UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

FRANCISCO JOSÉ ZANINI

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA PROPOSTA A PARTIR DO USO DE HISTÓRIAS INTERATIVAS NO AMBIENTE SCRATCH

Caçapava do Sul
2021

FRANCISCO JOSÉ ZANINI

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA PROPOSTA A PARTIR DO USO DE HISTÓRIAS INTERATIVAS NO AMBIENTE SCRATCH

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Pampa - Campus Caçapava Do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Vitalino Cesca Filho

Caçapava do Sul
2021

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

Z31e Zanini, Francisco José
Ensino e aprendizagem de Análise Combinatória: uma proposta a partir do uso de histórias interativas no ambiente Scratch / Francisco José Zanini.
85 p.

Dissertação(Mestrado)-- Universidade Federal do Pampa, MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, 2021.
"Orientação: Vitalino Cesca Filho".

1. Raciocínio Combinatório. 2. Princípios Multiplicativo e Aditivo. 3. Árvore de Possibilidades. 4. Scratch. 5. Histórias Interativas. I. Título.

FRANCISCO JOSÉ ZANINI

TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA PROPOSTA A PARTIR DO USO DE HISTÓRIAS INTERATIVAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Pampa - Campus Caçapava Do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino Básico de Matemática

Dissertação defendida e aprovada em: 30 de agosto de 2021.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Vitalino Cesca Filho
Orientador
UNIPAMPA

Prof.ª Dr.ª Carmen Vieira Mathias
UFSM

Prof.ª Dr.ª Maria Lucia Pozzatti Flores
UNIPAMPA

Assinado eletronicamente por **VITALINO CESCA FILHO**, **PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 31/08/2021, às 06:22, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.

Assinado eletronicamente por **MARIA LUCIA POZZATTI FLORES**, **PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 31/08/2021, às 10:22, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0604798** e o código CRC **031F7776**.

Um agradecimento muito especial a Profª Dra. Daniela de Rosso Tolfo, que me incentivou a cursar o PROFMAT, onde foi minha professora e orientadora. Excelente profissional e grande amiga. Pessoa humilde e de grande coração, sempre ajudando a todos, inclusive aos alunos que passavam necessidades durante a pandemia. Mas, infelizmente, durante esse trajeto, a vida foi interrompida, ficando a lembrança e a saudade das conversas, risadas e conselhos... Gratidão por compartilhar a sua sabedoria com o mundo.

AGRADECIMENTO

Agradeço, primeiramente, a DEUS pela força em todos os momentos de adversidade.

Agradeço ao Banco do Brasil, onde trabalho, por ceder horário para este estudo e oportunizar minha formação. Em especial, aos colegas do Banco pelo apoio e incentivo.

Agradeço a Luciene, minha esposa, e meu filho Diogo, pelo apoio e compreensão neste período de ausências, sempre me incentivando, mesmo nos meus dias de mal-humor e desânimo.

Aos colegas de turma pela amizade e cumplicidade em todo decorrer do curso. Em especial, às companheiras de estudos nas madrugadas e fins de semana, Cleia, Cacilda, e Ariane, pelos incentivos e trocas de ideias.

A todos os professores do PROFMAT – Unipampa Caçapava Do Sul por todo conhecimento e contribuições passados em sala de aula.

À Prof.ª Dr.ª Carmen Vieira Mathias e Prof.ª Dr.ª Maria Lúcia Pozzatti Flores por aceitarem fazer parte da Banca Examinadora.

À Prof.ª Dr.ª Maria Arlita da Silveira Soares pela imensa colaboração e disposição, meu muito obrigado.

Ao meu orientador Prof. Dr. Vitalino Cesca Filho por todos os conselhos e orientações para este trabalho.

Conhece-te a ti mesmo
e conhecerás

o universo e os deuses.

–(Sócrates)

A maioria de nós

prefere olhar para fora

do que para dentro de si mesmo.

–(Albert Einstein)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar potencialidades e possibilidades de utilização de histórias interativas, produzidas no ambiente Scratch, no estudo da Análise Combinatória. Para tanto, utilizou-se pressupostos da pesquisa qualitativa, analisando-se, inicialmente, resultados de pesquisas acerca do desenvolvimento do raciocínio combinatório e de seu processo de ensino e aprendizagem, e assim, compreender o que está sendo proposto em termos teórico-metodológicos para melhorar o desempenho dos estudantes e professores em relação a esse campo. Estes foram seguidos de aprofundamentos relativos a Combinatória, por meio de definições formais e respectivos exemplos. Seguido da elaboração de um site (Plataforma Google Sites) que apresenta um conjunto de histórias interativas (totalizando 8), produzidas no ambiente Scratch, expondo diferentes tipos de problemas de Combinatória (Arranjo, Combinação e Permutação), enfatizando os princípios multiplicativo e aditivo, como estratégia de resolução, e a árvore de possibilidades, como estratégia de resolução e representação gráfica. Com a elaboração deste trabalho foi possível constatar que as ferramentas disponíveis no Scratch oferecem inúmeras possibilidades de criações para o estudo da Análise Combinatória. Em especial, na construção de histórias interativas é possível utilizar recursos de movimento de "atores" para a elaboração de estratégias de resolução de problemas, o que permite algumas generalizações e mobilizações destas estratégias em vários outros problemas. Isso é importante, pois em muitos problemas as fórmulas de resolução se fazem pouco eficientes (não é possível aplicar a regra diretamente), tornando-se necessário dispor de diferentes estratégias.

Palavras-chave: Raciocínio Combinatório. Princípios Multiplicativo e Aditivo. Árvore de Possibilidades. Scratch. Histórias Interativas.

ABSTRACT

This work aims to present potentials and possibilities of the usage of interactive stories, produced in the Scratch environment, in the study of Combinatorial Analysis. For this purpose, qualitative research assumptions were used, initially analyzing research results on the development of combinatorial reasoning and its teaching and learning process, and thus, understanding what is being proposed in theoretical and methodological terms for improvement of the performance of students and teachers in this field. These were followed by deepenings related to Combinatorics, through formal definitions and respective examples. Followed by the development of a website (Google Sites Platform) that presents a set of interactive stories (8 in total), produced in the Scratch environment, exposing different types of Combinatorics problems (Arrangement, Combination and Permutation), emphasizing the multiplicative and additive principles, as a resolution strategy, and the possibilities tree as a resolution strategy and graphical representation. With the elaboration of this work, it was possible to verify that the tools available in Scratch offer countless possibilities of creations for the study of Combinatorial Analysis. In particular, in the construction of interactive stories, it is possible to use "actors" movement resources for the elaboration of problem solving strategies, which allows some generalizations and mobilization of these strategies in several other problems. This is important, because in many problems the solution formulas are inefficient (it is not possible to apply the rule directly), making it necessary to have different strategies.

Keywords: Combinatorial reasoning. Multiplication and Addition Principles. Tree Diagrams. Scratch. Interactive Stories.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UNIPAMPA – Universidade Federal do Pampa

UFSM – Universidade Federal de Santa Maria

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PISA – Programa Internacional de Avaliação de Alunos

OCDE – Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

QMP – Quantidade de modelos possíveis

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

MIT – Massachusetts Institute of Technology (MIT)

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A escolha da temática de pesquisa emergiu do interesse pessoal pelos desafios que a resolução de problemas de Combinatória, geralmente, apresentam. Pois, a natureza múltipla e, por vezes, complexa, nas quais nem sempre há uma forma direta de se resolver a situação dada, requer que se faça uma análise mais detalhada da situação para identificar o tipo de problema e as estratégias utilizadas para sua resolução.

Esse interesse emerge, também, da vivência e experiência com a Combinatória durante a permanência escolar. Na Educação Básica, o contato com problemas de Combinatória foi apenas no Ensino Médio, principalmente, a partir do uso de fórmulas. Sublinha-se que no Ensino Fundamental foram abordados vários problemas da estrutura multiplicativa, no entanto, nenhum relacionado a Combinatória.

Durante a graduação, o estudo da Combinatória foi aprofundado, em especial, do ponto de vista Matemático. Visto que, discussões teórico-metodológicas acerca do desenvolvimento do raciocínio combinatório e do processo de ensino e aprendizagem foram raras.

No Programa de Pós-Graduação, nas aulas de Matemática Discreta, foram retomados e ampliados conceitos relacionados a Combinatória, destacando-se a importância da Combinatória no levantamento sistemático do espaço amostral, fundamental para se determinar probabilidades.

Dada a importância do desenvolvimento do raciocínio combinatório, em especial, por sua possibilidade de analisar situações do dia a dia, tais como, organização de equipes e cardápios, além de sua aplicação a diferentes áreas do conhecimento. O estudo da Combinatória está presente em propostas curriculares (BRASIL, 1998; BRASIL, 1999; BRASIL, 2002) e, em especial, na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), no decorrer de toda a Educação Básica. Para o ensino deste conteúdo, esses documentos indicam um trabalho com os diferentes tipos de problemas (produto cartesiano, arranjo, permutação, combinação)[1], a utilização de diversas estratégias, principalmente, o princípio multiplicativo, e a mobilização e articulação de diferentes formas de representação, em particular, árvore de possibilidades.

O princípio multiplicativo é destacado, nas propostas curriculares, como uma das mais importantes estratégias para a resolução de situações envolvendo Combinatória, pois pode ser aplicado a diferentes tipos de problemas e também é base das fórmulas utilizadas no ensino da Análise Combinatória. A sugestão pela árvore de possibilidades justifica-se por ser considerada uma das representações mais significativas ao entendimento do raciocínio combinatório e ao princípio multiplicativo.

[1] As ideias relacionadas aos diferentes tipos de problemas de Combinatória serão aprofundadas nos Capítulos 2 e 3.

Algumas pesquisas (BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015; CAMPOS; IGLIORI, 2021; TEIXEIRA, 2012; TEIXEIRA, 2020) vêm sendo desenvolvidas com o intuito de entender como se desenvolve o raciocínio combinatório e os fenômenos relacionados ao ensino e aprendizagem de Combinatória. Alguns resultados das pesquisas indicam: dificuldades tanto de alunos quanto de professores na resolução de problemas relacionados a este campo; uso do princípio multiplicativo, por professores, sem relação com as fórmulas e nem com as representações (árvore de possibilidades); e, poucos recursos tecnológicos digitais desenvolvidos para o estudo de Combinatória, mesmo constituindo-se de importante suporte a seu ensino. Nessa perspectiva, o presente estudo tem por objetivo apresentar potencialidades e possibilidades de utilização de histórias interativas, produzidas no ambiente Scratch, no estudo da Análise Combinatória.

Para o desenvolvimento deste trabalho elaborou-se um site (Plataforma Google Sites) que apresenta um conjunto de histórias interativas, produzidas no ambiente Scratch. Nesse site são expostos diferentes tipos de problemas de Combinatória, enfatizando os princípios multiplicativo e aditivo, como estratégia de resolução, e a árvore de possibilidades, como estratégia de resolução e representação gráfica. Para tanto, utilizou-se pressupostos da pesquisa qualitativa (GIL, 2010), analisando-se, inicialmente, resultados de pesquisas acerca do desenvolvimento do raciocínio combinatório e de seu processo de ensino e aprendizagem, e assim, compreender o que está sendo proposto em termos teórico-metodológicos para melhorar o desempenho dos estudantes e professores em relação a esse campo. Seguidos de aprofundamentos relativos a Combinatória, por meio de definições formais e, respectivos, exemplos.

Para atingir o objetivo, o trabalho foi organizado considerando a seguinte estrutura. O Capítulo 2 apresenta aspectos acerca das necessidades e desafios do processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, bem como um mapeamento de pesquisas relacionadas a esse campo. No Capítulo 3 recorrem-se a livros didáticos de Matemática para formalização de conceitos relacionados a Combinatória, além de exemplos dos diferentes tipos de problemas. O Capítulo 4, é dedicado ao detalhamento da elaboração do site, em especial, da apresentação das histórias interativas, produzidas no ambiente Scratch, para o ensino de Combinatória. Por fim, no Capítulo 5, são apresentadas as considerações finais do trabalho desenvolvido.

2 ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: ALGUNS ENTENDIMENTOS

Neste capítulo, apresentam-se aspectos acerca das necessidades e desafios do processo de ensino e de aprendizagem de Análise Combinatória, bem como um mapeamento de pesquisas relacionadas a esse campo.

2.1 A Análise Combinatória e Recomendações sobre o Processo de Ensino e Aprendizagem

O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50000 anos, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram é largamente conjectural. Não é difícil, porém, imaginar como isso provavelmente se deu. É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer mais e menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena, pois há estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso. Com a evolução gradual da sociedade, tornaram-se inevitáveis contagens simples (EVES, 2011).

A Idade da Pedra durou vários milhares de anos, começando talvez já em 5 milhões a.C. e indo até por volta de 3000 a.C. Num mundo de vastas pastagens e savanas onde abundavam os animais selvagens e as pessoas eram principalmente caçadores e colhedores. Suas vidas eram agrestes e difíceis, de maneira que elas viviam demasiado ocupadas e em permanente agitação para poderem desenvolver tradições científicas. Depois de 3000 a.C. emergem comunidades agrícolas densamente povoadas ao longo do rio Nilo na África, dos rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio e ao longo do rio Amarelo na China. Essas comunidades criaram culturas nas quais a ciência e a matemática começam a se desenvolver (EVES, 2011).

Pela primeira vez na história, alguns povos tinham tempo de lazer. Enquanto os agricultores, que formavam a maioria da população durante a Revolução Agrícola, gastavam o dia todo no trabalho, outras pessoas — reis, sacerdotes, mercadores e escribas — tinham tempo ao fim do dia para ponderar sobre os mistérios da natureza e da ciência. Por fim, todos os ingredientes para o progresso científico estavam reunidos: escrita, necessidade de novas tecnologias, ambientes urbanos e tempo de lazer. É natural, portanto, que os historiadores se refiram ao Egito, à Índia, à China e ao Oriente Médio antigo como "berços da civilização" (EVES, 2011).

O desenvolvimento da Matemática seguiu diferentes caminhos nas diversas culturas. A Matemática aceita hoje tem origem na civilização grega (700 a.C. a 300 d.C.), "abrigando sistemas formais, logicamente estruturados a partir de um conjunto de premissas e empregando regras de raciocínio preestabelecidas. A maturidade desses sistemas formais foi atingida no século XIX" (BRASIL, 1998, p. 25), com a construção da Teoria dos Conjuntos e o desenvolvimento da Lógica Matemática.

Atualmente, a Matemática está presente em diversas atividades da vida contemporânea, "da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, [ela está presente] para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver" (BRASIL, 1999, p. 9).

Nesta perspectiva, aprender conceitos matemáticos é essencial,

> [...] seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (BRASIL, 2018, p. 265).

Entende-se que a aquisição do conhecimento matemático possibilita, em especial, aos estudantes da Educação Básica a resolução de diversos problemas apresentados pela sociedade contemporânea, o desenvolvimento da criticidade e responsabilidade social. A aplicação da Matemática na resolução de diversas situações se dá porque ela não se restringe à quantificação de fenômenos determinísticos, mas auxilia no estudo de fenômenos de caráter aleatório, além disso, elabora sistemas abstratos que organizam e inter-relacionam esses fenômenos.

No entanto, dados do relatório do Brasil no PISA/2018 indicam que "a média de proficiência dos jovens brasileiros em Matemática foi de 384 pontos, 108 pontos abaixo da média dos estudantes dos países da [Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE)]. A métrica para a escala de Matemática, estabelecida em 2003, baseou-se em uma média dos países da OCDE de 500 pontos, com desvio-padrão de 100 pontos" (BRASIL, 2020, p. 108).

No Brasil, segundo dados do site QEdu[1], os resultados da Prova Brasil, realizada em 2019, indicam que 8 de cada 10 alunos concluintes do ensino fundamental não aprenderam o adequado em Matemática. Em relação a competência resolução de problemas matemáticos, verifica-se que apenas 47% dos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental aprenderam o adequado, só 18% dos estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental e apenas 5% dos estudantes do Ensino Médio. Destaca-se que esses resultados envolvem todas as redes de ensino. No estado do Rio Grande do Sul, os índices são um pouco melhores, pois 51% dos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental aprenderam o adequado, 21% dos estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental aprenderam o adequado e 7% dos estudantes do Ensino Médio aprenderam o adequado. Já, os índices dos estudantes de Caçapava do Sul, cidade onde curso o PROFMAT, são iguais ou superiores aos nacionais, mas inferiores aos regionais no Ensino Fundamental e superior no Ensino Médio: 47% dos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental aprenderam o adequado, 19% dos estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental aprenderam o adequado e

[1] QEdu Portal: <https://novo.qedu.org.br>

9% dos estudantes do Ensino Médio aprenderam o adequado.

Pesquisadores (BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015; CONCEIÇÃO, 2019) afirmam que o desempenho de estudantes ao resolverem problemas envolvendo conceitos de Análise Combinatória, no Brasil, também, não é satisfatório. Corrobora com essa afirmação o estudo realizado por Pessoa e Borba (2010), que envolveu estudantes do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio ao resolverem diversos tipos de problemas de combinatória. As pesquisadoras constataram um baixo percentual de acerto em todos os níveis de ensino e um avanço menor que o esperado de um nível para outro. Verificaram, também, que os estudantes se perdem na organização das possibilidades, muitos se dão por satisfeitos listando apenas alguns casos e não buscam apresentar todos os possíveis casos.

Além disso, constataram que quando os estudantes utilizam fórmulas, fazem de maneira inadequada, "demonstrando que mesmo formalizando esse ensino, talvez o trabalho não esteja ocorrendo de maneira adequada, que deveria ajudar o aluno a pensar sobre a lógica implícita em cada significado de problema estudado (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano)" (PESSOA; BORBA, 2010, p. 14).

A superação das dificuldades dos estudantes ao resolverem problemas de Análise Combinatória tem sido um desafio para pesquisadores de diferentes áreas, por exemplo, Educação e Psicologia. Isso porque a aprendizagem da Combinatória possibilita "um modo de pensar necessário em situações cotidianas [...], além disso, essencial ao raciocínio probabilístico, pois a combinatória é necessária para o levantamento sistemático do espaço amostral, a partir do qual se pode determinar probabilidades" (BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015, p. 1349).

Melo, Silva e Spinillo (2016, p. 2) consideram que "além de ser um domínio específico da Matemática, do ponto de vista psicológico, o raciocínio combinatório é considerado um modo de pensar sofisticado que está envolvido na solução de problemas práticos complexos". Borba, Rocha e Azevedo (2015, p. 1349) definem raciocínio combinatório como um modo de pensar mobilizado na "análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar seus elementos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis".

Neste sentido, Borba e Azevedo (2012, p. 90) destacam que o desenvolvimento do raciocínio combinatório na Educação Básica é importante porque "possui um caráter hipotético-dedutivo; sendo, portanto, base de raciocínio científico no qual é possível isolar variáveis, manter algumas constantes e variar outras".

Segundo SÃO PAULO (1992 apud TEIXEIRA, 2012, p. 142, grifo nosso):

> Ao combinar objetos, em diferentes quantidades, agrupando-os, caracterizando os agrupamentos feitos – trabalhando a operação de classificação – e aperfeiçoando a maneira de contar tais agrupamentos, estaremos desenvolvendo o **raciocínio combinatório** e, consequentemente, dando condição para que nosso aluno enfrente com mais segurança e criatividade problemas de caráter aleatório, que dependem de uma contagem sistematizada, bem como, disponha de uma ferramenta útil e motivadora para deflagrar o aprendizado de outros conteúdos.

Corroborando com as ideias supracitadas, Teixeira (2020, p. 85) entende que o raciocínio combinatório possibilita "o desenvolvimento de habilidades e competências cognitivas do aluno, as quais passam a fazer parte de sua estrutura mental, permitindo que ele avance no entendimento do campo conceitual próprio à temática dos problemas de contagem". Bem como, se aproprie de conceitos relacionados a análise combinatória e probabilidade. O raciocínio combinatório é mobilizado pelo sujeito quando há necessidade de combinar elementos (todos ou por parte) de uma coleção com elementos de outra coleção. Em outras palavras, o raciocínio combinatório refere-se a combinação entre elementos de duas coleções (mesmo que elas contenham os mesmos objetos).

Dada a importância do desenvolvimento do raciocínio combinatório, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998) sugeriram a inserção de um bloco de conteúdos intitulado "Tratamento da Informação" na proposta do Ensino Fundamental, o qual se refere aos estudos sobre as noções de Estatística, Probabilidade e de Combinatória. Assim, conceitos relacionados à Combinatória deveriam fazer parte dos currículos desde os Anos Iniciais. O documento destaca que "o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do **princípio multiplicativo** para sua aplicação no cálculo de probabilidades" (BRASIL, 1998, p. 52, grifo nosso).

Os PCN do Ensino Médio (BRASIL, 1999, p. 45, grifos nossos), também, sugerem o ensino da Combinatória porque:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, **aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano** são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos **conteúdos de contagem**, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas.

Percebe-se a importância da aprendizagem de conceitos de probabilidade e combinatória para a resolução de problemas não só matemáticos, como de outras áreas do conhecimento. Uma vez que, a Combinatória refere-se ao estudo de técnicas de contagem de agrupamentos de elementos dados e que atendam a determinadas condições, indo além da mera enumeração de objetos, pois são contadas possíveis maneiras de combinar elementos, de modo a considerar todas as combinações que atendam certos critérios (BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015, p. 1350).

Conforme as Orientações Educacionais Complementares aos PCN do Ensino Médio (BRASIL, 2002, p. 126, grifos nossos):

> A **Contagem**, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada **raciocínio combinatório**. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis **não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas**, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação.
> As **fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande**. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no ensino médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. Espera-se que assim o aluno possa se orientar frente a informações de natureza estatística ou probabilística.

A citação acima sugere que as fórmulas utilizadas no ensino de Combinatória sejam consequência do raciocínio dos estudantes ao mobilizarem diferentes estratégias para resolver os problemas propostos. Nesta perspectiva, as fórmulas, quando utilizadas, têm a função de simplificar os cálculos (LIMA, 2015).

Observando a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) identifica-se, para as diferentes etapas da Educação Básica, sete habilidades relacionadas ao objeto de conhecimento "Problemas de Contagem" (Quadro 1).

Quadro 1 – Habilidades Combinatória

EF04MA08	Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
EF05MA09	Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.
EF08MA03	Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
EM13MAT310	Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
EM13MAT311	Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
EM14MAT312	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
EM13MAT511	Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: (BRASIL, 2018)

Destaca-se, para o 4º Ano, um trabalho com a resolução de problemas simples de contagem, enfatizando as estratégias e formas de registros pessoais e a utilização de material manipulável. Isso porque a exploração de representações gráficas e numéricas é enfatizada a partir do 5º Ano. Neste sentido, no 5º e 8º Anos, há recomendações para um trabalho com ênfase no princípio multiplicativo (representação numérica) e na utilização de representações gráficas (árvore de possibilidades[2], tabelas).

No Ensino Médio a resolução de problemas de contagem, pelo princípio multiplicativo, também é destacada, acrescentando-se o princípio aditivo. A representação, por meio de árvore de possibilidades, também é enfatizada. Ressalta-se que em nenhum momento, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, foram identificadas habilidades específicas relacionadas a arranjo, combinatória e permutação, tipos de problemas, geralmente, abordados no Ensino Médio. Isso indica que os documentos enfatizam a resolução dos diferentes tipos de problemas de Combinatória a partir da mobilização dos princípios multiplicativo e aditivo. Destaca-se que, o principio multiplicativo "pode ser aplicado aos diferentes tipos de problemas combinatórios, sejam eles condicionais ou não condicionais, e, também, é base das fórmulas empregadas no ensino da Análise Combinatória para a construção dos [...] problemas [...] estudados neste campo da Matemática" (LIMA, 2015, p. 17).

Fica evidente, no documento supracitado, que os problemas de contagem, podem, num primeiro momento, estar associados a situações cujas soluções são obtidas pela descrição de todos casos possíveis, com auxílio de representações gráficas (árvore de possibilidades, tabelas) e/ou, posteriormente, podem ser solucionados a partir dos **princípios multiplicativo e aditivo**[3]. (BRASIL, 2018)

Constata-se que, assim como nos demais documentos, as fórmulas utilizadas, geralmente, para resolver problemas de Combinatória não são enfatizadas. Isso porque as fórmulas não podem ser consideradas o único ou principal meio de resolver situações problemas de cunho combinatório. Devido ao fato de o desenvolvimento do raciocínio combinatório exigir a resolução de diferentes tipos de problemas, o uso de diferentes representações, a identificação de regularidades e o uso de modelos matemáticos.

Nesse sentido, é recomendado que o ensino de Combinatória potencialize a utilização de diferentes estratégias na resolução dos diferentes tipos de problemas, evitando-se, assim, a simples aplicação de fórmulas. Essas ideias são corroboradas pelos Guias do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD para o Ensino Médio (BRASIL, 2011, p. 29; BRASIL, 2014, p. 92) ao afirmarem que é "prejudicial um ensino que habitue o aluno a sempre tentar resolver qualquer problema de contagem com o uso somente de fórmulas".

O ensino focado no uso de fórmulas para a resolução de problemas de Combinatória não é indicado pela natureza variada e, eventualmente, complexa desses problemas, exigindo uma análise detalhada do tipo de problema, bem como da estratégia a ser utilizada (BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015).

[2] Entendimentos sobre a árvore de possibilidades serão apresentados no Capítulo 3.
[3] Entendimentos sobre os princípios multiplicativo e aditivo serão apresentados no Capítulo 3.

As recomendações, das propostas curriculares, são para não deixar de lado a estratégia de resolução baseada nos princípios multiplicativo e aditivo. Pois, o princípio multiplicativo, pode ser mobilizado na resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios (produtos cartesianos, arranjos, combinações e permutações) e ser base da construção de procedimentos formais da Análise Combinatória (fórmulas). O princípio multiplicativo pode, também, em algumas situações, ser combinado ao princípio aditivo, constituindo-se assim mais uma ferramenta para a resolução de problemas (LIMA, 2015). Em outras palavras, pode-se utilizar o princípio multiplicativo para resolver todos os tipos de problemas combinatórios, mas nem sempre o princípio aditivo. Isso justifica o porquê de a Combinatória estar inserida no campo multiplicativo.

Os Quadros 2 e 3 apresentam exemplos dos diferentes tipos de problemas combinatórios, com ou sem condição, resolvidos por meio do princípio multiplicativo, bem como destacam os invariantes operatórios para cada um desses problemas.

Quadro 2 – Tipos de Problemas de Combinatória - p.1

Tipo	Problema	Representação	Invariantes
Produto Cartesiano	Joaquim foi à livraria comprar seu material escolar. Para montar seu kit a livraria lhe ofereceu: 3 modelos de caderno, 4 modelos de lápis, 8 modelos de borracha e 2 modelos de caneta azul. De quantas formas diferentes Joaquim pode montar seu kit?	$3 \times 4 \times 8 \times 2$ Quantidade de modelos possíveis (QMP) de cadernos $\times$ QMP de lápis $\times$ QMP de borracha $\times$ QMP de canetas.	- Dados dois (ou mais) conjuntos distintos (com n e com p elementos), esses serão combinados para formar um novo conjunto. - A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto.
Arranjo	Na final do campeonato de judô, 5 meninas estão disputando os 3 primeiros lugares do torneio. De quantas formas diferentes podemos ter os três primeiros colocados?	$5 \times 4 \times 3$ Quantidade de meninas que podem ocupar o 1º lugar $\times$ Quantidade de meninas que podem ocupar o 2º lugar $\times$ Quantidade de meninas que podem ocupar o 3º lugar.	- Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ..., p elementos, com $0 < p < n$. - A ordem dos elementos gera novas possibilidades.
Permutação	De quantos modos distintos 5 pessoas podem se posicionar em um banco de 5 lugares?	$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ Quantidade de pessoas que podem ocupar a 1ª posição $\times$ Quantidade de pessoas que podem ocupar a 2ª posição $\times$ Quantidade de pessoas que podem ocupar a 3ª posição $\times$ Quantidade de pessoas que podem ocupar a 4ª posição $\times$ Quantidade de pessoas que podem ocupar a 5ª posição.	- Todos os n elementos do conjunto serão usados. - A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Fonte: Adaptado de Pessoa e Borba (2009) e Lima (2015).

Quadro 3 – Tipos de Problemas de Combinatória - p.2

Tipo	Problema	Representação	Invariantes
Combinação	Um técnico tem que escolher, dentre 12 atletas, 5 para compor a equipe titular de um time de basquete. Qual o total de possibilidades que o técnico tem para montar sua equipe?	$\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times \times 2 \times 1}$ Quantidade de escolhas para o 1º atleta $\times$ quantidade de escolhas para o 2º atleta $\times$ quantidade de escolhas para o 3º atleta $\times$ quantidade de escolhas para o 4º atleta $\times$ quantidade de escolhas para o 5º atleta. Após, divide-se pela permutação dos elementos repetidos, no caso dos 5 atletas.	- Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ..., p elementos, com $0 < p < n$. - A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.
Arranjo Condicional	Ana, Júlia, Marcos, Pedro e Laís estão participando de uma corrida. De quantos modos diferentes podemos ter os 3 primeiros colocados se Julia sempre chegar em primeiro lugar?	$1 \times 4 \times 3$ 1º lugar ocupado por Júlia $\times$ quantidade de participantes que podem ocupar o 2º lugar $\times$ quantidade de participantes que podem ocupar o 3º lugar.	—
Combinação Condicional	Marta precisa escolher entre seus 8 amigos (Tiago, Simone, Daniele, Jéssica, Pedro, Amanda, Rafael e Felipe), 4 para ir ao cinema com ela. De quantas formas diferentes Marta pode escolher esses quatro amigos desde que Jéssica sempre esteja entre os escolhidos?	$\frac{1 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times \times 2 \times 1}$ 1º lugar ocupado por Jéssica $\times$ quantidade de participantes que podem ocupar o 2º lugar $\times$ quantidade de participantes que podem ocupar o 3º lugar $\times$ quantidade de participantes que podem ocupar o 4º lugar. Após, divide-se pela permutação dos elementos repetidos, no caso dos 4 amigos.	—

Fonte: Adaptado de Pessoa e Borba (2009) e Lima (2015).

É possível observar, nos exemplos apresentados nos Quadros 2 e 3, que todas as resoluções foram elaboradas com base no princípio multiplicativo. Contudo, para resolução de alguns problemas de combinatória, como já mencionado, é necessário combinar o princípio multiplicativo com o aditivo (Quadro 4).

Quadro 4 – Problema de Combinatória Resolvido por meio dos Princípios Aditivo e Multiplicativo

Quantos números pares com quatro algarismos distintos podem ser formados com os elementos do conjunto $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$*?*	Primeiro fixa-se os números pares, iniciando pelo zero na casa das unidades: - Para o primeiro algarismo, cinco possibilidades, já que o zero já foi escolhido; - Para o segundo algarismo, quatro possibilidades; - Para o terceiro algarismo, três possibilidades. Tem-se assim $5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$ possibilidades, com o número par terminado por zero. Fixando, agora, o algarismo dois na casa das unidades: - Para o primeiro algarismo, quatro possibilidades, já que o dois já foi escolhido e não se pode ter zero na casa das unidades de milhar; - Para o segundo algarismo, quatro possibilidades; - Para o terceiro algarismo, três possibilidades. Tem-se assim $4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$ possibilidades, com o número par terminando pelo algarismo 2. Para os números terminados em seis e oito, segue-se o mesmo raciocínio de quando o algarismo dois ocupou a casa das unidades. Tem-se assim para o número par com final seis $4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$ possibilidades. E, para o número par com final oito $4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$ possibilidades. Por fim, soma-se o total de possibilidades individuais: $60 + 48 + 48 + 48 = 204$ números pares que podem ser formados.

Fonte: (LIMA, 2015).

Pessoa e Borba (2010) e Lima (2015) destacam a importância de serem considerados, em sala de aula, os variados significados, distintas relações e propriedades e diversificadas representações (numéricas, gráficas - árvore de possibilidades) que compõem as situações combinatórias para que estas sejam aproveitadas da melhor forma possível, no sentido de auxiliar os alunos no desenvolvimento desse raciocínio.

Observa-se, nos documentos curriculares e pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Combinatória, destaque à utilização da árvore de possibilidades na resolução de problemas combinatórios. Pois, ela é considerada uma das representações mais significativas à compreensão do raciocínio combinatório e ao princípio multiplicativo, visto que “dinamiza a conscientização e aplicabilidade generalizada” desse princípio (SÃO PAULO, 1980 apud TEIXEIRA, 2012, p. 131). Além de auxiliar na fundamentação das primeiras ideias relacionadas ao raciocínio combinatório em relação a significados presentes na multiplicação (TEIXEIRA, 2012). Ressalta-se que o princípio multiplicativo ocupa posição de suma importância na aprendizagem de conceitos combinatórios e funciona como base para qualquer técnica de contagem sintética.

Teixeira (2012) compreende que a elaboração de árvores possibilita perceber os passos constitutivos de aplicação do principio multiplicativo. Em outras palavras, os passos desse principio tornam-se “visíveis” na construção dos galhos da árvore a partir de cada nó até a obtenção dos galhos terminais. As ações que possibilitam "a construção de uma árvore de possibilidades são exatamente aquelas mesmas ações que permitem a tomada de decisões, em cada passo, de uma análise de combinação dos objetos envolvidos - quando se utiliza o raciocínio combinatório num dado nó da árvore" (TEIXEIRA, 2012, p. 132). Nesta perspectiva,

> A cada "nó" da árvore de possibilidades, o aluno realiza a tomada de decisão de combinar "um objeto para muitos, ou um para um", certificando-se de qual(quais) é(são) esse(s) objeto(s) ("muitos objetos") que estará(ão) sendo combinado(s) com aquele(s) outro(s), para esse particular "nó" ou para qualquer outro nó da árvore. (TEIXEIRA, 2012, p. 402)

O número de possibilidades de tomada de decisão corresponde a quantidade de galhos da árvore sendo construída. Quando se tem uma quantidade relativamente grande de galhos, em geral, opta-se por não construir toda a árvore de possibilidades. Assim, pode-se considerar o número de galhos da árvore pelos "correspondentes fatores que identificam a operação de multiplicação com o uso do princípio multiplicativo e com a correspondente 'operação combinatória' realizada" (TEIXEIRA, 2012, p. 132).

Cabe destacar que, a árvore de possibilidades pode ser utilizada para resolver problemas de contagem nos quais o princípio multiplicativo não pode ser aplicado diretamente. Além disso, é importante explorar diferentes tipos de árvores de possibilidades (simétricas e não simétricas). Entende-se por simétricas as árvores de possibilidades cuja distribuição dos galhos terminais é uniforme e não simétricas aquelas derivadas de agrupamentos, por exemplo, relacionados às combinações simples. (TEIXEIRA, 2012)

Diante desse contexto, sugere-se que o professor explore, desde o início do trabalho com problemas de Combinatória, a árvore de possibilidades, pois ela contribui na elaboração de modos sistemáticos de numeração (levantamento de espaço amostral), o que permite o esgotamento das possibilidades além das contagens duplicadas, principais dificuldades encontradas pelos estudantes. "Desse modo, estarão contribuindo, mais uma vez, para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e favorecendo a aplicação e a compreensão do Princípio Multiplicativo" (TEIXEIRA, 2012, p. 405).

2.2 Pesquisas sobre o Ensino e Aprendizagem de Análise Combinatória: Um Panorama a partir de Produções Acadêmicas

O fato de que muitas situações cotidianas e de outras áreas do conhecimento (Biologia, Química, Ciência da Computação) envolvem conceitos relacionados a combinatória, evidencia que o desenvolvimento do raciocínio combinatório é útil na interpretação de fenômenos do mundo real, na compreensão de várias áreas do conhecimento, bem como no aprendizado de outros conceitos da própria Matemática (BRASIL, 1998; BRASIL, 1999; BRASIL, 2002; BRASIL, 2018). Sendo assim, o processo de ensino e aprendizagem de combinatória tem sido alvo de várias pesquisas em Educação Matemática e Psicologia Cognitiva (BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015; LIMA, 2015; TEIXEIRA, 2012; PESSOA; BORBA, 2010).

No Brasil, segundo Campos e Igliori (2021), foram produzidas, de 1999 a 2019, entre teses e dissertações, 106 produções acadêmicas que tratam do ensino e da aprendizagem da Combinatória na Educação Básica, distribuídas por períodos conforme Quadro 5.

Quadro 5 – Número de Teses e Dissertações sobre Combinatória Produzidas de 1999 a 2019

Ano	Número de Dissertações	Número de Teses	Total de Produções
1999 a 2004	4	1	5
2005 a 2009	5	-	5
2010 a 2014	41	-	41
2015 a 2019	53	2	55
Total	103	3	106

Fonte: (CAMPOS; IGLIORI, 2021, p. 5).

As produções foram localizadas a partir da busca pelo descritor “análise combinatória”, em títulos de trabalhos, no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES. Conforme Quadro 5, foram identificados 55 trabalhos de 2015 a 2019, sendo 2 teses, 10 dissertações de mestrado acadêmico e 43 dissertações de mestrado profissional. Destas, 33 são oriundas do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Os pesquisadores, na fase de organização e classificação dos trabalhos, optaram por realizar uma pesquisa restrita, excluindo as produções oriundas do PROFMAT.

Campos e Igliori (2021) classificaram as pesquisas mapeadas em 5 grupos, a saber: Grupo 1, pesquisas que apresentam propostas de ensino e/ou sequências didáticas sobre análise combinatória; Grupo 2, pesquisas que visam a investigar a análise combinatória presente em documentos curriculares e em livros didáticos; Grupo 3, pesquisas que investigam a análise combinatória e a formação do professor; Grupo 4, pesquisas que investigam recursos para o ensino da análise combinatória; e, Grupo 5, pesquisas que investigam as estratégias de resolução de problemas combinatórios.

A partir do mapeamento foi possível observar que a maioria das produções está no Grupo 1. As produções deste grupo, em geral, apresentaram propostas de ensino ou sequências didáticas fundamentadas na metodologia da resolução de problemas dando ênfase ao uso do princípio multiplicativo. As produções identificadas no Grupo 2, em sua maioria, analisaram livros didáticos e constataram que este recurso continua sendo a principal referência utilizada pelos professores no ensino de Análise Combinatória (CAMPOS; IGLIORI, 2021).

Em relação ao Grupo 3, os autores verificaram que as produções investigaram: a) os professores e a elaboração de situações problema de Combinatória; b) os conhecimentos acerca de Combinatória; c) os entendimentos sobre Combinatória apresentados por professores; e, d) as estratégias de resolução de problemas combinatórios mobilizados por professores. Os resultados das pesquisas deste grupo reforçam a importância da formação inicial e continuada de professores quanto aos conceitos de Combinatória, visto que, a maioria, apresentou dificuldades em resolver problemas de Combinatória na mobilização do princípio multiplicativo no estabelecimento de relação desse princípio com as fórmulas de arranjo, permutação e combinação, bem como na utilização da árvore de possibilidades. (CAMPOS; IGLIORI, 2021)

Quanto ao Grupo 4, os autores constataram que as produções pesquisaram sobre: a) o uso de jogos no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória; b) desenvolvimento de aplicativos; e, c) contribuições da linguagem de programação **R** no ensino de Combinatória. Esses recursos foram apresentados em atividades didáticas a professores, alunos e licenciandos em Matemática. Os resultados das pesquisas indicam potencialidades dos recursos no ensino e aprendizagem de Combinatória, bem como necessidade de um trabalho específico com linguagens de programação tanto na formação inicial quanto continuada de professores. (CAMPOS; IGLIORI, 2021)

No Grupo 5, Campos e Igliori (2021) classificaram apenas uma pesquisa que discute as estratégias utilizadas por alunos do 2º ano do Ensino Médio ao resolverem problemas de Combinatória, antes e depois, do ensino desse campo. Os resultados da pesquisa apontam que as aulas sobre Combinatória não interferiram de modo significativo nos resultados da avaliação final (comparado ao pré-teste aplicado); os estudantes obtiveram maior êxito nos problemas de produto cartesiano seguido pelos de arranjo, permutação e combinação, respectivamente. Também, obtiveram melhor desempenho em problemas nos quais os números tinham ordem de grandeza pequena e naqueles que não envolviam repetição; estratégias, relacionadas ao princípio multiplicativo, foram utilizadas apenas em problemas que envolviam produto cartesiano; a árvore de possibilidades foi utilizada como estratégia apenas na avaliação final.

Com o intuito de analisar as produções do PROFMAT não consideradas na pesquisa de Campos e Igliori (2021) buscou-se, no portal desse programa, as produções realizadas entre 2015 e 2019. Para tanto, realizou-se a busca por Título[4] considerando os que continham o descritor "Análise Combinatória". Foram identificadas 56 dissertações que tratam do ensino e aprendizagem de Combinatória, 23 a mais que a pesquisa de Campos e Igliori (2021), confirmando que esse campo tem sido foco de várias pesquisas nos recentes anos.

Optou-se por utilizar a classificação proposta por Campos e Igliori (2021) para identificar as perspectivas investigativas apresentadas nas produções acerca da Combinatória do PROFMAT (Quadro 6).

Quadro 6 – Número de Dissertações sobre Combinatória Produzidas de 2015 a 2019 - PROFMAT

Grupo	Número de Dissertações
1-Propostas de ensino e/ou sequências didáticas	39
2-Documentos curriculares e livros didáticos	1
3-Análise combinatória e a formação do professor	2
4-Recursos para o ensino	10
5-Estratégias de resolução de problemas	4
Total	56

Fonte: O autor, 2021.

[4] Destaca-se que o sistema de buscas do portal do PROFMAT oferece apenas a seleção dos descritores nos títulos das produções.

Os dados expostos no Quadro 6 indicam que a maioria das produções está voltada a propostas de intervenção, a partir do desenvolvimento de atividades didáticas com estudantes do Ensino Médio, principalmente, 2º ano, assim como, observado por Campos e Igliori (2021). Seguida de produções que enfatizam o uso de recursos para o ensino de Combinatória. A maioria destas, utilizou como recurso o *software* GeoGebra na abordagem dos conceitos de Combinatória com alunos, principalmente, do Ensino Médio. Sublinha-se que não foram identificadas pesquisas que utilizem o ambiente de programação Scratch para produção de projetos (jogos, histórias interativas, animações) relacionados ao ensino e aprendizagem de Combinatória, foco deste trabalho. A busca por compreender os processos de desenvolvimento do raciocínio combinatório foi foco de quatro produções ao analisarem as estratégias utilizadas por estudantes na resolução de problemas de Combinatória.

Os resultados dos três grupos com maior número de pesquisas indicam que o foco das pesquisas foi a produção e o desenvolvimento de atividades didáticas para o ensino de Combinatória voltadas a alunos do Ensino Médio. Percebe-se, ainda, que a formação de professores, assim como a análise de livros didáticos, foram pouco exploradas. Contudo, diante dos resultados de Campos e Igliori (2021), que apontam que professores apresentam dificuldades com esse tema, pesquisas envolvendo a formação, em especial, continuada desses profissionais tornam-se relevantes.

Diante desse contexto, optou-se por elaborar histórias interativas, produzidas no ambiente Scratch[5], com o intuito de incentivar o uso de tecnologias digitais, por professores, nas aulas de Matemática, especialmente, no estudo de Combinatória, enfatizando os princípios aditivo e multiplicativo, bem como o uso da árvore de possibilidades.

5 O ambiente Scratch, bem como a justificativa de sua escolha, serão apresentados no Capítulo 4.

3 CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA: ALGUMAS FORMALIZAÇÕES E EXEMPLOS

Neste capítulo são apresentadas as definições, teoremas e exemplos referentes à Análise Combinatória, baseado no livro de Lipschutz e Lipson (2004), a fim de permitir que se explore de forma adequada as histórias interativas.

Morgado et al. (1991) definem Análise Combinatória como sendo a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Em outras palavras, pode-se definir a Análise Combinatória como sendo a parte da Matemática que trata de problemas onde sujeitos, seres, objetos, elementos alfa-numéricos ou outros elementos se relacionam em uma determinada regra, ordem, sequência, ou outra relação exigida.

Duas definições iniciais importantes no estudo de análise combinatória são *experimento* e *evento*. Assim, define-se *experimento*, ao organizar ou relacionar elementos de acordo com uma regra. Definimos espaço amostral (S), como o conjunto de todos os resultados possíveis de um dado experimento. *Evento* é definido como qualquer subconjunto de resultados desse experimento.

Os problemas de Combinatória podem ser resolvidos enumerando os elementos do espaço amostral ou do evento solicitado de acordo com o experimento, como será exposto nos dois exemplos seguintes, mas os elementos desse conjunto podem ser mais facilmente obtidos pelo uso dos princípios aditivo e multiplicativo e da árvore de possibilidades ou diagrama de árvore, que serão abordados posteriormente.

No que segue, utilizar-se-á $n(S)$ para denotar o número de elementos de um conjuntos S. Para consolidar as definições apresentada, considere o primeiro exemplo.

Exemplo 1 *Duas moedas são lançadas simultaneamente, quantas são as possibilidades de que ambas caiam com a mesma face para cima?*

Neste exemplo o experimento é o lançamento das duas moedas. Assim, o espaço amostral ou evento total é dado pelo conjunto

$$S = \{KK, KC, CK, CC\},$$

representando cara por K e coroa por C. No entanto o foco desse problema em particular é o evento em que ambas as moedas tenham a mesma face voltada para cima. Este evento é representado pelo conjunto

$$EQ = \{KK, CC\},$$

assim são duas as possibilidade de que as moedas caiam com a mesma face para cima.

Observa-se que esse problema foi resolvido apenas com a enumeração dos elementos procurados. Vejamos outro exemplo para firmar as definições.

Exemplo 2 *No intervalo das aulas, um grupo de seis amigos formado por João, André, Felipe, Carla, Paula e Beatriz, resolveu jogar uma partida de truco, para isso resolveram formar duplas. Sabendo que João foi o primeiro a poder escolher seu parceiro, responda:*
(a) quantas são as possíveis duplas que João pode formar?
(b) quantas são as possíveis duplas que João pode formar com uma menina?

O experimento é a formação de duplas entre os amigos do conjunto

$$\{\text{João (J), André (A), Felipe (F), Carla (C), Paula (P), Beatriz (B)}\}.$$

As pessoas serão representadas pela letra inicial dos seus nomes, o que simplifica muito na hora de trabalhar com as opções possíveis.

O espaço amostral das duplas formadas é

$$S = \{JA,\ JF,\ JC,\ JP,\ JB,\ AF,\ AC,\ AP,\ AB,\ FC,\ FP,\ FB,\ CP,\ CB,\ PB\}. \quad (3.1)$$

Na representação na Equação (3.1), a letra inicial dos meninos foi representada em azul, enquanto das meninas foi representado em vermelho.

Neste exemplo, há dois eventos:

(a) o evento E_1 que considera as duplas formadas por João é

$$E_1 = \{JA,\ JF,\ JC,\ JP,\ JB\},$$

assim o número de possíveis duplas formadas por João é $n(E_1) = 5$.

(b) o evento E_2 que considera as duplas formadas por João e uma menina é

$$E_2 = \{JC,\ JP,\ JB\},$$

assim o número de possíveis duplas formadas por João e uma menina é $n(E_2) = 3$.

Observa-se que estes exemplos foram resolvidos explicitando os conjuntos que representam os eventos de interesse e contando seu elementos.

Em problemas com maior número de elementos torna-se dispendioso e às vezes, inviável a enumeração de todos os elementos do evento. Por isso, torna-se mais viável a estimativa desse total através dos princípios básicos que a análise combinatória possui: princípio aditivo e princípio multiplicativo, que serão apresentados a seguir.

3.1 Princípio Aditivo

O princípio aditivo, também conhecido como princípio da regra da soma, é utilizado quando dois ou mais eventos não podem ocorrer simultaneamente ou, em outras palavras, são mutuamente exclusivos.

Inicialmente, considera-se dois eventos A e B mutuamente exclusivos, e suponha que o evento A possa ocorrer de m maneiras distintas (m resultados) e o evento B ocorra de n maneiras distintas (n resultados). Então o evento A ou o evento B podem ocorrer de $m + n$ maneiras distintas ($m + n$ resultados).

Generalizando, dados os eventos $E_1, E_2, \ldots, E_k$, com, respectivamente, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ maneiras distintas de ocorrer, sendo que cada dois não podem ocorrer simultaneamente, tem-se que existem $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ maneiras distintas de ocorrer algum dos eventos.

O princípio aditivo está intimamente ligado à união de conjuntos disjuntos. Mais especificamente, se $S_1, S_2, \ldots, S_k$ são conjuntos finitos mutuamente disjuntos, então o número de elementos da união destes conjuntos é

$$n(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k) = n(S_1) + n(S_2) + \cdots + n(S_k).$$

Vejamos um exemplo que usa o princípio aditivo.

Exemplo 3 *Joãozinho recebeu sua mesada e com seu dinheiro somente consegue ir ao cinema ou jogar no fliperama por uma hora. No cinema, ele pode escolher entre 4 filmes: Titanic, Avatar, Star Wars e Vingadores, enquanto que no fliperama, ele pode escolher entre 3 jogos: Minecraft, Roblox e Fortnite. Quantas são as maneiras possíveis de Joãozinho escolher ver um filme* ***ou*** *jogar um jogo no fliperama?*

Primeiro, observa-se que ver um filme e ir ao fliperama, neste exemplo, são eventos mutuamente exclusivos, ou seja, Joãozinho não pode realizar ambas atividades. Desse modo, pode ser usado o princípio aditivo.

O evento *escolher um filme no cinema* é dado pelo conjunto

$$C = \{\text{ Titanic}, \text{ Avatar}, \text{ Star Wars}, \text{ Vingadores}\},$$

assim um filme pode ser escolhido de 4 maneiras distintas, $n(C) = 4$.

O evento *escolher um jogo no fliperama* é dado pelo conjunto

$$F = \{\text{Minecraft}, \text{ Roblox}, \text{Fortnite}\},$$

assim um jogo no fliperama pode ser escolhido de 3 maneiras distintas, $n(F) = 3$.

Finalmente, Joãozinho pode escolher um filme ou um jogo de

$$n(C \cup F) = n(C) + n(F) = 3 + 4 = 7$$

maneiras diferentes.

3.2 Princípio Multiplicativo

É conhecido também como regra do produto, produto cartesiano ou princípio fundamental da contagem. Utiliza-se este princípio quando dois ou mais eventos ocorrem de forma independente um do outro. Considerando inicialmente dois eventos A e B, e supondo que o Evento A possa ocorrer de m maneiras distintas (m resultados) e o Evento B ocorra de n maneiras distintas (n resultados), então o Evento A e o Evento B podem ocorrer de $m \cdot n$ maneiras ($m \cdot n$ resultados).

Generalizando, dados os Eventos $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_k$, tendo, respectivamente, n_1, n_2, n_3, $\cdots$, n_k maneiras distintas de ocorrer, então todos os eventos podem ocorrer na ordem $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_k$ de $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$ maneiras diferentes.

O princípio multiplicativo está associado, em teoria de conjuntos, ao produto cartesiano. Naturalmente, considerando conjuntos finitos $S_1, S_2, \ldots, S_k$, tem-se que

$$n(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k) = n(S_1) \cdot n(S_2) \cdots n(S_k).$$

Além disso, a representação do produto cartesiano de dois (ou mais) conjuntos como pares (ou n-duplas) ordenados é condizente com o princípio multiplicativo.

Baseado no exemplo 3, o exemplo 4 também envolve o cinema e o fliperama, mas o evento considerado é o de realizar ambas atividades, sendo elas independentes. Portanto, será utilizado o princípio multiplicativo.

Exemplo 4 *Joãozinho recebeu sua mesada, e seu dinheiro é suficiente para ir ao cinema e jogar no fliperama por uma hora. No cinema, ele pode escolher entre 4 filmes: Titanic, Avatar, Star Wars e Vingadores, enquanto que no fliperama, ele pode escolher entre 3 jogos: Minecraft, Roblox e Fortnite. Quantas são as maneiras possíveis de Joãozinho escolher um filme* ***e*** *jogar um jogo no fliperama?*

O evento *escolher um filme no cinema* é dado pelo conjunto

$$C = \{\text{Titanic}, \text{ Avatar}, \text{ Star Wars}, \text{ Vingadores}\},$$

e assim, um filme pode ser escolhido de 4 maneiras distintas, $n(C) = 4$.

O evento *escolher um jogo no fliperama* é dado pelo conjunto

$$F = \{\text{Minecraft}, \text{ Roblox}, \text{ Fortnite}\},$$

e assim, um jogo no fliperama pode ser escolhido de 3 maneiras distintas, $n(F) = 3$.

Finalmente, Joãozinho pode escolher um filme e um jogo de

$$n(C \times F) = n(C) \times n(F) = 4 \times 3 = 12$$

maneiras distintas.

Deve-se sempre buscar a correta interpretação do problema, a fim de entender e identificar a quais princípios está associada a questão. Observa-se que nos enunciados dos exemplos 3 e 4, foram destacadas as palavras **ou** e **e**, que dentro do contexto da questão nos leva a associá-las aos princípios aditivo e multiplicativo, respectivamente.

O exemplo 5 é uma questão da prova da OBMEP[1] (2008, nível 1, fase 1, nº 18).

Exemplo 5 *(OBMEP, 2008) Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma azul, uma cinza e uma branca, e quatro calças: uma preta, uma azul, uma verde e uma marrom. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?*

Neste exemplo, usa-se o princípio multiplicativo, pois *vestir uma camisa* é um evento independente de *vestir uma calça*.

O evento *vestir uma camisa* é dado pelo conjunto

$$\begin{aligned} C_{am} = \{&\text{camisa preta manga curta},\ \text{camisa preta manga longa},\\ &\qquad\qquad\text{camisa azul},\ \text{camisa cinza},\ \text{camisa branca}\} \end{aligned}$$

e assim uma camisa pode ser vestida de $n(C_{am}) = 5$ maneiras distintas.

O evento *vestir uma calça* é dado pelo conjunto

$$C_{al} = \{\text{calça preta},\ \text{calça azul},\ \text{calça verde},\ \text{calça marrom}\}$$

e assim uma calça pode ser vestida de $n(C_{al}) = 4$ maneiras distintas.

Portanto, Fábio pode vestir uma camisa e uma calça de

$$n(C_{am} \times C_{al}) = n(C_{am}) \times n(C_{al}) = 5 \times 4 = 20$$

maneiras diferentes.

Para finalizar, devem-se avaliar a restrição imposta nessa questão: "De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?". Como devem ser consideradas somente as opções de cores distintas, então, para resolver esse problema, deve-se subtrair, do total de possibilidades encontradas acima, as opções de camisa e calça com a mesma cor. Isso ocorre com a camisa preta manga curta e calça preta, outra vez com camisa preta manga comprida e calça preta e uma última vez com camisa azul e calça azul, ou seja, há 3 maneiras de Fábio se vestir com cores iguais.

Portanto, Fábio tem $20 - 3 = 17$ opções para se vestir com cores distintas. Observa-se que nesta última etapa, utilizou-se o princípio aditivo, mesmo que de maneira implícita.

[1] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

3.3 Representações

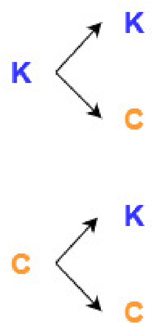
A árvore de possibilidades (ou diagrama de árvore) é uma representação simbólica que possibilita a "compreensão de diferentes relações combinatórias, sendo possível, assim, trabalhar os variados tipos de problemas combinatórios, observando-se as semelhanças e diferenças entre eles" (AZEVEDO; BORBA, 2013, p. 39). Portanto, a árvore de possibilidades, também conhecida como diagrama de árvore é uma representação da ramificação de todos os possíveis resultados de um experimento. Com ela, simplifica-se essa representação utilizando elementos alfanuméricos ou outros símbolos para indicar os sujeitos, seres ou objetos do evento, onde de cada um desses elementos emerge um novo ramo para cada uma das possibilidades seguintes, permitindo indicar todas as possibilidades e evitar repetir os elementos. Em uma árvore de possibilidades, a sequência dos elementos é representada ou interligada por setas ou segmentos.

A seguir será construída a árvore de possibilidades do Exemplo 1, onde os eventos poderiam ser representados assim:

Moeda1	——	**Moeda2**
Cara	——	Cara
Cara	——	Coroa
Coroa	——	Cara
Coroa	——	Coroa

Em um diagrama de árvore pode-se trocar coroa pela letra C e cara pela letra K, e assim representá-lo como Figura 1:

Figura 1 – Árvore de possibilidades do Exemplo 1



Fonte: O autor, 2021

As árvores de possibilidades (Figura 1) e os demais diagramas que serão mostrados na sequência foram construídos com a ajuda do aplicativo Draw.io[2]. Este aplicativo, que pode ser utilizado diretamente do navegador web, possibilita o desenvolvimento de diversos tipos de diagramas, incluindo os usados em análise combinatória.

[2] Disponível no site <https://app.diagrams.net>

No Exemplo 4, tem-se o evento *escolher um filme no cinema* que é dado pelo conjunto

$$C = \{\text{Titanic},\ \text{Avatar},\ \text{Star Wars},\ \text{Vingadores}\}$$

e o evento *escolher um jogo no fliperama* que é dado pelo conjunto

$$F = \{\text{Minecraft},\ \text{Roblox},\ \text{Fortnite}\},$$

assim, gerando a seguinte representação:

Cinema		**Fliperama**
Titanic	$\longrightarrow$	Minecraft
Titanic	$\longrightarrow$	Roblox
Titanic	$\longrightarrow$	Fortnite
Avatar	$\longrightarrow$	Minecraft
Avatar	$\longrightarrow$	Roblox
Avatar	$\longrightarrow$	Fortnite
Star Wars	$\longrightarrow$	Minecraft
Star Wars	$\longrightarrow$	Roblox
Star Wars	$\longrightarrow$	Fortnite
Vingadores	$\longrightarrow$	Minecraft
Vingadores	$\longrightarrow$	Roblox
Vingadores	$\longrightarrow$	Fortnite

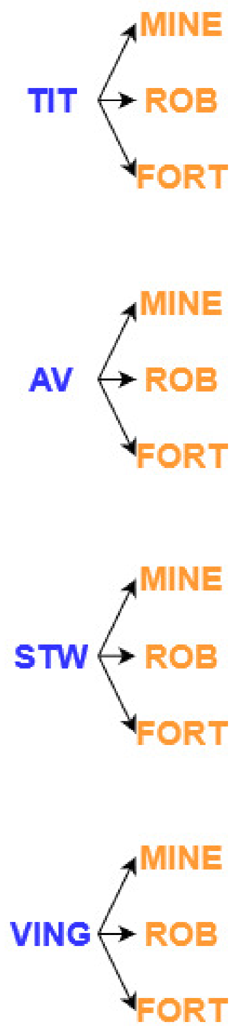
Construindo uma árvore de possibilidades, produz-se uma representação mais simples. Primeiramente substitui-se cada filme e cada jogo por uma letra mais conveniente. Neste caso, será realizada a seguinte troca:

Titanic = *TIT*,   Avatar = *AV*,   Star Wars = *STW*,   Vingadores = *VING*

Minecraft = *MINE*,   Roblox = *ROB*,   Fortnite = *FORT*

Assim, a árvore de possibilidades é representada na Figura 2.

Figura 2 – Diagrama de árvore do Exemplo 4



Fonte: O autor, 2021

A seguir será construída a árvore de possibilidades do Exemplo 2, onde, como já mencionado, as pessoas foram representadas pela letra inicial do seu nome. O conjunto das pessoas é:

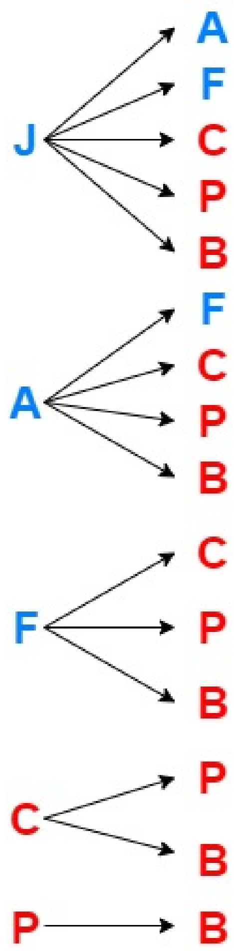
$$\{\text{Joao } (J), \text{ Andre } (A), \text{ Felipe } (F), \text{ Carla } (C), \text{ Paula } (P), \text{ Beatriz } (B)\}$$

Assim o espaço amostral das duplas de truco é:

$$S = \{JA,\ JF,\ JC,\ JP,\ JB,\ AF,\ AC,\ AP,\ AB,\ FC,\ FP,\ FB,\ CP,\ CB,\ PB\}.$$

A representação acima pode gerar dúvidas quanto à exaustão de todas as opções possíveis, ou ainda, pode-se acabar gerando opções duplicadas. Ao gerar a árvore de possibilidades (Figura 3), evita-se que isso aconteça.

Figura 3 – Árvore de possibilidades do Exemplo 2



Fonte: O autor, 2021

A Figura 3 ilustra que cada pessoa do nó subsequente gera uma dupla a menos que a anterior. Isso ocorre porque a dupla dela com a pessoa do nó anterior já foi formada.

Assim, sugere-se que os problemas de Combinatória sejam resolvidos ou iniciados com auxilio dos princípios aditivo e multiplicativo e da representação da árvore de possibilidades, para o melhor entendimento da questão, como defendido amplamente no capítulo anterior. Nos casos de problemas mais complexos ou extensos, em que se torne difícil a enumeração de todos os resultados possíveis de um evento em particular, pode-se, após a escolha da estratégia da resolução, buscar auxilio no uso de alguns modelos matemáticos da Análise Combinatória, como os modelos que seguirão nas próximas seções. As fórmulas que aparecerão não são para uso generalizado, como nos exemplos abaixo; elas aparecerão para confirmar que são somente uma consequência do raciocínio combinatório estabelecido ao longo da resolução.

3.4 Permutação Simples

A permutação consiste em trocarmos a ordem dos elementos de um conjunto, de modo que o agrupamento formado se diferencie dos demais pela ordem dos elementos. A seguir, veremos um exemplo para melhor entendimento.

Exemplo 6 *Ana, Maria e João querem sentar-se em três bancos enfileirados (ou enumerados). De quantas maneiras diferentes poderão sentar-se?*

Para resolver esse exemplo torna-se muito útil organizar os elementos do conjunto de maneira que seja fácil esgotar todas as possibilidades. A estratégia utilizada será de fixar um primeiro elemento escolhido e alterar os demais elementos de todas as maneiras possíveis. Em seguida, fixa-se um segundo e repete-se o mesmo processo.

Fixando, inicialmente, Ana no primeiro banco, obtém-se o diagrama:

Banco 1		**Banco 2**		**Banco 3**
Ana	$\longrightarrow$	Maria	$\longrightarrow$	João
Ana	$\longrightarrow$	João	$\longrightarrow$	Maria

Agora, fixando Maria no primeiro banco:

Banco 1		**Banco 2**		**Banco 3**
Maria	$\longrightarrow$	Ana	$\longrightarrow$	João
Maria	$\longrightarrow$	João	$\longrightarrow$	Ana

Finalmente, repete-se o processo com João:

Banco 1		**Banco 2**		**Banco 3**
João	$\longrightarrow$	Maria	$\longrightarrow$	Ana
João	$\longrightarrow$	Ana	$\longrightarrow$	Maria

Veja que a ordem dos elementos é importante. Perceba que:

$$\text{Ana} \longrightarrow \text{Maria} \longrightarrow \text{João},$$

é diferente de

$$\text{Ana} \longrightarrow \text{João} \longrightarrow \text{Maria}.$$

Portanto as possíveis formas de ocupar os bancos são:

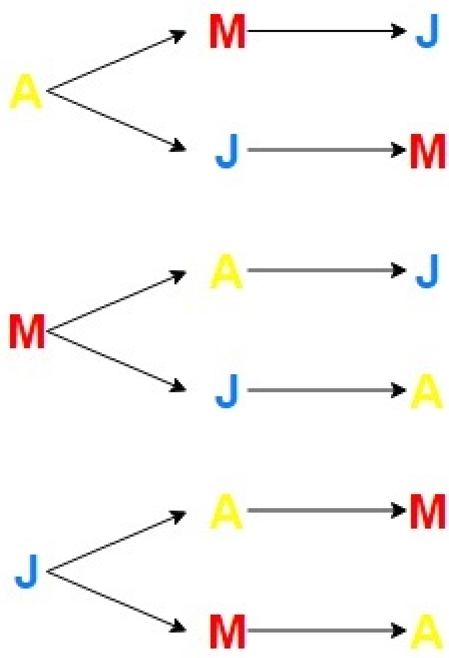
Disposição	**Banco 1**	**Banco 2**	**Banco 3**
i)	Ana	Maria	João
ii)	Ana	João	Maria
iii)	Maria	João	Ana
iv)	Maria	Ana	João
v)	João	Ana	Maria
vi)	João	Maria	Ana

As disposições i), ii), iii), iv), v) e vi) diferem apenas pela ordem que as pessoas ocupam os bancos. Porém, observa-se que todos os bancos são ocupados e todas as pessoas são consideradas.

Para a construção da árvore de possibilidades (Figura 4), será utilizada a seguinte representação:

$$\text{Ana} = A, \quad \text{Maria} = M, \quad \text{João} = J$$

Figura 4 – Diagrama de árvore do Exemplo 6



Fonte: O autor, 2021

Analisando a Figura 4, observa-se que para o banco 1 há 3 possíveis pessoas para sentar; para cada uma dessas pessoas há duas possibilidades no banco 2; e para cada uma do banco 2 há uma no banco 3.

Percebe-se que esse exemplo usa o princípio multiplicativo pois seus eventos ocorrem de maneira independente.

O evento 1: *sentar-se no banco 1* é dado pelo conjunto de três elementos:

$$\text{Ana } (A), \text{ Maria } (M), \text{ João } (J)$$

O evento 2: *sentar-se no banco 2* é dado pelo conjunto de dois elementos:

$$\text{Ana } (A), \text{ Maria } (M), \text{ João } (J), \text{ excluindo a pessoa que sentou no banco 1}$$

O evento 3: *sentar-se no banco 3* é dado pelo conjunto de um elemento:

Ana (A), Maria (M), João (J), excluindo as pessoas que sentaram no banco 1 e no banco 2

A situação pode também ser representada da seguinte forma:

Banco 1		**Banco 2**		**Banco 3**	
3 possíveis pessoas	$\times$	2 possíveis pessoas	$\times$	1 possível pessoa	$= 3 \times 2 \times 1$
					$= 3!$ possibilidades

Portanto, há 3x2x1 possibilidades ou 3!, ou seja, 6 possibilidades.

De forma mais geral, qualquer disposição ou ordenação dos objetos de um conjunto de n objetos distintos é dita uma permutação destes n objetos (usando todos a cada vez).

Neste exemplo de permutação, pode-se explicitar todas as possibilidades de disposição dos elementos, no entanto, este processo pode se tornar cansativo se o número de objetos for grande.

Dessa maneira busca-se uma generalização que pode ser obtida a partir do exemplo dado:

Banco 1	**Banco 2**	**Banco 3**
$\underbrace{3}$	$\underbrace{2}$	$\underbrace{1}$
Ana, Maria e João podem ocupar a primeira cadeira	escolhida uma pessoa para a primeira cadeira, restam duas pessoas para ocupar a segunda cadeira	escolhidas duas pessoas para as primeiras cadeiras, resta apenas uma para ocupar a terceira cadeira

Assim o número de formas distintas das três pessoas ocuparem as três cadeiras é dado por

Banco 1		**Banco 2**		**Banco 3**
3	$\times$	2	$\times$	1

que será representado por $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 3!$, que lê-se a permutação de 3 elementos é 3!, ou seja, existem 6 formas de dispor 3 elementos distintos de um conjunto.

Generalizando a ideia usada para este exemplo, observe a esquematização abaixo pensando em dispor n elementos distintos em n posições.

Posição 1	**Posição** 2	$\cdots$	**Posição** $n-1$	**Posição** n
$\underbrace{n}$ objetos disponíveis para ocupar a posição 1	$\underbrace{n-1}$ objetos disponíveis para ocupar a posição 2	$\cdots$	$\underbrace{2}$ objetos disponíveis para ocupar a posição $n-1$ posição $n-1$	$\underbrace{1}$ objetos disponíveis para ocupar a posição n

Assim o número de formas distintas de se dispor os n elementos pode ser organizado como

Posição 1		**Posição** 2		$\cdots$		**Posição** $n-1$		**Posição** n
n	$\times$	$n-1$	$\times$	$\cdots$	$\times$	2	$\times$	1

E, finalmente, a permutação de n elementos distintos, que é o número de agrupamentos ordenados desses elementos, pode ser calculada por

$$P_n = n! \tag{3.2}$$

Em síntese, a permutação é utilizada quando deseja-se obter o número de formas distintas de que pode-se dispor um determinado número de objetos. Vejamos um outro exemplo de permutação.

Exemplo 7 *Ana, Maria, João e Carlos querem sentar-se em quatro bancos enfileirados (ou enumerados). De quantas maneiras diferentes poderão sentar-se?*

Para resolver este problema, será fixado um primeiro elemento escolhido e altera-se os demais elementos de todas as maneiras possíveis. O diagrama abaixo representa estas escolhas:

Banco 1		**Banco 2**		**Banco 3**		**Banco 4**
Ana	$\longrightarrow$	Maria	$\longrightarrow$	João	$\longrightarrow$	Carlos
Ana	$\longrightarrow$	Maria	$\longrightarrow$	Carlos	$\longrightarrow$	João
Ana	$\longrightarrow$	João	$\longrightarrow$	Maria	$\longrightarrow$	Carlos
Ana	$\longrightarrow$	João	$\longrightarrow$	Carlos	$\longrightarrow$	Maria
Ana	$\longrightarrow$	Carlos	$\longrightarrow$	João	$\longrightarrow$	Maria
Ana	$\longrightarrow$	Carlos	$\longrightarrow$	Maria	$\longrightarrow$	João

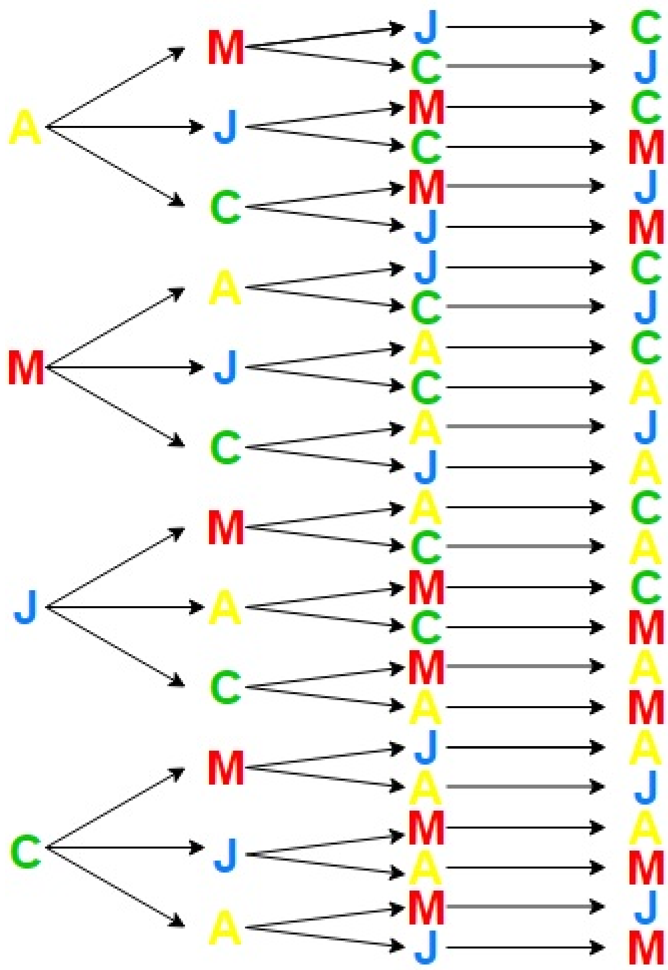
Acima estão descritas apenas as possibilidades quando Ana é fixada no banco 1. Analogamente, quando os demais ocuparem o primeiro banco tem-se as outras possibilidades.

Para a elaboração da árvore de possibilidades deste exemplo (Figura 5), será utilizada a representação:

$$\text{Ana} = A, \quad \text{Maria} = M, \quad \text{João} = J, \quad \text{Carlos} = C$$

A Figura 5 ilustra que há 4 possíveis pessoas para sentar no banco 1, para cada uma dessas pessoas há três possibilidades no banco 2, duas no banco 3 e uma no banco 4. Portanto, tem-se $4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilidades, ou seja, $4!$, portanto, 24 possibilidades. Se for utilizada a fórmula $P_n = n!$ para calcular, obtém-se $P_4 = 4! = 24$, o mesmo resultado.

Figura 5 – Árvore de possibilidades do Exemplo 7



Fonte: O autor, 2021

Esta situação pode também ser representada como:

Banco 1		**Banco 2**		**Banco 3**		**Banco 4**	
4 opções	$\times$	3 opções	$\times$	2 opções	$\times$	1 opção	$= 4 \times 3 \times 2 \times 1$
							$= 4!$ possibilidades

3.5 Arranjo Simples

Arranjo simples consiste em selecionar e ordenar um grupo de elementos de um dado conjunto, de modo que o agrupamento formado se diferencie dos demais pela ordem dos elementos, porém, o número de elementos de cada grupo é menor do que o número de elementos do conjunto original. Vejamos um exemplo para melhor entendimento.

Exemplo 8 *Ana, Maria, João e Carlos querem sentar-se em* ***dois*** *bancos enfileirados (ou enumerados). De quantas maneiras diferentes poderão sentar-se?*

Do mesmo modo que foi feito na permutação, fixa-se um primeiro elemento escolhido e altera-se os demais elementos de todas as maneiras possíveis. Em seguida, fixa-se um segundo, e o mesmo processo é repetido.

Começando com Ana no primeiro banco e alterando os demais, obtém-se:

Banco1		**Banco2**
Ana	$\longrightarrow$	Maria
Ana	$\longrightarrow$	João
Ana	$\longrightarrow$	Carlos

Agora fazendo o mesmo, fixando Maria no primeiro banco:

Banco1		**Banco2**
Maria	$\longrightarrow$	Ana
Maria	$\longrightarrow$	João
Maria	$\longrightarrow$	Carlos

Da mesma maneira, posicionando João no primeiro banco:

Banco1		**Banco2**
João	$\longrightarrow$	Ana
João	$\longrightarrow$	Maria
João	$\longrightarrow$	Carlos

Finalmente, repete-se o processo com Carlos.

Banco1		**Banco2**
Carlos	$\longrightarrow$	Ana
Carlos	$\longrightarrow$	Maria
Carlos	$\longrightarrow$	João

Observa-se, novamente, que a ordem dos elementos é importante. Perceba que:

$$\text{Ana} \longrightarrow \text{Maria}$$

é diferente de

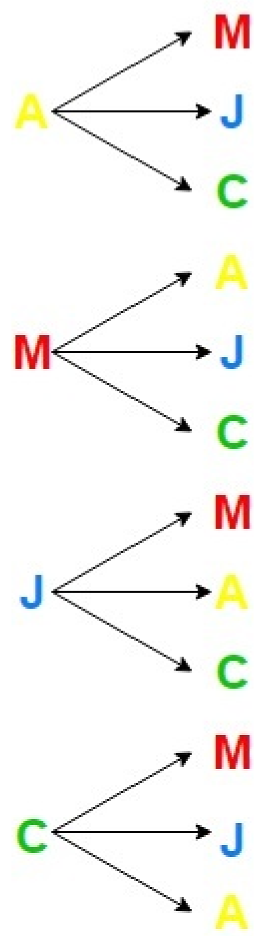
$$\text{Maria} \longrightarrow \text{Ana}$$

A visualização é mais simples através da árvore de possibilidades exposta na Figura 6. Para proceder com a sua construção, será utilizada a seguinte representação:

$$\text{Ana} = A, \quad \text{Maria} = M, \quad \text{João} = J, \quad \text{Carlos} = C$$

Neste exemplo, o diagrama (Figura 6) ilustra que para o banco 1 há 4 possíveis pessoas para sentar, para cada uma dessas pessoas há três possibilidades no banco 2 e as demais pessoas "sobram", ou seja, ficam sem sentar. Portanto, tem-se $4 \times 3 = 12$ possibilidades.

Figura 6 – Árvore de possibilidades do Exemplo 8



Fonte: O autor, 2021.

Observa-se que nesse exemplo também se utiliza o princípio multiplicativo, pois os eventos associados ocorrem de maneira independentes.

O evento 1: *sentar-se no banco 1* é dado pelo conjunto de quatro elementos:

Ana (A), Maria (M), João (J), Carlos (C).

O evento 2: *sentar-se no banco 2* é dado pelo conjunto de três elementos:

Ana (A), Maria (M), João (J), Carlos (C), excluindo a pessoa que sentou no banco 1.

Esquematicamente, pode-se representar a situação da seguinte forma:

$$\underset{\text{pessoas disponíveis}}{\overset{\textbf{Banco 1}}{\underbrace{4}}} \quad \times \quad \underset{\text{pessoas disponíveis}}{\overset{\textbf{Banco 2}}{\underbrace{3}}} \quad = 4 \times 3 = 12$$

Enfim, escreve-se:

$$A_{4,2} \;=\; 4 \times 3 = 12$$

como sendo o número de arranjos de 4 pessoas tomadas 2 a 2.

Em ambos Exemplos 7 e 8, há 4 pessoas envolvidas: Ana, Maria, João e Carlos. No entanto, observa-se que :

- no Exemplo 7 deseja-se que as quatro pessoas ocupem 4 bancos, resultando em 24 possibilidades, oriundo de
$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \tag{3.3}$$
- no Exemplo 8 deseja-se que as quatro pessoas ocupem 2 bancos, resultando em 12 possibilidades, oriundo de
$$A_{4,2} = 4 \times 3 = 12. \tag{3.4}$$

Observa-se que a diferença entre (3.3) e (3.4) está no fator 2×1. Tem-se

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

e

$$A_{4,2} = 4 \times 3 = 12.$$

Este fator 2×1 pode ser interpretado como $(n-p)! = (4-2)!$, onde neste caso tem-se $n = 4$ (pessoas) e $p = 2$ (bancos). Assim, o número de permutações P_4 é um múltiplo do arranjo $A_{4,2}$, de modo que:

$$A_{4,2} = \frac{1}{(4-2)!}P_4 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 4 \times 3.$$

Observando acima, arranjo $A_{4,2}$ pode ser interpretado matematicamente como o cancelamento dos fatores 2×1 da permutação P_4.

Generalizando, suponha que dado um conjunto de n elementos deseja-se determinar de quantas formas distintas é possível agrupar p elementos desse conjunto, considerando diferença de natureza e ordem de seus elementos. Este problema pode ser esquematizado da seguinte forma.

Posição 1	**Posição 2**	**Posição 3**	$\cdots$	**Posição** p
$\underbrace{n}$	$\underbrace{n-1}$	$\underbrace{n-2}$	$\cdots$	$\underbrace{n-p+1}$
elementos disponíveis para a posição 1	elementos disponíveis para a posição 2	elementos disponíveis para a posição 3		elementos disponíveis para a posição p

Assim, o número de arranjos de n elementos tomados p a p é dado por

$$A_{n,p} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1). \tag{3.5}$$

No entanto é frequente encontrar a fórmula para determinação do número de arranjos dada em termos de uma permutação. Observe que a Equação (3.5) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} A_{n,p} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \\ n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) \times \frac{(n-p) \times (n-p-1) \times \cdots 2 \times 1}{(n-p) \times (n-p-1) \times \cdots 2 \times 1} = \\ \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{P_n}{(n-p)!}, \end{aligned}$$

assim, comumente escreve-se

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \tag{3.6}$$

Em outras palavras, o arranjo é uma permutação em que são agrupados p objetos distintos em cada agrupamento do conjunto, ou seja, não utilizando todos os n elementos do conjunto dado de cada vez.

3.6 Combinação Simples

Na combinação simples, assim como em Arranjos simples, são formados grupos de p elementos distintos, escolhidos de um grupo de n elementos (onde $p \leq n$). A diferença para o arranjo simples está em que os grupos **não** diferem entre si pela ordem dos p elementos.

Escrevendo explicitadamente para o caso de três elementos, se os elementos a, b e c são dispostos em todas as ordens possíveis, ou seja, (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a), mesmo assim tem-se **um único** conjunto $\{a, b, c\}$, já que a ordem não importa.

Neste exemplo, um novo conjunto é obtido somente através da inclusão de um novo elemento, por exemplo d, ao conjunto original, obtendo, por exemplo, $\{a, b, d\}$.

Essa situação ficará mais clara no exemplo 9.

Exemplo 9 *De quantas maneiras podemos escolher duas pessoas para estarem dentro de uma sala entre quatro pessoas possíveis (Ana, Maria, João e Carlos)?*

Observa-se que não existe uma ordem de sentar em bancos, como nos exemplos anteriores, nem mesmo a ordem de entrar na sala importa. O único fator a ser considerado é quais pessoas estão na sala.

Na representação abaixo, as possibilidades quando Ana está na sala:

PESSOAS	NA	SALA
Ana	e	Maria
Ana	e	João
Ana	e	Carlos

Em seguida estão representadas as possibilidades em que Maria está na sala:

PESSOAS	NA	SALA
Maria	e	Ana
Maria	e	João
Maria	e	Carlos

Da mesma maneira, quando João está na sala:

PESSOAS	NA	SALA
João	e	Ana
João	e	Maria
João	e	Carlos

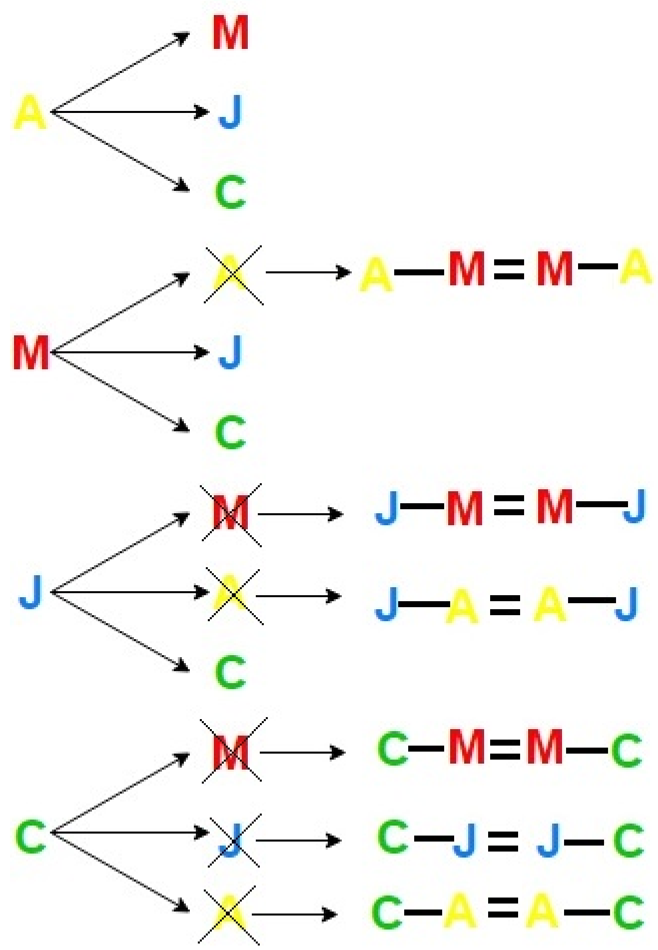
E ainda, as possibilidades quando Carlos está na sala:

PESSOAS	NA	SALA
Carlos	e	Ana
Carlos	e	Maria
Carlos	e	João

Percebe-se que Ana e Maria, na primeira representação, e Maria e Ana, na segunda representação, compõem a mesma possibilidade dentro da sala. Afinal, se Ana entra na sala e depois Maria ou se Maria entra primeiro e depois Ana não faz diferença, o que importa é quais pessoas estão na sala.

Um primeiro formato da árvore de possibilidades para esse exemplo está representado na Figura 7.

Figura 7 – Árvore de possibilidades do Exemplo 9

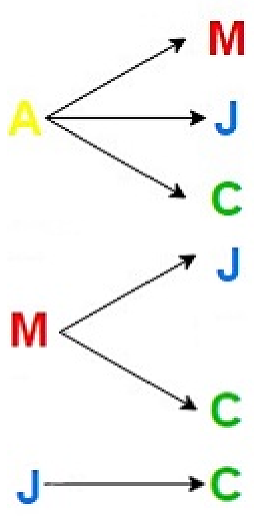


Fonte: O autor, 2021

Percebe-se, na árvore de possibilidades da Figura 7, que no segundo nó uma opção foi cancelada, pois essa mesma opção foi apresentada no nó anterior com a ordem trocada. Como a ordem dos elementos não importa neste caso, uma das opções deve ser excluída. Do mesmo modo, no terceiro nó foi cancelada duas opções já apresentada nos nós anteriores e no quarto todas as opções, também canceladas, já apresentadas em outros nós.

Portanto, a Figura 8 ilustra as opções que permaneceram, isto é, as 6 possibilidades de solução do problema, metade das possibilidades do Exemplo 8.

Figura 8 – Árvore de possibilidades do Exemplo 9, excluídas as repetições



Fonte: O autor, 2021

No que segue, será realizada uma análise das diferenças entre os Exemplos 8 e 9. Em ambos exemplos tem-se 4 pessoas envolvidas: Ana, Maria, João e Carlos.

No entanto, observa-se que:

- no Exemplo 8 deseja-se que as quatro pessoas ocupem 2 bancos, resultando em 12 possibilidades, oriundo de
$$A_{4,2} = 4 \times 3 = 12. \tag{3.7}$$
- no Exemplo 9 deseja-se que as quatro pessoas ocupem qualquer lugar dentro da sala, resultando em 6 possibilidades, oriundo de
$$C_{4,2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6. \tag{3.8}$$

Observa-se que a diferença entre (3.7) e (3.8) está no fator $\frac{1}{2}$. Tem-se

$$A_{4,2} = 4 \times 3 = 12$$

e

$$C_{4,2} = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6.$$

Este fator $\frac{1}{2}$ pode ser interpretado como

$$\frac{1}{p!} = \frac{1}{2!},$$

onde $p = 2$ é o número de bancos.

Assim, o arranjo $A_{4,2}$ é um múltiplo da combinação $C_{4,2}$, de modo que:

$$C_{4,2} = \frac{1}{2!} \times A_{4,2} = \frac{1}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Observando acima, pode-se deduzir que:

$$C_{n,p} = \frac{1}{p!} \times A_{n,p}$$

.

Sabendo que a fórmula do arranjo é:

$$A_n = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Deduz-se que a fórmula da combinação é:

$$C_n = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Esta divisão na fórmula do arranjo por $p!$ pode ser interpretado como a divisão necessária em virtude das repetições existentes que no diagrama ilustrado na Figura 7 eram as opções que foram canceladas por já haverem sido apresentadas em um nó anterior.

Substituindo n por 4 (número de pessoas) e p por 2 (número de bancos), obtém-se:

$$C_4 = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{24}{(2) \times 2} = \frac{24}{4} = 6, \tag{3.9}$$

que é o mesmo resultado encontrado anteriormente.

Generalizando, suponha-se que dado um conjunto de n elementos deseja-se determinar de quantas formas distintas é possível agrupar p elementos desse conjunto, considerando que não há diferença na ordem de seus elementos. Assim, o número de combinações de n elementos tomados p a p é dado por

$$C_{n,p} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}. \tag{3.10}$$

A fórmula acima para determinação do número de combinações pode ser dada em termos de um arranjo ou de uma permutação. Observa-se que a Equação (3.10) pode ser reescrita como:

$$C_{n,p} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!} =$$

$$C_{n,p} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!} \times \frac{(n-p) \times (n-p-1) \times \cdots 2 \times 1}{(n-p) \times (n-p-1) \times \cdots 2 \times 1} =$$

$$\frac{n!}{(n-p)! \cdot (p)!} = \frac{A_{n,p}}{(p)!} = \frac{P_n}{(n-p)! \cdot p!}.$$

Assim, comumente escreve-se

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}. \tag{3.11}$$

O objetivo da parte final deste capítulo sobre os princípios e modelos da combinatória, foi de apresentar e demonstrar que esses modelos matemáticos e suas fórmulas são consequência daqueles princípios. O uso da árvore de possibilidades e dos princípios, principalmente o princípio multiplicativo, é fator decisivo para o entendimento e a resolução dos problemas de análise combinatória. Sugere-se que o uso de fórmulas seja feito somente após esse entendimento e nos casos em que for necessário, devido ao grande número de elementos ou de contas envolvidas.

4 ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA PROPOSTA A PARTIR DA ELABORAÇÃO DE HISTÓRIAS INTERATIVAS

Em consonância com o objetivo de apresentar potencialidades e possibilidades de utilização de histórias interativas, este capítulo irá dedicar-se ao detalhamento da elaboração do site[1], em especial, da apresentação das histórias interativas, produzidas no ambiente Scratch, para o ensino de Combinatória. Destaca-se que a elaboração do site tem por objetivos: incentivar o uso de tecnologias digitais, por professores, nas aulas de Matemática, especialmente, no estudo de Análise Combinatória; explorar potencialidades do ambiente de programação Scratch e formas de integrá-lo às aulas de Matemática, em particular, na resolução de problemas envolvendo Análise Combinatória; e, apresentar situações-problema envolvendo conceitos de Combinatória, enfatizando os princípios multiplicativo e aditivo, bem como a árvore de possibilidades. Para isso, descreve-se as ferramentas utilizadas, evidenciando as potencialidades do recurso Google Sites e do ambiente de programação Scratch.

4.1 Recursos Utilizados para a Construção do Site e das Histórias Interativas

Para organização da proposta de ensino e aprendizagem de Combinatória, utilizando tecnologias digitais, optou-se por elaborar um site para hospedagem de histórias interativas, produzidas no ambiente de programação Scratch, que enfatizam estratégias de resolução de problemas combinatórios a partir dos princípios multiplicativo e aditivo, bem como da árvore de possibilidades.

O Google Sites é uma plataforma estruturada para criação de wikis[2] e páginas da Web, que é disponibilizado gratuitamente pela Google. Nessa plataforma foi desenvolvido o site Estudo da Análise Combinatória (Figura 9) para hospedar as histórias interativas criadas no Scratch.

[1] <https://sites.google.com/view/analisecombinatoria/principal>
[2] Um wiki é um site projetado para que grupos de pessoas capturem e compartilhem ideias rapidamente.

Figura 9 – Página do site Estudo da Análise Combinatória

Fonte: O autor, 2021.

O Google Sites permite que sejam incorporados, a estrutura do site, recursos desenvolvidos em outras plataformas como, por exemplo, Scratch *online*. De modo que, é possível distribuir as atividades, ao longo de uma página web.

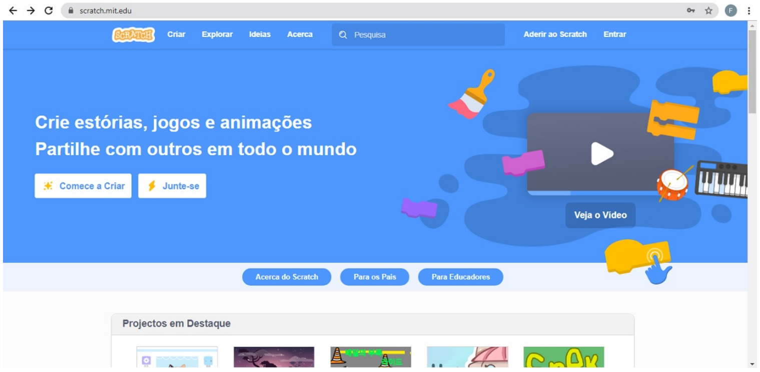
O Scratch é uma linguagem de programação baseada em blocos. É desenvolvido e mantido pela Equipe Scratch no grupo Lifelong Kindergarten Group no Media Laboratory do Massachusetts Institute of Technology (MIT).

Segundo Zoppo (2017, p. 67), o Scratch é acessível a um público inexperiente em linguagens de programação, e erros de sintaxe são difíceis de acontecer, pois é mais intuitivo, uma vez que a comunicação entre quem está programando e o computador se dá por meio de soltar e arrastar blocos como um encaixe de peças. É gratuito e pode ser utilizado diretamente no navegador, a partir de seu web site. Funciona na maioria dos navegadores, em computadores e dispositivos móveis. O Scratch possui também uma versão offline, na qual se pode criar e visualizar projetos (atividades desenvolvidas no Scratch) quando não houver conexão com a Internet, necessitando apenas descarregar e instalar o aplicativo Scratch no dispositivo. Não é necessário nenhum tipo de licença para utilizar o Scratch. Inclusive, o site incentiva o fomento a criatividade, compartilhando livremente código, arte, música e outros trabalhos. Essas características permitem, ao professor e aos alunos, criar suas próprias histórias interativas, animações e jogos, para as diferentes áreas do conhecimento.

O site do Scratch[3] (Figura 10) disponibiliza, dentre outras informações, vários tutoriais que auxiliam no entendimento dos comandos.

[3] <http://scratch.mit.edu>

Figura 10 – Página principal do Scratch



Fonte: O autor, 2021.

Após realizar o login no site, é disponibilizado a cada usuário, um espaço para criação (Scratch online) e armazenamento de projetos construídos. Ainda, permite a consulta/remixagem[4] de projetos existentes, contribuindo para uma melhor compreensão dos recursos disponíveis no ambiente.

Segundo Resnick (2020, p. 92)

> Nossa equipe do MIT desenvolveu o site do Scratch especificamente para incentivar colaborações, então esperávamos que os jovens interagissem e trabalhassem juntos no Scratch. Mesmo assim, ficamos sempre surpresos (e encantados) com o nível e a diversidade das colaborações no site, ou , pelo menos, eu fico pessoalmente surpreso. [...] Espero que as futuras gerações de crianças possam se tornar ainda mais criativas quanto as formas de compartilhar e colaborar se fornecermos a elas ferramentas, suporte e oportunidades certos para isso.

Para que os estudantes possam compartilhar conhecimentos, bem como colaborar na construção desses, torna-se importante que os professores conheçam ferramentas como o Scratch.

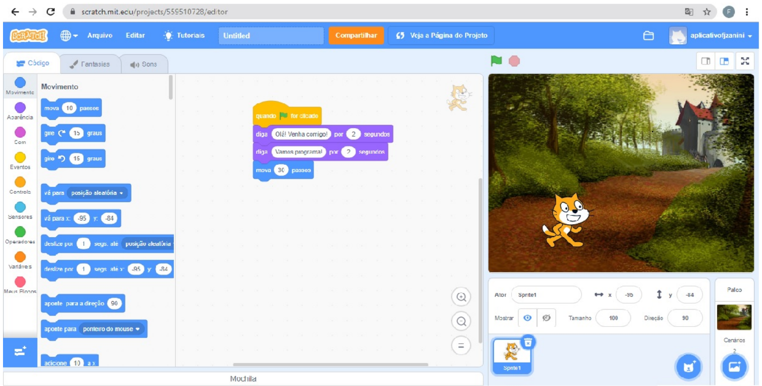
Os projetos podem ser executados imediatamente na bandeira verde ou acessados através do link do projeto. Quando clica-se no link do projeto, abre-se uma nova janela diretamente no site do Scratch, onde encontra-se o botão "Ver interior"que está no canto superior direito. Clicando nesse botão, tem-se acesso aos comandos do projeto. Neste sentido, pode-se ver e aprender os comandos para reproduzi-los em um novo projeto, ou ainda, alterar os comandos e testar os resultados, porém, essas alterações não podem ser salvas. No botão em formato de globo que fica no canto superior esquerdo pode-se trocar o idioma dos comandos.

Na tela do Scratch (Figura 11), tem-se, a direita, a visualização de como está o seu projeto e abaixo os atores que podem ser acrescentados ou excluídos. Na faixa do meio do Scratch ficam os comandos do ator selecionado onde é possível modificar ou arrastar novos comandos que ficam disponíveis no lado esquerdo da tela na aba código. No lado esquerdo também está a aba fantasia no qual pode-se modificar a aparência dos atores e a aba som em

[4] Segundo os desenvolvedores, a ideia de remixagem está ligada a dado um projeto já construído, importá-lo para seu espaço de armazenamento e, então, aperfeiçoá-lo.

que o ruído ou som dos atores podem ser alterados.

Figura 11 – Página de um projeto do Scratch



Fonte: O autor, 2021.

Considerando as características apontadas, e visto que estão alinhadas com a proposta deste trabalho, optou-se por utilizar o Scratch como ferramenta para a criação de histórias interativas a serem apresentadas aos alunos da Educação Básica.

4.2 Histórias Interativas para o Estudo da Combinatória

Nesta seção, são apresentadas as Histórias Interativas construídas com o intuito de possibilitar aos usuários (professores e alunos) a retomada e ampliação de estratégias e representações para a resolução de problemas de Combinatória. As Histórias em Quadrinhos são ferramentas potenciais do processo de aprendizagem de diferentes áreas, sendo incentivado pela BNCC (BRASIL, 2018).

Segundo Eisner (2010 apud FOOHS; CORRÊA; TOLEDO, 2021, p. 81), uma História em Quadrinhos é um “veículo de expressão criativa, uma disciplina distinta, uma forma artística e literária que lida com a disposição de figuras ou imagens e palavras para narrar uma história ou dramatizar uma ideia”. As Histórias em Quadrinhos podem ser construídas online, contudo, são poucas as ferramentas que podem ser utilizadas de forma interativa e didática como o Scratch. São muitas as possibilidades disponíveis no Scratch como ferramenta mediadora da linguagem. “Além de dar suporte as histórias em quadrinhos interativas e à comunicação entre vários cenários, atores e objetos, desempenhando o fenômeno da hipermídia” (FOOHS; CORRÊA; TOLEDO, 2021, p. 91).

Neste sentido, Freitas (2017 apud LEBOWITZ; KLUG, 2011, p. 17) argumenta:

> Encontrar o verdadeiro significado de narrativa interativa entre todos os argumentos e definições pode ser confuso, então vamos pensar logicamente. Primeiro, os termos narrativa interativa e histórias interativas implicam que você pode de algum modo interagir com a história. (...) para ser interativa, uma história não precisa dar ao jogador controle completo e total sobre como tudo acontece. Os jogadores apenas precisam ser capazes de interagir diretamente com a história de algum modo ou forma, desconsiderando se suas interações têm um efeito significativo na história.

Nas Histórias Interativas de Matemática podem ser apresentadas situações-problema ao longo da narrativa e o usuário pode interagir, elaborando conjecturas, testando, movimentando objetos, apresentando argumentos e repostas, construindo as soluções de acordo com o que for solicitado pelos atores e conforme as possibilidades de interação oferecida.

Ressalta-se que, conceitos relacionados ao pensamento computacional estão pautados nas diretrizes da BNCC (BRASIL, 2018), o que torna relevante a busca e construção de recursos que possam ser utilizados em sala de aula para o ensino de conceitos de diferentes áreas, bem como, inspire o aluno (e, também, o professor) a realizar suas próprias construções.

Com base no exposto, a seguir são apresentadas as Histórias Interativas elaboradas no Scratch e disponibilizadas no site. A apresentação das atividades foi organizada de modo a destacar: tipo de problema; estratégia de resolução; representação; habilidade(s) da BNCC, segundo ideias expostas no Capítulo 2.

4.2.1 Primeiras Noções de Análise Combinatória

Tipo de problema: Produto Cartesiano e Combinação Condicional
Estratégia de resolução: Princípio Multiplicativo
Representação: Listagem
Habilidade(s) da BNCC:

(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

Descrição: A primeira história (Figura 12) apresentada é narrada pelo personagem Diogo que explica, através de exemplos, como combinar elementos e contá-los para calcular as maneiras possíveis de solucionar os problemas de Análise Combinatória.

Figura 12 – História Interativa 1

Fonte: O autor, 2021.
<https://scratch.mit.edu/projects/413981574>

Diogo faz uma breve apresentação de si e de seu amigo Doguito, personagem representado por um cão que ajudará durante a elaboração de estratégias para a resolução do problema proposto na história. Em seguida é descrita a situação-problema: “*Duas moedas são lançadas simultaneamente, quantas são as possibilidades de que ambas caiam com a mesma face para cima?*”

Então, faz uma apresentação das moedas nas ordenações possíveis:

Coroa —— Coroa
Coroa —— Cara
Cara —— Cara
Cara —— Coroa

Revelando, posteriormente, as duas opções corretas:

Coroa —— Coroa
Cara —— Cara

Concluindo, portanto, que há 2 possibilidades de que ambas as moedas caiam com a mesma face para cima.

Na sequência da história, Diogo apresenta outro exemplo: *Um grupo de seis amigos: João, André, Felipe, Carla, Paula e Beatriz, resolveu jogar uma partida de truco de duplas. Quantas são as possíveis duplas que João pode formar? E quantas são as possíveis duplas que João pode formar com uma menina?*

O problema, agora, requer que sejam avaliadas duas situações diferentes, a primeira, são as duplas com todos e a segunda, condicionada a duplas com meninas. Sendo usada a representação por listagem com a intenção de auxiliar o usuário na resolução.

O personagem Diogo apresenta os nomes das duplas de João nas ordenações possíveis:

João —— André
João —— Felipe
João —— Carla
João —— Paula
João —— Beatriz

Concluindo, portanto, que há 5 possíveis duplas que podemos formar com João.

Posteriormente exibe a seleção relativa à segunda pergunta:

João —— Carla
João —— Paula
João —— Beatriz

Concluindo, então, que há 3 possíveis duplas que podemos formar com João e uma menina.

Invariantes Operatórios: Nesta atividade, foram apresentados dois problemas: o primeiro problema, do tipo produto cartesiano, com dois conjuntos distintos de 2 elementos cada, em que 1 elemento de cada conjunto será combinado para formar um novo conjunto. O segundo problema, do tipo combinação condicional, 6 elementos, formando agrupamentos ordenados de 2 elementos em que um dos 6 elementos, "João", já ocupava lugar no agrupamento, restando ocupar o outro lugar com um dos demais 5 elementos. Na sequência, condicionando este outro lugar com somente as meninas, ou seja, ocupar o outro lugar com um de 3 elementos.

4.2.2 Construindo a Árvore de Possibilidades

Tipo de problema: Produto cartesiano e combinação condicional

Estratégia de resolução: Princípio multiplicativo

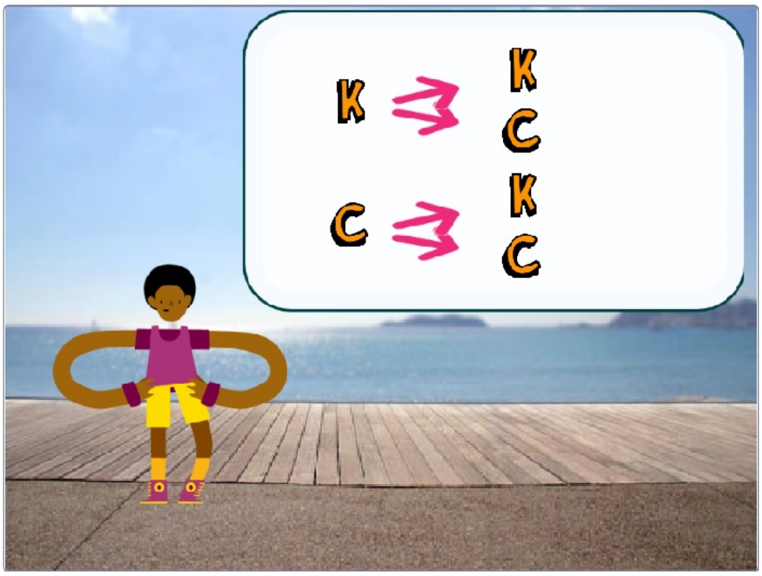
Representação: Árvore de possibilidades

Habilidade(s) da BNCC:

(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Descrição: A segunda atividade (Figura 13) apresentada explica o que é e como fazer uma árvore de possibilidades.

Figura 13 – História Interativa 2



Fonte: O autor, 2021.
<https://scratch.mit.edu/projects/439609545>

A história, também narrada pelo personagem Diogo, explica como representar as opções das questões de contagem substituindo os sujeitos, seres ou objetos do evento por elementos alfanuméricos ou outros símbolos. Essa construção da árvore de possibilidades tem o objetivo de mostrar ao usuário que o uso desse diagrama organiza os elementos, evitando o esquecimento ou a repetição e ainda facilita a compreensão e resolução dos problemas.

Como exemplo, usou-se a questão das moedas resolvida no projeto anterior, onde substituímos as suas opções de moedas por letras. A moeda cara é trocada pela letra K e a moeda coroa pela letra C e assim, criamos a árvore de possibilidades.

Em um segundo exemplo, também questão do projeto anterior, são exibidos os nomes das duplas com João e depois substituídos os nomes pela respectiva letra inicial, formando, por fim, a árvore de possibilidades. Nos dois problemas desenvolvidos foi utilizado o princípio multiplicativo, mas na história ele não foi apresentado de forma explícita, pois este será explicado na atividade seguinte.

Invariantes Operatórios: Nesta atividade, foram desenvolvidos os mesmos problemas das atividades anteriores, ou seja, o primeiro problema do tipo produto cartesiano, com dois conjuntos distintos de 2 elementos cada, onde 1 elemento de cada conjunto será combinado para formar um novo conjunto. O segundo problema do tipo combinação condicional, 6 elementos, formando agrupamentos ordenados de 2 elementos onde um dos 6 elementos, “João”, já ocupava lugar no agrupamento, restando ocupar o outro lugar com um dos demais 5 elementos. Na sequência, condicionando este outro lugar com somente as meninas, ou seja, ocupar o outro lugar com um de 3 elementos.

4.2.3 Compreendendo os Princípios Aditivo e Multiplicativo

Tipo de problema: Princípio aditivo e Produto Cartesiano
Estratégia de resolução: Princípios aditivo e multiplicativo
Representação: Árvore de possibilidades
Habilidade(s) da BNCC:
(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore (árvore de possibilidades).

Descrição: Essa atividade (Figura 14) é apresentada com o intuito de desenvolver a compreensão do usuário sobre a diferença entre os princípios aditivo e multiplicativo e sua importância na resolução de problemas de contagem.

Figura 14 – História Interativa 3

Fonte: O autor, 2021.
<https://scratch.mit.edu/projects/549705534>

Diogo, agora, narra a história com a participação de um hipopótamo “voador”, explicando os princípios aditivo e multiplicativo. Em seguida, expõe as diferenças entre os dois, com auxílio dos Exemplos 3 e 4 do capítulo 3, que envolvem o cinema e o fliperama.

Invariantes Operatórios: Nesta atividade, foram desenvolvidos dois problemas: o primeiro, usando o princípio aditivo, com dois conjuntos distintos, um de 3 elementos e outro de 4 elementos, onde 1 elemento entre os dois conjuntos será escolhido para formar um novo conjunto; e, o segundo problema, do tipo produto cartesiano, com dois conjuntos distintos, um de 3 elementos e outro de 4 elementos, em que 1 elemento de cada conjunto será combinado para formar um novo conjunto.

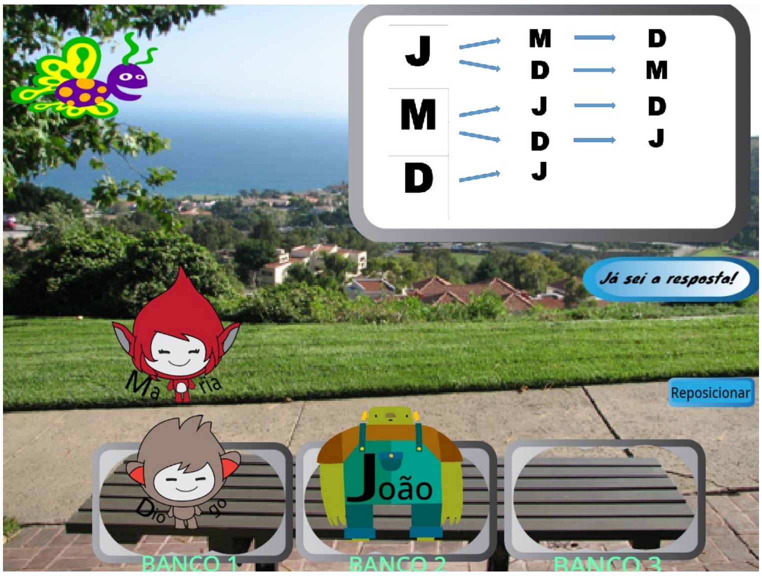
4.2.4 Acomodando Três Pessoas em Três Bancos

Tipo de problema: Permutação
Estratégia de resolução: Princípio multiplicativo
Representação: Árvore de possibilidades
Habilidade(s) da BNCC:

(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

Descrição: A próxima atividade (Figura 15) apresentada desenvolve uma interação com o usuário, precedida de explicação do problema proposto.

Figura 15 – História Interativa 4



Fonte: O autor, 2021.
<https://scratch.mit.edu/projects/410223955>

Através de um novo personagem, uma borboleta, introduzimos uma questão: *De quantas maneiras, três pessoas (João, Maria e Diogo) podem sentar-se em três bancos (um ao lado do outro)?*

Na tela, existe um banco de três lugares e os três personagens João, Maria e Diogo. Neste momento, o usuário é convidado a interagir, escolhendo em qual banco irá acomodar João, Maria e Diogo enquanto visualiza as opções que aparecem no canto superior direito da tela. Trocando os personagens de lugar, o usuário encontra outras opções, que também aparecem na tela. Quando todas as opções forem encontradas, surge na tela a árvore de possibilidades formada e o usuário poderá dar a resposta da questão na tela. Após dar essa resposta, a personagem borboleta inicia as explicações sobre o que é permutação e mostra o uso do princípio multiplicativo na resolução, além da correspondência com a fórmula da permutação.

Finalizando, conclui, que há 6 maneiras de três pessoas sentar-se em três bancos (um ao lado do outro).

Invariantes Operatórios: Nesta atividade, foi desenvolvido um problema do tipo permutação, com 3 elementos, formando agrupamentos ordenados de 3 elementos no qual a ordem dos elementos gera novas possibilidades e todos os elementos do conjunto serão usados.

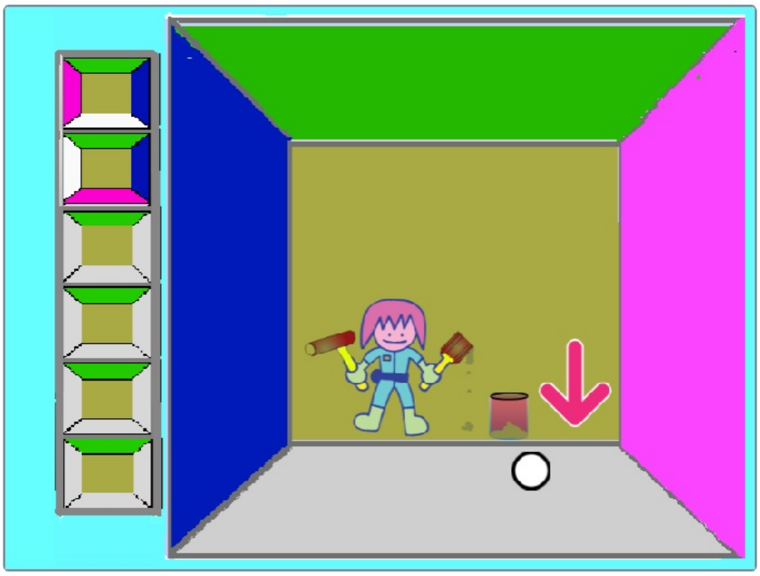
4.2.5 Pintando as Paredes do Quarto de Manuela

Tipo de problema: Permutação
Estratégia de resolução: Princípio multiplicativo
Representação: Gráfica dos elementos
Habilidades da BNCC:

(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

Descrição: Essa atividade (Figura 16) é apresentada pela personagem Manuela, mesma personagem de uma questão da OBMEP (descrita posteriormente). A atividade permite a interação do usuário (utilizando mouse e teclado para construção das estratégias de resolução), seguida de explicação e resolução do problema.

Figura 16 – História Interativa 5



Fonte: O autor, 2021.
<https://scratch.mit.edu/projects/431887800>

A personagem Manuela solicita auxílio do usuário para pintar as paredes de seu quarto, das cores azul, rosa, verde e branco. O usuário, então, é orientado a interagir pintando as paredes, bastando arrastar as cores até elas e assim vai observando as opções que resultam no lado esquerdo da tela. Na parede norte do quarto já está fixada a cor verde e o usuário pode pintar as demais paredes. Após pintar e repintar em todas as possibilidades das demais paredes, o usuário verifica, através da interação, 6 maneiras de pintar as paredes, tendo na parede norte fixada a cor verde.

Na sequência, Manuela explica o que acontece se trocarmos a cor verde da parede norte por outras cores, chegando à conclusão, fazendo uso da representação gráfica, de que são 24 possibilidades de pintar as paredes de seu quarto das quatro cores diferentes. Mostra, também, como pode-se usar o princípio multiplicativo para chegar à solução da questão e que se trata de uma permutação.

Neste momento, Manuela apresenta a questão da OBMEP (Quadro 7):

Quadro 7 – Questão da OBMEP (2007, nível 2, fase 1, nº 16)

Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

Fonte: (OBMEP, 2007)

Manuela explica que para obter-se a solução do problema é necessário subtrair do total de possibilidades o número de maneiras de a parede azul ficar de frente para parede rosa. Exibindo a contagem de quantas são essas possibilidades, a personagem pede que o usuário digite este número, a saber. 8. Finalmente, Manuela conclui o raciocínio, solicitando que o usuário dê a resposta final, ou seja, $24 - 8 = 16$.

Com esse exemplo, é apresentado ao usuário outra situação envolvendo permutação e fomentando o uso do princípio multiplicativo para a resolução da questão. Usando desta vez, ao invés de árvore de possibilidades, a representação gráfica dos elementos, no caso as paredes do quarto. Mostrando que outras representações também são válidas para buscar as soluções dos problemas.

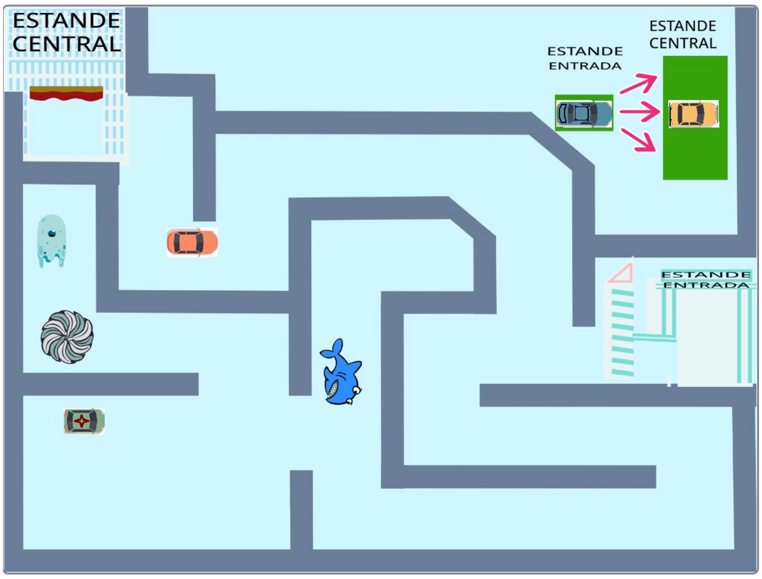
Invariantes Operatórios: Foi desenvolvido um problema do tipo permutação, com 4 elementos, formando agrupamentos ordenados de 4 elementos os quais a ordem dos elementos gera novas possibilidades e todos os elementos do conjunto serão usados.

4.2.6 Participando do Salão de Automóveis de São Paulo

Tipo de problema: Arranjo
Estratégia de resolução: Princípios aditivo e multiplicativo
Representação: Árvore de possibilidades
Habilidade(s) da BNCC:
(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

Descrição: A construção no Scratch (Figura 17) assemelha-se a um jogo, precedida da explicação da situação problema a ser resolvida durante a interação.

Figura 17 – História Interativa 6



Fonte: O autor, 2021.
<https://scratch.mit.edu/projects/496282483>

A história é narrada pelo personagem pinguim que inicia apresentando uma questão do ENEM[5] (Quadro 8):

Quadro 8 – Questão do ENEM (2018, 2º Dia, Caderno 5, Amarelo, nº 161)

Salão de Automóveis de São Paulo. Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete. Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante. Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é 1. $A_{4,10}$; 2. $C_{4,10}$; 3. $C_{4,2} \times C_{6,2} \times 2 \times 2$; 4. $A_{4,2} \times A_{6,2} \times 2 \times 2$; 5. $C_{4,2} \times C_{6,2}$.

Fonte: (ENEM, 2018)

[5] Exame Nacional do Ensino Médio

O personagem Pinguim, então, solicita que o usuário não se preocupe, neste momento, em obter a expressão, e sim, busque identificar a quantidade de maneiras diferentes. Para isso, convida-o a interagir, levando pelo caminho, somente os carros ao estande. Ao longo dessa interação, à medida que o usuário organiza os carros no estande, pode observar as maneiras possíveis que se formam e aparecem na tela. No final, visualizando a árvore de possibilidades completa que se forma, conclui-se que são possíveis 12 maneiras de expor somente os carros no estande. Neste momento, é explicado de que se trata do princípio multiplicativo, com 4 opções de carros para o estande de entrada e para cada um desses, tem-se 3 opções de carros no estande principal. Formando, assim, 4×3 opções ou um arranjo $A_{4,2}$.

Na sequência, é explicado ao usuário que, ao organizar os caminhões nos estandes, de forma análoga aos carros, observa-se também um arranjo. Ao final, também observando a árvore de possibilidades, conclui-se que há 30 maneiras de expor somente os caminhões nos estandes. Pelo princípio multiplicativo, tem-se 6 opções de caminhões para o estande de entrada e, para cada um desses, 5 opções de caminhões no estande principal. Formando, assim, 6×5 opções ou um arranjo $A_{6,2}$.

Concluídos os arranjos dos carros e caminhões, o personagem Pinguim observa que os dois eventos ocorrem simultaneamente e de maneira independente. Portanto, aplicando o princípio multiplicativo tem-se que a solução da situação-problema é 12×30 possibilidades ou $A_{4,2} \times A_{6,2}$ de expor, em dois estandes do salão do automóvel, um carro e um caminhão em cada estande. Ao finalizar, o personagem Pinguim comenta que $A_{4,2} \times A_{6,2}$ não se encontra entre as alternativas da prova do ENEM, porém, ele explica que (como já observado no Capítulo 3) para $n = 6$ e $p = 2$,

$C_{6,2} = \frac{1}{2!} \times A_{6,2}$ ou $C_{6,2} \times 2! = A_{6,2}$, logo $A_{6,2} = C_{6,2} \times 2$.

Portanto, $A_{4,2} \times A_{6,2} = C_{6,2} \times 2 \times C_{6,2} \times 2$.

Ou seja, $C_{6,2} \times C_{6,2} \times 2 \times 2$.

Logo, a alternativa **C** da prova do ENEM é a correta.

Invariantes Operatórios: Nesta atividade, foram desenvolvidos dois problemas do tipo arranjo, o primeiro com 4 elementos, formando agrupamentos ordenados de 2 elementos e o segundo com 6 elementos, formando agrupamentos ordenados de 2 elementos. Em ambos os casos, a ordem dos elementos gera novas possibilidades mas nem todos os elementos do conjunto serão usados.

4.2.7 Movendo Duas Pessoas para Dentro da Casa

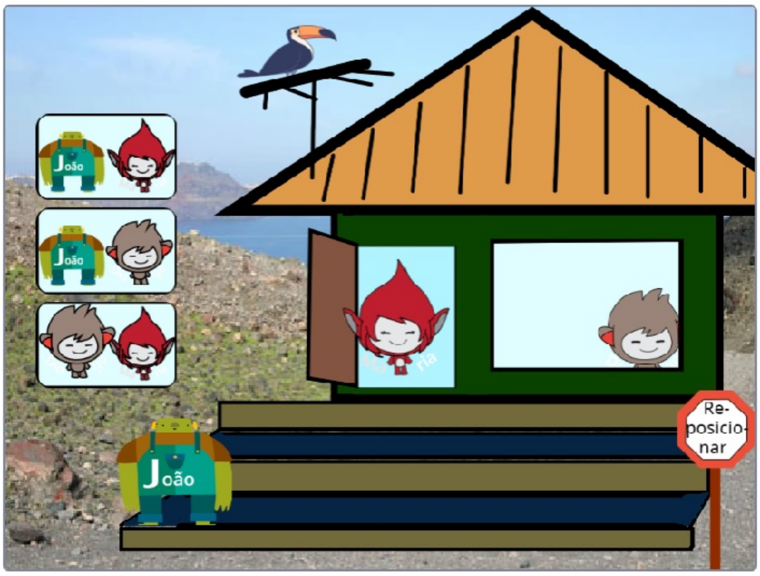
Tipo de problema: Combinação
Estratégia de resolução: Princípio multiplicativo
Representação: Listagem e árvore de possibilidades
Habilidade(s) da BNCC:

(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

Descrição: A próxima atividade (Figura 18) é narrada pelo personagem Tucano que expõe uma questão ao usuário: *João, Maria e Diogo estão do lado de fora de casa. De quantas maneiras dois deles podem estar dentro de casa?*

Figura 18 – História Interativa 7



Fonte: O autor, 2021.
<https://scratch.mit.edu/projects/494262944>

A tela exibe uma casa com os três personagens João, Maria e Diogo. Tucano explica que a ordem em que eles entram na casa não importa e sim, quais estão no interior dela. O usuário pode interagir, arrastando os personagens para o interior da casa. Então, as opções encontradas são visualizadas no lado esquerdo da tela. Trocando os personagens de dentro da casa, o usuário encontra outras opções, que também aparecem na tela. Quando todas as opções forem encontradas, o Tucano explica que existem três possibilidades e que se trata de uma combinação, pois não importa a ordem em que eles entram na casa e sim quais pessoas estão na casa. Portanto, se entrar na casa João e depois Maria ou se entrar Maria e depois João tem-se um único agrupamento. Na sequência, Tucano mostra como determinar essa resposta usando a fórmula para combinação.

Invariantes Operatórios: Nesta atividade, foi desenvolvido um problema, do tipo Combinação, com 3 elementos, formando agrupamentos ordenados de 3 elementos em que a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

4.2.8 Capturando os Alunos Medalhistas

Tipo de problema: Combinação e Arranjo
Estratégia de resolução: Princípio multiplicativo
Representação: Listagem e árvore de possibilidades
Habilidade(s) da BNCC:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

Descrição: A construção no Scratch (Figura 19) assemelha-se a um jogo, precedida da explicação da situação problema a ser resolvida durante a interação.

Figura 19 – História Interativa 8

Fonte: O autor, 2021.
<https://scratch.mit.edu/projects/501220868>

A história é narrada e conduzida pela personagem, astronauta Dani, que ao sair de seu foguete, apresenta a questão da OBMEP (Quadro 9):

Quadro 9 – Questão da OBMEP (2015, nível 3, fase 1, nº 5)

Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pode receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

Fonte: (OBMEP, 2015)

Na sequência, o usuário interage, através do foguete ou nave da astronauta, acertando ou capturando as duplas de alunos medalhistas, sem analisar as medalhas que vão receber, apenas formando duplas. Após encontradas todas as duplas possíveis, a astronauta Dani explica que são dez combinações possíveis e apresenta a árvore de possibilidades da combinação das duplas. Detalhando que se trata de uma combinação $C_{5,2}$ e como obter essa resposta utilizando a fórmula de combinação.

A personagem, astronauta Dani, passa a explicar ao usuário as opções de medalhas que cada dupla pode receber. São três tipos de medalhas que cada pessoa pode receber vezes três tipos da outra pessoa da dupla, ou seja, são $3 \times 3 = 9$ possibilidades de medalhas.

Por fim, a astronauta conduz o usuário à explicação final de que a formação das duplas e o recebimento das medalhas são eventos que ocorrem simultaneamente e de maneira independente. Assim, pelo princípio multiplicativo tem-se $10 \times 9 = 90$ combinações, ou ainda, $C_{5,2} \times 9$. Resultando na alternativa **D** da prova da OBMEP.

Invariantes Operatórios: Nesta atividade, foi desenvolvido dois problemas: o primeiro, do tipo Combinação, com 5 elementos, formando agrupamentos ordenados de 2 elementos cuja ordem dos elementos não gera novas possibilidades; e, o segundo, do tipo arranjo, com 3 elementos, formando agrupamentos ordenados de 2 elementos cuja ordem dos elementos gera novas possibilidades, mas nem todos os elementos do conjunto serão usados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi desenvolvido, primeiramente, observando os principais indicadores e relatórios sobre a aprendizagem de Matemática no Brasil (como PISA/2018 e dados do QEdu). Em seguida, buscou-se analisar resultados de pesquisas acerca do ensino e aprendizagem de conceitos relacionados a Análise Combinatória. Além disso, recorreu-se a propostas curriculares quanto às habilidades a serem desenvolvidas na Educação Básica.

A análise das pesquisas e propostas curriculares evidenciou a importância do uso de tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Uma das ferramentas para produção de materiais didáticos digitais é o Scratch, o qual permite a criação de jogos, simulações, histórias interativas, entre outros. Neste sentido, objetivou-se apresentar potencialidades e possibilidades de utilização de histórias interativas, produzidas no ambiente Scratch, no estudo da Análise Combinatória.

Para tanto, elaborou-se um site (Plataforma Google Sites) que apresenta um conjunto de histórias interativas (produzidas no ambiente Scratch) expondo diferentes tipos de problemas de Combinatória, enfatizando os princípios multiplicativo e aditivo, como estratégia de resolução, e a árvore de possibilidades, como estratégia de resolução e representação gráfica. Foi elaborado com o intuito de incentivar o uso de tecnologias digitais por professores, além de explorar potencialidades do ambiente de programação Scratch e formas de integrá-lo às aulas de Matemática.

O ambiente Scratch é baseado em blocos para montar e utiliza uma sintaxe comum a muitas linguagens de programação, em que cada peça representa um comando, de modo que a montagem de sequências de blocos produz um programa. A estruturação em blocos diminui a possibilidade de erros de sintaxe e de digitação, muito comuns a iniciantes na programação. Seu funcionamento, ainda, é considerado simples e intuitivo. No caso das histórias interativas é necessário, basicamente, de um ator "principal" para conduzir a narrativa e atores "secundários" para interação e explicação da(s) situação(ões) proposta(s). Após, ordena-se os blocos conforme sequência da narrativa e interação dos atores.

As ferramentas disponíveis no Scratch oferecem inúmeras possibilidades de criações para o estudo da Análise Combinatória, por exemplo, na construção de histórias interativas é possível utilizar recursos de movimento de "atores" para a elaboração de estratégias de resolução de problemas, o que permite algumas generalizações e mobilização destas estratégias na resolução de outros problemas. Isso é importante, pois em muitos problemas as fórmulas de resolução se fazem pouco eficientes (não é possível aplicar a regra diretamente), tornando-se necessário dispor de diferentes estratégias.

Na aba superior de um projeto do Scratch, localiza-se um botão de acesso aos tutoriais. Ao começar o uso do Scratch, podemos fazer uso desses tutoriais, pois auxilia na execução dos primeiros comandos. Sublinha-se que alguns dos principais comandos, na construção de história interativas, são “Transmitir <mensagem>” e “Quando receber <mensagem>”, pois tornam possível a comunicação entre atores e cenários. Curci (2017, p.53) apresenta detalhadamente as diversas funcionalidades, ferramentas e comandos do Scratch, além de exemplos de sequências de blocos de comandos, visando o processo de aprendizagem e desenvolvimento da programação.

Observa-se que a programação de algumas situações-problema pode se tornar muito extensa e demorada ou, mesmo, inviável devido à grande quantidade de atores/cenários envolvidos. Nestes casos há duas sugestões: criar a interação em parte do problema como ocorre na sexta história interativa (Figura 17), em que os atores da interação são carros que podem ser conduzidos aos estandes, enquanto, os caminhões são utilizados somente para explicação; ou fixar parte do evento, como ocorre na quinta história interativa (Figura 16), em que a parede norte é fixada e a interação ocorre nas demais paredes.

Acredita-se que as histórias interativas podem instigar o interesse do aluno, por estarem inseridas no mundo digital, despertando a curiosidade e aumentando a motivação e criatividade do aluno nas aulas de Combinatória. Ainda, em relação ao processo de ensino e aprendizagem, entende-se que para o desenvolvimento do raciocínio combinatório é importante trabalhar com diferentes tipos de problemas, diversas estratégias e diferentes representações. Assim, neste trabalho, foram propostas oito histórias interativas que exploram diferentes tipos de problemas de Combinatória (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação), utilizando os princípios aditivo e multiplicativo e, sempre que possível, auxiliados pela representação da árvore de possibilidades. Destaca-se que algumas das atividades propostas foram inspiradas em problemas apresentados pela OBMEP e pelo ENEM (provas de importância e abrangência nacional).

Espera-se que professores e alunos, de diferentes lugares do país, possam utilizar o site para retomar e ampliar conceitos relacionados a Combinatória, principalmente no momento de incertezas que vivemos (agravado pela pandemia) o qual torna evidente a importância do uso de tecnológicas digitais no processo de ensino e aprendizagem, em especial, da Matemática.

Referências

AZEVEDO, J.; BORBA, R. E. de S. R. Construindo Árvores de possibilidades virtuais: O que os alunos podem aprender discutindo relações combinatórias? **Revista Eletrônica de Educação**, v. 7, n. 2, p. 39–62, 2013.

BORBA, R. E. de S. R.; AZEVEDO, J. A construção de Árvores de possibilidades com software: O desenvolvimento do raciocínio combinatório de karine e vitória. In: ____. **A Pesquisa em Psicologia e suas Implicações para a Educação Matemática**. Recife: Editoria Universitária, 2012.

BORBA, R. E. de S. R.; ROCHA, C. de A.; AZEVEDO, J. Estudos em raciocínio combinatório: Investigações e práticas de ensino na educação básica. **Boletim de Educação Matemática**, v. 29, n. 53, p. 1348–1368, 2015.

BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2012 para o Ensino Médio: Matemática**. Brasília, 2011.

BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2015 para o Ensino Médio: Matemática**. Brasília, 2014.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Brasil no Pisa 2018**. Brasília, 2020. 185 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: Matemática**. Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. SEMTEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, 1999.

CAMPOS, C.; IGLIORI, S. Teses e dissertações sobre o ensino e a aprendizagem da combinatória: Perspectivas investigativas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Universidade Federal de Santa Catarina, v. 16, n. 1, p. 1–20, 2021. ISSN 1981-1322.

CONCEIÇÃO, D. D. C. **O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por Atividades**. 356 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019. Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

CURCI, A. P. de F. **O software de programação Scratch na formação inicial do professor de Matemática por meio da criação de objetos de aprendizagem**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática - PPGMAT.

EISNER, W. **Quadrinhos e Arte Sequencial**. 4. ed. São Paulo-SP: Martins Fontes, 2010.

ENEM 2018. **Exame Nacional do Ensino Médio**. - INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em Fevereiro de 2021.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. Campinas-SP: Editora UNICAMP, 2011.

FOOHS, M. M.; CORRÊA, G. dos S.; TOLEDO, E. E. Histórias em quadrinhos na educação brasileira: uma revisão sistemática de literatura. **Instrumento: Revista de Estudo e Pesquisa em Educação**, v. 23, n. 1, p. 80–96, 2021.

FREITAS, W. J. de. **Jogos digitais e educação: proposta de jogo educativo como complemento do ensino de história do Brasil**. Americana, SP, 2017. 17 p. Curso Superior de Tecnologia em Jogos Digitais.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 5. ed. São Paulo-SP: Atlas, 2010. 200 p.

LEBOWITZ, J.; KLUG, C. **Interactive storytelling for video games: a player-centered approach to creating memorable characters and stories**. [S.l.]: Taylor Francis, 2011.

LIMA, A. P. B. de. **Princípio Fundamental da Contagem: Conhecimentos de Professores de Matemática sobre seu uso na Resolução de Situações Combinatórias**. 138 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. L. **Teoria e Problemas de Matemática discreta**. 2. ed. São Paulo-SP: Artmed Editora S.A., 2004.

MELO, L. M. de S.; SILVA, J. F. G. da; SPINILLO, A. G. Os princípios invariantes e a resolução de problemas de raciocínio combinatório. **Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 7, n. 1, 2016.

MORGADO, A. C. de O. et al. **Teoria e Problemas de Matemática discreta**. 6. ed. São Paulo-SP: SBM, 1991.

OBMEP 2007. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. - IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Ministério da Educação, 2007. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em Fevereiro de 2021.

OBMEP 2008. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. - IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Ministério da Educação, 2008. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em Fevereiro de 2021.

OBMEP 2015. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. - IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Ministério da Educação, 2015. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em Março de 2021.

PESSOA, C. A. dos S.; BORBA, R. E. de S. R. Quem dança com quem: O desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ**, v. 17, jan-jun 2009.

PESSOA, C. A. dos S.; BORBA, R. E. de S. R. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 1, n. 1, 2010.

RESNICK, M. **Jardim de Infância para a Vida Toda: Por uma Aprendizagem, Criativa, Mão na Massa e Relevante para Todos**. 1. ed. Porto Alegre-RS: Penso, 2020. 170 p.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Subsídios para a Implementação da Proposta Curricular de Matemática para o 2º Grau**. São Paulo, 1980. 458 p.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: 2. Grau**. 3. ed. São Paulo, 1992.

TEIXEIRA, P. J. M. **Um Estudo sobre os Conhecimentos necessários ao Professor de Matemática para a Exploração de Problemas de Contagem no Ensino Fundamental**. 458 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

TEIXEIRA, P. J. M. Práticas de professores do ensino básico durante a resolução de problemas de contagem. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 2, p. 81–113, 2020. ISSN 1983-3156.

ZOPPO, B. M. **A contribuição do scratch como possibilidade de material didático digital de matemática no ensino fundamental I**. 135 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática.