UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS NATURAIS, MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA-DCME

PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

DIEGO RABELO DOS SANTOS

ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS PARA O ESTUDO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

MOSSORÓ

2021

DIEGO RABELO DOS SANTOS

ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS PARA O ESTUDO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA) como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Linhares da Silva

Coorientadora: Prof. Dra. Antônia Jocivania Pinheiro

MOSSORÓ

2021

S237e Santos, Diego Rabelo dos.
ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS PARA O ESTUDO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E FUNÇÕES HIPERBÓLICAS / Diego Rabelo dos Santos. - 2021.
89 f. : il.

Orientador: Paulo César Linhares da Silva.
Coorientadora: Antônia Jocivania Pinheiro.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2021.

1. Funções Trigonométricas. 2. Funções Hiperbólicas. 3. Ensino. 4. Tecnologia . I. Silva, Paulo César Linhares da, orient. II. Pinheiro, Antônia Jocivania, co-orient. III. Título.

DIEGO RABELO DOS SANTOS

ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS PARA O ESTUDO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática Profissional em Rede Nacional da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA) como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em: 26/07/2021

BANCA EXAMINADORA

Paulo César Linhares da Silva

Assinado de forma digital por Paulo César Linhares da Silva
Dados: 2021.09.21 18:47:01 -03'00'

Prof. Dr. Paulo César Linhares da Silva (Orientador)
Universidade Federal Rural do Semiárido (UFERSA)

Antônia Jocivania Pinheiro

Prof. Dra. Antônia Jocivania Pinheiro (Coorientadora)
Universidade Federal Rural do Semiárido (UFERSA)

Maria Joseane Felipe Guedes Macedo

Assinado de forma digital por Maria Joseane Felipe Guedes Macedo :02759923495
DN: cn=MARIA JOSEANE GUEDES MACEDO: 02759923495, ou=UFERSA - Universidade Federal Rural do Semi-Arido, o=ICPEdu, c=BR
Dados 2021.09.21 10:07:49- 03'00'

Prof. Dra. Maria Joseane Felipe Guedes
Universidade Federal Rural do Semiárido (UFERSA)

Prof. Dr. Davi Carneiro de Souza
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

A toda família e amigos que estiveram e estão sempre presente na minha vida.

AGRADECIMENTOS

Gostaria neste momento, de fazer meus agradecimentos àqueles que contribuíram para que pudesse chegar a esse momento tão especial em minha vida.

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, que me permitiu realizar um grande sonho de garoto, que era me tornar um professor de matemática. Além disso, um grande desejo que me aflorou no tempo de graduação, que foi me tornar mestre em matemática. Obrigado meu Deus!

Aos meus pais e meu irmão, por sempre me apoiarem nas minhas lutas e contribuírem sempre com o que puderam, dando tudo que tinham para que eu pudesse alcançar meus sonhos.

Aos meus orientadores Paulo César linhares da Silva e Antônia Jocivania Pinheiro por todas as contribuições que tiveram nesse trabalho, sempre me ajudando e orientado independente da hora que eu os procurava. Não mediram esforços para que este trabalho tivesse um grande desempenho.

A todos os professores que passaram por minha vida durante este período que estive matriculado na instituição. Vocês têm uma grande parcela na minha formação como profissional e pessoa.

Aos meus companheiros de curso, que compartilharam dias de luta, resolução de atividades e refeições. Levarei vocês no meu coração por onde for.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram de alguma forma para que esse sonho fosse realizado.

“Eduquem as crianças, para que não seja necessário punir os adultos.”

(Pitágoras)

RESUMO

Ensinar a matemática de forma a contextualizar e aplicar os conceitos para aqueles que tem esta disciplina como alvo tem se tornado cada vez mais desafiador em meio a uma sociedade com um vasto aparado tecnológico. Diversos pesquisadores se dedicam a buscar métodos alternativos de apresentar esses conteúdos aos seus aprendizes. Visando este fim, esse trabalho apresenta abordagens metodológicas na realização do estudo das funções trigonométricas e funções hiperbólicas. Estes tipos de funções, apresentam muitas aplicações em vários campos da ciência. Temas como estes são a priori abordados em cursos de ensino médio, e cursos de ensino superior, que tenham a matemática como base. Aqui é feito um estudo teórico destes dois tipos de funções baseando-se em ferramentas metodológicas alternativas para o seu aprendizado. Entre estas ferramentas, podemos citar softwares, aplicativos para celulares e tablets e linguagens de programação. As ideias dispostas neste trabalho podem ajudar os interessados no tema a buscar um aprendizado mais eficaz, por meio de recursos tecnológicos utilizados de forma ampla, pelos segmentos de pesquisa científica e meios sociais.

Palavras-chave: Funções Trigonométricas; Funções Hiperbólicas; Ensino; Tecnologia

ABSTRACT

Teaching mathematics in a way to contextualize and apply the concepts to those who have this discipline as a target has become increasingly challenging in the midst of a society with a vast technological prowess. Several researchers are dedicated to seeking alternative methods to present these contents to their apprentices. Aiming at this end, this work presents methodological approaches in carrying out the study of trigonometric functions and hyperbolic functions. These types of functions have many applications in various fields of science. Topics like these are a priori addressed in high school courses, and higher education courses, which have mathematics as a basis. Here, a theoretical study of these two types of functions is made based on alternative methodological tools for their learning. Among these tools, we can mention software, mobile and tablet applications and programming languages. The ideas presented in this work can help those interested in the subject to seek a more effective learning, through technological resources widely used by the segments of scientific research and social media.

Keywords: Trigonometry; Hyperbolic Functions; Teaching; Technology.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Triângulo Retângulo 16
Figura 2 – Definição função seno 18
Figura 3 – Quadrantes e eixos das ordenadas e abcissas 19
Figura 4 – Gráfico da função seno 19
Figura 5 – Arco no ciclo trigonométrico 20
Figura 6 – Definição função cosseno 21
Figura 7 – Gráfico da função cosseno 22
Figura 8 – Definição função tangente 23
Figura 9 – Gráfico da função tangente 24
Figura 10 – Definição função cotangente 25
Figura 11 – Gráfico da função cotangente 26
Figura 12 – Definição da função secante 27
Figura 13 – Gráfico da função secante 28
Figura 14 – Definição da função cossecante 29
Figura 15 – Gráfico da função cossecante 30
Figura 16 – Ângulo Hiperbólico θ. 31
Figura 17 – Gráfico da Função Seno Hiperbólico 34
Figura 18 – Gráfico da Função Cosseno Hiperbólico 37
Figura 19 – Gráfico da Função Tangente Hiperbólico 40
Figura 20 – Gráfico da Função Cossecante Hiperbólica 43
Figura 21 – Gráfico da Função Secante Hiperbólica 46
Figura 22 – Gráfico da Função Cotangente Hiperbólica 48
Figura 23 – Ângulo θ na circunferência. 50
Figura 24 – Cálculo do ângulo na hipérbole 51
Figura 25 – Ângulo na hipérbole e na circunferência 52
Figura 26 – Função Seno Trigonométrica no Symbolab 56
Figura 27 – Função Seno Hiperbólica no Symbolab 57
Figura 28 – $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-tg(x)}{sen(x)-cos(x)}$ no Symbolab 58
Figura 29 – $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-tgh(x)}{senh(x)-cosh(x)}$ no Symbolab 59
Figura 30 – $\lim_{x\to 0} \dfrac{tg(x)-x}{x^3}$ no Symbolab 60

Figura 31 – $\lim_{x\to 0}\dfrac{tgh(x)-x}{x^3}$ no Symbolab 61
Figura 32 – Derivada da função $y=\dfrac{cos(x)}{1-sen(x)}$ no Symbolab 62
Figura 33 – Derivada da função $y=\dfrac{cosh(x)}{1-senh(x)}$ no Symbolab 63
Figura 34 – Integral da função $y=\dfrac{sen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ no Symbolab 64
Figura 35 – Integral da função $y=\dfrac{senh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ no Symbolab 66
Figura 36 – Função $f(x)=sen(ax)$ no GeoGebra 67
Figura 37 – Função $f(x)=sen(ax)$ para $a=3$ 68
Figura 38 – Função $f(x)=sen(3x)$ e $g(x)=sen(-3x)$ 69
Figura 39 – Função $f(x)=cos(3x)$ e $g(x)=cos(-3x)$ 70
Figura 40 – Função $f(x)=tg(3x)$ e $g(x)=tg(-3x)$ 71
Figura 41 – Função $f(x)=senh(ax)$ para $a=1$ 71
Figura 42 – Função $f(x)=senh(ax)$ para $a=3$ 72
Figura 43 – Função $f(x)=senh(ax)$ para $a=-2$ 72
Figura 44 – Função $f(x)=cosh(ax)$ para $a=1$ 73
Figura 45 – Função $f(x)=cosh(ax)$ para $a=3$ 73
Figura 46 – Função $f(x)=tgh(ax)$ para $a=1$ 74
Figura 47 – Função $f(x)=tgh(3x)$ e $g(x)=tgh(-3x)$ 75
Figura 48 – Tela inicial do Google Colab 76
Figura 49 – Tela principal do Google Colab 76
Figura 50 – Definição inicial das funções 78
Figura 51 – Códigos para construção do seno de um ângulo qualquer 79
Figura 52 – Códigos para construção das principais funções trigonométricas 80
Figura 53 – Códigos para construção das principais funções hiperbólicas 81
Figura 54 – Funções trigonométricas tomando o arco de 20 82
Figura 55 – Funções hiperbólicas tomando o arco de 20 83

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Determinação do período da função $f(x) = sen(x)$ 68

Tabela 2 – Determinação do período da função $f(x) = sen(3x)$ 69

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	14
2	**FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**	16
2.1	**Funções Trigonométricas**	16
2.1.1	***Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo***	16
2.1.2	***Função Seno***	17
2.1.3	***Função Cosseno***	20
2.1.4	***Função Tangente***	22
2.1.5	***Função Cotangente***	24
2.1.6	***Função Secante***	27
2.1.7	***Função Cossecante***	28
2.2	**Funções Hiperbólicas**	30
2.2.1	***Função Seno hiperbólico***	31
2.2.2	***Função Cosseno Hiperbólico***	34
2.2.3	***Função Tangente Hiperbólico***	37
2.2.4	***Função Cossecante Hiperbólico***	40
2.2.5	***Função Secante Hiperbólico***	43
2.2.6	***Função Cotangente Hiperbólico***	46
2.3	**Relações entre funções hiperbólicas e funções trigonométricas**	48
2.4	**Uso de Novas Tecnologias no Ensino de Matemática**	53
3	**ABORDAGEM DAS ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS**	55
3.1	**Uso de Softwares no Estudo das Funções Trigonométricas e Hiperbólicas**	55
3.1.1	***Symbolab***	56
3.1.2	***GeoGebra***	67
3.2	**Uso de linguagens de programação**	75
4	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	84
	REFERÊNCIAS	85
	APÊNDICES	86
	APÊNDICE A – Relações trigonométricas	86
	APÊNDICE B – Relações hipebólicas	88

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma ciência presente na humanidade desde os primórdios. Vários povos utilizam princípios matemáticos que levaram a grandes descobertas científicas. Em nossa sociedade os mais variados recursos tecnológicos foram atingidos, graças a procedimentos essencialmente matemáticos. Exemplo disso são, as comunicações sem fio, tratamento de sinais, tratamento de imagens, avanços na medicina, previsões estatísticas dentre outros. Podemos destacar, que entre os mais variados assuntos tratados dentro da matemática, as funções tem um papel de destaque pois é um tópico base para toda teoria matemática.

A função é base para construir o pensamento matemático e está presente em diversas áreas da matemática. Por exemplo no cálculo diferencial, as funções são base para o estudo de limites, derivadas e integrais. Na física as funções são utilizadas para descrever trajetórias de partículas e corpos, que é apenas uma, das muitas aplicações que existe na física. Para o estudo da matemática discreta, usamos as funções para realizar contagens, até mesmo a própria construção dos números reais passam por conceitos de função, exemplo disto são os axiomas de Peano.

Diante deste contexto, este trabalho tem por fim, o objetivo de apresentar abordagens de técnicas metodológicas que busquem trazer meios de estudar as funções trigonométricas e funções hiperbólicas. É proposto aqui o uso de ferramentas e recursos metodológicos como mídias tecnológicas que são essenciais no desenvolvimento e amadurecimento na solução de problemas técnicos. A compreensão e aplicação de resultados que foram desenvolvidos é base para a atuação de qualquer profissional. Segundo BRASIL (2017) deve-se, compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

O uso das tecnologias no Brasil, teve início no município de São Carlos - SP, no ano de 1971, com um seminário que discutia o ensino da física com o auxílio do computador. Esse seminário foi realizado na Universidade Federal de São Carlos, e foi ministrado por um especialista da Universidade de Dartmouth (EUA). Nessa época, as universidade já começavam a ver uma grande parceria entre tecnologias e ensino de ciências com bons olhos, notando o quão importante seria. Segundo BORBA, PENTEADO (2007), a nível nacional, uma das primeiras ações governamentais para o incentivo do uso das tecnologias nas escolas brasileiras, ocorreu no ano de 1981, com a realização do 1º seminário nacional de informática, realizado pela UnB (Universidade de Brasília). A partir daí, começam a surgir programas como o Educom, Formar e Proninfe, que são programas do governo de incentivo ao uso das tecnologias na educação.

A se tratar da matemática, COSTA (2012), diz que, a hoje, uma grande variedade de recursos tecnológicos que podem colaborar com o desenvolvimento das capacidades, dos conhecimentos e das competências matemáticas, muitas das quais, disponíveis online. Porém, mesmo sabendo que o uso das tecnologias pode contribuir de forma positiva no ensino da matemática, CARNEIRO e PASSOS (2014), ressaltam que o docente precisa ter claro, seu objetivo, e ter conhecimentos profundos e técnicos a respeito do software que ele estará usando em sua aula, planeje com muita cautela as atividades a serem desenvolvidas e tente prever as dificuldades que os alunos possam ter no decorrer do uso do mesmo.

É importante frisar também, que o mundo atual exige do professor novas formas de planejar suas aulas, afinal, somente o modelo de aulas tradicionais/básicas, não são suficientes para chamar atenção dos alunos para estudar e compreender os conteúdos matemáticos presente nos livros didáticos. É preciso ter algo a mais, algo mais atraente aos olhos dos alunos, algo que eles possam manipular para verificar ou testar os resultados teóricos que os livros expõe. Segundo Valente (1998), o ensino tradicional de matemática não tem produzido resultados satisfatórios e isso acarreta diversos problemas, como por exemplo a evasão escolar, pavor da disciplina dentre outros. Esses fatores devem fazer com que o professor de hoje venha a pensar novos métodos e recursos para ensinar a matemática de uma maneira mais dinâmica e atraente.

Diante desse contexto, essa pesquisa surge como mais uma opção, para professores (tanto da educação básica quanto superior) que necessitem de ideias inovadoras para o ensino de funções trigonométricas e hiperbólicas, usando dois softwares para computadores, celulares e tablets e uma linguagem de programação (Python).

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, é apresentada toda a parte teórica baseada em bibliografias estudadas, que servirão para o desenvolver deste estudo, e para um melhor entendimento na leitura, para que fiquem bem entendidas todas as conclusões que aparecerão no decorrer dos demais capítulos deste estudo.

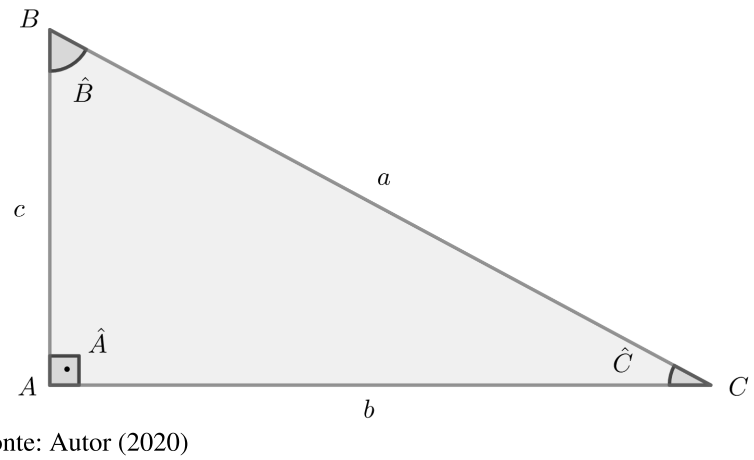
2.1 Funções Trigonométricas

Antes de iniciar as definições das funções trigonométricas, é importante que sejam apresentadas as relações trigonométricas no triângulo retângulo, pois a partir delas que será possível entender as definições das funções trigonométricas que serão apresentadas adiante.

2.1.1 Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Definição 1. *Considere um triângulo ABC onde o ângulo* $\hat{A} = 90°$. *A partir dele, são definidos os conceitos de seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente dos demais ângulos* $\hat{B}$ *e* $\hat{C}$ *que são agudos, sendo os lados* ***b*** *e* ***c*** *denominados de catetos e o lado* ***a*** *hipotenusa, como mostra a Figura 1. Sendo* α *um dos ângulos agudos do triângulo ABC, definimos:*

Figura 1 – Triângulo Retângulo



Fonte: Autor (2020)

- $Seno(\alpha) = \dfrac{Cateto\ oposto\ a\ \alpha}{Hipotenusa}$.
- $Cosseno(\alpha) = \dfrac{Cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{Hipotenusa}$.
- $Tangente(\alpha) = \dfrac{Cateto\ oposto\ a\ \alpha}{Cateto\ adjacente\ a\ \alpha}$.
- $Cossecante(\alpha) = \dfrac{1}{Seno(\alpha)}$.
- $Secante(\alpha) = \dfrac{1}{Cosseno(\alpha)}$.
- $Cotangente(\alpha) = \dfrac{1}{Tangente(\alpha)}$.

Assim, se for tomado o ângulo $\hat{C}$, no triângulo da Figura 1 como exemplo, tem-se:

- $Seno(\hat{C}) = \dfrac{c}{a}$.
- $Cosseno(\hat{C}) = \dfrac{b}{a}$.
- $Tangente(\hat{C}) = \dfrac{c}{b}$.
- $Cossecante(\hat{C}) = \dfrac{a}{c}$.
- $Secante(\hat{C}) = \dfrac{a}{b}$.
- $Cotangente(\hat{C}) = \dfrac{b}{c}$.

Dessa forma, serão definidas as funções trigonométricas, ou seja, as funções seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente. Serão construídos os gráficos de cada uma destas funções e definidas algumas de suas propriedades importantes para seu estudo.

Para todas as definições a seguir, tome sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal uOv e considere uma circunferência λ de centro O e raio $r = 1$ onde o comprimento de λ é igual a 2π.

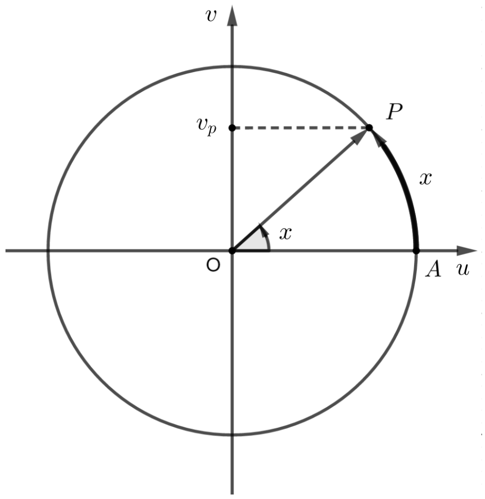
2.1.2 Função Seno

Considere o ciclo trigonométrico e o ponto P, imagem de um arco de comprimento x.

Definição 2. *Define-se a função seno (simbolicamente designada por sen) de um arco x como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada x a ordenada do ponto P.*

$$f(x) = sen(x) = v_p.$$

Figura 2 – Definição função seno



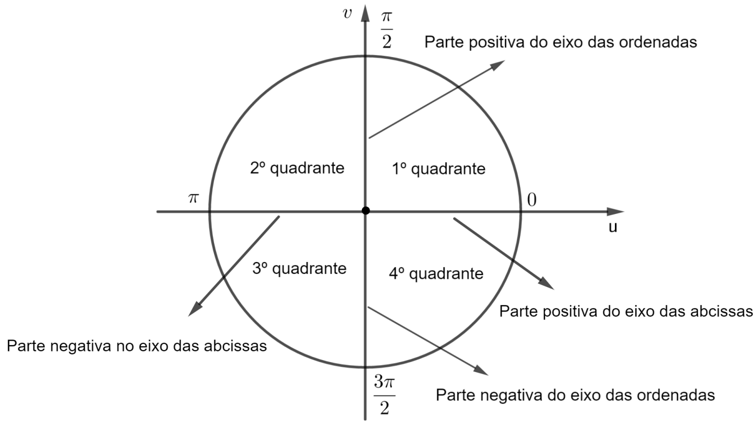
Fonte: Adaptado do livro elementos da matemática vol. 5 (2018)

Pode-se então, listar algumas propriedades importantes da função $f(x) = sen(x)$.

1. A função seno é uma função periódica de período 2π, pois ao tomar um x maior que 2π ou menor que 0 tem-se que o ponto P coincidirá com algum P entre 0 e 2π, ou seja, $sen(x) = sen(x + 2k\pi)$ para $k \in \mathbb{Z}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$;
2. O domínio da função $f(x) = sen(x)$ é o conjunto dos números reais. Representa-se $D(f) = \mathbb{R}$;
3. Como o ciclo trigonométrico possui raio $r = 1$, tem-se que a imagem da função *seno* está no intervalo fechado $[-1, 1]$, ou seja, $-1 \leq sen(x) \leq 1$ para qualquer arco x real. Representa-se $\text{Im}(f) = [-1, 1]$;
4. Como foi visto na definição da função seno e na Figura 2, a função seno associa cada arco x à ordenada do ponto P sobre a circunferência trigonométrica, como a representação das ordenadas formam o eixo v no plano cartesiano, podemos notar que $sen(x) > 0$ se $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ (1º e 2º quadrantes) e $sen(x) < 0$ se $\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$ (3º e 4º quadrante)(ver Figura 3);
5. Observando a Figura 4 pode-se notar que a função $f(x) = sen(x)$ é crescente quando $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e é decrescente quando $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

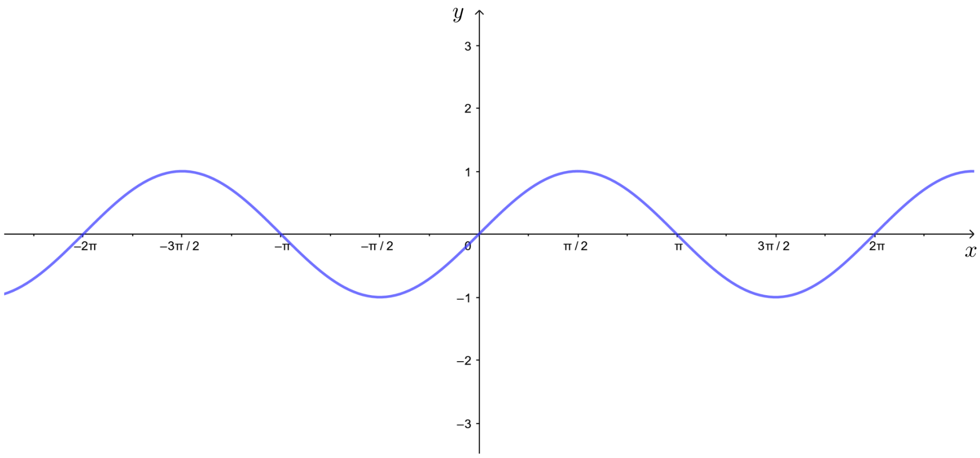
Seguindo a definição 2 e as propriedades, consegue-se entender a construção gráfica da função $f(x) = sen(x)$ que segue a forma apresentada na Figura 4.

Figura 3 – Quadrantes e eixos das ordenadas e abcissas



Fonte: Autor (2020)

Figura 4 – Gráfico da função seno



Fonte: Autor (2020)

Além disso, pode-se analisar a paridade da função seno observando o mesmo ângulo positivo e negativo em cada quadrante. Para isto basta lembrar que um ângulo x (positivo) é construído no sentido anti-horário no ciclo. O ângulo $-x$ (negativo) é construído no sentido horário no ciclo, como mostra a Figura 5.

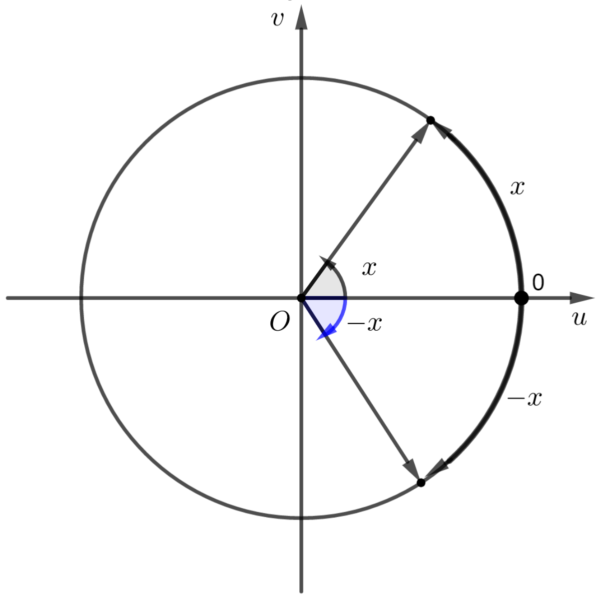
Com isso, é fácil notar que:

- Se $x \in$ 1º quadrante $\Rightarrow -x \in$ 4º quadrante $\Rightarrow sen(x) = -sen(-x)$.
- Se $x \in$ 2º quadrante $\Rightarrow -x \in$ 3º quadrante $\Rightarrow sen(x) = -sen(-x)$.
- Se $x \in$ 3º quadrante $\Rightarrow -x \in$ 2º quadrante $\Rightarrow sen(x) = -sen(-x)$.
- Se $x \in$ 4º quadrante $\Rightarrow -x \in$ 1º quadrante $\Rightarrow sen(x) = -sen(-x)$.

Daí consegue-se perceber que, independente do arco (do 1º ao 4º quadrante), tem-se que $sen(x) = -sen(-x)$, fazendo perceber que sendo $f(x) = sen(x)$ então $f(x) = -f(-x)$, ou seja, a função $f(x) = sen(x)$ é uma função impar.

Para analisar a injetividade e sobrejetividade da função *seno*, como ela está definida

Figura 5 – Arco no ciclo trigonométrico



Fonte: Autor (2020)

na forma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, já pode-se concluir que não será sobrejetiva, pois, como a imagem da função é $Im(f) = [-1, 1]$, tem-se contradomínio diferente da imagem.

Por outro lado, esta função não será injetiva, pois ao tomar, por exemplo $x_1 = 0$ e $x_2 = \pi$, tem-se que $sen(0) = 0$ e $sen(\pi) = 0$ fazendo dois elementos distintos do domínio da função estarem associados à mesma imagem. Conclui-se então, portanto, que a função *seno* não é uma função bijetiva.

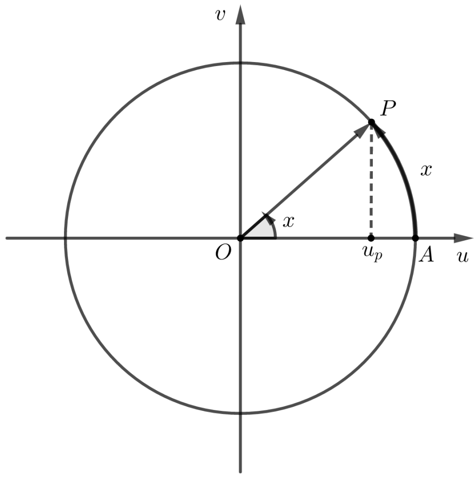
2.1.3 Função Cosseno

Considere o ciclo trigonométrico e o ponto P, imagem de um arco de comprimento x.

Definição 3. *Define-se a função cosseno (simbolicamente designada por cos) de um arco x como* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que associa a cada x a abscissa do ponto P, como segue.*

$$f(x) = cos(x) = u_p.$$

Figura 6 – Definição função cosseno



Fonte: Adaptado do livro elementos da matemática vol. 5 (2018)

Pode-se então, listar algumas propriedades importantes da função $f(x) = cos(x)$.

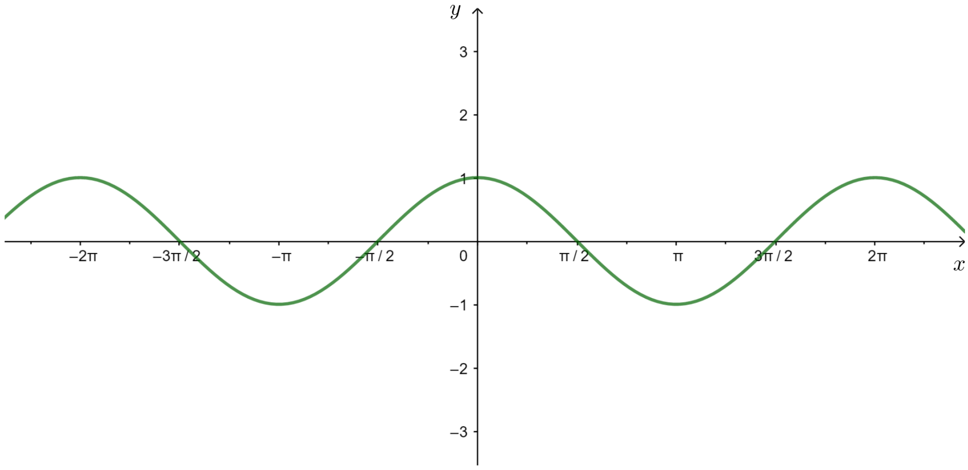
1. A função cosseno é uma função periódica de período 2π, pois ao tomar um x maior que 2π ou menor que 0 tem-se que o ponto P coincidirá com algum P entre 0 e 2π, ou seja, $cos(x) = cos(x+2k\pi)$ para $k \in \mathbb{Z}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. O domínio da função $f(x) = cos(x)$ é o conjunto dos números reais. Representa-se $D(f) = \mathbb{R}$;
3. Como o ciclo trigonométrico possui raio $r = 1$, tem-se que a imagem da função *cosseno* está no intervalo fechado $[-1,1]$, ou seja, $-1 \leq cos(x) \leq 1$ para qualquer arco x real. Representa-se $Im(f) = [-1,1]$;
4. Como foi visto na definição da função cosseno e na Figura 6, ela associa cada arco x à abscissa do ponto P sobre a circunferência trigonométrica, como a representação das abscissas formam o eixo u no plano cartesiano, pode-se notar que $cos(x) > 0$ se e somente se $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ (1º e 4º quadrantes) e $cos(x) < 0$ se $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$ (2º e 3º quadrantes)(ver figura 3);
5. Observando a Figura 7 pode-se notar que a função $f(x) = cos(x)$ é crescente quando $\pi+2k\pi < x < 2\pi+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e é decrescente quando $2k\pi < x < \pi+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Seguindo a definição 3 e as propriedades anteriores, consegue-se entender a construção gráfica da função $f(x) = cos(x)$ que segue a forma apresentada na Figura 7.

Analisando a paridade da função $f(x) = cos(x)$, levando em consideração a Figura 5, tem-se:

- Se $x \in$ 1º quadrante $\Rightarrow -x \in$ 4º quadrante $\Rightarrow cos(x) = cos(-x)$.
- Se $x \in$ 2º quadrante $\Rightarrow -x \in$ 3º quadrante $\Rightarrow cos(x) = cos(-x)$.

Figura 7 – Gráfico da função cosseno



Fonte: Autor (2020)

- Se $x \in$ 3º quadrante $\Rightarrow -x \in$ 2º quadrante $\Rightarrow cos(x) = cos(-x)$.
- Se $x \in$ 4º quadrante $\Rightarrow -x \in$ 1º quadrante $\Rightarrow cos(x) = cos(-x)$.

Assim, consegue-se notar que independente do arco (do 1º ao 4º quadrante) tem-se que $cos(x) = cos(-x)$. Considerando que está sendo analisada a função $f(x) = cos(x)$, então pode-se concluir que $f(x) = f(-x)$. Dessa forma, tem-se que a função $f(x) = cos(x)$ é uma função par.

Quanto à injetividade e sobrejetividade, como a função $f(x) = cos(x)$ possui mesmo domínio e imagem da função $f(x) = sen(x)$, pode-se considerar a mesma análise já feita para a função $f(x) = sen(x)$.

2.1.4 Função Tangente

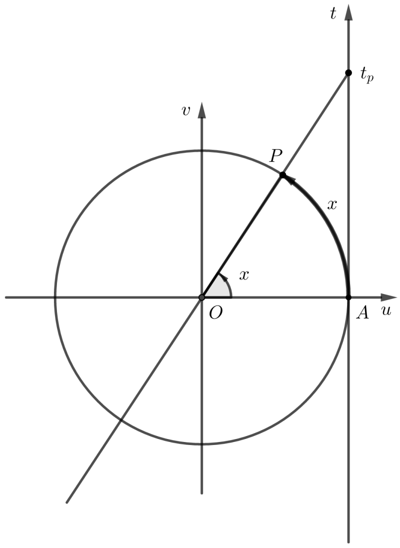
Considere um eixo t, com origem em A e paralelo ao eixo v. Esse eixo é conhecido como **eixo das tangentes**. O ponto P é imagem do arco x sobre a circunferência trigonométrica. A reta OP intercepta o eixo t em um ponto de posição t_p, conforme a Figura 8.

Definição 4. *A função tangente (simbolicamente designada por tg) é definida como $f : \mathbb{R} - -\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\} \to \mathbb{R}$ que associa a cada x a posição t_p sobre o eixo das tangentes, da seguinte maneira.*

$$f(x) = tg(x) = t_p.$$

Pode-se então, listar algumas propriedades importantes da função $f(x) = tg(x)$.

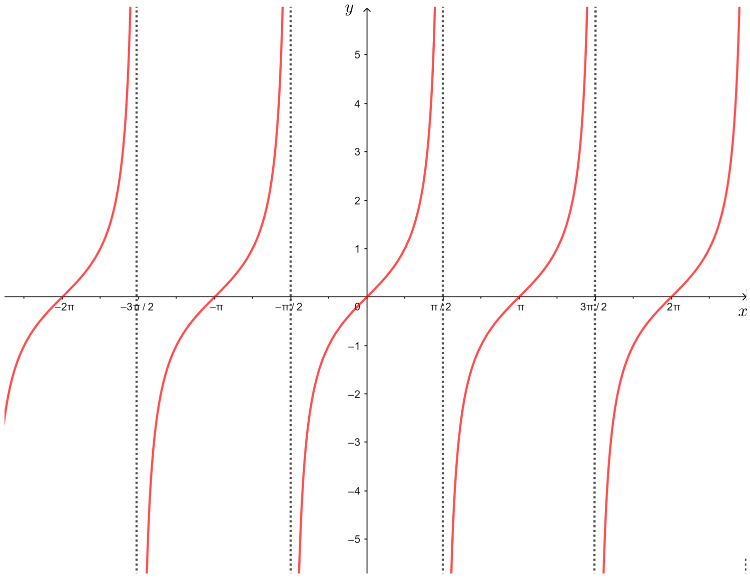
Figura 8 – Definição função tangente



Fonte: Adaptado do livro elementos da matemática vol. 5 (2018)

1. A função tangente é uma função periódica de período π, como pode-se ver na Figura 9 seus valores se repetem sempre entre duas assíntotas verticais consecutivas;
2. O domínio da função $f(x) = tg(x)$ é o conjunto dos números reais diferentes dos arcos da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Representa-se $D(f) = \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{R}$;
3. A imagem da função $f(x) = tg(x)$ é o conjunto $Im(f) = \mathbb{R}$. Dessa forma, tomando qualquer y real, sempre existe um x real de modo que $tg(x) = y$;
4. A função $f(x) = tg(x) > 0$ se, e somente se, $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $\pi + 2k\pi <$ $< x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $f(x) = tg(x) < 0$ se e somente se $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
5. Observando a Figura 9 pode-se concluir que a função $f(x) = tg(x)$ é crescente apenas quando o domínio da função é um intervalo real entre duas assíntotas consecutivas. Por exemplo, a função $f : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = tg(x)$ é estritamente crescente. Por outro lado, se tomar um domínio que não esteja totalmente contido entre duas assíntotas consecutivas não terá uma função crescente. Por exemplo, se tomar a função $g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) -$ $- \frac{\pi}{2} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = tg(x)$, note que teria-se, por exemplo, $\frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{4}$ porém $-1 =$ $= g\left(\frac{3\pi}{4}\right) < g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, fazendo com que essa função não seja crescente.

Figura 9 – Gráfico da função tangente



Fonte: Autor (2020).

Para analisar a paridade da função $f(x) = tg(x)$, basta lembrar que $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Daí, tem-se:

$$tg(-x) = \frac{sen(-x)}{cos(-x)} = \frac{-sen(x)}{cos(x)} = -\frac{sen(x)}{cos(x)} = -tg(x)$$

Dessa forma, tem-se:

$$tg(-x) = -tg(x) \Rightarrow tg(x) = -tg(-x) \Rightarrow f(x) = -f(-x).$$

Mostrando assim, que a função $f(x) = tg(x)$ é ímpar.

Para analisar a injetividade e sobrejetividade da função $f(x) = tg(x)$ considerando que esta é definida como $f : \mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\} \to \mathbb{R}$, pode-se perceber que $f(x) = tg(x)$ é sobrejetiva, pois como $Im(f) = \mathbb{R}$, temos contradomínio igual a imagem. Por outro lado, considerando que se tomar, por exemplo $x_1 = 0$ e $x_2 = \pi$ tem-se $f(0) = 0$ e $f(\pi) = 0$, ou seja, elementos diferentes do domínio gerando o mesmo elemento na imagem, assim $f(x) = tg(x)$ não é injetiva. Dessa forma, pode-se concluir também que esta função não é bijetiva.

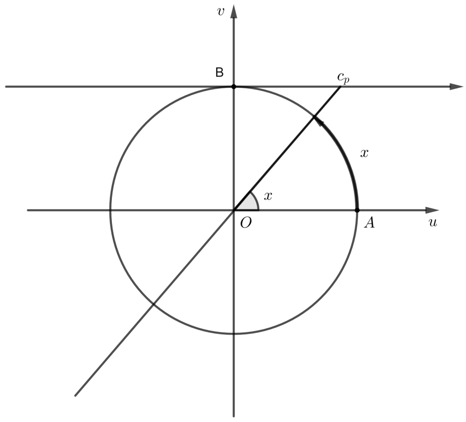
2.1.5 Função Cotangente

Considere um eixo c, com origem no ponto B, paralelo ao eixo u e tangente ao ciclo trigonométrico, conforme a Figura 10. Esse eixo é conhecido como **eixo das cotangentes**. O ponto P é imagem do arco x sobre a circunferência trigonométrica. A reta OP intercepta o eixo c em um ponto de posição c_p.

Definição 5. *A função cotangente (simbolicamente designada por cotg) é definida como $f : \mathbb{R} - \{k\pi\} \to \mathbb{R}$ que associa a cada x a posição c_p sobre o eixo das cotangentes.*

$$f(x) = cotg(x) = c_p.$$

Figura 10 – Definição função cotangente



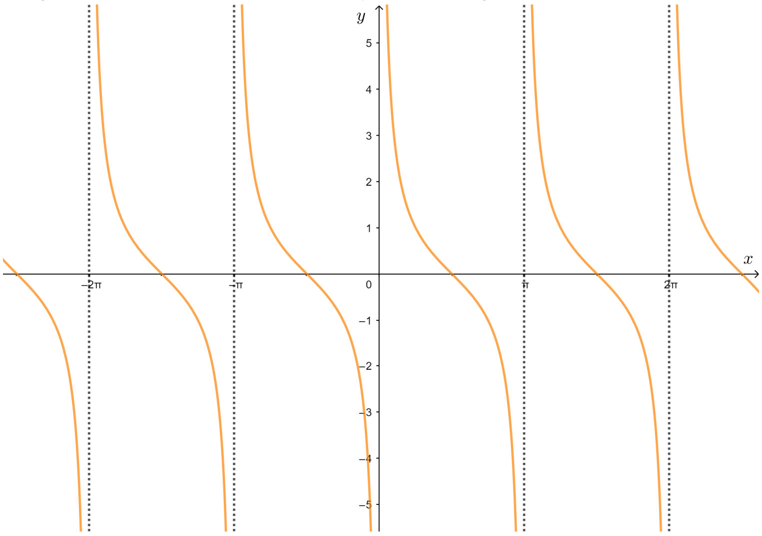
Fonte: Adapado do livro elementos da matemática vol. 5 (2018)

Pode-se então, listar algumas propriedades importantes da função $f(x) = cotg(x)$.

1. A função cotangente é uma função periódica de período π, como pode-se ver na Figura 11 seus valores se repetem sempre entre duas assíntotas verticais consecutivas;
2. O domínio da função $f(x) = cotg(x)$ é o conjunto dos números reais diferentes dos arcos da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. representa-se $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{R}$;
3. A imagem da função $f(x) = cotg(x)$ é o conjunto $Im(f) = \mathbb{R}$. Dessa forma, tomando qualquer y real, sempre existe um x real de modo que $cotg(x) = y$;
4. A função $f(x) = cotg(x) > 0$ se e somente se $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $\pi + 2k\pi <$ $< x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $f(x) = tg(x) < 0$ se e somente se $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
5. Observando a Figura 11 pode-se concluir que a função $f(x) = cotg(x)$ é decrescente apenas quando o domínio da função é um intervalo real entre duas assíntotas consecutivas. Por exemplo, a função $f : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = tg(x)$ é estritamente decrescente. Por

outro lado, se tomar um domínio que não esteja totalmente contido entre duas assíntotas consecutivas não terá uma função decrescente.

Figura 11 – Gráfico da função cotangente



Fonte: Autor (2020).

Para analisar a paridade da função$f(x) = cotg(x)$ basta lembrar que foi definido no início desta unidade que $cotg(x) = \frac{1}{tg(x)}$. Daí:

$$cotg(-x) = \frac{1}{tg(-x)} = \frac{1}{-tg(x)} = -\frac{1}{tg(x)} = -cotg(x).$$

Ficando assim com:

$$cotg(-x) = -cotg(x) \Rightarrow cotg(x) = -cotg(-x)$$

Assim, tem-se $cotg(x) = -cotg(-x)$ tornando assim $f(x) = -f(-x)$, mostrando que a função $f(x) = cotg(x)$ é impar.

Para analisar a injetividade e sobrejetividade da função $f(x) = cotg(x)$ considerando que esta é definida como $f : \mathbb{R} - \{k\pi\} \to \mathbb{R}$, pode-se perceber que $f(x) = cotg(x)$ é sobrejetiva, pois como $Im(f) = \mathbb{R}$, tem-se contradomínio igual a imagem. Por outro lado, considerando que se tomar, por exemplo, $x_1 = \frac{\pi}{2}$ e $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ tem-se $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ e $f(\frac{3\pi}{2}) = 0$, ou seja, elementos diferentes do domínio gerando o mesmo elemento na imagem, fazendo assim $f(x) = cotg(x)$ não ser injetiva. Dessa forma, pode-se concluir também que esta função não é bijetiva.

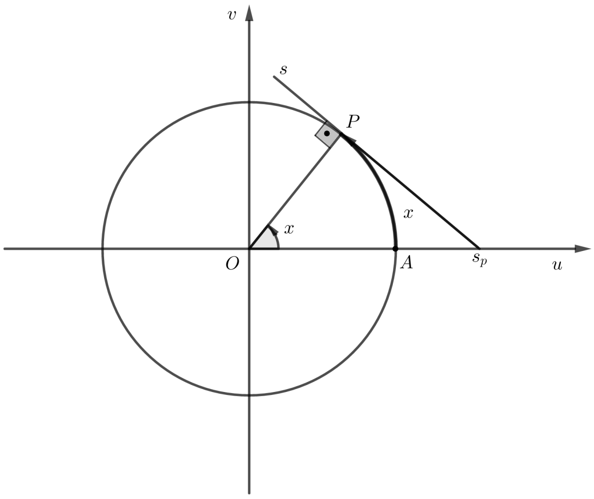
2.1.6 Função Secante

O ponto P é imagem de um arco x sobre a circunferência trigonométrica. A reta s é tangente ao ciclo trigonométrico em P. Seja s_p a posição do ponto que é interseção da reta s com o eixo u.

Definição 6. *A função secante (simbolicamente designada por sec) é definida como* $f : \mathbb{R} - -\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\} \to \mathbb{R}$ *que associa a cada x a posição* s_p *sobre o eixo u.*

$$f(x) = sec(x) = s_p.$$

Figura 12 – Definição da função secante

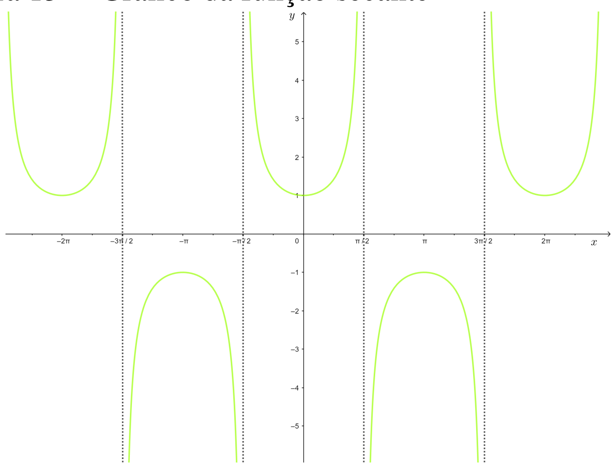


Fonte: Adaptado do livro elementos da matemática vol. 5 (2018)

Pode-se então, listar algumas propriedades importantes da função $f(x) = sec(x)$.

1. A função secante é uma função periódica de período 2π, como pode-se ver na Figura 13;
2. O domínio da função $f(x) = sec(x)$ é o conjunto dos números reais diferentes dos arcos da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. representa-se $D(f) = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, $k \in \mathbb{R}$;
3. A imagem da função $f(x) = sec(x)$ é o conjunto $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - (-1, 1)$, como pode ser observado na Figura 13;
4. A função $f(x) = sec(x) > 0$ se, e somente se, $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $f(x) = = sec(x) < 0$ se e somente se $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
5. Observando a Figura 13 pode-se concluir que a função $f(x) = sec(x)$ é crescente se e somente se $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ e é decrescente se e somente se $\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$.

Figura 13 – Gráfico da função secante



Fonte: Autor (2020)

Para analisar a paridade da função $f(x) = sec(x)$ basta lembrar que foi definido no início desta unidade que $sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$. Daí:

$$sec(-x) = \frac{1}{cos(-x)} = \frac{1}{cos(x)} = sec(x).$$

Ficando assim com:

$$sec(-x) = sec(x).$$

Assim, entende-se $sec(x) = sec(-x)$ tornando assim $f(x) = f(-x)$, mostrando que a função $f(x) = sec(x)$ é par.

Quanto a injetividade e sobrejetividade, note que, como o contradomínio é o conjunto $\mathbb{R}$ e a imagem é o conjunto $\mathbb{R}-]-1,1[$, tem-se que esta função não é sobrejetiva, pois tais conjuntos são disjuntos. Por outro lado, se tomar $x_1 = 0$ e $x_2 = 2\pi$, suas imagens serão $f(0) = sec(0) = 1$ e $f(2\pi) = sec(2\pi) = 1$, ou seja, dois elementos disjuntos do domínio estão gerando o mesmo elemento na imagem, o que não faz dessa função injetiva. Sendo assim, pode-se concluir também que a função $f(x) = sec(x)$ não é bijetiva.

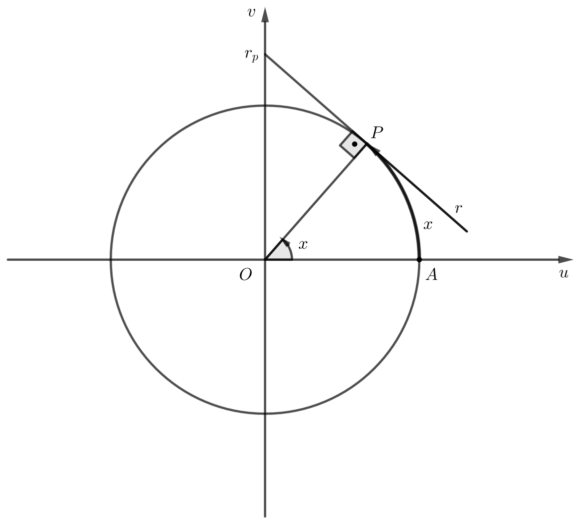
2.1.7 Função Cossecante

O ponto P é imagem de um arco x sobre a circunferência trigonométrica. A reta r é tangente ao ciclo trigonométrico em P. Seja r_p a posição do ponto que é interseção da reta r com o eixo v.

Definição 7. *A função cossecante (simbolizada por cossec)) é definida como* $f:\mathbb{R}-\{k\pi\}\rightarrow\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{R}$, *que associa a cada x a posição* r_p *sobre o eixo v, conforme a Figura 14. Assim, pode-se afirmar que:*

$$f(x) = cossec(x) = r_p.$$

Figura 14 – Definição da função cossecante

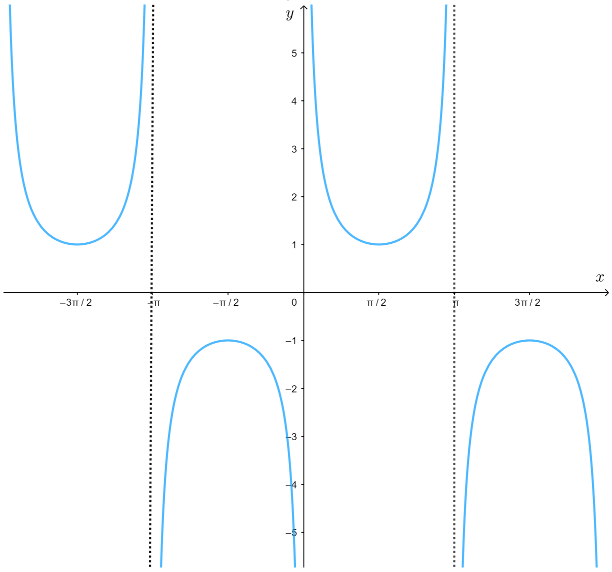


Fonte: Adaptado do livro elementos da matemática vol. 5 (2018)

Pode-se então, listar algumas propriedades importantes da função $f(x) = cossec(x)$.

1. A função secante é uma função periódica de período 2π, como pode-se ver na Figura 15;
2. O domínio da função $f(x) = cossec(x)$ é o conjunto dos números reais diferentes dos arcos da forma $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. representa-se $D(f) = \mathbb{R}-k\pi$, $k\in\mathbb{R}$;
3. A imagem da função $f(x) = cossec(x)$ é o conjunto $Im(f) = \mathbb{R}-(-1,1)$, como pode ser observado na Figura 15;
4. A função $f(x) = cossec(x) > 0$ se e somente se $2k\pi < x < \pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. $f(x) =$ $= cossec(x) < 0$ se e somente se $\pi+2k\pi < x < 2\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;
5. Observando a Figura 15 pode-se concluir que a função $f(x) = cossec(x)$ é crescente se e somente se $\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \frac{2\pi}{2}+2k\pi$ e é decrescente se e somente se $-\frac{\pi}{2}+2k\pi < x <$ $< \frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Figura 15 – Gráfico da função cossecante



Fonte: Autor (2020)

Para analisar a paridade da função $f(x) = cossec(x)$ basta lembrar que foi definido no início desta unidade que $cossec(x) = \frac{1}{sen(x)}$. Daí:

$$cossec(-x) = \frac{1}{sen(-x)} = \frac{1}{-sen(x)} = -\frac{1}{sen(x) = -cossec(x)}.$$

Ficando assim com:

$$cossec(-x) = -cossec(x) \Rightarrow cossec(x) = -cossec(-x).$$

Assim, entende-se $cossec(x) = -cossec(-x)$ tornando assim $f(x) = -f(-x)$, mostrando que a função $f(x) = cossec(x)$ é impar.

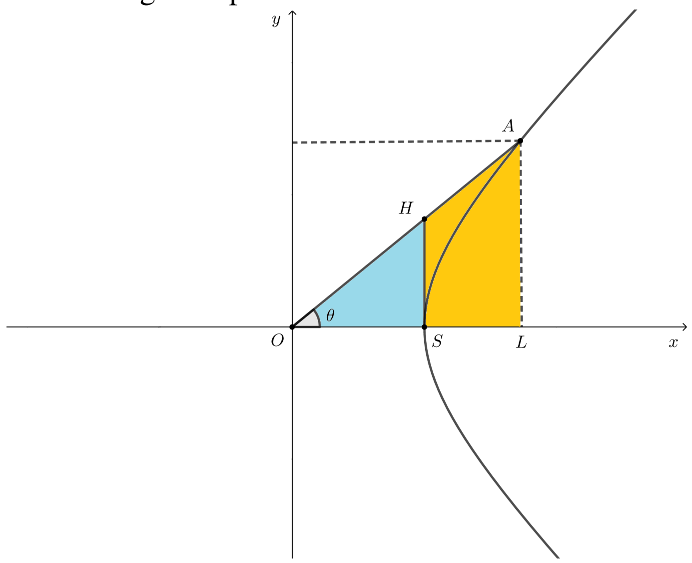
Quanto a injetividade e sobrejetividade, como a função $f(x) = cossec(x)$ é periódica e possui contradomínio e imagem igual ao da função $sec(x)$ já discutida acima, podemos usar a mesma análise já feita para concluir que esta função não é injetiva nem sobrejetiva, com isso não sendo bijetiva.

2.2 Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas são similares às trigonométricas. Esta similaridade se mostra no fato de que, da mesma forma que na trigonometria há a existência das funções seno e cosseno como principais, temos na hipérbole o seno e cosseno hiperbólicos. A seguir é feita a definição geométrica de seno e cosseno hiperbólicos.

Definição 8. *Considere a hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = 1$, com $x \geq 1$. De acordo com a Figura 16, o seno hiperbólico é definido como $sen(\theta) = \frac{\overline{LA}}{\overline{OS}}$ e o cosseno hiperbólico é defino como $cos(\theta) = \frac{\overline{OL}}{\overline{OS}}$. Além disso, a tangente hiperbólica é definida como $tg(\theta) = \frac{\overline{LA}}{\overline{LO}}$.*

Figura 16 – Ângulo hiperbólico θ.



Fonte: Autor (2020).

Como $\overline{OS} = 1$, pois $S = (1,0)$ é o ponto onde a hipérbole corta o eixo X. Tem-se $sen(\theta) = \overline{LA}$ e $cos(\theta) = \overline{OL}$.

2.2.1 Função Seno hiperbólico

Definição 9. *A função seno hiperbólica (representada simbolicamente por senh) de um arco x é definida por*

$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Na função $senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ tem-se:

1. Domínio e imagem são o conjunto de todos os números reais;
2. A função $senh(x)$ é impar, pois note que:

$$senh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -senh(x).$$

3. É injetiva, ou seja, dados x_1 e x_2 do domínio de f e supondo que $f(x_1) = f(x_2)$ tem-se que $x_1 = x_2$. De fato:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} = \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} \Rightarrow e^{x_1} - e^{-x_1} = e^{x_2} - e^{-x_2} \Rightarrow e^{x_1} + e^{-x_2} = e^{x_2} + e^{-x_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{x_1} + \frac{1}{e^{x_2}} = e^{x_2} + \frac{1}{e^{x_1}} \Rightarrow \frac{e^{x_1+x_2}+1}{e^{x_2}} = \frac{e^{x_2+x_1}+1}{e^{x_1}}.$$

Como é verdade que $e^{x_1+x_2} + 1 = e^{x_2+x_1} + 1$, então pela igualdade de frações tem-se que:

$$e^{x_2} = e^{x_1}.$$

Logo, pela igualdade de potências de mesma base:

$$x_1 = x_2.$$

4. É sobrejetiva, ou seja dado $y \in \mathbb{R}$ existe sempre um $x \in \mathbb{R}$ tal que $senh(x) = y$. Note que:

$$senh(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = 2y \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^x} = 2y$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

Resolvendo esta ultima equação na variável e^x, obtém-se:

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2},$$

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4(y^2+1)}}{2},$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

Daí, note que a solução $e^x = y - \sqrt{y^2+1}$ não convém, pois e^x é sempre positivo para qualquer x real mas $y - \sqrt{y^2+1}$ é sempre negativo para qualquer y real pelo fato de $y < \sqrt{y^2+1}$. Assim, a solução para a equação $(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$ na variável e^x é

$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$, pelo fato de $y + \sqrt{y^2+1}$ ser sempre positivo para qualquer y real. Dessa forma, tem-se que $x = ln(y + \sqrt{y^2+1})$. Além disso, como $senh(x) = y \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$ então é garantido também que existe um x para todo y de forma que a igualdade seja verdadeira.

Dessa forma, tem-se que o $senh(x)$ é sobrejetivo.

5. Como a função $senh(x)$ é injetiva e sobrejetiva, então é bijetiva;
6. É crescente, ou seja dados x_1 e x_2 do domínio com $x_1 < x_2$, tem-se que $senh(x_1) < senh(x_2)$. Note que:

$$senh(x_1) - senh(x_2) = \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} - \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2},$$

$$senh(x_1) - senh(x_2) = \frac{e^{2x_1} - 1}{2e^{x_1}} - \frac{e^{2x_2} - 1}{2e^{x_2}},$$

$$senh(x_1) - senh(x_2) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^{2x_1+x_2} - e^{x_2} - (e^{2x_2+x_1} - e^{x_1})}{e^{x_1+x_2}} \right],$$

$$senh(x_1) - senh(x_2) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(e^{2x_1+x_2} - e^{2x_2+x_1}) + (e^{x_1} - e^{x_2})}{e^{x_1+x_2}} \right]. \qquad (I)$$

Daí, como $x_1 < x_2$, então $2x_1 + x_2 < 2x_2 + x_1$. Dessa forma, obtém-se:

$$e^{2x_1+x_2} < e^{2x_2+x_1},$$

$$e^{2x_1+x_2} - e^{2x_2+x_1} < 0. \qquad (II)$$

Além disso, pelo mesmo fato de $x_1 < x_2$, tem-se:

$$e^{x_1} < e^{x_2},$$

$$e^{x_1} - e^{x_2} < 0. \qquad (III)$$

Substituindo (II) e (III) em (I) tem-se:

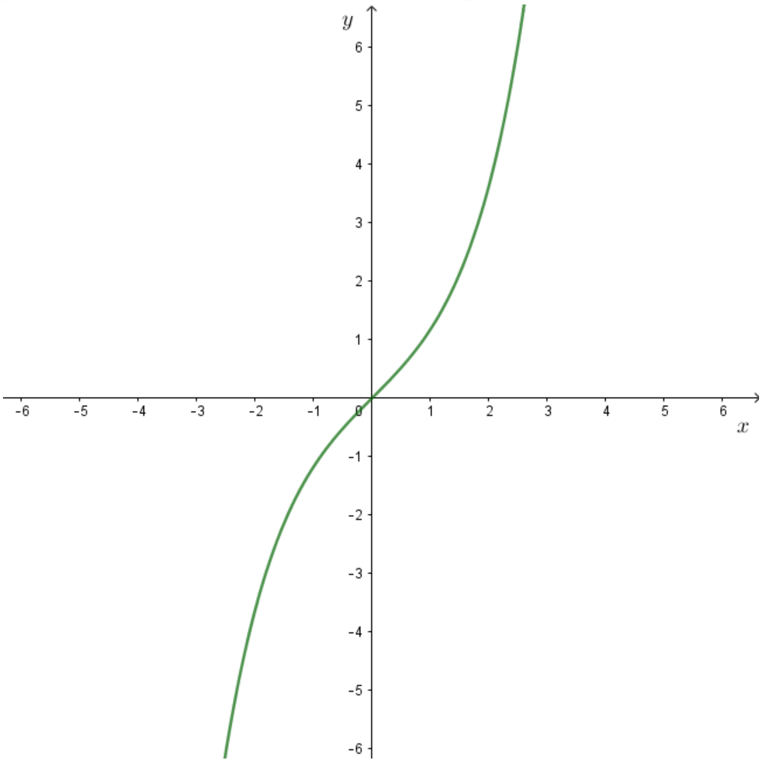
$$senh(x_1) - senh(x_2) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(e^{2x_1+x_2} - e^{2x_2+x_1}) + (e^{x_1} - e^{x_2})}{e^{x_1+x_2}} \right] < 0.$$

Assim:

$$senh(x_1) - senh(x_2) < 0 \Rightarrow senh(x_1) < senh(x_2).$$

Sendo assim a função $senh(x)$ é crescente em todo o seu domínio.
O gráfico da função seno hiperbólico está representado abaixo

Figura 17 – Gráfico da função seno hiperbólico



Fonte: Autor (2020)

2.2.2 Função Cosseno Hiperbólico

Definição 10. *A função cosseno hiperbólico (representada simbolicamente por cosh) de um arco x é definida por*

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Na função $cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ tem-se:

1. Domínio é o conjunto dos números reais, porém a imagem é o intervalo $[1, +\infty)$;
2. A função $cosh(x)$ é par, isto é $cosh(-x) = cosh(x)$. Para verificar esta afirmação faça:

$$cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = cosh(x);$$

3. Não é injetiva, pois se tomarmos por exemplo $x_1 = \pi$ e $x_2 = -\pi$ tem-se $cosh(\pi) = cosh(-\pi)$ por $cosh(x)$ ser par;
4. Não é sobrejetiva, pelo fato de $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ser sempre não negativo, ou seja, para todo $y < 0$ não existe x real tal que $cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ sendo $y = cosh(x)$;
5. Como a função $cosh(x)$ não é injetiva, então não é bijetiva;
6. É crescente para os valores do domínio que estão no intervalo $(0, +\infty)$ e é decrescente para os valores do domínio que estão no intervalo $[-\infty, 0)$.

   Para verificar este fato, primeiro tome $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, sendo $x_1 < x_2$ é necessário verificar que $cosh(x_1) < cosh(x_2)$.
   Assim,

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 1 < e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow \frac{1}{e^{x_2}} < \frac{1}{e^{x_1}} < 1.$$

   Daí:

$$cosh(x_1) - cosh(x_2) = \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{2} - \frac{e^{x_2} + e^{-x_2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left[e^{x_1} + \frac{1}{e^{x_1}} - e^{x_2} - \frac{1}{e^{x_2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[(e^{x_1} - e^{x_2}) - \left(\frac{1}{e^{x_2}} - \frac{1}{e^{x_1}} \right) \right]. \qquad (I)$$

   Como tomamos $0 < x_1 < x_2$ e sabemos que $e^{x_1} - e^{x_2} < 0$, então:

$$e^{x_1 + x_2} > 1 \Rightarrow \frac{1}{e^{x_1 + x_2}} < 1 \Rightarrow \frac{e^{x_1} - e^{x_2}}{e^{x_1 + x_2}} > e^{x_1} - e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} - e^{x_2} < \frac{1}{e^{x_2}} - \frac{1}{e^{x_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (e^{x_1} - e^{x_2}) - \left(\frac{1}{e^{x_2}} - \frac{1}{e^{x_1}} \right) < 0. \qquad (II)$$

   Substituindo o fato (II) na igualdade (I), tem-se:

$$cosh(x_1) - cosh(x_2) < 0 \Leftrightarrow cosh(x_1) < cosh(x_2).$$

Garantindo assim que a função $y = cosh(x)$ é crescente para todos os valores $x \in (0, +\infty)$. Agora tome $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, sendo $x_1 < x_2$ é necessário verificar que $cosh(x_1) > cosh(x_2)$. Assim,

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{e^{x_2}} < \frac{1}{e^{x_1}}.$$

Daí:

$$cosh(x_1) - cosh(x_2) = \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{2} - \frac{e^{x_2} + e^{-x_2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left[e^{x_1} + \frac{1}{e^{x_1}} - e^{x_2} - \frac{1}{e^{x_2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[(e^{x_1} - e^{x_2}) - \left(\frac{1}{e^{x_2}} - \frac{1}{e^{x_1}} \right) \right]. \qquad (*)$$

Como tomamos $x_1 < x_2 < 0$, e sabemos que $e^{x_1} - e^{x_2} < 0$, então:

$$\frac{1}{e^{x_1+x_2}} > 1 \Rightarrow \frac{e^{x_1} - e^{x_2}}{e^{x_1+x_2}} < e^{x_1} - e^{x_2} \Rightarrow \frac{1}{e^{x_2}} - \frac{1}{e^{x_1}} < e^{x_1} - e^{x_2} \Rightarrow$$

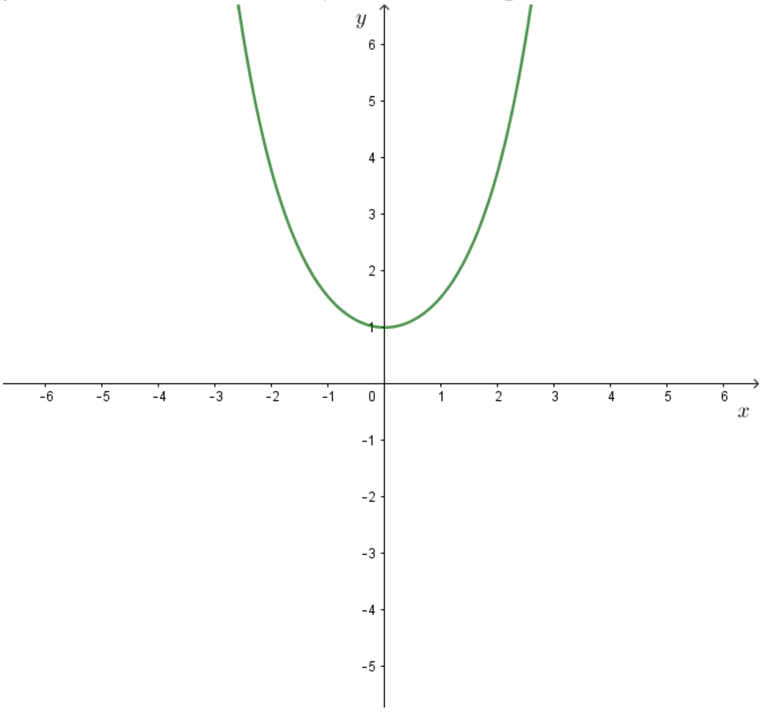
$$(e^{x_1} - e^{x_2}) - \left(\frac{1}{e^{x_2}} - \frac{1}{e^{x_1}} \right) > 0. \qquad (**)$$

Usando o fato $(**)$ na igualdade $(*)$ tem-se:

$$cosh(x_1) - cosh(x_2) > 0 \Rightarrow cosh(x_1) > cosh(x_2).$$

Garantindo assim, que a função $y = cosh(x)$ é decrescente para todo $x \in (-\infty, 0)$. O gráfico da função cosseno hiperbólico está representado abaixo

Figura 18 – Gráfico da função cosseno hiperbólico



Fonte: Autor (2020)

2.2.3 Função Tangente Hiperbólico

Definição 11. *A função tangente hiperbólico (representada simbolicamente por tgh) de um arco x é definida por*

$$tgh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Na função $tgh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ tem-se:

1. Domínio é o conjunto dos números reais;
2. A imagem é o intervalo $(-1, 1)$. Para verificar esta afirmação, tome:

$$tgh(x) - 1 = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - 1 = \frac{e^x - e^{-x} - e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{-2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Comoe^x e e^{-x} são ambos positivos, então $-2e^{-x} < 0$ e $e^x + e^{-x} > 0$ tornando assim $\dfrac{-2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 0$. Assim, tem-se:

$$tgh(x) - 1 < 0 \Rightarrow tgh(x) < 1$$

Além disso, tome:

$$tgh(x)+1=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+1=\frac{e^x-e^{-x}+e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}.$$

Pelo fato de e^x e e^{-x} serem ambos positivos, tem-se que $2e^x>0$ e $e^x+e^{-x}>0$, tornando $\dfrac{2e^x}{e^x+e^{-x}}>0$. Dessa forma:

$$tgh(x)+1>0\Rightarrow tgh(x)>-1.$$

Como ocorre simultaneamente que $tgh(x)<1$ e $tgh(x)>-1$, então:

$$-1<tgh(x)<1.$$

Além disso, dado $y\in(-1,1)$ existe $x=\dfrac{1}{2}\cdot ln\left(\dfrac{y+1}{1-y}\right)$ tal que $y=tgh(x)$. Com efeito,

$$y=tgh(x)\Leftrightarrow\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=y\Leftrightarrow e^x-e^{-x}=ye^x+ye^{-x}\Leftrightarrow e^x-ye^x=ye^{-x}+e^{-x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x\cdot(1-y)=e^{-x}\cdot(y+1)\Leftrightarrow e^{2x}\cdot(1-y)=y+1\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{y+1}{1-y}\Leftrightarrow 2x=ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\cdot ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right).$$

Como $y+1>0$ e $y-1<0$, então $1-y>0$ tornando assim $\dfrac{y+1}{1-y}>0$, garantindo assim a existência de x para qualquer y entre -1 e 1.

3. A função $tgh(x)$ é ímpar, isto é $tgh(-x)=-tgh(x)$, para verificar basta tomar:

$$tgh(-x)=\frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{e^{-x}+e^{-(-x)}}=\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}=\frac{-(e^x-e^{-x})}{e^x+e^{-x}}=-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=-tgh(x).$$

4. É injetiva. Para verificar esta afirmação, tome x_1 e x_2 do domínio da função de forma que $f(x_1)=f(x_2)$, é preciso mostrar que $x_1=x_2$. Daí:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow tgh(x_1)=tgh(x_2)\Rightarrow\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{e^{x_1}+e^{-x_1}}=\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{e^{x_2}+e^{-x_2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{x_1+x_2} - e^{x_2-x_1} + e^{x_1-x_2} - e^{-x_1-x_2} = e^{x_1+x_2} - e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1} - e^{-x_1-x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{x_1-x_2} + e^{x_1-x_2} = e^{x_2-x_1} + e^{x_2-x_1} \Rightarrow 2e^{x_1-x_2} = 2e^{x_2-x_1} \Rightarrow e^{x_1-x_2} = e^{x_2-x_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = x_2 - x_1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

5. Não é sobrejetiva, pois se tomarmos por exemplo $y = 2$ não existe x do domínio tal que $tgh(x) = 2$ pelo fato de a imagem desta função ser o intervalo $(-1,1)$;
6. Como a função $tgh(x)$ não é sobrejetiva, então não é bijetiva;
7. É crescente, ou seja dados x_1 e x_2 do domínio com $x_1 < x_2$, tem-se que $tgh(x_1) < tgh(x_2)$. Para verificar esta afirmação tome:

$$tgh(x_1) - tgh(x_2) = \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{e^{x_1} + e^{-x_1}} - \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{e^{x_2} + e^{-x_2}},$$

$$tgh(x_1) - tgh(x_2) = \frac{e^{x_1+x_2} - e^{x_2-x_1} + e^{x_1-x_2} - e^{-x_1-x_2} - e^{x_1+x_2} + e^{x_1-x_2} - e^{x_2-x_1} + e^{-x_1-x_2}}{(e^{x_1} + e^{-x_1}) \cdot (e^{x_2} + e^{-x_2})},$$

$$tgh(x_1) - tgh(x_2) = \frac{-2e^{x_2-x_1} + 2e^{x_1-x_2}}{(e^{x_1} + e^{-x_1}) \cdot (e^{x_2} + e^{-x_2})},$$

$$tgh(x_1) - tgh(x_2) = 2 \cdot \left[\frac{e^{x_1-x_2} - e^{x_2-x_1}}{(e^{x_1} + e^{-x_1}) \cdot (e^{x_2} + e^{-x_2})} \right]. \qquad (I)$$

Como $x_1 < x_2$, então $x_1 - x_2 < x_2 - x_1$, daí:

$$x_1 - x_2 < x_2 - x_1 \Rightarrow e^{x_1-x_2} < e^{x_2-x_1} \Rightarrow e^{x_1-x_2} - e^{x_2-x_1} < 0. \qquad (II)$$

Substituindo (II) em (I) e sabendo que $(e^{x_1} + e^{-x_1}) \cdot (e^{x_2} + e^{-x_2}) > 0$ pelo fato de $e^x > 0$ e $e^{-x} > 0$, tem-se:

$$tgh(x_1) - tgh(x_2) = 2 \cdot \left[\frac{e^{x_1-x_2} - e^{x_2-x_1}}{(e^{x_1} + e^{-x_1}) \cdot (e^{x_2} + e^{-x_2})} \right] < 0.$$

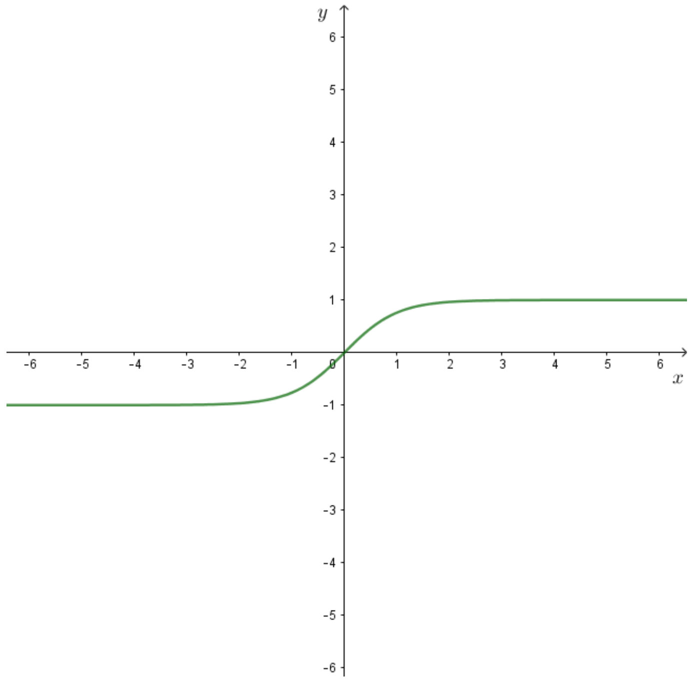
Dessa forma:

$$tgh(x_1) - tgh(x_2) < 0 \Rightarrow tgh(x_1) < tgh(x_2).$$

Sendo assim, a função $tgh(x)$ crescente em todo o seu domínio.

O gráfico da função tangente hiperbólico está representado abaixo

Figura 19 – Gráfico da função tangente hiperbólico



Fonte: Autor (2020)

As demais funções hiperbólicas (cossecante, secante e cotangente) são todas obtidas a partir destas já definidas, assim como nas funções trigonométricas.

2.2.4 Função Cossecante Hiperbólico

Definição 12. *A função cossecante hiperbólico (representada simbolicamente por csch) de um arco x é definida por*

$$csch(x) = \frac{1}{senh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Na função $csch(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$ tem-se:

1. Domínio é o conjunto $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ e a imagem é o conjunto $Im = \mathbb{R} - \{0\}$;
2. A função $csch(x)$ é ímpar, pois note que:

$$csch(-x) = \frac{2}{e^{-x} - e^{-(-x)}} = \frac{2}{e^{-x} - e^x} = \frac{2}{-(e^x - e^{-x})} = -\frac{2}{e^x - e^{-x}} = -csch(x);$$

3. É injetiva. Para verificar, tome x_1 e x_2 do domínio de f e suponha que $f(x_1) = f(x_2)$. É preciso verificar que, com as condições anteriores $x_1 = x_2$. Note:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{2}{e^{x_1}-e^{-x_1}}=\frac{2}{e^{x_2}-e^{-x_2}}\Rightarrow e^{x_1}-e^{-x_1}=e^{x_2}-e^{-x_2}\Rightarrow e^{x_1}+e^{-x_2}=e^{x_2}+e^{-x_1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{x_1}+\frac{1}{e^{x^2}}=e^{x_2}+\frac{1}{e^{x_1}}\Rightarrow \frac{e^{x_1+x_2}+1}{e^{x_2}}=\frac{e^{x_2+x_1}+1}{e^{x_1}}.$$

Como é verdade que $e^{x_1+x_2}+1=e^{x_2+x_1}+1$, então pela igualdade de frações acima, deve-se ter:

$$e^{x_2}=e^{x_1}.$$

Logo, pela igualdade de potências de mesma base, tem-se:

$$x_1=x_2.$$

4. Não é sobrejetiva, pois se tomarmos $y=0$ não existe x do domínio tal que $csch(x)=0$, por consequência de $senh(0)=0$;
5. Como a função $csch(x)$ não é sobrejetiva, então não é bijetiva;
6. É decrescente, ou seja dados x_1 e x_2 do domínio com $x_1<x_2$, tem-se que $csch(x_1)>csch(x_2)$. Para verificar este fato, tome:

$$csch(x_2)-csch(x_1)=\frac{2}{e^{x_2}-e^{-x_2}}-\frac{2}{e^{x_1}-e^{-x_1}}=\frac{2e^{x_1}-2e^{-x_1}-2e^{x_2}+2e^{-x_2}}{(e^{x_2}-e^{-x_2})\cdot(e^{x_1}-e^{-x_1})}=$$

$$=\frac{2\cdot[e^{x_1}-e^{x_2}+(e^{-x_2}-e^{-x_1})]}{(e^{x_2}-e^{-x_2})\cdot(e^{x_1}-e^{-x_1})}. \qquad (I)$$

Daí:

$$x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}\Rightarrow e^{x_1}-e^{x_2}<0 \qquad (II)$$

$$x_1<x_2\Rightarrow -x_2<-x_1\Rightarrow e^{-x_2}<e^{-x_1}\Rightarrow e^{-x_2}-e^{-x_1}<0. \qquad (III)$$

Assim, de (II) e (III), garantimos que $e^{x_1}-e^{x_2}+(e^{-x_2}-e^{-x_1})<0$ em (I) para todo x do domínio.

Por outro lado, note que:

$$e^{x_2} - e^{-x_2} = \frac{e^{2x_2} - 1}{e^{x_2}},$$

$$e^{x_1} - e^{-x_1} = \frac{e^{2x_1} - 1}{e^{x_1}}.$$

se $0 < x_1 < x_2$, então $1 < e^{x_1} < e^{x_2}$ tornando $0 < e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1$. Ou seja, das desigualdades anteriores, garantimos que $e^{x_2} - e^{-x_2} > 0$ e $e^{x_1} - e^{-x_1} > 0$, o que torna,

$$(e^{x_2} - e^{-x_2}) \cdot (e^{x_1} - e^{-x_1}) > 0. \qquad (*)$$

se $x_1 < x_2 < 0$, então $e^{x_1} < e^{x_2} < 1$ tornando $e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1 < 0$. Das desigualdades anteriores, garantimos que $e^{x_2} - e^{-x_2} < 0$ e $e^{x_1} - e^{-x_1} < 0$, o que torna,

$$(e^{x_2} - e^{-x_2}) \cdot (e^{x_1} - e^{-x_1}) > 0. \qquad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ é verificado que para qualquer valor x do domínio de f tem-se,

$$(e^{x_2} - e^{-x_2}) \cdot (e^{x_1} - e^{-x_1}) > 0. \qquad (IV)$$

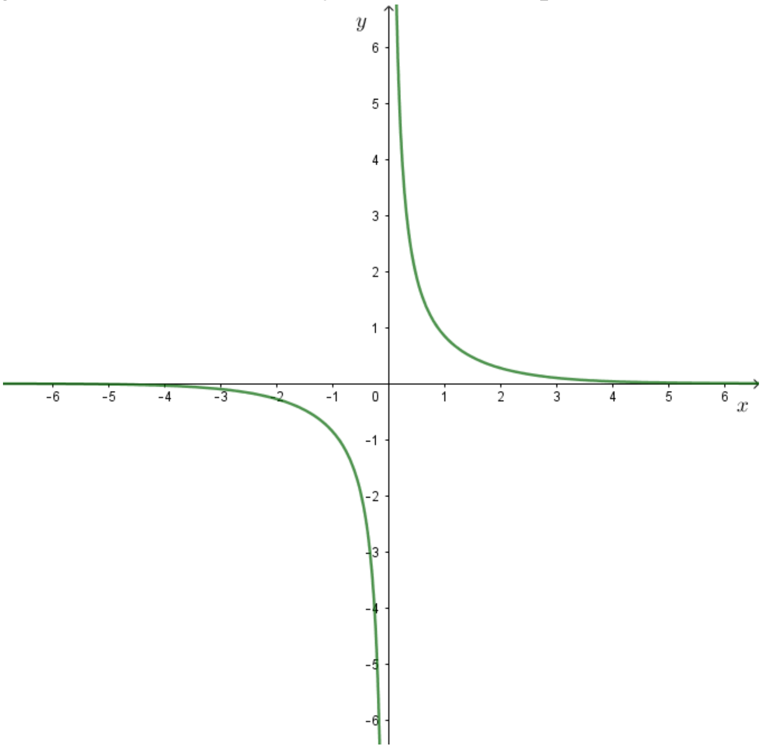
Dessa forma, usando (II), (III) e (IV) em (I), tem-se que:

$$csch(x_2) - csch(x_1) < 0 \Rightarrow csch(x_2) < csch(x_1).$$

Garantindo assim que a função $y = csch(x)$ é decrescente para todo x do seu domínio.

O gráfico da função cossecante hiperbólico está representado a seguir.

Figura 20 – Gráfico da função cossecante hiperbólica



Fonte: Autor (2020)

2.2.5 *Função Secante Hiperbólico*

Definição 13. *A função secante hiperbólico (representada simbolicamente por sech) de um arco x é definida por*

$$sech(x) = \frac{1}{cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

Na função $sech(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ tem-se:

1. Domínio é o conjunto $D = \mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo $(0, 1]$;
2. A função $sech(x)$ é par, isto é $sech(-x) = sech(x)$. Para verificar este fato, tome:

$$sech(-x) = \frac{2}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{2}{e^{-x} + e^x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = sech(x).$$

3. Não é injetiva, pois se tomarmos por exemplo $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ tem-se que $x_1 = x_2 =$ $= \dfrac{2}{e + e^{-1}}$;
4. Não é sobrejetiva, pois se tomarmos $y = 2$ por exemplo, tem-se:

$$\frac{2}{e^x+e^{-x}}=2,$$

$$2\cdot(e^x+e^{-x})=2,$$

$$e^x+\frac{1}{e^x}=1,$$

$$(e^x)^2+1=e^x,$$

$$(e^x)^2-e^x+1=0.$$

Resolvendo esta ultima equação na variável e^x, tem-se

$$\Delta=1-4\cdot 1\cdot 1,$$

$$\Delta=-3.$$

Como o discriminante resultou em um número negativo, ao calcular as soluções seriam encontrados dois números complexos, porém, como a variável da equação é e^x, não existe x real que satisfaça a igualdade. Dessa forma, não existe x que satisfaça $y=2$;

5. Como a função $sech(x)$ não é sobrejetiva nem injetiva, então não é bijetiva;
6. É crescente para todo $x<0$ e decrescente para todo $x>0$ e em $x=0$ a função admite um máximo.

   Para iniciar a verificação desta afirmação, encontraremos uma expressão para representar $sech(x_1)-sech(x_2)$.

$$sech(x_1)-sech(x_2)=\frac{2}{e^{x_1}+e^{-x_1}}-\frac{2}{e^{x_2}+e^{-x_2}}=2\cdot\left[\frac{e^{x_2}+e^{-x_2}-e^{x_1}-e^{-x_1}}{(e^{x_1}+e^{-x_1})(e^{x_2}+e^{-x_2})}\right]=$$

$$=2\cdot\left[\frac{(e^{x_2}-e^{x_1})-(e^{-x_1}-e^{-x_2})}{(e^{x_1}+e^{-x_1})(e^{x_2}+e^{-x_2})}\right]. \qquad (I)$$

Note que, como e^x é sempre positivo para qualquer valor real x, então em (I) tem-se que $(e^{x_1}+e^{-x_1})(e^{x_2}+e^{-x_2})>0$ para todo x_1,x_2 do domínio de f. Assim, para analisar onde a função é crescente ou decrescente, basta analisar o sinal de $(e^{x_2}-e^{x_1})-(e^{-x_1}-e^{-x_2})$.

Primeiramente, tome $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, com $x_1 < x_2$. Assim:

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 1 < e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow \frac{1}{e^{x_2}} < \frac{1}{e^{x_1}} < 1.$$

Daí, como $e^{x_2} - e^{x_1} > 0$ pelo fato de $x_1 < x_2$ então:

$$\frac{1}{e^{x_1+x_2}} < 1 \Rightarrow \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{e^{x_1} + e^{x_2}} < e^{x_2} - e^{x_1} \Rightarrow \frac{1}{e^{x_1}} - \frac{1}{e^{x_2}} < e^{x_2} - e^{x_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{x_2} - e^{x_1} - (e^{-x_1} - e^{-x_2}) > 0. \qquad (II)$$

Substituindo o fato (II) em (I), tem-se:

$$sech(x_1) - sech(x_2) > 0 \Rightarrow sech(x_1) > sech(x_2).$$

Ou seja, se $x > 0$ a função $f(x) = sech(x)$ é decrescente.

Agora tome $x_1, x_2 \in (0, -\infty)$, com $x_1 < x_2$. Assim:

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{e^{x_2}} < \frac{1}{e^{x_1}}.$$

Daí, como $e^{x_2} - e^{x_1} > 0$ pelo fato de $x_1 < x_2$ então:

$$\frac{1}{e^{x_1+x_2}} > 1 \Rightarrow \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{e^{x_1} + e^{x_2}} > e^{x_2} - e^{x_1} \Rightarrow \frac{1}{e^{x_1}} - \frac{1}{e^{x_2}} > e^{x_2} - e^{x_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{x_2} - e^{x_1} - (e^{-x_1} - e^{-x_2}) < 0. \qquad (III)$$

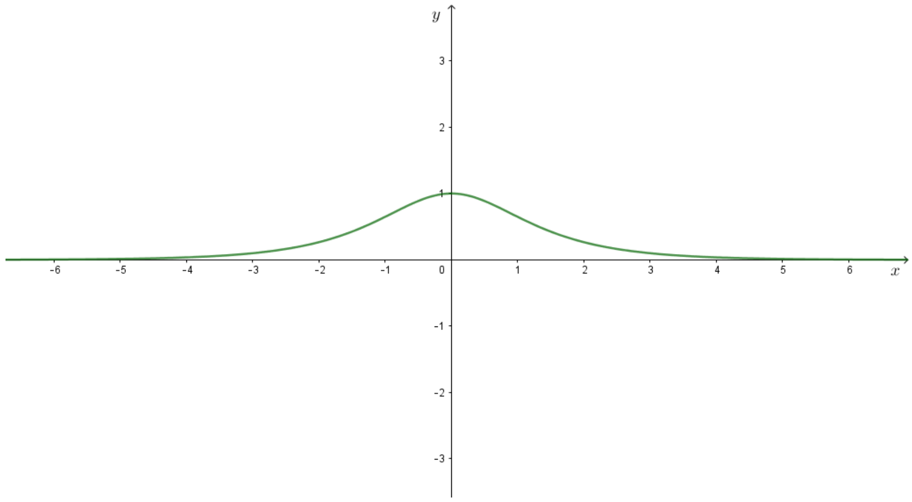
Substituindo (III) em (I), tem-se:

$$sech(x_1) - sech(x_2) < 0 \Rightarrow sech(x - 1) < sech(x_2).$$

Ou seja, se $x < 0$ a função $f(x) = sech(x)$ é crescente.

O gráfico da função secante hiperbólico está representado a seguir.

Figura 21 – Gráfico da função secante hiperbólica



Fonte: Autor (2020)

2.2.6 Função Cotangente Hiperbólico

Definição 14. *A função cotangente hiperbólico (representada simbolicamente por $cotgh$) de um arco x é definida por*

$$cotgh(x) = \frac{cosh(x)}{senh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Na função $cotgh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ tem-se:

1. Domínio é o conjunto $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ e a imagem é a união de intervalos $Im = (-\infty, -1)$ $\cup$ $(1, \infty)$;
2. A função $cotgh(x)$ é impar, isto é $cotgh(-x) = -cotgh(x)$. Pra verificar esta afirmação, basta tomar:

$$cotgh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{e^{-x} - e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{e^{-x} - e^{x}} = -\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -cotg(x);$$

3. É injetiva. Para verificar este fato, tome x_1 e x_2 do domínio de f e suponha que $f(x_1) = f(x_2)$, basta mostra que $x_1 = x_2$. Assim, tome:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow cotgh(x_1) = cotgh(x_2) \Rightarrow \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{e^{x_1} - e^{-x_1}} = \frac{e^{x_2} + e^{-x_2}}{e^{x_2} - e^{-x_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{x_1+x_2} + e^{x_2-x_1} - e^{x_1-x_2} - e^{-x_1-x_2} = e^{x_1+x_2} + e^{x_1-x_2} - e^{x_2-x_1} - e^{-x_1-x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot e^{x_2 - x_1} = 2 \cdot e^{x_1 - x_2} \Rightarrow e^{x_2 - x_1} = e^{x_1 - x_2} \Rightarrow x_2 - x_1 = x_1 - x_2 \Rightarrow 2x_2 = 2x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2.$$

4. Não é sobrejetiva, pois se tomarmos $y = 0$, por exemplo, não existe x do domínio tal que $cotgh(x) = 0$, pelo fato do $senh(0) = 0$;
5. Como a função $cotgh(x)$ não é sobrejetiva, então não é bijetiva;
6. É decrescente, ou seja dados x_1 e x_2 do domínio com $x_1 < x_2$, tem-se que $cotgh(x_1) >$ $> cotgh(x_2)$.

   Para verificar este fato, inicialmente será encontrada uma expressão para representar $cotgh(x_1) - cotgh(x_2)$.

$$cotgh(x_1) - cotgh(x_2) = \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{e^{x_1} - e^{-x_1}} - \frac{e^{x_2} + e^{-x_2}}{e^{x_2} - e^{-x_2}} =$$

$$= \frac{e^{x_1+x_2} + e^{x_2-x_1} - e^{x_1-x_2} - e^{-x_1-x_2} - e^{x_1+x_2} - e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1} + e^{-x_1-x_2}}{(e^{x_1} - e^{-x_1})(e^{x_2} - e^{-x_2})}.$$

$$= \frac{2 \cdot (e^{x_2-x_1} - e^{x_1-x_2})}{(e^{x_1} - e^{-x_1})(e^{x_2} - e^{-x_2})}. \qquad (I)$$

   Daí, no estudo da cossecante, anteriormente, foi verificado que $(e^{x_1} - e^{-x_1})(e^{x_2} - e^{-x_2}) > 0$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$, com $x_1 < x_2$. Dessa forma precisamos apenas verificar o sinal de $(e^{x_2-x_1} - e^{x_1-x_2})$. Assim, note que:

$$e^{x_2-x_1} - e^{x_1-x_2} = \frac{e^{x_2}}{e^{x_1}} - \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}}.$$

   Como tomamos $x_1 < x_2$ então,

$$e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow \frac{e^{x_2}}{e^{x_1}} > 1 \text{ e } 0 < \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} < 1 \Rightarrow$$
$$\frac{e^{x_2}}{e^{x_1}} - \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} > 0. \qquad (II)$$

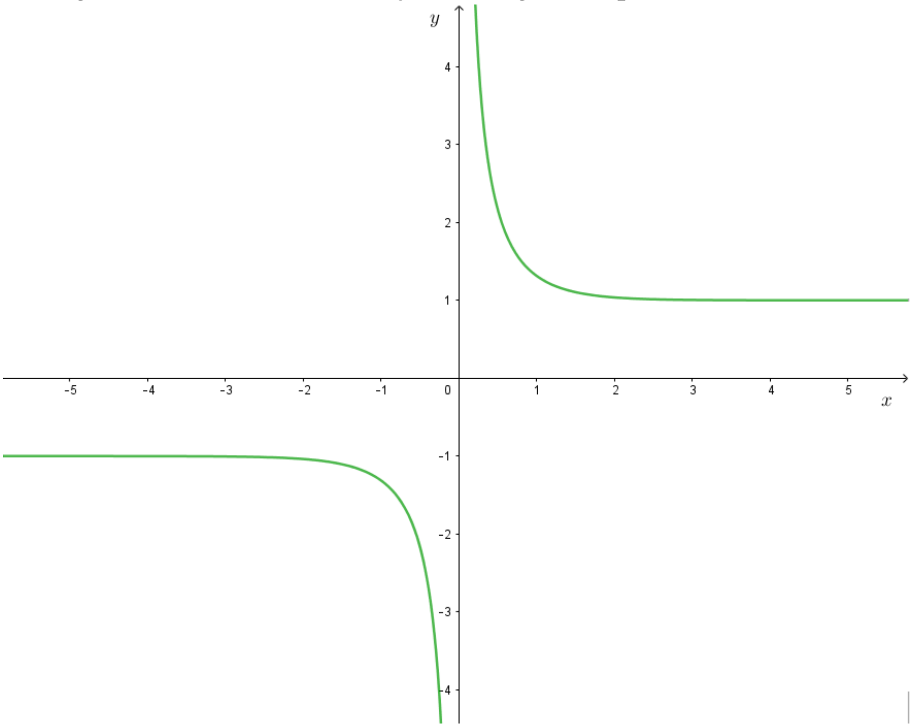
   Usando (II) e o fato de $(e^{x_1} - e^{-x_1})(e^{x_2} - e^{-x_2}) > 0$ na igualdade (I), tem-se:

$$cotgh(x_1) - cotgh(x_2) > 0 \Rightarrow cotgh(x_1) > cotgh(x_2).$$

   Sendo assim, a função $f(x) = cotgh(x)$ decrescente em todo o seu domínio.

O gráfico da função Cotangente hiperbólico está representado a seguir.

Figura 22 – Gráfico da função cotangente hiperbólica



Fonte: Autor (2020)

2.3 Relações entre funções hiperbólicas e funções trigonométricas

Para fazer a relação entre funções hiperbólicas e funções trigonométricas é necessário utilizar a fórmula de Euler.

$$e^{ix} = \cos(x) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(x), \tag{2.1}$$

em que $i^2 = -1$ e i é a unidade imaginária complexa.
Da relação (2.1), conclui-se que:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \tag{2.2}$$

$$sen(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{2.3}$$

Exemplo 1. *Para demonstrar que* $\cos(ix) = \cosh x$*, procede-se assim:*

Solução: Usa-se a relação $\cos(xy) = \frac{e^{xyi}}{2} + \frac{e^{-xyi}}{2}$*, obtida por meio de (2.2). Fazendo* $y = i$ *conclui-se que:*

$$\cos(ix) = \frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{x}}{2} = \cosh(x).$$

De modo semelhante obtêm-se as seguintes relações entre as principais funções hiperbólicas e trigonométricas.

$$sen(ix) = isenx \tag{2.4}$$
$$\cos(ix) = \cosh x \tag{2.5}$$
$$\tan(ix) = i\tanh x \tag{2.6}$$
$$\cos(x) = \cosh(ix) \tag{2.7}$$
$$sen(x) = isen(-ix) \tag{2.8}$$
$$\tan(x) = i\tanh(-ix) \tag{2.9}$$

A partir das relações $\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ e $\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ obtém-se as relações a seguir.

$$(sen(x) + \cosh(x))^m = (e^x)^m = e^{mx} = sen(mx) + \cosh(mx) \tag{2.10}$$

$$\cosh^2(x) - \text{senh}^2(x) = 1 \tag{2.11}$$
$$e^{-x}(sen(x) + \cosh(x)) = 1 \tag{2.12}$$
$$e^{x}(sen(x) - \cosh(x)) = -1 \tag{2.13}$$

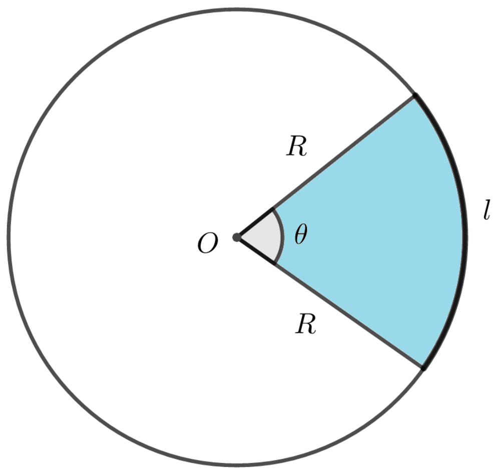
$$\left(\frac{sen(x) + \cosh(x)}{\cosh(x) - sen(x)}\right) = e^{2x} \tag{2.14}$$
$$(sen(x) + \cosh(x))^2 = e^{2x} \tag{2.15}$$

Tanto na trigonometria como na geometria hiperbólica existe o conceito de ângulo. Na geometria plana, sabe-se que a definição de ângulo é dada por:

$$\theta = \frac{l}{R} \tag{2.16}$$

em que θ é o ângulo subentendido pelo arco de comprimento l e raio R.

Figura 23 – Ângulo θ na circunferência.



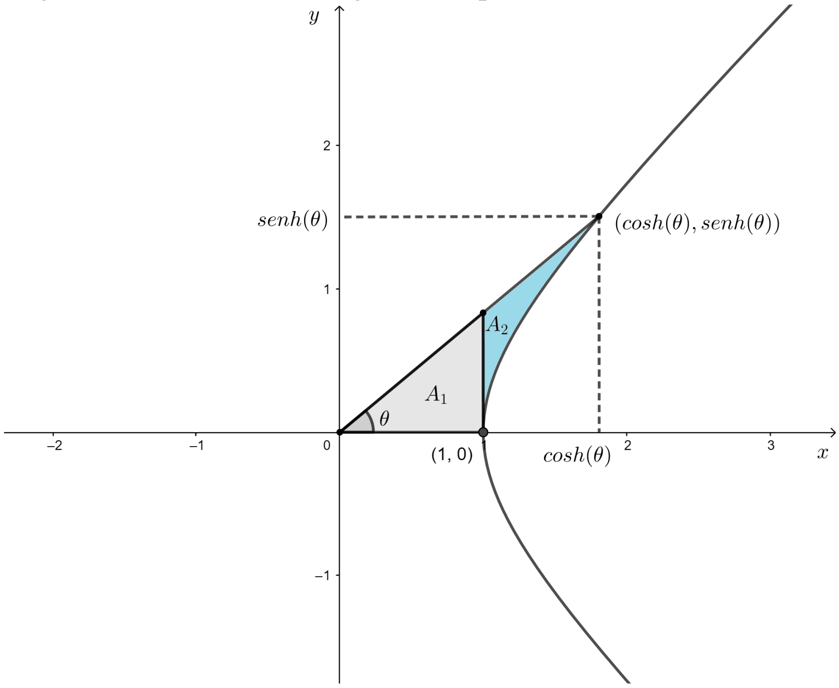
Fonte: Autor (2020).

Na geometria hiperbólica, o conceito de ângulo hiperbólico muda. Os resultados a seguir formalizam o conceito de Ângulo hiperbólico.

Proposição 1. *Na geometria hiperbólica, o ângulo hiperbólico θ é dado por $\theta = 2A$, em que A é a área do arco hiperbólico.*

Demonstração. Considere a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$, parametrizada como $x = cosh\theta$ e $y = senh\theta$. Considere a figura abaixo dividida nas regiões A_1 e A_2. Seja $A = A_1 + A_2$, com $0 \leq x \leq 1$ para a região A_1 e $1 \leq x \leq cosh\theta$ para a região A_2.

Figura 24 – Cálculo do ângulo na hipérbole



Fonte: Autor (2020).

A área da região A_1 é a área limitada pela reta que passa pelos pontos $(0,0)$ e $(cosh(\theta), senh(\theta))$ que é definida por $f(x) = \dfrac{senh\theta}{\cosh\theta}x$ e o eixo x, no intervalo que vai de 0 a 1 no eixo x. Assim, para calcular essa área, basta calcular a integral definida da reta $f(x)$ de 0 a 1.

$$A_1 = \int_0^1 \left(\frac{senh\theta}{\cosh\theta}x\right) dx = \frac{senh\theta}{2cosh\theta}. \tag{2.17}$$

A área da região A_2 está compreendida entre a reta $f(x) = \dfrac{senh\theta}{\cosh\theta}x$ e a curva $g(x) = \sqrt{x^2-1}$. Como a cruva está abaixo da reta, para calcular essa área, basta determinar o valor da integral definida da diferença entre $f(x)$ e $g(x)$ de 1 a $cosh(\theta)$.

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_1^{cosh\theta} \left(\frac{senh\theta}{\cosh\theta}x - \sqrt{x^2-1}\right) d\theta & (2.18)\\ &= \frac{senh^2\theta senh\theta}{2cosh\theta} - \frac{cosh\theta senh\theta}{2} + \frac{ln(cosh\theta + senh\theta)}{2}. & (2.19)\\ & & (2.20)\end{aligned}$$

Deste modo, a área da região A é:

$$A = \frac{ln(cosh\theta + senh\theta)}{2}. \tag{2.21}$$

Simplificando a expressão 2.21 , tem-se:

$$A = \frac{ln(cosh\theta + senh\theta)}{2} = \frac{ln\left(\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}+e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}\right)}{2} = \frac{lne^{\theta}}{2} = \frac{\theta}{2}. \tag{2.22}$$

logo, $\theta = 2A$. □

Proposição 2. *A razão (em unidades de comprimento u.c) entre a medida do ângulo trigonométrico ($\theta_{trigonometrico}$) e o ângulo hiperbólico ($\theta_{hiperbolico}$) é dada por:*

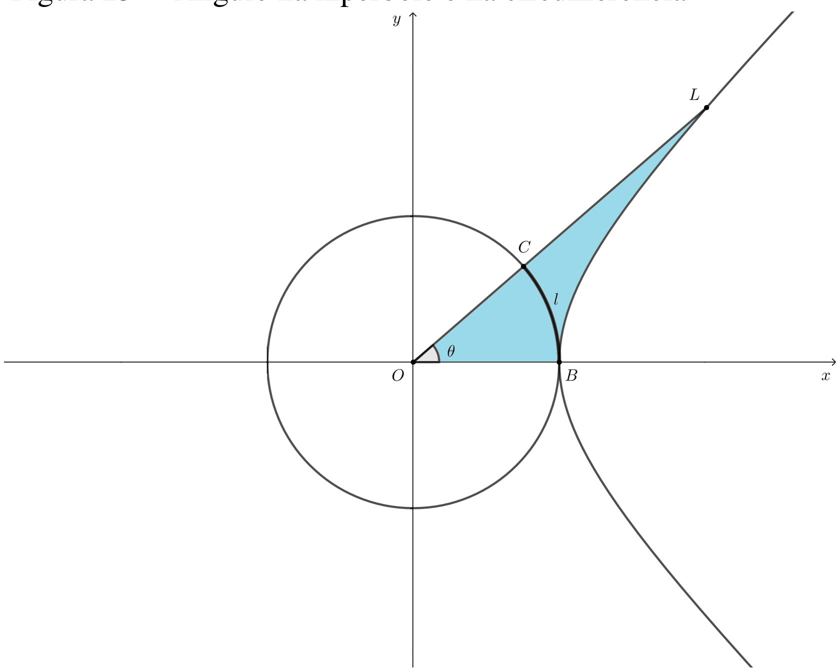
$$\frac{\theta_{trigonometrico}}{\theta_{hiprbolico}} = \frac{l}{2RA}u.c \tag{2.23}$$

Quando o raio é 1 *tem-se*

$$\frac{\theta_{trigonometrico}}{\theta_{hiprbolico}} = \frac{l}{2A}u.c \tag{2.24}$$

Em que A é a área do setor OLB, e l e θ são mostrados na figura a seguir.

Figura 25 – Ângulo na hipérbole e na circunferência



Fonte: Autor (2020).

Demonstração. A demonstração desta proposição é decorrente da Equação (2.16) e da Proposição 1. □

2.4 Uso de Novas Tecnologias no Ensino de Matemática

É indiscutível que as novas tecnologias são desenvolvidas para ajudar e facilitar vários aspectos da vivencia cotidiana do ser humano. Dessa forma, na educação não seria diferente, saber adicionar as novas tecnologias no planejamento diário do professor é uma forma de chamar a atenção do aluno para o estudo do conteúdo abordado de uma forma diferente e facilitadora.

Hoje em dia, com o avanço do mundo tecnológico, é inaceitável por exemplo que escolas e universidades não possuam ao menos um laboratório de informática com computadores disponíveis para o uso de professores e alunos. Para WEINERT et al (2011), com a tecnologia a disposição da educação, cabe ao docente não somente educar com a tecnologia mas também educar para a tecnologia.

Para MORAN (2006) as tecnologias servem como pontes, que abrem as portas das salas de aula para o mundo, que medeiam o nosso conhecimento do mundo. MORAN (2006) também enfatiza que as novas tecnologias apresentam diferentes formas de representação da realidade, mais abstrata ou concreta, estática ou dinâmica, linear ou paralela, porém, combinando-as (todas elas), possibilitam uma melhor apreensão da realidade, além de desenvolver todas as potencialidades do aluno.

Muitos professore sentem dificuldades em utilizar novas tecnologias em suas aulas, vezes por falta de conhecimento, vezes por não concordar com a metodologia. Alguns até concordam que é um meio que pode ter grandes contribuições em suas aulas, mas não sabem como fazer, como usar. Por outras vezes sentem medo de inovar-se, medo de não conseguir se adaptar diante dos seus alunos. A verdade é que os professores, precisam ter o interesse e a vontade de estudar para conhecer melhor, e usar nas suas aulas da melhor forma possível.

No estudo da matemática, com o uso de um computador, um celular ou até mesmo um tablet consegue-se usar diversos programas ou aplicativos (ou até mesmo online em alguns casos, sem a necessidade de instalação) que podem auxiliar o professor em suas aulas como, por exemplo o GeoGebra e o Simbolab que serão apresentados no decorrer deste trabalho. Vale salientar que estes meios apresentados podem ser usados tanto para aulas presencias como para aulas remotas.

Como este trabalho trata-se do estudo de algumas funções, a construção gráfica facilita muito o entendimento e até mesmo a comparação de comportamento entre elas, e os meios tenológicos podem ajudar aos alunos a compreenderem melhor esses comportamentos tendo em vista que eles podem manipular (no ambiente escolhido) da forma que desejar e visualizar rapidamente o resultado instantâneo.

3 ABORDAGEM DAS ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS

Neste capítulo é abordado as metodologias sugeridas para o estudos de funções trigonométricas e funções hiperbólicas. Tais sugestões utilizam de recursos educacionais tecnológicos como por exemplo, uso de softwares, linguagens de programação, aplicativos para celular e tablets.

3.1 Uso de Softwares no Estudo das Funções Trigonométricas e Hiperbólicas

Um clássico software usado no estudo da matemática é o GeoGebra. Por ser uma ferramenta livre, o usuário tem a possibilidade de utilizá-lo e ainda fazer colaborações com o desenvolvedor. O GeoGebra, além de possuir o programa para ser instalado tanto em computadores como em celulares e tablets, possui também a sua versão online (que pode ser acessada por meio do link www.geogebra.org) onde o usuário não necessita de nenhuma instalação para ter acesso, precisando apenas de um dispositivo com internet.

Outro software que será proposto nesse trabalho é o Symbolab, este bem mais novo que o GeoGebra. Segundo a Wikipédia, o Symbolab foi criado no ano de 2011 pelos israelenses Michael Avny, Adam Arnon e Lev Alyshayev. Esse software tem a capacidade de interpretar uma expressão ou equação matemáticas ou problema simbólico e apresentar sua solução caso exista, além de outras funções muito importantes para o estudo de diversas subáreas da matemática. Além disso, esse software tem a capacidade de reconhecer os caracteres por meio de fotografia, o que é uma excelente opção para alunos que possua algum tipo de deficiência que o impossibilite de digitar. Assim como o GeoGebra, o Symbolab também possui sua versão online (que pode ser acessada por meio do link pt.symbolab.com) que é um site que pode ser acessado por qualquer dispositivo com internet sem a necessidade de instalar o software.

Além desses dois, será proposto também um algoritmo usando a linguagem de programação, onde para usa-la, será usada a plataforma google colab que é possível usa-lo online, sem a necessidade de instalação de software nem no computador nem no celular. A linguagem Python é uma linguagem acessível e muito popular em setores da industria de tecnologia. É uma linguagem de alto nível, e por isso acaba sendo de mais fácil manuseio por pessoas que não têm um alto conhecimento na área de programação. A ideia é usar essa linguagem nesse trabalho, para fazer algumas contas automáticas nas funções propostas. Vale salientar também, que o google Collaboratory ou colab é um ambiente que utiliza a linguagem Python e é possível usa-lo de forma online, onde o armazenamento é feito em nuvem, ou seja, não precisa de armazenamento no computador. É uma especie de notebook online, que não necessita nem do uso do processador da sua maquina, ele usa o processador do google, ou seja, para acessar o google colab é necessário apenas ter um computador com acesso a internet, o resto é feito tudo online, inclusive o armazenamento.

As propostas de abordagens desses dois softwares (GeoGebra e Symbolab), além da linguem de programação, serão distintas, afinal o GeoGebra é um software que tem como principal proposta o estudo geométrico, já o Symbolab possui mais contribuições para a parte algébrica da matemática, e a linguagem Python será apresentada apenas como uma forma de fazer contas numéricas. Sendo assim, adiante serão apresentadas as abordagens de ambos no estudo das funções propostas.

3.1.1 Symbolab

Nessa parte serão estudadas as funções no software Symbolab. Inicialmente, observe quais as informações que ele apresenta ao apenas digitar as funções $sen(x)$ e $senh(x)$ por exemplo.

Figura 26 – Função seno trigonométrica no Symbolab

Fonte: App Symbolab (2021)

Figura 27 – Função seno hiperbólica no Symbolab

Fonte: App Symbolab (2021)

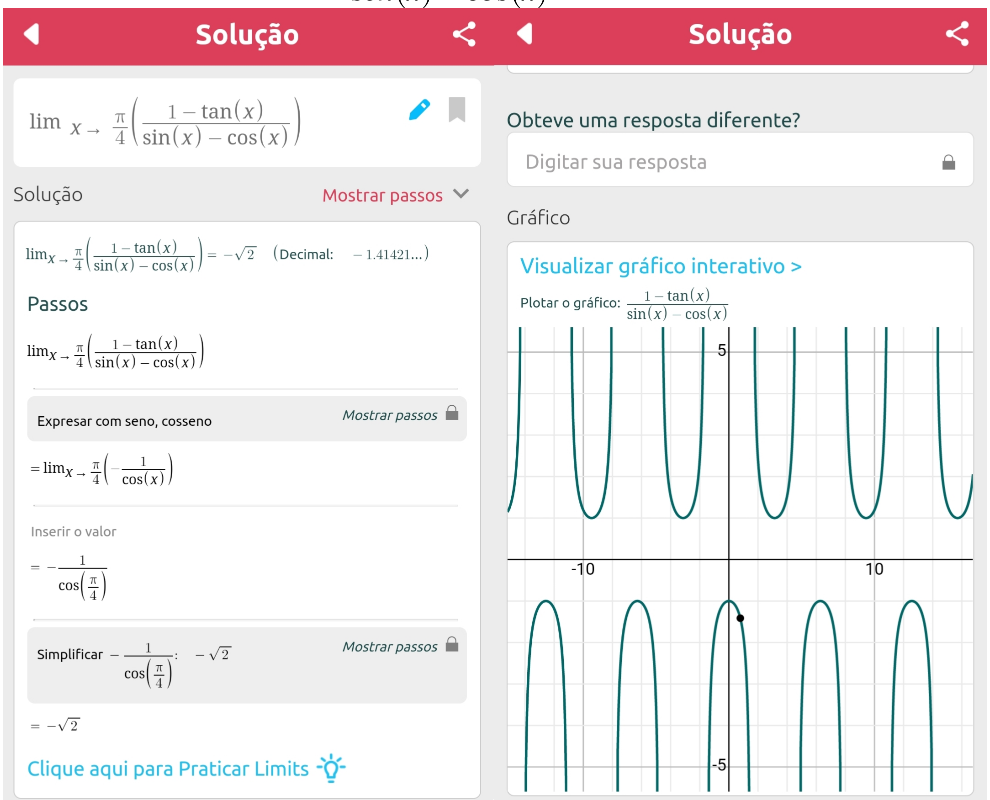
Note que, ao apenas digitar as funções desejadas o software já faz um breve estudo básico para o leitor, apresentando período (caso tenha), domínio, imagem, pontos em que a função intercepta os eixos das ordenadas e das abcissas no plano, assíntotas (caso tenha), pontos de máximo e mínimo (caso tenha) além de apresentar a construção gráfica da função. Veja que as informações são bem resumidas porém de grande importância para qualquer estudante que deseje fixar o conteúdo estudado no livro ou fazer uma revisão, sendo este bem objetivo nas informações apresentadas. Vale salientar, que estas são as informações apresentadas pelo software apenas ao digitar a função na sua tela, sem solicitar nenhum tipo de conta ou informação adicionais.

Porém, a proposta para uso deste software neste trabalho está voltada mais para a parte algébrica, na observação de resolução de alguns problemas envolvendo as funções trigonométricas e hiperbólicas, afinal, as ferramentas que ele possui são bem mais abrangentes na parte algébrica, sendo assim será abordada com a parte geométrica para o GeoGebra que será o próximo software a ser sugerido.

Veja, por exemplo, o que o Symbolab apresenta ao adicionar a ele o problema proposto na página 179 do Capítulo 3 do livro do James Stewart. O exercício pede para calcular o valor do

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - tg(x)}{sen(x) - cos(x)}$$

Figura 28 – $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - tg(x)}{sen(x) - cos(x)}$ no Symbolab



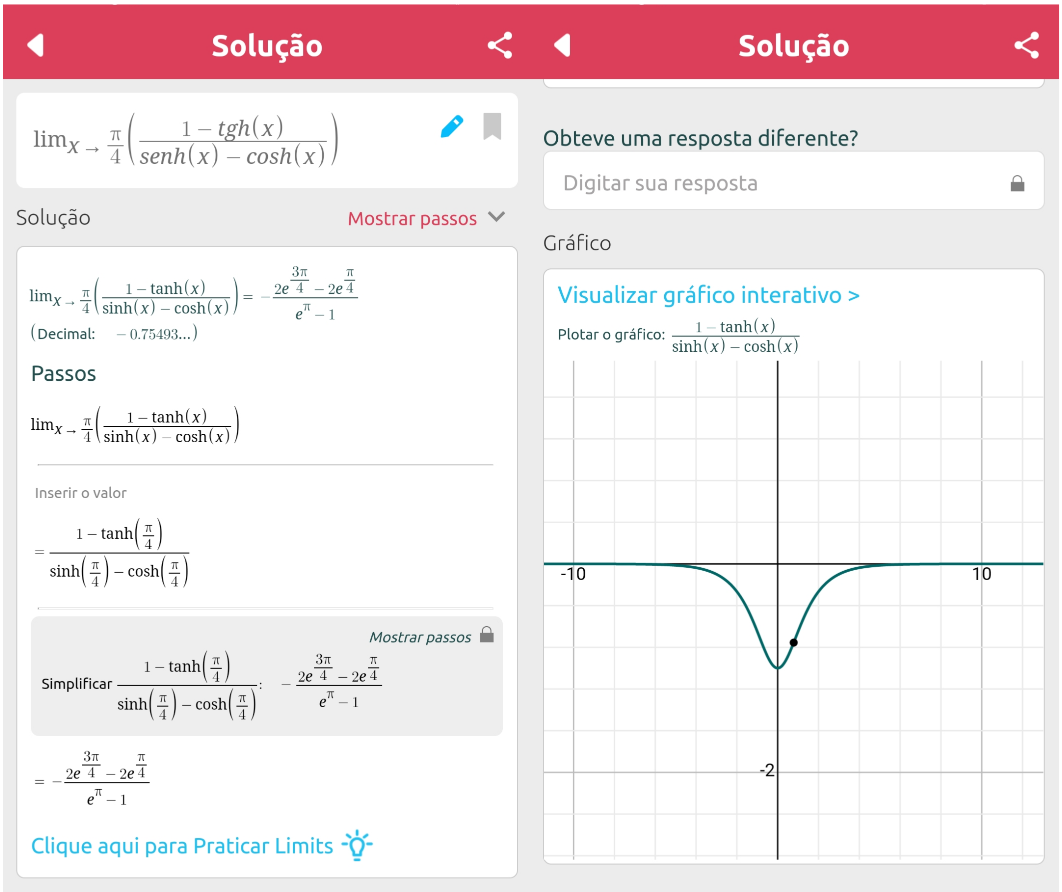
Fonte: App Symbolab (2021)

Observe que o software apresenta a solução na forma de raiz e na forma decimal, além de apresentar uma dica de o que o aluno deve fazer para chegar na solução correta, que seria expressar o problema em seno e cosseno. Além disso, ele também mostra o gráfico da função original informando onde está o limite desejado no problema (ponto no gráfico na parte inferior na Figura 28). A ideia, nessas informações apresentadas no softwares, é direcionar o aluno a conseguir fazer o cálculo do problema com dicas e pequenas informações que o ajude. A representação gráfica que ele apresenta também, pode ajudar o aluno a visualizar o resultado do problema e associar com o resultado encontrado algebricamente.

Vamos pegar esse mesmo problema e adaptá-lo aplicando-o no contexto de função hiperbólica para observar o que o software informa. Será adicionado a ele o problema

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - tgh(x)}{senh(x) - cosh(x)}$$

Figura 29 – $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-tgh(x)}{senh(x)-cosh(x)}$ no Symbolab



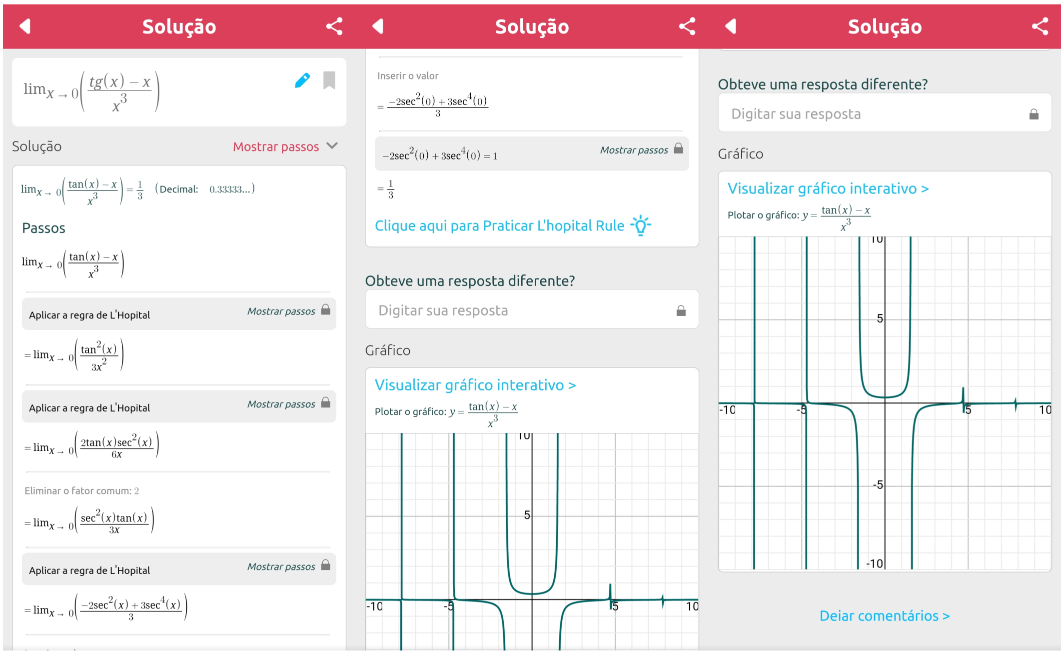
Fonte: App Symbolab (2021)

Note que, da mesma forma que no problema anterior, o software apresentou o resultado final do problema na forma fracionária e decimal, seguido de algumas dicas para o leitor. Para este problema, ele apresenta apenas uma dica para resolve-lo, que é simplificar a expressão que contém seno, cosseno e tangente hiperbólicos do arco $\dfrac{\pi}{4}$ onde para isso o aluno precisará lembra da representação exponencial das funções hiperbólicas.

Veja agora a solução apresentada para o Exemplo 4, página 275, Capítulo 4 do livro do James Stewart. O exemplo pede para calcular o

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)-x}{x^3}$$

Figura 30 – $\lim_{x\to 0} \dfrac{tg(x)-x}{x^3}$ no Symbolab



Fonte: App Symbolab (2021)

Mais uma vez, na tela de solução o software apresenta a solução final na forma fracionaria e decimal e em seguida algumas dicas para chegar nessa solução. A principal dica apresentada foi a aplicação da regra de L'Hospital que está na Definição 15 a seguir. Pela dica apresentada, a regra deve ser aplicada 3 vezes sucessivas até que o aluno consiga chegar em uma expressão onde será possível substituir o valor da tendencia do x para encontrar a solução (eliminar a indeterminação no limite).

Definição 15. *(Regra de L'Hospital) Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad e \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, teremos uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$). Então

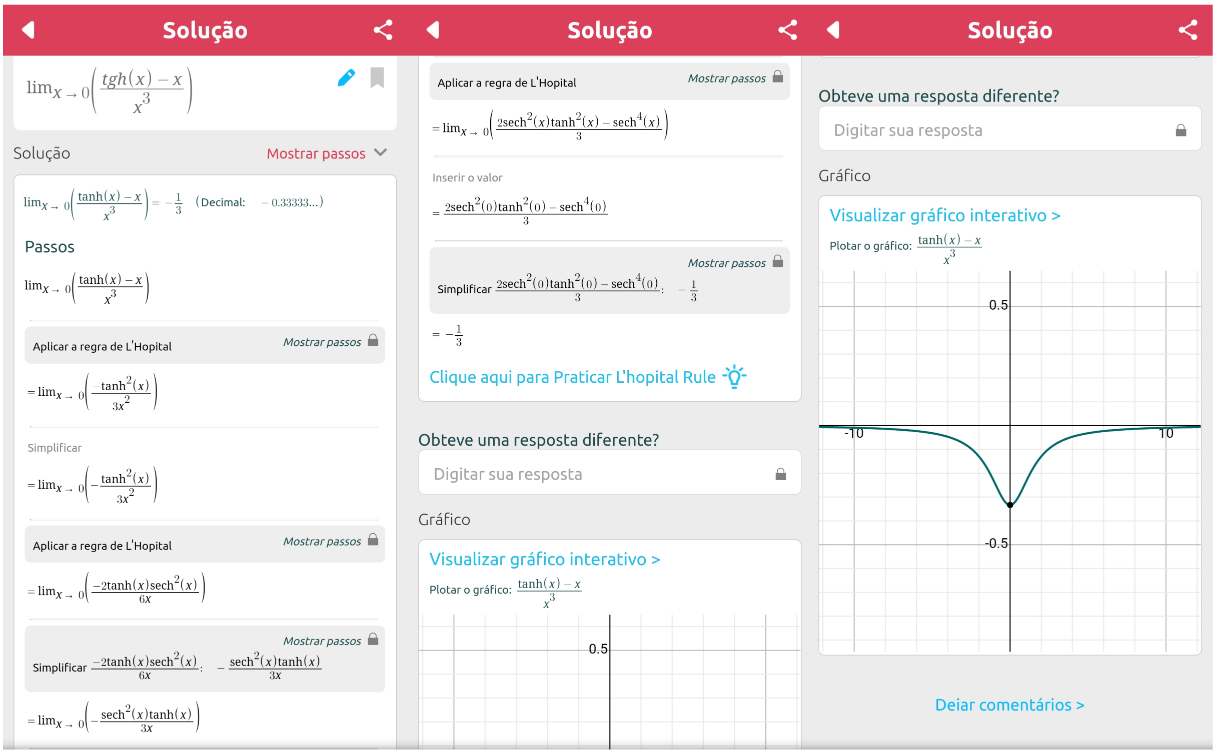
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for igual a $\pm\infty$).

Vamos adaptar esses mesmo problema, trocando a função trigonométrica pela hiperbólica. Será adicionado ao software o

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgh(x) - x}{x^3}.$$

Figura 31 – $\lim_{x \to 0} \dfrac{tgh(x) - x}{x^3}$ no Symbolab



Fonte: App Symbolab (2021)

Note que as dicas apresentadas para solucionar o problemas são bastante semelhantes as anteriores. Da mesma forma, a sugestão principal foi aplicar três vezes sucessivas a regra de L'Hopital, porém aqui o aluno deve ficar atento que, como trata-se de uma função hiperbólica envolvida no problema (a função $tgh(x)$), ele precisa usar a forma exponencial da mesma quando for aplicar a regra.

Veja agora, um exemplo usando derivadas. Esse é o exercícios de número 12, página 178, Capítulo 3 do livro do James Stewart. O exercício pede para calcular a derivada da função

$$y = \frac{cos(x)}{1 - sen(x)}.$$

Agora note o que o Symbolab apresenta na Figura 32.

Figura 32 – Derivada da função $y = \dfrac{cos(x)}{1-sen(x)}$ no Symbolab

Fonte: App Symbolab (2021)

Assim, é possível notar que a solução para o problema é a função derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-sen(x)}.$$

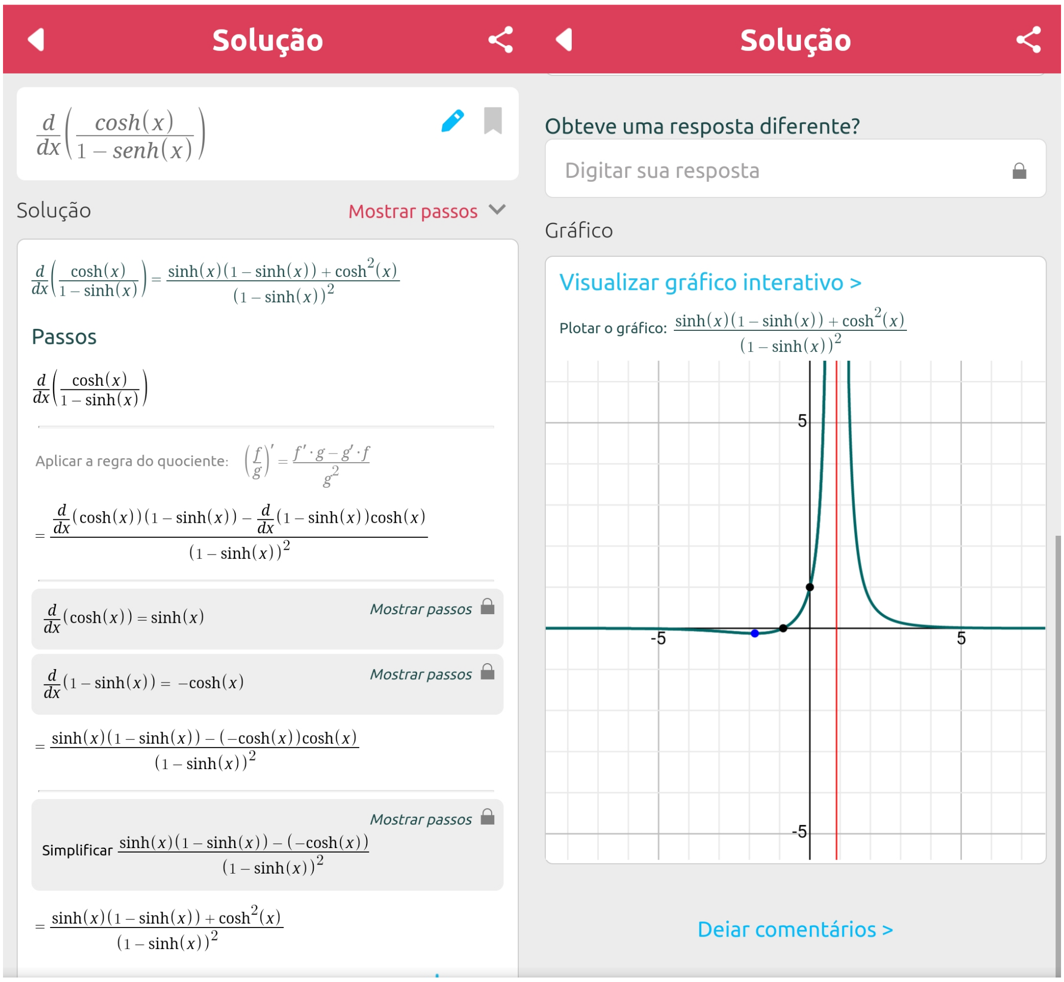
E, como dica o aplicativo sugere aplicar a regra do quociente, que está na Definição 16 abaixo. Além disso, ele já apresenta organizadamente separadas todas as derivadas que aparecerão ao aplicar tal regra, e monta a fração para o aluno apenas finalizar as contas e chegar ao resultado final. Outra apresentação muito importante que ele mostra é o gráfico da função derivada apresentando os pontos de interseção com os eixos (em preto) e os pontos críticos da função, que nesse caso são vários pontos de mínimo (pontos em azul).

Definição 16. *(Regra do Quociente) Se f e g são deriváveis, então*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\cdot\frac{d[f(x)]}{dx} - f(x)\cdot\frac{d[g(x)]}{dx}}{[g(x)]^2}.$$

Será usado agora, este mesmo exemplo porém substituindo as funções trigonométricas pelas hiperbólicas.

Figura 33 – Derivada da função $y = \dfrac{cosh(x)}{1 - senh(x)}$ no Symbolab



Fonte: App Symbolab (2021)

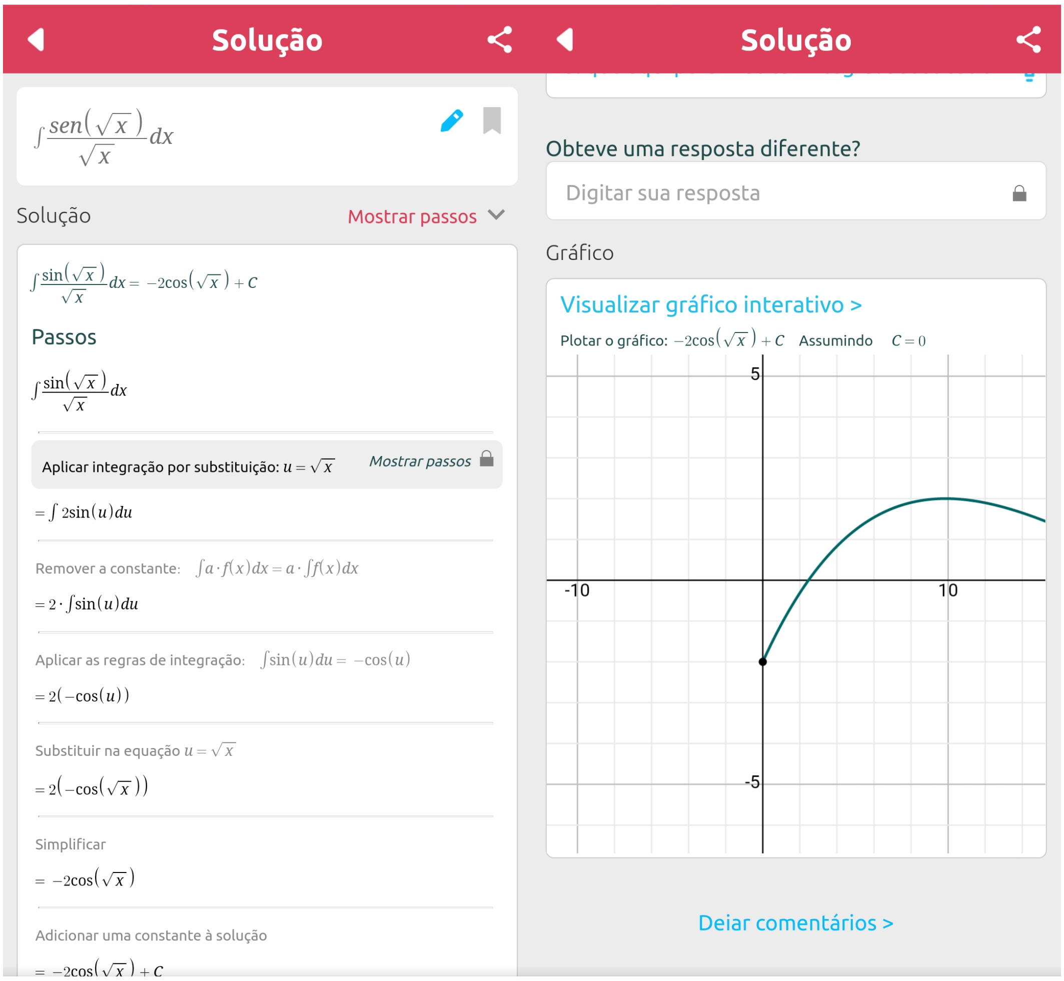
Veja, que o aplicativo resolve e apresenta dicas da mesma forma que o problema anterior (com as funções trigonométricas). A dica principal aqui, também é usar a regra do quociente e depois calcular as derivadas que aparecerão. O gráfico da função derivada aqui também é apresentado mostrando os pontos de interseção com os eixos do gráfico (pontos em preto) e o ponto crítico, que nesse caso é um ponto de mínimo (ponto em azul).

O último exemplo que será explorado no Symbolab é o exercício de número 18, página 374, Capítulo 5 do livro do James Stewart que pede para calcular

$$\int \frac{sen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx.$$

Veja o que o Symbolab sugere na figura 34

Figura 34 – Integral da função $y = \dfrac{sen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ no Symbolab



Fonte: App Symbolab (2021)

Para este problema, o App sugere usar a regra da substituição, que está na Definição 17. Após aplicar a regra, o cálculo da integral fica tranquilo de se realizar, como a imagem anterior mostra. Na solução, o app também alerta para a constante que dever ser adicionada no final do cálculo, parte importante e indispensável nas integrais indefinidas que alguns alunos geralmente esquecem quando estão resolvendo exercícios. Na verdade, essa constante serve para representar todas as primitivas da função que está integrando. Vale salientar que o gráfico apresentado, considerou a constante $C = 0$ pelo fato de ser a solução mais simples para o problema, já que ao mudar o valor de C o que acontecerá no gráfico é apenas uma translação vertical (para cima ou para baixo), uma vez que a inclinação de todas as funções dessa família será a mesma. Por fim, é construído o gráfico de uma função solução do problema (cada $C \in \mathbb{R}$ representa uma solução), que é uma função cosseno. Veja que o gráfico inicia no ponto cujo $x = 0$ e segue apenas para o lado não negativo do eixo x, isso ocorre pelo fato do arco ser $\sqrt{x}$, ou seja, isso limita o domínio da função apenas aos número reais não negativos.

Definição 17. *(Regra da substituição) Se $u = g(x)$ for uma função derivável, cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I, então*

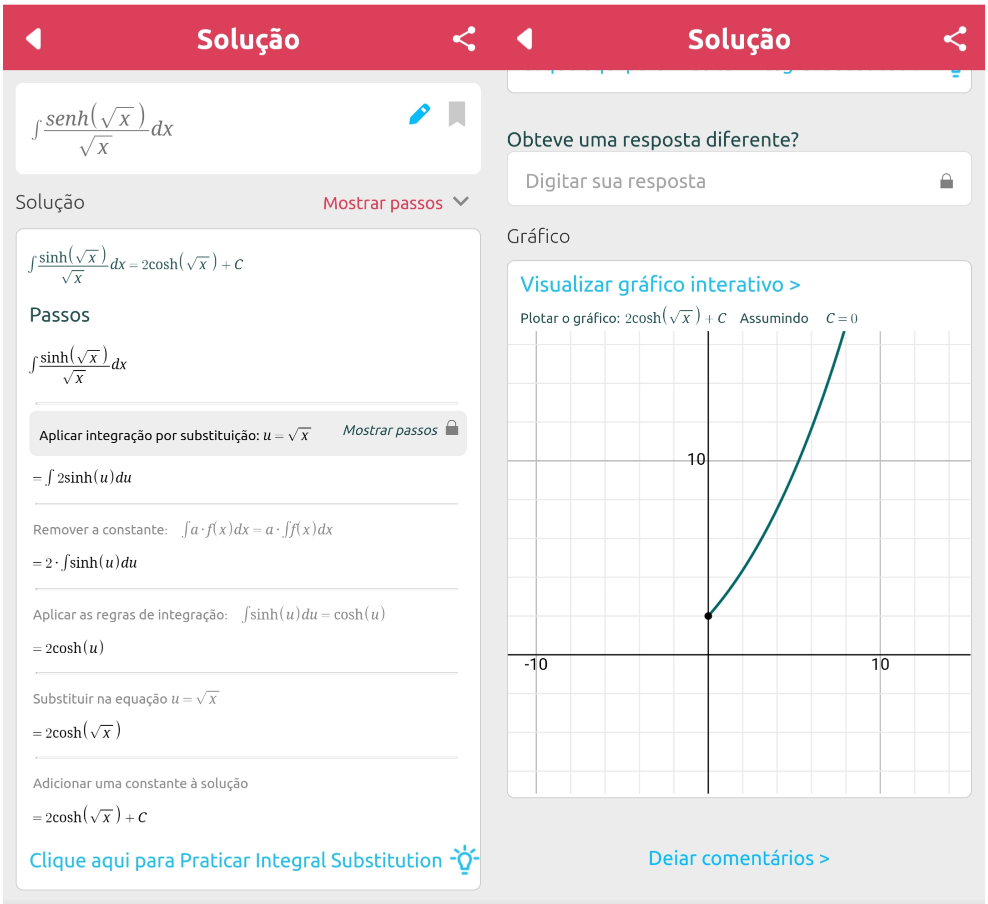
$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du.$$

Agora, vamos aplicar o mesmo problema às funções hiperbólicas para ver o que o app sugere. Será adicionado ao Symbolab o problema

$$\int \frac{senh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx.$$

Veja as sugestões na Figura 35.

Figura 35 – Integral da função $y = \dfrac{senh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ no Symbolab



Fonte: App Symbolab (2021)

Observe inicialmente, a grande semelhança no resultado do problema com o anterior, com diferença apenas no sinal. Isso ocorre pelo fato de $\int sen(x)dx = -cos(x)$ e $\int senh(x)dx = cosh(x)$. Mas, de fato a dica apresentada pelo app para solucionar o problema é a mesma do problema anterior, aplicar uma substituição.

É bastante notório e inegável que o Symbolab apresenta sugestões que são capazes de ajudar aos alunos a resolver estes tipos de problemas sugeridos (envolvendo funções trigonométricas e hiperbólicas). Com todos os exemplos apresentados anteriormente, pode-se perceber a proposta deste software, que é não só funcionar como calculadora (apresentar o resultado final do problema), mas também tentar direcionar o aluno no desenvolvimento da solução com suas dicas.

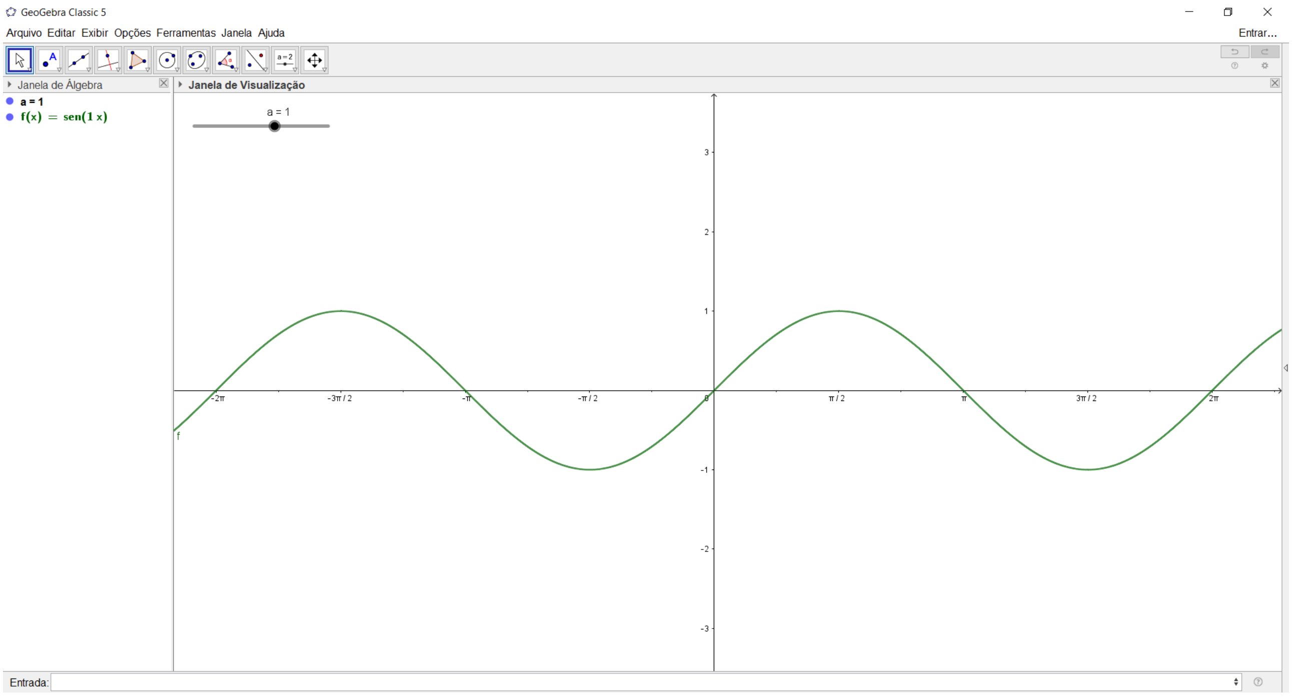
A seguir será apresentada uma proposta de estudo destas funções por meio do GeoGebra, esta agora, sendo uma proposta mais geométrica.

3.1.2 GeoGebra

A proposta para o uso do GeoGebra já é um pouco distinta da proposta apresentada anteriormente pelo uso do Symbolab, isso se dar pelo fato de o GeoGebra ser uma ferramenta bem mais geométrica. No GeoGebra é possível fazer um estudo geométrico das funções bem mais completo, com mais possibilidades de manipulação e criação dentro da plataforma que ele contém.

Serão tomados alguns exemplos de funções trigonométricas e hiperbólicas, para fazer uma análise geométrica geral delas. Veja, por exemplo, se tomarmos a função seno trigonométrica no arco ax, sendo a uma constante real.

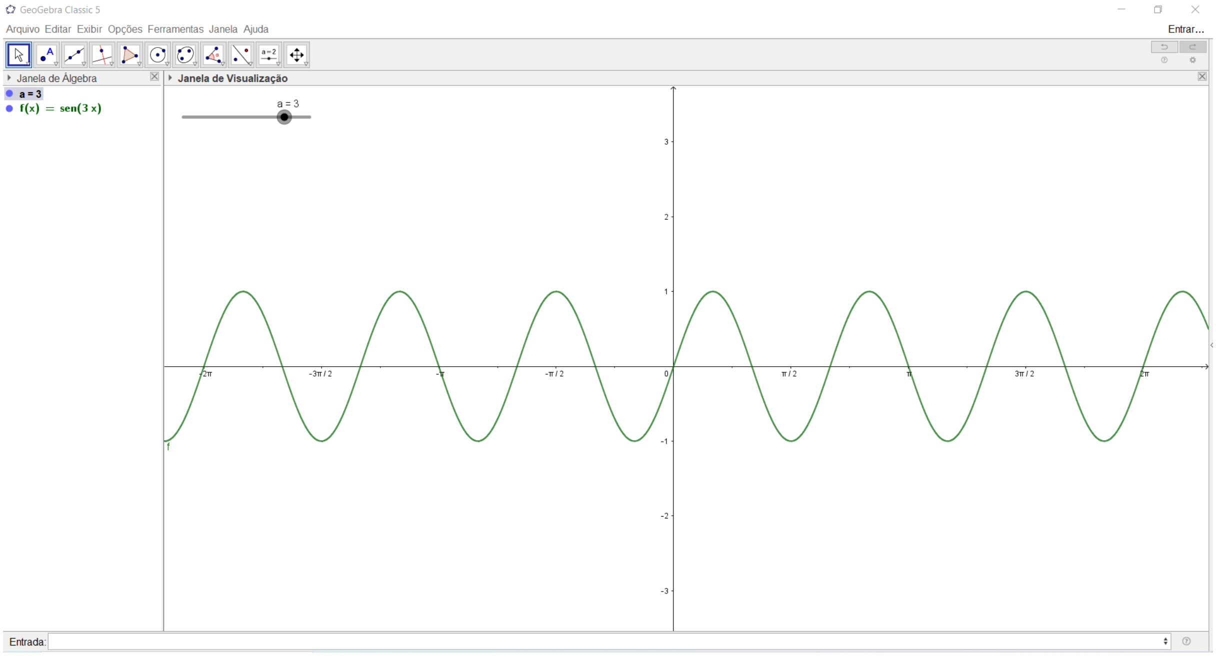
Figura 36 – Função $f(x) = sen(ax)$ no GeoGebra



Fonte: Autor (2021)

A Figura 36 mostra o que o GeoGebra apresenta ao digitar $f(x) = sen(ax)$ na barra inferior (barra de entrada). Note que na Janela de Álgebra do GeoGebra apareceu as informações $a = 1$ e $f(x) = sen(1x)$, e dentro da Janela de Visualização ele apresentou uma barrinha com o valor $a = 1$ em um ponto, e o gráfico da função. Essa barrinha que apareceu na Janela de Visualização, é chamada de "controle deslizante"que é usado para controlar o valor da constante a que está na lei da função escrita. Essa é uma ferramenta do GeoGebra que permite que o aluno movimente o ponto a sobre a barrinha para observar o que acontece com o gráfico da função na mesma hora. Veja, na Figura 37 o que acontece com o gráfico da função, se movimentarmos o valor de a para o valor 3.

Figura 37 – Função $f(x) = sen(ax)$ para $a = 3$



Fonte: Autor (2021)

Note que, comparando os gráficos das Figuras 36 e 37, o que difere ambos é apenas o período (o intervalo que a função começa a se repetir).

Para fazer uma comparação com o cálculo algébrico, observe as Tabelas 1 e 2 a seguir. É importante ressaltar que, na primeira coluna das Tabelas 1 e 2 foram tomados os valores de 0 a 2π, pelo fato da função $f(x) = sen(x)$ possuir período igual a 2π como foi mostrado no Capitulo 2 na Subseção 2.1.2, assim, tornando-se desnecessário tomar valores menores que 0 ou maiores que 2π para o arco da função.

x	$f(x) = sen(x)$	y
0	$sen(0)$	0
$\frac{\pi}{2}$	$sen(\frac{\pi}{2})$	1
π	$sen(\pi)$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$sen(\frac{3\pi}{2})$	-1
2π	$sen(2\pi)$	0

Tabela 1 – Determinação do período da função $f(x) = sen(x)$

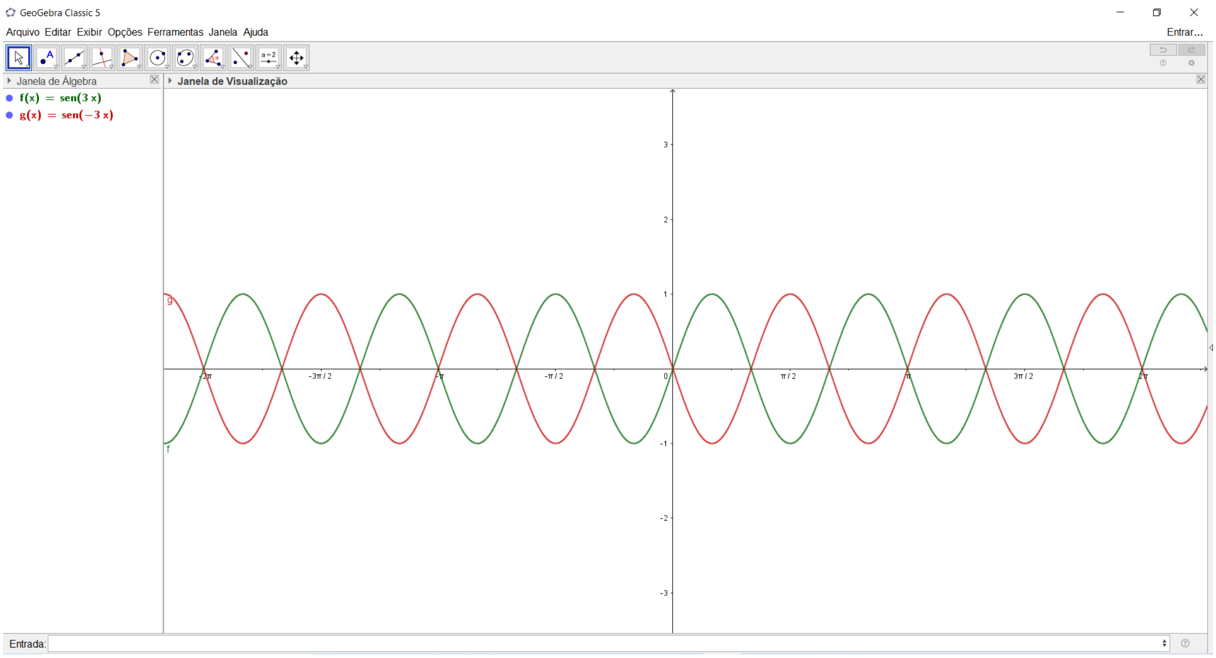
$w=3x$	x	$f(x)=sen(3x)$	y
0	0	$sen(0)$	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$sen(\frac{\pi}{2})$	1
π	$\frac{\pi}{3}$	$sen(\pi)$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$sen(\frac{3\pi}{2})$	-1
2π	$\frac{2\pi}{3}$	$sen(2\pi)$	0

Tabela 2 – Determinação do período da função $f(x)=sen(3x)$

Veja que o período da função $f(x)=sen(x)$ é $T=2\pi$ que seria a distância do zero ao 2π no eixo x. Já na função $f(x)=sen(3x)$, por outro lado, o período será $T=\frac{2\pi}{3}$, que seria a distância do zero ao $\frac{2\pi}{3}$ no eixo x. Como $\frac{2\pi}{3}<2\pi$, tem-se que a função $f(x)=sen(x)$ possui um período maior que o da função $f(x)=sen(3x)$.

Vamos analisar agora, o que acontece com a mesma função $f(x)=sen(ax)$ se tomarmos um a com mesmo valor em módulo, mas com sinal oposto. Como no exemplo da Figura 37 tomamos $a=3$, vamos tomar aqui $a=-3$.Veja o que o GeoGebra apresenta na Figura 38 abaixo.

Figura 38 – Função $f(x)=sen(3x)$ e $g(x)=sen(-3x)$



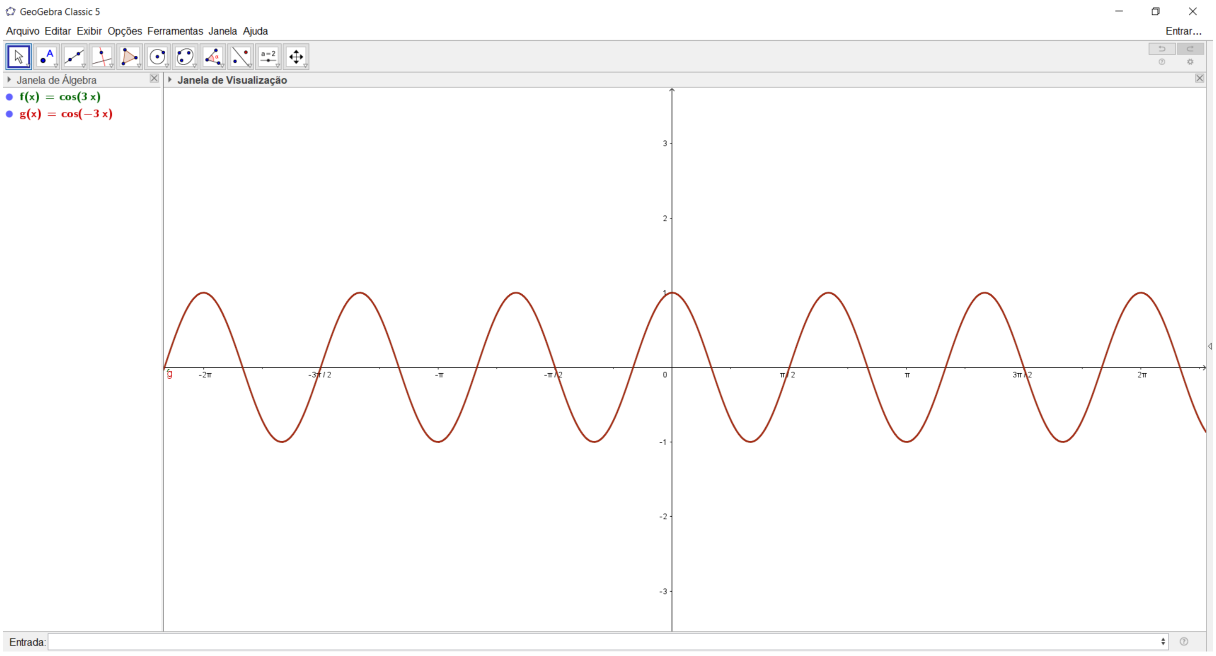
Fonte: Autor (2021)

Foram colocadas as duas funções simultaneamente, a curva na cor verde representa a função $f(x)=sen(3x)$ e a curva na cor vermelha representa a função $g(x)=sen(-3x)$. Visualmente, é possível notar que as funções possuem o mesmo período, porém, a diferença entre ambas é o conjunto imagem (é fácil identificar visualmente, por exemplo, que os extremos máximos e mínimos ficaram opostos em relação ao eixo y). Essa relação entre as imagens, se dá pelo fato da função seno ser impar ($f(-x) = -f(x)$).

Esse fato da função seno ser impar é bem fácil de ser notado na Figura 37. Basta observa por exemplo, que a imagem do $x = \frac{\pi}{2} = -1$ e a imagem de $x = -\frac{\pi}{2} = 1$, ou seja, a imagem de valores opostos são opostas.

Nas Figuras 39 e 40 abaixo, foram utilizados os mesmos arcos ($3x$ e $-3x$) para as demais funções trigonométricas (cosseno e tangente).

Figura 39 – Função $f(x) = cos(3x)$ e $g(x) = cos(-3x)$

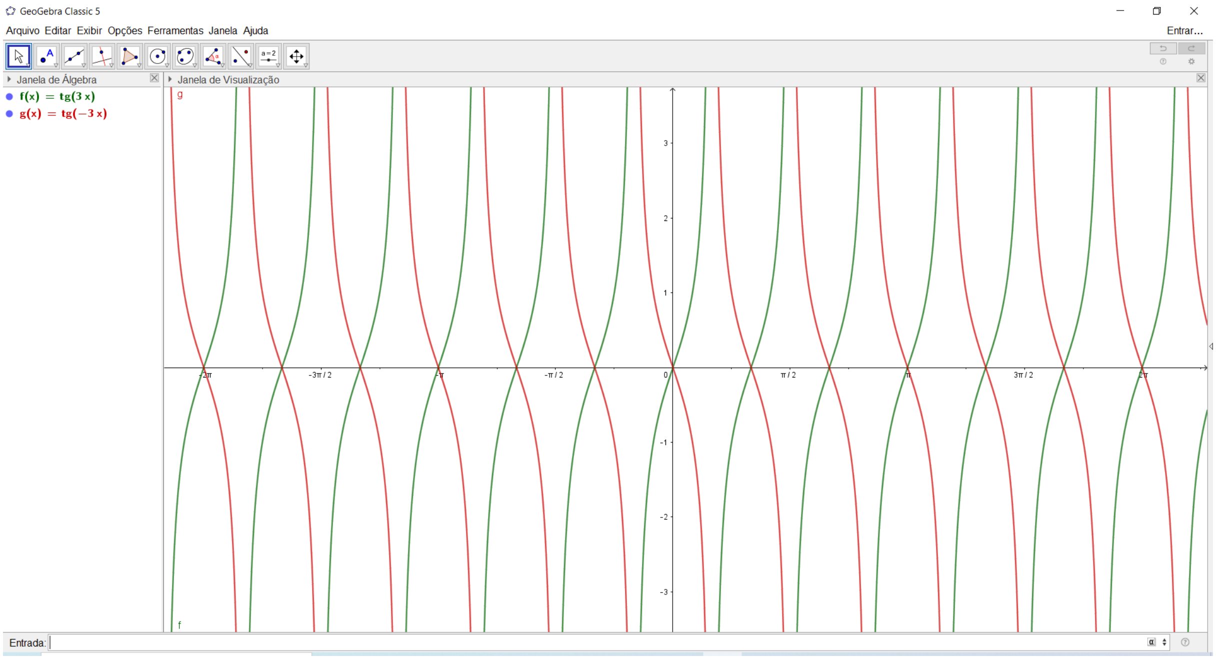


Fonte: Autor (2021)

Veja na Figura 39, que na janela de álgebra foram colocadas as duas funções ($f(x) = cos(3x)$ e $g(x) = cos(-3x)$), a primeira na cor verde e a segunda na cor vermelha, porém, na janela de visualização só aparece a segunda. Isso se dá, pelo fato de está uma curva sobre a outra, ou seja, essas duas funções são iguais. O que justifica essa ideia, é o fato da função cosseno ser par ($f(-x) = f(x)$). Outra forma de visualizar esse fato, no gráfico por exemplo, é observando alguns dos pontos de máximo ou mínimo. Veja que, os valores de $x = \pi$ e $x = -\pi$ possuem a mesma imagem, assim como $x = \frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$.

Já na Figura 40 acontece algo semelhante ao que aconteceu na Figura 38, ou seja, os valores da imagem de $f(x) = tg(3x)$ são opostos aos valores da imagem de $g(x) = tg(-3x)$ em relação ao eixo y. Isso ocorre porque a função tangente também é impar.

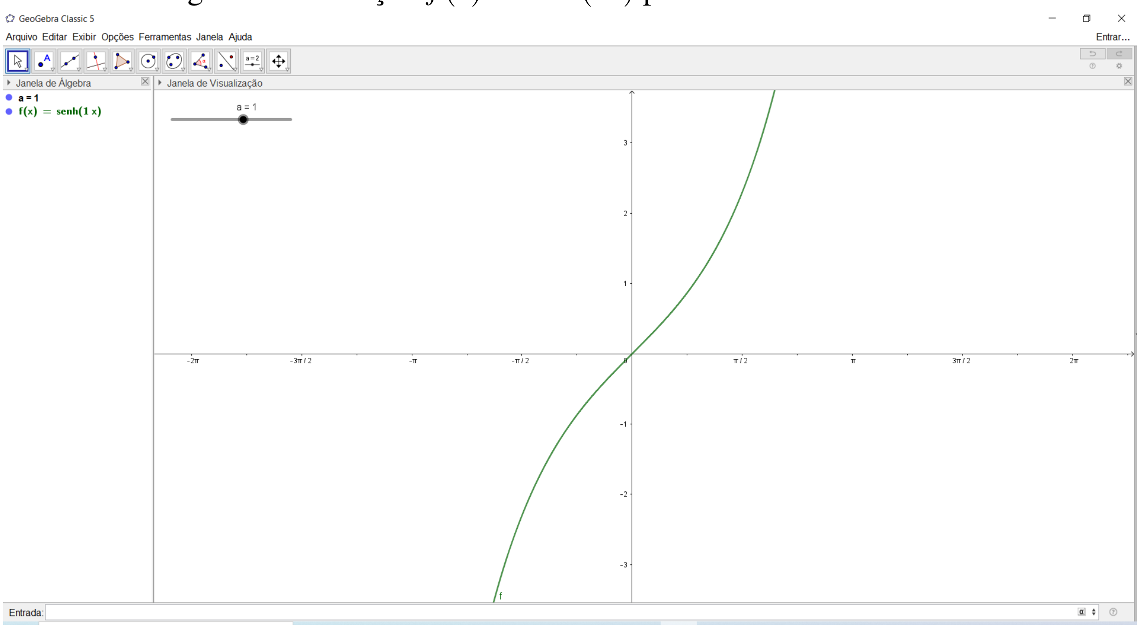
Figura 40 – Função $f(x) = tg(3x)$ e $g(x) = tg(-3x)$



Fonte: Autor (2021)

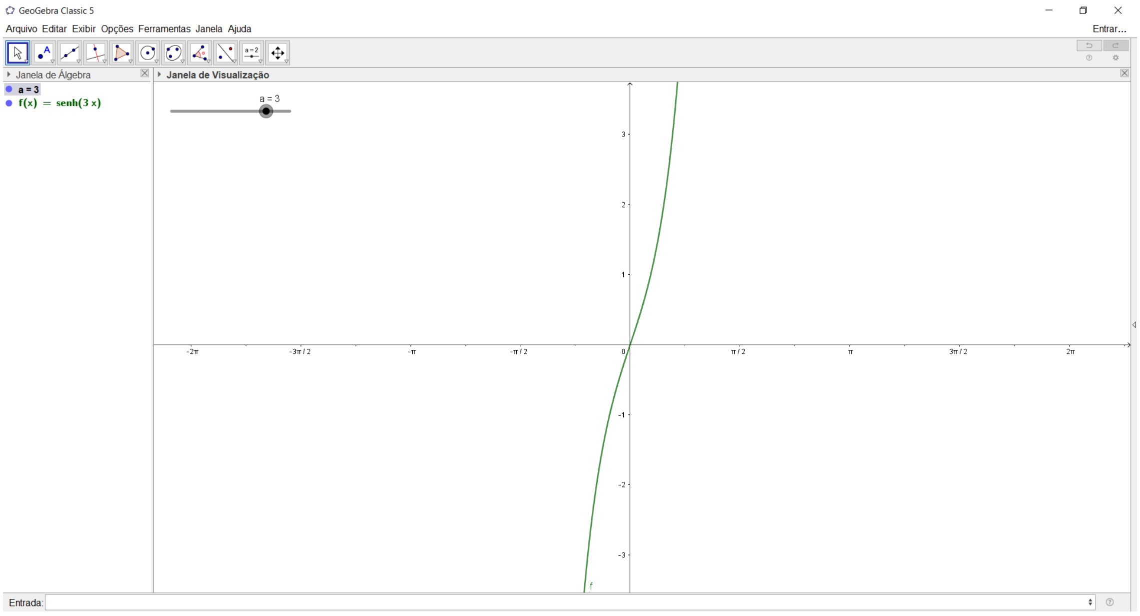
Agora, será feita a mesma análise com as mesmas ferramentas, porém usando as funções hiperbólicas. A primeira análise será com a função $f(x) = senh(ax)$, onde será tomado $a = 1$ e $a = 3$.

Figura 41 – Função $f(x) = senh(ax)$ para $a = 1$



Fonte: Autor (2021)

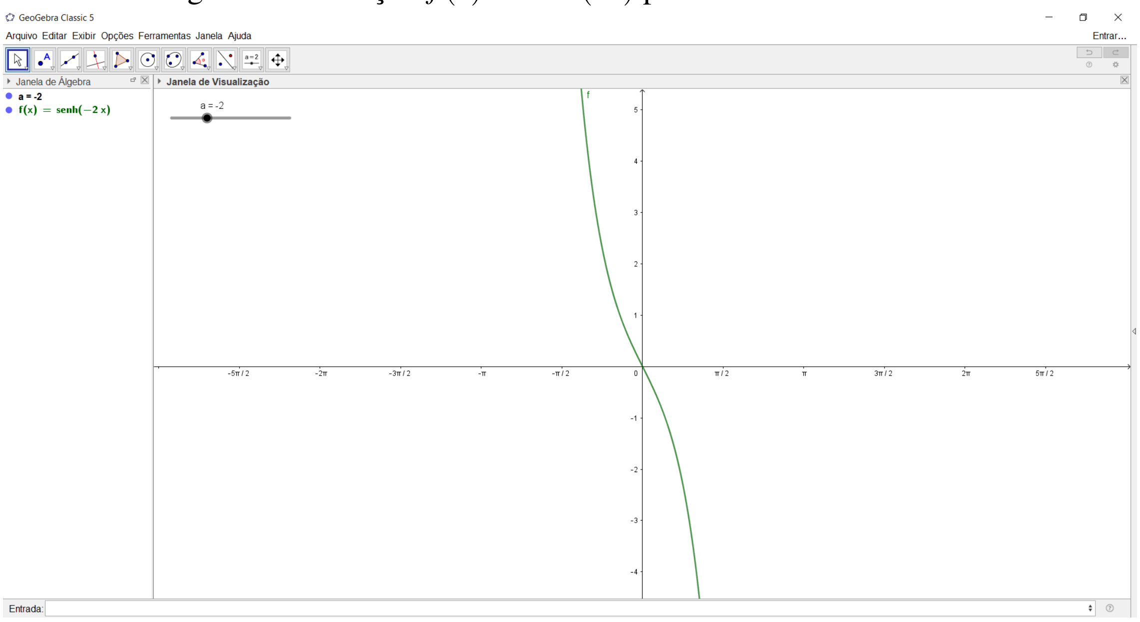
Figura 42 – Função $f(x) = senh(ax)$ para $a = 3$



Fonte: Autor (2021)

Note que quando o valor de a cresce, a função cresce mais rápido, nas Figuras 41 e 42 é possível perceber bem essa observação. Isso acontece pelo fato de a função seno hiperbólica ser composta por funções exponenciais, e as funções exponencias são conhecidas justamente por esse fato (crescer ou decrescer muito rápido). Caso seja tomado um valor negativo para o a, a função ficará decrescente, como mostra a Figura 43.

Figura 43 – Função $f(x) = senh(ax)$ para $a = -2$

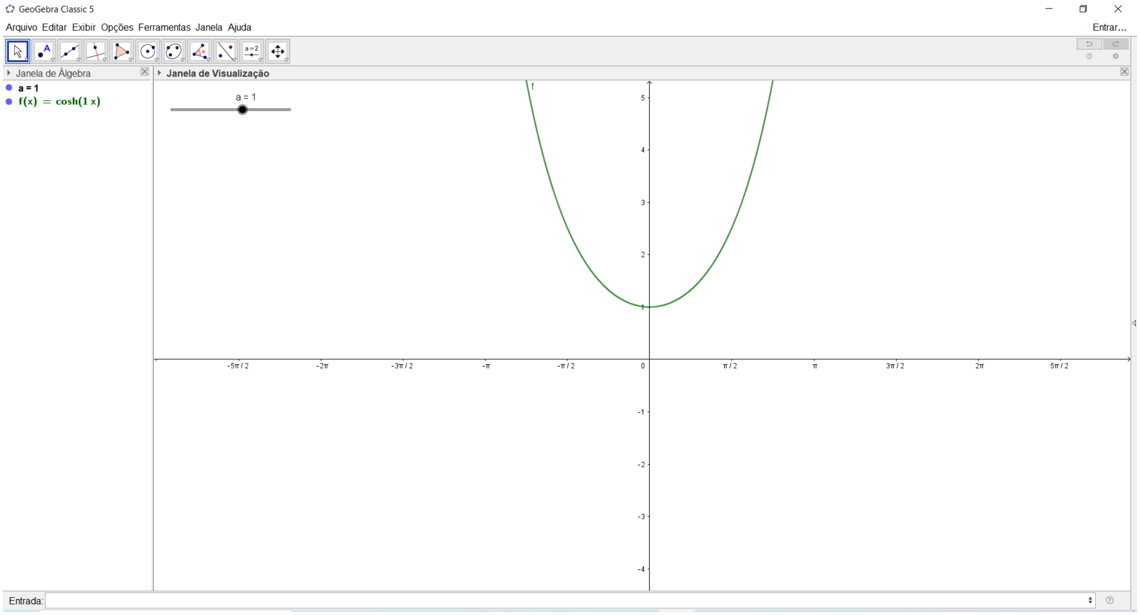


Fonte: Autor (2021)

Vamos analisar agora a função cosseno hiperbólica. Veja na Figura 44 o que o

GeoGebra apresenta ao digitar na barra de entrada a função $f(x) = cosh(ax)$

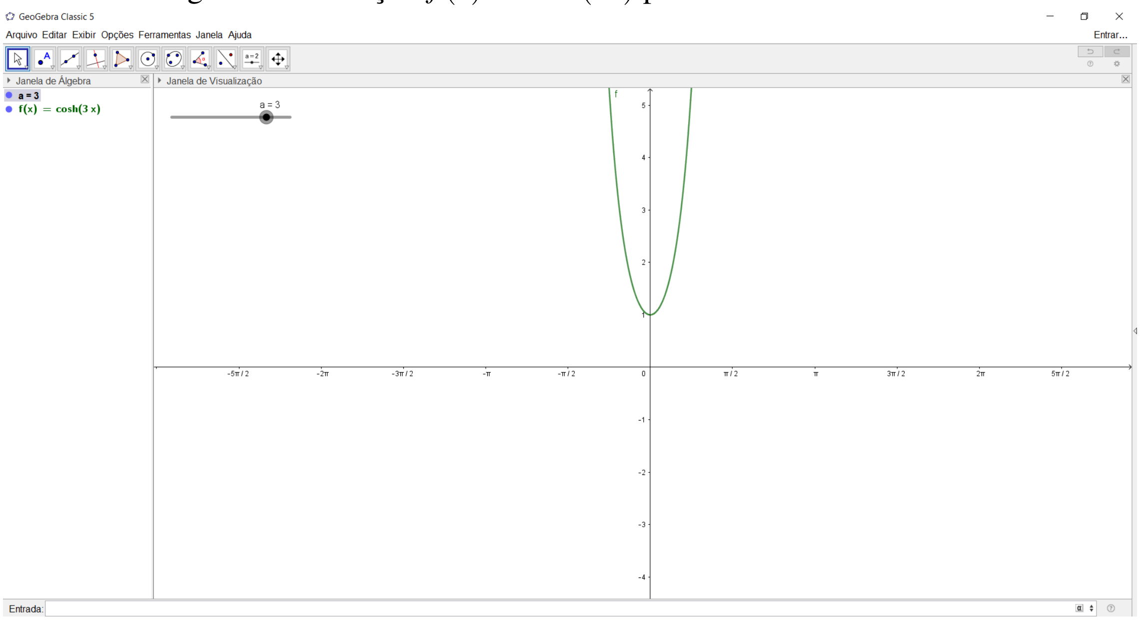
Figura 44 – Função $f(x) = cosh(ax)$ para $a = 1$



Fonte: Autor (2021)

Veja agora o que acontece se arrastar o valor do a para o 3.

Figura 45 – Função $f(x) = cosh(ax)$ para $a = 3$



Fonte: Autor (2021)

Note que, a concavidade vai "fechando"à medida que o valor do a aumenta. Ou ainda, se pensarmos de forma contrária, a concavidade vai "abrindo"mais cada vez que o valor de a diminui, e isso ocorre até chegar no valor $a = 0$, que seria o valor que torna o gráfico da função uma reta horizontal paralela ao eixo x e cortando o eixo y no valor $y = 1$. Após isso, para os valores negativos que tomarmos para o a, a função terá a mesma forma do valor positivo do a em módulo, ou seja, tomando $a = 3$ e $a = -3$ por exemplo, a função será igual para todo $x \in \mathbb{R}$. Isso ocorre, por consequência da forma exponencial da função cosseno hiperbólico. Veja.

Para $a = 3$

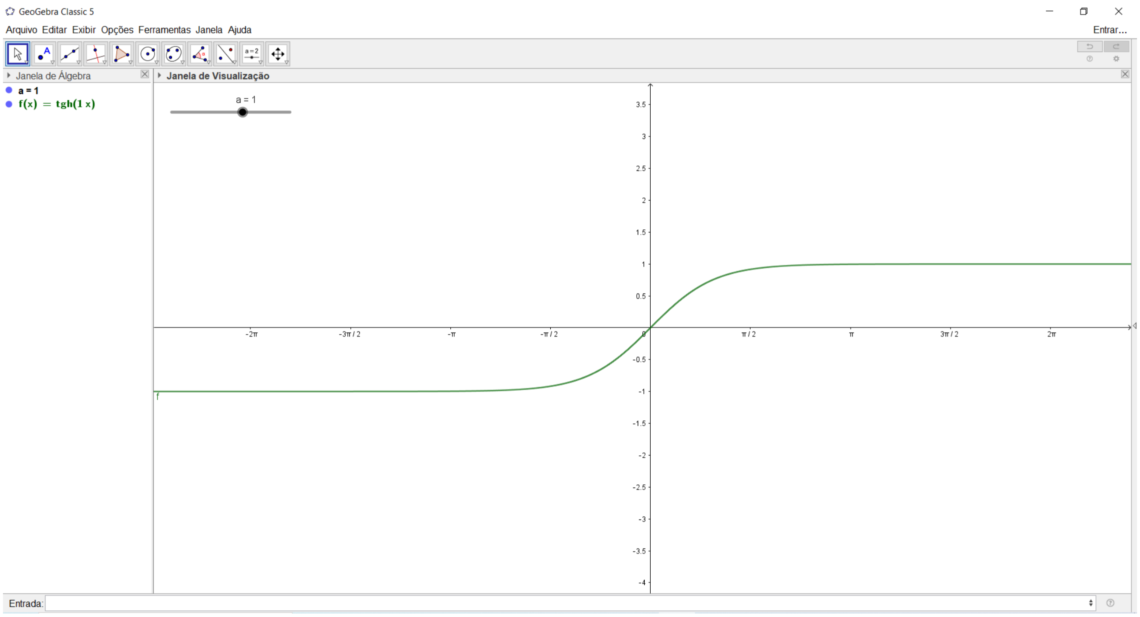
$$cosh(3x) = \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2}$$

Para $a = -3$

$$cosh(-3x) = \frac{e^{-3x} + e^{3x}}{2} = \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2}$$

Veja agora o que o GeoGebra apresenta ao digitar na barra de entrada a função $f(x) = tgh(ax)$.

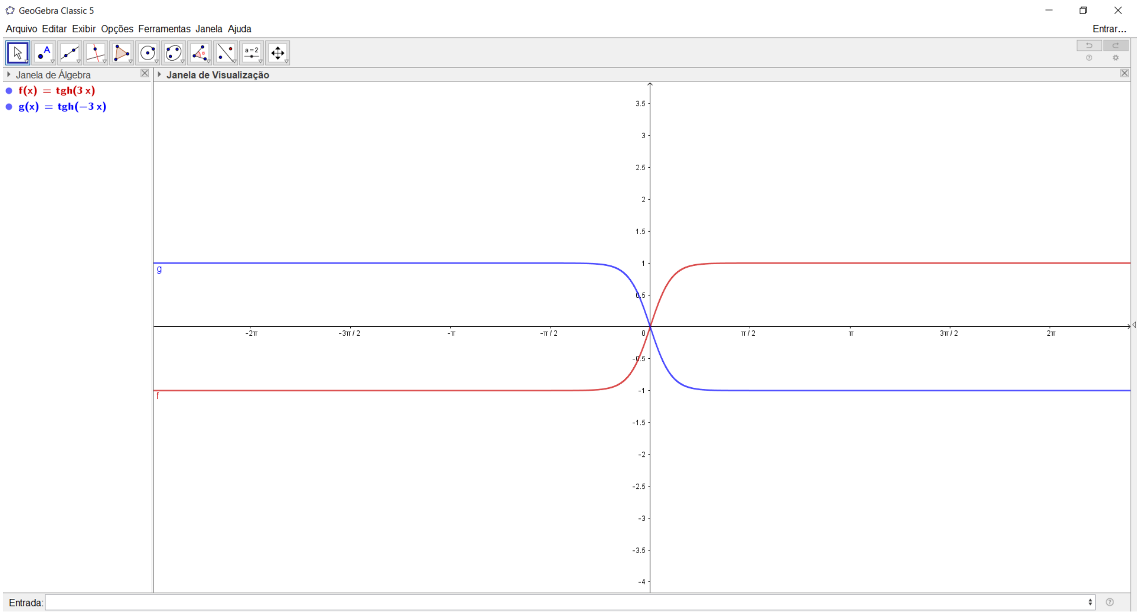
Figura 46 – Função $f(x) = tgh(ax)$ para $a = 1$



Fonte: Autor (2021)

Ao alterar o valor de a para valores positivos e negativos de mesmo módulo, acontecerá algo semelhante ao que aconteceu com a função seno, ou seja, suas imagens serão opostas como mostra a Figura 47.

Figura 47 – Função $f(x) = tgh(3x)$ e $g(x) = tgh(-3x)$



Fonte: Autor (2021)

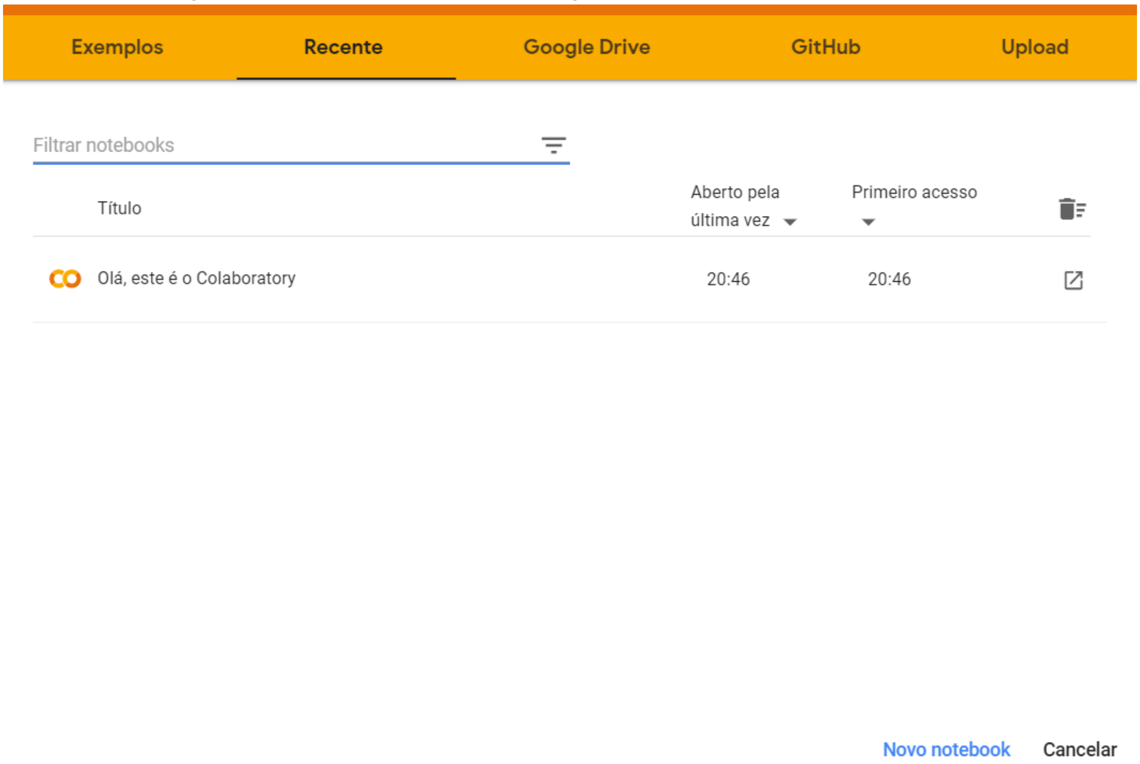
Observe que a curva em vermelho representa a função $f(x) = tgh(3x)$ e a curva em azul representa a função $g(x) = tgh(-3x)$ além disso, ambas possuem mesma imagem para $x = 0$ e em todos os outros pontos elas possuem imagens opostas.

Agora, será apresentado uma ferramenta de programação, como mais uma opção de estudo destas funções.

3.2 Uso de linguagens de programação

Nessa seção, será apresentada uma proposta de estudo básico das funções trigonométricas e hiperbólicas por meio de uma linguagem de programação. A linguagem sugerida aqui será a Phyton que, para fazer as digitações, será usado o google colab que um ambiente que usa a phyton como linguagem. Inicialmente, será mostrado como acessar, criar um notebook na plataforma para que possa iniciar o processo de escrita das funções. Para acessar o google colab, o aluno deverá digitar em seu navegador https://colab.research.google.com. Esse é o link que o levará diretamente para a plataforma para que ele possa dar início a criação do seu notebook virtual. Após acessar o link, o aluno se deparará com a seguinte tela.

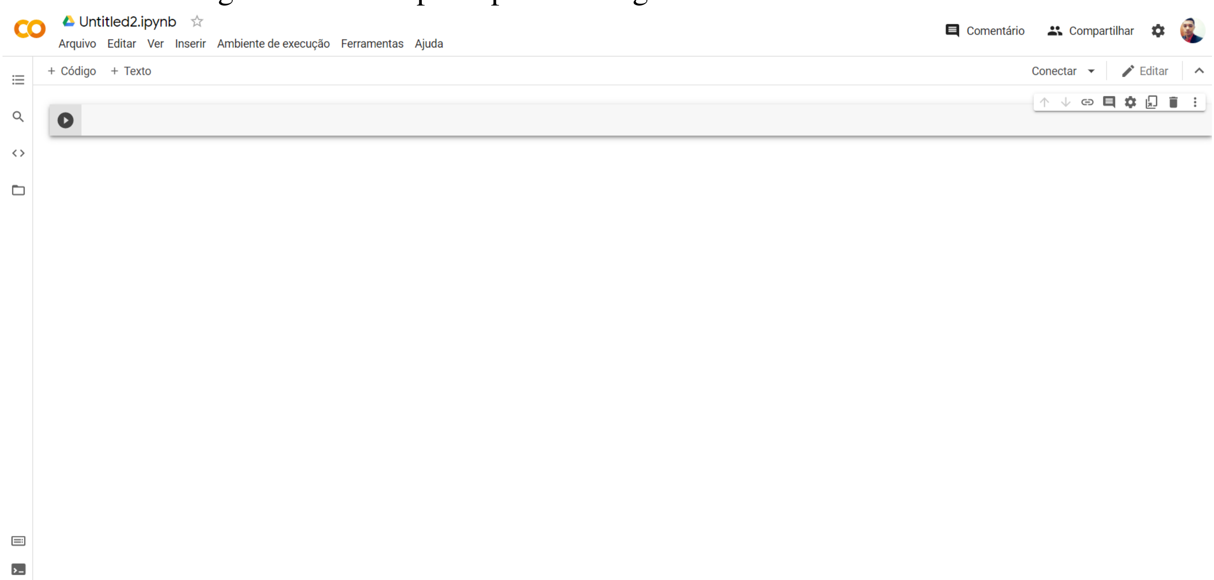
Figura 48 – Tela inicial do Google Colab



Fonte: Autor (2021)

A tela que aparece na Figura 48, é a tela inicial. Veja que na parte inferior direita da tela, aparece um botão com a informação "Novo Notebook", esse é o botão que deverá ser clicado. Após clicar em "Novo Notebook", aparecerá a seguinte tela.

Figura 49 – Tela principal do Google Colab

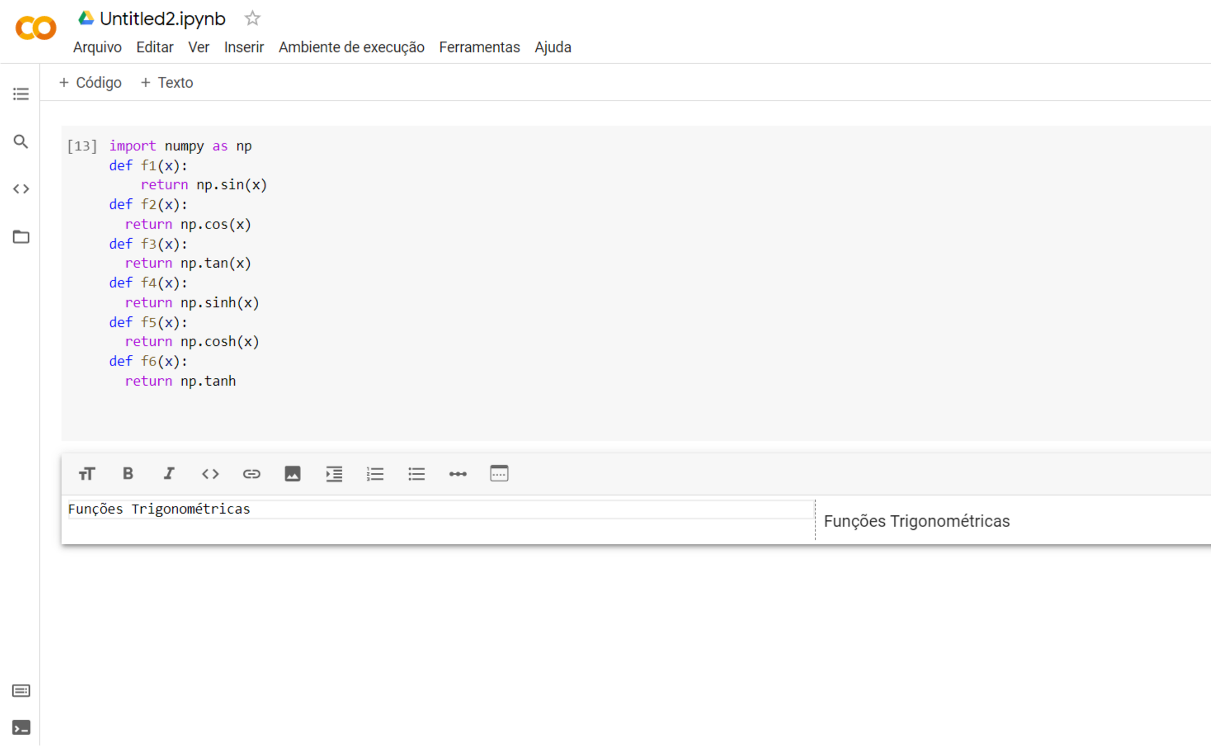


Fonte: Autor (2021)

Na parte superior esquerda, na Figura 49, onde aparece o texto "Unitled2.ipynb", refere-se ao título do notebook, esse título pode ser editado pelo aluno a qualquer momento, basta clicar em cima do texto. É importante que o aluno edite esse título pelo fato de o arquivo ser salvo na nuvem do gmail do mesmo, ficando assim mais fácil de identifica-lo depois.

Essa tela que a Figura 49 apresentou, é a tela principal do colab, é nessa tela que o aluno escreverá todas as equações desejadas. Observe que, na parte superior da tela principal, aparece um barra com dois botões, o primeiro com texto "+ código"e o segundo com "+ Texto". Ao clicar no primeiro, aparecerá uma barra abaixo para que sejam digitados apenas códigos na linguagem phyton, e ao clicar no segundo, aparecerá uma barra para digitar qualquer tipo de texto. Vamos iniciar a construção das funções. Antes de tudo, como vamos trabalhar com escritas matemáticas, precisamos importar um pacote para identificar os códigos matemáticos, para isso, basta clicar no botão "+ código"e, na barra que aparecer digitar o comando "import numpy as np". Além disso, precisamos definir todas as funções que iremos trabalhar aqui (tanto as trigonométricas quanto as hiperbólicas) ainda nesta linha de códigos, para isso, aperte a tecla enter e digite o texto "def f1:", tecle enter novamente e digite "return np.sin(x)", tecle enter e faça isso com todas as demais funções. Para ficar melhor organizado, como vamos trabalhar com dois tipos de funções, clicaremos no botão "+ texto"e escreveremos na barra, o título "Funções Trigonométricas". Veja a Figura 50

Figura 50 – Definição inicial das funções

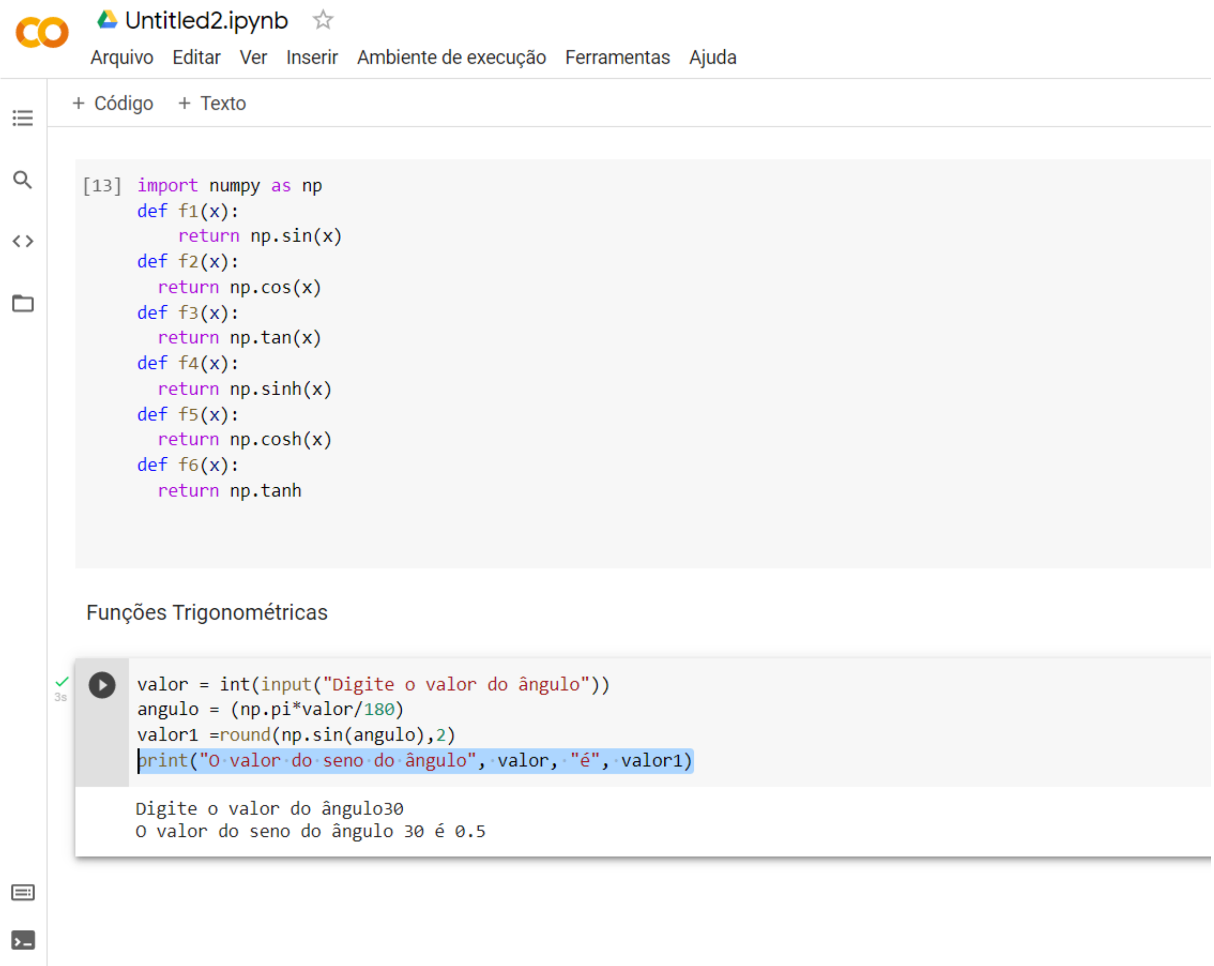


Fonte: Autor (2021)

Veja que, foram definidas na parte inicial todas as funções que serão construídas adiante, é necessário fazer isso, para que nos próximos passos, elas sejam usadas. Em seguida, iniciaremos a escrita das funções.

Clique no botão "+ código"e na barra que aparecerá, serão digitados alguns códigos. O primeiro código a ser digitado é "valor = int(input("Digite o valor do ângulo"))", esse servirá para mais adiante escolher qualquer ângulo, em graus. Aperte "enter"e digite o código "valor = int(input("Digite o valor do ângulo")) angulo = (np.pi*valor/180)", esse, servirá para fazer a transformação do ângulo de radianos para graus (uma vez que na linguagem python a medida padrão para ângulo é radiano). Aperte "enter"mais uma vez e digite "valor1 =round(np.sin(angulo),2)", esse servirá para fazer um arredondamento de 2 casas no valor calculado, esse arredondamento pode ser de mais casas, caso queira, basta trocar o número 2 pelo número desejado no comando. Por fim, aperte "enter"mais uma vez e digite o código "print("O valor do seno do ângulo", valor, "é", valor1)", esse é o código que permite imprimir o valor desejado. Após fazer isso, aperte as teclas "Ctrl"seguida de "enter", irá aparecer uma outra barra em baixo, solicitando o valor do ângulo para que seja calculado o seno desse ângulo. Vamos aqui escolher o ângulo 30 apenas como exemplo. Após digitar 30 na barra, aperte "enter". Veja na Figura 51 o resultado obtido.

Figura 51 – Códigos para construção do seno de um ângulo qualquer



Fonte: Autor (2021)

Veja que, logo abaixo da barra onde foram digitados os códigos, apareceu o valor do seno de 30, que é $0,5$. Agora, essa barra de códigos, serve para calcular o valor do seno de qualquer ângulo desejado, basta apertar "Ctrl"seguido de "enter"e digitar o ângulo que quiser. E isso, pode ser feito para todas as funções usando os mesmos códigos, trocando apenas onde tiver "valor1"por "valor2", "valor3"e assim sucessivamente, representando as demais funções, afinal, o "valor1"já está representando o seno. Veja na Figura 52 a construção para as outras funções trigonométricas.

Figura 52 – Códigos para construção das principais funções trigonométricas

Fonte: Autor (2021)

Note que, foi escolhido arbitrariamente o ângulo de 30 para todas, apenas para observar o cálculo feito. Veja que foram calculados todos os valores desejados, com arredondamento de 2 casas como solicitado.

Vamos agora fazer o mesmo para as funções hiperbólicas. Veja a Figura 53.

Figura 53 – Códigos para construção das principais funções hiperbólicas

Fonte: Autor (2021)

Veja que os códigos digitados foram os mesmos, mudando sempre somente a terceira linha de cada código, onde deve-se digitar a função que será calculada.

Dessa forma, note que foi construído um arquivo, onde estão expostos os valores de todas as principais funções trigonométricas e hiperbólicas para um arco qualquer. Esse arquivo é muito útil, pois torna prático calcular o valor para qualquer função trigonométrica ou hiperbólica, basta, na função desejada, apertar "Ctrl seguido de "enter"(Ou clicar no "play"que fica a esquerda de cada código), digitar o valor do ângulo desejado, apertar "enter"que automaticamente será encontrado o valor da função para este ângulo. Para demonstração, vamos escolher outro ângulo para ser calculado, escolha, por exemplo o ângulo de 20 e digite em todas as funções. Veja nas Figuras 54 e 55 o que aparecerá.

Figura 54 – Funções trigonométricas tomando o arco de 20

Untitled2.ipynb

Arquivo Editar Ver Inserir Ambiente de execução Ferramentas Ajuda Salvando...

+ Código + Texto

Funções Trigonométricas

```
[43] valor = int(input("Digite o valor do ângulo"))
     angulo = (np.pi*valor/180)
     valor1 =round(np.sin(angulo),2)
     print("O valor do seno do ângulo", valor, "é", valor1)

     Digite o valor do ângulo20
     O valor do seno do ângulo 20 é 0.34
```

```
[44] valor = int(input("Digite o valor do ângulo"))
     angulo = (np.pi*valor/180)
     valor2 =round(np.cos(angulo),2)
     print("O valor do cosseno do ângulo", valor, "é", valor2)

     Digite o valor do ângulo20
     O valor do cosseno do ângulo 20 é 0.94
```

```
[45] valor = int(input("Digite o valor do ângulo"))
     angulo = (np.pi*valor/180)
     valor3 =round(np.tan(angulo),2)
     print("O valor do tangente do ângulo", valor, "é", valor3)

     Digite o valor do ângulo20
     O valor do tangente do ângulo 20 é 0.36
```

Fonte: Autor (2021)

Figura 55 – Funções hiperbólicas tomando o arco de 20

Fonte: Autor (2021)

Esse arquivo ficará salvo no drive do e-mail que o usuário está logado, dessa forma, é possível abri-lo em qualquer computador ou até mesmo celular que se acesse com o mesmo e-mail. Assim, se por exemplo, o professor ministrar uma aula com os alunos ensinando-os a criar este arquivo no laboratório de informática da escola, o aluno conseguirá abri-lo novamente em casa para fazer suas manipulações e/ou acréscimos.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na composição deste trabalho, fizemos na parte inicial, a definição e um estudo a respeito das funções trigonométricas e hiperbólicas, apresentando algumas de suas propriedades que são muito importantes para as mesmas. Esse estudo, falando especificamente das funções hiperbólicas, é muito importante por não estarem presente nos livros didáticos de ensino médio, ficando assim, um material que os professores podem recorrer para suas aulas quando assim for preciso.

Logo em seguida, iniciou-se a apresentação das estratégias metodológicas propostas, que são a utilização dos softwares Symbolab e GeoGebra, e da linguagem de programação Python usada dentro do google colab. Essas estratégias, são de grande contribuição ao professor e ao aluno, uma vez que fazem uso de ferramentas que podem auxiliar ambos. O professor na elaboração de suas aulas, para conseguir montar uma aula mais dinâmica e manipulável, além de conseguir mostrar dicas para resolução de exercícios (como foi mostrado no Symbolab). Já o aluno, tendo ferramentas que ele pode manipular em casa, ao resolver um exercício ou até mesmo ao fazer estudos mais específicos destas funções, fazer construções geométricas, observar o comportamento dos gráficos quando se manipula algo dentro da função dentre outras possibilidades que esses softwares proporcionam.

Essas ferramentas, como foi mostrado no apresentar desta pesquisa, são de fácil manuseio, e que podem ser encontradas não só em computadores, mas também celulares e tables, ficando assim acessível a um número maior de pessoas e, com o aluno conseguindo usar não somente na escola, mas também em sua casa. Vale ressaltar também que, as estratégias apresentadas aqui, são de grande importância no estudo/ensino na situação que professores e alunos foram expostos nos anos de 2020/2021 diante de uma pandemia onde não se era possível ter aulas presenciais, obrigando o ambiente escolar se tornar totalmente virtual, sendo assim as ferramentas tecnológicas se tornam essenciais na vida de professores e alunos de todos os níveis.

Dessa forma, espera-se que esta pesquisa contribua significativamente nas aulas de professores da educação básica e também superior, ajudando-os na elaboração e planejamento de suas aulas, contribuindo assim na formação dos alunos num contexto mais tecnológico.

REFERÊNCIAS

[1] Alves, B.P. **As funções trigonométricas hiperbólicas complexas no contexto da iniciação científica do ensino médio**. Dissertação de mestrado do PROFMAT da UFRR. Boa Vista, RR. 94 pg. 2016.

[2] CARNEIRO, Reginaldo Fernando; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. A utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação nas aulas de Matemática: Limites e possibilidades. Revista Eletrônica de Educação, Juiz de Fora, v. 8, n. 2, p.101-119, 2014.

[3] BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mariam Godoy. Informática e educação matemática, 3. ed. São Paulo: Autentica, 2007.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2017.

[5] IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria. Vol 3. 2ª ed. São Paulo: Atual Editora, 1977-78.

[6] MORAN, J. M. O Vídeo na Sala de Aula. In: **Comunicação & Educação**, São Paulo, ECA-Ed. Moderna, p. 27-35, jan./abr. 1995. Disponível em: <http://www.eca.usp.br/prof/moran/vidsal.htm#inadequados>. Acesso em: 19 Ago. 2021.

[7] OLIVEIRA, M.R. Elementos da Matemática: Trigonometria Geometria Espacial. Vol. 5. 1ª ed. Fortaleza: Editora VestSelles, 2018.

[8] **Site**: <https://www.geogebra.org/> acesso em 17 de abril de 2021.

[9] **Site**: <https://pt.symbolab.com/> acesso em 17 de abril de 2021.

[10] SYMBOLAB. In: WIKIPÉDIA. A enciclopédia livre. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Symbolab>. Acesso em 15 abr. 2021.

[11] VALENTE, J. A. (org.). **Computadores e conhecimento: repensando a Educação.** Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 2ª edição, 1998.

APÊNDICE A – RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste apêndice constam as relações utilizadas no estudo de funções trigonométricas.

1. $cos^2x + sen^2x = 1$

2. $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$

3. $sen(x+y) = sen(x) \cdot cos(y) + sen(y) \cdot cos(x)$

4. $sen(x-y) = sen(x) \cdot cos(y) - sen(y) \cdot cos(x)$

5. $cos(x+y) = cos(x) \cdot cos(y) - sen(x) \cdot sen(y)$

6. $cos(x-y) = cos(x) \cdot cos(y) + sen(x) \cdot sen(y)$

7. $tg(x+y) = \dfrac{tg(x)+tg(y)}{1 - tg(x) \cdot tg(y)}$

8. $tg(x-y) = \dfrac{tg(x)-tg(y)}{1 + tg(x) \cdot tg(y)}$

9. $sen(2x) = 2 \cdot sen(x) \cdot cos(x)$

10. $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$

11. $cos(2x) = 2 \cdot cos^2(x) - 1$

12. $cos(2x) = 1 - 2 \cdot sen^2(x)$

13. $tg(2x) = \dfrac{2 \cdot tg(x)}{1 - tg(x)}$

14. $sen\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - cos(x)}{2}}$

15. $cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 + cos(x)}{2}}$

16. $tg\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cos(x)}{1+cos(x)}}$

17. $sen(p)+sen(q) = 2\cdot sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

18. $sen(p)-sen(q) = 2\cdot sen\left(\frac{p-q}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

19. $cos(p)+cos(q) = 2\cdot cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

20. $cos(p)-cos(q) = -2\cdot sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{p-q}{2}\right)$

21. $tg(p)+tg(q) = \frac{sen(p+q)}{cos(p)\cdot cos(q)}$

22. $tg(p)-tg(q)\frac{sen(p-q)}{cos(p)\cdot cos(q)}$

APÊNDICE B – RELAÇÕES HIPEBÓLICAS

Neste apêndice constam as relações utilizadas no estudo de funções hiperbólicas.

1. $cosh^2x - senh^2x = 1$

2. $tgh(x) = \dfrac{senh(x)}{cosh(x)}$

3. $senh(x+y) = senh(x) \cdot cosh(y) + senh(y) \cdot cosh(x)$

4. $senh(x-y) = senh(x) \cdot cosh(y) - senh(y) \cdot cosh(x)$

5. $cosh(x+y) = cosh(x) \cdot cosh(y) + senh(x) \cdot senh(y)$

6. $cosh(x-y) = cosh(x) \cdot cosh(y) - senh(x) \cdot sen(y)$

7. $tgh(x+y) = \dfrac{tgh(x) + tgh(y)}{1 + tgh(x) \cdot tgh(y)}$

8. $tgh(x-y) = \dfrac{tgh(x) - tgh(y)}{1 - tgh(x) \cdot tgh(y)}$

9. $senh(2x) = 2 \cdot senh(x) \cdot cosh(x)$

10. $cosh(2x) = cosh^2(x) + senh^2(x)$

11. $cosh(2x) = 1 + 2 \cdot cosh^2(x)$

12. $cosh(2x) = 2 \cdot senh^2(x) - 1$

13. $tgh(2x) = \dfrac{2 \cdot tgh(x)}{1 + tgh^2(x)}$

14. $senh\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{cosh(x)+1}{2}}$

15. $cosh\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{cosh(x)-1}{2}}$

16. $tgh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{cosh(x)+1}{cosh(x)-1}}$

17. $senh(p)+senh(q) = 2 \cdot senh\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot cosh\left(\frac{p-q}{2}\right)$

18. $senh(p)-senh(q) = 2 \cdot senh\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot cosh\left(\frac{p+q}{2}\right)$

19. $cosh(p)+cosh(q) = 2 \cdot cosh\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot cosh\left(\frac{p-q}{2}\right)$

20. $cosh(p)-cosh(q) = -2 \cdot senh\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot senh\left(\frac{p-q}{2}\right)$

21. $tgh(p)+tgh(q) = \frac{senh(p+q)}{cosh(p) \cdot cosh(q)}$

22. $tgh(p)-tgh(q)\frac{senh(p-q)}{cosh(p) \cdot cosh(q)}$