UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Bruna Knevitz de Azevedo

FRAÇÕES E A GEOMETRIA: ALGUMAS CONEXÕES ENTRE AS SEQUÊNCIAS DE FAREY, OS CÍRCULOS DE FORD E OS SANGAKUS

Santa Maria, RS
2021

Bruna Knevitz de Azevedo

FRAÇÕES E A GEOMETRIA: ALGUMAS CONEXÕES ENTRE AS SEQUÊNCIAS DE FAREY, OS CÍRCULOS DE FORD E OS SANGAKUS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Casagrande Stabel

Santa Maria, RS
2021

Azevedo, Bruna Knevitz de
Frações e a Geometria: Algumas conexões entre as sequências de Farey, os círculos de Ford e os Sangakus / Bruna Knevitz de Azevedo.- 2021.
93 p.; 30 cm

Orientador: Eduardo Casagrande Stabel
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2021

1. Frações 2. Geometria 3. Sequências de Farey 4. Círculos de Ford 5. Sangakus I. Casagrande Stabel, Eduardo II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, BRUNA KNEVITZ DE AZEVEDO, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Bruna Knevitz de Azevedo

FRAÇÕES E A GEOMETRIA: ALGUMAS CONEXÕES ENTRE AS SEQUÊNCIAS DE FAREY, OS CÍRCULOS DE FORD E OS SANGAKUS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 07 de julho de 2021:

____
Eduardo Casagrande Stabel, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

____
Andreia Dalcin, Dr.ª (UFRGS)

____
Claudia Candida Pansonato, Dr.ª (UFSM)

____
Valeria de Fatima Maciel Cardoso Brum, Dr.ª (UFSM)

Santa Maria, RS
2021

Ao Daniel, meu amor.

Ao Bernardo, nosso amor.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, por todo o amor, apoio e incentivo.

Ao meu companheiro, Daniel, pela paciência, preocupação, disponibilidade e por me incentivar a seguir meus estudos.

A minha colega e amiga, Camila, por todas as horas de conversas, o apoio nas disciplinas e, principalmente, por ser uma ótima motorista e me proporcionar o conforto de cada viagem.

Aos colegas da turma que me proporcionaram muitas discussões interessantes, novas perspectivas e horas de estudos muito produtivas.

A minha família e amigos, por todo o carinho que me dedicaram.

Ao meu orientador, Eduardo, pela tranquilidade que me passou durante todo o trabalho e por estar sempre disponível para me encaminhar para os melhores caminhos nessa pesquisa.

Aos professores da banca, pelo tempo dedicado a leitura e a análise desse trabalho.

RESUMO

FRAÇÕES E A GEOMETRIA: ALGUMAS CONEXÕES ENTRE AS SEQUÊNCIAS DE FAREY, OS CÍRCULOS DE FORD E OS SANGAKUS

AUTORA: Bruna Knevitz de Azevedo
ORIENTADOR: Eduardo Casagrande Stabel

Este trabalho é um estudo bibliográfico com base em livros, artigos e dissertações. Tem como objetivo a elaboração de uma sequência didática com o intuito de oferecer aos alunos e professores da Educação Básica uma nova perspectiva sobre o conteúdo de frações e de geometria plana. Neste estudo, estes conteúdos são relacionados entre si e são apresentados novos conceitos que utilizam essas relações, como as sequências de Farey, os círculos de Ford e os Sangakus. Para sua realização foram usados como referencial teórico, principalmente, a legislação brasileira, como os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular e estudos presentes na literatura que tratam das sequências de Farey, dos círculos de Ford e dos Sangakus. A pesquisa seguiu as seguintes etapas: identificação dos conteúdos e a forma que esses seriam abordados em uma sequência didática, criação da sequência didática e criação de um questionário para determinar as opiniões e avaliações dos estudantes. Essa sequência de atividades foi construída para ser trabalhada com os alunos da Educação Básica, a partir do 9º ano do Ensino Fundamental e, espera-se, com o seu desenvolvimento despertar nos estudantes o interesse pela disciplina de matemática e pela sua história.

Palavras-chave: Frações. Geometria. Sequência de Farey. Círculos de Ford. Sangakus. História da Matemática.

ABSTRACT

FRACTIONS AND GEOMETRY: SOME CONNECTIONS BETWEEN FAREY SEQUENCES, FORD CIRCLES AND SANGAKUS

AUTHOR: Bruna Knevitz de Azevedo
ADVISOR: Eduardo Casagrande Stabel

This work is a bibliographic study based on books, articles and theses. It aims to create a didactic sequence in order to offer students and teachers of Primary Education a new perspective on the content of fractions and plane geometry. In this study, these contents are related to each other and new concepts are presented that use these relationships, such as the Farey sequences, the Ford circles and the Sangakus. For its realization, the Brazilian legislation was used as a theoretical reference, such as the National Curriculum Parameters and the Common National Curriculum Base and studies present in the literature that deal with the Farey sequences, the Ford circles and the Sangakus. The research followed the following steps: identification of the contents and the way that they would be approached in a task, creation of the task and creation of a questionnaire to determine the opinions and evaluations of the students. This task was built to be worked with students of Primary Education, from the 9th year of Elementary School and, it is hoped, with its development to arouse interest in students in the discipline of mathematics and in its history.

Keywords: Fractions. Geometry. Farey sequence. Ford circles. Sangakus. History of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Construção de F_5 29
Figura 2 - Construção de C_1 e C_2 30
Figura 3 - Relação entre dois círculos 30
Figura 4 - Construção de C_3 31
Figura 5 – Construção dos Círculos de Ford 31
Figura 6 - Círculos de Ford relacionados a F_2 32
Figura 7 - Círculos de Ford relacionados a F_3 32
Figura 8 - Círculos de Ford relacionados a F_4 33
Figura 9 - Relação entre dois círculos não tangentes 33
Figura 10 - Construção no GeoGebra 1 35
Figura 11 - Construção no GeoGebra 2 35
Figura 12 - Construção no GeoGebra 3 36
Figura 13 - Construção no GeoGebra 4 36
Figura 14 - Sangaku pendurado em Fukushima 37
Figura 15 - Cópia de um antigo Sangaku (1838) 37
Figura 16 - Sangakus de Kyoto 39
Figura 17 - Réplica de um sangaku que foi pendurado em 1879 no santuário de Aga. 40
Figura 18 - Sangaku pendurado em Nara 41
Figura 19 - Retas tangentes à uma circunferência 41
Figura 20 - Triângulo retângulo com circunferência inscrita 42
Figura 21 - Circunferência inscrita em um triângulo qualquer 43
Figura 22 - Circunferências não secantes e retas tangentes 43
Figura 23 - Wasan 44
Figura 24 - Demonstração Wasan 45
Figura 25 - Os três círculos 45
Figura 26 - Os três círculos entre dois baguetes 46
Figura 27 - Demonstração dos três círculos entre dois baguetes 47
Figura 28 - Círculos e baguetes 48
Figura 29 – Demonstração círculos e baguetes 49
Figura 30 - Três círculos num triângulo retângulo. 50
Figura 31 - Demonstração três círculos num triângulo retângulo 50

Figura 32 - Os três círculos num triângulos isósceles 51
Figura 33 - Cinco círculos dentro de um quadrado..53
Figura 35 - O quadrado cortado em dois..54
Figura 36 - Três círculos dentro de um quadrado..56
Figura 37 - Demonstração três círculos dentro de um quadrado..............................57
Figura 38 - Dois círculos iguais dentro de um quadrado. 58
Figura 40 - Três círculos tangentes dois a dois..60
Figura 41 - Demonstração três círculos tangentes dois a dois 61

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 13
2. REFERENCIAL TEÓRICO 16
2.1. DADOS ATUAIS E LEGISLAÇÃO 16
2.1.1. Resultados obtidos na educação básica 16
2.1.2. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) 17
2.1.3. Base Nacional Comum Curricular (BNCC) 21
2.2. OS NÚMEROS RACIONAIS ($\mathbb{Q}$) 23
2.3. SEQUÊNCIAS DE FAREY 25
2.3.1. Definição 25
2.3.2. Construção 26
2.4. CÍRCULOS DE FORD 29
2.4.1. Definição 32
2.4.2. Construção no GeoGebra 34
2.5. SANGAKUS 37
2.5.1. História 38
2.5.2. Alguns Sangakus e suas soluções 41
2.5.2.1. Proposições 41
2.5.2.2. Wasan 44
2.5.2.3. Os três círculos 45
2.5.2.4. Os três círculos entre dois baguetes 46
2.5.2.5. Círculos e baguetes 48
2.5.2.6. Três círculos num triângulo retângulo 50
2.5.2.7. Os três círculos num triângulo isósceles 51
2.5.2.8. Cinco círculos dentro de um quadrado 53
2.5.2.9. O quadrado cortado em dois 54
2.5.2.10. Três círculos dentro de um quadrado 56
2.5.2.11. Dois círculos iguais dentro de um quadrado 58
2.5.2.12. Três círculos tangentes dois a dois 60
3. METODOLOGIA 63
3.1. A PESQUISA 63
3.2. PROBLEMA DA PESQUISA 64
3.3. OBJETIVO GERAL 64
3.4. OBJETIVOS ESPECÍFICOS 64
4. A PROPOSTA DE ENSINO 65
4.1. PLANEJAMENTO DA OFICINA – AULA 1 65
4.2. PLANEJAMENTO DA OFICINA – AULA 2 67
4.3. PLANEJAMENTO DA OFICINA – AULA 3 68
4.4. PLANEJAMENTO DA OFICINA – AULA 4 69
4.5. PLANEJAMENTO DA OFICINA – AULA 5 70
4.6. PLANEJAMENTO DA OFICINA – AULA 6 71
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS 73
REFERÊNCIAS 75
APÊNDICE A – MATERIAL IMPRESSO DA AULA 1 77
APENDICE B – LISTA DE EXERCÍCIOS DA AULA 1 79
APÊNDICE C – MATERIAL IMPRESSO DA AULA 2 81
APÊNDICE D – MATERIAL IMPRESSO DA AULA 3 83
APÊNDICE E – MATERIAL IMPRESSO DA AULA 4 85

APÊNDICE F – MATERIAL IMPRESSO DA AULA 5 87
APÊNDICE G – MATERIAL IMPRESSO DA AULA 6 91
APÊNDICE H – QUESTIONÁRIO PARA AVALIAÇÃO DA OFICINA 93

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho surgiu da vontade de mostrar uma “nova matemática” aos alunos do ensino fundamental e do ensino médio, criar novos vínculos com o conhecimento já adquirido e motivá-los a seguir estudando. Outro ponto importante para a escolha do tema foi a vontade de despertar nos estudantes o interesse pela disciplina de matemática e pela sua história. O objetivo geral da presente dissertação é elaborar uma sequência de atividades para ser utilizada por alunos e professores da Educação Básica que fornecesse uma nova perspectiva sobre o conteúdo de frações e de geometria plana, relacionando esses conteúdos entre si e apresentando novos conceitos que utilizam essas relações, como as Sequências de Farey, os Círculos de Ford e os Sangakus. Os objetivos específicos desse trabalho são identificar os conteúdos e a forma que eles poderiam ser abordados em uma sequência didática, criar uma sequência didática que revisa os pré-requisitos, ensina os novos conceitos, cria conexões entre eles e os conecta com suas histórias, e criar um questionário para determinar as opiniões e avaliações dos estudantes sobre a atividade.

A pesquisa consistiu num estudo bibliográfico com base em livros, artigos e dissertações. Foram utilizados como referências: os trabalhos acadêmicos de Eduardo Casagrande Stabel, Everton Franco de Oliveira, George da Costa Euzébio, Marisa da Costa Cardoso Oliveira, Megumi Miyata, Nathercia Rodrigues, Thaynara Keiko Oda Santos e Jill Vicent e Claire Vicent; a legislação brasileira dos Parâmetros Curriculares Nacionais e da Base Nacional Comum Curricular; os dados obtidos no Sistema de Avaliação da Educação Básica, no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, na Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios e no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica; e os livros de Godfrey Harold Hardy, Edward Maitland Wright, Tom Mike Apostol, Jaime Bruck Ripoll, Cydara Cavedon Ripoll, José Francisco Porto da Silveira, Géry Huvent, Fukugawa Hidetoshi e Tony Rothman.

O projeto seguiu as seguintes etapas: Escolha dos conteúdos que seriam trabalhados na pesquisa; Leitura da legislação brasileira que amparasse o desenvolvimento da sequência didática com foco no ensino fundamental e médio; Análise sobre os conceitos que seriam abordados nessa atividade e como isso seria desenvolvido com os alunos; Criação da sequência didática em forma de um livro paradidático; e a criação do questionário para avaliação da atividade.

Dessa forma, o primeiro passo foi iniciar uma investigação sobre as pesquisas realizadas na área da Matemática que abordassem as sequências de Farey, os círculos de Ford e os Sangakus. Foram encontrados 8 trabalhos que tratavam de, pelo menos, um desses assuntos, mas nenhum deles conectava os três conteúdos na forma de uma proposta de ensino. Serão destacados abaixo os trabalhos que mais foram utilizados para o embasamento teórico dessa pesquisa.

Euzébio (2020) apresenta em seu trabalho o Teorema de Hurwitz sobre a aproximação de números irracionais através de números racionais utilizando uma constante associada ao valor de $\sqrt{5}$ para as aproximações. Para isso, ele começa relembrando alguns pontos da Teoria dos Números, tais como divisibilidade, congruências modulares e alguns teoremas dos números primos e trabalha com o reticulado dos números inteiros e algumas das propriedades de seus pontos, assim como alguns teoremas geométricos sobre tais pontos. Por último, o autor aborda as sequências de Farey em conjunto com os círculos de Ford para apresentar os teoremas sobre aproximação de irracionais por racionais e, assim, demonstrar o teorema de Hurwitz.

Já a pesquisa de Oliveira (2014) visou explorar conceitos básicos de uma forma rigorosa e teve os objetivos de expor os temas escolhidos e gerar conhecimento matemático a partir de questões e desafios propostos ao leitor. Os temas escolhidos pela autora são: Sequências de Farey, Círculos de Ford, Teoria dos Grafos, Árvore de Stern-Brocot e Árvore de Calkin-Wilf. O trabalho foi desenvolvido em 5 capítulos e apresenta as propriedades dos conteúdos junto com suas demonstrações. Além disso, traz conceitos base no início de cada capítulo, questões a serem respondidas pelo leitor no decorrer do texto e sugestões de atividades que visam consolidar e potenciar o entendimento de algumas propriedades.

O trabalho de Rodrigues (2018) foi produzido com o objetivo de sugerir conteúdos e questões sobre frações que abordam aspectos mais complexos do que o visto, normalmente, nos ensinos fundamental e médio. A pesquisa aborda um breve histórico sobre frações, Sequências de Farey, Circunferências de Ford, Árvore de Stern-Brocot, Frações Contínuas e problemas envolvendo esses conteúdos.

A autora afirma que apesar da pesquisa ser voltada para uma matemática mais sofisticada, algumas das questões são voltadas para o ensino médio e procuram mostrar ser possível iniciar esses conteúdos com tais alunos. Além disso, também traz questões mais simples, voltadas para o ensino fundamental a partir do 7º ano, com o objetivo de despertar a curiosidade e o interesse por um estudo mais aprofundado da matemática.

No estudo de Santos (2018) temos uma alternativa à aula tradicional de matemática utilizando os Sangakus. Essa proposta é baseada na Etnomatemática e busca fornecer aos alunos uma diversidade de conhecimento e de cultura, possibilitando entender a disciplina como uma construção ao longo do tempo e que inclui a contribuição de vários povos, tribos e raças. A pesquisa foi realizada com uma revisão bibliográfica qualitativa nos trabalhos desenvolvidos sobre a temática, apresentação do contexto histórico e cultural do Japão e criação de uma atividade que utiliza os Sangaku como motivadores ao ensino de Geometria.

Temos ainda o trabalho de Stabel (2007), no qual o objetivo principal é obter a série de Rademacher que determina o valor para a função partição irrestrita $p(n)$. Para isso, o autor utiliza o método do círculo com o caminho de integração descrito através dos círculos de Ford e demonstra a equação funcional de Dedekind para a função eta de Dedekind $\eta(\tau)$.

Essa pesquisa está relacionada com os documentos acima apresentados. Foi dividido em cinco capítulos, mais as referências bibliográficas e apêndices. O primeiro capítulo é essa introdução, na qual comento os motivos que me levaram a esse tema e apresento uma revisão de literatura sobre pesquisas realizadas na área. No segundo capítulo, serão apresentados os resultados atuais obtidos na educação básica, a legislação brasileira que baseia essa pesquisa, a definição dos números racionais, apresentação e construção das Sequências de Farey, apresentação e construção dos Círculos de Ford e a apresentação, história e algumas soluções dos Sangakus. No terceiro capítulo, descrevo a metodologia utilizada nesse estudo, com o problema da pesquisa e os objetivos. No quarto capítulo, será apresentada a proposta de ensino. E, no último capítulo, são apresentadas algumas considerações a título de conclusão.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Esse capítulo está dividido em cinco partes: apresentação dos dados atuais e da legislação brasileira que baseia essa pesquisa, definição dos números racionais, apresentação e construção das Sequências de Farey, apresentação e construção dos Círculos de Ford e a apresentação, história e algumas soluções dos Sangakus.

2.1. DADOS ATUAIS E LEGISLAÇÃO

2.1.1. Resultados obtidos na educação básica

Atualmente, o Brasil possui o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que é um conjunto de avaliações, feito a cada dois anos, as quais permitem realizar um diagnóstico da educação básica, tendo dados como a aprendizagem dos estudantes e avaliações da qualidade do ensino oferecido. Os resultados variam de 0 a 500 e são apresentados em uma escala de desempenho capaz de descrever, em cada nível, as competências e as habilidades que os estudantes demonstram ter desenvolvido. Esses dados geram, junto com os dados obtidos no Censo Escolar, o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB).

O IDEB é um indicador que apresenta o fluxo escolar e as médias de desempenho nas avaliações, logo ele permite o desenvolvimento de metas que visam uma melhoria do sistema de ensino e é um importante condutor de políticas públicas. Esse índice varia de 0 a 10 e tem a média 6 como meta para 2022.

Além das avaliações nacionais, o país também é avaliado pelo Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Esse programa é um estudo feito a cada 3 anos e oferece informações sobre o desempenho dos estudantes de 15 anos de idade dentro e fora da escola. Os conhecimentos são avaliados em três áreas (leitura, matemática e ciências) e os resultados obtidos são comparados aos resultados dos outros países. Em 2018, dos 79 países participantes, o Brasil estava na 65º posição.

Em relação à matemática, os dados obtidos nesses indicadores mostram que os estudantes têm um nível de aprendizado muito baixo. Em 2017, a média brasileira no SAEB era de 224,1 pontos em matemática no 5º ano do ensino fundamental, 258,3 no 9º ano do ensino fundamental e 269,74 no 3º ano do Ensino Médio.

Também em 2017, temos que no IDEB a taxa de alunos que aprenderam o adequado na competência de resolução de problemas até o 9º ano na rede pública de ensino é de 15% e o índice de estudantes com aprendizado insuficiente é de 31%. Apesar disso, o índice de alunos com aprendizagem adequada cresceu, pois em 2013 era de 11%.

Segundo o PISA de 2018, 68% dos estudantes brasileiros de 15 anos possuem a proficiência na disciplina de matemática abaixo do nível básico (nível 2) e apenas 0,1% estão no maior nível, no qual os alunos são capazes de conceituar, generalizar e utilizar informações com base em suas investigações e na modelagem de problemas complexos, e são capazes de usar seu conhecimento em contextos relativamente não padronizados.

2.1.2. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)

Os PCNs são um conjunto de documentos, elaborados pelo governo federal, que visam dar suporte ao trabalho docente, orientando as atividades dentro de sala de aula. Esses documentos têm como objetivos o debate sobre a função da escola e a discussão sobre o que, quando, como e para que ensinar e aprender.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) existem muitos obstáculos que precisam ser enfrentados em relação ao ensino da matemática. Entre eles, podemos destacar: a falta de planejamento ao se trabalhar com resoluções de problemas, a falta de utilização real e bem embasada dos recursos didáticos e a interpretação equivocada da ideia de contexto do aluno.

Devemos ressaltar que, quando falamos em contexto do aluno, precisamos lembrar que utilizar situações do cotidiano do estudante é fundamental para dar significado a muitos conteúdos, mas que esses significados também podem ser desenvolvidos de outras maneiras e em contextos diferentes. “Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata". (BRASIL, 1988, p. 23)

Os problemas do ensino da matemática contribuem com o desempenho insatisfatório dos alunos. Esse desempenho ruim é revelado pelas elevadas taxas de retenção em Matemática e faz dessa disciplina um filtro social na escola, selecionando os que terão oportunidade de concluir essa etapa e continuar seus estudos.

Devemos ver a matemática como "uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural" (BRASIL, 1998, p. 24). Por isso não podemos separar seus dois segmentos: o lado das aplicações às mais variadas atividades humanas e o lado da especulação pura, da busca por respostas as questões geradas no próprio edifício da Matemática.

No Ensino Fundamental, os PCNs (BRASIL, 1998, p. 47 e 48) trazem como objetivos gerais:

> - identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
> - fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);
> - selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
> - resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
> - comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;

- estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
- sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
- interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Em relação ao conteúdo, temos que eles são divididos em 4 conjuntos: números e operações; espaço e forma; grandezas e medidas; e tratamento da informação. Podemos destacar que, em relação aos números e operações, o conhecimento é construído visando o número como instrumento para resolver problemas e como próprio objeto de estudo, com história, relações e propriedades. O aluno, nesse processo, tem contato com diversos tipos de números e seus significados, além de se deparar com situações-problema envolvendo operações ou medidas de grandezas e estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento do conhecimento matemático. (BRASIL, 1998, p. 50)

Na área da Geometria, temos um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. “O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, etc.” (BRASIL, 1998, p. 51). Além disso, o professor pode utilizar situações em que os alunos trabalhem com algumas construções geométricas, facilitando a visualização e aplicação de propriedades das figuras.

Ainda na Geometria, é fundamental que o conteúdo explore objetos do mundo físico, obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

No Ensino Médio, os PCNs (BRASIL, 1999) afirmam que a matemática possui um papel formativo e instrumental. No papel formativo ela pode desenvolver no estudante a capacidade de resolver problemas genuínos, hábitos de investigação, proporcionar confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. E, no instrumental, ela deve ser entendida como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional.

Além disso, a Matemática no Ensino Médio também deve ser vista como ciência, com suas definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos possuindo a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

Podemos ressaltar que, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e, por isso, no Ensino Médio estarão em "condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade" (BRASIL, 1999, p.41).

Os objetivos do ensino de matemática no Ensino Médio segundo os PCNs (BRASIL, 1999, p. 42) são:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;

- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

2.1.3. Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A BNCC é um documento normativo que determina os conhecimentos essenciais que todos os alunos da Educação Básica devem aprender, independentemente do lugar onde moram e estudam. Possui sua estrutura focada no desenvolvimento de competências, indicando o que o aluno deve adquirir de conhecimento e conseguir realizar de acordo com o ano.

Segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 9 e 10), são Competências Gerais da Educação Básica:

> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
> 3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
> 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
> 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
> 7. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

> 8. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Quando falamos da área da matemática, a BNCC afirma que a disciplina deve garantir que os estudantes relacionem situações do mundo real com problemas, gráficos e tabelas e, ao mesmo tempo, associem essas representações a conceitos matemáticos, fazendo induções e conjecturas. Dessa forma, “espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações” (BRASIL, 2018, p. 265).

O documento traz ainda que é no final do Ensino Fundamental que a dedução de algumas propriedades e a validação de hipóteses, a partir de outras proposições, podem ser estimuladas e que nesse ciclo é necessário ter o compromisso com o letramento matemático, ou seja, desenvolver competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, facilitando assim o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (BRASIL, 2018, p. 266).

Podemos destacar, entre as competências específicas de matemática para o ensino fundamental que a BNCC (BRASIL, 2018, p. 269) aborda, os seguintes objetivos:

> 1) Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
> 2) Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> 3) Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
> 5) Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
> 8) Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de

> modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Outro ponto importante para o ensino é a inclusão da história da matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para o aprendizado. “Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos” (BRASIL, 2018, p. 298).

Ao mesmo tempo, também é necessário que o estudante desenvolva a capacidade de abstrair o contexto dos problemas, para conseguir utilizar as relações e os significados aprendidos em outros contextos. Essa abstração pode ser desenvolvida com a reelaboração pelos alunos dos problemas resolvidos. Assim, os alunos tem a oportunidade de refletir e sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto.

2.2. OS NÚMEROS RACIONAIS ($\mathbb{Q}$)

Os números racionais são quocientes entre números inteiros, ou seja, são todos os números que podem ser escritos na forma de fração. Esses números também podem estar representados na forma decimal finita (inteiros ou números decimais) ou decimal infinita (dízimas periódicas).

Definição 1: Um número racional é todo e qualquer número que puder ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros, com b diferente de zero.

Na fração $\frac{a}{b}$, a é o numerador e b é o denominador.

As frações compostas por números positivos podem ser classificadas de duas formas: próprias e impróprias. Frações próprias são aquelas que possuem o numerador menor que o denominador, enquanto frações impróprias possuem o numerador maior que o denominador.

Além disso, uma das consequências da definição 1 é que os números racionais não tem uma representação única, ou seja, podem ser representados de infinitas formas. Isso significa que existe a possibilidade de simplificação de números racionais quando o numerador e o denominador da fração $\frac{a}{b}$ forem divisíveis por um número d. Se simplificarmos o máximo possível, utilizando o máximo divisor comum de a e b, obteremos uma fração $\frac{x}{y}$ equivalente à $\frac{a}{b}$, com $MDC(x, y) = 1$. Denotaremos essa fração $\frac{x}{y}$ como a fração irredutível de $\frac{a}{b}$.

Propriedade 1: Todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser escrito na forma $\frac{x}{y}$ tal que $MDC\ (x, y)\ =\ 1.$

Como os números reais podem ser ordenados e os números racionais são um subconjunto dos números reais, poderemos ordenar os números racionais. Isso implica na possibilidade de comparar duas frações, ou seja, determinar qual fração, entre $\frac{a}{b}$ ou $\frac{c}{d}$, representa uma maior quantidade. Para isso, relacionaremos a multiplicação do numerador da primeira pelo denominador da segunda $(a \cdot d)$ e a multiplicação do denominador da primeira pelo numerador da segunda $(b \cdot c)$. Se $(a \cdot d)$ for maior que $(b \cdot c)$, temos que $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, caso contrário temos que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Propriedade 2: Se os números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ têm denominadores positivos, então

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d > c \cdot b$$

e

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$$

2.3. SEQUÊNCIAS DE FAREY

Vamos considerar como exemplo as frações próprias entre 0 e 1 que tenham o denominador menor ou igual a 4. Podemos escrevê-las de acordo com o seu denominador:

Denominador	Frações
1	$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$
4	$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$

Como algumas destas frações não estão na forma irredutível, temos valores repetidos. Assim, existem apenas 7 frações próprias com denominador inferior a 4, formando a seguinte sequência crescente que denotaremos por F_4:

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

Essa sequência é chamada de sequência de Farey de ordem 4.

2.3.1. Definição

Denomina-se a sequência de Farey de ordem n, denotada por F_n, a sequência das frações irredutíveis no intervalo [0; 1], com denominadores menores ou iguais a n e ordenadas na ordem crescente.

Alguns exemplos:

$\boldsymbol{F_n}$	**Termos**												
F_1	$\frac{0}{1}$												$\frac{1}{1}$
F_2	$\frac{0}{1}$						$\frac{1}{2}$						$\frac{1}{1}$
F_3	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$				$\frac{1}{1}$
F_4	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$			$\frac{1}{1}$
F_5	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$		$\frac{1}{1}$
F_6	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{1}$

Observando os exemplos acima, podemos destacar alguns pontos interessantes: A fração $\frac{1}{2}$ é o termo central de todas as sequências; Nem sempre surgem novas frações e, quando elas aparecem, temos apenas uma fração entre dois termos da sequência anterior; As frações equidistantes de $\frac{1}{2}$ possuem o mesmo denominador e a soma delas é igual a 1; E a subtração de dois termos consecutivos, $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, de qualquer sequência é sempre $\frac{1}{bd}$.

2.3.2. Construção

Para construir uma sequência de Farey vamos utilizar as definições e propriedades abaixo:

Definição 2 (Fração mediante): Dadas duas frações irredutíveis, $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com $a, b, c, d \geq 0$, chamaremos $\frac{a+c}{b+d}$ de fração mediante de $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.

Propriedade 1: Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ frações irredutíveis. Se $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, então a fração mediante $\frac{a+c}{b+d}$ satisfaz a condição $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Demonstração:

Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ duas frações irredutíveis, com $a, b, c\ e\ d\ \in \mathbb{N}$, tais que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Para demonstrar que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ vale, devemos mostrar que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \text{ e } \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Temos que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{ad+ab}{b(b+d)} < \frac{bc+ab}{b(b+d)} \Leftrightarrow \frac{a(b+d)}{b(b+d)} < \frac{b(a+c)}{b(b+d)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$$

E

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{ad+cd}{d(b+d)} < \frac{bc+cd}{d(b+d)} \Leftrightarrow \frac{d(a+c)}{d(b+d)} < \frac{c(b+d)}{d(b+d)} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Portanto

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

■

Teorema 1 (Termos consecutivos):

Se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são termos consecutivos numa sequência de Farey então $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd} = \frac{1}{bd}$, isto é, $bc - ad = 1$.

Demonstração:

Seja F_n uma sequência de Farey e $\frac{a}{b}\ e\ \frac{c}{d}$ dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência, tal que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Quero mostrar que $p(n)$: $bc - ad = 1$ é verdadeira.

<u>Base de indução:</u> $n = 1$

Para $F_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$ temos $1 - 0 = 1$, logo é verdadeira.

<u>Hipótese de indução (HI):</u>

Vamos supor por hipótese de indução que $p(n)$ é válida para algum $n \in \mathbb{N}$. Quero mostrar que vale para $p(n+1)$, ou seja, sejam $\frac{x}{y}$ e $\frac{w}{z}$ duas frações consecutivas de F_{n+1}, com $\frac{x}{y} < \frac{w}{z}$, $yw - xz = 1$.

Sejam $\frac{x}{y}$ e $\frac{w}{z}$ duas frações consecutivas de F_{n+1}, com $\frac{x}{y} < \frac{w}{z}$.

- Se $y, z \leq n$, então $\frac{x}{y}$ e $\frac{w}{z}$ são consecutivas em F_n e, pela hipótese de indução, $yw - xz = 1$.
- Se y ou z $> n$, então $y = n + 1$ ou $z = n + 1$. Suponhamos que $y = n + 1$.

Como $y = n + 1$, sabemos que $\frac{x}{y}$ não pertence à F_n, logo $\frac{x}{y}$ tem que ser fração mediante de duas frações consecutivas em F_n. Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ essas frações.

Sabemos que, pela hipótese de indução, $bc - ad = 1$.

Temos então que, pela propriedade 1, $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} = \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ e que $\frac{a}{b}, \frac{x}{y}, \frac{c}{d}$ são consecutivas nessa ordem.

Também podemos escrever que, como $\frac{w}{z}$ é consecutiva de $\frac{x}{y}$, $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{w}{z} \leq \frac{c}{d}$. Mas se $\frac{w}{z} < \frac{c}{d}$, pela fração mediante, teremos que $\frac{w}{z} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{x}{y}$, o que é um absurdo.

Desse modo temos que $\frac{w}{z} = \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} = \frac{a+w}{b+z} < \frac{w}{z}$ e que

$$yw - xz = (b + z)w - (a + w)z = bw + wz - az - wz = bw - az = bc - ad = 1$$

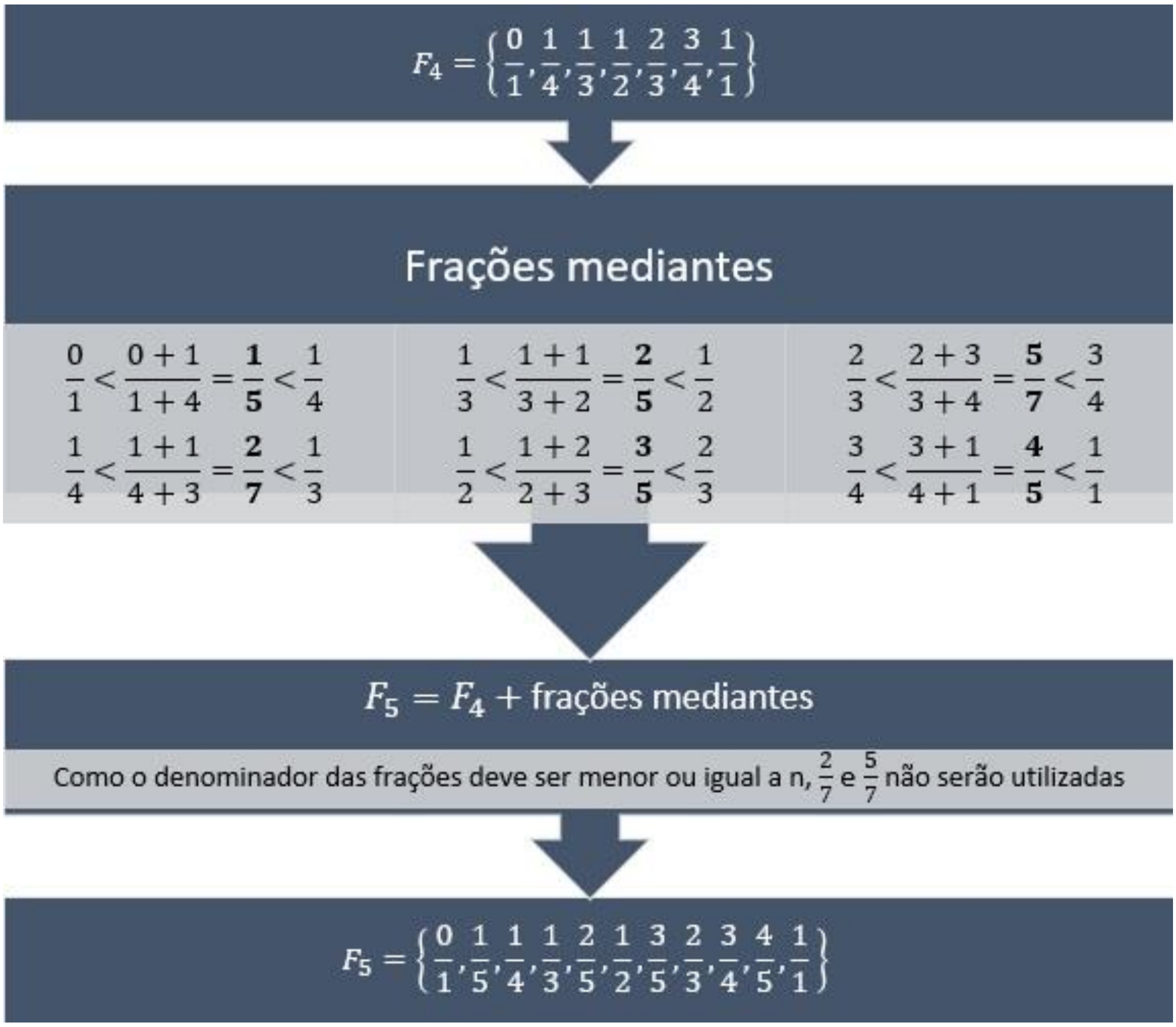
Logo $p(n + 1)$ é válida para $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, $p(n)$ é válida para $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

■

Com essa base, podemos construir cada uma das sequências de Farey a partir da anterior. Veja abaixo a construção de F_5 a partir de F_4:

Figura 1 - Construção de F_5



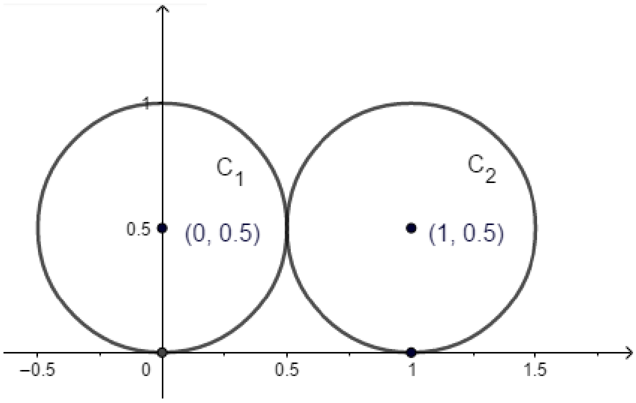
Fonte: Elaborada pela autora.

2.4. CÍRCULOS DE FORD

Os círculos de Ford são círculos que se relacionam com as frações próprias e irredutíveis. Eles foram apresentados por Lester Randolph Ford em 1938 no artigo *Fractions* e ficaram conhecidos, segundo J. J. O'Connor e E. F. Robertson (2007), como uma “interpretação geométrica absolutamente maravilhosa da série Farey”.

Vamos considerar como exemplo duas circunferências, $C_1 e\ C_2$, de raio $\frac{1}{2}$ com centros em $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, respectivamente. As circunferências serão tangentes entre si e tangentes com o eixo x, conforme mostra a Figura 2.

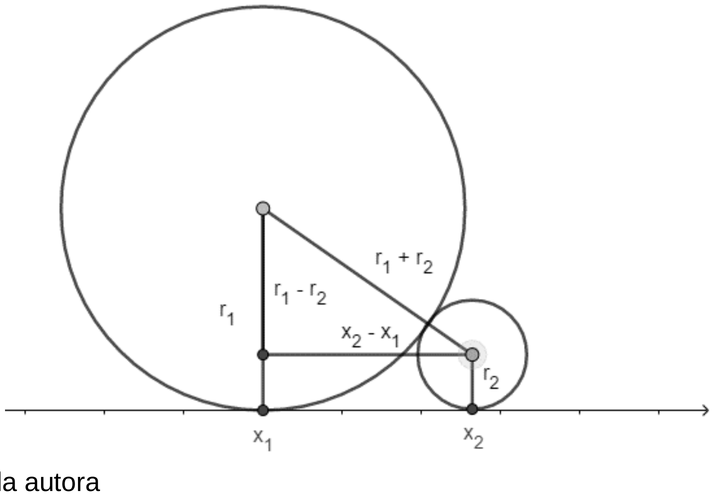
Figura 2 - Construção de C_1 e C_2



Fonte: Elaborada pela autora

Agora vamos construir a circunferência C_3 tangente à C_1, C_2 e ao eixo x. Como a figura é simétrica, podemos afirmar que C_3 será tangente ao eixo x no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Para descobrir o raio de C_3 podemos utilizar o teorema de Pitágoras, conforme a figura 3, utilizando os centros de C_1 e C_3.

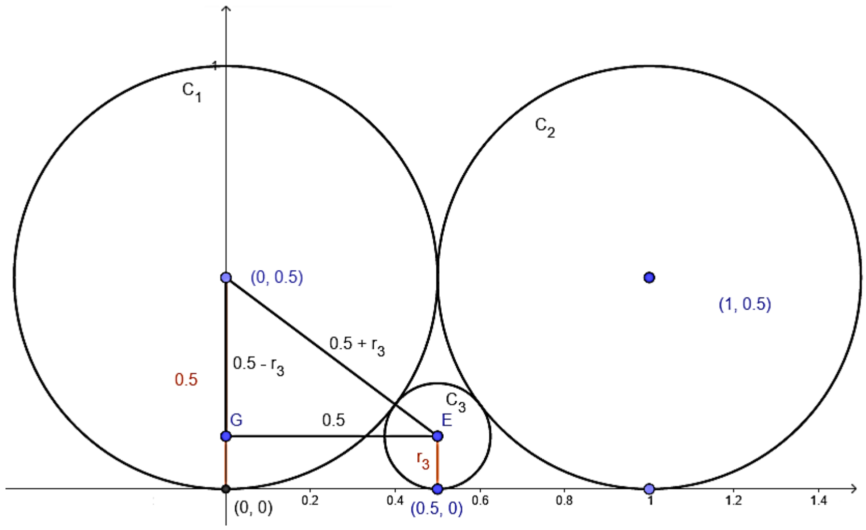
Figura 3 - Relação entre dois círculos



Fonte: Elaborada pela autora

Ou seja,

Figura 4 - Construção de C_3



Fonte: Elaborada pela autora

Logo, substituindo os valores que temos, vamos obter que

$$\left(\frac{1}{2}+r_3\right)^2=\left(\frac{1}{2}-r_3\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2$$

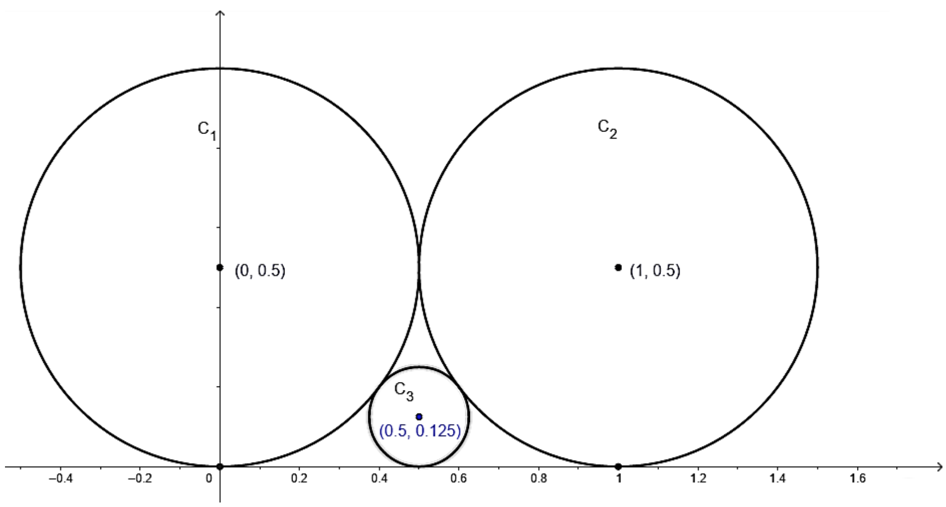
$$\frac{1}{4}+r_3+r_3^2=\frac{1}{4}-r_3+r_3^2+\frac{1}{4}$$

$$2r_3=\frac{1}{4}$$

$$r_3=\frac{1}{8}$$

Dessa forma, C_3 terá seu centro em $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$ e raio $\frac{1}{8}$. A Figura 5 mostra o resultado obtido.

Figura 5 – Construção dos Círculos de Ford



Fonte: Elaborada pela autora

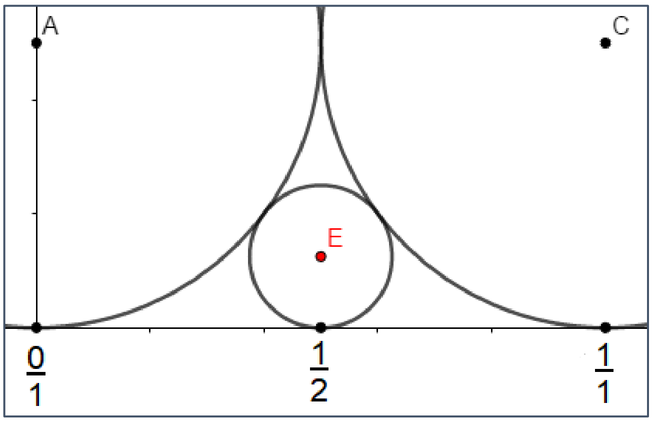
Podemos perceber que as abcissas dos centros das circunferências obtidas são exatamente a sequência de Farey de ordem 2

2.4.1. Definição

Seja $\frac{h}{k}$ um número racional irredutível. Denomina-se o círculo de Ford correspondente a esta fração, denotado por $C\ (h, k)$, o círculo de raio $\frac{1}{2k^2}$ cujo centro está no ponto $\left(\frac{h}{k}, \frac{1}{2k^2}\right)$.

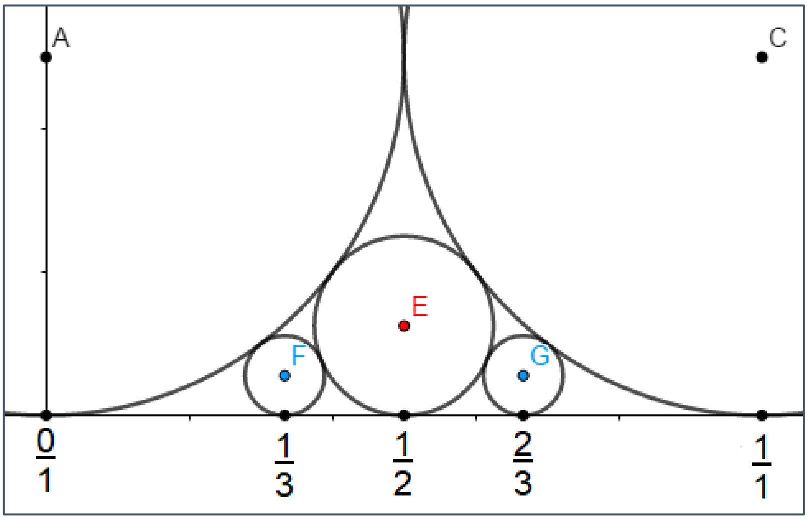
Veja alguns exemplos:

Figura 6 - Círculos de Ford relacionados a F_2



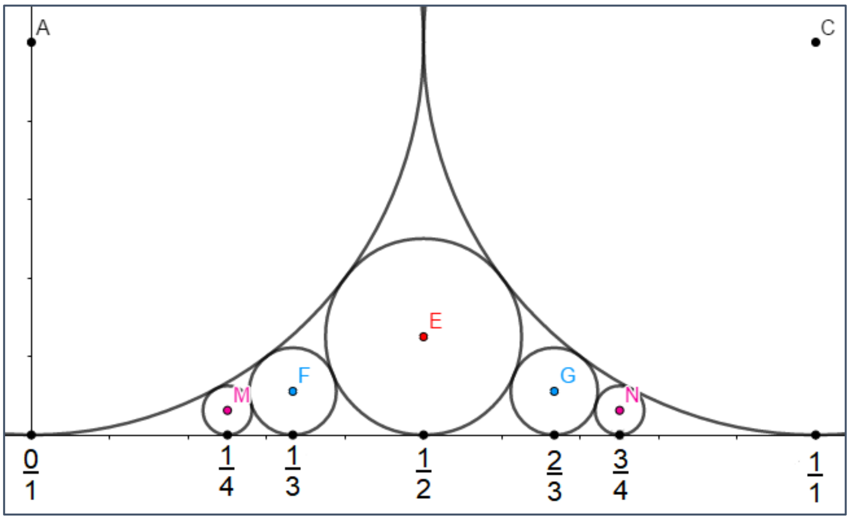
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 7 - Círculos de Ford relacionados a F_3



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 8 - Círculos de Ford relacionados a F_4



Fonte: Elaborada pela autora

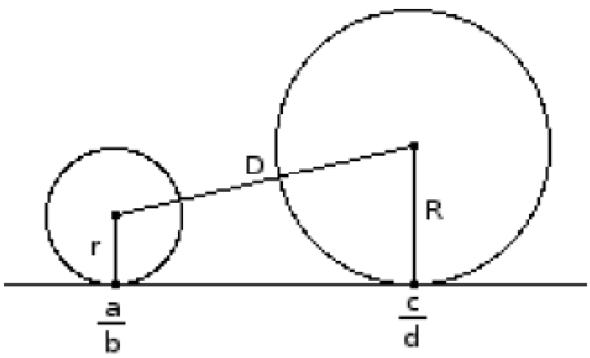
Observando os exemplos acima, podemos perceber que os círculos de Ford que correspondem às frações consecutivas em F_n são tangentes entre si.

Teorema 2. Dois círculos de Ford $C(a\,,b)$ e $C(c\,,d)$ ou são tangentes ou não se interceptam. Além disso, eles são tangentes se, e somente se, $bc - ad = \pm 1$. Em particular, os círculos de Ford correspondentes às frações consecutivas de uma sequência de Farey são tangentes entre si.

Demonstração:

Sejam $C(a\,,b)$ e $C(c\,,d)$ dois círculos de Ford relacionados às frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, respectivamente, r o raio do círculo $C(a,b)$ e R o raio do círculo $C(c,d)$.

Figura 9 - Relação entre dois círculos não tangentes



Fonte: (STABEL, 2007, p. 8)

Podemos calcular a distância entre os centros dos círculos utilizando o mesmo processo da Figura 9. Substituindo os valores, temos a seguinte expressão:

$$D^2 = \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2$$

Sabemos também que a soma dos raios dos dois círculos ao quadrado será:

$$(r+R)^2 = \left(\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2}\right)^2$$

Logo, fazendo a diferença entre as duas expressões, teremos que

$$\begin{aligned} D^2 - (r+R)^2 &= \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{ad-bc}{bd}\right)^2 + \frac{1}{4b^4} - \frac{1}{2b^2d^2} + \frac{1}{4d^4} - \frac{1}{4b^4} - \frac{1}{2b^2d^2} - \frac{1}{4d^4} \\ &= \frac{(ad-bc)^2}{b^2d^2} - \frac{1}{b^2d^2} = \frac{(ad-bc)^2 - 1}{b^2d^2} \end{aligned}$$

Se os círculos de Ford $C(a\,,b)$ e $C(c\,,d)$ são diferentes, temos que $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ e $(ad - bc) \neq 0$. Portanto, como $(ad - bc) \in \mathbb{Z}$, $D^2 - (r+R)^2 \geq 0$.

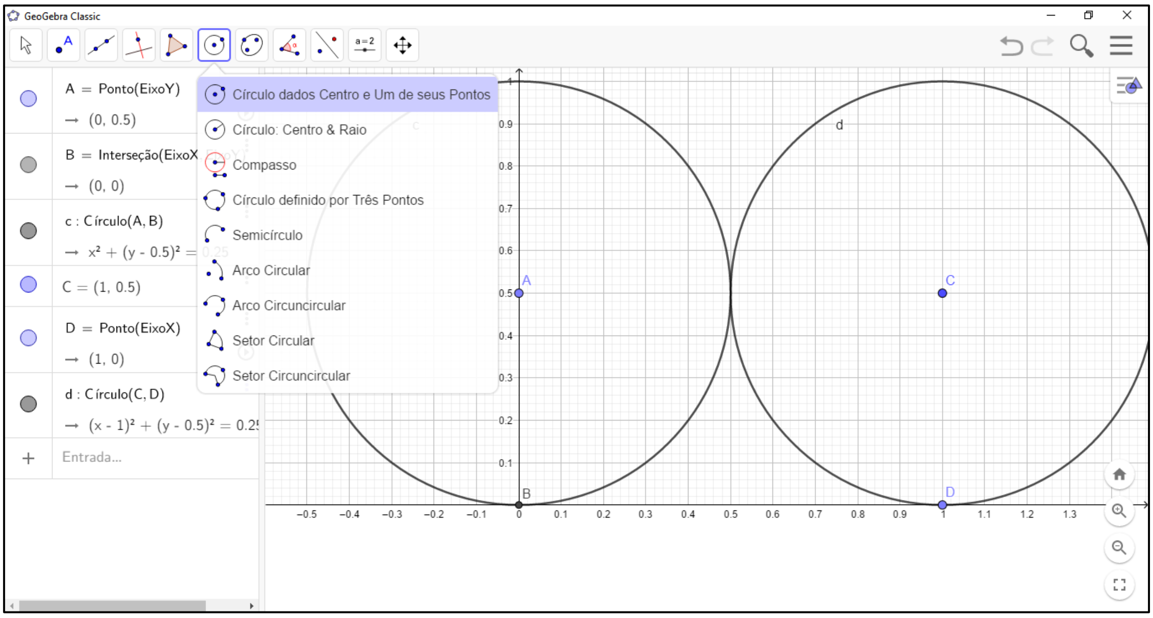
Portanto ou os dois círculos se tangenciam ($D^2 - (r+R)^2 = 0$) ou eles não se tocam ($D^2 - (r+R)^2 > 0$). Se as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são consecutivas em F_n, pelo Teorema 1, vale a relação unimodal $(bc - ad = \pm 1)$ e os círculos se tangenciam exteriormente.

2.4.2. Construção no GeoGebra

Para construir os círculos de Ford no GeoGebra podemos utilizar vários procedimentos. Vamos descrever a seguir a construção dos círculos de Ford relacionados a sequência de Farey $F_4 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}$ utilizando o método mais parecido com a régua e o compasso.

1) Utilizando o comando círculo dados centro e um de seus pontos vamos criar o círculo $C(0{,}0)$ com centro em $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e o ponto $(0, 0)$ e o círculo $C(1{,}1)$ com centro em $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ e o ponto $(1, 0)$.

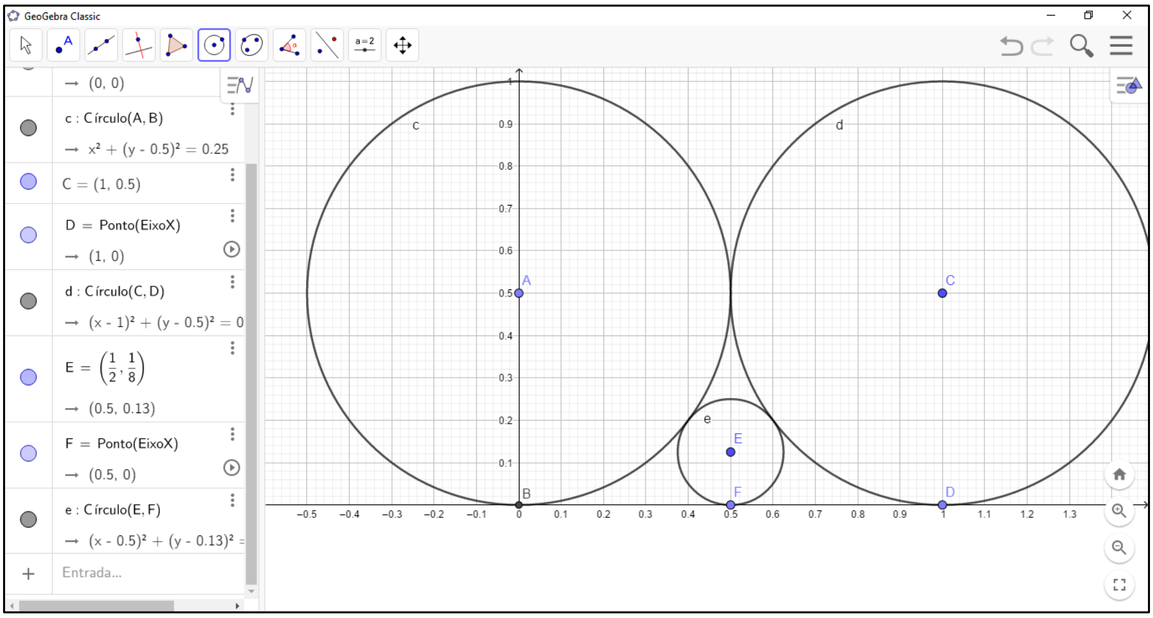
Figura 10 - Construção no GeoGebra 1



Fonte: Elaborada pela autora

2) Vamos construir agora a circunferência $C(1,2)$, tangente a $C(0,0)$ e $C(1,1)$. Utilizando a definição de círculo de Ford, temos que o centro será no ponto $\left(\frac{h}{k}, \frac{1}{2k^2}\right)$, ou seja, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ e o ponto do eixo x será $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

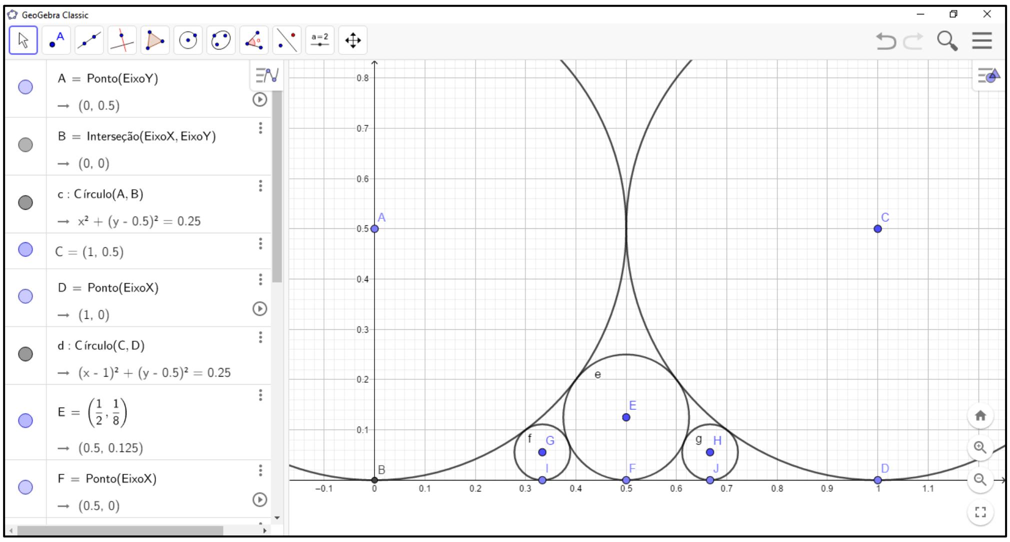
Figura 11 - Construção no GeoGebra 2



Fonte: Elaborada pela autora

3) Vamos construir agora as circunferências $C(1,3)$ e $C(2,3)$. $C(1,3)$ terá centro no ponto $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{18}\right)$ e passará pelo ponto $\left(\frac{1}{3},0\right)$ e $C(2,3)$ terá centro no ponto $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{18}\right)$ e passará pelo ponto $\left(\frac{2}{3},0\right)$. Sabemos, pelo Teorema 2, que esses dois círculos são tangentes a $C(1,2)$.

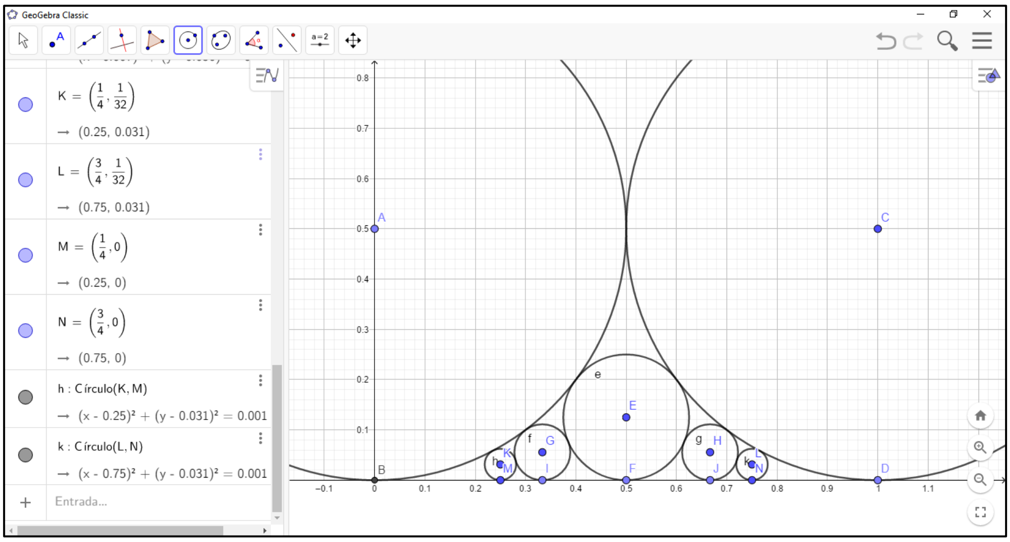
Figura 12 - Construção no GeoGebra 3



Fonte: Elaborada pela autora

4) E, por último, vamos construir os círculos $C(1,4)$ e $C(3,4)$. $C(1,4)$ terá centro no ponto $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{32}\right)$ e passará pelo ponto $\left(\frac{1}{4},0\right)$ e $C(3,4)$ terá centro no ponto $\left(\frac{3}{4},\frac{1}{32}\right)$ e passará pelo ponto $\left(\frac{3}{4},0\right)$.

Figura 13 - Construção no GeoGebra 4



Fonte: Elaborada pela autora

2.5. SANGAKUS

Os Sangakus ou 算額 (tábua matemática) são problemas geométricos japoneses feitos em tábuas de madeira que eram colocados como oferendas em santuários xintoístas ou templos budistas entre os séculos 17 e 19. Eles eram criados por membros de todas as classes sociais, como desafios para os congregantes ou como exibições das soluções para outras perguntas.

Figura 14 - Sangaku pendurado em Fukushima

Fonte: Nicolas Delerue[1]

Figura 15 - Cópia de um antigo Sangaku (1838)

Fonte: Nicolas Delerue[2]

---

1 Disponível em: <http://www.sangaku.info/images/fukushima/Sangaku_Fukushima_2600.html>. Acessado em dezembro de 2020.

2.5.1. História

O desenvolvimento dos sangakus está relacionado diretamente com a história do Japão, pois eles surgiram no período Edo ou Tokugawa (1603-1868) que foi marcado principalmente pelo isolamento do país do mundo ocidental em 1639.

Em 1603, Tokugawa Ieyasu emergiu como o líder do Japão e deu-se início a uma dinastia de xoguns Tokugawa, que durou 265 anos. Nesse período, para conter a difusão do cristianismo, o Japão ordenou que todos os missionários cristãos deixassem o país, que locais de culto cristãos fossem demolidos e que a prática do cristianismo fosse proibida. Além disso, foi proibido o envio de navios japoneses para o exterior e os japoneses foram proibidos de viajar para o exterior, sob pena de morte. De acordo com algumas estimativas, trezentos mil convertidos ao cristianismo haviam abandonado a religião ou foram executados.

Os japoneses, totalmente desconfiados, impuseram severas restrições ao comércio com os ocidentais. A partir de 1641, só era permitida a presença dos holandeses e esses foram forçados a se mudar para uma pequena ilha feita pelo homem chamada Deshima no porto de Nagasaki, que era totalmente isolada do continente, exceto por um cano de bambu e uma única ponte sempre fiscalizada. Isso constituiu o comércio do Japão com o Ocidente durante 200 anos e assim começou a política do que viria a ser conhecido como sakoku, "país fechado".

Durante o sakoku, a política teve tanto sucesso na eliminação de conflitos estrangeiros que os 250 anos do período Edo ficaram conhecidos como a "Grande Paz". Além disso, esta estabilidade ocasionou um florescimento na cultura japonesa e muitas das artes para as quais o Japão é renomado (dança Noh, peças de teatro Kabuki e de fantoches, cerimônias do chá e a arquitetura de jardim) alcançaram suas maiores realizações. Foi nesse período também que foram publicados o maior número de textos matemáticos japoneses tradicionais, os teoremas mais interessantes foram provados e a maioria dos problemas de sangaku criados.

O costume de pendurar tabuinhas em santuários e templos era bastante natural e, por séculos antes de o sangaku existir, os adeptos levavam presentes aos santuários locais. Isso ocorria porque o xintoísmo, religião nativa do país, é composto por "oitocentas miríades de deuses", os kami, e eles amavam cavalos,

[2] Disponível em:<http://www.sangaku.info/images/ichiNoSekiMuseum/Sangaku_Museum_2310.html>. Acessado em dezembro de 2020.

logo um adorador que não podia oferecer um animal vivo poderia apresentar uma imagem desenhada em um pedaço de madeira.

Figura 16 - Sangakus de Kyoto

Fonte: Nicolas Delerue[3]

Não sabemos em que ano a tradição dos sangakus começou, mas a tábua mais antiga sobrevivente foi encontrada na prefeitura de Tochigi e data de 1683. Nos dois séculos seguintes, os sangakus apareceram em dois terços dos santuários xintoístas e um terço nos templos budistas em todo o Japão. Acredita-se que originalmente existiam milhares a mais do que as 900 tábuas existentes hoje. O sangaku mais recente foi descoberto no santuário de Ubara e data de 1870.

A maioria dos sangakus contém apenas a resposta final para um problema, raramente eles mostram uma solução detalhada. Eles eram inscritos em uma língua chamada Kanbun, que usava caracteres chineses e gramática essencialmente chinesa, mas incluía marcas diacríticas para indicar o significado japonês.

---

[3] Disponível em: < http://www.sangaku.info/images/kyoto_yasui_small/Yasui_1551.html>. Acessado em dezembro de 2020.

Figura 17 - Réplica de um sangaku que foi pendurado em 1879 no santuário de Aga.

Fonte: (FUKAGAWA e ROTHMAN, 2008, p. 88)

A pratica de pendurar os sangakus nos templos iniciou com as pessoas comuns que estudavam nos juku, pois elas não tinham dinheiro para publicar seus próprios livros, então adotaram o antigo costume de levar tábuas aos templos, fazendo uma oferenda religiosa e anunciando seus resultados. Os juku eram pequenas escolas particulares onde, no período Edo, pessoas de todas as idades e classes sociais participavam de aulas. Além disso, foi por causa dessas escolas e da educação fornecida por elas que as crianças do Japão tinham um nível de alfabetização alto em comparação com outros países da época.

Em 1868, quando a família Tokugawa perdeu o poder, o Japão foi aberto ao ocidente e o novo governo Meiji decidiu que, para que o Japão fosse um parceiro igual às nações estrangeiras, o país deveria se modernizar rapidamente. Por isso, escolas governamentais foram estabelecidas em todo o Japão e no Gakurei de 1872, ou "Código Fundamental de Educação", os líderes decretaram que apenas a matemática ocidental deveria ser ensinada. Com isso, a pratica dos sangakus desapareceu, mas alguns devotos continuaram a publicá-los até 1980, e os sangakus continuam a ser descobertos até hoje.

Figura 18 - Sangaku pendurado em Nara

Fonte: Nicolas Delerue[4]

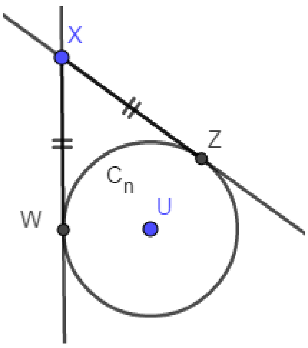
2.5.2. Alguns Sangakus e suas soluções

Nessa seção serão apresentados alguns sangakus do livro Sangaku - Le mystère des énigmes géométriques japonaises, do autor Géry Huvent, algumas propriedades que serão utilizadas para resolução dos enigmas e suas soluções.

2.5.2.1. Proposições.

Proposição 1: Sejam C_n um círculo de centro U e X um ponto exterior a ele. Se W e Z são pontos tais que XW e XZ são tangentes ao círculo C_n, então $\overline{XW} = \overline{XZ}$.

Figura 19 - Retas tangentes à uma circunferência



Fonte: Elaborada pela autora.

[4] Disponível em: < http://www.sangaku.info/images/nara/Sangaku_Nara_1664.html>. Acessado em dezembro de 2020.

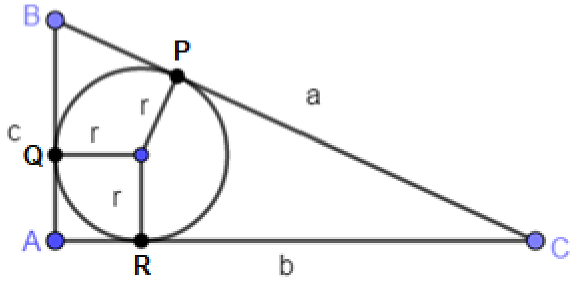
Prova: Como $UW = UZ$ e $X\widehat{W}U = X\hat{Z}U = 90°$, os triângulos são congruentes pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos. Portanto $\overline{XW} = \overline{XZ}$.

Proposição 2: Seja ABC um triângulo retângulo em A e seja C_1 a circunferência de raio r inscrita em ABC. Então vale a seguinte relação:

$$r = \frac{b + c - a}{2}$$

Prova: Seja P o ponto de tangência entre C_1 e o lado BC, Q o ponto de tangência entre C_1 e o lado AB e R o ponto de tangência entre C_1 e o lado AC. Sabemos que $BP = BQ = c - r$, pois são dois segmentos tangentes a C_1. Analogamente, $PC = RC = b - r$.

Figura 20 - Triângulo retângulo com circunferência inscrita



Fonte: Elaborada pela autora.

Como $a = \overline{BP} + \overline{PC}$, temos que

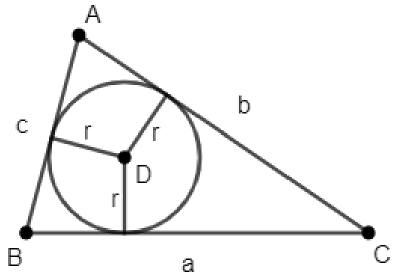
$$a = b - r + c - r \Leftrightarrow 2r = b + c - a \Leftrightarrow r = \frac{b + c - a}{2}$$

Proposição 3: Seja ABC um triângulo qualquer de base a e altura h, como mostra a figura 21, e C_1 a circunferência inscrita em ABC, de centro D e raio r. Então vale a seguinte relação:

$$r = \frac{a \cdot h}{a + b + c}$$

Prova: Sejam $a = \overline{BC}, b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, conforme a figura 21, e seja h a altura do triângulo ABC.

Figura 21 - Circunferência inscrita em um triângulo qualquer



Fonte: Elaborada pela autora.

Podemos afirmar que a área do triângulo ABC é igual a soma das áreas dos triângulos ABD, BCD e ACD, ou seja,

$$A(ABC) = A(ABD) + A(BCD) + A(ACD)$$

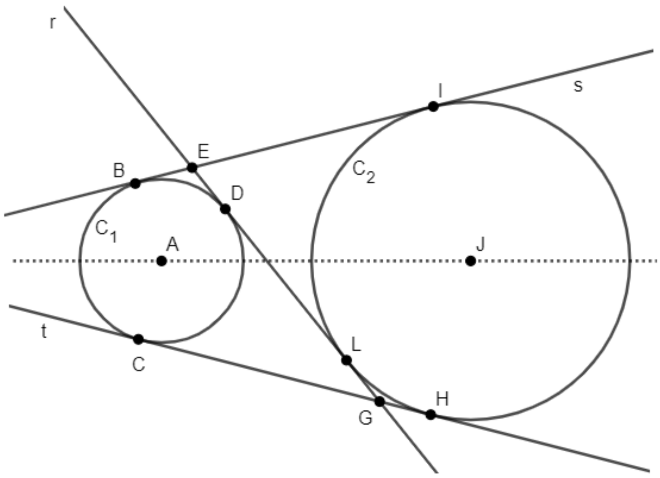
$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2}$$

$$r(a + b + c) = a \cdot h$$

$$r = \frac{a \cdot h}{a + b + c}$$

Proposição 4: Sejam C_1 e C_2 dois círculos não secantes e sejam r, s e t três retas tangentes comuns à esses círculos. Na figura baixo, os comprimentos BI e EG são iguais.

Figura 22 - Circunferências não secantes e retas tangentes



Fonte: Elaborada pela autora.

Prova: De fato, utilizando a Proposição 1, temos que $BE = ED$, $EI = EL$ e $LG = GH$, assim:

$$BI = BE + EI = BE + EL = BE + ED + DL = 2ED + DL$$

Também temos, por simetria, que $CH = 2LG + DL$.

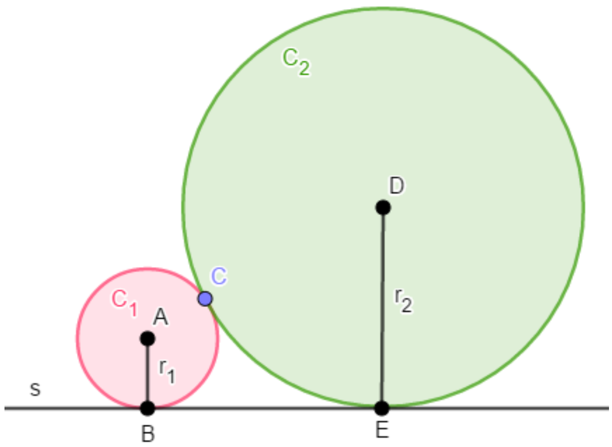
A figura sendo simétrica em relação à reta que une os centros dos dois círculos, temos que $BI = CH$, logo $ED = LG = BE$.

Enfim, $BI = BE + EI = BE + EL = EL + LG = EG$.

2.5.2.2. Wasan

História do sangaku: Esse sangaku é conhecido como Wasan e apresenta um resultado clássico da matemática japonesa do período Edo. Ele foi construído em 1820 e está exposto na Prefeitura de Miyagi.

Figura 23 - Wasan



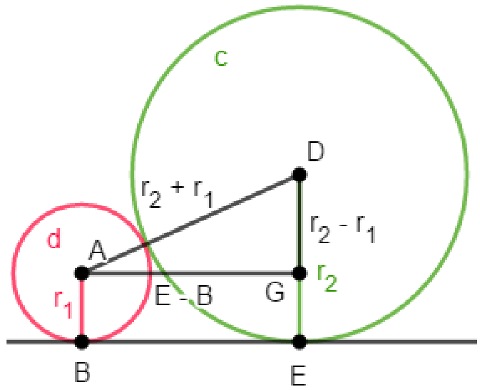
Fonte: Elaborada pela autora.

O problema: Sejam C_1 e C_2 dois círculos de raios r_1 e r_2 que são tangentes entre si e tangentes a uma reta s, conforme a figura acima. Prove que a distância entre os pontos de tangência dos círculos com a reta s é igual a $2\sqrt{r_1 r_2}$, ou seja,

$$(\overline{BE})^2 = 4r_1r_2$$

Solução: Para solucionar o problema, vamos utilizar o teorema de Pitágoras no triângulo formado pelos centros das circunferências, conforme a Figura 24.

Figura 24 - Demonstração Wasan



Fonte: Elaborada pela autora.

Portanto, temos que

$$(r_1 + r_2)^2 = (\overline{BE})^2 + (r_1 - r_2)^2$$

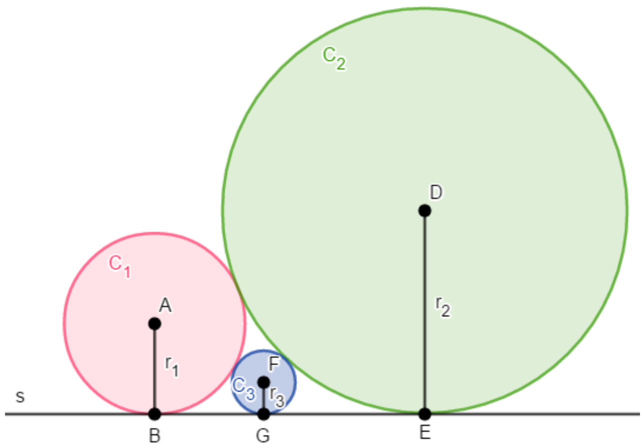
$$(\overline{BE})^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2$$

$$(\overline{BE})^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - r_1^2 + 2r_1r_2 - r_2^2 = 4r_1r_2$$

2.5.2.3. Os três círculos

História do sangaku: Segundo Géry Huvent (2008), este é o Sangaku mais famoso. Ele foi construído em 1824 e está exposto na Prefeitura de Gunma.

Figura 25 - Os três círculos



Fonte: Elaborada pela autora.

O problema: Sejam três círculos C_1, C_2 e C_3 tangentes à uma reta s tais que C_1 e C_2 são tangentes entre si exteriormente e C_3 seja tangente à C_1 e a C_2. Queremos demonstrar que os raios r_1, r_2, e r_3 dos três círculos estão ligados pela relação:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

Solução: Utilizando as notações da Figura 25, podemos aplicar a relação estabelecida no Sangaku Wasan aos círculos C_1 e C_2, depois aos círculos C_1 e C_3 e à C_2 e C_3. Teremos que:

$$BE = 2\sqrt{r_1 r_2},\ BG = 2\sqrt{r_1 r_3},\ GE = 2\sqrt{r_2 r_3}$$

Logo, como $BE = BG + GE$, temos que

$$\sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_2 r_3}$$

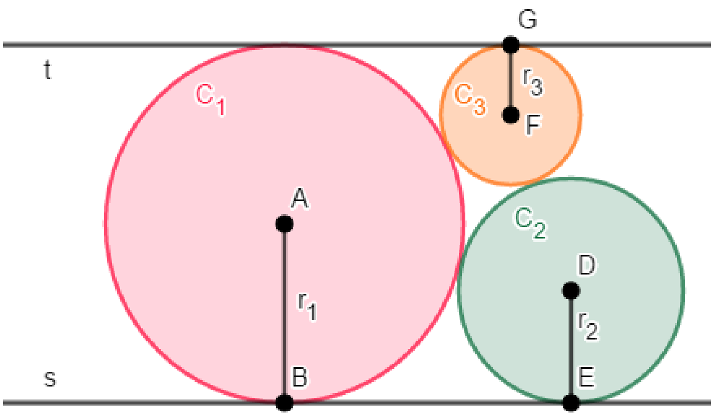
E dividindo todos os termos por $\sqrt{r_1 r_2 r_3}$ encontraremos que

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

2.5.2.4. Os três círculos entre dois baguetes:

História do sangaku: Esse sangaku foi construído em 1881 e foi exposto na Prefeitura de Ibaraki.

Figura 26 - Os três círculos entre dois baguetes



Fonte: Elaborada pela autora.

O problema: Sejam s e t duas retas paralelas. Seja C_1 o círculo tangente à s e t, C_2 um círculo tangente à C_1 e à s e C_3 o círculo tangente à C_1, a C_2 e à t. Se r_i é o raio de C_i, demonstre a seguinte relação entre os raios:

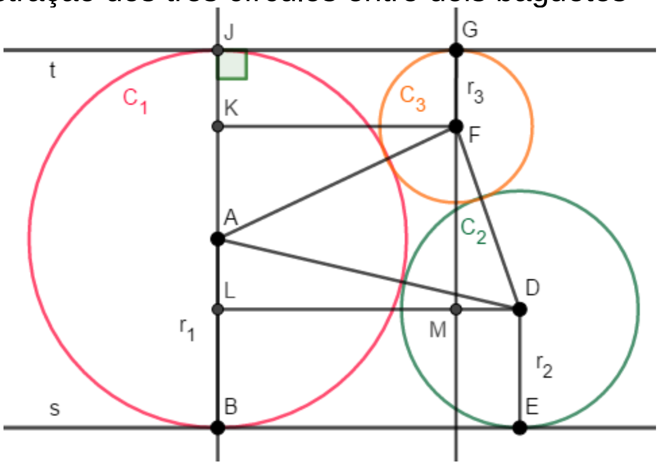
$$r_1^2 = 4r_2r_3$$

Solução: Se $r_2 = r_3$, temos que $r_2 = r_3 = \frac{r_1}{2}$ e

$$r_1^2 = 4r_3^2 = 4r_2r_3$$

Vamos supor agora que $r_3 < r_2$ e vamos utilizar as notações da figura 27.

Figura 27 - Demonstração dos três círculos entre dois baguetes



Fonte: Elaborada pela autora.

Sejam K e L as projeções de F e D sobre a reta perpendicular à t e à s que passa por A e seja M a projeção de F sobre a reta paralela à s que passa por D.

Temos que, utilizando a resolução do sangaku Wasan,

$$\overline{AK} = r_1 - r_3$$

$$\overline{LA} = r_1 - r_2$$

$$\overline{BE} = 2\sqrt{r_1r_2}$$

$$\overline{JG} = 2\sqrt{r_1r_3}$$

Observando o triângulo FMD, temos que

$$\overline{FD} = r_2 + r_3$$

$$\overline{FM} = \overline{KA} + \overline{AL} = r_1 - r_3 + r_1 - r_2$$

$$\overline{MD} = \overline{LD} - \overline{LM} = \overline{BE} - \overline{JG} = 2\sqrt{r_1 r_2} - 2\sqrt{r_1 r_3}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo FMD:

$$(r_2 + r_3)^2 = (2r_1 - r_2 - r_3)^2 + 4r_1\left(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (r_2 + r_3)^2 = 4r_1^2 - 4r_1(r_2 + r_3) + (r_2 + r_3)^2 + 4r_1\left(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4r_1^2 - 4r_1(r_2 + r_3) + 4r_1\left(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4r_1\left(\left(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3}\right)^2 + r_1 - r_2 - r_3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow r_1 - r_2 - r_3 + r_2 - 2\sqrt{r_2 r_3} + r_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow r_1 = 2\sqrt{r_2 r_3}$$

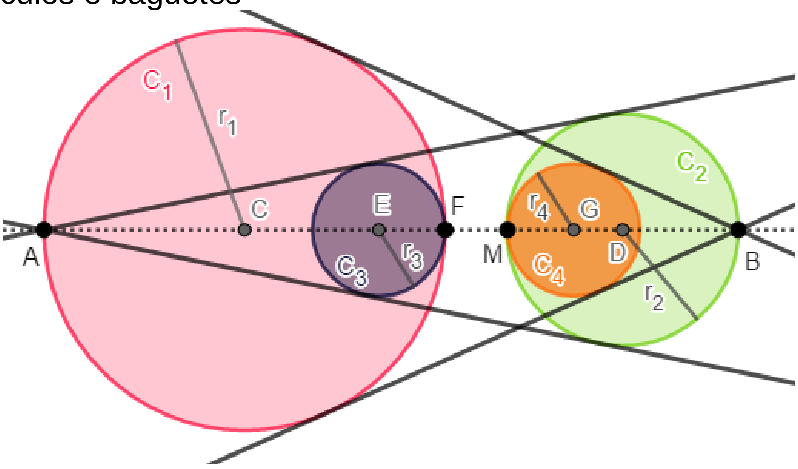
Que podemos reescrever como

$$r_1^2 = 4r_2 r_3$$

2.5.2.5. Círculos e baguetes

História do sangaku: Esse sangaku foi construído em 1842 e não existe mais. Ele estava situado na Prefeitura de Aichi.

Figura 28 - Círculos e baguetes



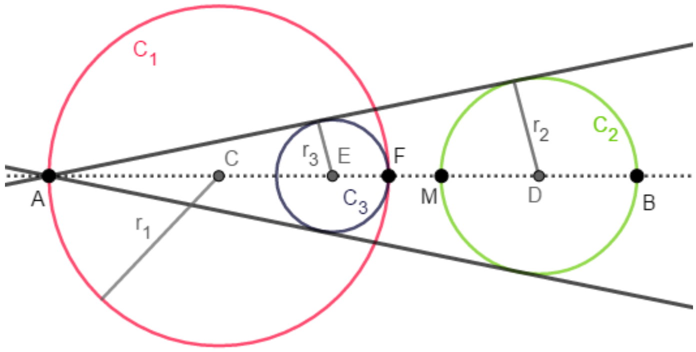
Fonte: Elaborada pela autora.

O problema: Sejam C_1 e C_2 dois círculos e seja s uma reta que passa pelos centros deles. A reta s corta esses dois círculos em quatro pontos: A, F, M, B. Seja C_3 o círculo tangente interiormente à C_1 e à duas tangentes de C_2 que passam por A. E seja C_4 o círculo tangente interiormente à C_2 e à duas tangentes de C_1 que passam por B. Demonstre que os raios r_3 e r_4 de C_3 e C_4 são iguais.

Solução: As notações são aquelas da Figura 28, em particular C, D, E e G são os centros de C_1, C_2, C_3 e C_4, respectivamente.

Vamos aplicar o Teorema de Tales nas paralelas formadas pelos raios r_2 e r_3 e transversais s e uma das tangentes a C_2 que passa pelo ponto A, conforme a figura 29.

Figura 29 – Demonstração círculos e baguetes



Fonte: Elaborada pela autora.

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{\overline{AF} - r_3}{\overline{AD}} = \frac{2r_1 - r_3}{\overline{AD}}$$

Podemos deduzir dessa expressão que

$$r_3 \cdot \overline{AD} = r_2(2r_1 - r_3)$$

$$r_3 \cdot \overline{AD} + r_2 r_3 = 2r_1 r_2$$

$$r_3 = \frac{2r_1 r_2}{\overline{AD} + r_2} = \frac{2r_1 r_2}{\overline{AB}}$$

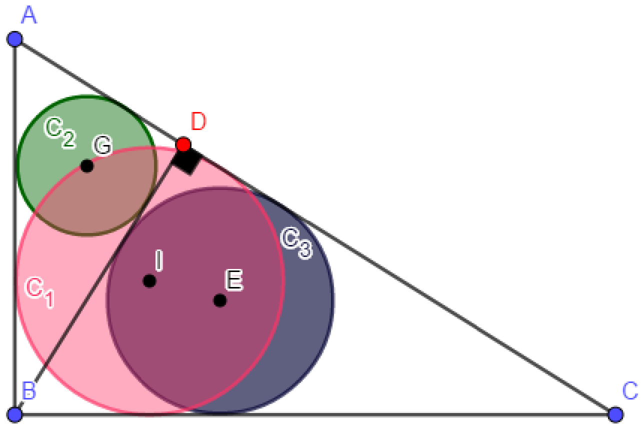
Analogamente, quando utilizamos o teorema de Tales nos raios r_1 e r_4, temos que o r_4 tem o mesmo valor. Portanto

$$r_3 = r_4$$

2.5.2.6. Três círculos num triângulo retângulo

História do sangaku: Este Sangaku estava exposto na Prefeitura de Iwate, mas não possui data de sua construção.

Figura 30 - Três círculos num triângulo retângulo.



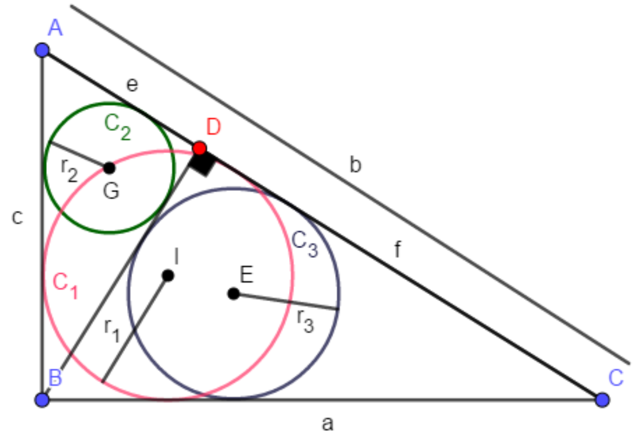
Fonte: Elaborada pela autora.

O problema: Seja ABC um triângulo retângulo em B. Seja r_1 o raio do círculo inscrito em ABC e D o pé da altura traçada por B. Se $h = BD$ e r_2, r_3 denotam os raios dos círculos inscritos nos triângulos ABD e BCD respectivamente. Prove que:

$$h = r_1 + r_2 + r_3$$

Solução: Vamos utilizar as notações da Figura 31.

Figura 31 - Demonstração três círculos num triângulo retângulo



Fonte: Elaborada pela autora.

Sejam $e = \overline{AD}$ e $f = \overline{DC}$. Os três triângulos ABC, ABD e BDC são retângulos, então, utilizando a proposição 2, temos

$$r_1 = \frac{a + c - b}{2}, r_2 = \frac{e + h - c}{2} \; e \; r_2 = \frac{f + h - a}{2}$$

Substituindo $b = e + f$:

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{2h + e + f - b}{2} = \frac{2h}{2} = h$$

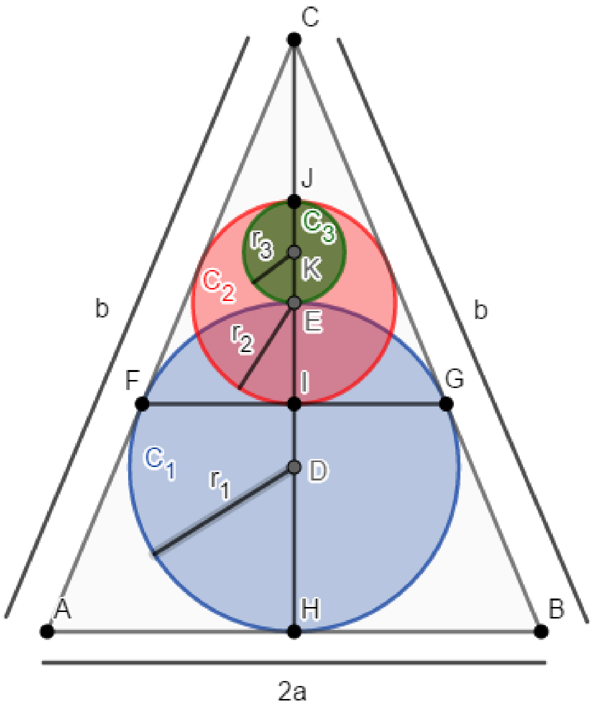
Portanto

$$h = r_1 + r_2 + r_3$$

2.5.2.7. Os três círculos num triângulo isósceles

História do sangaku: Esse Sangaku foi construído em 1872 e exposto no Santuário de Kumano-Jinja, cidade de Karuizawa, Prefeitura de Nagano. Neste santuário, existem duas tábuas. Aquela da qual se extraiu este problema mede 5 cm por 238 cm e propõe sete enigmas.

Figura 32 - Os três círculos num triângulos isósceles



Fonte: Elaborada pela autora.

O problema: Seja ABC um triângulo isósceles tal que $\overline{AC} = \overline{CB} = b$, o círculo inscrito C_1 toca os dois lados iguais em F e G. Sejam C_2 o círculo inscrito no triângulo FCG e C_3 o círculo tangente exteriormente à C_1, interiormente à C_2 e centrado sobre a altura traçada por C, como indicado na Figura. Calcule a razão dos raios $\frac{r_3}{r_2}$ dos círculos C_2 e C_3.

Solução: Seja H o pé da altura traçada por C. Vamos denotar $\overline{CH} = h_1$ e $\overline{CI} = h_2$.

Temos que:

$$2r_3 = \overline{CH} - \overline{CJ} - \overline{EH} = \overline{CJ} + 2r_2 + \overline{IH} - \overline{CJ} - 2r_1 = \overline{IH} - 2(r_1 - r_2)$$

$$2r_3 = (h_1 - h_2) - 2(r_1 - r_2)$$

Agora, utilizando a Proposição 1, podemos afirmar que $\overline{BG} = \overline{BH} = a$ e que $\overline{CG} = b - a$.

Utilizando o Teorema de Tales, temos que

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{b-a}{b}$$

E, como os triângulos ABC e FGC são semelhantes, podemos afirmar que

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{b-a}{b}$$

Logo

$$h_1 - h_2 = h_1 - \frac{h_1(b-a)}{b} = \frac{bh_1 - bh_1 + ah_1}{b} = \frac{a}{b}h_1$$

E, analogamente,

$$r_1 - r_2 = \frac{a}{b}r_1$$

Agora, vamos calcular r_1 utilizando a Proposição 3. Temos que

$$r_1 = \frac{2a \cdot h_1}{2a + 2b} = \frac{a \cdot h_1}{a + b}$$

Ou seja,

$$h_1 = \frac{r_1(a+b)}{a}$$

Substituindo na expressão de r_3

$$2r_3 = (h_1 - h_2) - 2(r_1 - r_2) = \frac{a}{b}h_1 - \frac{2a}{b}r_1 = \frac{a}{b}\left(\frac{r_1(a+b)}{a} - 2r_1\right) = \frac{b-a}{b}r_1 = r_2$$

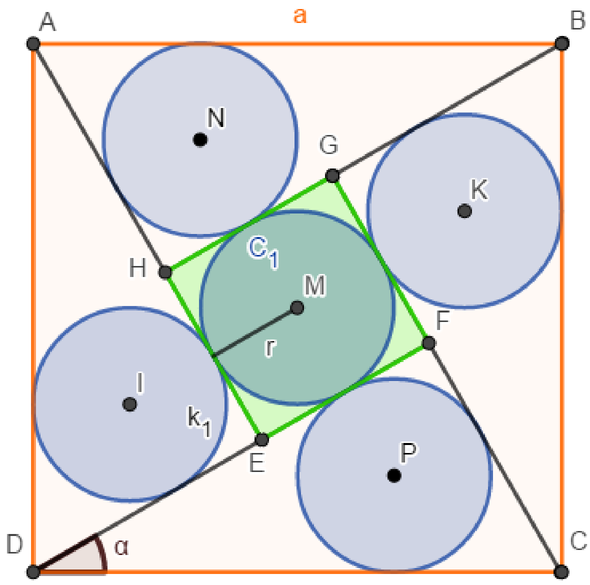
Portanto

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{1}{2}$$

2.5.2.8. Cinco círculos dentro de um quadrado:

História do sangaku: Este Sangaku foi construído em 1811. Ele se encontra no Santuário de Ichikawadani-Ohmoto, Prefeitura de Nagano. A tábua de madeira que o contém mede 74 cm de altura por 147 cm de largura e propõe sete enigmas geométricos diferentes.

Figura 33 - Cinco círculos dentro de um quadrado



Fonte: Elaborada pela autora.

O problema: Existem cinco círculos de mesmo raio, inscritos dentro de um quadrado segundo a configuração descrita pela Figura acima. Qual é a razão $\frac{r}{a}$ entre o raio dos círculos e o lado do quadrado?

Solução: Sejam $ABCD$ e $EFGH$ dois quadrados, conforme a figura 33. Vamos denotar $DE = AH = BG = CF = b$, $AE = BH = CG = DF = c$.

Como o triângulo DFC é retângulo, temos que $r = \frac{b+c-a}{2}$ e $c = b + 2r$, ou seja, $b = c - 2r$. Logo

$$b = c - b - c + a$$

$$a = 2b$$

Encontrando o seno e o cosseno de α, temos que $sen\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$ e, portanto, $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Logo $\cos\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

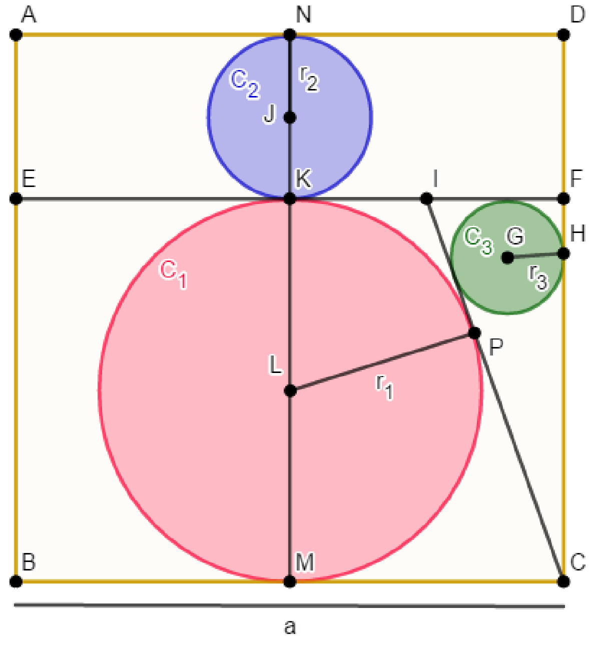
Portanto

$$\frac{r}{a} = \frac{\frac{b+c-2b}{2}}{a} = \frac{\frac{c-b}{2}}{a} = \frac{\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{a}{2}}{2}}{a} = \frac{a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)}{2a} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

2.5.2.9. O quadrado cortado em dois

História do sangaku: Esse sangaku existe ainda e foi construído em 1853. Ele se encontra na Prefeitura de Kyoto.

Figura 34 - O quadrado cortado em dois



Fonte: Elaborada pela autora.

O problema: Seja $ABCD$ um quadrado de lado de comprimento a, N o ponto médio do segmento $\overline{AD}$ e M o de $\overline{BC}$. Seja F um ponto pertencente ao lado $\overline{DC}$, a paralela à $\overline{AD}$ passando por F corta $\overline{NM}$ em K. Denotamos por r_1 e r_2 os raios dos círculos de diâmetro $\overline{MK}$ e $\overline{KN}$. A tangente passando por C ao círculo de diâmetro $\overline{MK}$ corta $\overline{FK}$ em I. Se r_3 é o raio do círculo inscrito no triângulo retângulo CFI, prove que:

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

Solução: Como M é o ponto médio de BC, temos que $\overline{MC} = \frac{a}{2}$. Também temos que, como $\overline{MC}$ e $\overline{CP}$ são tangentes ao círculo C_1, $\overline{MC} = \overline{CP}$ e, como $\overline{KI}$ e $\overline{IP}$ são tangentes ao círculo C_1, $\overline{KI} = \overline{IP}$.

Denotamos $\overline{KI} = x$. Podemos afirmar que

$$\overline{IC} = \frac{a}{2} + x, \overline{CF} = 2r_1, \overline{IF} = \frac{a}{2} - x \text{ e } a - 2r_1 = 2r_2$$

Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo CFI, temos

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + 4r_1^2 \Rightarrow x = \frac{2r_1^2}{a}$$

Definindo r_3, utilizando a Proposição 2, temos que

$$r_3 = \frac{\overline{IF} + \overline{FC} - \overline{CI}}{2} = \frac{\frac{a}{2} - x + 2r_1 - \frac{a}{2} - x}{2} = r_1 - x$$

Substituindo

$$r_3 = r_1 - \frac{2r_1^2}{a} = \frac{ar_1 - 2r_1^2}{a}$$

Logo

$$\frac{1}{r_3} = \frac{a}{r_1(a - 2r_1)} = \frac{2r_1 + 2r_2}{r_1 \cdot 2r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}$$

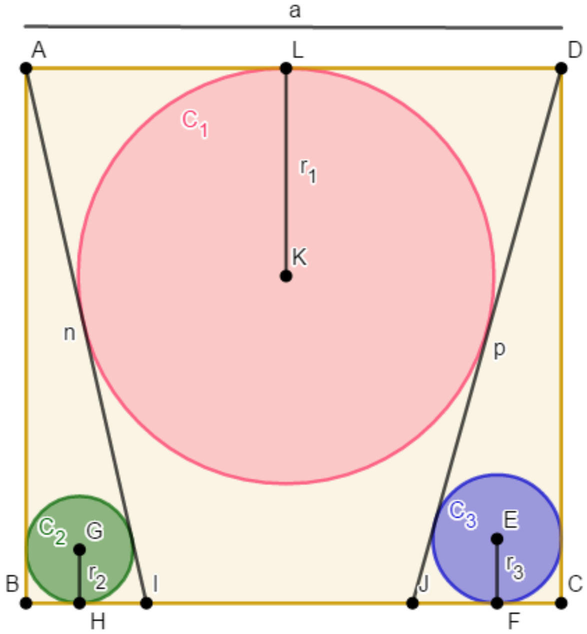
Portanto

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

2.5.2.10. Três círculos dentro de um quadrado

História do sangaku: Esse problema está em uma tábua que foi construída em 1877 e que estava localizada na Prefeitura de Fukushima.

Figura 35 - Três círculos dentro de um quadrado



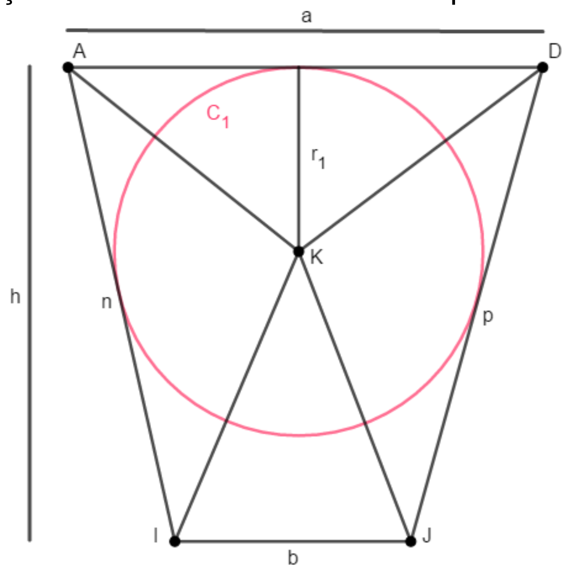
Fonte: Elaborada pela autora.

O problema: Sobre o lado $\overline{BC}$ de um quadrado $ABCD$, marcam-se dois pontos quaisquer I e J, conforme a figura. Sejam r_1 o raio do círculo inscrito no trapézio $ADIJ$, r_2 e r_3 os raios dos círculos inscritos nos triângulos retângulos ABI e DJC. Prove que:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{a - 2r_2} + \frac{1}{a - 2r_3}$$

Solução: Vamos começar calculando o raio do círculo inscrito em $ADIJ$. Para isso vamos dividir o trapézio em quatro triângulos: $AKI, IKJ, JKD\ e\ DKA$.

Figura 36 - Demonstração três círculos dentro de um quadrado



Fonte: Elaborada pela autora.

A área do trapézio é

$$A(ADIJ) = A(AKI) + A(IKJ) + A(JKD) + A(DKA)$$

$$\frac{(a+b)\cdot h}{2} = \frac{n \cdot r_1}{2} + \frac{b\cdot(h-r_1)}{2} + \frac{p\cdot r_1}{2} + \frac{a \cdot r_1}{2}$$

$$(a+b)h = r_1(n+p+a) + (h-r_1)b$$

Organizando os termos, temos que

$$\frac{1}{r_1} = \frac{n+p+a-b}{ha}$$

Como $ABCD$ é um quadrado, sabemos que $h = a$ e $a - b = \overline{BI} + \overline{JC}$. Substituindo na expressão acima

$$\frac{1}{r_1} = \frac{n+p+\overline{BI}+\overline{JC}}{a^2}$$

Vamos calcular agora $\frac{1}{a-2r_2}$. Como, pela proposição 2, $r_2 = \frac{a+\overline{BI}-n}{2}$, temos que

$$\frac{1}{a-2r_2} = \frac{1}{a-a-\overline{BI}+n} = \frac{1}{n-\overline{BI}} \cdot \frac{n+\overline{BI}}{n+\overline{BI}} = \frac{n+\overline{BI}}{n^2-(\overline{BI})^2} = \frac{n+\overline{BI}}{a^2}$$

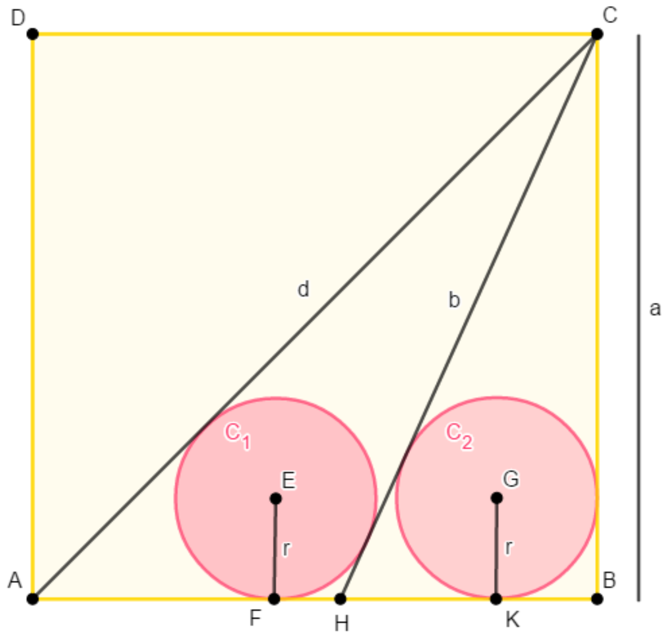
Analogamente, temos que $\frac{1}{a-2r_3} = \frac{p+\overline{JC}}{a^2}$. Portanto

$$\frac{1}{a-2r_2}+\frac{1}{a-2r_3}=\frac{n+\overline{BI}}{a^2}+\frac{p+\overline{JC}}{a^2}=\frac{n+p+\overline{BI}+\overline{JC}}{a^2}=\frac{1}{r_1}$$

2.5.2.11. Dois círculos iguais dentro de um quadrado:

História do sangaku: A tábua data de 1893 e está exposta na Prefeitura de Hyogo.

Figura 37 - Dois círculos iguais dentro de um quadrado.



Fonte: Elaborada pela autora.

O problema: Num quadrado $ABCD$ cujo comprimento do lado vale a, traçamos a diagonal $\overline{AC}$ e o segmento $\overline{CH}$ onde H é o ponto do lado $\overline{AB}$ tal que os círculos inscritos nos triângulos ACH e CBH possuem o mesmo raio r. Determine o quociente $\frac{r}{a}$.

Solução: Denotamos $\overline{BH}=x$. Vamos começar calculando os raios dos dois círculos, sem levar em conta que o triângulo CBH é retângulo. Utilizando a Proposição 3, temos que o raio do círculo inscrito à CBH é $r=\frac{ax}{a+b+x}$, e do círculo inscrito ao triângulo ACH é $r=\frac{a(a-x)}{(a-x)+b+d}$. Como os dois raios são iguais, temos que

$$x(a+b+d-x)=(a-x)(a+b+x)$$

Colocando b em evidência:

$$b = \frac{x(a+d) - a^2}{a - 2x}$$

Aplicando Pitágoras no triângulo CBH, temos que

$$x^2 + a^2 = b^2$$

Substituindo b na equação acima

$$x^2 + a^2 = \left(\frac{x(a+d) - a^2}{a - 2x}\right)^2$$

$$(x^2 + a^2)(a - 2x)^2 = (x(a+d) - a^2)^2$$

Como $d^2 = 2a^2$, temos que $x = 0$ e $x = a$ são duas soluções da equação. Podemos agora resolvê-la, pois ela é equivalente à equação polinomial de grau 4:

$$P(x) = (x^2 + a^2)(a - 2x)^2 - \left(a^2 - x(a+c)\right)^2 = 0$$

O coeficiente dominante de P vale 4, o coeficiente de grau 3 vale $-4a$ e o de grau 1 vale $-4a^3 + 2a^2(a+c) = 2a^2c - 2a^3$. Vamos procurar agora as duas outras raízes de P, que vamos chamar de $\alpha\ e\ \beta$. Temos, portanto, segundo as relações dos coeficientes das raízes:

$$\alpha + \beta + 0 + a = -\frac{-4a}{4} = a \to \alpha + \beta = 0$$

$$a\alpha\beta = -\frac{2a^2c - 2a^3}{4} = \frac{1}{2}a^2(a - c)$$

O que prova que $\alpha\ e\ \beta$ são raízes de $x^2 = \frac{1}{2}a(c - a)$, de onde com $c = \sqrt{2}a$ e $b^2 = x^2 + a^2$:

$$x = a\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}, b = a\sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}}$$

Enfim,

$$r = \frac{a + x - b}{2} = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}}\right)$$

Podemos simplificar utilizando $z = \sqrt{2} + 1$

$$\frac{2r}{a} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2-1} - \sqrt{z}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-z}{\sqrt{z}}\right) = 1 + \frac{1-z}{\sqrt{2}\sqrt{z}} = 1 + \frac{1-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} = 1 - \sqrt{\sqrt{2}-1}$$

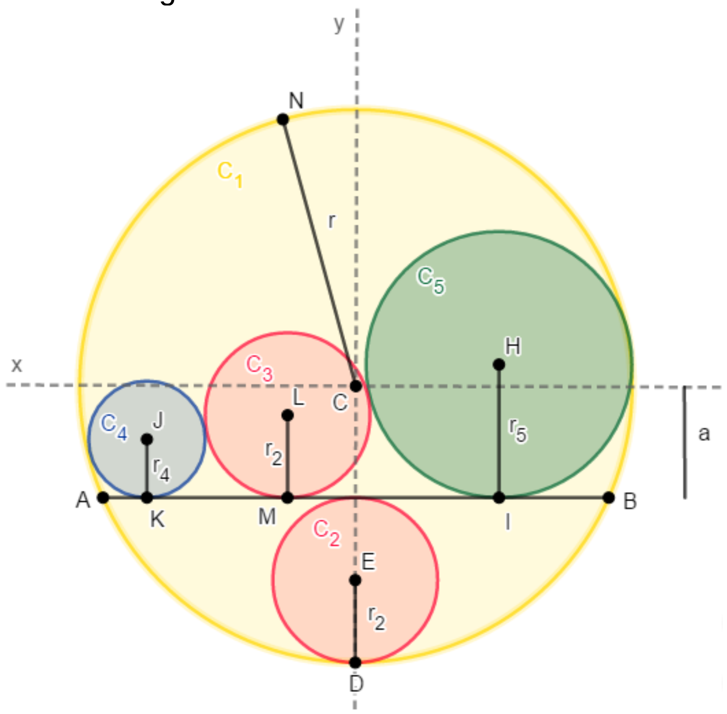
Portanto

$$\frac{r}{a} = \frac{1-\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$$

2.5.2.12. Três círculos tangentes dois a dois:

História do sangaku: Esse problema foi construído em 1888 e se encontra em uma tábua da Prefeitura de Fukushima. O mesmo problema, contudo, é discutido numa obra de Sanpo Jyojutu em 1841.

Figura 38 - Três círculos tangentes dois a dois



Fonte: Elaborada pela autora.

O problema: Seja C_1 um círculo de raio r e $\overline{AB}$ uma corda de C_1. Seja o círculo C_2, de raio r_2, tangente à C_1 e à $\overline{AB}$ e centrado sobre o diâmetro de C_1.

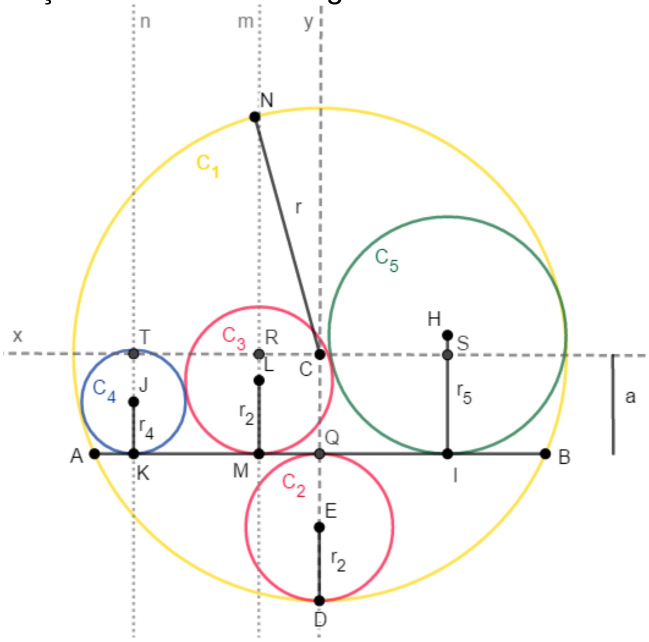
Construímos no interior de C_1 três círculos tangentes dois a dois como indicado na figura acima. O círculo C_3, tendo mesmo raio que C_2, é tangente à $\overline{AB}$, os dois outros sendo tangentes exteriormente à C_3 e interiormente à C_1. Prove que a seguinte relação é válida:

$$r = r_2 + r_4 + r_5$$

Solução: Vamos utilizar o centro de C_1 como origem e $y = -a$, onde $a > 0$, como a equação da corda $\overline{AB}$. As coordenadas do centro do círculo C_2 são $E: (0, -a - r_2)$. Tendo em conta as condições de tangência:

$$r = a + 2r_2$$

Figura 39 - Demonstração três círculos tangentes dois a dois



Fonte: Elaborada pela autora.

Sejam $\overline{JK}, \overline{LM}$ e $\overline{HI}$, respectivamente, os raios de C_4, C_3 e C_5 perpendiculares a corda $\overline{AB}$. Denota-se por L o centro do círculo C_3 de coordenadas $L = (-\overline{RC};\ -\overline{LR})$. Vamos procurar os círculos tangentes à C_3 e à C_1.

Olhando para C_5 temos que H é o centro de coordenadas $H = (\overline{CS};\ -a + r_5)$. As condições de tangência à C_3 e à C_1 se escrevem respectivamente:

$$(r_5 + r_2)^2 = (r_5 - r_2)^2 + (\overline{RS})^2$$

$$(r - r_5)^2 = (r_5 - a)^2 + (\overline{RS} - \overline{RC})^2$$

A primeira equação fornece:

$$(\overline{RS})^2 = 4r_2r_5$$

A segunda equação fornece, com $r - a = 2r_2$,

$$(\overline{RS} - \overline{RC})^2 = r^2 - 2rr_5 + r_5^2 - r_5^2 + 2ar_5 - a^2 = r^2 - a^2 - 2r_5(r - a)$$

$$(\overline{RS} - \overline{RC})^2 = r^2 - a^2 - 4r_2r_5 = r^2 - a^2 - (\overline{RS})^2$$

Vamos denotar $\overline{RS} = d$ e $\overline{RC} = e$. Organizando os termos, temos uma equação de segundo grau em d:

$$d^2 - 2de + e^2 - r^2 + a^2 + d^2 = 0$$

$$2d^2 - 2ed + (e^2 - r^2 + a^2) = 0$$

$$d^2 - ed + \frac{1}{2}(e^2 - r^2 + a^2) = 0$$

Que tem como discriminante

$$\Delta = (-e)^2 - 4(1)\left(\frac{1}{2}(e^2 + a^2 - r^2)\right) = e^2 - 2e^2 - 2a^2 + 2r^2 = 2(r^2 - a^2) - e^2$$

Logo as duas soluções dão dois círculos como solução e assim r_4 e r_5 são tais que $r_4 = \frac{u^2}{4r_2}$ e $r_5 = \frac{v^2}{4r_2}$, onde u e v são as soluções da equação de segundo grau.

Vamos calcular então a soma dos quadrados das soluções desta equação. Utilizando as relações de soma e produto de Girard na equação de segundo grau, temos que

$$u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv$$

Logo

$$u^2 + v^2 = (e)^2 - 2\left(\frac{1}{2}(e^2 - r^2 + a^2)\right) = r^2 - a^2$$

O que resulta, com $r - a = 2r_2$ e $r + a = 2r - 2r_2$:

$$r_4 + r_5 = \frac{u^2 + v^2}{4r_2} = \frac{r^2 - a^2}{4r_2} = \frac{(r + a)(r - a)}{4r_2} = \frac{2(r - r_2)(2r_2)}{4r_2} = r - r_2$$

E, portanto,

$$r = r_2 + r_4 + r_5$$

3. METODOLOGIA

Esse capítulo está dividido em quatro partes: a justificativa e a descrição da pesquisa, a apresentação do problema que a norteia, o seu objetivo geral e os seus objetivos específicos.

3.1. A PESQUISA

Este trabalho surgiu da vontade de mostrar uma “nova matemática” aos alunos do ensino fundamental, criar novos vínculos com o conhecimento já adquirido e motivá-los a seguir estudando. Outro ponto importante para a escolha do tema foi a vontade de despertar nos estudantes o interesse pela disciplina de matemática e pela sua história.

A pesquisa consistiu num estudo bibliográfico com base em livros, artigos e dissertações. Foram utilizados como referências os trabalhos acadêmicos de George da Costa Euzébio, Eduardo Casagrande Stabel, Nathercia Rodrigues, Marisa da Costa Cardoso Oliveira, Everton Franco de Oliveira, Thaynara Keiko Oda Santos e Jill Vicent e Claire Vicent; a legislação brasileira dos Parâmetros Curriculares Nacionais e da Base Nacional Comum Curricular; os dados obtidos no Sistema de Avaliação da Educação Básica, no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, na Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios e no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica; e os livros de Godfrey Harold Hardy, Edward Maitland Wright, Tom Mike Apostol, Jaime Bruck Ripoll, Cydara Cavedon Ripoll, José Francisco Porto da Silveira, Géry Huvent, Fukugawa Hidetoshi e Tony Rothman. E o projeto seguiu nas seguintes etapas: Escolha dos conteúdos que seriam trabalhados na pesquisa; Leitura da legislação brasileira que amparasse o desenvolvimento da sequência didática com foco no ensino fundamental e médio; Análise sobre os conceitos que seriam abordados nessa sequência didática e como isso seria desenvolvido com os alunos; Criação da sequência didática na forma de um livro paradidático; e a Criação do questionário para avaliação da oficina.

3.2. PROBLEMA DA PESQUISA

Como articular as sequências de Farey, os círculos de Ford e os Sangakus em uma proposta didática para a Educação Básica?

3.3. OBJETIVO GERAL

Elaborar uma sequência de atividades para ser utilizada por alunos e professores da Educação Básica que contemple uma nova perspectiva sobre o conteúdo de frações e de geometria plana, relacionando esses conteúdos entre si e apresentando novos conceitos que utilizam essas relações, como as Sequências de Farey, os Círculos de Ford e os Sangakus.

3.4. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar os conteúdos e a forma que eles poderiam ser abordados em uma sequência didática;
- Criar uma sequência de atividades na forma de um livro paradidático que revisa os pré-requisitos, ensina os novos conceitos, cria conexões entre eles e os conecta com suas histórias;
- Criar um questionário para determinar as opiniões e avaliações dos estudantes sobre a sequência didática.

4. A PROPOSTA DE ENSINO

Nesse capítulo será descrita a proposta de ensino desenvolvida a partir dos estudos realizados. Essa atividade foi elaborada para ser aplicada aos alunos a partir do 9º ano do ensino fundamental e conta com uma sequência didática intitulada "Algumas conexões entre as frações e a geometria". Essa proposta pode ser aplicada no turno regular dos alunos ou no turno inverso, como uma oficina, com 28 estudantes e segue a seguinte distribuição:

Cronograma da sequência de atividades	
Aula 1	Revisão de frações
Aula 2	Sequências de Farey
Aula 3	Círculos de Ford
Aula 4	Construções no GeoGebra
Aula 5	Sangakus: História e exemplos
Aula 6	Sangakus: Problemas e construções

A sequência de atividades proposta nessa pesquisa deu origem a um livro paradidático com o mesmo título e que conta com o planejamento de cada aula, o conteúdo detalhado para que o professor tenha base para aplicar essa atividade e sugestões sobre o desenvolvimento em sala de aula.

4.1. PLANEJAMENTO – AULA 1

• Tema:	Frações.
• Objetivos:	Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros; Identificar e obter frações equivalentes a uma fração dada; Comparar e ordenar frações em diferentes contextos e associá-las a pontos da reta numérica.
• Conteúdos:	Números racionais na forma fracionária: leitura, representação e significados de frações; Frações equivalentes;

	Simplificação de frações; Comparação de frações.
• BNCC:	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. (EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. (EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
• Duração:	4 períodos de 45 min
• Recursos didáticos:	Material impresso com os conteúdos; Lista de exercícios; Quadro.

- Desenvolvimento:

Sugestão: Inicie a primeira atividade com a apresentação da ordem das aulas, dos objetivos a serem alcançados e comente sobre o questionário que será aplicado na turma para avaliação da proposta.

Escreva no quadro a seguinte pergunta: “Qual das frações é maior: $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{5}$?” e questione os alunos se eles lembram desse conteúdo.

É importante relembrar os estudantes do conteúdo de frações, pois ele será necessário para as próximas atividades. Você pode escolher mais algumas perguntas e os alunos devem escolher uma das opções e justificar suas respostas.

Após essa primeira discussão, entregue o material impresso 1 com os conteúdos que serão trabalhados na aula e revise a definição de fração, a diferença de frações próprias e impróprias, o que são frações equivalentes, como simplificar uma fração e como ordenar as frações.

Desafie os alunos a resolverem o problema inicial escrito no quadro e entregue a lista de exercícios para fixação do conteúdo.

4.2. PLANEJAMENTO – AULA 2

• Tema:	Sequências de Farey.
• Objetivos:	Conhecer as sequências de Farey e algumas de suas propriedades; Construir algumas sequências de Farey a partir de suas definições.
• Conteúdos:	Sequências de Farey
• BNCC:	(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. (EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
• Duração:	4 períodos de 45 min
• Recursos didáticos:	Material impresso com os conteúdos; Quadro.

• Desenvolvimento:

Você pode começar a aula escrevendo no quadro $F_1, F_2 \; e \; F_3$ e perguntando aos alunos se “alguém sabe o que é uma sequência de Farey?” e se “É possível ver algum padrão ou alguma relação entre as sequências escritas no quadro?”.

De acordo com as respostas, você pode chamar a atenção para o fato de que as sequências de Farey sempre utilizam a sequência anterior, que a fração $\frac{1}{2}$ é o termo central em todas elas, que a soma dos termos equidistantes de $\frac{1}{2}$ possuem o mesmo denominador e a soma deles é igual a 1.

Após esse momento, entregue o material da aula 2 e convide os estudantes a construir a sequência de Farey de ordem 4.

Sugestão: defina o que é uma fração mediante, calcule todas as frações mediantes de F_3 e relembre que só serão utilizadas as frações que possuem o denominador menor ou igual a 4.

Determine um tempo para que os alunos construam, em duplas, $F_5, F_6\ e\ F_7$ e, ao final desse tempo, compare e discuta as respostas obtidas com os alunos.

4.3. PLANEJAMENTO – AULA 3

• Tema:	Círculos de Ford.
• Objetivos:	Conhecer os círculos de Ford e algumas de suas propriedades; Construir alguns círculos de Ford a partir de suas definições.
• Conteúdos:	Círculos de Ford
• BNCC:	(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica. (EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
• Duração:	4 períodos de 45 min
• Recursos didáticos:	Material impresso com os conteúdos; Folha quadriculada; Quadro.

- Desenvolvimento:

Você pode começar essa aula perguntando aos estudantes se alguém sabe o que é um círculo de Ford.

Após esse primeiro momento de discussões, entregue aos alunos o material impresso 3, explique o que é um círculo de Ford e construa no quadro os círculos $C(0,1)$, $C(1,1)$ e $C(1,2)$. Não esqueça de relacionar os círculos construídos com a sequência de Farey de ordem dois.

Convide os estudantes a construírem os seguintes círculos de Ford em uma folha quadriculada: $C(3,4), C(2,5), C(1,3)$ e $C(2,3)$.

Após as construções, você pode construir no quadro, no mesmo eixo, todos os círculos de Ford obtidos na aula e perguntar aos alunos se existe alguma relação entre as frações de Farey e os círculos de Ford.

A partir das respostas dos alunos, você pode ressaltar que os círculos de Ford são tangentes ou não se interceptam em nenhum ponto e, que particularmente, os círculos que correspondem às frações consecutivas em F_n são tangentes entre si.

4.4. PLANEJAMENTO – AULA 4

• Tema:	Construções no GeoGebra.
• Objetivos:	Apresentar aos alunos um software de construções geométricas; Construir os círculos de Ford relacionados as Sequências de Farey de forma mais fácil e mais visível; Comparar as construções no papel e no software.
• Conteúdos:	Geometria.
• BNCC:	(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
• Duração:	4 períodos de 45 min
• Recursos didáticos:	Material impresso com os conteúdos; Tablets ou computadores que possuam o software GeoGebra.

- Desenvolvimento:

Sugestão: Inicie a aula questionando os alunos sobre a facilidade de construir os círculos de Ford nas folhas quadriculadas e se suas construções possuem erros.

Encaminhe os alunos para o ambiente que ofereça acesso aos tablets ou aos computadores da escola e separe os estudantes de acordo com os equipamentos.

Peça que os alunos abram o software GeoGebra e entregue o material impresso 4. Você pode apresentar a barra de ferramentas e suas opções, a entrada de comandos e o teclado virtual.

Após essa apresentação dê aos alunos um tempo para explorar o software e testar algumas construções.

Sugestão: Você pode sugerir algumas figuras ou imagens a serem criadas pelos alunos, como retas paralelas, polígonos regulares, etc.

Depois desse momento livre, convide os estudantes a construírem os círculos de Ford relacionados as sequências de Farey no GeoGebra e, por fim, pergunte aos alunos se as construções da aula passada foram mais simples ou mais complexas e se o software ajuda nas construções e análises.

4.5. PLANEJAMENTO – AULA 5

• Tema:	Sangakus
• Objetivos:	Conhecer os Sangakus e sua história; Relacionar a história do Japão com a história da matemática japonesa; Solucionar alguns Sangakus.
• Conteúdos:	Sangakus.
• Duração:	4 períodos de 45 min
• Recursos didáticos:	Material impresso com os conteúdos; Quadro.

- Desenvolvimento:

Inicie a aula perguntando aos estudantes se alguns deles já ouviu falar em Sangakus e entregue o material impresso 5.

Disponibilize um tempo para a leitura do texto e, após esse momento, questione o que os alunos entenderam do texto e quais os pontos chamaram mais a atenção deles.

Sugestão: Chame a atenção para o fato que o Japão ficou 200 anos sem interferência do exterior, que os japoneses ficaram sem acesso à livros e a pesquisas que estavam sendo feitos em outros países e que a matemática japonesa, mesmo tendo chegado às mesmas conclusões, foi desenvolvida de uma forma diferente.

Depois desse momento de discussão, convide os alunos e resolva com eles o exemplo Wasan no quadro. É importante que você estimule os estudantes a pensar sem fórmulas prontas e que a construção seja conjunta.

Após a resolução do exemplo Wasan, dividida os estudantes em duplas e peça que eles resolvam os desafios 1 e 2 do material. O tempo para cada desafio deve ser decidido a partir da construção do exemplo, pois os estudantes precisarão de tempo para desenvolver seus raciocínios.

Ao final das resoluções dos desafios, você pode debater as resoluções, discutir as opiniões e as conclusões dos alunos.

4.6. PLANEJAMENTO – AULA 6

• Tema:	Sangakus
• Objetivos:	Resolver alguns Sangakus; Desenvolver desafios baseados nos conhecimentos adquiridos na oficina.
• Conteúdos:	Sangakus.

• Duração:	4 períodos de 45 min
• Recursos didáticos:	Material impresso com os conteúdos; Quadro; Cartolina.

- Desenvolvimento:

Inicie a aula relembrando os exemplos e desafios da aula passada e seus resultados. Após esse primeiro momento, divida os estudantes em grupos de 4 pessoas e entregue o material impresso.

Desafie os alunos a resolverem os problemas propostos nos grupos e determine um tempo para isso. **Sugestão:** 2 períodos.

Ao final das resoluções, debata as resoluções, as opiniões e as conclusões dos alunos.

Após esse momento, entregue a cada grupo uma cartolina e convide os grupos a criarem seu próprio Sangaku. Os alunos devem criar o problema na cartolina e entregar a resolução do enigma em uma folha A4 para você.

Ao final, as cartolinas devem ser penduradas na sala de aula ou na escola e os outros grupos e outras turmas devem ser incentivados a tentar resolver os sangakus criados.

Por fim, o professor deve entregar o questionário de avaliação da oficina aos alunos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A importância do ensino de matemática é inquestionável, pois seus conteúdos fazem parte de nosso dia-a-dia e estão presente em diversas áreas do conhecimento. Dessa forma, a fim de melhorar o ensino da disciplina, este trabalho foi construído com o objetivo de oferecer aos estudantes e professores uma nova perspectiva de conexões entre o estudo de frações e geometria plana, criar novos vínculos com o conhecimento já adquirido pelos alunos, motivá-los a seguir estudando e despertar o interesse pela disciplina de matemática e pela sua história.

Outro ponto importante da escolha do tema foi proporcionar aos professores do ensino básico novas formas de apresentar o mesmo conteúdo que já é trabalhado na escola, pois o principal objetivo do PROFMAT é oferecer aos professores aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência.

O projeto foi pensado visando a elaboração e a aplicação de uma sequência didática com os alunos do 9º ano do ensino fundamental e dos três anos do ensino médio, mas, devido à pandemia de COVID-19 que ocorreu no ano de desenvolvimento da pesquisa, as aulas presenciais foram proibidas e o projeto não pode ser aplicado na escola.

As atividades disponibilizadas neste trabalho e todo o material de apoio criado pela autora podem ser aplicados tanto em uma oficina no turno inverso, quanto na própria sala de aula. Também é possível que o projeto seja desenvolvido como um projeto interdisciplinar, visto que o trabalho envolve vários pontos que poderiam ser aprofundados, como a história da matemática e do Japão.

Como esta pesquisa não pôde ser aplicada, fica como sugestão para um próximo estudo a aplicação da sequência didática apresentada neste estudo. O desenvolvimento em outro momento deve fornecer dados sobre a importância do contexto dos conteúdos matemáticos para a aprendizagem e comprovar a necessidade de utilizar novos métodos de ensino na sala de aula.

Para finalizar esse trabalho, destaco que o estudo aqui concluído contribuiu significativamente na minha formação como professora de matemática no ensino básico. Dessa forma, ele também pode proporcionar uma base matemática adequada a outros professores, que não estejam cursando uma pós-graduação, mas que tenham o interesse e a motivação de proporcionar aulas mais significativas aos seus estudantes, buscando mostrar a beleza da matemática que fica esquecida quando só abordamos fórmulas e exercícios repetitivos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: Ministério da Educação, 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ensino Médio. Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática. Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **PISA 2018**. **RELATÓRIO BRASIL NO PISA 2018.** Brasília, DF: INEP/MEC, 2019. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf>. Acesso em 22/06/2020.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Relatório SAEB 2017**. Brasília: INEP, 2019. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/informacao-da-publicacao/-/asset_publisher/6JYIsGMAMkW1/document/id/6730262>. Acesso em: 20/04/2021.

EUZÉBIO, George da Costa. **O reticulado inteiro e algumas aplicações**. UFC, 2020. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/50517/3/2020_dis_gceuzebio.pdf1>. Acesso em: 20/08/2020.

FORD, Lester Randolph. **Fractions**. Disponível em: <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/ford.pdf>. Acesso em 23/08/2020 as 11:38.

FUKAGAWA, Hidetoshi; ROTHMAN, Tony. **Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry**. Princeton: Princeton University Press, 2008.

HUVENT, Géry. **Sangaku - Le mystère des énigmes géométriques japonaises.** Paris: Dunod, 2008.

MIYATA, Megumi. **Sangaku - A Geometria Sagrada.** UFMG, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/EABA-9R8FYM/1/monografia_megumi.pdf>. Acesso em: 20/06/2020.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Lester Randolph Ford.** Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ford/>. Acesso em 23/08/2020 as 11:52.

OLIVEIRA, Everton Franco de. **Sequencias De Farey e Circunferências De Ford.** USP, 2011. Disponível em: <https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxldmVydG9uZnJhbmNvbGl2ZWlyYXxneDo2ZDUxNzU1NDNkZjI4NDM1>. Acesso em 20/06/2020.

OLIVEIRA, Marisa da Costa C. **Florestas Racionais e Círculos Tangenciais.** FCUP, 2014. Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/78286/2/34265.pdf>. Acesso em 18/06/2020 as 15:24.

RODRIGUES, Nathercia Custodio. **Algumas questões sobre frações.** Mestrado profissional em matemática. Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2018/03/TCC_2018_Nathercia-Rodrigues.pdf>. Acesso em 18/06/2020 as 15:30.

SANTOS, Thaynara Keiko Oda. **Sangaku: A Matemática Sagrada.** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, 2018. Disponível em: <http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/167284/mod_resource/content/0/Thaynara%20Keiko%20Oda%20Santos.pdf>. Acesso em: 21/06/2020.

Sequencias de Farey – wikipedia <https://en.wikipedia.org/wiki/Farey_sequence> acesso em 15/08/2020 as 09:38.

STABEL, Eduardo Casagrande. **A fórmula de Hardy - Ramanujan-Rademacher das partições de um inteiro positivo**. UFRGS, 2007. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/10097/000595024.pdf?sequence=1&locale=en>. Acesso em 19/06/2020.

APÊNDICE A – MATERIAL IMPRESSO DA AULA 1

OFICINA: Algumas conexões entre as frações e a geometria

Aula 1 – Revisão de frações

O que é uma fração?

A fração é um <u>número</u> que pode representar:

Uma ou mais partes de algo que foi dividido em partes iguais	Ou	Uma divisão, em que o numerador equivale ao dividendo e o denominador equivale ao divisor

Como representar uma fração?

Uma fração é representada por dois números inteiros, sendo um o numerador e o outro o denominador.

$$\frac{a}{b}$$

onde a é o numerador (acima) e b é o denominador (embaixo).

Frações próprias e impróprias:

As frações que são compostas por <u>números positivos</u> podem ser classificadas de duas formas: próprias e impróprias.

Frações próprias são aquelas que possuem o numerador menor que o denominador. Exemplos:

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{7}\ e\ \frac{9}{100}$$

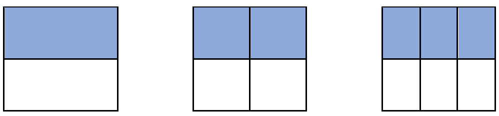
Frações impróprias possuem o numerador maior ou igual ao denominador. Exemplos:

$$\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\ e\ \frac{20}{5}$$

Frações equivalentes e simplificação:

Dizemos que duas ou mais frações são equivalentes quando elas representam a mesma quantidade. Exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$



Para encontrar frações equivalentes devemos multiplicar ou dividir o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural não nulo.

Exemplo:

$$\frac{2}{5} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{4}{10}, \quad \frac{21}{45} \underset{\div 3}{\overset{\div 3}{=}} \frac{7}{15}$$

- Quando a fração equivalente obtida possui os termos menores que a original, dizemos que a fração foi simplificada.
- Uma fração que não pode ser simplificada é chamada de fração irredutível.

Exemplo: Simplifique a fração $\frac{90}{120}$ até obter uma fração irredutível.

$$\frac{90}{120} \underset{\div 2}{\overset{\div 2}{=}} \frac{45}{60} \underset{\div 3}{\overset{\div 3}{=}} \frac{15}{20} \underset{\div 5}{\overset{\div 5}{=}} \frac{3}{4}$$

Logo a fração $\frac{3}{4}$ é irredutível e equivalente à $\frac{90}{120}$.

Comparação de frações:

Para comparar duas frações podemos utilizar duas frações equivalentes a elas que possuam o mesmo denominador.

Exemplo: Compare as frações $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{8}$.

Utilizando as frações equivalentes podemos encontrar duas frações que possuam o mesmo denominador. Nesse caso, temos que

$$\frac{5}{7} = \frac{40}{56} \quad e \quad \frac{3}{8} = \frac{21}{56}$$

Como $40 > 21$, podemos afirmar que

$$\frac{40}{56} > \frac{21}{56}$$

Ou seja,

$$\frac{5}{7} > \frac{3}{8}$$

APENDICE B – LISTA DE EXERCÍCIOS DA AULA 1

OFICINA: Algumas conexões entre as frações e a geometria

Aula 1 – Lista de exercícios

1. Complete as frações, de modo que os pares de frações sejam equivalentes.

a. $\frac{1}{3} = \frac{x}{18}$

b. $\frac{x}{4} = \frac{45}{36}$

c. $\frac{2}{5} = \frac{16}{x}$

d. $\frac{28}{x} = \frac{7}{8}$

e. $\frac{1}{4} = \frac{x}{24}$

f. $\frac{x}{24} = \frac{3}{8}$

2. Simplifique as frações até torná-las irredutíveis:

a. $\frac{45}{60}$

b. $\frac{21}{49}$

c. $\frac{56}{80}$

d. $\frac{20}{120}$

3. Complete com <, = ou >.

a. $\frac{3}{17}$ _____ $\frac{5}{17}$

b. $\frac{1}{7}$ _____ $\frac{1}{12}$

c. $\frac{7}{12}$ _____ $\frac{21}{36}$

d. $\frac{3}{8}$ _____ $\frac{7}{24}$

e. $\frac{4}{10}$ _____ $\frac{4}{100}$

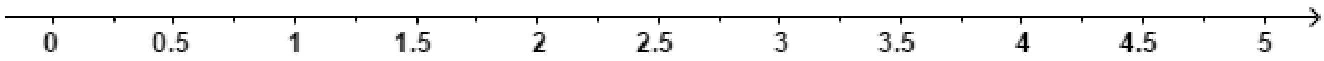
f. $\frac{23}{24}$ _____ $\frac{5}{4}$

g. $\frac{2}{5}$ _____ $\frac{7}{8}$

4. Ordene as frações do quadro a seguir em ordem crescente.

$\frac{2}{3}, \frac{11}{12}, \frac{2}{9}, \frac{9}{6}, \frac{6}{2}, \frac{15}{4}, \frac{12}{5}, \frac{1}{15}$

5. Marque as frações do <u>exercício 4</u> na reta numérica abaixo.



6. Em uma sala de aula, $\frac{2}{3}$ dos alunos jogam futebol e $\frac{3}{7}$ jogam vôlei. Qual esporte é mais praticado pelos alunos dessa turma: futebol ou vôlei?

7. Bianca, Camila e Denise estudam na mesma escola.

- Bianca estuda $\frac{1}{4}$ do dia.
- Camila estuda $\frac{4}{16}$ do dia.
- Denise estuda $\frac{12}{48}$ do dia.

a. Quem estuda mais?

b. Quantas horas cada uma estuda?

8. Uma pesquisa feita em uma cidade revelou que:

a. 8 em cada 10 habitantes possuem tv em casa;

b. 5 em cada 20 habitantes possuem telefone fixo;

c. 13 em cada 15 habitantes possuem rádio.

Nessa cidade, há mais televisores, telefones ou rádios?

APÊNDICE C – MATERIAL IMPRESSO DA AULA 2

OFICINA: Algumas conexões entre as frações e a geometria

Aula 2 – Sequências de Farey

O que é uma sequência de Farey?

Chamamos de sequência de Farey de ordem n, denotada por F_n, a sequência das frações irredutíveis no intervalo $[0;\ 1]$, com denominadores menores ou iguais a n e ordenadas na ordem crescente.

Exemplos:

$\boldsymbol{F_n}$	**Termos**												
F_1	$\frac{0}{1}$												$\frac{1}{1}$
F_2	$\frac{0}{1}$						$\frac{1}{2}$						$\frac{1}{1}$
F_3	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$				$\frac{1}{1}$
F_4	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$			$\frac{1}{1}$
F_5	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$		$\frac{1}{1}$
F_6	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{1}$

Construção de uma sequência de Farey:

Para construir uma sequência de Farey devemos utilizar a definição de fração mediante e a sequência anterior.

Definição de fração mediante: Dadas duas frações irredutíveis, $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com $a, b, c, d\ \geq\ 0$, chamaremos $\frac{a+c}{b+d}$ de fração mediante de $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.

Exemplo: Vamos construir a sequência de Farey de ordem 4.

Para isso devemos encontrar as frações mediantes de F_3 e também utilizar seus termos.

Como os termos de F_3 são $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$, temos que as frações mediantes serão:

$\frac{0}{1} < \frac{0+1}{1+3} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} < \frac{1+2}{2+3} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} < \frac{2}{3}$
$\frac{1}{3} < \frac{1+1}{3+2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} < \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3} < \frac{2+1}{3+1} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} < \frac{1}{1}$

Mas os termos de F_4 devem possuir denominador menor ou igual a 4, então as frações $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{5}$ não serão consideradas.

Portanto

$$F_4 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}$$

APÊNDICE D – MATERIAL IMPRESSO DA AULA 3

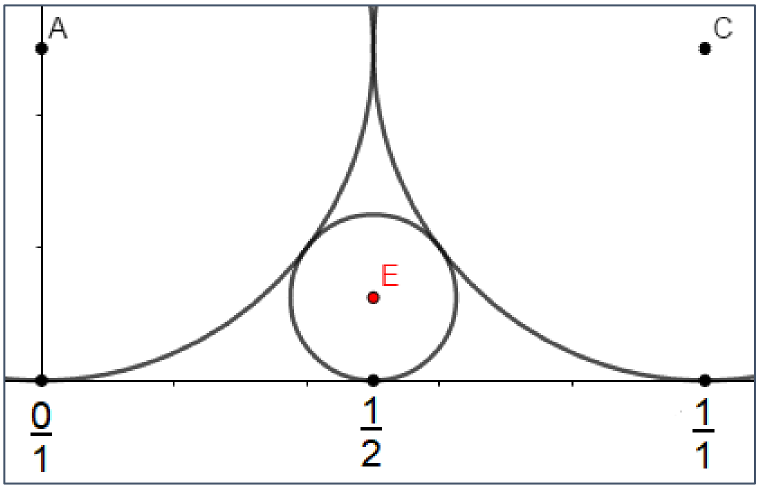
OFICINA: Algumas conexões entre as frações e a geometria

Aula 3 – Círculos de Ford

O que é um círculo de Ford?

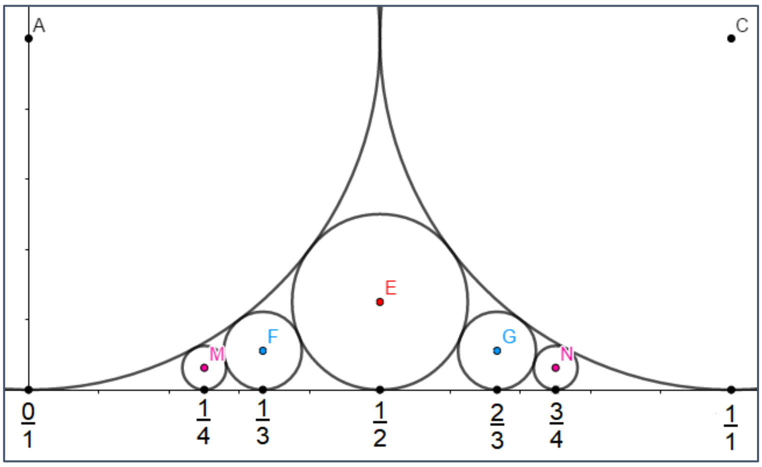
Seja $\frac{h}{k}$ um número racional irredutível. Denomina-se o círculo de Ford correspondente a esta fração, denotado por $C\ (h, k)$, o círculo de raio $\frac{1}{2k^2}$ cujo centro está no ponto $\left(\frac{h}{k}, \frac{1}{2k^2}\right)$.

Exemplo:



Como as frações de Farey são frações irredutíveis, podemos construir os círculos de Ford relacionados a elas:

Exemplo: Círculos de Ford relacionados à F_4.



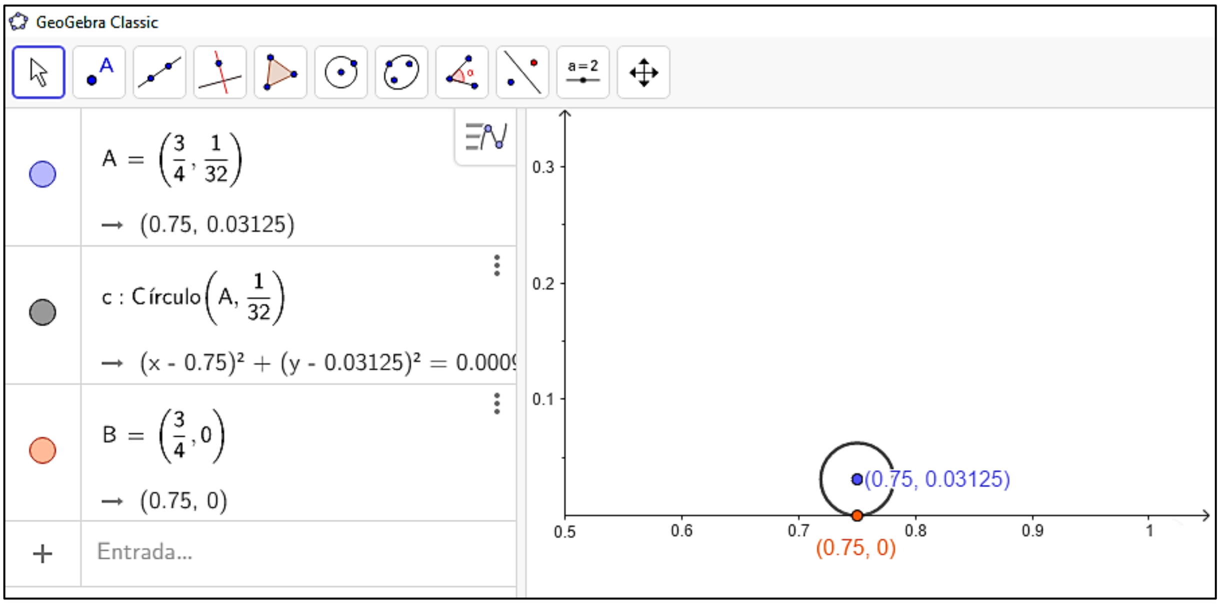
Construção de um círculo de Ford:

Para construir um círculo de Ford devemos olhar para a fração irredutível, $\frac{h}{k}$, a qual ele está relacionado, pois o centro do círculo será no ponto $\left(\frac{h}{k}, \frac{1}{2k^2}\right)$ e o seu raio será $\frac{1}{2k^2}$.

Exemplo: Construir o círculo de Ford relacionado à fração $\frac{3}{4}$.

Observando a fração $\frac{3}{4}$, podemos determinar que o centro do círculo de Ford relacionado a essa fração estará no ponto $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2\cdot(4)^2}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{32}\right)$ e seu raio será $\frac{1}{2\cdot(4)^2} = \frac{1}{32}$.

Portanto, para construir esse círculo de Ford, basta marcar esse centro e determinar todos os pontos que tem distancia igual a $\frac{1}{32}$ do centro.



APÊNDICE E – MATERIAL IMPRESSO DA AULA 4

OFICINA: Algumas conexões entre as frações e a geometria

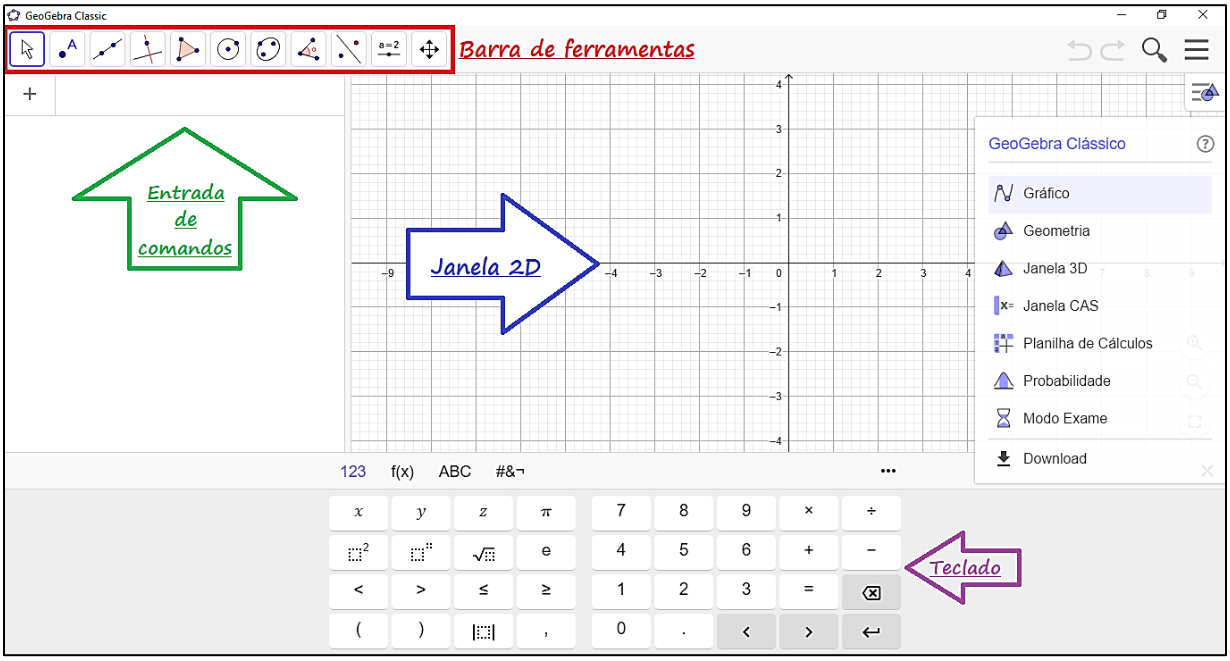
Aula 4 – Construções no GeoGebra

O que é o GeoGebra?

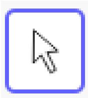
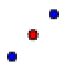
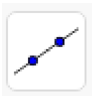
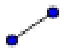
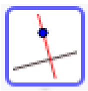
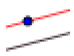
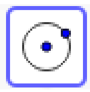
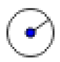
O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único lugar.

MINI TUTORIAL

Tela inicial do GeoGebra: Ao inicializar o GeoGebra abre-se uma janela, cuja a interface é composta por uma barra de ferramentas, a janela de álgebra com entrada de comandos, a janela de visualização 2D e o teclado virtual.



Barra de ferramentas: É onde se encontram as ferramentas que auxiliam na construção dos objetos matemáticos. Ela está dividida em 11 opções e cada uma destas opções possui várias ferramentas. Para visualizar estas ferramentas, basta clicar sobre o ícone, e então irão aparecer as opções referentes a estas janelas. Algumas destas ferramentas serão descritas a seguir.

Símbolo	Função
	Essa ferramenta é utilizada para arrastar e mover objetos livres. Ao selecionar um objeto, pode-se apagar o objeto pressionando a tecla Delete, ou então movê-lo usando o mouse ou as setas do teclado.
	Essa ferramenta é utilizada para criar um novo ponto. Basta selecionar esta ferramenta e em seguida clicar na janela de visualização.
	Com esta ferramenta pode-se obter o ponto médio entre dois pontos ou de um segmento. Para isso, basta selecionar a ferramenta, e em seguida clicar em dois pontos ou em um segmento para obter o respectivo ponto médio.
	Essa ferramenta é utilizada para criar uma reta que passa por dois pontos. Se os pontos já estiverem no gráfico, basta clicar sobre eles seguidamente. Se os pontos não estiverem, basta criá-los com a ferramenta em questão ativada.
	Essa ferramenta é utilizada para criar um segmento de reta que une dois pontos.
	Essa ferramenta é utilizada para construir uma reta perpendicular a uma reta, semirreta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Para se criar uma perpendicular, deve-se clicar sobre um ponto e sobre uma direção, que poderá ser definida por qualquer um dos objetos citados anteriormente.
	Utilizando esta ferramenta, pode-se construir uma reta paralela a uma reta, semirreta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono.
	Essa ferramenta é utilizada para construção de uma circunferência. Para construir, basta criar (ou selecionar) um ponto na janela de visualização, para definir o centro do círculo. Em seguida, finaliza-se a construção criando (ou selecionando) um segundo ponto, o qual ficará sobre a circunferência.
	Essa ferramenta é utilizada para construção de uma circunferência a partir do centro e do comprimento de raio definidos. Para isso, basta clicar no plano (ou em um ponto), para definir o centro da circunferência. Em seguida, aparecerá uma caixa de texto na tela, solicitando a medida do comprimento do raio. Digite o comprimento desejado e aperte Enter ou clique OK.

APÊNDICE F – MATERIAL IMPRESSO DA AULA 5

OFICINA: Algumas conexões entre as frações e a geometria

Aula 5 – Sangakus

O que é um sangaku?

Um Sangaku ou 算額 (tábua matemática) é um problema geométrico japonês feito em tábuas de madeira que era colocado como oferenda em santuários xintoístas ou templos budistas entre os séculos 17 e 19. Eles eram criados por membros de todas as classes sociais, como desafios para os congregantes ou como exibições das soluções para outras perguntas.

HISTÓRIA

O desenvolvimento dos sangakus está relacionado diretamente com a história do Japão, pois eles surgiram no período Edo ou Tokugawa (1603-1868) que foi marcado principalmente pelo isolamento do país do mundo ocidental em 1639.

Em 1603, Tokugawa Ieyasu emergiu como o líder do Japão e deu-se início a uma dinastia de xoguns Tokugawa, que durou 265 anos. Nesse período, para conter a difusão do cristianismo, o Japão ordenou que todos os missionários cristãos deixassem o país, que locais de culto cristãos fossem demolidos e que a prática do cristianismo fosse proibida. Além disso, foi proibido o envio de navios japoneses para o exterior e os japoneses foram proibidos de viajar para o exterior, sob pena de morte. De acordo com algumas estimativas, trezentos mil convertidos ao cristianismo haviam abandonado a religião ou foram executados.

Os japoneses, totalmente desconfiados, impuseram severas restrições ao comercio com os ocidentais. A partir de 1641, só era permitida a presença dos holandeses e esses foram forçados a se mudar para uma pequena ilha feita pelo homem chamada Deshima no porto de Nagasaki, que era totalmente isolada do continente, exceto por um cano de bambu e uma única ponte sempre fiscalizada. Isso constituiu o comércio do Japão com o Ocidente durante 200 anos e assim começou a política do que viria a ser conhecido como sakoku, "país fechado".

Durante o sakoku, a política teve tanto sucesso na eliminação de conflitos estrangeiros que os 250 anos do período Edo ficaram conhecidos como a "Grande Paz". Além disso, essa estabilidade ocasionou um florescimento na cultura japonesa e muitas das artes para o qual o Japão é renomado (dança Noh, peças de teatro Kabuki e de fantoches, cerimonias do chá e a arquitetura de jardim) alcançaram suas maiores realizações. Foi nesse período também que foram publicados o maior número de textos matemáticos japoneses tradicionais, os teoremas mais interessantes foram provados e a maioria dos problemas de sangaku criados.

O costume de pendurar tabuinhas em santuários e templos era bastante natural e, por séculos antes de o sangaku existir, os adeptos levavam presentes aos santuários locais. Isso ocorria porque o xintoísmo, religião nativa do país, é composto por "oitocentas miríades de deuses", os kami, e eles amavam cavalos, logo um adorador que não podia oferecer um animal vivo poderia apresentar uma imagem desenhada em um pedaço de madeira.

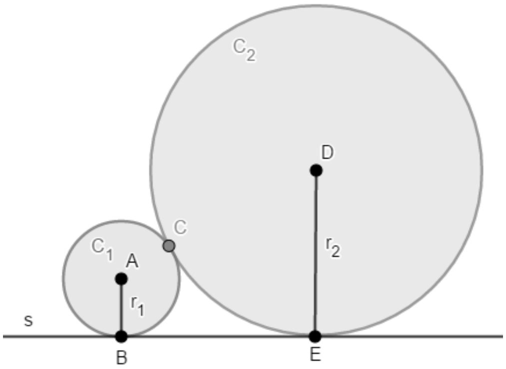
Não sabemos em que ano a tradição dos sangakus começou, mas a tábua mais antiga sobrevivente foi encontrada na prefeitura de Tochigi e data de 1683. Nos dois séculos seguintes, os sangakus apareceram em dois terços dos santuários xintoístas e um terço nos templos budistas em todo o Japão. Acredita-se que originalmente existiam milhares a mais do que as 900 tábuas existentes hoje. O sangaku mais recente foi descoberto no santuário de Ubara e data de 1870.

A maioria dos sangakus contém apenas a resposta final para um problema, raramente eles mostram uma solução detalhada. Eles eram inscritos em uma língua chamada Kanbun, que usava caracteres chineses e gramática essencialmente chinesa, mas incluía marcas diacríticas para indicar o significado japonês.

A pratica de pendurar os sangakus nos templos iniciou com as pessoas comuns que estudavam nos juku, pois elas não tinham dinheiro para publicar seus próprios livros, então adotaram o antigo costume de levar tábuas aos templos, fazendo uma oferenda religiosa e anunciando seus resultados. Os juku eram pequenas escolas particulares onde, no período Edo, pessoas de todas as idades e classes sociais participavam de aulas. Além disso, foi por causa dessas escolas e da educação fornecida por elas que as crianças do Japão tinham um nível de alfabetização alto em comparação com outros países da época.

Em 1868, quando a família Tokugawa perdeu o poder, o Japão foi aberto ao ocidente e o novo governo Meiji decidiu que, para que o Japão fosse um parceiro igual às nações estrangeiras, o país deveria se modernizar rapidamente. Por isso, escolas governamentais foram estabelecidas em todo o Japão e no Gakurei de 1872, ou "Código Fundamental de Educação", os líderes decretaram que apenas a matemática ocidental deveria ser ensinada. Com isso, a pratica dos sangakus desapareceu, mas alguns devotos continuaram a publicá-los até 1980, e os sangakus continuam a ser descobertos até hoje.

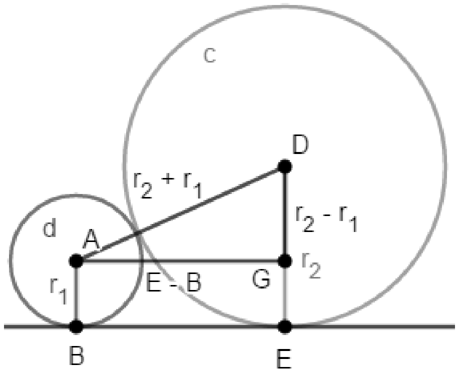
Exemplo: **Wasan**



O problema: Sejam C_1 e C_2 dois círculos de raios r_1 e r_2 que são tangentes entre si e tangentes a uma reta s, conforme a figura acima. Prove que a distância entre os pontos de tangência dos círculos com a reta s é igual a $2\sqrt{r_1 r_2}$, ou seja,

$$\overline{BE}^2 = 4r_1r_2$$

Solução: Para solucionar o problema, vamos utilizar o teorema de Pitágoras no triângulo formado pelos centros das circunferências, conforme a figura abaixo.



Portanto, temos que

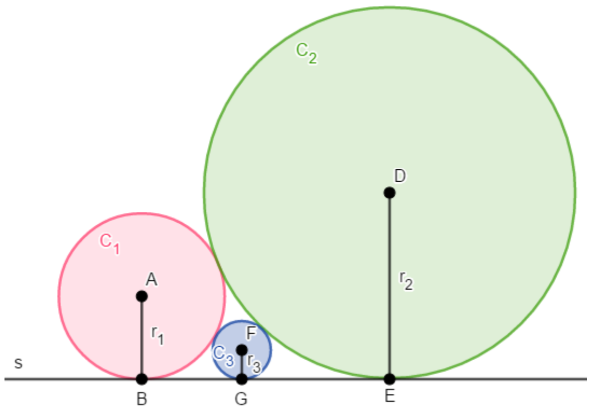
$$(r_1 + r_2)^2 = \overline{BE}^2 + (r_1 - r_2)^2$$

$$\overline{BE}^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2$$

$$\overline{BE}^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - r_1^2 + 2r_1r_2 - r_2^2 = 4r_1r_2$$

DESAFIOS:

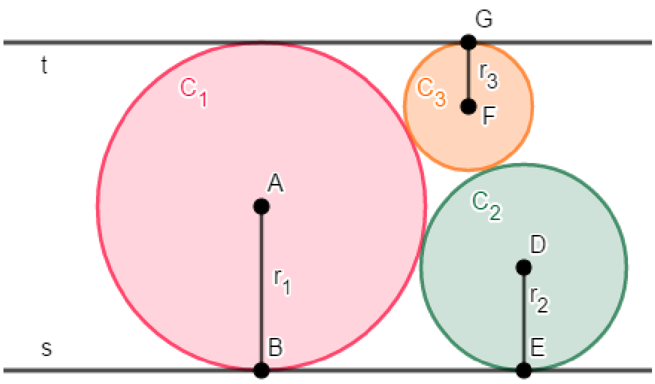
1) Os três círculos (1824):



O problema: Sejam três círculos C_1, C_2 e C_3 tangentes à uma reta s tais que C_1 e C_2 são tangentes entre si exteriormente e C_3 seja tangente à C_1 e a C_2. Queremos demonstrar que os raios r_1, r_2, e r_3 dos três círculos estão ligados pela relação:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

2) Os três círculos entre dois baguetes (1881):



O problema: Sejam s e t duas retas paralelas. Seja C_1 o círculo tangente à s e t, C_2 um círculo tangente à C_1 e à s e C_3 o círculo tangente à C_1, a C_2 e à t. Se r_i é o raio de C_i, demonstre a seguinte relação entre os raios:

$$r_1^2 = 4r_2r_3$$

APÊNDICE G – MATERIAL IMPRESSO DA AULA 6

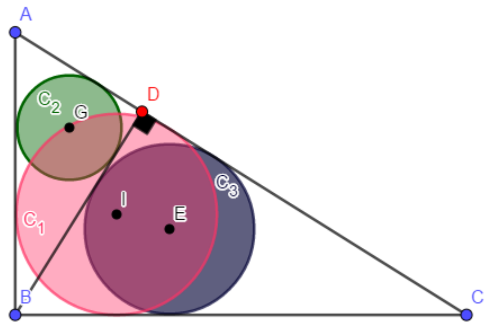
OFICINA: Algumas conexões entre as frações e a geometria

Aula 6 – Sangakus – parte II

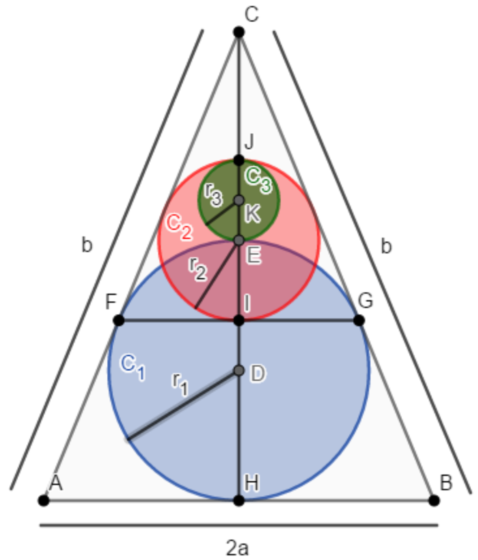
Problemas:

1) **Três círculos num triângulo retângulo:** Seja ABC um triângulo retângulo em B. Seja r_1 o raio do círculo inscrito em ABC e D o pé da altura traçada por B. Se $h = BD$ e r_2, r_3 denotam os raios dos círculos inscritos nos triângulos ABD e BCD respectivamente. Prove que:

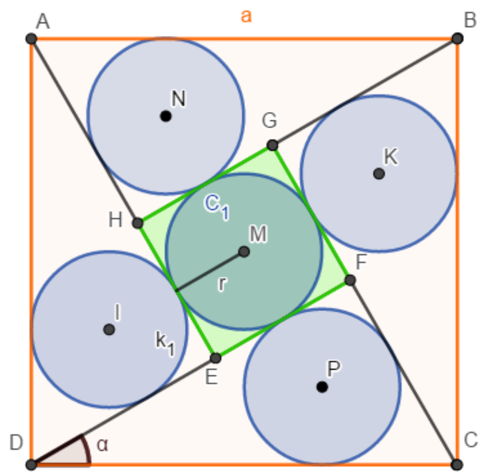
$$h = r_1 + r_2 + r_3$$



2) **Os três círculos num triângulo isósceles (1872):** Seja ABC um triângulo isósceles tal que $AC = CB = b$, o círculo inscrito C_1 toca os dois lados iguais em F e G. Sejam C_2 o círculo inscrito no triângulo FCG e C_3 o círculo tangente exteriormente à C_1, interiormente à C_2 e centrado sobre a altura traçada por C, como indicado na Figura. Calcule a razão dos raios $\frac{r_3}{r_2}$ dos círculos C_2 e C_3.

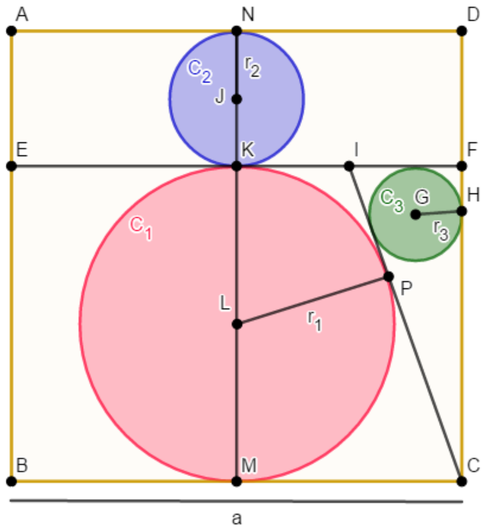


3) **Cinco círculos dentro de um quadrado (1811):** Existem cinco círculos de mesmo raio, inscritos dentro de um quadrado segundo a configuração descrita pela Figura acima. Qual é a razão $\frac{r}{a}$ entre o raio dos círculos e o lado do quadrado?



4) **O quadrado cortado em dois (1853):** Seja $ABCD$ um quadrado de lado de comprimento a, N o ponto médio do segmento AD e M o de BC. Seja F um ponto pertencente ao lado DC, a paralela à AD passando por F corta NM em K. Denotamos por r_1 e r_2 os raios dos círculos de diâmetro MK e KN. A tangente passando por C ao círculo de diâmetro MK corta FK em I. Se r_3 é o raio do círculo inscrito no triângulo retângulo CFI, prove que:

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$



QUESTIONÁRIO PARA AVALIAÇÃO

01. Você gosta de estudar Matemática? Por quê?

___

___

___

02. Durante sua vida escolar como foi o ensino da Matemática? As aulas seguiam o modelo tradicional de ensino ou houve inovações?

___

___

___

03. Você apresenta facilidade ou dificuldade em compreender os conteúdos de Matemática?

☐ Facilidade ☐ Dificuldade

04. Você gostou da oficina "Algumas conexões entre as frações e a geometria"? Por quê?

___

___

___

05. Os conteúdos da oficina foram de fácil compreensão?

☐ Sim ☐ Não

06. Você acha que aprender sobre a história do conteúdo ajuda em sua compreensão? Por quê?

___

___

___

07. Que sugestões ou críticas você apresentaria a essa oficina?

___

___

___