m_1 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + y_1m_1 - n_2m_1}{m_2m_1 + 1} \\ y = \dfrac{x_1m_2 + y_1m_1m_2 + n_2}{m_2m_1 + 1} \end{cases}$$

Assim o ponto P_2 será $\left(\dfrac{x_1 + y_1m_1 - n_2m_1}{m_2m_1 + 1}, \dfrac{x_1m_2 + y_1m_1m_2 + n_2}{m_2m_1 + 1}\right)$.

Suponhamos que as retas s_1 e s_2 não são paralelas, então, basta fazer a bissecção de um dos ângulos definidos pelas duas retas.

Iremos determinar o ponto P_0 de intersecção de s_1 e s_2:

$$\begin{cases} y = m_1x + n_1 \\ y = m_2x + n_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m_2x + n_2 = m_1x + n_1 \\ y = m_2x + n_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (m_2 - m_1)x = n_1 - n_2 \\ y = m_2x + n_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{n_1 - n_2}{m_2 - m_1} \\ y = m_2\dfrac{n_1 - n_2}{m_2 - m_1} + n_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{n_1 - n_2}{m_2 - m_1} \\ y = \dfrac{m_2n_1 - m_2n_2 + m_2n_2 + m_1n_2}{m_2 - m_1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{n_1 - n_2}{m_2 - m_1} \\ y = \dfrac{m_2n_1 - m_1n_2}{m_2 - m_1} \end{cases}$$

Logo, o ponto procurado tem coordenadas $\left(\dfrac{n_1 - n_2}{m_2 - m_1}, \dfrac{m_2n_1 - m_1n_2}{m_2 - m_1}\right)$, sendo $m_1 \neq m_2$ e, conseguentemente $m_2 - m_1 \neq 0$.

Passamos agora a considerar a circunferência não degenerada de centro no ponto acima e raio arbitrário, digamos r, dada pela equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Sabendo que as retas s_1 e s_2 não são paralelas então a circunferência vai intersectar a s retas em quatro pontos distintos (dois pontos em cada reta). Sejam os pontos $P_{1,1} = (x_{1,1}, y_{1,1})$ e $P_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2})$ resultantes da intersecção com a reta s_1, e $P_{2,1} = (x_{2,1}, y_{2,1})$ e $P_{2,2} = (x_{2,2}, y_{2,2})$ resultantes da intersecção com s_2. Sem perda de generalidade, vamos encontrar os pontos médios M_1 e M_2 dos segmentos $\overline{P_{1,1}P_{2,1}}$ e $\overline{P_{1,2}P_{2,2}}$, respectivamente. Temos que $M_1 = \left(\dfrac{x_{1,1} + x_{2,1}}{2}, \dfrac{y_{1,1} + y_{2,1}}{2}\right)$ e $M_2 = \left(\dfrac{x_{1,2} + x_{2,2}}{2}, \dfrac{y_{1,2} + y_{2,2}}{2}\right)$.

Como descrito no axioma 1, fazemos a dobra que passa por M_1 e M_2.

A circunferência utilizada foi apenas para auxiliar, os pontos podem ser facilmente encontrados através da adição de vetores, deste modo nesse axioma também estão envolvidas somente equações de primeiro grau.

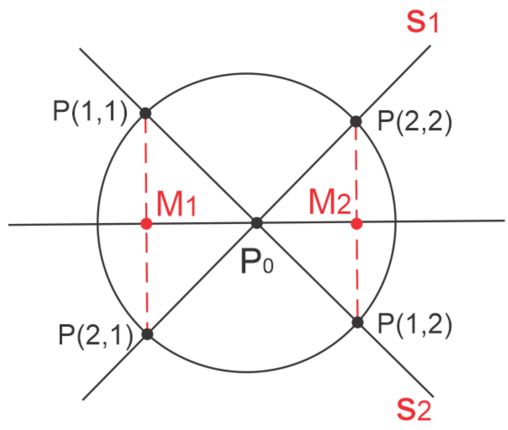


Figura 2.11: Construção do axioma 3
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Axioma 4: Uma única dobra, perpendicular a uma reta e passando por um ponto

Primeiramente tomamos o ponto $P = (x,y)$ e a reta $s : y = mx + n$.

A reta onde deve ser feita a dobragem será encontrada se tomarmos uma circunferência de centro P e raio maior que a distância de P até s, de tal modo que esta intersecte s em dois pontos distintos, digamos P_1 e P_2.

Agora, consideremos as circunferências de centro P_1 e P_2, respectivamente, cujo raio é igual à distância entre estes dois pontos.

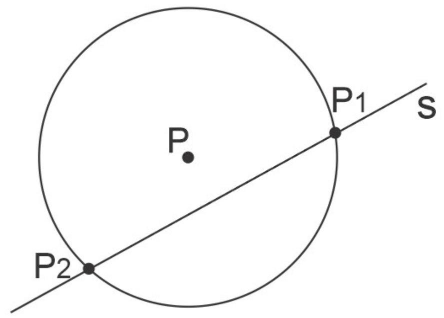


Figura 2.12: Construção axioma 4
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Basta dobrar conforme o axioma 2 e obteremos o pretendido.

Axioma 5: Uma única dobra que faz um ponto incidir em uma reta, passando por outro ponto

Seja a reta $s : y = mx + n$ e os pontos $P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. Neste axioma pretendemos encontrar a dobra que passa por P_2 e que coloca P_1 sobre s. Para tanto, iremos calcular a intersecção da reta s com a circunferência de centro em P_2 e raio igual ao segmento $\overline{P_1P_2}$.

O sistema abaixo nos dá a intersecção, consideremos $r = \overline{P_1P_2}$:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = mx + n \\ (x - x_2)^2 + (mx + n - y_2)^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = mx + n \\ (1 + m^2)x^2 + (2mn - 2x_2 - 2my_2)x + (x_2^2 + n^2 - 2ny_2 + y_2)^2 - r^2 = 0 \end{cases}$$

Como se trata de uma equação do segundo grau, poderá ter zero, uma ou nehuma solução.

Caso a distância entre P_1 e P_2 seja menor que a distância de P_2 a s, o discriminante é menor que zero, e sendo negativo, não existirá ponto de intersecção entre a circunferência e a reta s

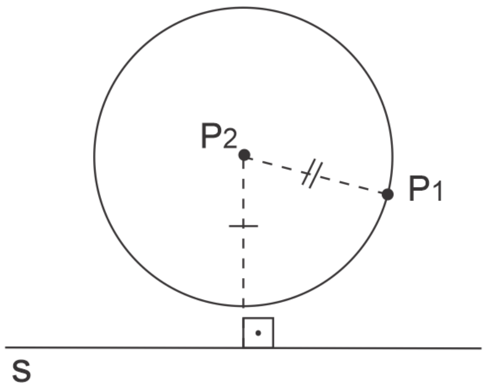


Figura 2.13: Distância entre P_1 e P_2 menor que a distância de P_2 a s

Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Caso a distância entre P_1 e P_2 seja igual a distância de P_2 a s, o discriminante será zero, desta forma teremos um ponto de intersecção entre a circunferência e a reta s, digamos A.

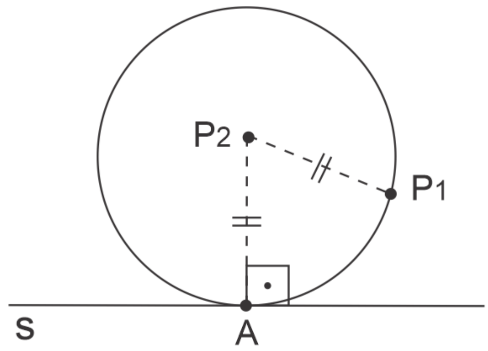


Figura 2.14: Distância P_1 e P_2 igual a distância de P_2 a s
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Caso a distância entre P_1 e P_2 seja maior que a distância de P_2 a s, o discriminante será positivo, desta forma teremos dois pontos de intersecção entre a circunferência e a reta s, digamos A e B.

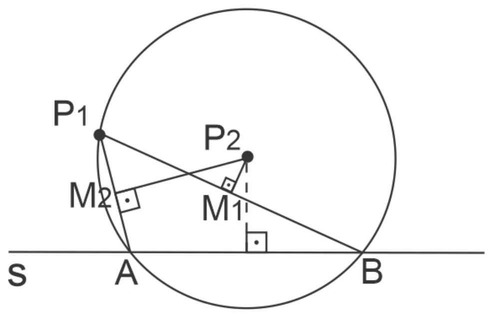


Figura 2.15: Distância entre P_1 e P_2 maior que a distância de P_2 a s
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Dados M_1 e M_2, os pontos médios dos segmentos $\overline{P_1A}$ e $\overline{P_1B}$ respectivamente, serão efetuadas duas dobras distintas pelos segmentos $\overline{P_1M_1}$ e $\overline{P_2M_2}$.

Na prática por meio dessa axioma é possível determinar a reta tangente à parabola de foco P_1 e diretriz s, que passa por P_2.

Ao ser efetuada a dobra, o ponto P_1 incidirá sobre A da parte da diretriz dobrada (em uma direção diferente da inicial). Consideremos então a reta perpendicular a s na sua direção de dobragem, que passa por P_1, digamos s_1. Uma vez que P_1 não pertence a s, concluimos que a direção de s não é paralela a direção inicial. Como s não é paralela à reta de dobragem, podemos determinar o ponto de intersecção I. Por construção, os segmentos $\overline{IP_1}$ e $\overline{IA}$ tem o mesmo comprimento. Sendo assim, por definição, o ponto I pertence à parábola de foco P_1, e diretriz s cuja reta de dobragem é tangente à curva pelo ponto I.

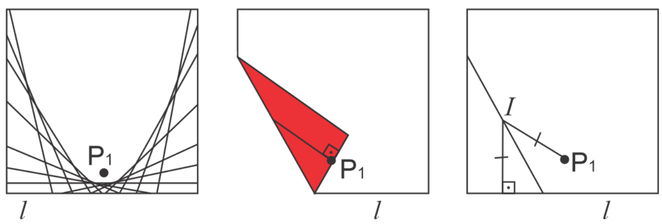


Figura 2.16: Construção do axioma 5

Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Axioma 6: Uma única dobra que faz dois pontos incidirem em duas retas distintas

Este axioma não é consequência dos cinco primeiros já que gera uma construção que não depende apenas de régua e compasso.

Conforme podemos ver no axioma 5 dados os pontos P_1 e P_2 e as retas s_1 e s_2 vemos que ao fazer a dobra de forma que P_1 incida sobre s_1 teremos uma reta tangente à parábola de diretriz s_1 e foco P_1. Da mesma forma acontecerá para o ponto P_2 sobre a reta s_2.

Tomamos $s_1 : y = -1$ e $P_1 = (0,1)$, sem perda de generalização. Seja $P_1' = (t, -1)$ o ponto em que P_1 incide na reta s_1 essa dobra é dada pela mediatriz do segmento $\overline{P_1P_1'}$ uma vez que por construção, todos os seus pontos são equidistantes de P_1 e P_1'. Sendo $M_1 = \left(\frac{t}{2}, 0\right)$ o ponto médio do segmento $\overline{P_1P_1'}$.

A equação da reta que passa pelos pontos P_1 e P_1' é dada por $y = -\frac{2x}{t} + 1$. Sendo assim a equação do vinco realizado com a dobra é $y = \frac{tx}{2} - \frac{t^2}{4}$.

Desejamos também que o ponto médio de $\overline{P_2P_2'}$ pertença a essa reta. Sendo $P_2' = (x, y)$ e $P_2 = (x_1, y_1)$ temos que $M_2 = \left(\frac{x_1 + x}{2}, \frac{y_1 + y}{2}\right)$. Substituindo na equação encontraremos:

$\frac{y+y_1}{2} = \frac{t}{2}\frac{x+x_1}{2} - \frac{t^2}{4}$

Como as duas retas têm a mesma inclinação, por se tratar da mediatriz dos segmentos $\overline{P_1P_1'}$ e $\overline{P_2P_2'}$, sendo assim encontramos a seguinte equação: $-\frac{2}{t} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$. Substituindo na equação anterior,

$\frac{y+y_1}{2} = -\frac{x-x_1}{y-y_1}\frac{x+x_1}{y-y_1} - \frac{(x-x_1)^2}{(y-y_1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (y+y_1)(y+y_1)^2 = -(x_1^2 - x^2)(y_1 - y) - 2(x_1 - x)^2$ Sendo essa uma equação de terceiro grau, podemos encontrar uma, duas, três ou nenhuma resolução. Se as retas s_1 e s_2 forem paralelas e a distância entre elas superior à distância entre os dois pontos dados inicialmente esta equação será impossível de resolver, pois não existirá tangente comum às duas parábolas.

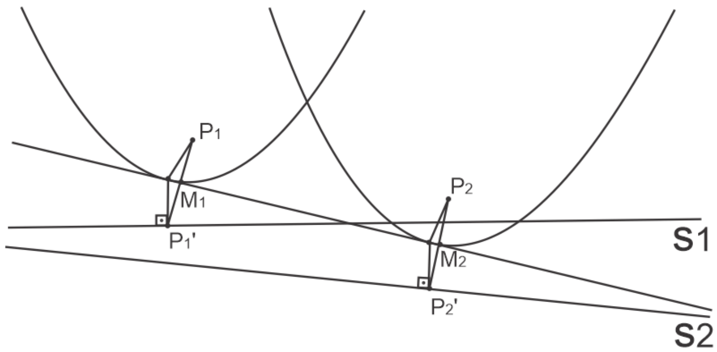


Figura 2.17: Tangente comum a duas parábolas

Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Axioma 7: Uma única dobra que faz um ponto incidir em uma reta, através de uma dobra perpendicular a uma outra reta não paralela a inicial

Sendo $s_1 : y = m_1x + n_1$ e $s_2 : y = m_2x + n_2$, e o ponto $P = (x_0,y_0)$, queremos encontrar uma dobra que faça um ponto P incidir em s_1 e que seja perpendicular a s_2. Ou seja novamente estamos diante de uma resolução de equação do primeiro grau. Vale ressaltar que consideramos as retas iniciais não paralelas.Para isso a reta s que passa por P e P' deve ser paralela a reta s_2

Seja $s : y = m_2x + (y - 0 - m_2x_0)$ a reta paralela a s_2, que passa por P.

Para encontrar as coordenadas do ponto P' basta resolvermos o sistema abaixo, que nos dá a intersecção entre a reta s_1 e s,

$$\begin{cases} s : y = m_2x + (y_0 - m_2x_0) \\ s_1 : y = m_1x + n_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1x + n_1 = m_2x + (y_0 - m_2x_0) \\ y = m_1x + n_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y_0 - m_2x_0 - n_1}{m_1 - m_2} \\ y = m_1x + n_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y_0 - m_2x_0 - n_1}{m_1 - m_2} \\ y = m_1\dfrac{y_0 - m_2x_0 - n_1}{m_1 - m_2} + n_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y_0 - m_2x_0 - n_1}{m_1 - m_2} \\ y = \dfrac{m_1y_0 - m_1m_2x_0 - m_2n_1}{m_1 - m_2} + n_1 \end{cases}$$

Intersectam-se no ponto $P' = \left(\dfrac{y_0 - m_2x_0 - n_1}{m_1 - m_2}, \dfrac{m_1y_0 - m_1m_2x_0 - m_2n_1}{m_1 - m_2} + n_1\right)$.

Basta então fazer a dobra que torna P e P' coincidentes, como descrito no axioma 2 e, obteremos o pretendido.

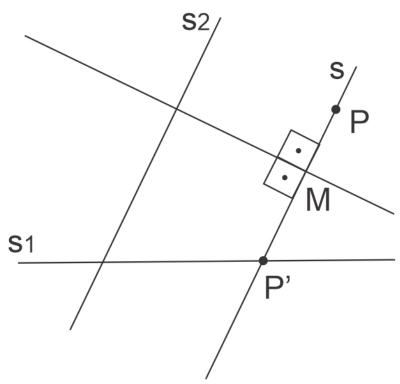


Figura 2.18: Construção axioma 7

Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

3

Geometria

Todos já sabemos da importância da geometria para a história da humanidade, aqui trazemos um pouco sobre como surgiu a Geometria que remota a antiguidade, apresentamos a contribuição de Euclides de Alexandria, tratando a geometria como ciência e, finalizamos com a apresentação dos conceitos básicos de geometria plana. Nesse capítulo, foram utilizadas as seguintes referências: [2], [5], [12] e [16].

3.1 Surgimento da Geometria

A Geometria é um ramo da Matemática que estuda as formas planas e espaciais, com as suas propriedades. É a parte da Matemática que trata das propriedades e medidas da extensão.

O conhecimento geométrico se fez necessário ao homem a partir do momento em que no Egito, todos os anos o rio Nilo extravasava as margens e inundava o seu delta. Com isso as cheias depositavam nos campos de cultivo lamas aluviais ricas em nutrientes, tornando o delta do Nilo a melhor terra para o cultivo do mundo antigo. Mas nas épocas das cheias o rio destruía as marcas físicas de delimitação entre as propriedades de terra. Como os egípcios levavam muito a sério o direito sobre a propriedade. Os antigos faraós resolveram passar a nomear funcionários para ocuparem o cargo de agrimensores, cuja tarefa era avaliar os prejuízos das cheias e restabelecer as fronteiras entre as diversas propriedades. Foi assim que nasceu a Geometria. Estes agrimensores, ou esticadores de corda (assim chamados devido aos instrumentos de medida, cordas entrelaçadas concebidas para marcar ângulos retos), acabaram por aprender a determinar as áreas de lotes de terreno dividindo-os em retângulos e triângulos.

Nos achados egípcios foi encontrado um livro intitulado Livro dos Mortos. Quando um egípcio que cultivava a terra estava a beira da morte, ele tinha de jurar aos deuses que ele não tinha enganado ao vizinho, roubando-lhe terra. O roube de terra era considerado para os egípcios um pecado muito grave.

Em vida, se um egípcio fosse pego cometendo esse ato poderia ter o coração comido por uma besta fera chamada devorador. Roubar terra do vizinho era considerado uma ofensa muito, muito grave como quebrar um juramento, assassinar alguém ou masturbar-se num templo. Segundo Wheeler [16]:

> Melhor que o estudo do espaço, a geometria é a investigação do "espaço intelectual", já que, embora comece com a visão, ela caminha em direção ao pensamento, indo do que pode ser percebido para o que pode ser concebido.(WHEELER, 1981, p. 351-353).

3.2 Geometria Euclidiana

Quando falamos de Geometria do Origami devemos dar ênfase a Euclides de Alexandria [2], ele é considerado o pai da Geometria, nasceu por volta de 360 a.C. e morreu em 295 a.C., compilou na obra *Elementos* todos os conhecimentos de geometria da época. A obra Elementos reúne além de conhecimentos de geometria, conhecimentos de álgebra e aritmética. São treze livros, onde ele estrutura esses conhecimentos como definições e noções comuns, demonstrando teoremas relacionados a esses axiomas e definições.

Figura 3.1: Euclides de Alexandria.

Fonte:<https://matematica-life-style.webnode.com/euclides-de-alexandria/>

Os livros I a IV tratam de Geometria Elementar, partindo de propriedades de retas e ângulos, conduzindo a congruência de triângulos, igualdade de áreas, teorema de Pitágoras, construção de um quadrado de área igual a do retângulo, círculo e polígonos regulares.

No livro V é apresentada a teoria das proporções de Eudoxo (408 a.C. - 355 a.C.) na sua forma geométrica.

O livro VI é sobre semelhança de figuras planas.

Os livros VII a IX são sobre Teoria dos Números, tais como: divisibilidade, números primos e suas propriedades, o número irracional $\sqrt{2}$. São enunciados o Teorema de Euclides e o Algoritmo de Euclides.

No mais extenso dos livros que é o X, há uma classificação geométrica dos irracionais quadráticos e as sua raízes quadráticas.

Já nos três últimos livros, XI a XIII, trata de geometria de sólidos, poliedros regulares e a prova dos cinco poliedros.

Todas as construções da geometria euclidiana são possíveis ser realizadas através do uso de régua não graduada e compasso sem memória, isto é, um compasso que não permite transferir distâncias de um local para o outro.

3.3 Noções básicas de geometria plana

Apresentaremos aqui os conceitos básicos de geometria plana que normalmente são apresentados pelos professores aos alunos do Ensino Fundamental. Vale ressaltar que o nosso trabalho foi realizado num primeiro momento com alunos do $8^{\underline{o}}$ ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de trabalhar os conceitos básicos da geometria plana, em seguida foi realizado um trabalho com um grupo de alunos do Ensino Médio com o objetivo de desenvolver conceitos de geometria de sólidos a partir da geometria plana.

Ponto, reta e plano

Iniciamos com os três conceitos primitivos da Geometria Plana, são eles: ponto, reta e plano. Estes três conceitos são considerados "primitivos", pois não possuem uma definição rigorosa, porém são de fácil compreensão, além de ser a base para o estudo da Geometria Plana. Desse modo, aqui propõe especialmente a conhecer tais conceitos, pois serão elementos necessários para alcançarmos o objetivo de nossa análise das linhas que demarcam um campo de futebol.

Conforme Dolce (2005), a Geometria é construída a partir de três ideais: a de ponto, de reta e de plano, ou seja, os conceitos primitivos, pois são adotadas sem definição, e neste caso, os matemáticos aceitam tais conceitos sem tentar defini-las. Observe que o ponto é representado por uma letra maiúscula latina: A, B, C, ...

Para termos a ideia de reta podemos imaginar um fio, sem começo nem fim, bem esticado. Uma reta é um conjunto de pontos infinitos, e é sempre representada por uma letra minúscula latina: a, b, c...

Um outro conceito primitivo é o plano, o tampo de uma mesa é um plano, o chão da sala, imaginando que sempre prolonga, não tem fim. Para traçar um plano são necessários pelo menos três pontos não alinhados. Podemos concluir também que dado um plano, nele existem infinitos pontos e infinitas retas pertencentes a este plano. Geralmente o plano é representado por uma letra do alfabeto grego: α,β,γ...

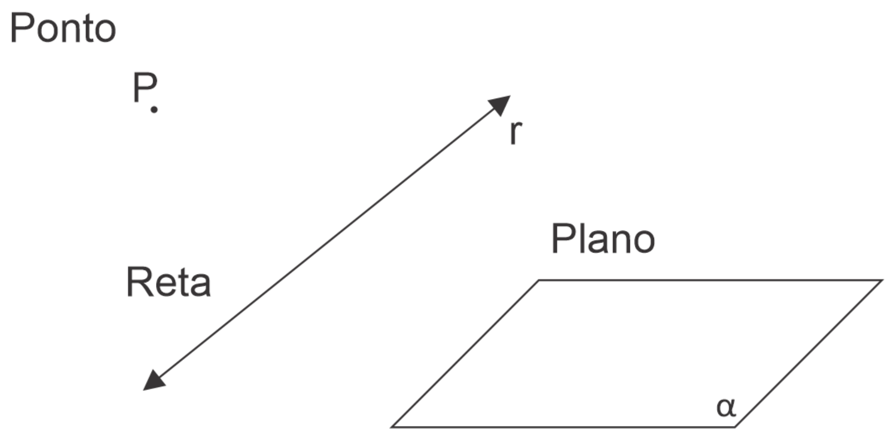


Figura 3.2: Ponto, Reta e Plano
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Segmento de reta

Dados os pontos P e Q sobre a reta s, segmento de reta é a parte delimitada da reta s que contém todos os pontos que se encontram entre P e Q. No caso P e Q, que são chamados de extremidades do segmento $\overline{PQ}$.

Figura 3.3: Segmento de Reta
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Semirreta

Dados dois pontos P e Q sobre s, a reunião do segmento de reta $\overrightarrow{PQ}$ com o conjunto dos pontos X de modo que o ponto Q esteja entre P e X é a semirreta $\overrightarrow{PQ}$, neste caso P é chamado de origem da semirreta $\overrightarrow{PQ}$.

Figura 3.4: Semirreta
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Ângulo

Chamamos de ângulo a figura formada por duas semirretas com uma origem comum. As semirretas são os lados do ângulo e a origem o vértice do ângulo. Os ângulos podem ser côncavos ou convexos. Chamamos de convexo o ângulo formado no interior das duas semirretas e côncavo o ângulo formado exterior as duas semirretas.

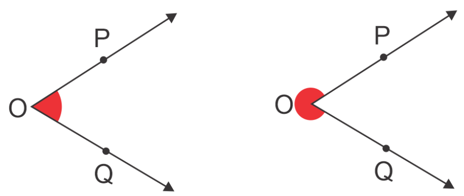


Figura 3.5: Ângulo
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Bissetriz de um ângulo

A bissetriz é a semirreta contida no ângulo, de origem no vértice e que forma, com cada um dos lados, ângulos geometricamente iguais.

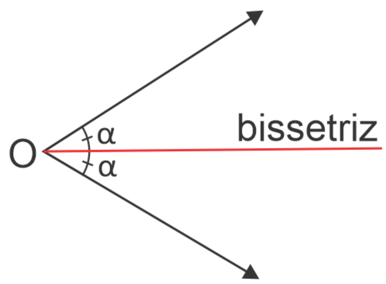


Figura 3.6: Bissetriz de um ângulo
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Mediatriz de um segmento

A mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de dois pontos distintos P e Q. O traçado da mediatriz, determina consequentemente, o ponto médio de um segmento.

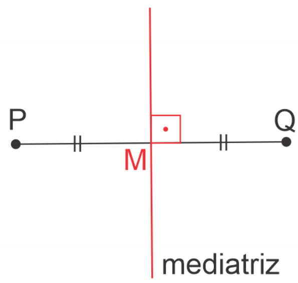


Figura 3.7: Mediatriz de um segmento
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Pontos colineares e não-colineares

Pontos colineares: são pontos que pertencem a uma mesma reta. Na primeira figura abaixo, os pontos M, N e P são colineares, pois todos pertencem à mesma reta r. Na segunda figura abaixo, os pontos M, N e P não são colineares, pois P não pertence à reta s.

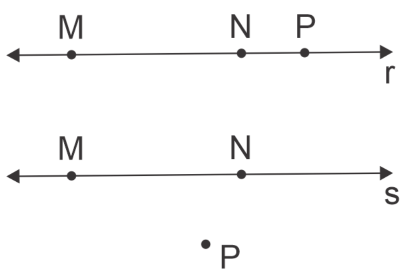


Figura 3.8: Pontos colineares e não-colineares
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Retas Paralelas

Duas retas r e s dizem-se paralelas se a distância de qualquer ponto da reta r à reta s for sempre constante. Ou seja elas não se interceptam.

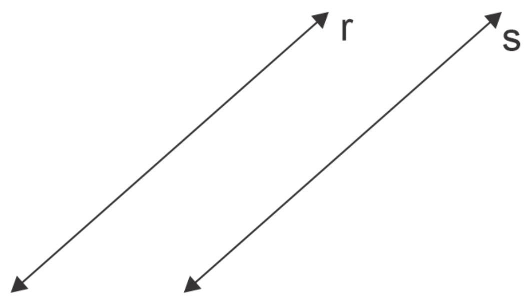


Figura 3.9: Retas Paralelas
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Retas Concorrentes

Duas retas r e s são concorrentes se e só se, têm um único ponto P em comum.

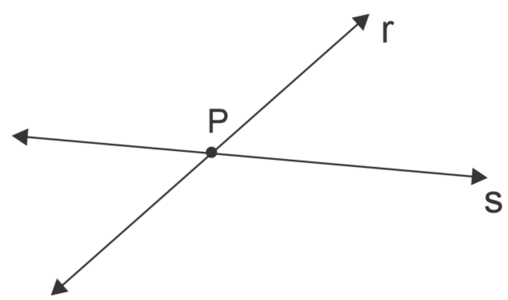


Figura 3.10: Retas Concorrentes
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Retas Perpendiculares

Duas retas r e s são perpendiculares se os quatro ângulos formados pela intersecção entre r e s são geometricamente iguais. Cada um desses ângulos é chamado de reto.

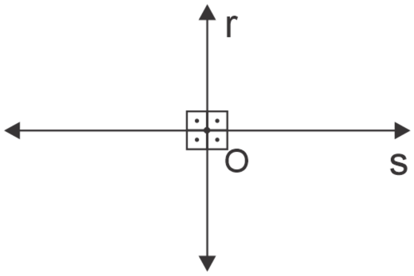


Figura 3.11: Retas Perpendiculares
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Triângulo

Denominamos triângulo a união de três segmentos de reta cujas extremidades são três pontos não-colineares. A figura abaixo mostra um triângulo, os pontos não-colineares A,B e C são os vértices do triângulo, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são os lados do triângulo. $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são os ângulos internos.

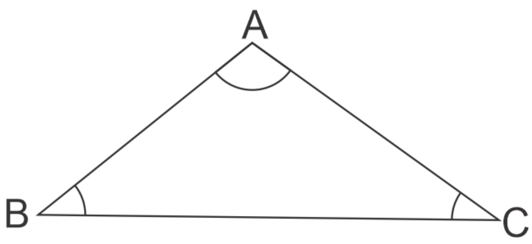


Figura 3.12: Triângulo
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Altura de um triângulo

É um segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo ou ao seu prolongamento, traçado pelo vértice oposto. Esse lado é chamado base da altura.

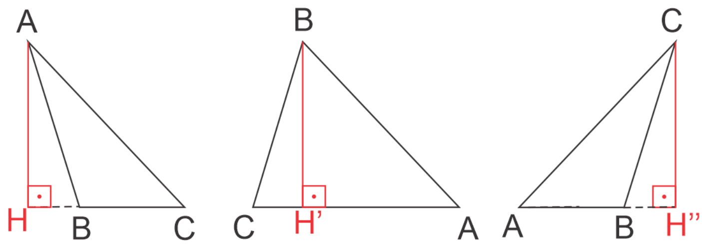


Figura 3.13: Altura de um triângulo
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Mediana de um triângulo

É um segmento de reta que liga um vértice deste triângulo ao ponto médio do lado oposto a este vértice.

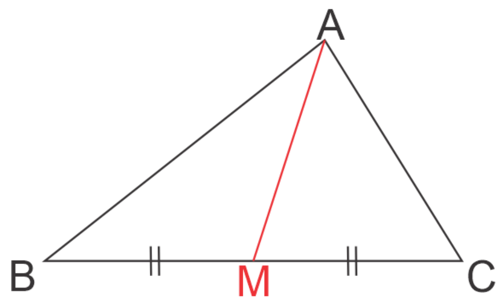


Figura 3.14: Mediana de um triângulo
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Bissetriz de um triângulo

É o segmento de reta que une um vértice do triângulo ao lado oposto, dividindo o ângulo desse vértice em dois de mesma medida. Os triângulos possuem três bissetrizes.

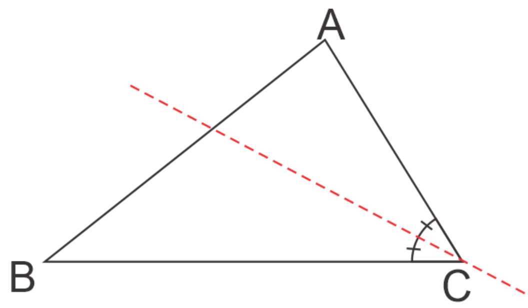


Figura 3.15: Bissetriz de um triângulo
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

Mediatrizes de um triângulo

É uma reta perpendicular a um dos lados do triângulo que passa pelo ponto médio deste lado.

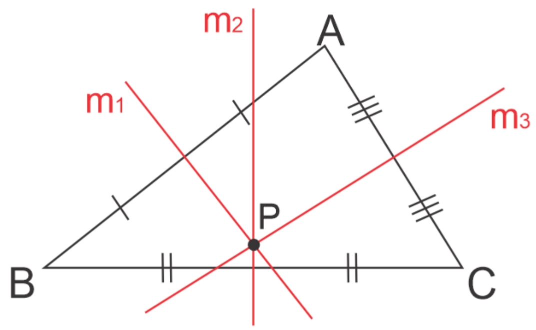


Figura 3.16: Mediatrizes de um triângulo
Fonte: Elaborado pela Autora deste trabalho

4 A correlação entre a Geometria e o origami

A Geometria e o Origami no sistema de ensino e as conquistas possíveis com esse trabalho conjunto serão apresentadas ao longo desse capítulo. Tomamos como referência o trabalho de Monteiro (2008) [11], para discorrer sobre o assunto.

A Geometria é uma ciência muito antiga, desde os tempos de Mileto, Pitágoras, Platão, Aristóteles e Euclides, suas hipóteses têm sido usadas para muitos fins. No Brasil, com o surgimento da matemática moderna, em meados de 1960, o conhecimento matemático passou a despertar a atenção das pessoas.

A Geometria pode ser uma ferramenta importante na difusão do conhecimento matemático pois possibilita vivenciar o conteúdo na prática, fazer o uso do origami no ensino da Geometria faz com que os alunos expandam os conhecimentos geométricos formais, saindo do conhecimento informal e partindo para uma observação do meio e tornando assim a aprendizagem mais concreta. O professor que consegue despertar no aluno o interesse em compreender a importância da Geometria e relacioná-la ao meio onde vive garante boa parte da aprendizagem matemática.

Trabalhos com dobras têm como objetivo potencializar o aprendizado. Os conceitos, estruturas, manipulações, visualizações e representações geométricas envolvidas podem ser utilizados de diversas formas, de maneira a auxiliar a compreensão de características geométricas de figuras planas e espaciais.

A manipulação de objetos ajuda a construir modelos de vários elementos geométricos, partindo de exemplos e uma pesquisa detalhada o origami é um grande aliado para trabalhar o ensino da Geometria.

Quando o aluno manipula os materiais, ele consegue realizar novas descobertas. Além disso, ele está trabalhando com a arte, através da exploração de objetos, obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanatos do mundo real, então, permitirá aos alunos estabelecer conexões entre a Matemática e outros conhecimentos. Origami está relacionado a objetos e personagens que fazem parte do cotidiano do aluno e ele pode representar esses objetos de forma geométrica, como por exemplo, animais, caixas, objetos tridimensionais dos mais variados.

No processo de construção e desconstrução do origami, são trabalhados elementos da aprendizagem como: a observação, raciocínio lógico, visão espacial e artística, perseverança, determinação, paciência, auto-controle e criatividade.

Durante as etapas de construção do origami, observa-se que as dobras utilizadas trabalham desde conceitos básicos da geometria euclidiana até conceitos mais elaborados. Partindo de definições como formas planas, pontos, retas paralelas e perpendiculares, até chegar por exemplo em definições de propriedades dos triângulos.

O aluno traz consigo um conhecimento básico de Geometria adquirido através da linguagem falada, observando os objetos e formas à sua volta. A cada etapa da construção do origami, ele pode expandir este conhecimento quando analisa as combinações das dobras para elaborar um projeto e por fim questionando os resultados obtidos.

O exercício passo a passo para realizar as dobras desenvolve no aluno habilidades motoras, coordenação, a memória para conseguir realizar as dobras e utilizá-las novamente em um outro projeto e o trabalho em equipe quando desenvolvido em grupos. O ensino da Geometria através do origami aborda uma aprendizagem que parte de um processo construtivo onde não há disseminação de conhecimento e sim construção por eles dos próprios conceitos.

Ao fazer as dobras, usando apenas o papel sem o uso de cola, tesoura, régua ou compasso, é possível construir triângulos, quadriláteros e tetraedros. Além de realizar várias ações geométricas como fazer linhas, ângulos, polígonos, poliedros, figuras 2D e 3D. Muitos conceitos de geometria plana e espacial são vistos e revisados em cada movimento. Ao desdobrar as peças, elas serão marcadas com muitos vincos, que podem efetivamente introduzir o conceito de reta e sua posição relativa no plano, podendo estudar o ângulo, congruência, semelhança, área, circunferência e relação de proporção.

Após a Primeira Guerra Mundial, o sistema educacional japonês, baniu o ensino do origami, considerando que o mesmo não explorava a criatividade, alegando que os alunos apenas faziam repetições arbitrária de dobras como uma receita qualquer. Posteriormente as famílias adotaram o origami com atividade de entretenimento e lazer. Hoje em dia, matemáticos, engenheiros, artistas, arquitetos, e uma série dos mais variados profissionais utilizam origami em seus trabalhos.

No ensino da Geometria utilizando materiais manipuláveis a sensibilidade e o toque são essenciais para sair da abstração e partir para o concreto, as coisas que podem ser manipuladas pelos alunos para construir conhecimneto é um dos principais objetivos. O origami é um trabalho interessante porque as dobras são uma atividade interessante e os resultados são bonitos e atraentes, a arte está diretamente ligada ao trabalho com dobras, assim os alunos esquecem daquele mito de que a Matemática é muito difícil e aprendem conceitos geométricos importantes de maneira lúdica. Os modelos concretos, ajudarão o aluno a compreender os conceitos, inferências e conjecturas produzidas pelo intercâmbio entre os modelos concreto e abstrato.

Quando se decide aprender, treinar, pesquisar ou realizar algo, as pessoas só fazem se for essencial para a sobrevivência ou se trouxer felicidade. No modelo de educação atual, é um desafio unir as duas coisas, tendo em vista os vários elementos de distração que são apresentados a essa geração, hoje em dia temos vários aplicativos que ensinam a técnica do origami.

Não é possível usar o origami de forma excessiva, cabe ao professor estabelecer até que ponto é útil essa técnica no processo de aprendizagem de geometria, em qual série/ano escolar é mais adequado este ou aquele trabalho com dobras. Pensando sempre no objetivo que deseja com aquele processo.

O uso do origami permite que os alunos examinem e construam formas para perceber os atributos presentes na imagem. Quando cada indivíduo se move, todo o origami começa. Há uma grande diferença entre saber algo por meio da mente e saber a mesma coisa por meio do toque. O origami já é objeto de estudo de vários pesquisadores como peça importante no ensino da Geometria.

Usar técnicas de origami para construir objetos é uma pequena parte do momento em que os alunos podem ver e tocar o objeto de aprendizagem na aula de matemática. É possível e deve-se ressaltar o fato de que o conteúdo dos alunos é aproximado por meio do dobramento, proporcionando assim um bom ambiente para o desenvolvimento consistente do processo de ensino e aprendizagem.

Moraes (2012) [12] destacou que o uso do origami no processo de ensino pode promover o desenvolvimento de habilidades, por exemplo:

- Comportamento: por meio de ações repetitivas, os aprendizes devem observar e ouvir atentamente as instruções do anfitrião, e executá-las com alta qualidade e atitude cautelosa. O sucesso do trabalho depende em grande parte do executor, que mostra autocontrole no trabalho.

- Trabalho em equipe: a ação de dobrar o quadrado ou retângulo do papel e convertê-lo em uma figura tridimensional é um exercício importante para mover o raciocínio espacial e obter simetria. Observa-se o trabalho uns dos outros e ajudam os colegas, o que ajuda a aumentar a importância do trabalho em equipe.

Desta forma, o processamento de materiais como o origami torna a geometria um conteúdo importante no qual os alunos podem descobrir e encontrar soluções para problemas. Em matemática, o uso de origami pode realizar atividades destinadas aos seguintes propósitos:

- Construção de conceitos: por mais simples que pareça, as dobras contêm elementos que podem ser explorados na construção de diferentes conceitos matemáticos, não apenas conceitos geométricos.

- Distinguir forma, posição e tamanho: basta dobrar no quadrado do papel para alterar a forma, posição ou tamanho da figura, estimulando assim o desenvolvimento da geometria, aritmética e pensamento algébrico.

- Leitura e interpretação de cartas: constitui uma linguagem simbólica completa e diferente das outras linguagens utilizadas para a troca de ideias. A linguagem do origami é universal. A sua interpretação facilita a utilização de qualquer livro dobrável e dispensa a memorização de passos.

- A construção de gráficos planos e espaciais: seja ele geométrico ou não geométrico, seja plano ou espacial, as ricas possibilidades do origami arquitetônico fazem do mesmo uma arte que pode ser explorada de muitas maneiras diferentes.

- O uso de termos geométricos no contexto: a descrição verbal do degrau dobrável é uma tradição mantida por artistas orientais durante séculos. Se todos conhecerem os elementos geométricos, suas definições e termos, será muito conveniente.

- O uso de terminologia geométrica correta pode promover a aprendizagem; o desenvolvimento da percepção e distinção entre plano e espaço: essencial na construção de conceitos e na solução de muitos problemas matemáticos é a percepção da geometria plana e espacial e o estabelecimento entre a geometria e os elementos do espaço A prática da capacidade de dobrar relacionamentos estimulou seu desenvolvimento. Com o desenvolvimento das atividades geométricas envolvendo origami, ações como observação, síntese, decomposição, transformação, representação e comunicação têm sido promovidas.

Podendo analisar então que, ao dobrar papel para o propósito do objetivo e, construir figuras, o aluno desenvolve habilidades de autonomia, memória, foco, concentração, criatividade, sequência, coordenação motora fina e sociabilidade.

Embora a Geometria seja, sem dúvida, de grande significado, ainda existem muitos problemas relacionados ao conceito de conteúdo no processo de ensino. Um deles é, sem dúvida, o método de aplicação desse tipo de conteúdo, pois, superficialmente, de alguma forma impede o aluno de compreender seu verdadeiro significado.

Quando o aluno se vê diante de uma situação que requer participação, envolvimento e exploração, isso faz com que a sua aprendizagem seja dinâmica, e os conceitos que envolvem e que fazem parte dos conteúdos geométricos serão elaborados de forma natural, de tal maneira que o resultado seja alcançado, ele se sente que faz parte do processo de ensino-aprendizagem como elemento chave e percebe sua importância.A construção do próprio material concreto e sua análise muito detalhada permitem a construção de modelos mentais dos mais diversos elementos geométricos referendando os conceitos trabalhados.

A matemática está presente na vida das pessoas em diversas atividades desempenhadas no dia a dia por isso é tão importante para a humanidade. Se o aluno entender o quão necessário é compreender esse campo para o seu progresso e formação o professor terá alcançado o seu objetivo. Os desafios que são postos ao aluno é uma das ferramentas para alcançar este propósito.

No entanto, lamentavelmente, o sistema educativo não está conseguindo proporcionar um ensino que possibilite romper esses desafios. Frequentemente se ouve lamentações de professores de Matemática com correlação aos vários desafios que os mesmos enfrentam no esforço de produzir uma experiência sólida no seu dia a dia em sala de aula. Aprender Matemática é aprender a solucionar problemas. Para isto é necessário apropriar-se dos significados dos conceitos e procedimentos matemáticos para saber aplicá-los em situações novas.

Atribuir significados aos conceitos é uma proposta que vem de encontro com os objetivos dos componentes curriculares, a percepção do aluno desses significados são essenciais, dessa forma ele estará mais preparado para os desafios que enfrentará durante a vida.

A didática do professor requer flexibilidade e inventiva para tornar o educando capaz de aprender por si mesmo. Fazendo suas próprias experimentações, elaborando conjecturas, formulando hipóteses e dessa maneira, errando e acertando , começa a estabelecer suas próprias concluões.

Se os educadores pararem para pensar como está o ensino da matemática nas escolas, no momento em que se encontra irá perceber que é indispensável pensar em elementos e técnicas que possam reverter a situação atual. Utilizar o origami no ensino só trará benefícios ao processo de ensino da Geometria . Diante do exposto é possível apresentar os caminhos dessa pesquisa, possibilitando a utilização do origami como recurso metodológico para as aulas de Matemática.

5

A BNCC e a Geometria

Neste capítulo, apresentaremos o que a Base Nacional Comum Curricular traz sobre as habilidades a serem desenvolvidas na temática Geometria no Ensino Fundamental e Médio. Para tanto, foi utilizada a BNCC [3] como única referência bibliográfica norteadora para escrever o capítulo.

5.1 O que nos diz a BNCC sobre a temática Geometria

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [3] é um documento que visa definir um conjunto de métodos básicos de aprendizagem que todos os alunos devem desenvolver ao longo de sua vida escolar.

O Ensino Fundamental é a maior etapa de escolarização, se inicia aos 6 anos e termina aos 14 anos. O que envolve ao todo 9 anos começando pelo 1º ano do Ensino Fundamental e terminando ao 9º ano do Ensino Fundamental. A BNCC auxilia as unidades escolares a criarem seus curriculos levando em consideração as particularidades de cada etapa de ensino, sendo assim o Ensino Fundamental foi dividido em Anos Iniciais (1º ao 5º) e Anos Finais (6º ao 9º). Na figura 5.1 podemos verificar essa divisão de acordo com as áreas do conhecimento e respectivos componentes curriculares.

Nos Anos Finais do Ensino Fundamental é o período em que o aluno aprofunda os conhecimentos apresentados nos Anos Iniciais e está a caminho do Ensino Médio. É um período de mudanças onde o aluno está saindo da infância e entrando na adolescência, o estudante se depara com muitos desafios, a recomendação da BNCC é que se retome e ressignifique as aprendizagens do Ensino Fundamental - Anos Iniciais, estimulando o estudante a questões de independência, responsabilidade e protagonismo juvenil.

Como podemos ver na figura 5.2 no Ensino Médio temos uma divisão em 4 grandes áreas de conhecimento. A Matemática ocupa um lugar de destaque . Neste momento o jovem está preparado para transformar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental como generalizar, abstrair, analisar e interpretar, partindo de um modelo instrumental matemático. A Matemática no Ensino Médio é vista sob dois aspectos: a questão formativa que está relacionada a organização do conhecimento e a parte instrumental que se relaciona a aplicação destes conhecimentos.

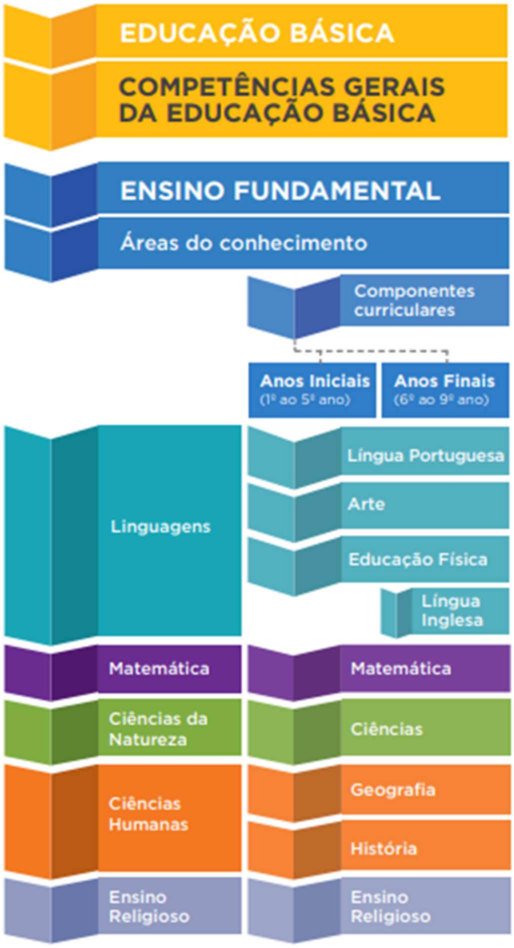


Figura 5.1: Competências Gerais do Ensino Fundamental - retirado da BNCC

Para a área do conhecimento Matemática, a BNCC propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental e também no Ensino Médio. Cada uma delas terá ênfase de acordo com o ano de escolarização, a saber são elas: **Números, Álgebra, Grandezas e medidas, Probabilidade e estatística e Geometria**; sendo esta última foco deste trabalho, portanto dissertaremos sobre ela.

A proposta da BNCC de divisão em unidades temáticas não é uma obrigatoriedade, mas apenas uma sugestão dentre muitas outras para o desenho dos currículos, a ideia é facilitar a compreensão dos conjuntos de habilidades. Deve-se também, na elaboração dos currículos e propostas pedagógicas levar em consideração as outras áreas do conhecimento.

Na BNCC, há destaque para a utilização de recursos didáticos e materiais diferentes, como: malhas quadriculadas, jogos, calculadoras, planilhas e softwares de geometria dinâmica, bem como incluir a história da matemática com intuito de despertar no aluno o interesse e contribuir para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos.

Figura 5.2: Competências Gerais do Ensino Médio - retirado da BNCC

A unidade temática **Geometria** propõe o estudo de posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais de maneira que o aluno seja capaz de fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência.

No Ensino Fundamental – Anos Finais, espera-se que o aluno tenha um conhecimento consolidado e ampliado da geometria plana, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança, para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo. Assim, a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras.

No Ensino Médio, espera-se que o aluno desenvolva habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformções isométricas e produzir ampliaçõe e reduções de figuras. Os estudantes transformam ampliam e reduzem as figuras geométricas, identificando seus elementos variantes e invariantes de modo a desenvolver os conceitos de semelhança e congruência, por exemplo, cálculo de altura de um teleférico. Este tipo de problema contribui para a formação do raciocínio hipotético-dedutivo. Apesar de tecnologias não ser uma unidade temática na BNCC, ela vem se destacando no documento, uma vez que o uso de calculadoras e planilhas eletrônicas vem sendo amplamente estimulado, além do incentivo ao pensamento computacional por meio da interpretação e elaboração de fluxuogramas e softwares de geometria dinâmica como por exemplo o geogebra. Esse conjunto de procedimentos podem levar os alunos a desenvolver a capacidade de raciocinar, representar, comunicar e argumentar esperadas para um aluno que esteja nessa etapa esccolar.

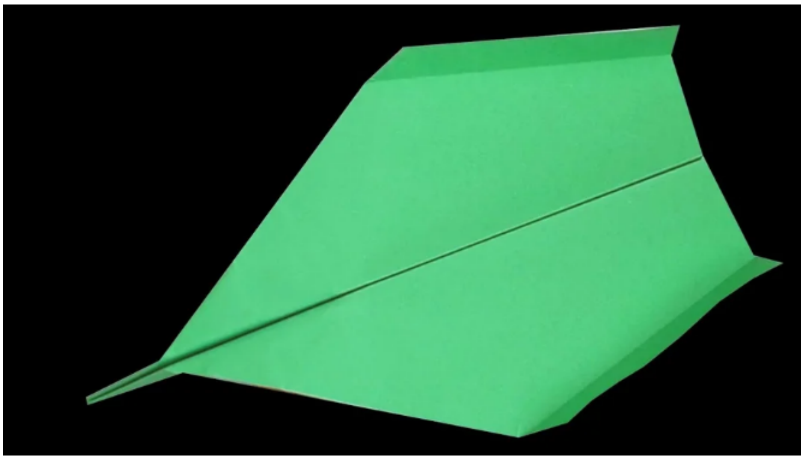
6

Recursos Computacionais para ensinar Geometria

Após feitas algumas pesquisas apresentamos neste capítulo uma forma de tornar a aula de Geometria mais atrativa ao aluno utilizando recursos computacionais. Será abordado o software Origami Editor 3D [13] como ferramenta de suporte ao ensino da Geometria utilizando a técnica do origami. Primeiramente discorreremos sobre o software, em seguida mostraremos alguns trabalhos elaborados com a utilização do mesmo.

6.1 Apresentação do software Origami Editor 3D

O Origami Editor 3D é uma ferramenta para criar modelos complexos de origami em um ambiente tridimensional realista. Ele usa uma interface o que você vê é o que você obtém e opera com uma abstração geométrica do sistema Yoshizawa-Randlett. Ele possui duas janelas, na janela principal podemos ver uma vista 3D da figura e na outra vemos o padrão das dobras do origami, sendo possível arrastá-lo e soltá-lo para ver de perto como ele é formado. Para utilizá-lo o usuário necessita ter conhecimentos básicos de Geometria Euclidiana e conhecer algumas técnicas do Origami. Não é possível aprender origami apenas com este software, embora ele possa mostrar o processo de dobragem passo a passo de qualquer modelo de origami criado neste editor. O ideal é que se faça a sua utilização antes da criação das peças sendo assim o usuário poderá evitar erros de algumas dobras feitas no papel. Qualquer coisa, desde um simples avião até a estrela ômega de John Montroll, pode ser dobrada neste editor.



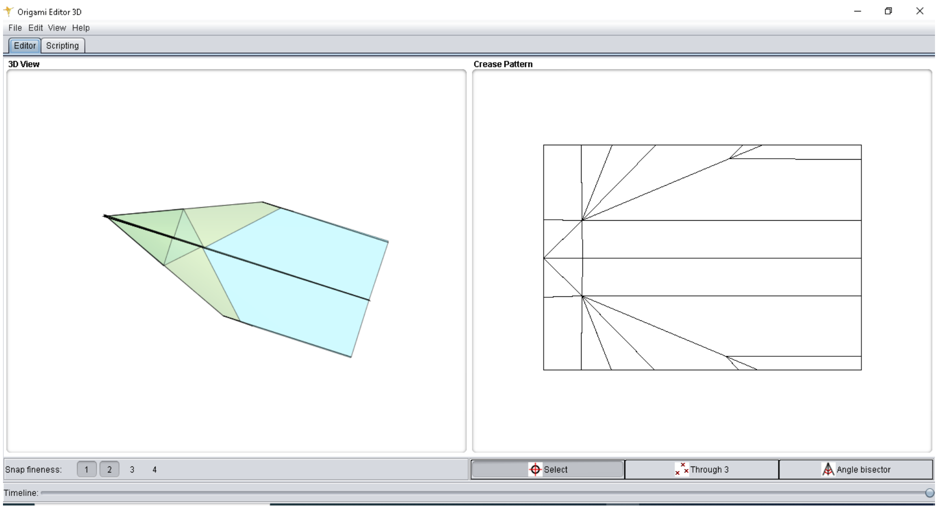
(a) Dobra no papel

Fonte:<https://www.reddit.com/r/origami/comments/ktthoo/airplane-origami/>

(b) Dobra no papel

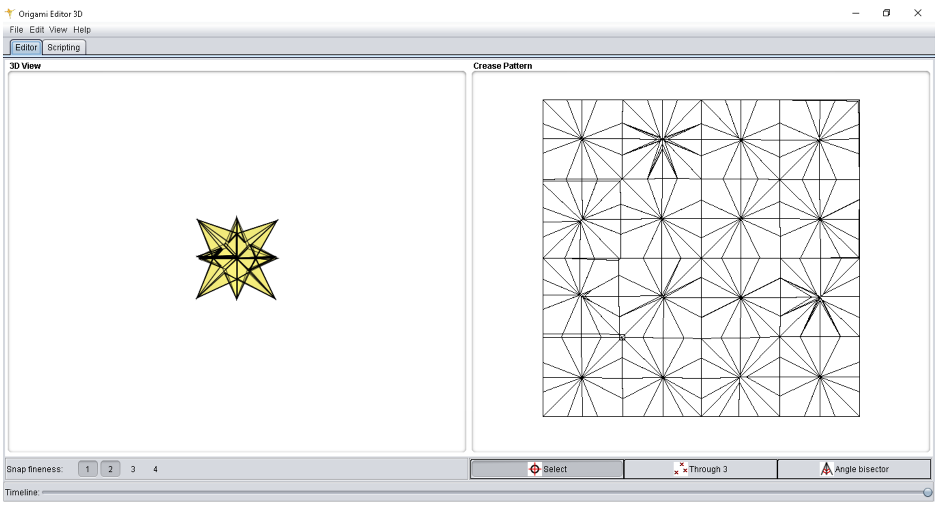
Fonte:<https://www.oqueemeuenosso.com.br/2010/03/origami-estrela-omega-omega-star-john.html>

Figura 6.1: Modelos de aeroplano e estrela de John Montroll no papel



(a) Dobra no Software

Fonte: Exemplo retirado do Origami Editor 3D



(b) Dobra no Software

Fonte: Exemplo retirado do Origami Editor 3D

Figura 6.2: Modelos de aeroplano e estrela de John Montroll no Origami Editor 3D

Quando finalizamos o trabalho podemos exportar a dobra em PDF, GIF animados ou mesmo em Java. Também é possível ver o trabalho aberto com as dobras feitas. O Origami Editor 3D se trata de um projeto não finalizado e, existe um fórum de discussões na internet onde as pessoas podem entrar e sugerir novos recursos ou apontar alguns erros. O objetivo principal do programa é projetar origami, mas as pessoas que desejam apenas construir algumas figuras, conseguem visualizar 34 modelos prontos no programa. O usuário pode fazer o download direto da página oficial do programa Origami Editor 3D [13] sendo que o mesmo pode ser baixado para sistemas Linux, Mac e Windows, é um software gratuito que apresenta uma licença de código aberto. O usuário também encontrará um guia de instruções dos principais comandos na página http://origamieditor3d.sourceforge.net/userguide/en/index.html. No aplicativo Origami Editor 3D você poderá simular dobras reversas, dobras de compressão, dobras de afundamento, dobras de pétalas e outros tipos de dobras com relativa facilidade. Aprender como usar essa ferramenta é a parte mais importante da curva de aprendizado.

No aplicativo não é possível a tradução para o português, exigindo assim conhecimentos básicos de inglês, porém no guia de orientações o usuário consegue traduzir a página o que é um facilitador para o manuseio do programa.

A seguir podemos verificar operações básicas de utilização, lembrando que somente a prática trará a excelência.

Ele reage a quatro tipos de ação do mouse:

- Arrastar com o botão esquerdo do mouse mudará o modelo.
- Clicar com o botão esquerdo uma ou várias vezes alternará entre as vistas frontal, superior e lateral do modelo. Isso é útil para uma edição precisa.
- Clicar com o botão direito ativará a régua .
- A rolagem aumentará / diminuirá o origami, mas apenas se a opção **Exibir> Zoom** na rolagem estiver habilitada

Existem quatro tipos de papel diretamente disponíveis no Origami Editor 3D:

- Quadrado (Square Origami)
- A4 , que tem uma proporção de 4243: 3000
- Hexágono regular
- Nota de dólar , que tem uma proporção de 40:17

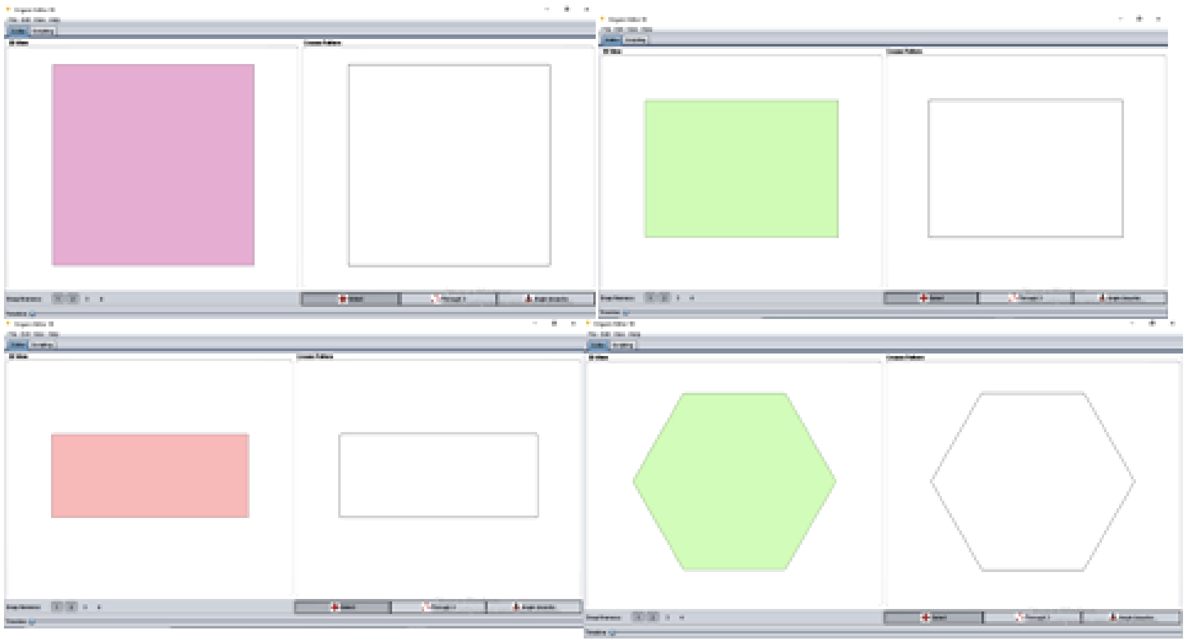


Figura 6.3: Opções de Papel
Fonte: Modelos retirados do software Origami Editor 3D

Há três comandos básicos:

- Cortar;
- Girar;
- Refletir.

Esses últimos comandos são a base para as construções.

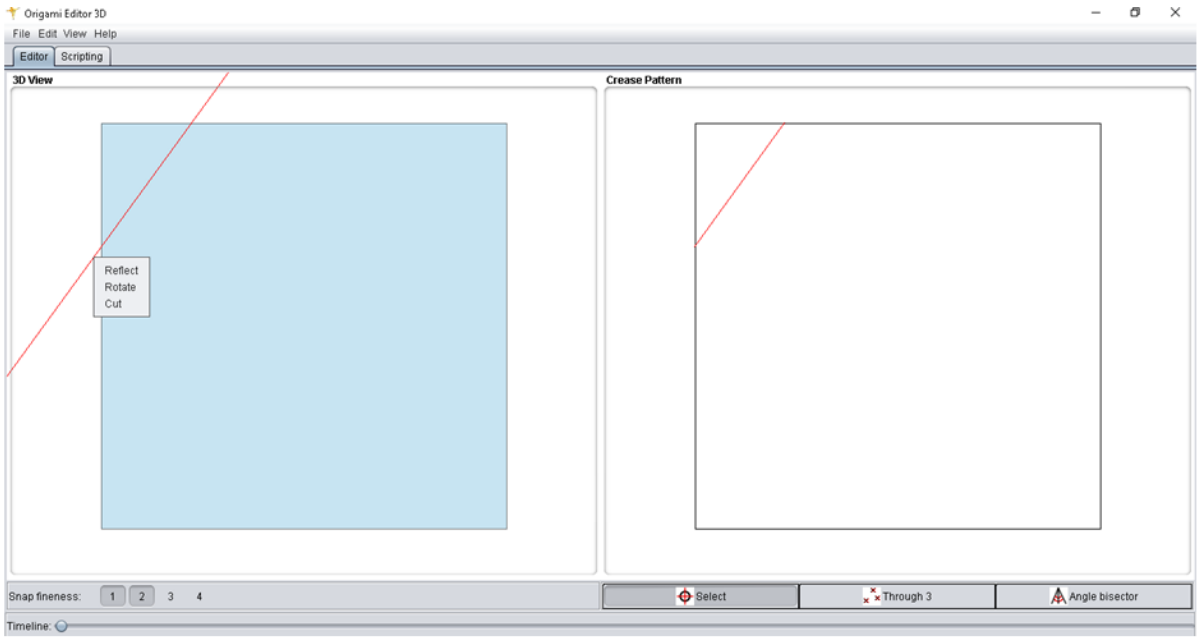


Figura 6.4: Construção da Reta no Editor 3D

6.2 Alguns exemplos

Apresento agora alguns exemplos de construções realizadas no Software Origami Editor 3D elaboradas pela autora deste trabalho durante a realização do mesmo.

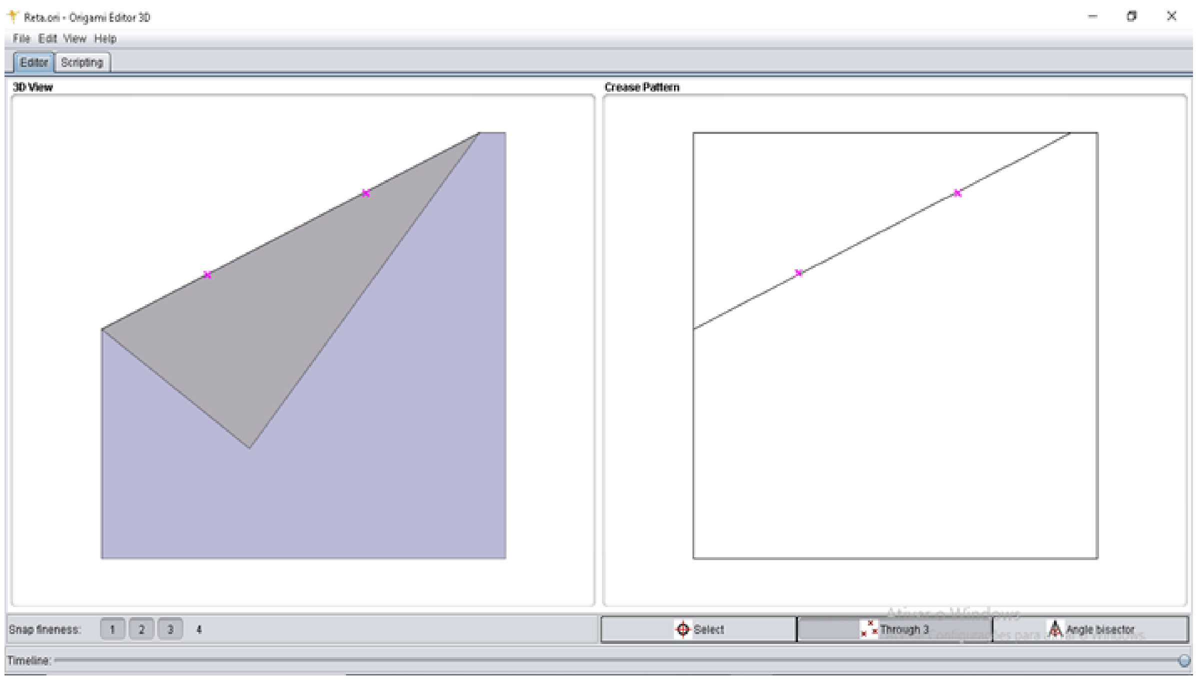


Figura 6.5: Construção da Reta no Editor 3D

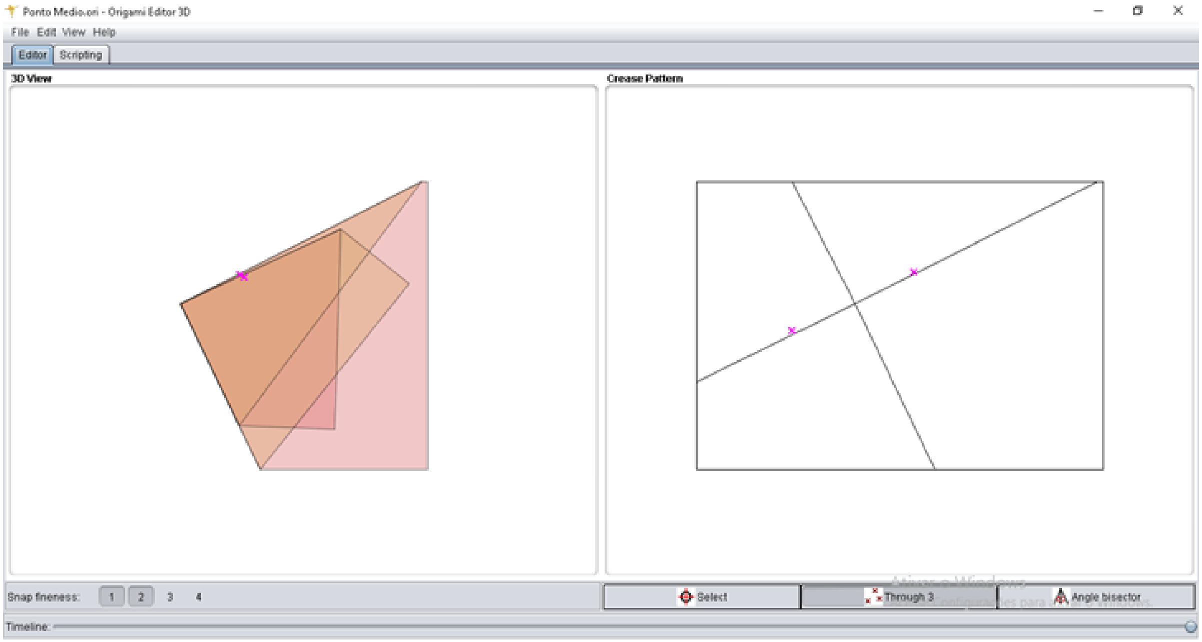


Figura 6.6: Construção do Ponto Médio no Editor 3D

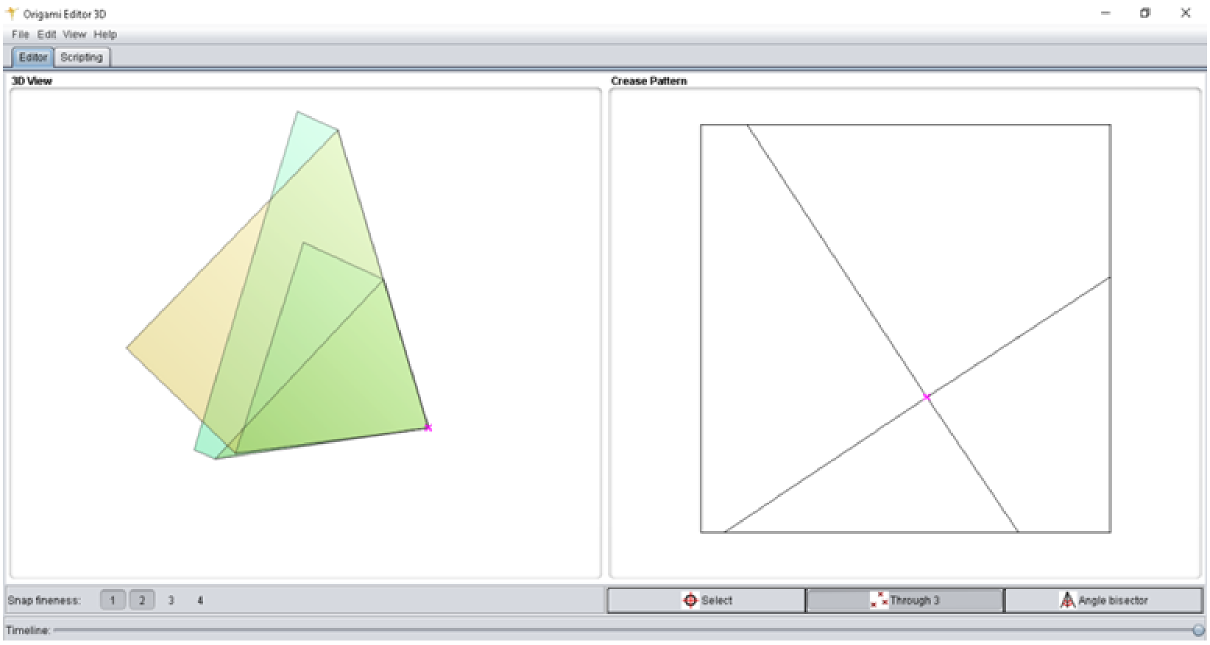


Figura 6.7: Construção das Retas Perpendiculares passando por P

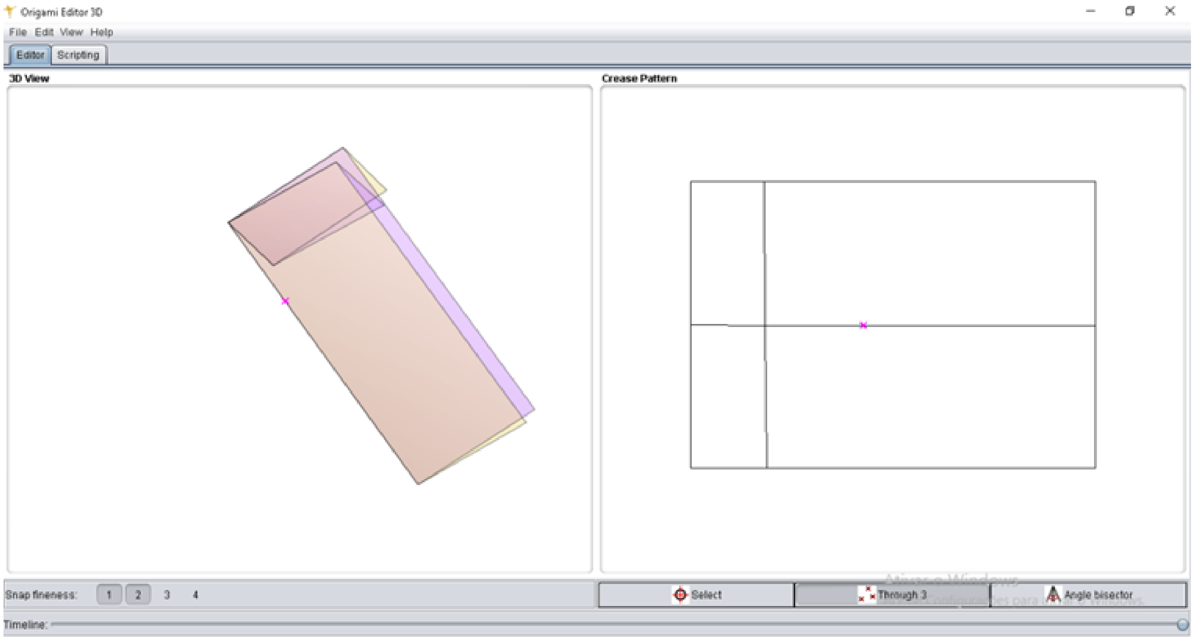


Figura 6.8: Construção das Retas Perpendiculares que não passa por P

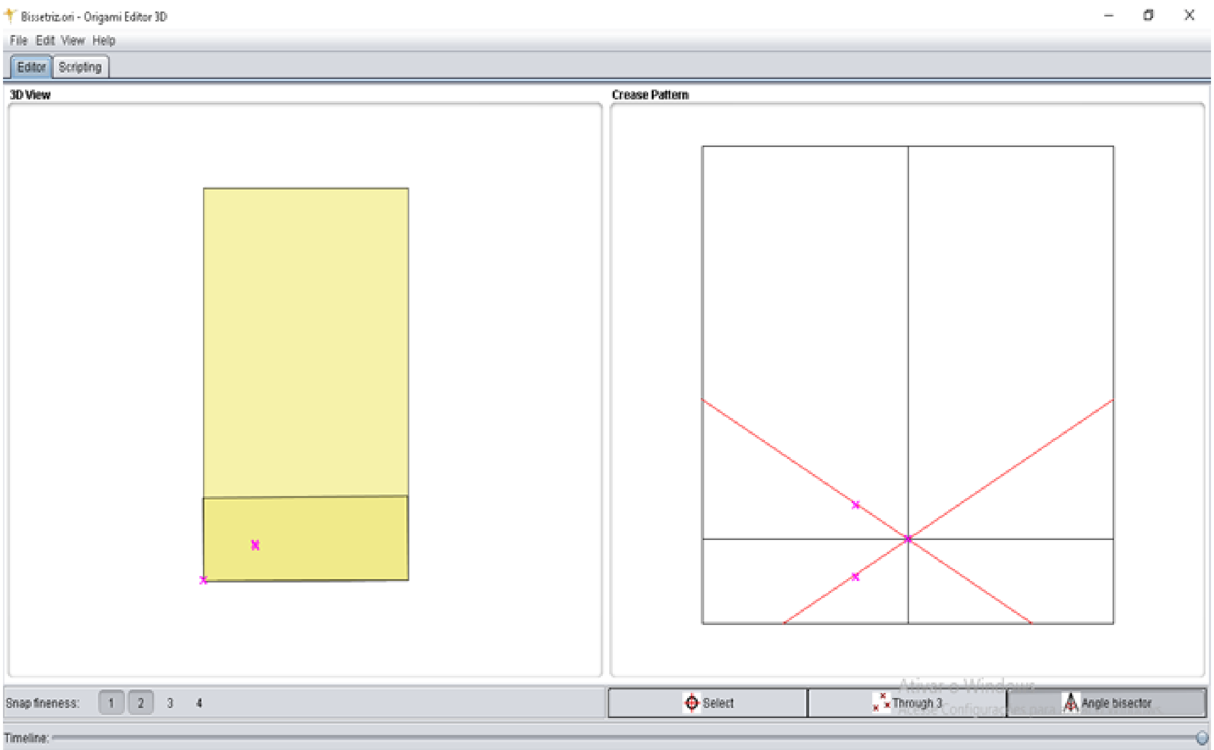


Figura 6.9: Construção da Bisserriz

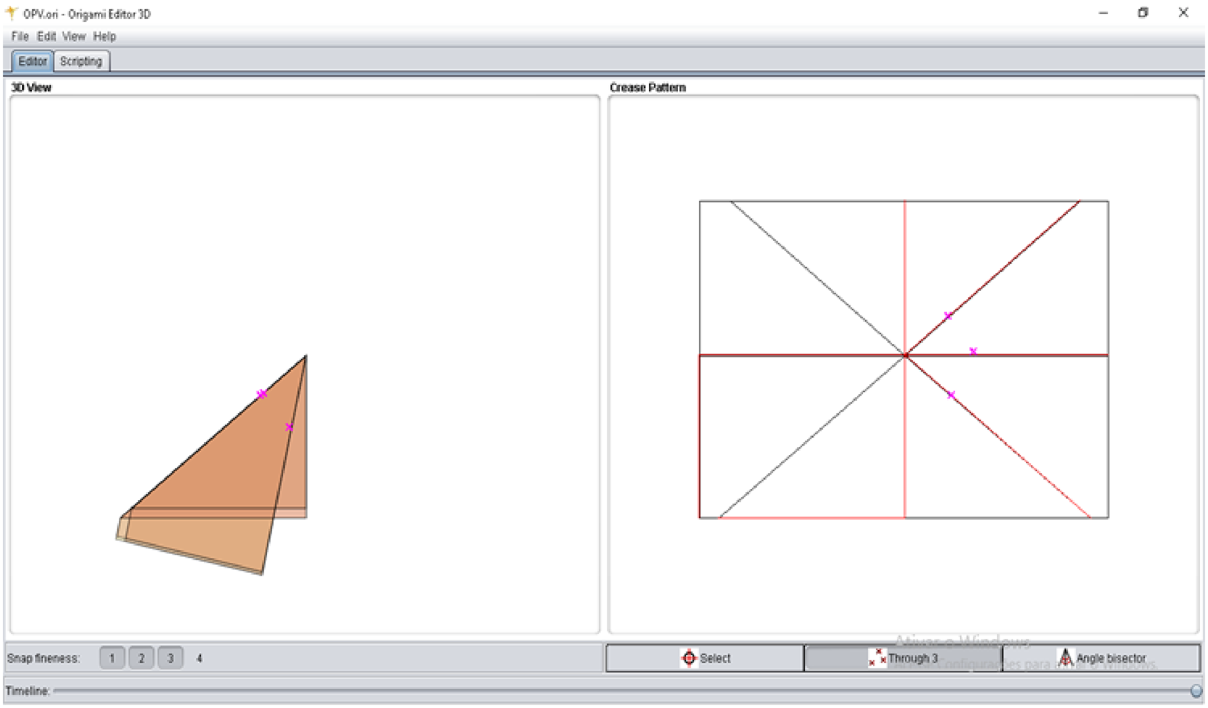


Figura 6.10: Construção dos Angulos Opostos pelo Vértice

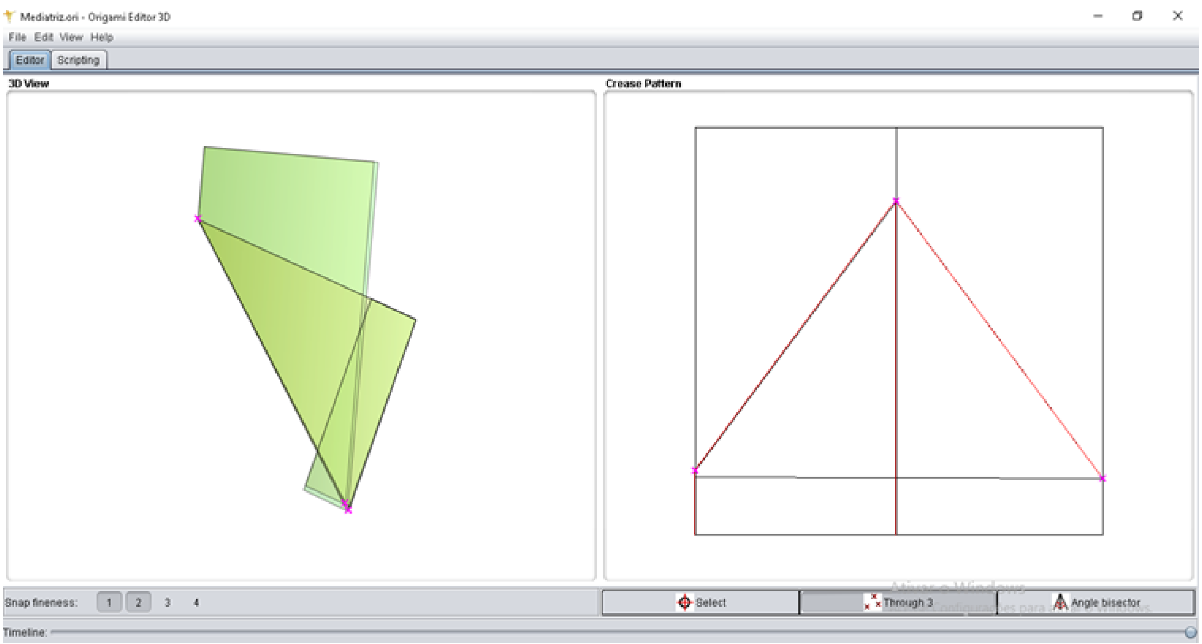


Figura 6.11: Construção da Mediatriz

7

Roteiros de aulas

Neste capítulo, veremos como o trabalho de pesquisa foi desenvolvido.

O trabalho de pesquisa foi desenvolvido em duas etapas de ensino: Fundamental e Médio. As atividades foram desenvolvidas através do aplicativo Google Meet, WhatsApp e Telegram devido ao momento em que nosso país vive a pandemia do COVID-19 que trouxe mudanças na forma de pensar o ensino.

No primeiro momento foram elaboradas atividades para serem trabalhadas com um grupo de 15 alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de Minas Gerais. As atividades foram aplicadas durante 12 horas divididas em 3 períodos de 4 horas-aula.

Num segundo momento foram elaboradas atividades para serem trabalhadas com um grupo de 5 alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública de Minas Gerais. Nessa etapa de ensino, o trabalho foi desenvolvido utilizando o origami modular. Onde são construídos módulos e a partir destes há um encaixe para formar os sólidos. As atividades foram aplicadas durante 8 horas divididas em 2 períodos de 4 horas-aula.

Alguns dos trabalhos desenvolvidos pelos alunos estão em anexo neste trabalho.

7.1 Roteiros de aulas para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental

Atividade I - Conceitos básicos de geometria

Material: Folha de papel colorset cortada em tamanho 5 cm x 8 cm
Objetivo: Trabalhar conceitos básicos de geometria.
Pré-requisitos: Noções de ponto, reta, plano, semirreta e ângulos.
Procedimentos:

1. **Distribuição do material:** O material foi entregue na casa do aluno devidamente recortado e em quantidade suficiente para o desenvolvimento do trabalho.Conforme dito anteriormente trabalho realizado durante pandemia do COVID-19.

2. **Orientação:** Foram marcadas reuniões pelo aplicativo Google Meet, WhatsApp e Telegram para a orientação das atividades a serem desenvolvidas pelos alunos.

3. **Realização das atividades**

   (a) Reta

   - Marque dois pontos A e B;
   - Dobre o papel de forma que esta dobra passe por A e B ao mesmo tempo;
   - Desdobre;
   - Verifique o resultado, observe que acaba de construir uma reta.

   (b) Ponto médio

   - Faça uma dobra e marque dois pontos A e B sobre ela;
   - Agora dobre de modo que A fique sobre B;
   - Desdobre e marque o ponto M;
   - Verifique o resultado, observe que essa dobra passando por entre os pontos A e B interceptando a reta fornece o ponto médio M, assim podemos concluir que a distância de A até M é a mesma que de M até B, então temos os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{BM}$ congruentes.

   (c) Retas perpendiculares por um ponto P pertencente a reta

   - Construa uma reta r;
   - Marque um ponto P sobre essa reta;
   - Faça uma dobra sobre a reta construída;
   - Agora sem desdobrar faça uma nova dobra passando pelo ponto P de forma que as duas semirretas com origem em P coincidam;
   - Desdobre, observe há duas retas, a reta r construída a princípio e a construída após a dobragem a qual chamaremos de s;
   - Verifique que os ângulos formados se sobrepôem, são congruentes, são retos e portanto as retas sõa perpendiculares.

   (d) Retas perpendiculares por um ponto P não pertencente a reta

   - Dobre o papel construindo a reta; r

- Marque um ponto P fora da reta r e deixe-o a mostra;
- Faça uma dobra passando por P em seguida sem desdobrar faça coincidir as duas semirretas com origem em P;
- Desdobre, agora observe há duas retas;
- verifique que assim como no caso anterior os ângulos formados pelas retas r e s se sobreôem , são congruentes e formam ângulos retos e portanto as retas são perpendiculares.

(e) Bissetriz

- Faça uma dobra na folha, desdobre marque um ponto A sobre a reta r;
- Faça outra dobra de modo que ela intercepte a reta r e sem passar pelo ponto A;
- Desdobre marque o ponto B nessa reta formada e o ponto I na intersecção entre as retas r e s;
- Agora dobre a reta r mantenha dobrada em seguida faça uma dobra sobrepondo os segmentos IA e IB;
- Desdobre e marque o ponto C nesta dobra;
- Verifique que o ângulo $A\widehat{I}C$ sobrepõe o ângulo $B\widehat{I}C$, logo são congruentes. Assim a semirreta IC divide o ângulo $A\widehat{I}C$ em dois congruentes, $\overline{IC}$ é a bissetriz de $A\widehat{I}B$

(f) Ângulos opostos pelo vértice

- Faça uma dobra na folha, desdobre esta será a reta r;
- Faça outra dobra passando por r desdobre essa será a reta s;
- Entre a intersecção das duas marque o ponto I
- Em seguida marque os pontos A e C sobre a reta r e os pontos B e D sobre a reta s de modo que o ponto I esteja entre eles;
- Dobre novamente r fazendo com que as semirretas IC e IB coincidam e outra dobra fazendo com que as semirretas IA e ID coincidam;
- Desdobre, verifique que através das últimas dobras, os ângulos $A\widehat{I}B$ e $C\widehat{I}D$ ficaram sobrepostos, logo são opostos pelo vértice.

(g) Mediatriz

- Marque os pontos A e B na folha, em seguida faça uma dobra passando por eles, sendo essa a reta r;

- Faça uma dobra fazendo com que o ponto A coincida com o ponto B;
- Desdobre, observe uma nova reta, sendo esta a reta s;
- Marque o ponto M na intersecção das duas retas r e s;
- Marque o ponto C sobre a reta s;
- Faça uma dobra que passe pelos pontos A e C e outra que passe pelos pontos B e C ao memso tempo;
- Observe que $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são congruentes, portanto a reta s é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ sendo a reta s mediatriz do segmento $\overline{AB}$;

Atividade II - Pontos notáveis de um triângulo e Soma dos ângulos internos de um triângulo

Material: Folha de papel colorset cortada em tamanho 5 cm x 8 cm
Objetivo: Trabalhar altura, medianas, bissetrizes, mediatrizes e soma dos ângulos internos de um triângulo.
Pré-requisitos: vértices, lados, ângulos, bissetriz e mediatriz.
Procedimentos:

1. **Distribuição do material:** O material foi entregue na casa do aluno devidamente recortado e em quantidade suficiente para o desenvolvimento do trabalho. Conforme dito anteriormente trabalho realizado durante pandemia do COVID-19.

2. **Orientação:** Foram marcadas reuniões pelo aplicativo Google Meet, WhatsApp e Telegram para a orientação das atividades a serem desenvolvidas pelos alunos.

3. **Realização das atividades**

   (a) Incentro

   - Marque três pontos A, B e C não colineares;
   - Faça dobras unindo os pontos A e C, B e C e A e B;
   - Faça a bissetriz dos ângulos A, B e C;
   - Desdobre e marque o ponto S na intersecção das bissetrizes;
   - Verifique que as três bissetrizes se enterceptam em um único ponto, sendo este chamado de Incentro.

   (b) Circuncentro

- Construa um triângulo ABC;
- Faça dobras de tal forma que os pontos A e C, B e C e A e B coincidam dois a dois;
- Desdobre e marqu o ponto M na intersecção das mediatrizes;
- Verifique que as três mediatrizes se interceptam em um único ponto, sendo este chamado de Circuncentro.

(c) Ortocentro

- Construa um triângulo ABC;
- Faça uma dobra passando por C e perpendicular a reta suporte $\overline{AB}$;
- Repita o procedimento para os vértices A e B;
- Desdobree marque o ponto O no encontro das dobras;
- Verifique que as alturas se interceptam em um único ponto, sendo este chamado Ortocentro.

(d) Soma dos ângulos internos de um triêngulo

- Construa um triângulo ABC usando dobraduras;
- Recorte o triângulo, observe o triângulo formado, se ele tiver um ângulo obtuso nomeie o vértice de A;
- Construa a altura do triângulo em relação ao vértice A e marque a altura por H;
- Faça uma dobra unindo o ponto A ao ponto H;
- Repita o procedimento para o ponto B e C;
- Verifique que unindo os pontos A, B e C ao ponto H é formado um ângulo raso, logo a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180^{\underline{o}}$.

(e) Baricentro

- Construa um triângulo ABC usando dobraduras;
- Marque os pontos médios dos lados $\overline{AC}$,$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ usando dobraduras;
- J, K e L são os pontos médios dos lados $\overline{AC}$,$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$;
- Faça uma dobra que passa por A e , outra por B e K e por último por C e L;

- Desdobre e marque o ponto P na intersecção das dobras;
- Verifique que P é o encontro das medianas portanto o Baricentro do triângulo ABC.

Atividade III - Construção do Pentágono e Hexágono

Material: Folha de papel colorset cortada em tamanho 9 cm x 9 cm
Objetivo: Trabalhar a construção de polígonos regulares através de dobraduras.
Pré-requisitos: Ponto médio, segmento e bissetriz.
Procedimentos:

1. **Distribuição do material:** O material foi entregue na casa do aluno devidamente recortado e em quantidade suficiente para o desenvolvimento do trabalho. Conforme dito anteriormente trabalho realizado durante pandemia do COVID-19.

2. **Orientação:** Foram marcadas reuniões pelo aplicativo Google Meet, WhatsApp e Telegram para a orientação das atividades a serem desenvolvidas pelos alunos.

3. **Realização das atividades**

   (a) Pentágono

   - Marque os pontos A, B, C e D vértices do quadrado de papel;
   - Dobre o quadrado ao meio determinando o ponto médio dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, desdobre e marque os pontos médios E e F;
   - Faça uma dobra a partir do ponto C passando pelos pontos D e F, marque o ponto H na intersecção da bissetriz do ângulo $A\widehat{D}F$ com o segmento $\overline{AB}$;
   - Leve o vértice B até o ponto H fazendo uma dobra e marque o ponto I na intersecção da dobra com o lado DC;
   - Leve o lado BC sobre o lado AD e marque o ponto J na intersecção de I com o lado DC;
   - Faça uma dobra levando I até o lado AD, passando por J. Marque o ponto K na intersecção de I com $\overline{AD}$;
   - Leve o lado AD ao lado BC e marque o ponto L na intersecção de K com BC;
   - Dobre o segmento $\overline{AD}$ sobre $\overline{BC}$, marque os pontos médios P e Q em seguida faça uma dobra levando J até o segmento $\overline{PQ}$ passando por K e marque o ponto M na intersecção;
   - Faça as dobraduras determinando os segmentos $\overline{KM}$, $\overline{ML}$ $\overline{KJ}$ $\overline{LI}$;

- Verifique que foi formado um pentágono regular.

(b) Hexágono

- Marque os pontos A, B, C e D vértices do quadrado de papel;
- Faça a mediatriz do segmento $\overline{CD}$, para construir a mediatriz siga os procedimentos já estudados anteriormente;
- Faça uma dobra levando o ponto D a mediatriz passando por C e repita o procedimento levando o ponto C até a mediatriz passando por D, marque o ponto E na intersecção dos vértices C e D com a mediatriz, assim concluimos que o triângulo formado é equilátero, uma vez que os lados $CE = CD = DE$ são congruentes;
- Agora faça uma dobra levando $\overline{AD}$ sobre $\overline{BC}$;
- Desdobre;
- Faça uma dobra passando por C e levando o ponto D até o ponto E, repita o procedimento levando o ponto C até o ponto E passando por D desdobre e marque o ponto M na intersecção dessas duas dobraduras.
- Dobre os vértices C, D e E até o ponto M;
- Marque os pontos $FGHIJK$ na intersecção dessas dobras com os lados do triângulo CDE.
- Verifique que os segmentos $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$ e $\overline{KF}$ formam um hexágono, para melhor verificar o resultado basta ligar os pontos FG, GH, HI, IJ, JK e KF.

7.2 Roteiros de aulas para alunos da $3^{\underline{o}}$ ano do Ensino Médio

Atividade I - Construção de um tetraedro

Material: Folha de papel colorset cortada em tamanho 15 cm x 15 cm
Objetivo: Introduzir o conteúdo de geometria espacial.
Pré-requisitos: Noções de geometria plana.
Procedimentos:

1. **Distribuição do material:** O material foi entregue na casa do aluno devidamente recortado e em quantidade suficiente para o desenvolvimento do trabalho. Conforme dito anteriormente trabalho realizado durante pandemia do COVID-19. Em outros

momentos aconselho que a atividade seria realizada em uma sala de aula e/ou laborátorio de ensino da matemática.

2. **Orientação:** Foram marcadas reuniões pelo aplicativo Google Meet, WhatsApp e Telegram para a orientação das atividades a serem desenvolvidas pelos alunos.

3. **Realização das atividades**

   (a) Passo 1: Construção do módulo triangular

   - Marque os pontos A, B, C e D vértices do quadrado de papel;
   - Dobre fazendo com que o lado AD coincida com o lado BC, desdobre e marque na dobra o ponto médio E sobre o lado AB e o ponto médio F sobre o lado CD;
   - Dobre o vértice D sobre o segmento $\overline{EF}$ passando pelo vértice C e marque o ponto de intersecção G sobre EF, mantenha a dobra;
   - Agora dobre o vértice C até o ponto G fazendo com que os vértices C e D coincidam;
   - Faça uma dobra passando pelo ponto G a partir do vértice B e em seguida faça uma dobra passando pelo ponto G passando pelo vértice A.

   (b) Passo 2: Montagem do tetraedro

   - Tome os dois módulos construidos seguindo no passo 1 e desdobre;
   - Em um dos módulos você irá levar o vértice C até o ponto G;
   - Em seguida leve o vértice A ao meio refazendo o vinco marcado pela dobra que passa pelo ponto G
   - Agora pegue o segundo módulo leve o ponto B refazendo o vinco marcado pela dobra que passa pelo ponto G;
   - Leve o vértice D ao ponto G;
   - Junte os dois módulos encaixando de forma alternada as partes dos triângulos

   Observação: Se desejar construir um octaedro basta construir 4 modulos triangulares e fazer o encaixe.

Atividade II - Construção de um hexaedro

Material: Folha de papel colorset cortada em tamanho 15 cm x 15 cm
Objetivo: Introduzir o conteúdo de geometria espacial.
Pré-requisitos: Noções de geometria plana.
Procedimentos:

1. **Distribuição do material:** O material foi entregue na casa do aluno devidamente recortado e em quantidade suficiente para o desenvolvimento das atividades. Conforme dito anteriormente trabalho realizado durante pandemia do COVID-19. Em outros momentos aconselho que a atividade seria realizada em uma sala de aula e/ou laborátorio de ensino da Matemática.

2. **Orientação:** Foram marcadas reuniões pelo aplicativo Google Meet, WhatsApp e Telegram para a orientação das atividades a serem desenvolvidas pelos alunos.

3. **Realização das atividades**

   (a) Passo 1: Construção do módulo quadrangular

   - Marque os vértices do quadrado $ABCD$;
   - Marque o ponto médio E e F dos segmentos AB e CD, respectivamente;
   - Desdobre e marque o ponto médio dos segmentos AE e EF e repita o procedimento para os segmentos DF e FC;
   - Faça uma dobra levando o vértice A até o ponto E e o vértice B até o ponto E;
   - Dobre ao meio você terá um quadrado, em seguida faça uma dobra marcando a diagonal do quadrado, desdobre e faça mais uma dobra marcando a outra diagonal;
   - Agora desdobre em cada um dos quatro vértices haverá um pequeno triângulo, leve novamente os vértices A e B ao ponto E e esconda os vértices para dentro da dobra;
   - Verifique que nos vincos formados teremos dois pequenos quadrados faça uma dobra levando uma diagonal para cima e no outro quadrado leve a diagonal para baixo;
   - Construa seis módulos iguais a este.

   (b) Passo 2 : Montagem do Hexaedro

   - Tome os seis módulos construídos e encaixe o triângulo de umas das pontas sobre a base do outro módulo que no caso é um quadrado;
   - Repita esse procedimento com todos os módulos no final verifique que o hexaedro está formado.

8

Considerações Finais

No ensino da Geometria existem muitos estudos já realizados sobre a utilização de materiais manipuláveis em sala de aula, através de sua utilização é possível verificar as propriedades geométricas, desenvolver o raciocínio lógico geométrico e, associá-lo ao cotidiano. Dessa forma, os alunos percebem que o que é ensinado não é algo tão distante da sua realidade e sim, algo que pode ser tocado, que é palpável.

Analisando os elementos incorporados ao ensino da Matemática, não podemos deixar de levar em consideração os avanços e pensar no que é melhor para se obter um desempenho satisfatório do educando. O uso de materiais concretos como subsídio para tarefas de ensino permite que os educadores utilizem uma variedade de experiências, pensando nisso propomos esse trabalho partindo da apresentação de noções básicas de geometria plana e em seguida partindo para uma experiência com a geometria espacial.

Como já é de conhecimento de todos, nenhuma disciplina caminha sozinha, ela requer contribuições de outras áreas do conhecimento. Portanto a autora deste trabalho utilizou-se da arte do origami para ensinar geometria e apropriou-se dos recursos tecnológicos para atingir os objetivos de aprendizagem esperados.

O que almejamos aqui é despertar no aluno de graduação o interesse pelo ensino da Geometria, para que o mesmo não fique em segundo plano após a sua formação de maneira a trazer novas formas de ensino atraentes ao estudante. Da mesma forma é o que desejamos em relação aos professores que já atuam no ensino fundamental e médio.

Assim trouxemos para o leitor roteiros de aulas, bem como a apresentação do software Origami Editor 3D como forma de apoio ao ensino da arte do origami, com objetivo de ensinar Geometria. Porém esta é apenas uma, dentre inúmeras possibilidades que poderão ser utilizadas para alcançar o objetivo maior que é tornar a Geometria um assunto de interesse do educando.

A

Anexos

Atividades elaboradas pelos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental

A.1 Atividade I - Conceitos básicos de geometria

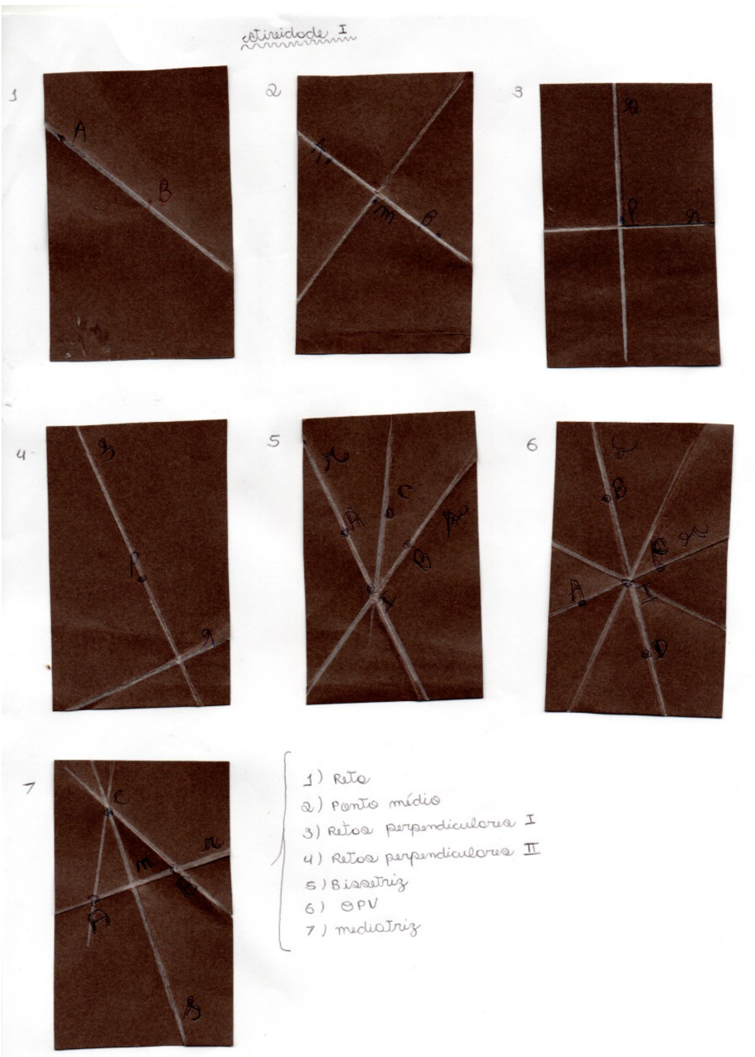


Figura A.1: Aluno 1

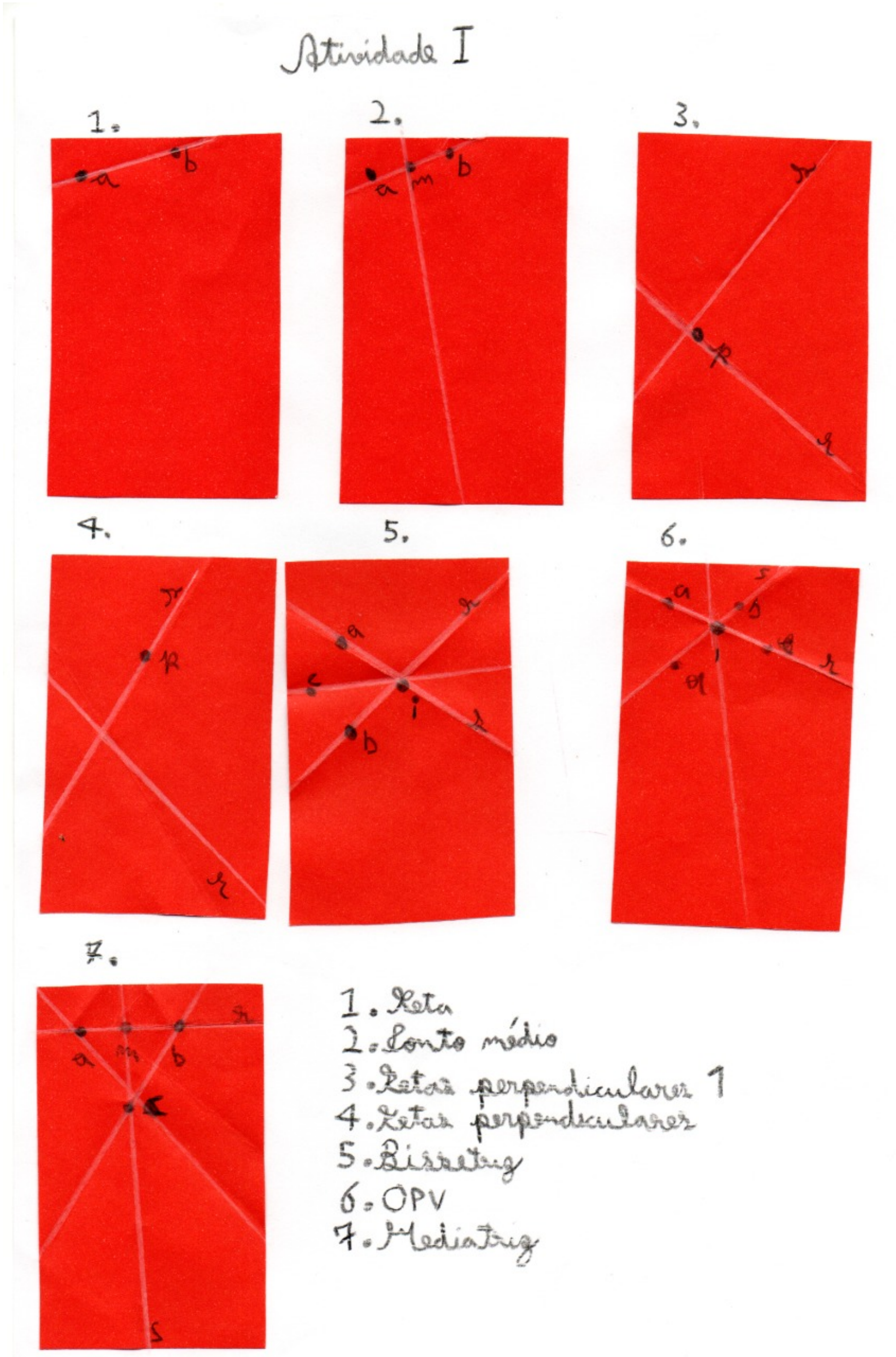


Figura A.2: Aluno 2

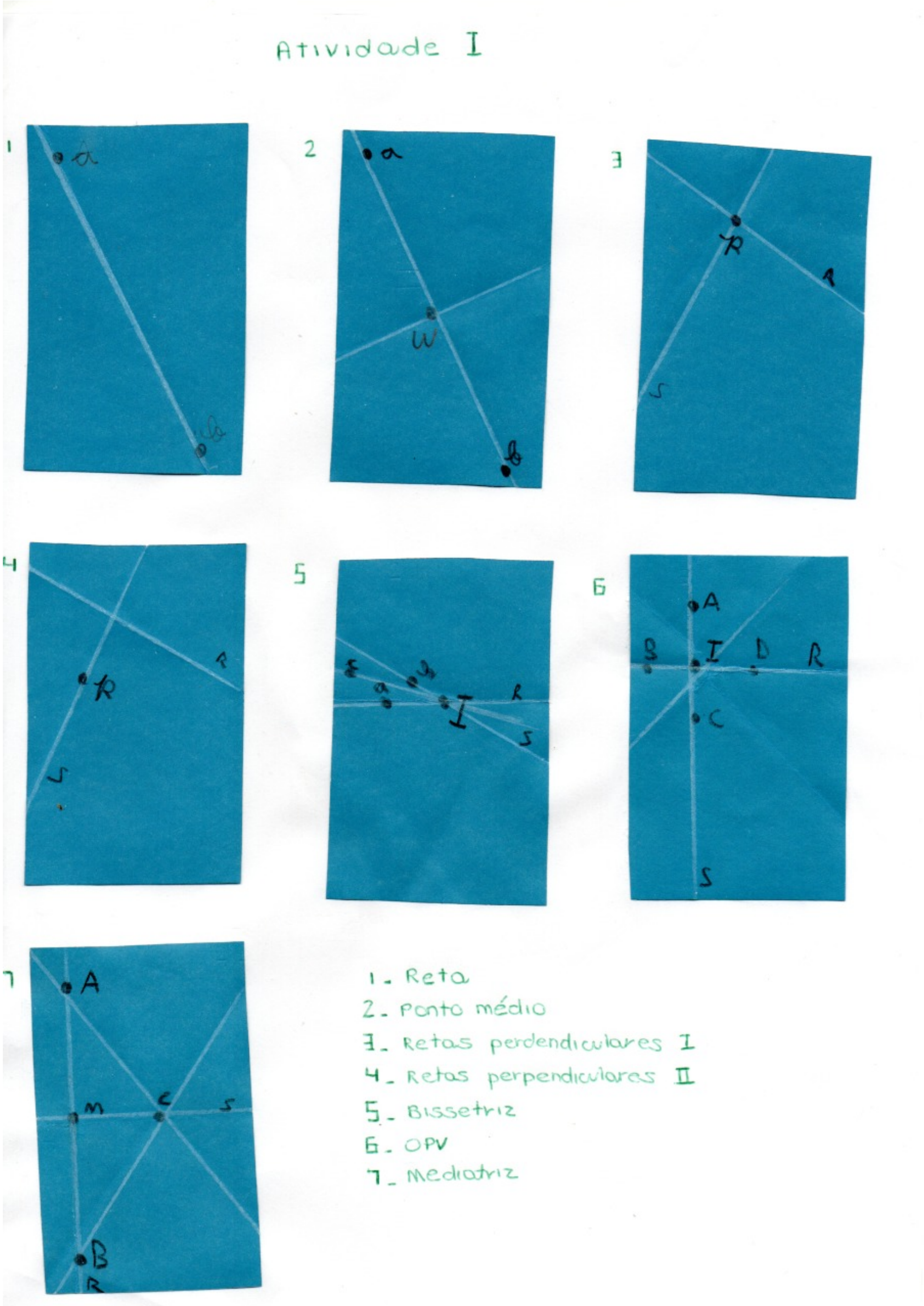


Figura A.3: Aluno 3

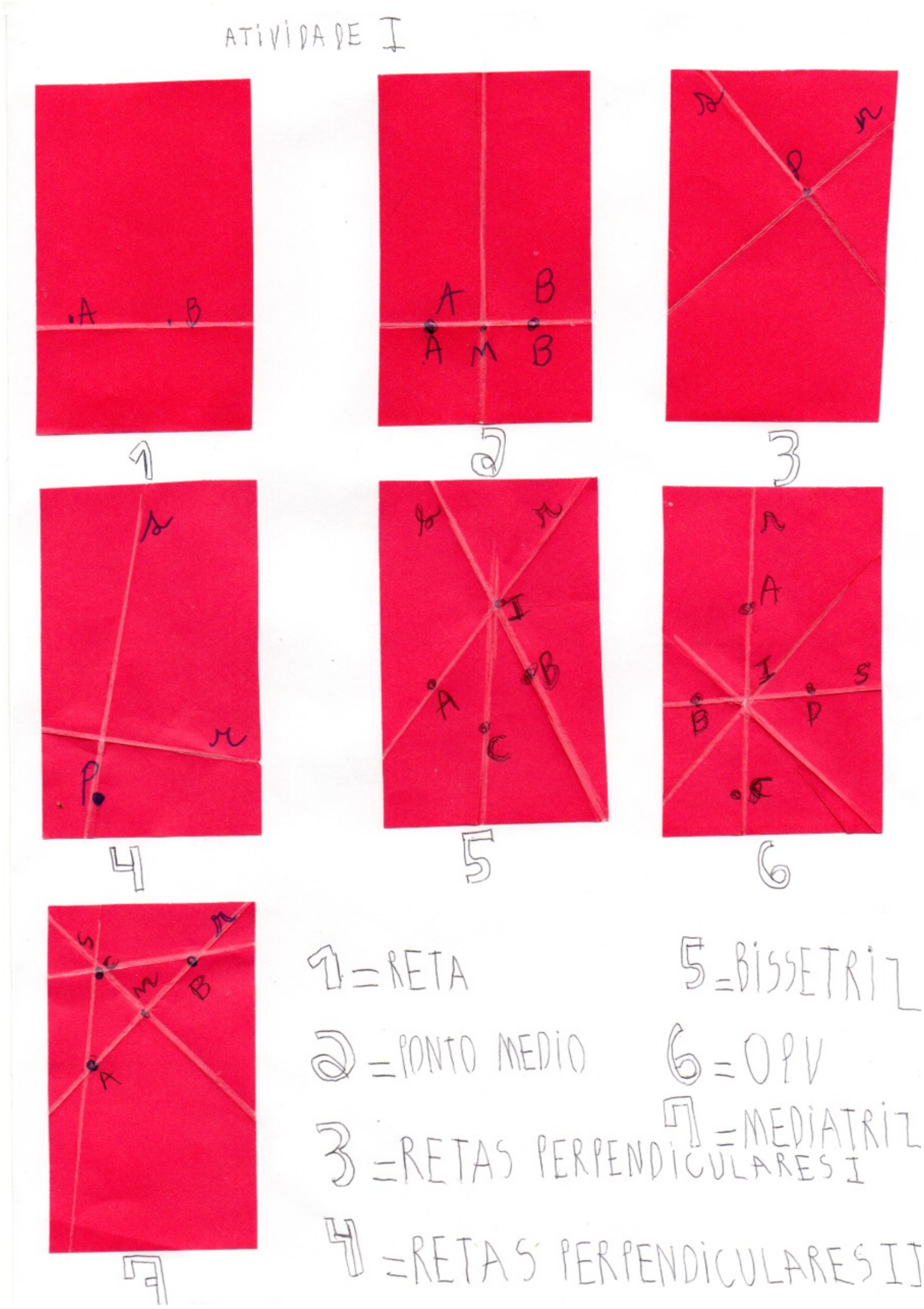


Figura A.4: Aluno 4

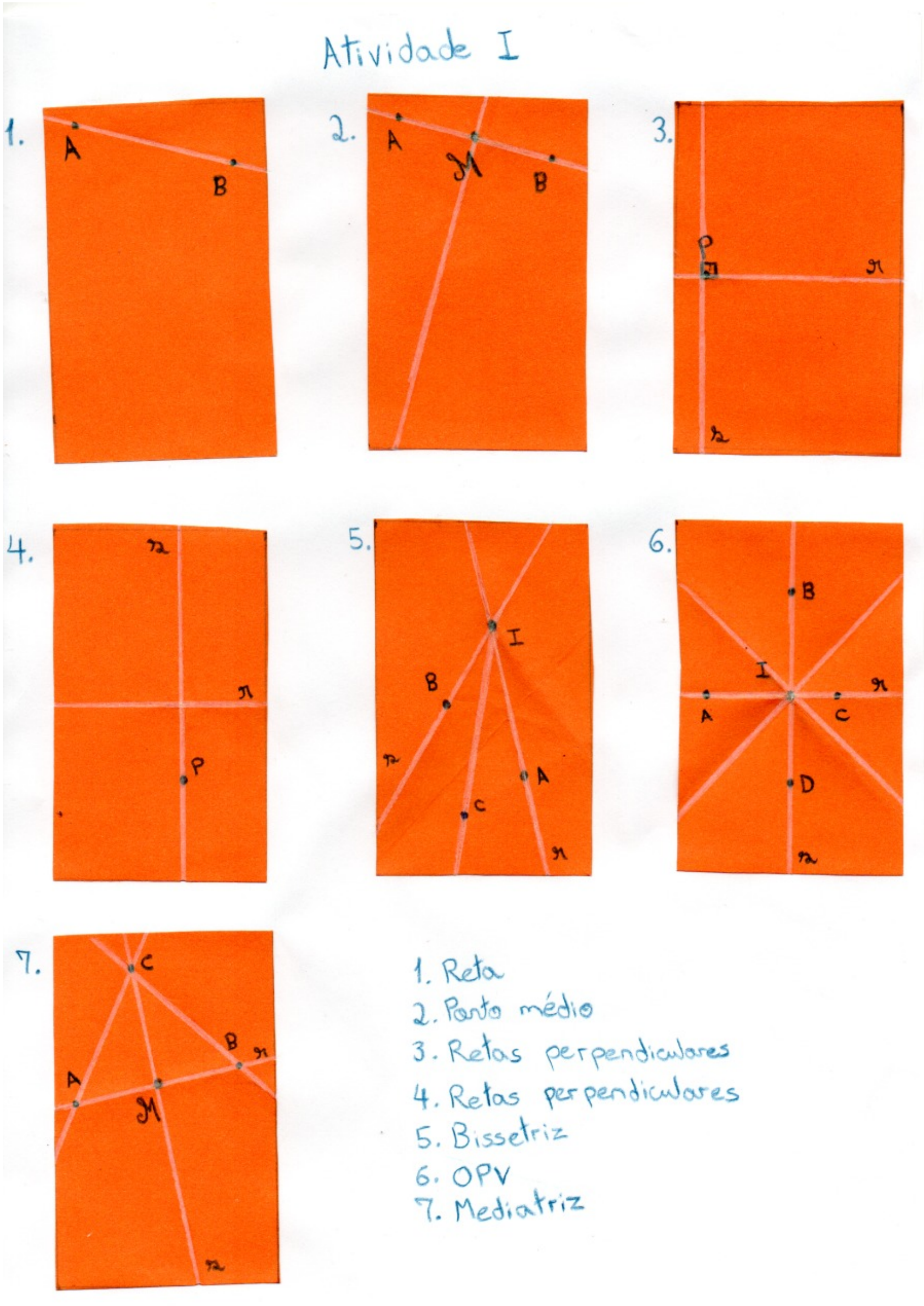


Figura A.5: Aluno 5

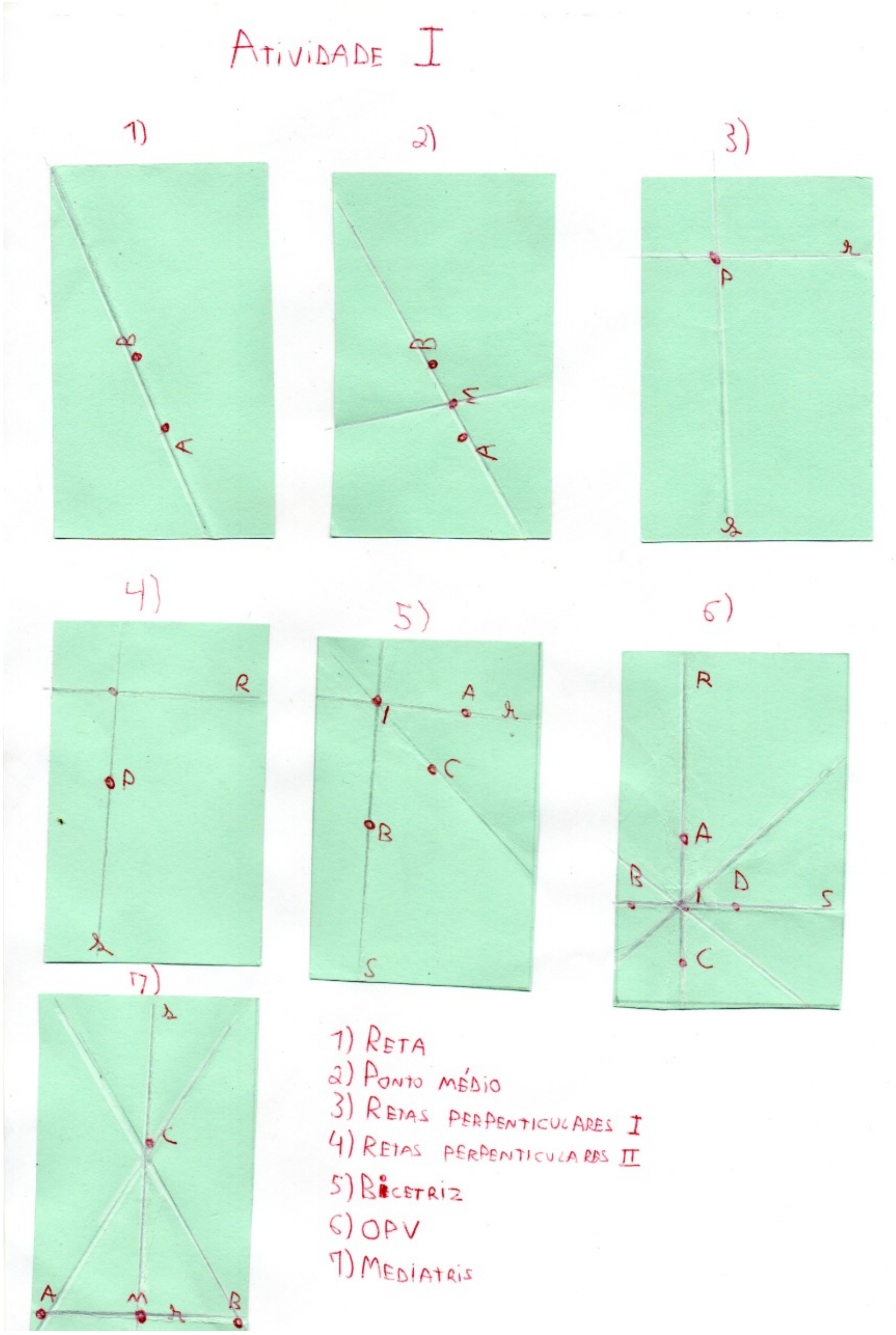


Figura A.6: Aluno 6

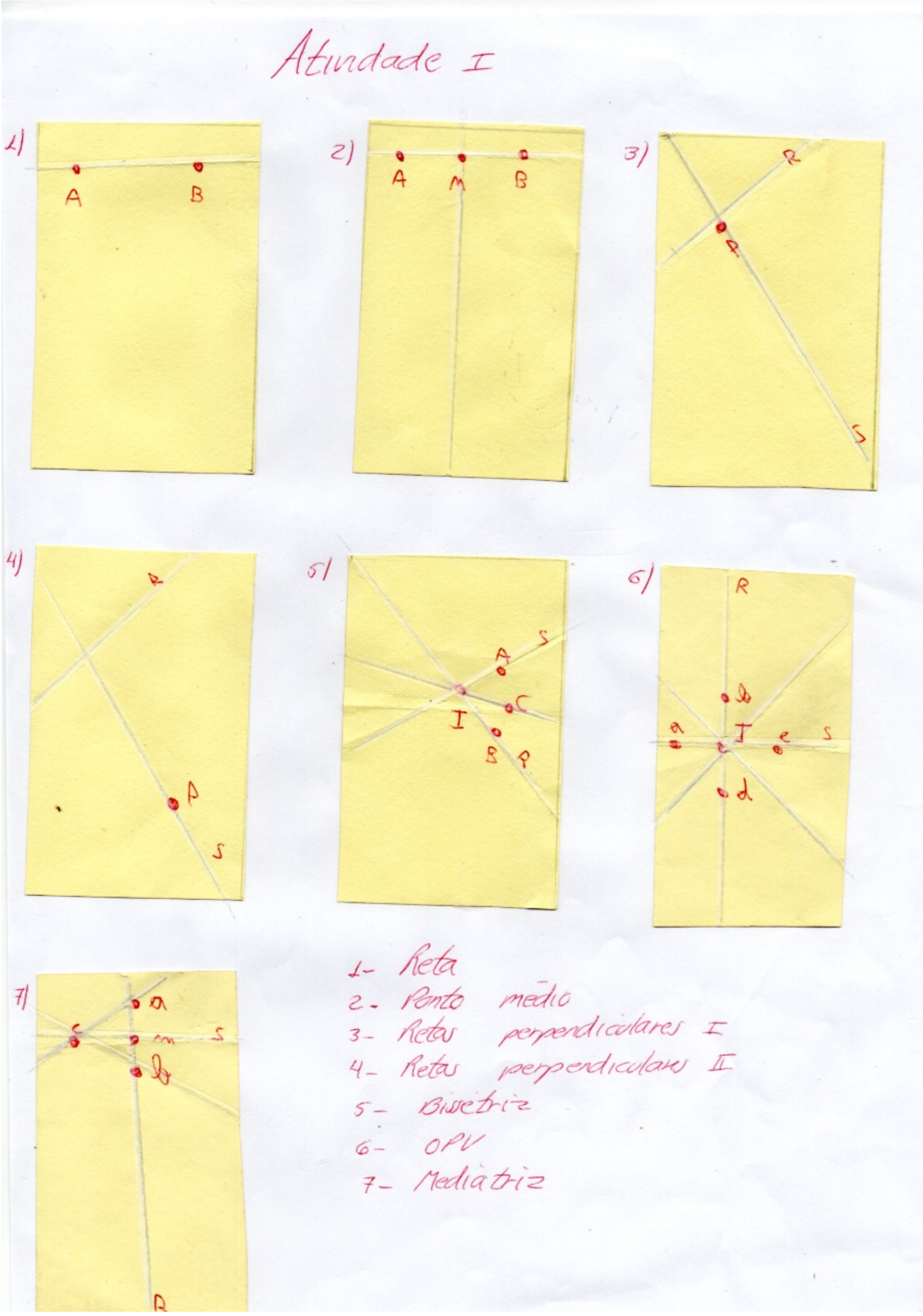


Figura A.7: Aluno 7

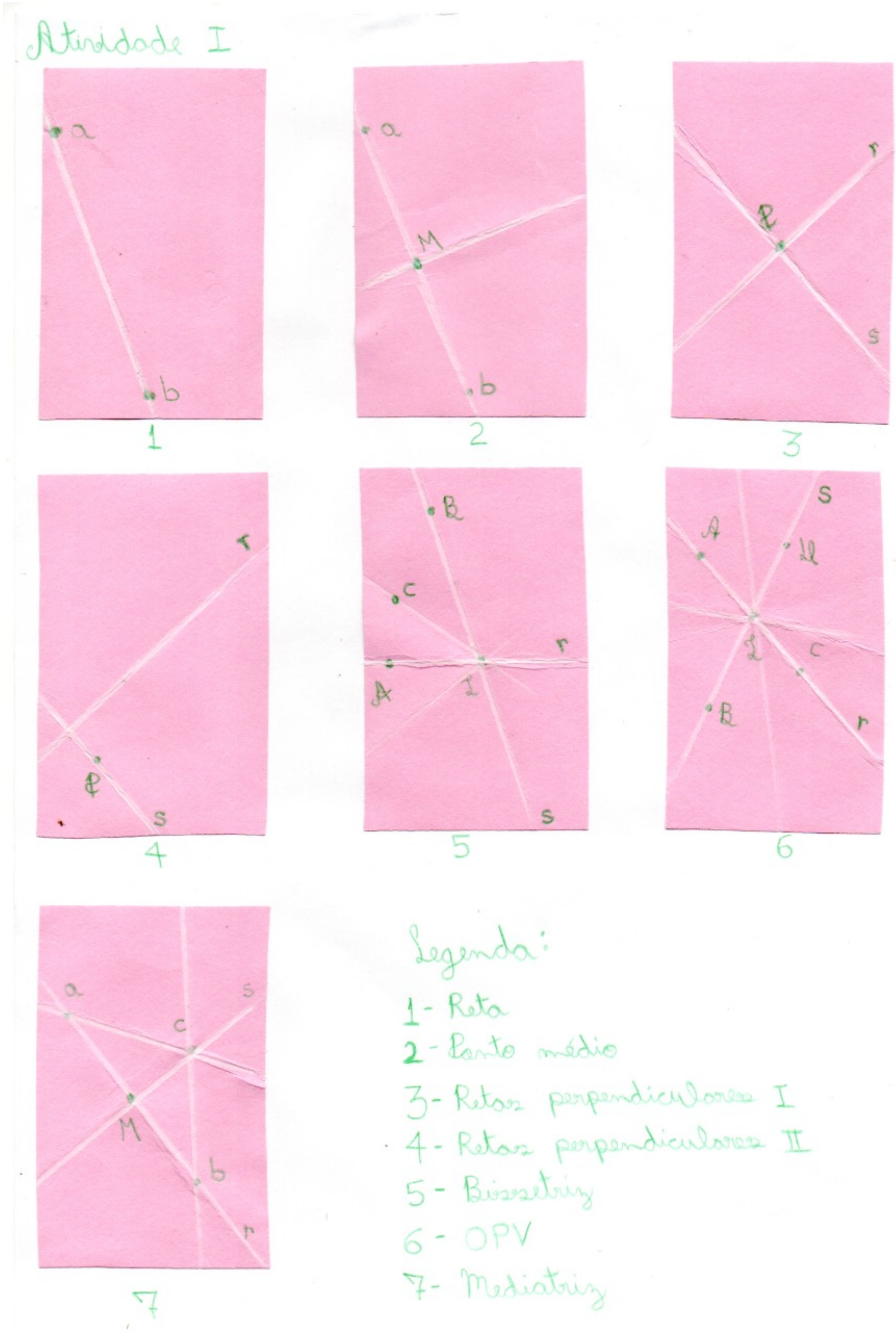


Figura A.8: Aluno 8

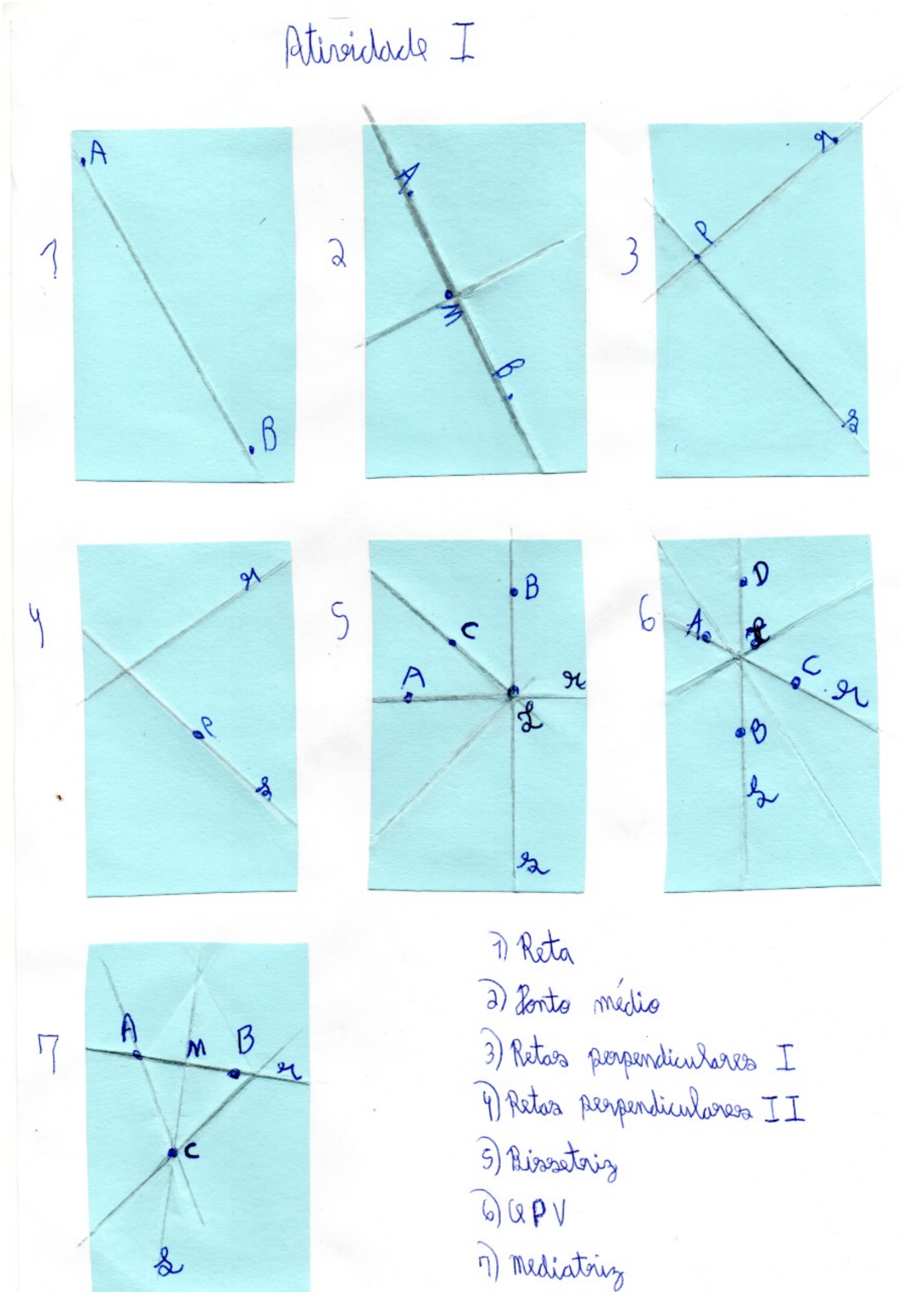


Figura A.9: Aluno 9

A.2 Atividade II - Pontos notáveis de um triângulo

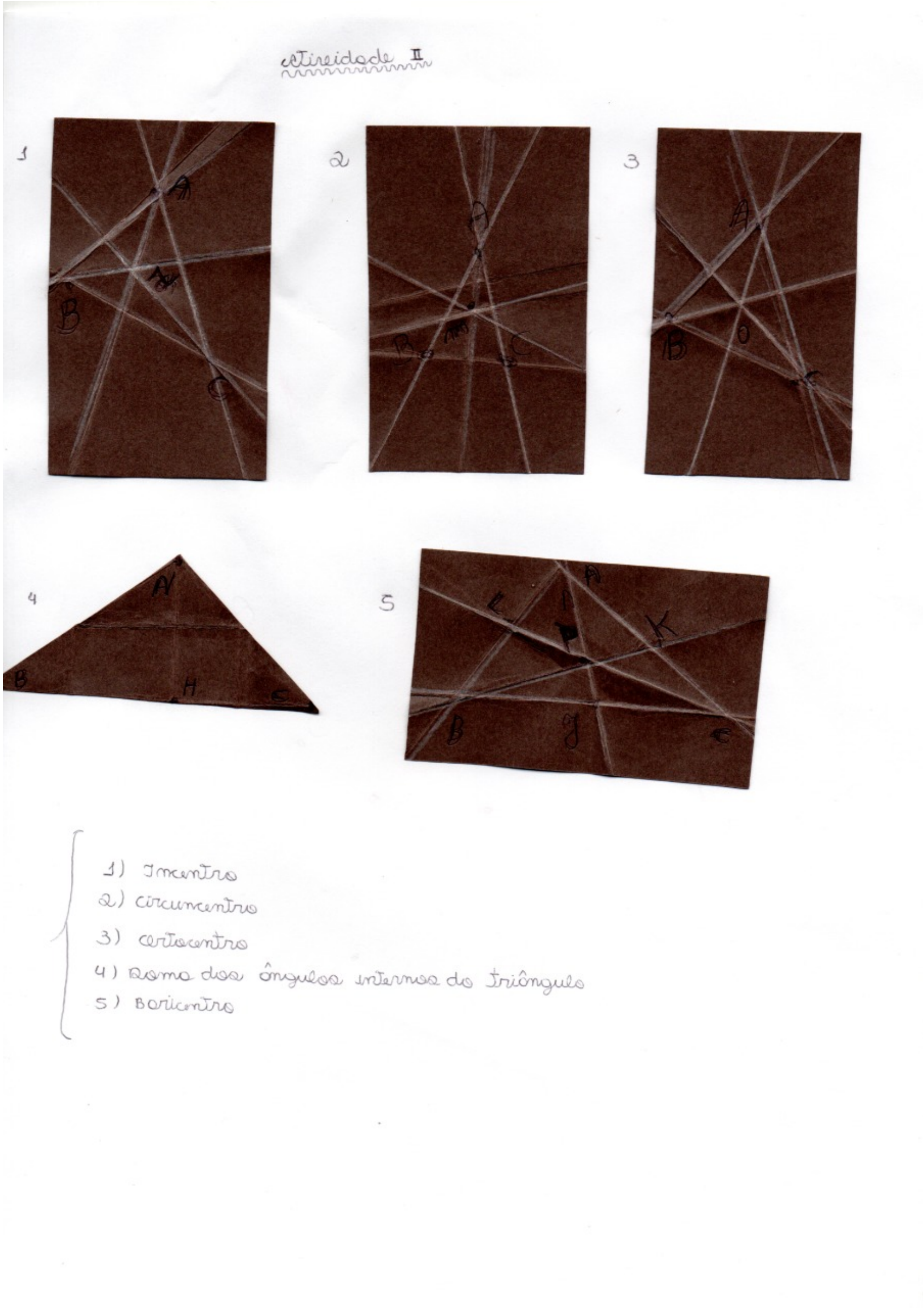


Figura A.10: Aluno 1

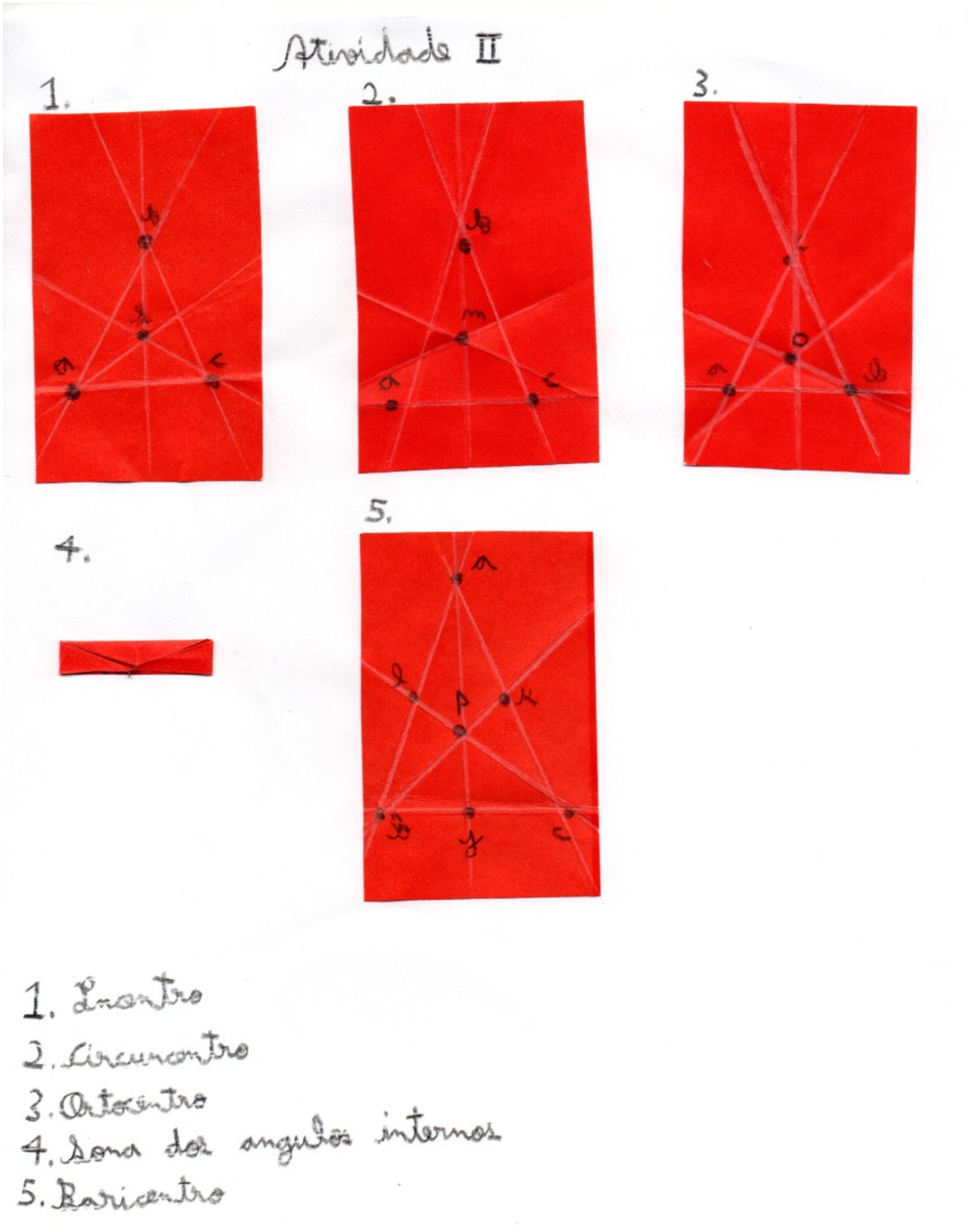


Figura A.11: Aluno 2

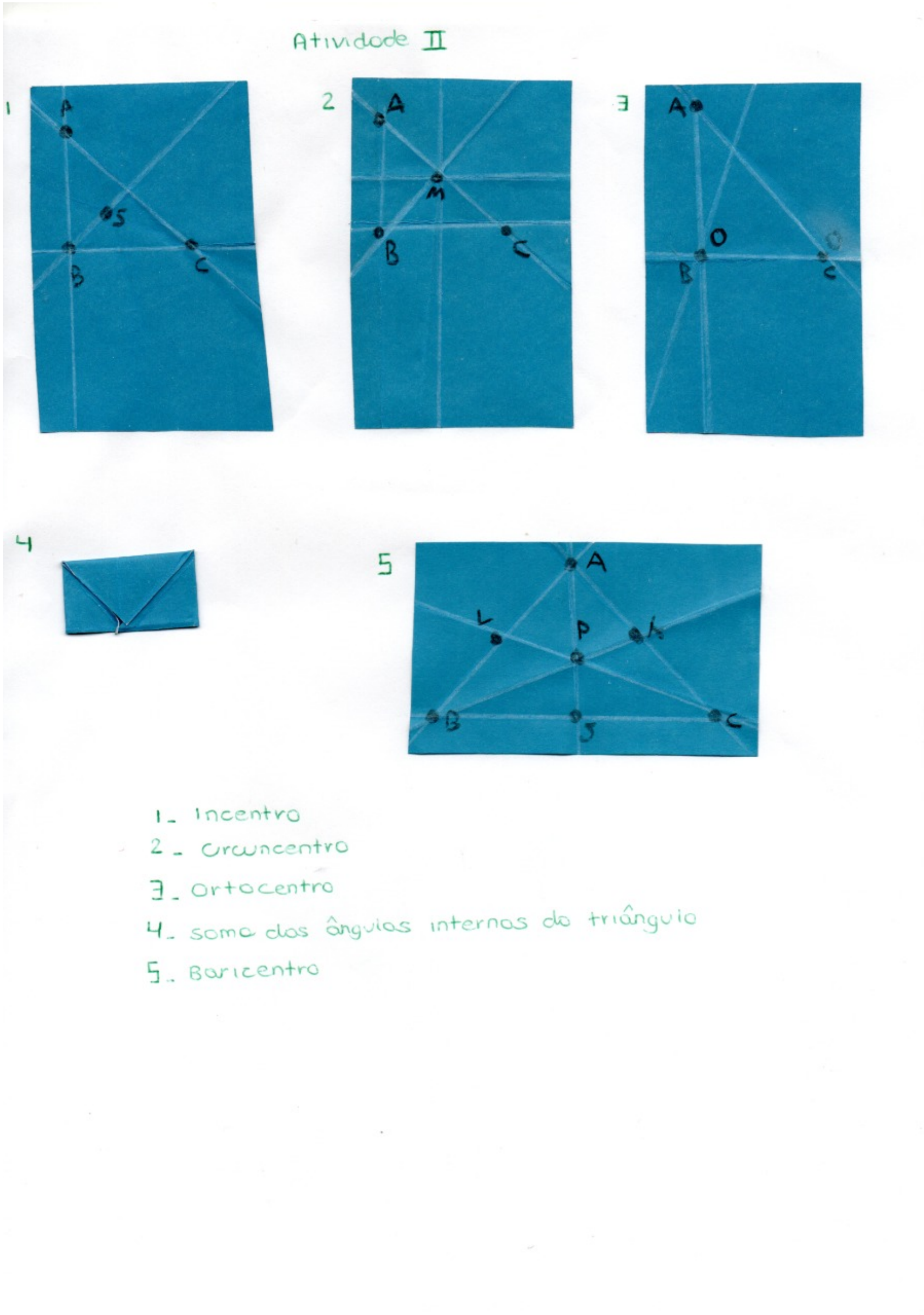


Figura A.12: Aluno 3

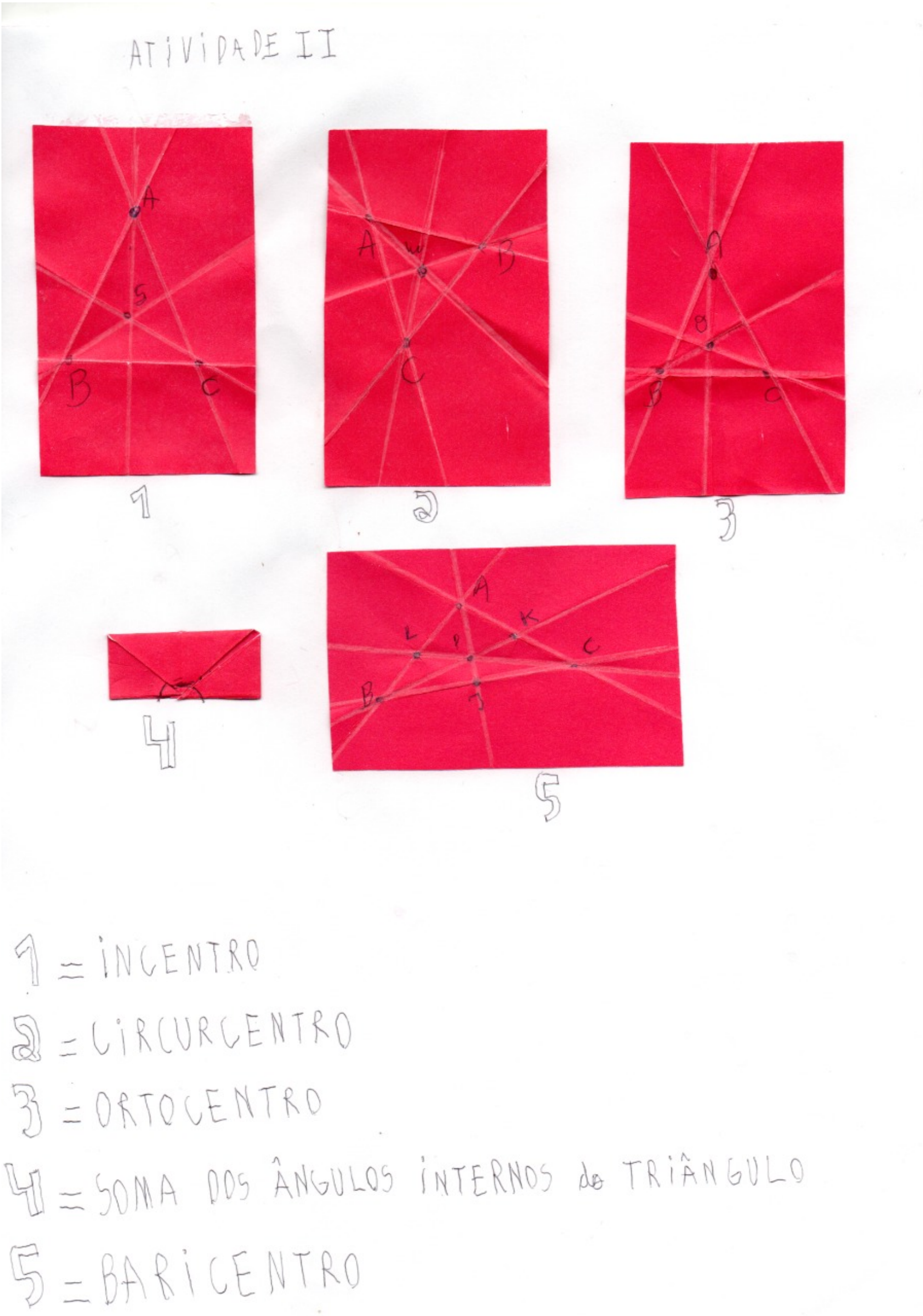


Figura A.13: Aluno 4

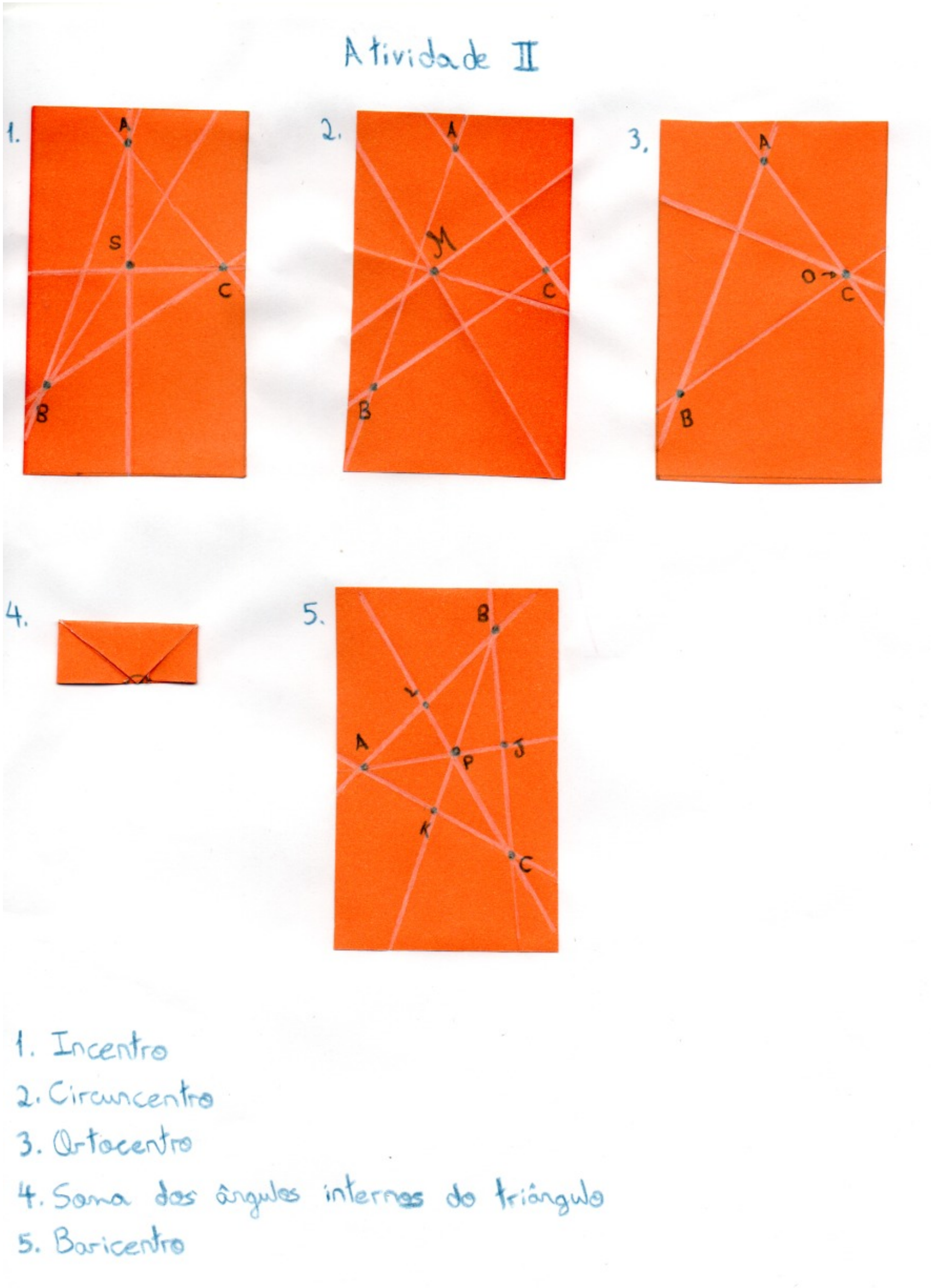


Figura A.14: Aluno 5

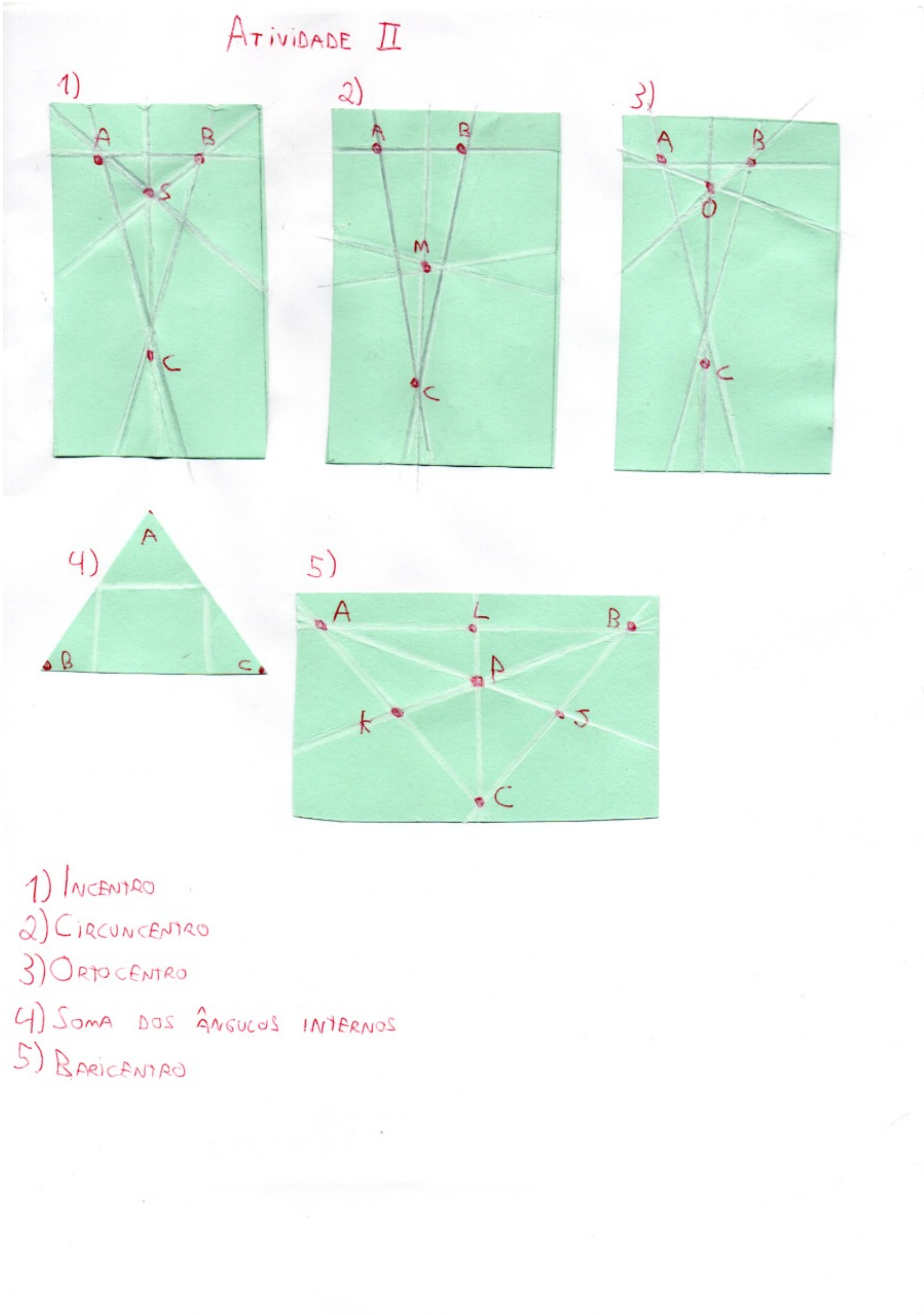


Figura A.15: Aluno 6

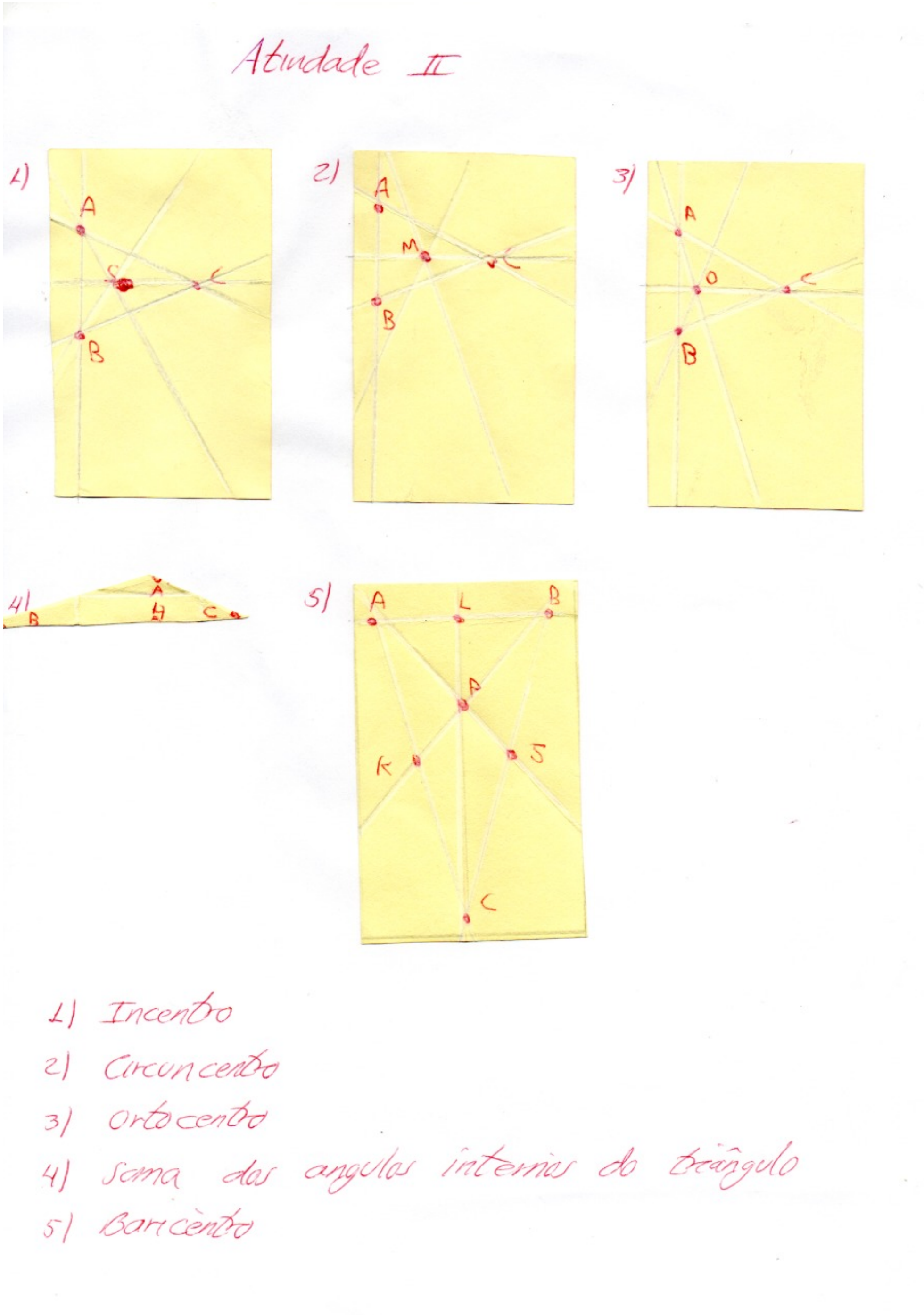


Figura A.16: Aluno 7

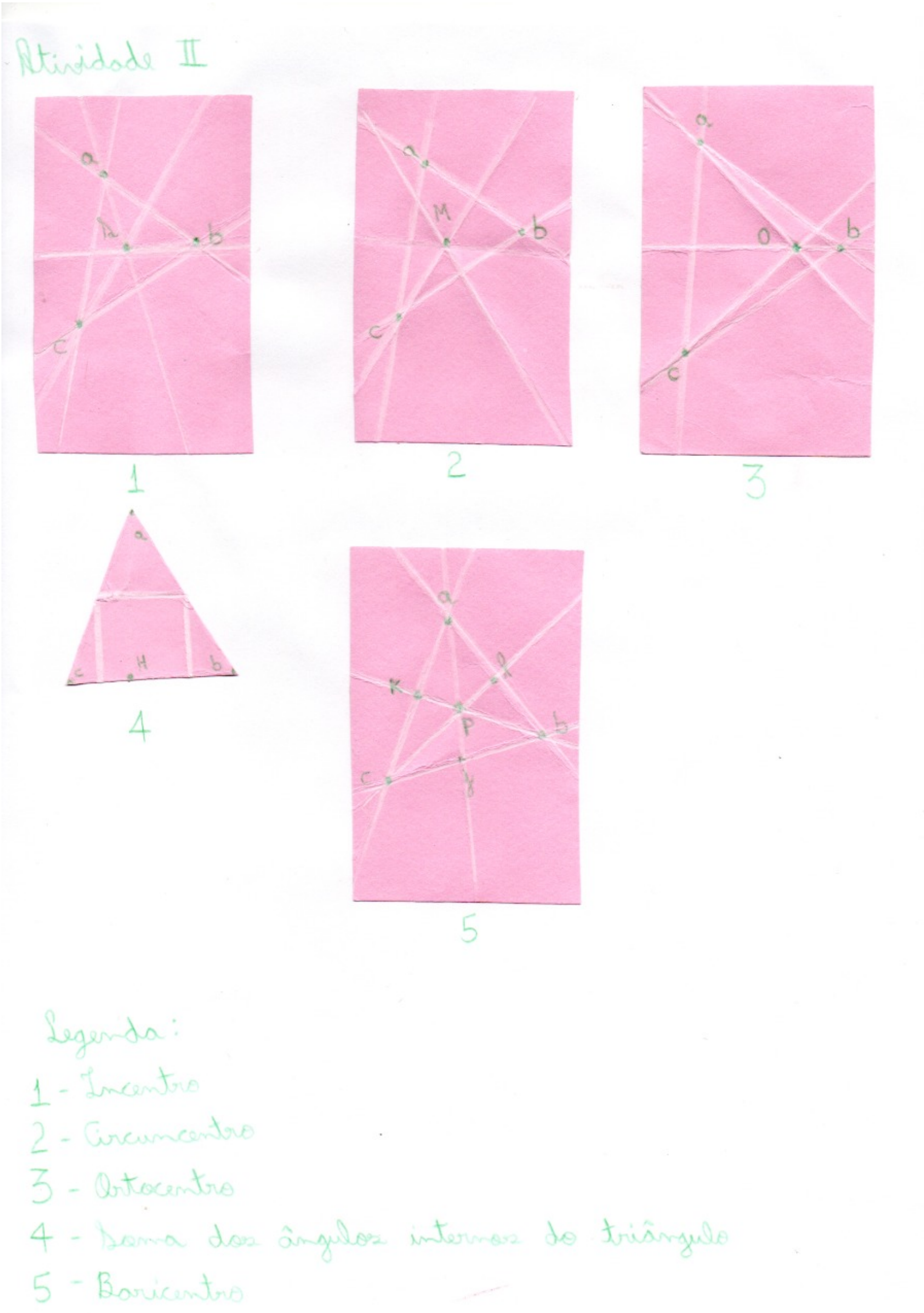


Figura A.17: Aluno 8

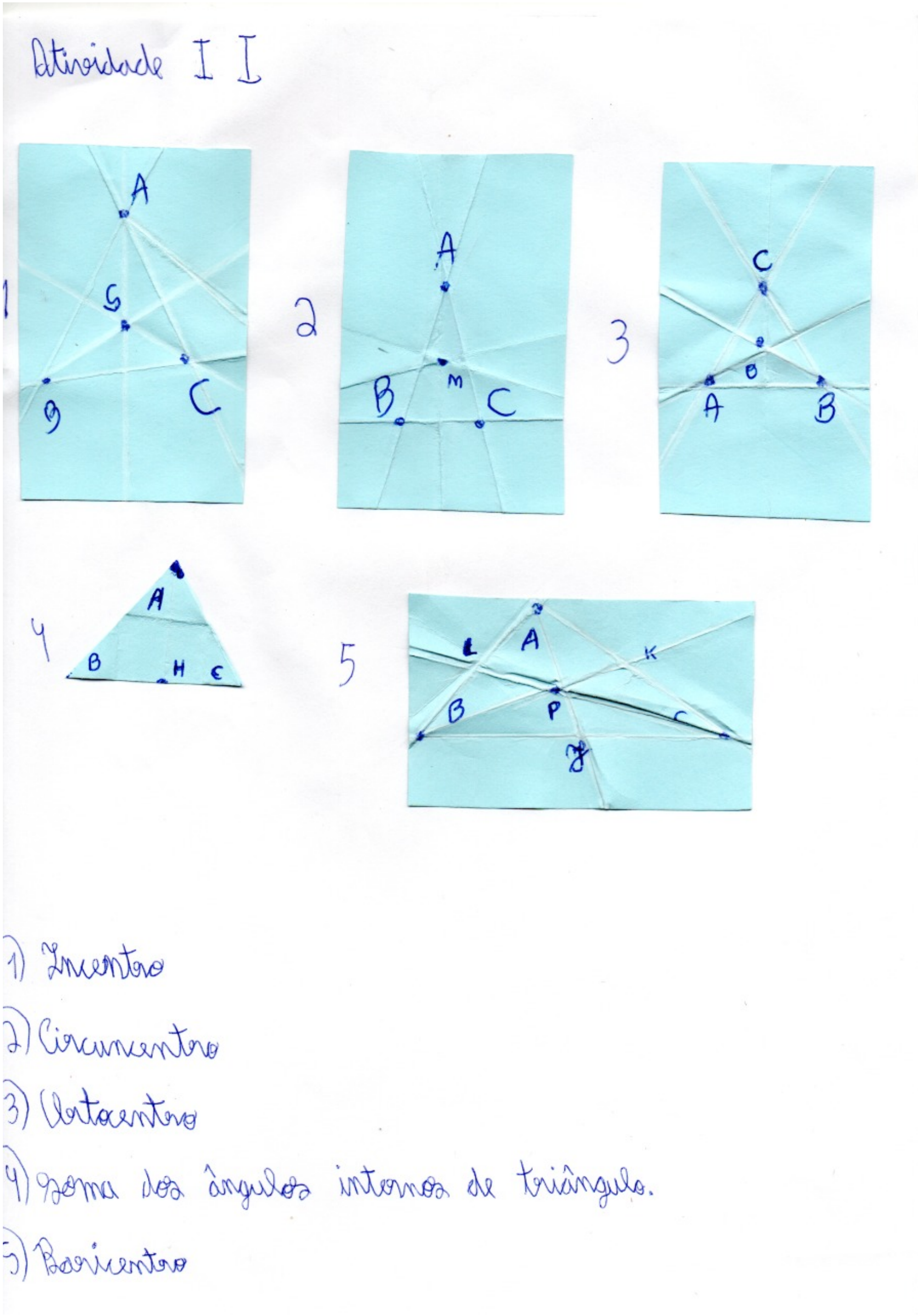
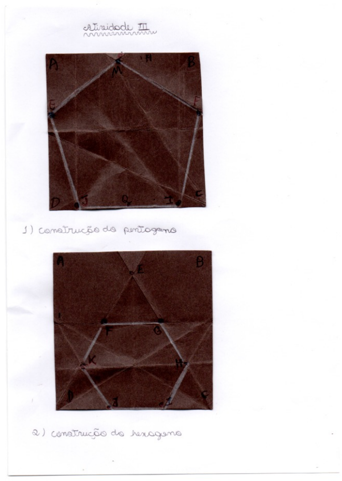
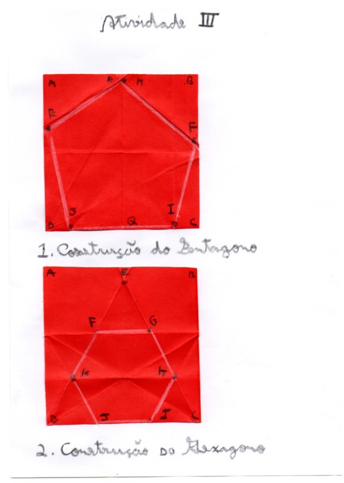


Figura A.18: Aluno 9

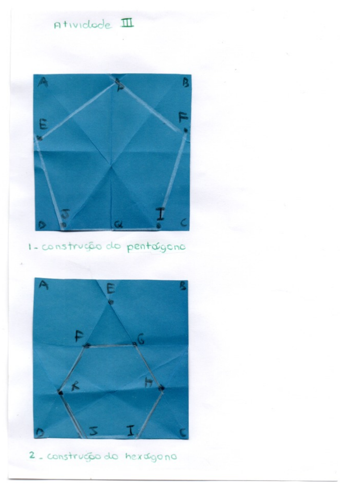
A.3 Atividade III - Construção do Pentágono e hexágono



(a) Construções aluno 1

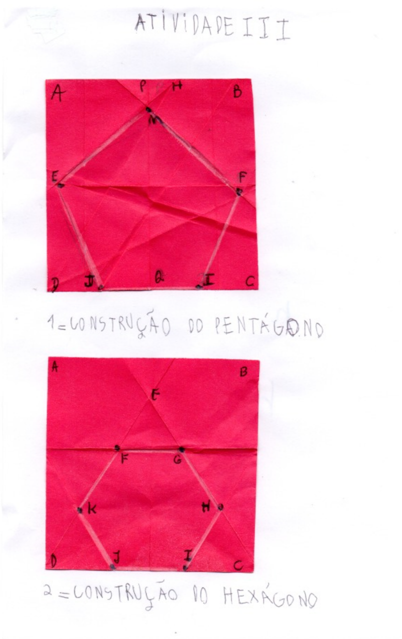


(b) Construções aluno 2

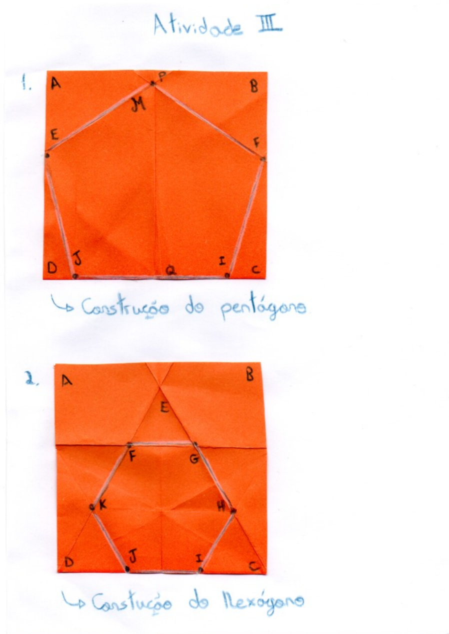


(c) Construções aluno 3

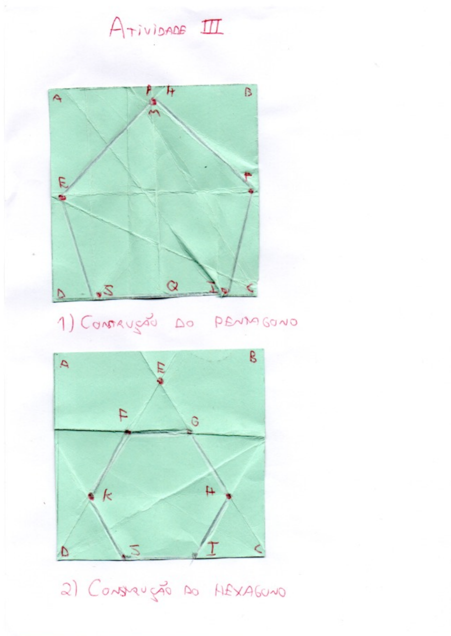
Figura A.19: Construções elaboradas pelos alunos 1, 2 e 3



(a) Construções aluno 4

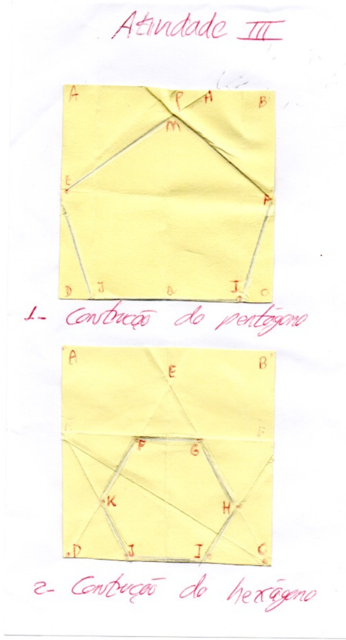


(b) Construções aluno 5

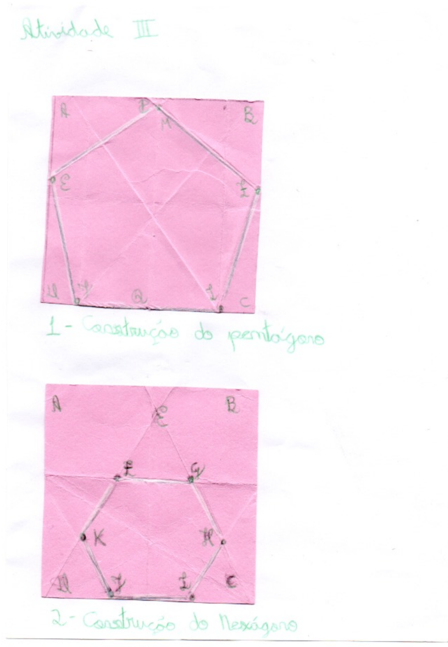


(c) Construções aluno 6

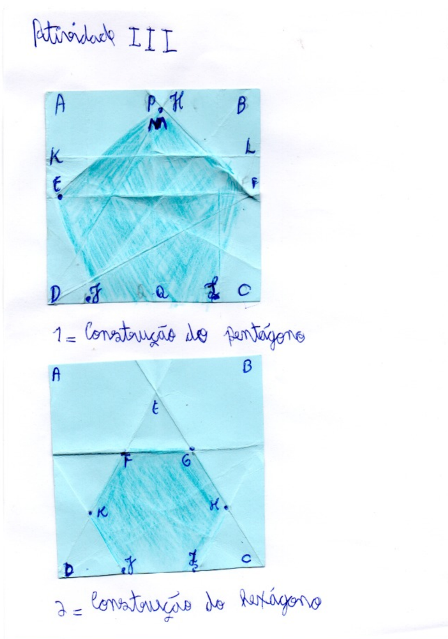
Figura A.20: Construções elaboradas pelos alunos 4, 5 e 6



(a) Construções aluno 7



(b) Construções aluno 8



(c) Construções aluno 9

Figura A.21: Construções elaboradas pelos alunos 7, 8 e 9

B

Anexos

Atividades elaboradas pelos alunos do $3^{\underline{o}}$ ano do ensino médio

B.1 Atividade I - Construção do Tetraedro

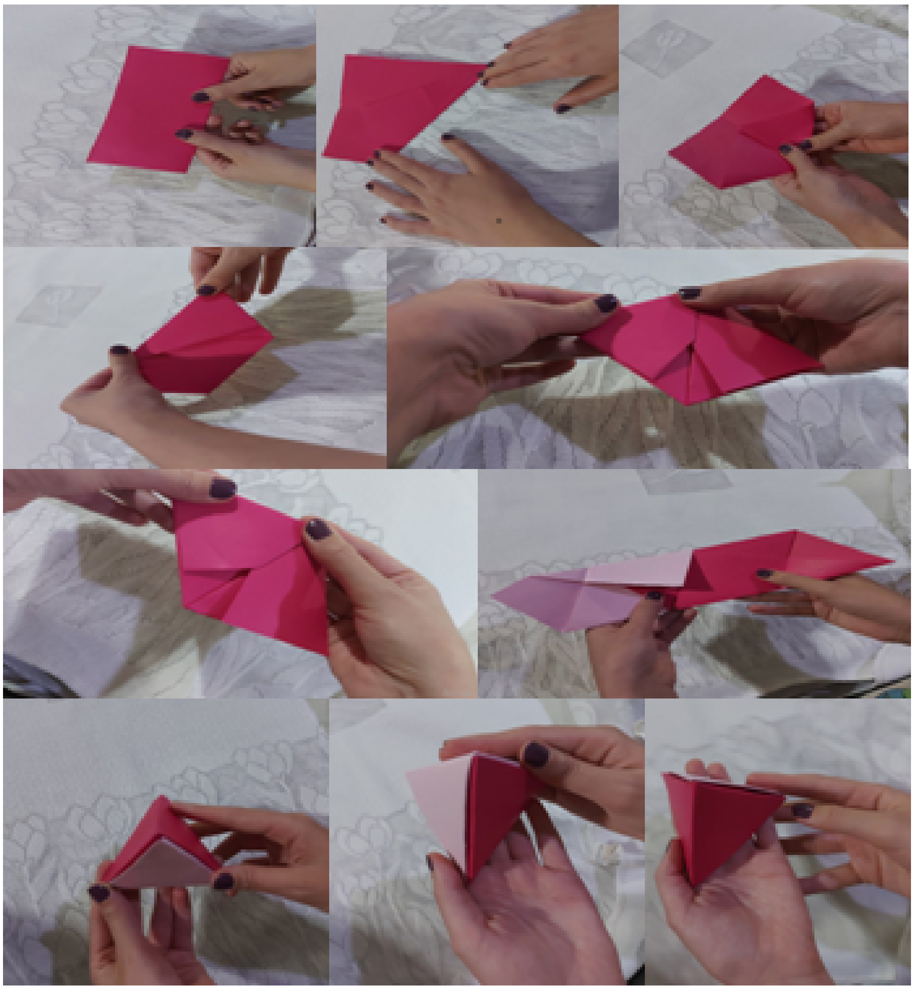


Figura B.1: Aluno A

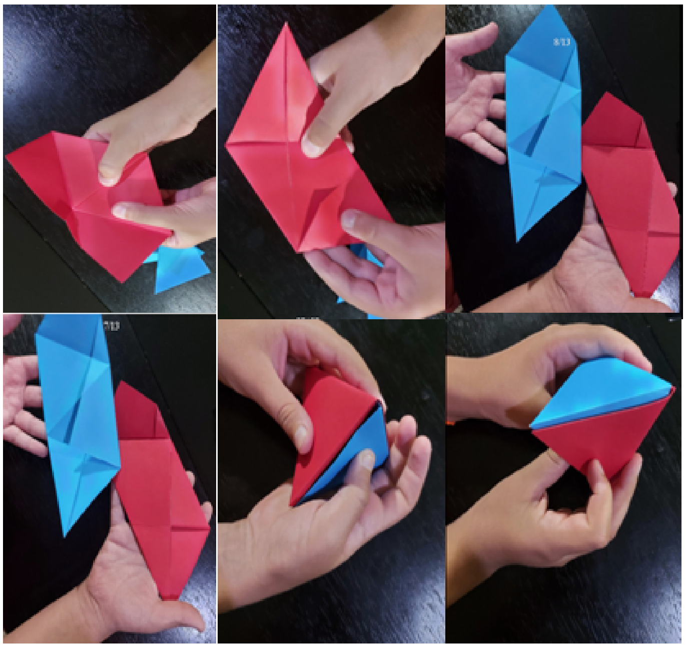


Figura B.2: Aluno B

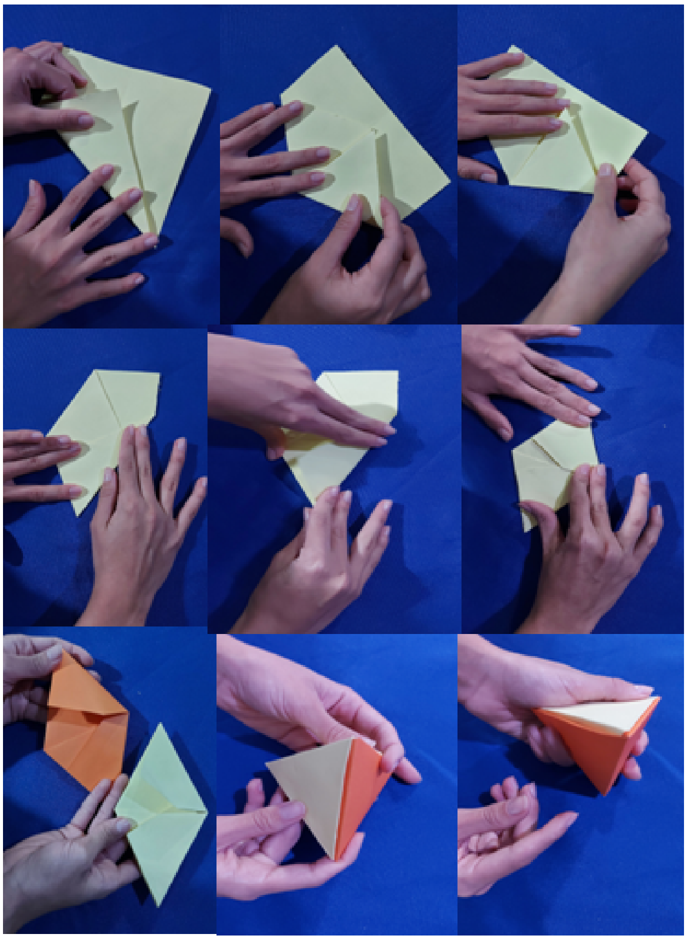


Figura B.3: Aluno C

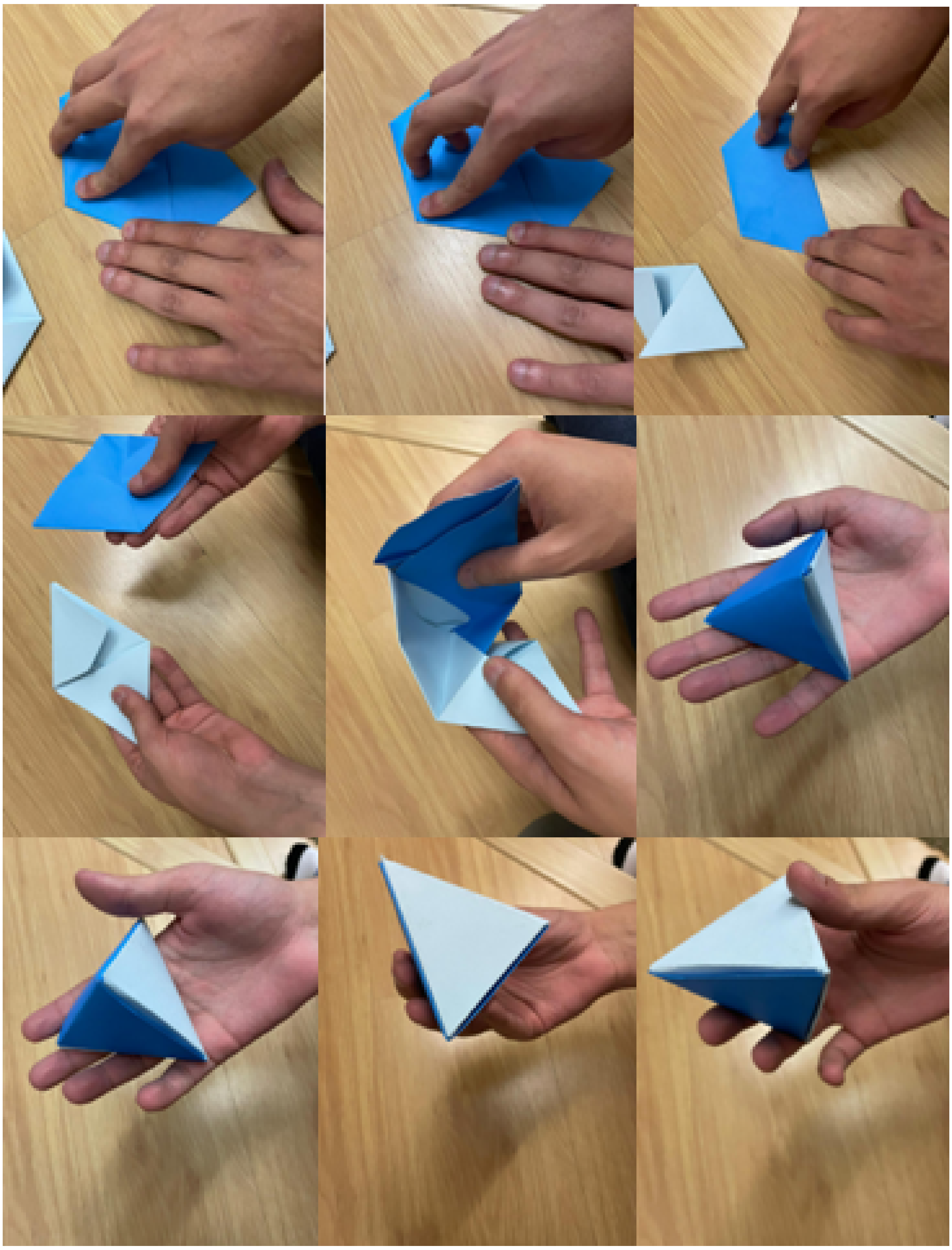


Figura B.4: Aluno D

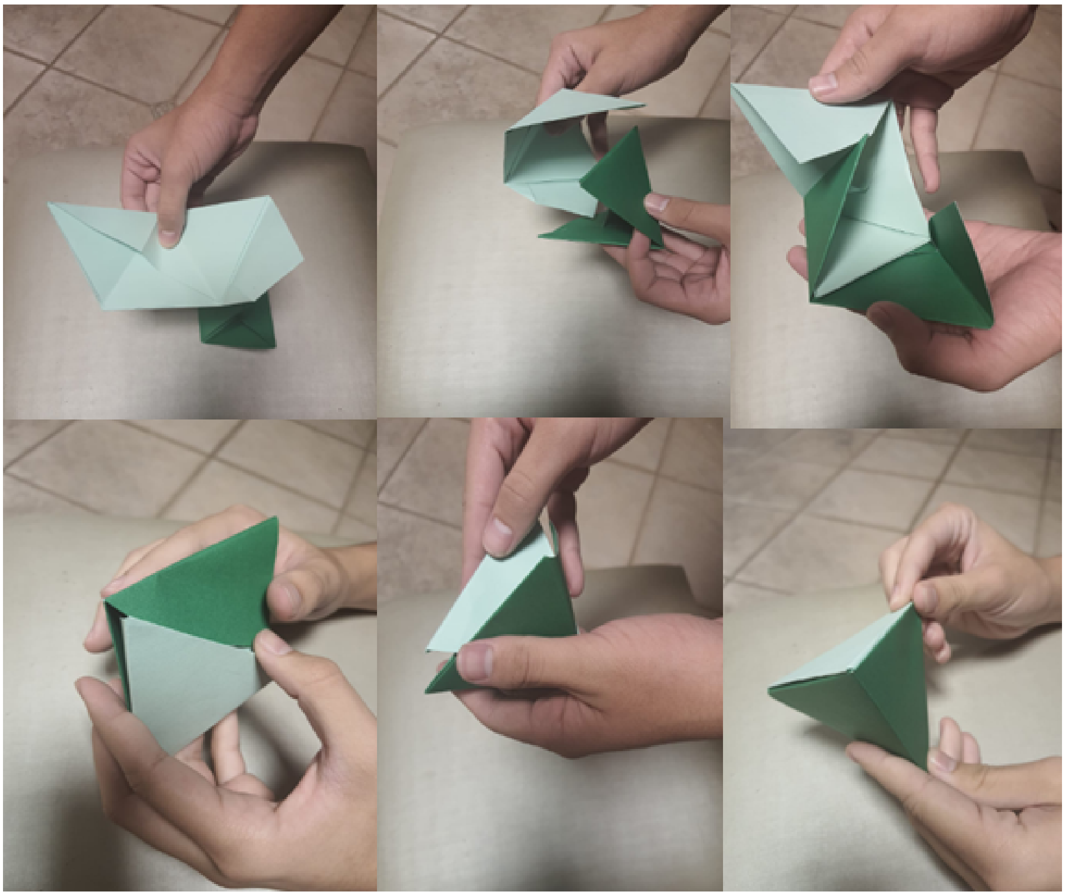


Figura B.5: Aluno E

B.2 Atividade II - Construção do Hexaedro

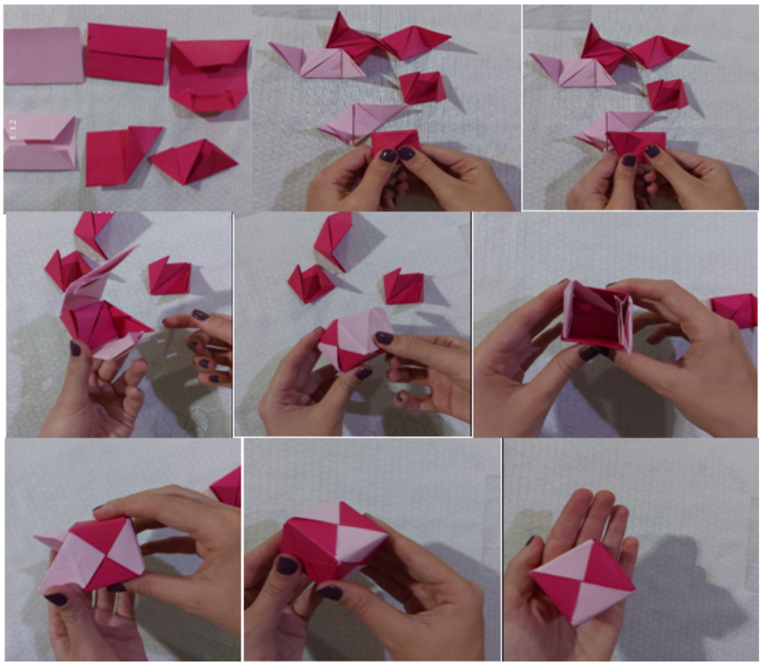


Figura B.6: Aluno A

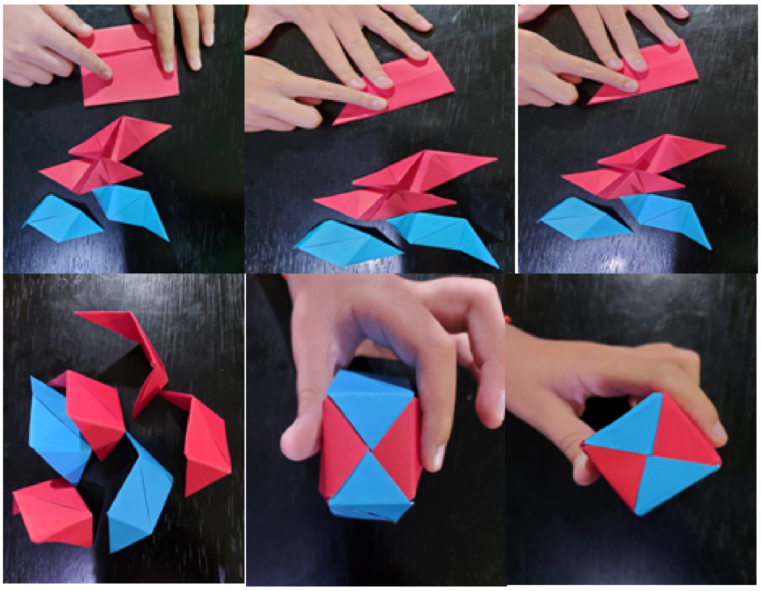


Figura B.7: Aluno B

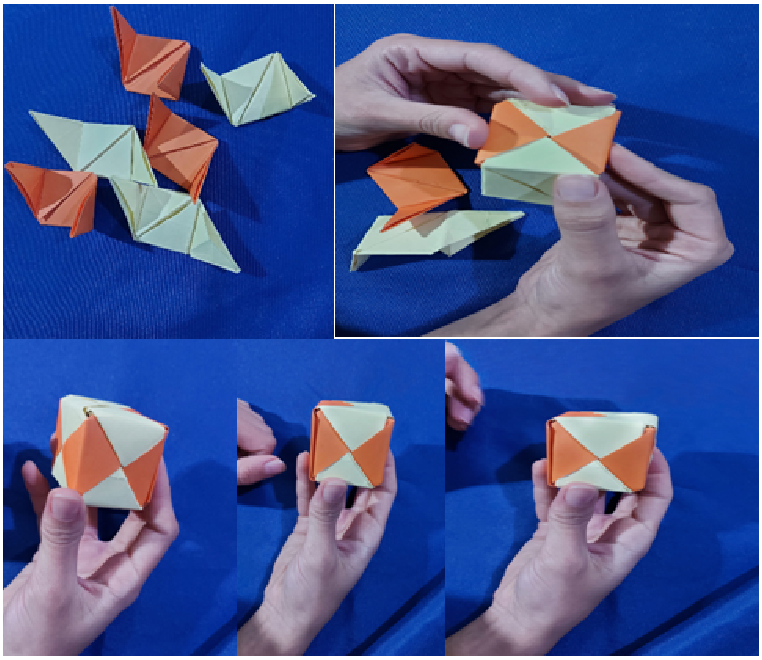


Figura B.8: Aluno C

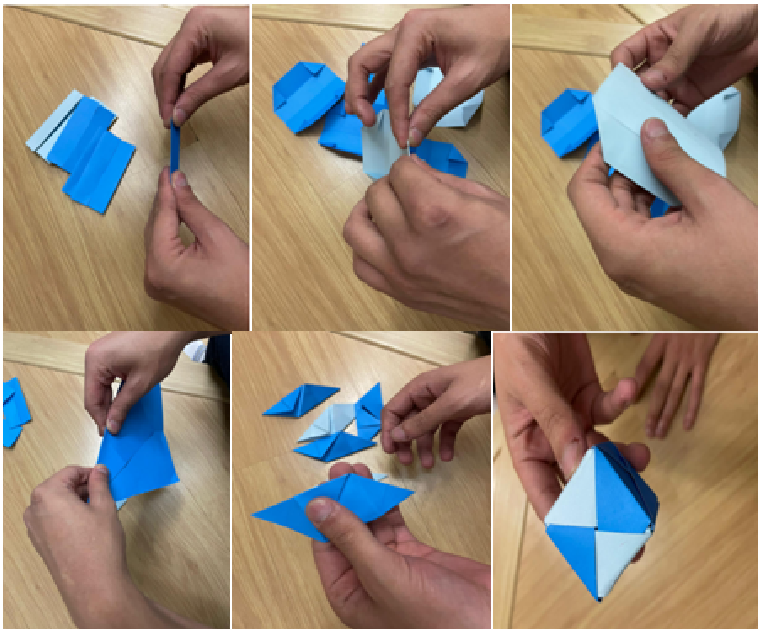


Figura B.9: Aluno D

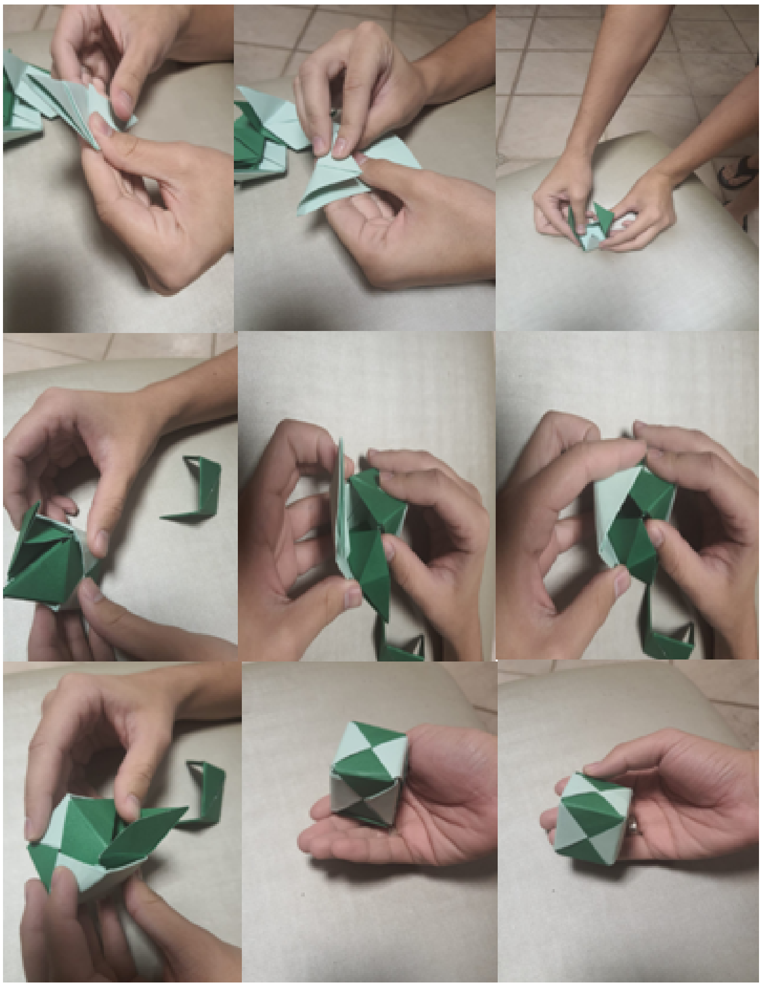


Figura B.10: Aluno E

Bibliografia

[1] ABRANTES, P. *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa, Portugal,Ministério de Educação/Departamento de Educação Básica, 1999, p. 19.

[2] BIOGRAFIA. *Euclides de Alexandria.* URL: https://www.ebiografia.com/euclides/ (acesso em 11 de out. de 2020).

[3] BRASIL. "Base Nacional Comum Curricular". *MEC* (2017). URL: http://basenacionalcomum.mec.gov.br (acesso em 20 de jan. de 2021).

[4] CAVACAMI, E. e FURUYA, Y. K. S. *Explorando Geometria com Origami.* 2008. URL: https://www.dm.ufscar.br/profs/yolanda/origami/origami2008.pdf (acesso em 21 de set. de 2020).

[5] IMENES, L. M. *Geometria das Dobraduras (Coleção Vivendo a Matemática).* Scipione. São Paulo, 1996.

[6] LANG, R. J. *Huzita-Justin Axioms.* 2004. URL: https://langorigami.com/ (acesso em 21 de set. de 2020).

[7] LANG, R. J. *TreeMaker User Manual.* 2004. URL: https://langorigami.com/ (acesso em 21 de set. de 2020).

[8] LARA, D. S., SOARES, G. O. e LEIVAS, J. C. P. *O transferidor e o papel como materiais didáticos: uso em dobraduras.* Rio do Janeiro: Encontro de Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro,VII, 2018, pp. 1–11.

[9] LARROSA, J. B. "Experiência e alteridade em educação". *Reflexão e Açao. v. 19, n. 2, p. 04-27* (2011).

[10] MATTOS, F. "Números Construtíveis por Dobraduras de Papel ou Reflexões". Diss. de mestr. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, nov. de 2001.

[11] MONTEIRO, L. C. N. *Origami: História de uma Geometria Axiomática.* 2008. URL: https://bdlb.bn.gov.br/acervo/handle/20.500.12156.3/184479 (acesso em 11 de out. de 2020).

[12] MORAES, R. "Educar pela pesquisa: exercício de aprender a aprender". *Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul* (2012).

[13] *ORIGAMI EDITOR 3D.* URL: https://sourceforge.net/projects/origamieditor3d/files/ (acesso em 21 de mai. de 2021).

[14] PASSARONI, L. C. S. "Construções Geométricas por Dobraduras(Origami): aplicações ao ensino básico". Diss. de mestr. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, 2015.

[15] PUC-RIO. *Descrição Axiomática do Origami.* URL: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/25833/25833_5.PDF (acesso em 19 de fev. de 2021).

[16] WHEELER, D. *Imagem e pensamento geométrico. CIEAEM - Comtes Rendus de 1a 33e Rencontre Internationale.* Pallanza, 1981, pp. 351–354.