



Universidade Estadual do Piauí  
Pró-Reitoria de Pesquisa e  
Pós-Graduação–PROP  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



## A Interdisciplinaridade no Ensino da Matemática: O Logaritmo na Química.

José Lopes da Silva Moura

Teresina

2021

Esta Página é a do “Termo de Ciência e de Autorização para publicação eletrônica do TCC pela Biblioteca da UESPI”, a qual deve ser encadernada no VERSO da página anterior O Formulário desse Termo de Ciência está em anexo.

José Lopes da Silva Moura

# A Interdisciplinaridade no Ensino da Matemática: O Logaritmo na Química.

Dissertação apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Piauí, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho.

Teresina

2021

**M929i** Moura, José Lopes da Silva.

A interdisciplinaridade no ensino de matemática: o logaritmo na química. / José Lopes da Silva Moura. – 2021.

49 f. : il.

Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Piauí, Teresina, 2021

Orientação: Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho.

1. Logaritmos. 2. Química. 3. Interdisciplinaridade. 4. Matemática. I. Título.

**CDD: 510**

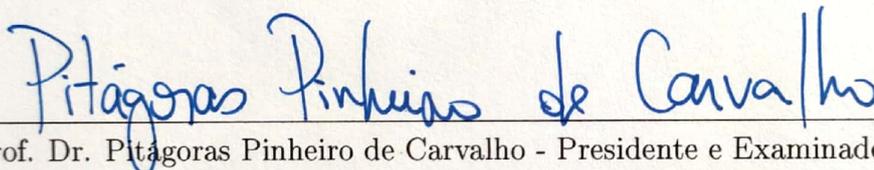
JOSÉ LOPES DA SILVA MOURA

**A INTERDISCIPLINARIDADE NO ENSINO DA  
MATEMÁTICA: O LOGARITMO NA QUÍMICA**

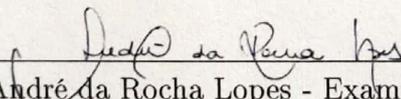
Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em  
Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para  
obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de concentração: MATEMÁTICA

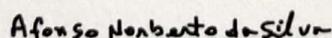
Aprovado por:



Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho - Presidente e Examinador  
Universidade Estadual do Piauí - UESPI



Prof. Dr. André da Rocha Lopes - Examinador Externo  
Universidade Estadual do Rio de Janeiro - UERJ



Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva - Examinador  
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**José Lopes da Silva Moura** graduou-se em Licenciatura em Matemática pela UESPI e curso de Mestrado PROFMAT/UESPI. É professor efetivo da rede pública nos Estados do Maranhão e Piauí.

# DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha esposa e filhas.

# AGRADECIMENTOS

De forma primordial ao criador de tudo e de todos.

À todos os meus familiares, em especial a minha mãe, Raimunda Lopes da Silva Moura e a meu pai, José Mendes da Silva Moura.

Aos professores do PROFMAT/UESPI pois, seus ensinamentos foram fundamentais para vencer cada uma das batalhas durante o curso.

Ao Meu orientador Profº Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho, que com a sua enorme paciência me orientou e me direcionou com seus conhecimentos, estando sempre este disponível para me orientar.

Ao grupo de amigos que foi formado para o estudo. Que por muitas vezes abrimos mão de mais tempo com a família e independente da distância, passávamos horas discutindo a teoria, resolvendo listas de exercício e questões do livro texto.

## RESUMO

Este trabalho propõe várias aplicações de Logaritmos e Funções Logarítmicas com aplicação real em Química, com o objetivo de promover a interdisciplinaridade entre esses conteúdos matemáticos com outros saberes, como: naturais, científicos, entre outros. Para isso, como motivação, inicialmente apresentamos uma introdução sobre a interdisciplinaridade no ambiente escolar, a relação interdisciplinar entre a Matemática e a Química mostrando como os Logaritmos e a sua importância nessa relação. Também é feito um estudo sobre a Teoria que envolve as Funções Exponenciais e Logarítmicas. Por fim, são apresentadas propostas de atividades interdisciplinares que poderão ser utilizadas pelo professor com os alunos em sala de aula.

**Palavras-chave:** Logaritmos; química; interdisciplinaridade, matemática.

## ABSTRACT

This work proposes several applications of Logarithms and Logarithmic Functions with real application in Chemistry, with the objective of promoting interdisciplinarity between these mathematical contents with other knowledge, such as: natural, scientific, among others. For this, as a motivation, we initially presented an introduction on interdisciplinarity in the school environment, the interdisciplinary relationship between Mathematics and Chemistry showing how Logarithms and their importance in this relationship. A study is also made on Theory involving Exponential and Logarithmic Functions. Finally, proposals for interdisciplinary activities are presented that can be used by the teacher with students in the classroom.

**Keywords:** Logarithms; chemistry; interdisciplinarity, mathematics.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>A Interdisciplinaridade</b>	<b>13</b>
2.1	A Interdisciplinaridade no meio escolar . . . . .	14
2.2	A relação interdisciplinar entre a Matemática e a Química . . . . .	16
2.3	Os logaritmos e a Química . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Referencial Teórico</b>	<b>18</b>
3.1	Definições Preliminares . . . . .	19
3.1.1	Potências . . . . .	19
3.1.2	Propriedades das Potências . . . . .	19
3.1.3	Função Exponencial . . . . .	22
3.2	Logaritmos . . . . .	23
3.2.1	Propriedades dos Logaritmos . . . . .	24
3.3	Função Logarítmica . . . . .	27
3.3.1	Caracterização da Função Logarítmica . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Aplicações que promovem a Interdisciplinaridade em sala de aula</b>	<b>29</b>
4.1	Potencial Hidrogeniônico ou pH de uma solução . . . . .	29
4.2	Resfriamento de um corpo . . . . .	34
4.3	Concentração de Misturas . . . . .	37
4.4	Método do Carbono 14 . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>45</b>
	Referências Bibliográficas	47

# 1 Introdução

A Matemática é considerada uma ferramenta de ensino indispensável no estudo de vários fenômenos naturais provenientes de outras áreas de conhecimento, como por exemplo, o estudo do movimento de um corpo, estudos relacionados a reações químicas, crescimento populacional e outros. Para (CHAS, 2016) [5], um trabalho de natureza interdisciplinar envolvendo a Matemática e outras disciplinas da mesma área ou de áreas diferentes do conhecimento é fundamental para construção de novos saberes.

De acordo com (SZYMANSKI, 1993) [30] a interdisciplinaridade é uma abordagem significativa no processo de ensino e aprendizagem, onde as disciplinas envolvidas compartilham conhecimento de forma que tanto os professores como os alunos percebam o grau de interação entre as mesmas. Uma vez que Matemática e a Química fazem parte das Ciências Exatas, facilita o desenvolvimento de práticas de natureza interdisciplinar, além disso, a Matemática tem um papel fundamental, pois é utilizada para auxiliar na interpretação de vários fenômenos naturais que ocorrem na Química.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio determinam que a base nacional comum dos currículos de Ensino Médio será organizada em áreas de conhecimento e estruturada pelos princípios pedagógicos da interdisciplinaridade, juntamente com a contextualização, pois de nada adiantaria trabalhar de forma interdisciplinar mostrando um contexto distante dos alunos. A interdisciplinaridade destaca-se como um eixo articulador que estrutura essas áreas do conhecimento (BRASIL, 2013) [3].

O presente trabalho tem o objetivo de desenvolver e propor atividades de ensino que articulem a interdisciplinaridade existente entre as disciplinas Matemática e Química. Dessa forma, as atividades propostas foram baseadas em pesquisas e discussões sobre a temática e na apresentação de aplicações que abordavam algumas situações problemas na área de Química.

Este trabalho é organizado como segue e tem como finalidade contribuir para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem das disciplinas envolvidas, retratando como a interdisciplinaridade pode atuar como ferramenta de ensino de ciências, com ênfase à ligação da Matemática com a Química. Além disso, procura investigar como os alunos do Ensino Médio da rede pública de ensino relacionam as referidas disciplinas com base em atividades interdisciplinares e as dificuldades de aprendizagem relacionadas a esse processo educacional.

No capítulo intitulado "A interdisciplinaridade", o enfoque é dado à interdiscipli-

naridade onde faz-se um breve comentário sobre sua história até chegar ao Brasil. E ainda, são desenvolvidos comentários sobre a importância de um processo interdisciplinar no ambiente escolar, sobre a importância da Matemática como ferramenta de ensino e sobre a relação interdisciplinar da Matemática com a Química.

No capítulo seguinte "Logaritmo e Funções Logarítmicas", optou-se por mostrar matematicamente os logaritmos exibindo a sua definição e suas propriedades, além de provar os principais resultados. Ainda nesse capítulo é mostrado o caso particular dos Logaritmos de Napier e é feita a caracterização das Funções Logarítmicas e da Função Logarítmica Natural.

No capítulo "Aplicações que promovem a Interdisciplinaridade em sala de aula" discorre-se sobre a construção de conhecimentos a partir de atividades interdisciplinares e consequentemente sobre o desenvolvimento do aluno nesse processo.

No capítulo "Resultados e discussões", são apresentados os resultados coletados e as discussões sobre os dados da pesquisa. Neste, optou-se por dividir em sessões que retratam de forma bem detalhada as atividades voltadas para discussões sobre tema e aplicações dos questionários interdisciplinares.

## 2 A Interdisciplinaridade

A Interdisciplinaridade é algo que vem sendo bastante discutido nas escolas. A necessidade de se debater esse tema é provocada pelas constantes mudanças no processo de ensino e aprendizagem. Com a globalização, temas que antes eram pouco difundidos e não se discutia em escolas ou universidades, vem cada vez mais ganhando espaço e fazendo parte do cotidiano de todos.

Para (Thiesen, 2008 p. 547) [31] "O que se pode afirmar no campo conceitual é que a interdisciplinaridade será sempre uma reação alternativa à abordagem disciplinar normalizadora (seja no ensino ou na pesquisa) dos diversos objetos de estudo". Ou seja, pular barreiras, limites, não ficar preso a formas tradicionais do ensino-aprendizagem.

Existe uma gama de opiniões sobre interdisciplinaridade, sendo que sempre uma liga a outra, e a discussão sobre o tema, embora seja bem ampla, converge para um mesmo entendimento. De acordo com (Luck 1994, p.60) [16], "Há muitas descrições a respeito de qual seja o sentido e significados práticos da interdisciplinaridade".

Para (BONATO, BARROS, GEMELI, LOPES, FRISON, 2012) [2], o conceito de

interdisciplinaridade apresenta duas perspectivas de atitudes práticas bem diferentes, sendo a primeira, a de uma abordagem que associe disciplinas e construa uma nova representação do problema, mais adequada de um ponto de vista absoluto, mais objetiva, mais universal, uma "superiência". A segunda perspectiva seria uma prática específica visando à abordagem de problemas relativos à existência cotidiana, não se destina a criar um novo discurso que se situaria para além das disciplinas particulares, pois se busca confrontar as perspectivas de especialistas provenientes de diversas formações.

A interdisciplinaridade com duas perspectivas, exhibe conceitos aparentemente bem diferentes, no entanto, as duas perspectivas, mostram que a interdisciplinaridade é uma construção do conhecimento através da vivência do dia-a-dia e com a ligação entre as ciências, uma aprendendo com a outra.

## 2.1 A Interdisciplinaridade no meio escolar

A proposta de um trabalho interdisciplinar entre disciplinas de áreas afins ou áreas distintas é revolucionário para o processo de ensino e aprendizagem, pois além de diminuir o isolamento entre as áreas é, ainda, um facilitador na construção de novos conhecimentos referentes as disciplinas envolvidas nesse processo.

Analisando essa temática é fundamental perceber que a interdisciplinaridade é um processo construtivo para estabelecer um diálogo entre os diferentes conhecimentos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem. De acordo com os PCN's:

O conceito de interdisciplinaridade fica mais claro quando se considera o fato trivial de que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com outros conhecimentos, que pode ser de questionamento, de confirmação, de complementação, de negação, de ampliação, de iluminação de aspectos não distinguidos (BRASIL [4], 2000, p.75).

O desenvolvimento de atividades de natureza interdisciplinar em ambiente escolar possibilita a aquisição de novas metodologias de ensino e conseqüentemente novos saberes relacionados as áreas envolvidas nessa atividade. E analisando as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, tem-se um conceito bastante esclarecedor:

"A interdisciplinaridade é, assim, entendida como abordagem teórico-metodológica com ênfase no trabalho de integração das diferentes áreas do conhecimento"(BRASIL [3], 2013, p.184).

No que diz respeito a importância da interdisciplinaridade no processo educacional, Fortunato, Confortin e Silva (2013, p. 1) [11] retratam que:

A interdisciplinaridade é uma "nova" abordagem filosófica, carregada de significados científicos, culturais e sociais que visa, no momento atual, amparar o processo de educação, dando-lhe novo contexto, através da transformação de práticas pedagógicas.

Em um processo interdisciplinar é fundamental que os conteúdos referentes as disciplinas envolvidas, sejam abordados de uma forma contextualizada de modo que o aluno tenha experiências de situações relacionadas com seu dia a dia. Segundo os PCNs, a relação dos diferentes conhecimentos pode criar as condições necessárias para uma aprendizagem motivadora, oferecendo maior liberdade aos professores e alunos para a seleção de conteúdos que estejam diretamente relacionados aos assuntos ou problemas do cotidiano (BRASIL , 2000) [4].

Para CHAS (2016) [5], o conceito de interdisciplinaridade encontra-se diretamente ligado ao conceito de disciplina, onde a interação ocorre sem a destruição básica às ciências conferidas, nem privilegiar nenhum dos lados.

As diretrizes curriculares para o Ensino Médio asseguram que: "A interdisciplinaridade e a contextualização devem assegurar a transversalidade e a articulação do conhecimento de diferentes componentes curriculares, propiciando a interlocução entre os saberes das diferentes áreas de conhecimento". (BRASIL [3], 2013, p.189).

A contextualização na aprendizagem é fundamental para que o aluno obtenha uma nova visão de realidade, pois quando o conteúdo de uma determinada disciplina são abordados de forma contextualizada, o aluno terá um desenvolvimento significativo na capacidade de relacionar os conteúdos ministrados na escola com as situações do dia-a-dia.

Para que a interdisciplinaridade aconteça no meio escolar, é necessário que os professores tenham vontade e conhecimentos essenciais para execução de atividades interdisciplinares, com isso, faz-se necessário a prática de atividades interdisciplinares através de uma capacitação docente para que os professores se apropriem dos conhecimentos sobre esta prática.

Para Pereira et al. (2011, p.85) [22], "A formação docente com perspectiva interdisciplinar pode gerar mudanças de atitude dos futuros professores, tanto na sua prática profissional, quanto diante do próprio estudo". Vale ressaltar que é indispensável que a formação docente tenha sua essência baseada na interdisciplinaridade, para que os professores que irão atuar futuramente sejam preparados para agir em sala de aula com a visão atualizada no que diz respeito a interação das disciplinas e da realidade sistêmica.

## **2.2 A relação interdisciplinar entre a Matemática e a Química**

A Química é uma das ciências da natureza e para a melhor compreensão de muitos de seus conceitos requer conhecimentos de ferramentas da Matemática. Em síntese, a Química pode ser vista como uma ciência que estuda as várias transformações que envolvem matéria e energia e o saber lidar com esses elementos torna necessária a compreensão de ideias matemáticas, que seriam trabalhadas de maneira mais eficiente se fossem tratadas com uma visão interdisciplinar.

Sobre essa ideia, entende-se que a química é a ciência da natureza que estuda a matéria, as suas transformações e a energia que está envolvida nesses processos. Além disso, o estudo da Química, é fundamental para desenvolver a capacidade de raciocinar logicamente, observar, redigir com clareza, experimentar e buscar explicações sobre o que se vê e o que se lê para compreender e refletir sobre os fatos presentes no dia a dia ou sobre questões veiculadas pela imprensa ou pela televisão; enfim, para analisar criticamente a realidade, condição para o exercício da cidadania (CLEMENTINA [6], 2011).

No que diz respeito ao trabalho interdisciplinar entre Matemática e Química, observa-se que a quantidade de conteúdos que necessitam de ferramenta matemática não é tão grande. No Ensino Médio, os conteúdos que mais utilizam cálculos são abordados nos dois primeiros anos. Melo [19](2015, p. 5) comenta que:

Diversos conteúdos químicos necessitam de conhecimentos matemáticos para sua melhor compreensão e resolução de situações problema, nesse sentido, é necessário demonstrar aos alunos como a matemática pode ser utilizada em situações reais do cotidiano do aluno, estabelecendo relações pertinentes desde situações simples até as mais complexas, fazendo conexões com modelos que servem para compreender e resolver situações problemas.

Desse modo, o desenvolvimento de componentes curriculares escolares que permite a relação dos conhecimentos matemáticos e químicos produz uma nova visão sobre como abordar os conceitos na Educação Básica, com o acesso a novas linguagens constitutivas de pensamentos criativos, baseados em conhecimentos socialmente relevantes.

### 2.3 Os logarítmos e a Química

O conteúdo logaritmo é muito usado em várias ciências, como na física, geografia, biologia, química, dentre outras. A aproximação entre o ensino da Matemática e a Química, de forma interdisciplinar, ajudará os alunos a melhorar suas dificuldades cognitivas e na compreensão desse conteúdo em questão, isso, não só na matemática, como na química.

Nas Ciências naturais, podemos descobrir um tronco comum, de tal forma que temos condições de passar da matemática à mecânica, depois à física e à química, à biologia, e à psicologia fisiológica, segundo uma série de generalidade crescente. (JAPIASSÚ [13], 1976, p. 84).

O logaritmo, conteúdo da Matemática é trabalhado em sala de aula por professores de química e que ajudam os alunos a aprender que um determinado conteúdo, pode ser discutido por outras disciplinas de maneiras diferentes, mas que, de qualquer forma contribuirá para o seu desenvolvimento cognitivo. Então, os discentes dentro das suas atividades e disciplinas, comecem a utilizar a reciprocidade entre as ciências.

E o professor se torna exatamente o especialista em transferir conhecimento. Então, ele perde algumas das qualidades necessárias, indispensáveis, requeridas na produção do conhecimento existente, assim como no conhecer e no conhecimento existente. Algumas destas qualidades são, por exemplo, a ação, a reflexão crítica, a curiosidade, o questionamento exigente, a inquietação, a incerteza - todas estas virtudes indispensáveis ao sujeito cognoscente. (FREIRE [10], 1987, p. 18)

Através dessa temática, e observando no dia a dia das escolas, tem-se visto que muitos alunos não absorvem de forma significativa os conteúdos trabalhados em matemática, e principalmente, é verificável a insatisfação dos alunos, pois muitas definições na matemática são explanadas pelos docentes da forma que estão nos livros, em uma linguagem que nem sempre é compreensível quando estão sendo trabalhadas. Por exemplo, a definição de área ou de volume na geometria plana, em matrizes a definição produto de matrizes e, como não poderia ser diferente, em funções a definição de logaritmo.

Tendo em vista a real necessidade de dinamizar e contextualizar as aulas de Matemática e Química, surgiu a ideia de desenvolver estratégias didáticas para se trabalhar o conteúdo de logaritmo para os professores de química, onde proporcionará uma Prática Pedagógica voltada para melhorar o ensino e aprendizagem dos alunos em relação a esse conteúdo.

### 3 Referencial Teórico

Neste capítulo iremos introduzir os logaritmos de forma similar àquela introduzida no Ensino Médio e para tanto devemos começar pela definição de exponenciais. O objetivo deste capítulo é situar o leitor de como o logaritmo muitas vezes é estudado no Ensino Médio.

## 3.1 Definições Preliminares

### 3.1.1 Potências

**Definição 1:** Dados um número real  $a$  e um número natural  $n \neq 0$ , chama-se potência de base  $a$  e expoente  $n$  o número  $a^n$ , dado por:

$$a^n = a \cdot \dots \cdot a.$$

Como não há produto com um único fator, definimos que para  $n = 1$ ,  $a^1 = a$ . As provas das propriedades que veremos a seguir, fazem uso do princípio da indução finita, e podem ser encontradas em diversos livros, como exemplo em (SAMPALIO [24], 2009).

### 3.1.2 Propriedades das Potências

Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $m, n \in \mathbb{N}$ , então valem as seguintes propriedades:

Propriedade 1:  $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$ .

*Demonstração.* Consideremos  $m \in \mathbb{N}$  fixo.

Para  $n = 1$ ,

$$a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{(m+1)}.$$

Suponha que a propriedade é válida para  $n = k > 1$ , e provemos que vale para  $n = k + 1$ . Com  $n = k$  temos:

$$a^m \cdot a^k = a^{(m+k)} \quad (\text{Hipótese de Indução}).$$

Logo, para  $n = k + 1$  segue que:

$$a^m \cdot a^k \cdot a^1 = (a^m \cdot a^k) \cdot a^1 = a^{(m+k)} \cdot a^1 = a^{[m+(k+1)]}.$$

Portanto a propriedade é verdadeira para  $n = k + 1$ , e pelo Princípio da Indução Finita a propriedade é verdadeira.  $\square$

Propriedade 2: Para  $a \neq 0$  e  $m \geq n$ , temos que  $\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$ .

*Demonstração.* Consideremos  $m \in \mathbb{N}$  fixo.

Para  $n = 1$ ,  $\frac{a^m}{a^1} = a^{(m-1)} = \frac{a^m}{1} = a^{(m-1)}$ .

Suponha que a propriedade é válida para  $n = k > 1$ , e provemos que vale para  $n = k + 1$ . Com  $n = k$  tem-se:

$$\frac{a^m}{a^k} = a^{(m-k)} \quad (\text{Hipótese de Indução}).$$

Logo, para  $n = k + 1$  segue que:

$$\frac{a^m}{a^{(k+1)}} = \frac{a^m}{a^k \cdot a^1} = \frac{a^{(m-k)}}{a^1} = a^{[m-(k+1)]}.$$

Logo a propriedade é verdadeira para  $n = k + 1$ . □

Propriedade 3:  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ .

*Demonstração.* Consideremos  $m \in \mathbb{N}$  fixo.

Para  $n = 1$ ,  $(a^m)^1 = a^{m \cdot 1}$ .

Suponha que a propriedade é válida para  $n = k > 1$ , e provemos que vale para  $n = k + 1$ . Com  $n = k$ , tem-se:

$$(a^m)^k = a^{m \cdot k} \quad (\text{Hipótese de Indução}).$$

Logo, para  $n = k + 1$  segue que:

$$(a^m)^k \cdot a^m = (a^m)^k \cdot (a^m)^1 = (a^m)^{k+1} = a^{m \cdot (k+1)}.$$

Portanto a propriedade é verdadeira para  $n = k + 1$ . □

Propriedade 4:  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ .

*Demonstração.* Analogamente aos itens anteriores, vamos demonstrar a propriedade via indução finita sobre  $n \in \mathbb{N}$ .

Para  $n = 1$ ,  $(a \cdot b)^1 = a^1 \cdot b^1$ .

Suponha que a propriedade é válida para  $n = k > 1$ , e provemos que vale para  $n = k + 1$ . Com  $n = k$ , tem-se:

$$(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k \quad (\text{Hipótese de Indução}) .$$

Logo, para  $n = k + 1$ , segue que:

$$(a \cdot b)^{k+1} = (a \cdot b)^k \cdot (a \cdot b) = a^k \cdot b^k \cdot a \cdot b = a^k \cdot a \cdot b^k \cdot b = a^{k+1} \cdot b^{k+1} .$$

Logo a propriedade é verdadeira para  $n = k + 1$ . □

Propriedade 5:  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ .

*Demonstração.* Para  $n = 1$ ,  $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a^1}{b^1}$ .

Suponha que a propriedade é válida para  $n = k > 1$ , e provemos que vale para  $n = k + 1$ . Com  $n = k$ , tem-se:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k} \quad (\text{Hipótese de Indução}) .$$

Logo, para  $n = k + 1$ , segue que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^k \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^1 = \left(\frac{a^k}{b^k}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a^{k+1}}{b^{k+1}}\right) .$$

Logo a propriedade é verdadeira para  $n = k + 1$ . □

Como consequência das propriedades temos

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ e } a^0 = 1,$$

sempre que  $a \neq 0$ .

**Definição 2:** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  com  $p, q \in \mathbb{Z}$  e  $q \in \mathbb{Z}_+^*$ , definimos

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

### 3.1.3 Função Exponencial

**Definição 3:** Considere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Definimos uma função exponencial de base  $a$ , como  $f(x) = a^x$ . Consideramos  $a \neq 1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  (o caso em que  $a = 1$  é trivial). Esta função satisfaz as seguintes propriedades:

Propriedade 1:  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ ;

Propriedade 2:  $f(1) = a^1 = a$ ;

Propriedade 3:  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$  quando  $a > 1$ ;

**Proposição 1:** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , denotada por  $f(x) = a^x$  não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula.

*Demonstração.* De fato, se existir algum  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x_0) = 0$ , então para todo  $x \in \mathbb{R}$  teremos:

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0.$$

Logo,  $f$  é identicamente nula. □

## 3.2 Logaritmos

Nesta seção apresentaremos a definição de logaritmo, assim como é feito ensino médio, ou seja, como a inversa da função exponencial.

Porém neste trabalho iremos abordar esse conceito de uma forma diferente, dando opções para o professor do ensino médio abordar esse tema com seus alunos.

Antes de partirmos para a definição propriamente dita, vamos à importância histórica dos logaritmos. No início do século XVII, onde o grande foco mundial eram as grandes navegações, a Astronomia se encontrava em uma fase de grande desenvolvimento. Um dos grandes problemas encontrados ao realizar cálculos envolvendo distâncias entre astros e cálculo de áreas de elipses, realizavam-se operações de multiplicação e divisão de números com muitas casas decimais.

Um grande obstáculo encontrado pelos estudiosos era o tempo gasto para realizar cálculos, que na maioria das vezes grandes e trabalhosos. O tempo poderia melhor aproveitado para fazer mais observações dos astros e assim avançar acerca do conhecimento sobre astronomia. Com isso, Napier<sup>1</sup> teve a grande ideia ao descobrir uma ferramenta matemática que facilitaria todos os cálculos envolvendo aqueles números enormes, otimizando assim o tempo e os esforços gastos. Hoje chamamos essa ferramenta de logaritmo.

**Definição 2:** Dados  $a \in \mathbb{R}_+^*$  (com  $a \neq 1$ ), o logaritmo de um número real  $x > 0$  na base  $a$  é definido por

$$a^y = x.$$

Escreve-se

$$y = \log_a x$$

e lê-se:  $y$  é o logaritmo de  $x$  na base  $a$ .

---

<sup>1</sup>John Napier nasceu em 1550, e morreu em 1617. Era um matemático escocês, considerado o inventor dos logaritmos.

### 3.2.1 Propriedades dos Logarítmos

Propriedade 1: **(Logarítmo de um produto)** Sejam  $x$  e  $y$  números reais positivos e  $a \neq 1$  um número real positivo. Então:  $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ ;

*Demonstração.* Considere  $\log_a x = k$  e  $\log_a y = z$  com  $k, z \in \mathbb{R}$ . Logo,  $x = a^k$  e  $y = a^z$ . Portanto, temos pelas propriedades de funções exponenciais que,

$$x \cdot y = a^k \cdot a^z = a^{k+z}.$$

Assim pela definição de logarítmo, temos  $\log_a(x \cdot y) = k + z$ . E substituindo os valores de  $k$  e  $z$  segue que:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$$

□

Propriedade 2: **(Logarítmo de uma divisão)** Sejam  $x, y$  e  $a \neq 1$  números reais positivos. Então:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

*Demonstração.* Considere  $\log_a x = k$  e  $\log_a y = z$  com  $k, z \in \mathbb{R}$ . Logo,  $x = a^k$  e  $y = a^z$ . Assim,

$$\frac{x}{y} = \frac{a^k}{a^z} = a^{k-z}.$$

Portanto  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = k - z$ . Substituindo os valores de  $k$  e  $z$  temos que:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

□

Propriedade 3: **(Logaritmo de uma potência no logaritmando)** Sejam  $x, a \in \mathbb{R}_+$ , com  $a \neq 1$  e tomemos  $m \in \mathbb{R}$ . Então:

$$\log_a x^m = m \cdot \log_a x.$$

*Demonstração.* Considere  $\log_a x = k$  com  $k \in \mathbb{R}$ . Elevando ambos membros desta última igualdade a  $m$  tem-se

$$(a^k)^m = x^m \Leftrightarrow a^{km} = x^m.$$

Agora utilizando o logaritmo de base  $a$  em ambos membros desta equação, temos:

$$\begin{aligned}\log_a(a^{km}) &= \log_a(x^m) \\ \Rightarrow km \cdot \log_a a &= \log_a(x^m) \\ \Rightarrow km &= \log_a(x^m).\end{aligned}$$

E substituindo o valor de  $k$ , conclui-se que:

$$\log_a x^m = m \cdot \log_a x.$$

□

Propriedade 4: **(Logaritmo de uma potência na base)** Seja  $x$  um número real positivo,  $a \neq 1$  um número real positivo e  $m \in \mathbb{R}^*$ . Então:

$$\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \cdot \log_a x.$$

*Demonstração.* Considere  $\log_{a^m} x = k_1$  e  $\log_a x = k_2$  com  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ . Assim,

$(a^m)^{k_1} = x$  e  $a^{k_2} = x$ , logo

$$a^{m \cdot k_1} = a^{k_2} \Leftrightarrow m \cdot k_1 = k_2 \Leftrightarrow k_1 = \frac{1}{m} \cdot k_2.$$

Portanto

$$\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \cdot \log_a x.$$

□

Observe que pode-se reescrever as propriedades (3) e (4) da seguinte forma:

$$\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a x.$$

Com  $m, n \in \mathbb{R}$  e  $m, n \neq 0$ .

Propriedade 5: Sejam  $a$  e  $b$  números reais positivos, com  $a, b \neq 1$  e  $m \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ . Então:

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a};$$

*Demonstração.* Considere  $\log_a b = y$  com  $y \in \mathbb{R}$ , então  $a^y = b$ . Agora, suponha que exista um número  $x$  tal que,  $x = \log_m b$ , ou seja  $m^x = b$ . Dessa maneira:

$$a^y = m^x \Leftrightarrow \log_m(a^y) = x \Leftrightarrow y \cdot \log_m a = x.$$

Substituindo os valores de  $x$  e  $y$  na última equação acima concluímos que:

$$\log_a b \cdot \log_m a = \log_m b$$

Então, dividindo ambos membros da equação acima por  $\log_m a \neq 0$ , vemos que:

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}.$$

□

Entender e executar as propriedades em exercícios e aplicações é fundamental para o melhor aprendizado, porém hoje em dia as calculadoras e computadores efetuam estas contas com maestria, e com um número grande de casas decimais, tornando obsoleto o uso das tabelas de logaritmo.

### 3.3 Função Logarítmica

#### 3.3.1 Caracterização da Função Logarítmica

Demonstraremos a seguir que, dentre as funções monótonas injetivas de  $\mathbb{R}_+$  em  $\mathbb{R}$ , somente as funções logarítmicas têm a propriedade de transformar produtos em somas.

**Teorema 1 (Caracterização das Funções Logarítmicas):** Seja  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona injetiva tal que  $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ , para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}_+$ . Então, existe  $a > 0$  tal que  $f(x) = \log_a x$ , para qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}_+$ .

*Demonstração.* Suponhamos  $f$  crescente. O outro caso é tratado da mesma maneira. Podemos dizer que  $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$ . Logo  $f(1) = 0$ . Suponhamos que exista um número real  $a$  positivo tal que  $f(a) = 1$ . (Posteriormente demonstraremos que isto sempre ocorre). Sendo  $f$  crescente, como  $f(a) = 1 > 0 = f(1)$ , temos  $a > 1$ . Para todo  $m \in \mathbb{N}$  vale:  $f(a^m) = f(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)$ , daí,  $f(a^m) = m \cdot f(a) = m$ . Pois,  $f(a) = 1$ .

Podemos dizer que:

$$0 = f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}) \Rightarrow f(a^{-m}) = -m.$$

Considere  $r = \frac{m}{n}$  com  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}^*$ . Assim  $f(a^m) = f(a^{r \cdot n}) = f((a^r)^n) = f(a^r \cdot \dots \cdot a^r)$   $n$  vezes. Daí

$$f(a^m) = f(a^r) + \dots + f(a^r) = n \cdot f(a^r) \Rightarrow f(a^r) = \frac{m}{n} = r.$$

Se  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , então tome  $r, s \in \mathbb{Q}$  tais que:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s.$$

Assim, todo número racional  $r$ , menor do que  $x$ , é também menor do que  $f(a^x)$  e todo número racional  $s$  maior do que  $x$  é também maior do que  $f(a^x)$ . Sejam  $(r_n)$  e  $(s_n)$  sequências de números racionais tais que  $r_n < x, n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim(r_n) = x$ ,  $s_n > x, n \in \mathbb{N}$  e  $\lim(s_n) = x$ . Desse modo  $r_n < x < s_n$  como foi mostrado anteriormente  $r_n < f(a^x) < s_n$ . Assim, tomando o limite quando  $n \rightarrow +\infty$  tem-se:

$$x \leq f(a^x) \leq x \Rightarrow f(a^x) = x.$$

Portanto,  $f(a^x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Agora, consideraremos o caso geral, em que temos uma função crescente  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$g(x \cdot y) = g(x) + g(y).$$

Para tal devemos mostrar que existe um número real  $a$  positivo sem a hipótese de  $g(a) = 1$ .

Como  $g(1) = 0$  e  $1 < 2$ . Então,  $g(2) = b > 0$ . Considere  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $h(x) = \frac{g(x)}{b}$ ,  $h$  é crescente, transforma somas em produtos e temos que  $h(2) = \frac{g(2)}{b} = 1$ . Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se  $h(x) = \log_2 x$  para todo  $x > 0$ . Assim,

$$g(x) = b \cdot h(x) = b \cdot \log_2 x.$$

Tomemos,  $a = 2^{\frac{1}{b}}$ . Dessa forma,

$$g(a) = b \cdot \log_2 a = b \cdot \log_2 2^{\frac{1}{b}} = 1.$$

Com isso concluímos a demonstração do teorema. □

## 4 Aplicações que promovem a Interdisciplinaridade em sala de aula

### 4.1 Potencial Hidrogeniônico ou pH de uma solução

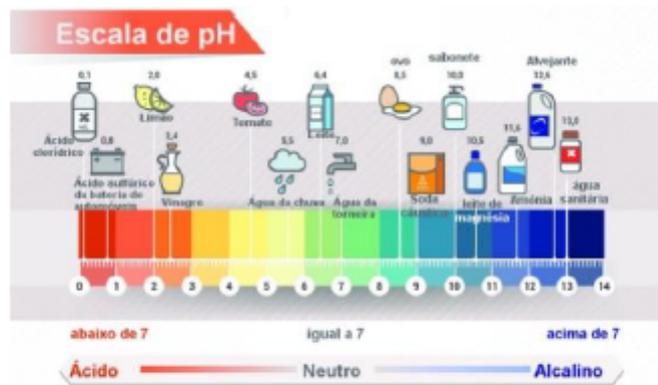
O potencial hidrogeniônico,  $pH$ , de uma solução consiste num índice que indica qual é o nível de acidez de determinado meio. Esse potencial refere-se à concentração molar de cátions hidrônio,  $H^+$ , presentes no meio e indica se esse meio, ou mistura, é ácido, básico ou neutro. Para essa classificação, se faz uma comparação entre as concentrações de cátions hidrônio e íons hidróxido,  $OH^-$  presentes no meio. O meio é classificado como ácido quando a quantidade de hidrônios é maior que a de hidróxidos; neutro, quando a quantidade de hidrônios é igual a de hidróxidos; e por fim, básico se a quantidade de hidrônios é menor que a de hidróxidos.

Por se tratarem de concentrações com valores muito pequenos, se faz uso do logaritmo para a classificação. Deste modo, o  $pH$  é definido como o logaritmo decimal do inverso da concentração de  $H^+$ , ou seja,  $pH = \log \frac{1}{[H^+]}$ , onde  $[H^+]$  denota a concentração molar de  $H^+$ .

Da mesma forma, indica-se por  $[OH^-]$  a concentração de hidróxidos presentes no meio. Mostra-se que  $[H^+] \cdot [OH^-] = 10^{-14}$  (DIAS [9], [2018]). Sendo  $pOH = \log \frac{1}{[OH^-]}$  o potencial hidroxiliônico, temos que  $pH + pOH = 14$ . Portanto, tanto o  $pH$  quanto o  $pOH$  são índices que variam de 0 a 14. Assim, pode-se classificar um meio pelo seu respectivo valor do  $pH$  da seguinte maneira:

- se o  $pH = 7$ , o meio será neutro. Isso indica  $[H^+] = [OH^-]$ ;
- se o  $pH > 7$ , o meio será básico ou alcalino, indicando  $[H^+] < [OH^-]$ ;
- se o  $pH < 7$ , o meio será ácido e nesse caso  $[H^+] > [OH^-]$ .

A figura a seguir apresenta o pH aproximado de algumas soluções.



Fonte: <https://quimicageneralylaboratorio.wordpress.com/2015/11/20/ph-en-los-alimentos/>

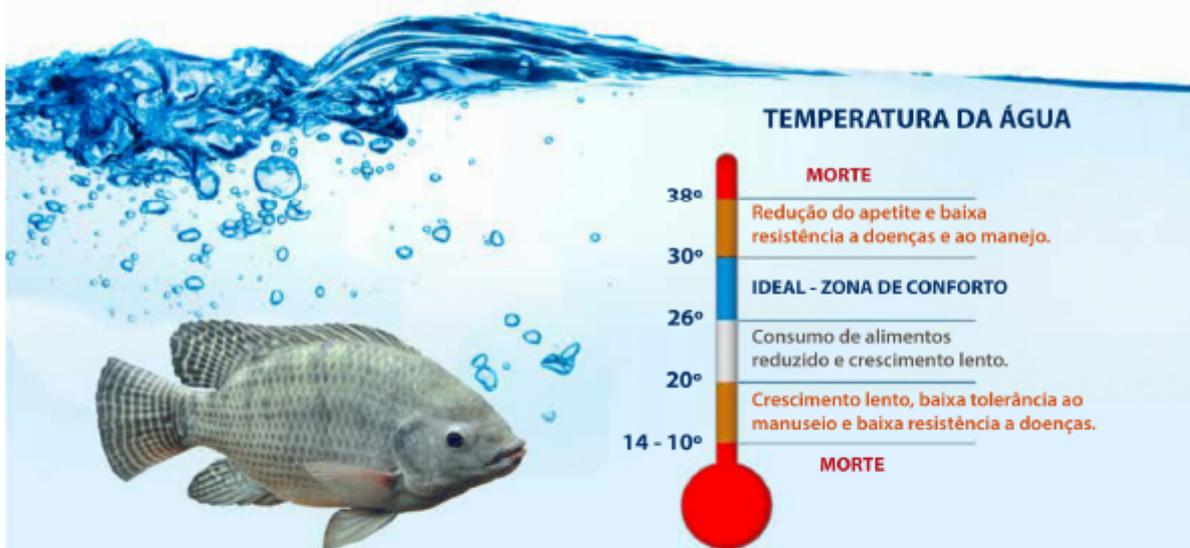
### Proposta de Atividade: Criação de tilápias

O texto a seguir relaciona alguns fatores importantes na criação de tilápias como *pH* e temperatura da água. O texto a seguir relaciona alguns fatores importantes na

criação de tilápias como *pH* e temperatura da água.

## TEMPERATURA DA ÁGUA E pH NA CRIAÇÃO DE TILÁPIAS

Por serem peclilotérmicos (sangue frio), a temperatura corporal dos peixes (tilápias) varia conforma a temperatura da água. Por isso, controlar a temperatura ambiente da água onde estão as tilápias é fator decisivo para o seu pleno desenvolvimento. Além disso, as tilápias se desenvolvem melhor dentro de uma determinada faixa de temperatura, já que se alimentam mais. Essa faixa se encontra entre 26 e 30°C.



### SINTOMAS DA ALTERAÇÃO DE pH

Na criação de tilápias, o pH ideal da água deverá ser neutro, ou seja, deverá aproximar-se de 7,0. Caso contrário, se o pH estiver abaixo de 4,0 ou acima de 11,0, o ambiente aquático será desfavorável para as tilápias, podendo até ser fatal. Para medir o pH da água, os piscicultores utilizam um aparelho chamado peagômetro. Dessa forma, podem controlar melhor o ambiente onde vivem os peixes.

#### pH BAIXO (ÁCIDO)

Com o pH da água baixo, as tilápias sofrem asfixia, além de apresentarem excesso de muco tanto no corpo como nas brânquias. Quando morrem, as tilápias permanecem com a boca aberta e os olhos saltados, sinais típicos de morte por falta de oxigênio. Outro sintoma bastante característico do pH ácido da água é a inibição do consumo de alimentos, o que afeta o crescimento ponderal dos peixes.

#### pH ALTO (ALCALINO)

Quando o pH da água aumenta, sua alcalinidade também aumenta, favorecendo a formação de amônia, que pode intoxicar os peixes. Outro fator prejudicial ao pleno desenvolvimento dos peixes é o aumento da susceptibilidade a doenças, ao manuseio e ao transporte, já que as tilápias tornam-se fragilizadas com a alteração do pH.

**Problema:** Um piscicultor cria tilápias em um tanque com formato de um paralelepípedo cujas dimensões são 10 m, 30 m e 4 m, referentes respectivamente ao comprimento, largura e profundidade. Em condições normais, o  $pH$  do ambiente aquático nesse tanque varia de 6,7 a 7,3.

a) Entre quais valores deve variar a concentração molar de íons de hidrogênio desse meio?

b) Suponha que 70% da capacidade deste tanque esteja cheio de água. Para enchê-lo, abre-se a torneira que o alimenta de água, fechando-a quando estiver completamente cheio. Devido a algum problema ocorrido na condução da água da nascente ao tanque, o valor do  $pH$  da água despejada é aproximadamente igual a 3. Estando o tanque completamente cheio, determine o valor do  $pH$  resultante da mistura da água jorrada e da água que já existia no tanque. Considere que não exista solução tampão<sup>1</sup> nesse ambiente aquoso.

c) Considerando a situação descrita no item b, avalie as consequências para as tilápias desse criadouro e quais efeitos biológicos estão envolvidos.

Solução:

a) Sejam  $x_1$  e  $x_2$  as concentrações molares de íons de hidrogênio associadas aos valores de  $pH$  dados por 7,3 e 6,7, respectivamente. Dessa forma,

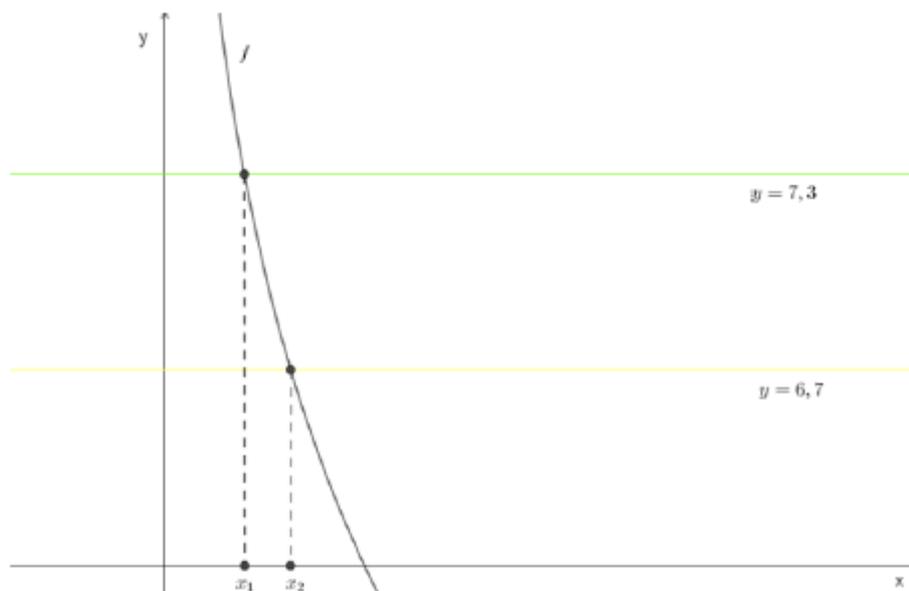
$$-\log x_1 = 7,3 \Leftrightarrow \log x_1 = -7,3 \Leftrightarrow x_1 = 10^{-7,3}$$

$$-\log x_2 = 6,7 \Leftrightarrow \log x_2 = -6,7 \Leftrightarrow x_2 = 10^{-6,7}$$

Portanto,  $[H^+]$  varia de  $10^{-7,3}$  mol/l a  $10^{-6,7}$  mol/l. No gráfico a seguir (Representação de parte do gráfico da função  $f(x) = -\log x$ ), temos representados os valores de  $x_1$  e  $x_2$ .

---

<sup>1</sup>São soluções utilizadas para manter o  $pH$  do meio constante geralmente composta por um ácido fraco (ácido conjugado) e seu sal (base conjugada). (SOLUÇÃO [29]..., 2015).



Fonte: Autor, 2021

b) Para o cálculo do  $pH$  da mistura, primeiramente iremos calcular a quantidade de mols de íons de hidrogênio da primeira solução, que chamaremos solução 1. Seja  $V_1$  o volume da solução 1. Logo,  $V_1 = 0,7 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 4 = 840m^3 = 840000l$ . Como vimos no item a), as respectivas concentrações mínimas e máximas de íons de hidrogênio equivalem a  $10^{-7,3}$  mol/l e  $10^{-6,7}$  mol/l. Portanto, na solução 1 a quantidade mínima de mols de íons de hidrogênio é de  $10^{-7,3} \cdot 840000 = 4,21 \cdot 10^{-2}$  mols e a máxima é de  $10^{-6,7} \cdot 840000 = 16,80 \cdot 10^{-2}$  mols. Agora, seja  $V_2$  o volume da solução 2. Logo,  $V_2 = 0,3 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 4 = 360m^3 = 360000l$ . Então, para a solução 2, temos  $10^{-3,0} \cdot 360000 = 36000 \cdot 10^{-2}$  mols de íons de hidrogênio. Portanto, na solução resultante, a quantidade mínima e máxima de mols correspondem a respectivamente,

$$36000 \cdot 10^{-2} + 4,21 \cdot 10^{-2} = 36004,21 \cdot 10^{-2} \text{ mols}$$

e,

$$36000 \cdot 10^{-2} + 16,80 \cdot 10^{-2} = 36016,8 \cdot 10^{-2} \text{ mols.}$$

O volume de água no tanque cheio é de 1200000 litros, daí, a concentração mínima

e máxima de íons de hidrogênio são, respectivamente, iguais a

$$\frac{36004,21 \cdot 10^{-2}}{1200000} \text{ mols/l} \approx 30,00 \cdot 10^{-5} \text{ mols/l}$$

e,

$$\frac{36016,8 \cdot 10^{-2}}{1200000} \text{ mols/l} \approx 30,01 \cdot 10^{-5} \text{ mols/l}.$$

Portanto, calculando o  $pH$  de cada concentração obtida acima, temos  $-\log(30,00 \cdot 10^{-5}) = 3,5229$  e  $-\log(30,01 \cdot 10^{-5}) = 3,5228$ . Logo, o  $pH$  resultante será aproximadamente igual a 3,52.

c) De acordo com texto descrito na proposta de atividade, percebemos que níveis de  $pH$  abaixo de 4 são letais para as tilápias. Assim, entre 1 e 3 dias, todas as tilápias do criadouro morrerão, devido a acidez do meio. Nessas circunstâncias, estes peixes sofrem asfixias além de apresentarem excesso de muco tanto no corpo como nas brânquias. Outra consequência do  $pH$  baixo é a inibição do consumo de alimentos que afeta o crescimento ponderal destes peixes.

## 4.2 Resfriamento de um corpo

Nesta seção trataremos da lei que rege o resfriamento ou aquecimento de um corpo quando colocado em um ambiente com uma temperatura diferente da sua. O que se observa é com o tempo, o objeto atinge o equilíbrio térmico com o ambiente. Tal lei é conhecida como a *Lei de Resfriamento de Newton*. De acordo com ela, a taxa de resfriamento é proporcional à diferença de temperatura. Matematicamente falando, segundo a lei de Newton, tem-se  $D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t}$  onde  $D_0$  é a diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente no instante  $t = 0$ ,  $D(t)$  essa diferença num instante  $t$  qualquer e  $\alpha$  uma constante que depende de vários fatores, como por exemplo características do material que constitui o objeto, a sua superfície de contato, o meio em que ele é colocado.

### Proposta de Atividade: Uma aplicação na criminalística

texto abaixo apresenta uma aplicação da lei de resfriamento de Newton que permite determinar a hora do óbito de uma pessoa.

Existem hoje várias técnicas para indicar a hora do óbito. A forma mais simples e usada no mundo é a medição da temperatura do cadáver por meio de um termômetro. Quando um indivíduo morre, sua temperatura que era em torno de  $36,5^{\circ}C$  começa a cair e tende a se igualar a temperatura do ambiente. No entanto, o método não deve ser aplicado se o cadáver perdeu muito sangue ou se morreu devido à ingestão de algum tipo de veneno especial ou se passar muito tempo após o óbito, quando ficará difícil de determinar esta variação de temperatura e levando em conta também que fatores, afetam a perda de temperatura e explicam a margem de erro dessa técnica (fatores que serão desconsiderados neste artigo). Tal aplicação se torna possível devido a mecanismos bioquímicos que são mantidos em nosso corpo a uma temperatura constante de aproximadamente  $36,5^{\circ}C$ . Quando ocorre o óbito, estes mecanismos deixam de funcionar e, então, a temperatura do corpo começa a diminuir da mesma forma que uma xícara de café esfria depois de servido. Assim, é possível determinar a hora aproximada de óbito de uma pessoa através de um modelo matemático de Equação Diferencial Ordinária aplicada na Lei de Variação de Temperatura de Newton. (SILVA [28], 2010, p.51).

**Problema:** Uma pessoa foi assassinada em determinado local de uma cidade. Segundo o relato de alguns policiais o corpo desta vítima foi descoberto às 21 horas. O médico legista chegou às 21:30 e imediatamente verificou a temperatura do cadáver, que era de  $34,8^{\circ}C$ . Uma hora mais tarde tornou a verificar e encontrou  $34,12^{\circ}C$ . A figura a seguir mostra os policiais e o médico legista no local do crime.



Fonte: <https://ocp.news/entretenimento/investigacao-criminal-jaragua-do-sul-igp-tecnicas-forenses-series-csi>

Sabendo que a temperatura ambiente, nesse dia era de  $20^{\circ}C$ . Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a hora que se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é  $36,5^{\circ}C$ .

**Solução:** Seja  $t$  o tempo transcorrido em horas a partir do momento da morte. Usando a expressão (Temos que  $D(0) = D_0 = 36,5^{\circ} - 20^{\circ} = 16,5^{\circ}$ . Usando a expressão  $D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t}$ , temos que:

$$D(t) = 16,5^{\circ} \cdot e^{-\alpha t}$$

Considerando  $t_1$  o tempo transcorrido desde a morte da vítima até às 23:30 horas, logo  $D(t_1) = 34,8^{\circ} - 20^{\circ} = 14,8^{\circ}$ . Daí, temos que:

$$D(t_1) = 16,5^{\circ} \cdot e^{-\alpha t_1} \Leftrightarrow 14,8^{\circ} = 16,5^{\circ} \cdot e^{-\alpha t_1}$$

Aplicando o  $\ln$  em ambos membros da equação anterior:

$$\ln(14,8^{\circ}) = \ln(16,5^{\circ} \cdot e^{-\alpha t_1}) \Leftrightarrow -\alpha t_1 = \ln(14,8^{\circ}) - \ln(16,5^{\circ}) \approx -0,1087$$

Decorrido uma hora temos que,  $D(t_1 + 1) = 34,1^{\circ} - 20^{\circ} = 14,1^{\circ}$ . Dessa forma:

$$D(t_1 + 1) = 16,5^{\circ} \cdot e^{-\alpha(t_1+1)} \Leftrightarrow 14,1^{\circ} = 16,5^{\circ} \cdot e^{-\alpha(t_1+1)}$$

Aplicando  $\ln$  em ambos membros desta última igualdade,

$$\ln(14, 1^\circ) = \ln(16, 5^\circ \cdot e^{-\alpha(t_1+1)}) \Leftrightarrow -\alpha(t_1 + 1) = \ln(14, 1^\circ) - \ln(16, 5^\circ)$$

Substituindo o valor de  $-\alpha t_1$  por  $-0,1087$ . Temos que:

$$-0,1087 - \alpha - 0,1572 \Leftrightarrow \alpha \approx 0,0485$$

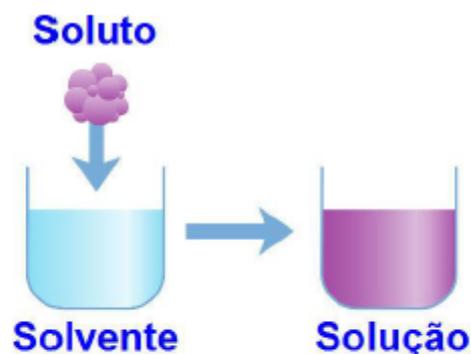
Como,  $\alpha t_1 = -0,1087$ . Então,

$$-0,0485 t_1 = -0,1087 \Leftrightarrow t_1 \approx 2,24.$$

E  $2,24\text{h} \approx 2\text{h}$  e  $14\text{ min}$ . Portanto, a morte ocorreu a aproximadamente 2 horas e 14 minutos antes das 21: 30 horas, ou seja por volta de 19: 16 horas do mesmo dia.

### 4.3 Concentração de Misturas

Uma solução química é uma mistura homogênea formada por dois componentes, o *soluto* e o *solvente*. O soluto corresponde à substância que será dissolvida e geralmente, apresenta-se em menor quantidade na solução. O solvente é a substância na qual o soluto será dissolvido para formação de um novo produto e apresenta-se em maior quantidade na solução.



Fonte: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/quimica/calculos-envolvendo-solubilidade.htm>

Apresentaremos uma situação, abordada em (Lima [14], 2013), em que é possível obter a concentração de um soluto em uma mistura, utilizando para isso um modelo matemático. Suponha um recipiente que contém inicialmente uma mistura (solvente A líquido e soluto B sólido) cuja concentração do soluto é dado por  $b$ . Nessa mistura, é despejado o solvente A à uma taxa  $q$  constante. Deseja-se não alterar o volume  $V$  da mistura no recipiente, para isso, esta escoar na mesma vazão de entrada do solvente.

Segundo Lima (2013) nessa mistura a concentração do soluto no instante  $(t, f(t))$  é dado pela função do tipo exponencial

$$f(t) = b \cdot e^{-k \cdot t}.$$

onde  $k \in \mathbb{R}$  é dita a taxa instantânea de escoamento. De acordo com Aguiar e Núñez (2017) a taxa  $k$  é dada por  $k = \frac{q}{V}$ .

### **Proposta de Atividade: Concentração de Fluoreto**

A figura a seguir representa um fragmento de um artigo referente as concentrações de fluoreto na água para prevenção de cárie dentária no Brasil.

Paulo Frazão<sup>I</sup>  
Marco A Peres<sup>II</sup>  
Jaime A Cury<sup>III</sup>

## Qualidade da água para consumo humano e concentração de fluoreto

### Drinking water quality and fluoride concentration

---

#### RESUMO

O artigo visa analisar a concentração de fluoreto na água para consumo humano, considerando o balanço entre benefícios e riscos à saúde, e produzir subsídios para atualização da legislação brasileira. Estudos de revisão sistemática, documentos oficiais e dados meteorológicos foram examinados. As temperaturas nas capitais brasileiras indicam que o fluoreto deveria variar de 0,6 a 0,9 mg/L para prevenir cárie dentária. Concentração de fluoreto natural de 1,5 mg/L é tolerável para consumo no Brasil se não houver tecnologia de custo-benefício aceitável para ajuste/remoção do seu excesso. A ingestão diária de água com fluoreto em concentração > 0,9 mg/L representa risco à dentição em menores de oito anos de idade e os consumidores deveriam ser expressamente informados desse risco. Considerando a expansão do programa nacional de fluoretação da água para regiões de clima tipicamente tropical, deve-se revisar a Portaria 635/75, relacionada ao fluoreto adicionado às águas de abastecimento público.

**DESCRITORES:** Água Potável, fluoretação, Qualidade da água, Revisão, Fluorose dentária.

<sup>I</sup> Departamento de Prática de Saúde Pública, Faculdade de Saúde Pública

Fonte: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=67240193018>

**Problema:** Suponha que em um reservatório que abastece determinada cidade brasileira existam 100 milhões de litros de água fluorada e que a quantidade de fluoreto nesta água é de 200 kg de fluoreto. Para se adequar à legislação brasileira se torna necessário diminuir a concentração de fluoreto no reservatório, para isso é despejada água pura no reservatório a uma taxa de 3 milhões de litros por dia. Suponha que simultaneamente a solução de fluoreto homogênea escoe do reservatório à mesma taxa. De acordo com o texto descrito na figura acima, em quantos dias a concentração de fluoreto nesta água estará dentro dos padrões brasileiros para prevenção de cárie

dentária?

**Solução:** Observe que concentração inicial de fluoreto é de  $\frac{200000000}{100000000} = 2mg/l$ . À medida que se aumenta a quantidade de água e que a solução de fluoreto escoar do reservatório esta concentração diminui. Usando a equação  $k = \frac{q}{V}$ , temos que a taxa instantânea de escoamento de fluoreto é de 3 milhões de litros por dia em 100 milhões de litros de água fluorada. Portanto, essa taxa é de 0,03.

Sejam  $T$  o número de dias decorridos desde que a água pura começou a ser despejada no reservatório,  $P(T)$  a concentração de fluoreto que resta no reservatório em  $T$  dias e  $P_0$  a concentração inicial de fluoreto. Pela equação  $f(t) = b \cdot e^{-k \cdot t}$ ,

$$P(T) = P_0 \cdot e^{-0,03T}.$$

Como  $P_0 = 2mg/l$ , tem-se

$$P(T) = 2 \cdot e^{-0,03T}.$$

De acordo com o texto descrito na atividade proposta a concentração ideal de fluoreto na água para prevenção de cárie dentária varia entre 0,6 mg/l e 0,9 mg/l. Dessa forma, para determinarmos o tempo necessário para que a concentração de fluoreto esteja dentro dos padrões brasileiros basta resolvermos o seguinte sistema de inequações:

$$0,6 < 2 \cdot e^{-0,03T} < 0,9$$

daí,

$$6 < 20 \cdot e^{-0,03T} < 9.$$

Portanto,

$$\ln 6 < \ln(20 \cdot e^{-0,03T}) < \ln 9$$

$$\Rightarrow \ln 6 < \ln 20 - 0,03T < \ln 9$$

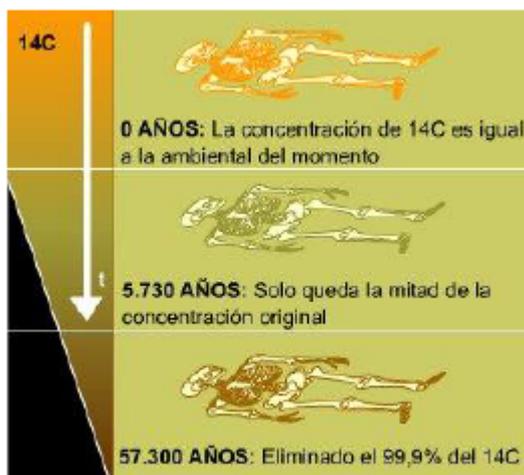
Após alguns cálculos, tem-se

$$\frac{\ln 20 - \ln 9}{0,03} < T < \frac{\ln 20 - \ln 6}{0,03}.$$

Portanto, são necessários no mínimo 26 e no máximo 40 dias para que esta água esteja dentro dos padrões brasileiros para prevenção de cárie dentária.

#### 4.4 Método do Carbono 14

No ano de 1947, o químico Willard Libby fez uma descoberta revolucionária na área da Arqueologia, a partir de seus estudos seria possível decifrar a idade de fósseis antigos. Suas pesquisas revelaram que a quantidade de carbono 14,  $C^{14}$ , dos tecidos orgânicos mortos diminui a um ritmo constante com o passar do tempo. Normalmente, os seres vivos absorvem e eliminam  $C^{14}$  de modo que em cada espécie este processo se dá de maneira constante. Os vegetais criam  $C^{14}$  no processo de fotossíntese e os animais o absorvem no processo de digestão, direta ou indiretamente, destes vegetais. Quando um ser vivo morre, a absorção cessa, mas o  $C^{14}$  continua se desintegrando. Sabe-se que sua meia vida é 5730 anos, ou seja, a cada 5730 anos a quantidade desse elemento se reduz em 50%. Como essa quantidade começa a decair a partir da morte do organismo, ela determina exatamente há quanto tempo esse organismo morreu.



Fonte: <https://patrimoniointeligente.com/el-carbono14-en-arqueologia/>

Desse modo, temos que a quantidade de carbono 14 em um organismo que morreu à  $t$  anos é dado pela função exponencial

$$h(t) = h_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

onde  $h_0$  é a quantidade de  $C^{14}$  em organismos vivos. Observe que o quociente  $\frac{h(t)}{h_0}$  expressa a porcentagem de carbono 14 na amostra.

### Proposta de Atividade: Datação por carbono 14

O texto a seguir faz referência ao método de datação do carbono 14.

Todo ser vivo tem em sua constituição partículas de carbono. Dentre as partículas do carbono existe uma partícula específica que nos possibilita datar com relativa exatidão em que época tais seres viveram. A técnica do carbono-14 foi descoberta na década de 1940 por Willard Libby. Ele percebeu que a quantidade de carbono-14 dos tecidos orgânicos mortos diminui a um ritmo constante com o passar do tempo. Assim, a medição dos valores de carbono-14 em um objeto fóssil nos dá pistas dos anos decorridos desde sua morte. Isso equivale a dizer que o carbono-14 morre junto com o ser vivo e é a partir desta datação que ele vai diminuindo de quantidade com o passar dos anos. Isso possibilita entendermos em que época esses seres viveram. Hoje este é o método mais eficiente para estimar a idade de espécimes arqueológicas de origem biológica. Esta técnica é aplicável à madeira, carbono, sedimentos orgânicos, ossos, conchas marinhas, ou seja, todo material que conteve carbono em alguma de suas formas. Como o exame se baseia na determinação de idade através da quantidade de carbono-14 e esta diminui com o passar do tempo, ele só pode ser usado para datar amostras que tenham idades estimadas em até 50 a 70 mil anos. Depois disso a quantidade de carbono 14 é insuficiente para análises. Assim, para datarmos, por exemplo, seres vivos que estiveram na terra a milhões de anos atrás, como os dinossauros ou mesmo rochas, outros procedimentos de datação são utilizados, geralmente os de isótopos de radiação como argônio ou potássio, pois o carbono que poderia existir, no caso de um dinossauro já não existe mais. Nas Ruínas Engenho São Jorge dos Erasmos, este procedimento foi utilizado quando o projeto arqueológico desenvolvido no local encontrou quase dois mil fragmentos considerados relevantes para a arqueologia. Muitos destes fragmentos eram ossos de animais e mesmo ossos de humanos. Estes ossos passaram pelo procedimento de datação via carbono-14, o que nos deu uma datação muito aproximada do seu tempo de vida. Foi assim que os arqueólogos descobriram que se tratava de ossadas oriundas do século XVI, período que coincide com a construção e as primeiras atividades desenvolvidas no Engenho. (DATAÇÃO [8]..., [2018], não paginado).

**Problema:** Suponha que no ano de 2000, por uma das escavações nas ruínas do Engenho dos Erasmos (figura a seguir), foi encontrada uma ossada humana cujo percentual de carbono 14 era de 95%. Tal descoberta permitiu avaliar que se tratava de um índio escravizado que trabalhou no local.



Fonte: <http://www.usp.br/imprensa/?p=27531>

- Usando a datação do carbono 14, determine, aproximadamente, há quanto tempo esse índio morreu e o possível ano da morte desse índio.
- Retire do texto informações que vem ao encontro do resultado obtido em a).

**Solução:**

a) A partir dos dados do enunciado temos que a quantidade de carbono 14 encontrada era de 95%, portanto  $h = 95\% \cdot h_0$ . Utilizando a equação  $h(t) = h_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ , temos:

$$0,95 \cdot h_0 = h_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} = 0,95$$

Utilizando  $\log_2$  em ambos membros da última igualdade anterior temos que,

$$\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} = \log_2 0,95 \Leftrightarrow t \approx 424,02.$$

Portanto, este índio foi morto há cerca de 424 anos. Como a datação foi realizada no ano de 2000, então ele provavelmente faleceu no ano de 1576.

- Pelo item a) descobrimos que o ano da possível morte do índio foi em 1576 ou

seja, século XVI que segundo o texto descrito na propostas de atividade, coincide com a construção e as primeiras atividades desenvolvidas no Engenho.

## 5 Considerações Finais

Neste trabalho, foi abordado o estudo de "como introduzir o ensino de Logaritmos no ensino médio", focando em problemas químicos. O presente texto buscou responder a este questionamento sugerindo uma abordagem que engloba a interdisciplinaridade e diversas aplicações. Dessa forma, foi dada ênfase maior para as aplicações de tais conceitos em problemas contextualizados. Sendo assim, a forma de apresentação do referencial teórico presente neste estudo, além de exibir definições preliminares como as potências e aprofundar a definição e as propriedades dos Logaritmos e das Funções Logarítmicas, dá suporte ao desenvolvimento das atividades que foi proposto no capítulo 4.

Vale ressaltar que os capítulos 3 e 4 foram desenvolvidos especialmente para os professores que desejarem se aprofundar e se apropriar de uma visão do modo de ensinar os Logaritmos. Acreditamos que a estrutura apresentada nesse trabalho possa ser uma ponte, um facilitador entre a aprendizagem e a aplicação dos logaritmos de forma interdisciplinar, em particular com a Química.

Pensamos que a Matemática, enquanto uma ciência de natureza abstrata, possui uma gama de conteúdos que são objetos de estudo da própria Matemática, o que a impulsiona como Ciência. Por outro lado, existem outros conteúdos estão intimamente relacionados a outras áreas de estudo e são ferramentas importantíssimas para se resolver problemas e explicar fenômenos, para os quais outras áreas do conhecimento por si só não conseguem abarcar. Isso reforça o objetivo deste trabalho, que é o aspecto interdisciplinar.

Sabe-se também que, culturalmente muitas pessoas dizem ter dificuldades, ou pouca afinidade com a Matemática, então a interação com outros saberes pode aproximá-las do conteúdo matemático em questão. É importante observar que o objetivo deste trabalho não é de reduzir a matemática a uma questão utilitarista e sim trabalhar em regime de parceria harmônica com as demais disciplinas para explicar e modelar fenômenos. Outra coisa que deve ser enfatizada é que a interdisciplinaridade não é algo trivial de ser feito. É necessário um diálogo constante entre a Matemática e as

disciplinas relacionadas, e entre os professores das disciplinas que pretendem incluir esta opção de ensino na sua prática.

Atualmente muito se tem falado sobre o aprendizado por meio de Projetos Integradores Escolares que envolvam diversas áreas do saber. Espera-se que as propostas de atividades apresentadas no Capítulo 4, as quais relacionam Logaritmos como ferramenta para auxiliar na resolução de problemas de Química possam servir de estímulo, bem como ser uma alavanca inicial para a concretização dessa prática.

## Referências

- 1 BARTHES. R. - *O rumor da língua. Trad. Mário Laranjeira.* São Paulo: Brasiliense, 1988.
- 2 - BONATTO, Andréia; BARROS, Caroline Ramos; GEMELI, Rafael Agnoletto; LOPES, Tatiana Bica; FRISON, Marli Dallagnol. - *Interdisciplinaridade no ambiente escolar.* Rio Grande do Sul. 2012.
- 3 BRASIL. - *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Ensino Médio e Tecnológico.* Brasília: MEC/SEMT, 2013.
- 4 BRASIL. - *Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* Brasília: Ministério da Educação, 2000.
- 5 CHAS. D. M. P. - *Matemática e interdisciplinaridade: um estudo sobre os materiais didáticos.* Macapá, v. 6, n. 3, p. 97-109, set./dez. 2016.
- 6 CLEMENTINA, Carla Marli. - *A importância do Ensino da Química no cotidiano dos alunos do Colégio Estadual São Carlos do Ivaí de São Carlos do Ivaí ? PR.* São Carlos do Ivaí-PR, 2011.
- 7 D'AMBROSIO, U. - *A Matemática na época das grandes navegações e início da colonização.* Revista brasileira de História da Matemática, V.1, N.1, 2001.
- 8 DATAÇÃO POR CARBONO ? 14. [2018]. - *Ruínas Engenho São Jorge dos Erasmos.* Disponível em: <http://www.engenho.prceu.usp.br/datacao-por-carbono-14/>. Acesso em: 15 de fev de 2019.
- 9 DIAS, Diogo Lopes. - *Cálculos envolvendo o pH de soluções.* [2018]. Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/quimica/calculos-envolvendo-phsolucoes.htm>. Acesso em 20 de abril de 2019.
- 10 FREIRE, P. - *Medo e ousadia.* São Paulo: Cortez/Autores Associados, 1987.
- 11 FORTUNATO, Raquel; CONFORTIN, Renata; SILVA, Rochele Tondello da. - *Interdisciplinaridade nas escolas de educação básica: da retórica à efetiva ação pedagógica. Vol. 8 ? Nº 17.* Rio Grande do Sul, 2013.

- 12 JANTSCH, E. - *Universidade Inter e transdisciplinar: uma abordagem de sistemas de educação e inovação*. Policy Sciences, New York, v. 1, n.1, p. 403-428, 1970.
- 13 JAPIASSU, H. - *Interdisciplinaridade e patologia do saber*. Rio de Janeiro: Imago, 1976.
- 14 LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- 15 LEAL, E. A; MIRANDA, G. J; PEREIRA, J. M. - *Interdisciplinaridade no ensino de custos e métodos quantitativos*. Revista Eletrônica da Divisão de Formação Docente (<http://www.seer.ufu.br/index.php/diversapratica>) v. 1, n. 2 - 1º semestre 2013 - ISSN 2317-0751.
- 16 LUCK, H. - *Pedagogia Interdisciplinar: fundamentos teórico-metodológicos*. Petrópolis, RJ: vozes, 1994.
- 17 MACHADO, N. J. - *Educação: projetos e valores*. 3. ed. São Paulo: Escrituras, 2000.
- 18 MATTIAZZO-CARDIA, Elizabeth. - *Ensaio De Uma Didática Da Matemática Com Fundamentos na Pedagogia Histórico-Crítica Utilizando O Tema Seguridade Social Como Eixo Estruturador*. 2009. 412 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2009.
- 19 MELO, Sônia Maria Pereira. - *Multidisciplinaridade: como trabalhar Química e Matemática através da modelagem matemática*. I JEM, Marabá, Brasil, 2015.
- 20 MINAYO, M. C. de S., SANCHES, O. - *Quantitativo-qualitativo: oposição ou complementaridade?* Cad. Saúde Pública, 9: 239-62, 1993.
- 21 MORIN, E. - *Educação e complexidade, os sete saberes e outros ensaios*. São Paulo: Cortez, 2005.
- 22 PEREIRA, Carolina Arantes; CAZEIRO, Ana Claudia Martins; SANTOS, Letícia Leal Oberding M. dos. - *Currículo e formação de professor e uma perspectiva interdisciplinar*. ECCOM, v. 2, n. 4, p. 83-90, 2011.
- 23 PIOVESAN, A. TEMPORINI, E.R. - *Pesquisa exploratória: procedimento metodológico para o estudo de fatores humanos no campo da saúde pública*. Ver. Saúde Pública, 29 (4): 318-25, 1995.

- 24 SAMPAIO, P. C. J. - *Introdução à Teoria dos Números: um curso breve*. São Carlos: EdUFSCar, 2009.
- 25 SANTOMÉ, J. T. - *Globalização e interdisciplinaridade: o currículo integrado*. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- 26 SANTOS, J.A.; CORTES JR., L.P.; BEJARANO, N.R.R. - *A Interdisciplinaridade no Ensino de Química: uma análise dos artigos publicados na revista Química Nova na Escola entre 1995 e 2010*. In: Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, 8., 2011, Campinas. Anais? Campinas: ABRAPEC, 2011.
- 27 SANTOS, J.A.D; JUNIOR, L.P.C; BEJANARO, N.R.R. - *A Interdisciplinaridade no Ensino de Química. Uma análise dos artigos publicados na revista Química Nova na Escola entre 1995 e 2010*. UFBA, Bahia, 2010.
- 28 SILVA, Jair Sandro Ferreira Da. - *Sobre o problema da variação de temperatura de um corpo*. Connection Line. n.5, p. 44-55, 2010. Disponível em: <[w.periodicos.univag.com.br/index.php/CONNECTIONLINE/article/.../123/372](http://w.periodicos.univag.com.br/index.php/CONNECTIONLINE/article/.../123/372)>. Acesso em: 12 de set de 2018.
- 29 SOLUÇÃO TAMPÃO. 2015. Fop. Disponível em: <https://www.fop.unicamp.br/index.php/pt-br/tampoes-bioquimica-calculos.html>. Acesso em: 20 de jan de 2021.
- 30 SZYMANSKI, M.L.S. et AL. - *Matemática: um enfoque contextualizado*. Cascavel: Assoeste, 1993.
- 31 THIESEN, J. D. S. - *A Interdisciplinaridade como um movimento articulador no processo ensino-aprendizagem*. Revista brasileira de educação, V. 13 N. 39 Set/Dez. 2008.