



Universidade Estadual do Piauí  
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação–PROP  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



# Interpolação Polinomial de Lagrange: Análise da Curva de Infectados e Óbitos pela COVID-19 no Piauí.

Whanderson Bruno Barbosa Madeira

Teresina  
2021

Whanderson Bruno Barbosa Madeira

Interpolação Polinomial de Lagrange: Análise da Curva de Infectados e Óbitos pela COVID-19 no Piauí.

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha

Teresina  
2021

M181i Madeira, Whanderson Bruno Barbosa.  
Interpolação polinomial de Lagrange: análise da curva de infectados e óbitos pela COVID-19 no Piauí / Whanderson Bruno Barbosa Madeira. – 2021.  
67 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2021.

“Orientador: Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha.”

1. Covid-19. 2. Interpolação Polinomial de Lagrange.  
3. Erro de aproximação. I. Título.

CDD: 512.1

**WHANDERSON BRUNO BARBOSA MADEIRA**

**INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL DE LAGRANGE: ANÁLISE  
DA CURVA DE INFECTADOS E ÓBITOS PELA COVID-19  
NO PIAUÍ**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em  
Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para  
obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de concentração: MATEMÁTICA

Aprovado por:

*Natã Firmino Santana Rocha*

Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha - Presidente e examinador  
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

*Pitágoras Pinheiro de Carvalho*

Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho - Examinador  
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

*Wilberclay Gonçalves Melo*

Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo - Examinador Externo  
Universidade Federal de Sergipe - UFS

*Jerson Leite Alves*

Prof. Me. Jerson Leite Alves - Examinador Externo  
Instituto Federal do Piauí - IFPI

TERESINA  
Agosto/2021

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Whanderson Bruno Barbosa Madeira** graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Piauí, concluiu Especialização em Ensino de Matemática pelo IFPI, curso de Mestrado PROFMAT/UESPI. É professor efetivo da rede pública estadual no Estado do Piauí e da rede pública municipal na cidade de União-PI.

# DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha mãe/vó Maria Eunice, minha esposa Mariane, a todos os familiares e amigos que me apoiaram e aos professores ao longo da minha vida.

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a DEUS, pois Ele guia minha vida mesmo quando às vezes eu não entendo, mas confio e tenho fé.

À todos os meus familiares, em especial, à minha mãe/vó Maria Eunice por ser a mulher guerreira que me criou, e que já passou por tantas provações na vida. Ao meu tio Emanuel e minha tia Claudeci pela criação e educação.

À minha esposa Mariane por ser paciente, forte, dedicada e sempre me apoiar e me incentivar tanto pessoalmente quanto profissionalmente.

Aos meus/minhas grandes amigos(as) de UFPI e de vida: Rui, Jerson, Jordan, Sandroel, Lucas, Kadu, Carlos Adriano, Atécio, Antônio, Edilson, Gilson, Aline, Jadiel, Vitaliano, por todos os ensinamentos, incentivos, ajudas, puxões de orelha e companheirismo.

Aos meus/minhas grandes amigos(as) Leonardo, Milton, Welton, Alisson, Gilvaneide, Anderson, Ricardo, Fabiano por nossa amizade, e ao colega André Bezerra.

Aos professores do PROFMAT/UESPI, por cada ensinamento tanto matemático quanto pessoal, especialmente, ao professor Afonso por ser um profissional tão inspirador.

Ao Meu orientador Natã Firmino Santana Rocha, que me direcionou com seus conhecimentos e sempre esteve disponível para me orientar com paciência.

À todos os amigos da turma do PROFMAT/UESPI, especialmente ao nosso grupo de estudo formado por Pedro, Samuel, Daniel, Carlos e Lopes.

**O cavalo prepara-se para o dia da  
batalha, mas do Senhor vem a vitória**

---

*Provérbios 21:31*

## RESUMO

O presente trabalho visa apresentar uma análise sobre a curva de infectados e óbitos pela Covid-19 no Piauí através do método de aproximação por interpolação polinomial, em específico, o método de Interpolação Polinomial de Lagrange, mediante uma perspectiva teórica e algébrica. Aliado a isso, numa visão geométrica, utilizamos o software livre Maxima, para visualizarmos os resultados da aplicação dos dados oficiais coletados, no referido conteúdo. Também calculamos o erro de aproximação na aplicação do método nos períodos analisados, e explanamos um pouco sobre o histórico da pandemia de Covid-19 de modo geral e em particular no Estado do Piauí. Para melhor fundamentação, o método de pesquisa empreendido nesse estudo segue natureza quantitativa analítica e revisão bibliográfica dos principais conteúdos relacionados a Polinômios e Equações Polinomiais, Polinômios de Interpolação, Fórmula de Lagrange e Erro na aplicação do método.

**Palavras-chave:** Covid-19; Interpolação Polinomial de Lagrange; Maxima; Erro de aproximação.

## ABSTRACT

The present work aims to present an analysis of the curve of infected and dead by Covid-19 in Piauí through the method of approximation by polynomial interpolation, in particular, the Lagrange Polynomial Interpolation method, through a theoretical and algebraic perspective. Allied to this, in a geometrical view, we used the Maxima free software to visualize the results of the application of the official data collected in the aforementioned content. We also calculated the approximation error in the application of the method in the periods analyzed, and explained a little about the history of the Covid-19 pandemic in general and in particular in the State of Piauí. For a better foundation, the research method used in this study follows a quantitative analytical nature and a literature review of the main contents related to Polynomials and Polynomial Equations, Interpolation Polynomials, Lagrange Formula and Error in the application of the method.

**Keywords:** Covid-19; Lagrange Polynomial Interpolation; Maxima; approximation error.

## Lista de Figuras

1	Infectados do dia 18/03/2020 a 24/09/2020 . . . . .	40
2	Infectados do dia 18/03/2020 a 24/09/2020 . . . . .	41
3	Infectados do dia 16/07/2020 a 13/12/2020 . . . . .	46
4	Infectados do dia 16/07/2020 a 13/12/2020 . . . . .	46
5	Infectados do dia 04/10/2020 a 18/03/2021 . . . . .	48
6	Infectados do dia 04/10/2020 a 18/03/2021 . . . . .	49
7	Infectados do dia 18/03/2020 a 18/03/2021 . . . . .	51
8	Infectados do dia 18/03/2020 a 18/03/2021 . . . . .	51
9	Óbitos do dia 18/03/2020 a 24/09/2020 . . . . .	54
10	Óbitos do dia 18/03/2020 a 24/09/2020 . . . . .	54
11	Óbitos do dia 04/10/2020 a 18/03/2021 . . . . .	57
12	Óbitos do dia 04/10/2020 a 18/03/2021 . . . . .	57
13	Óbitos do dia 16/07/2020 a 13/12/2021 . . . . .	60
14	Óbitos do dia 16/07/2020 a 13/12/2021 . . . . .	60
15	Óbitos do dia 18/03/2020 a 18/03/2021 . . . . .	63
16	Óbitos do dia 18/03/2020 a 18/03/2021 . . . . .	63

## Lista de Tabelas

1	MÉDIA MÓVEL DE INFECTADOS . . . . .	38
2	ERRO DE APROXIMAÇÃO DA MÉDIA MÓVEL DE INFECTADOS . .	44
3	MÉDIA MÓVEL DE INFECTADOS . . . . .	45
4	ERRO DE APROXIMAÇÃO DA MÉDIA MÓVEL DE INFECTADOS . .	47
5	MÉDIA MÓVEL DE INFECTADOS . . . . .	48
6	ERRO DE APROXIMAÇÃO DA MÉDIA MÓVEL DE INFECTADOS . .	50
7	MÉDIA MÓVEL DE INFECTADOS . . . . .	51
8	ERRO DE APROXIMAÇÃO DA MÉDIA MÓVEL DE INFECTADOS . .	52
9	MÉDIA MÓVEL DE ÓBITOS . . . . .	53
10	ERRO DE APROXIMAÇÃO DA MÉDIA MÓVEL DE ÓBITOS . . . . .	55
11	MÉDIA MÓVEL DE ÓBITOS . . . . .	56
12	ERRO DE APROXIMAÇÃO DA MÉDIA MÓVEL DE ÓBITOS . . . . .	58
13	MÉDIA MÓVEL DE ÓBITOS . . . . .	59
14	ERRO DE APROXIMAÇÃO DA MÉDIA MÓVEL DE ÓBITOS . . . . .	61
15	MÉDIA MÓVEL DE ÓBITOS . . . . .	62
16	ERRO DE APROXIMAÇÃO DA MÉDIA MÓVEL DE ÓBITOS . . . . .	64

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>10</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>11</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2 A Pandemia COVID-19</b>	<b>15</b>
2.1 A COVID-19 no Piauí . . . . .	17
<b>3 Referencial Teórico</b>	<b>19</b>
3.1 Polinômios e Equações Polinomiais . . . . .	19
3.2 Interpolação . . . . .	23
3.2.1 Polinômio de Interpolação . . . . .	24
3.2.2 Fórmula de Lagrange . . . . .	27
3.2.3 Erro na aplicação do método . . . . .	29
3.2.4 Fórmula de Lagrange para Pontos Igualmente Espaçados . . . . .	32
<b>4 Resultados e Discussões</b>	<b>36</b>
4.1 Análise dos casos de infectados . . . . .	37
4.1.1 Período entre 18 de Março de 2020 e 24 de Setembro de 2020 . . . . .	37
4.1.2 Período entre 16 de Julho de 2020 e 13 de Dezembro de 2020 . . . . .	44
4.1.3 Período entre 04 de Outubro de 2020 e 18 de Março de 2021 . . . . .	47
4.1.4 Período entre 18 de Março de 2020 e 18 de Março de 2021 . . . . .	50
4.2 Análise dos casos de óbitos . . . . .	53
4.2.1 Período entre 18 de Março de 2020 e 24 de Setembro de 2020 . . . . .	53
4.2.2 Período entre 04 de Outubro de 2020 e 18 de Março de 2021 . . . . .	56
4.2.3 Período entre 16 de Julho de 2020 e 13 de Dezembro de 2020 . . . . .	58
4.2.4 Período entre 18 de Março de 2020 e 18 de Março de 2021 . . . . .	61
<b>5 Conclusão</b>	<b>65</b>
<b>Referências</b>	<b>67</b>

# 1 Introdução

A atual situação na qual o mundo está enfrentando desde o final de 2019 para o começo de 2020 com o surgimento da pandemia do novo Coronavírus, tem despertado curiosidades em muitas pessoas à respeito do vírus, da doença e dos impactos que ela pode causar em escala global, seja na área social, econômica, pessoal e de saúde. Segundo a organização humanitária internacional Médicos Sem Fronteiras (MSF), o coronavírus é um novo vírus contagioso e ainda há muito a ser descoberto sobre ele. Os coronavírus são uma grande família de vírus que causam doenças que variam do resfriado comum a doenças mais graves, como a Síndrome Respiratória do Oriente Médio (MERS-CoV) e a Síndrome Respiratória Aguda Grave (SARS-CoV). O Covid-19 é a doença do coronavírus provocada pela nova cepa descoberta em 2019, que não havia sido identificada anteriormente em seres humanos.

Ao contrário daqueles que causam a gripe comum, não há pré-imunidade conhecida, vacina ou tratamento específico e presume-se que todas as pessoas sejam suscetíveis a ele. A sobrecarga dos sistemas de saúde vem se mostrando um dos maiores impactos da nova doença, mesmo em países com estruturas médicas robustas. Em países com estruturas fragilizadas por falta de investimento ou conflitos, como as regiões em que MSF atua, o peso sobre as equipes e instalações médicas pode ter resultados ainda mais devastadores. Não há nenhum tratamento específico com medicamentos antivirais para o coronavírus. O tratamento se baseia no alívio dos sintomas.

As principais recomendações para impedir a propagação do vírus incluem lavagem regular das mãos; cobrir boca e nariz com a parte interna do cotovelo ou com lenço descartável ao tossir e espirrar; e evitar contato próximo com pessoas que apresentem sintomas gripais. Sinais comuns da infecção incluem febre e tosse seca e, em menor proporção, sintomas respiratórios, dores no corpo e incômodo na garganta. Algumas pessoas são infectadas, mas não apresentam sintomas e não se sentem mal. Cerca de 80% se recuperam sem precisar de tratamento especial e 1 em cada 6 pessoas que contraem o coronavírus fica gravemente doente e desenvolve dificuldade em respirar. Pessoas idosas e que têm problemas crônicos, como pressão alta, problemas cardíacos ou diabetes, têm maior probabilidade de desenvolver a forma grave da doença. Pessoas com febre, tosse e dificuldade em respirar devem procurar orientação médica.

Nesse contexto, a ideia deste trabalho surgiu a partir da vontade de usarmos o conteúdo matemático de Interpolação Polinomial de Lagrange para que pudesse ser explorado com base nessa nova realidade, de modo que o mesmo também estivesse ao alcance da compreensão de alunos do ensino básico e professores. Para tanto, dividimos esse estudo em três capítulos: A Pandemia Covid-19, Referencial Teórico e Resultados e Discussões.

No primeiro capítulo explanamos um pouco sobre o histórico da pandemia de Covid-19 de modo geral e em particular no Estado do Piauí. Destacamos sobre o surgimento

dos coronavírus no mundo, principalmente do novo coronavírus, sobre sua disseminação, contágio e possíveis fases de contenção da pandemia. Ao fim desse primeiro momento foi descrito sobre a importância das ciências exatas com o uso de modelos matemáticos para ajudar no combate à pandemia a partir de estudos baseados em dados reais. Relatamos também a situação do Piauí com a criação do Centro de Operações de Emergências (COE) em Saúde Pública, do Plano de Contingência Coronavírus Piauí e de Decretos, além de um panorama do primeiro ano da pandemia em números.

No segundo capítulo, chamado Referencial Teórico, objetivamos apresentar algumas definições, proposições, lemas e teoremas que servirão de embasamento para este trabalho. Começamos por alguns conceitos importantes no tópico Polinômios e Equações Polinomiais, e logo depois passamos a falar um pouco sobre a Interpolação de um modo geral, para só então introduzirmos resultados importantes nos conteúdos de Polinômio de Interpolação, Fórmula de Lagrange, Erro na aplicação do método e por fim a Fórmula de Lagrange para pontos igualmente espaçados. O desenvolvimento deste capítulo serve para dar sustentação algébrica para realizar o estudo do próximo capítulo deste material.

O terceiro capítulo é destinado a apresentar uma aplicação do uso do método de Interpolação Polinomial de Lagrange com ênfase nos dados da pandemia de Covid-19, especificamente nos casos de infectados e óbitos no Estado do Piauí. Também calculamos o erro de aproximação na aplicação do método nos períodos analisados com o intuito de compararmos os resultados dos valores encontrados via Polinômio Interpolador com os valores oficiais, e a partir disso termos uma visualização gráfica, gerada através do software matemático Maxima, desses resultados e vermos a similaridade deles com o gráfico disponibilizado pela Secretaria de Estado da Saúde do Piauí - SESAPI.

Em face ao exposto, o estudo embasado nos conceitos que serão apresentados no presente trabalho, servirá de sustentação sólida para alcançarmos nosso objetivo que é apresentar um método de aproximação a uma função genérica, mesmo não dispondo de sua forma analítica, por meio de outras funções mais simples e, no caso desta revisão bibliográfica, por meio de pontos tabelados. Vale ressaltar que não buscaremos previsões para o desenvolvimento da Covid-19, e sim relacionar o estudo do Polinômio de Lagrange com os casos da pandemia.

## 2 A Pandemia COVID-19

Epidemias e Pandemias devem ser consideradas não como um tipo especial de doença, mas sim como parte de um complexo processo de distribuição de patologias no tempo e no espaço. Diversas classificações de doenças existem, sendo oficial a CID atualmente em sua décima primeira versão. As cartas de controle, empregadas pelo serviço de saúde, permitem uma aproximação à fase, endêmica ou epidêmica, em que se encontram especialmente doenças sujeitas a vigilância em todo o mundo, as quarentenáveis. (CARVALHEIRO, 2008, [8])

Ainda para Carvalho (2008, [8]), o conceito de surto deve ser encarado como um indício de concentração de episódios que merece estudo mais profundo. As mais importantes doenças transmissíveis no mundo em desenvolvimento são chamadas negligenciadas e merecem atenção especial das agências de fomento de pesquisa por não serem tidas como prioritárias pela indústria farmacêutica.

Para Prado (2020, [26]) a pandemia da COVID-19 pelo novo coronavírus (SARS-CoV-2) tem se apresentado como um dos maiores desafios sanitários em escala global deste século. Na metade do mês de abril, poucos meses depois do início da epidemia na China em fins de 2019, já haviam ocorrido mais de 2 milhões de casos e 120 mil mortes no mundo por COVID-19, e estão previstos ainda muitos casos e óbitos nos próximos meses. No Brasil, até então, tinham sido registrados cerca de 21 mil casos confirmados e 1.200 mortes pela COVID-19.

O ainda insuficiente conhecimento científico sobre o novo coronavírus, sua alta velocidade de disseminação e capacidade de provocar mortes em populações vulneráveis, geram incertezas sobre quais seriam as melhores estratégias a serem utilizadas para o enfrentamento da pandemia em diferentes partes do mundo. No Brasil, os desafios são ainda maiores, apesar de já se saber bastante sobre as características de transmissão da COVID-19 num contexto de grande desigualdade social, a maior parte da população vive em condições precárias de habitação e saneamento, sem acesso sistemático à água e em situação de aglomeração. (WERNECK, 2020, [31])

De acordo com Werneck (2020, [31]) a resposta à pandemia da COVID-19 poderia ser subdividida em quatro fases: contenção, mitigação, supressão e recuperação.

A primeira fase, de contenção, inicia antes do registro de casos em um país ou região. Envolve, principalmente, o rastreamento ativo dos passageiros vindos do exterior e seus contatantes, visando a evitar ou postergar a transmissão comunitária.

A segunda fase, de mitigação, inicia quando a transmissão sustentada da infecção já está instalada no país. O objetivo aqui é diminuir os níveis de transmissão da doença para os grupos com maior risco de apresentarem quadros clínicos graves, além, claro, do isolamento dos casos positivos identificados. Essas medidas, denominadas de “isolamento vertical”, são em geral acompanhadas de algum grau de redução do contato social. Em

geral começa com o cancelamento de grandes eventos, seguido paulatinamente por ações como a suspensão das atividades escolares, proibição de eventos menores, fechamento de teatros, cinemas e shoppings, recomendações para a redução da circulação de pessoas. É o que se convencionou chamar de “achatar a curva” da epidemia.

Uma fase de supressão pode ser necessária quando as medidas anteriores não conseguem ser efetivas, seja porque sua implementação não pode ser concretizada de forma adequada e imediata (p.ex.: insuficiência de testes diagnósticos necessários para identificar indivíduos infectantes logo no início da epidemia) ou porque a redução alcançada na transmissão é insuficiente para impedir o colapso na atenção à saúde. Na fase de supressão são implantadas medidas mais radicais de distanciamento social, de toda a população. Aqui o objetivo é adiar ao máximo a explosão do número de casos, por tempo suficiente até que a situação se estabilize no campo da assistência à saúde, procedimentos de testagem possam ser ampliados e, eventualmente, alguma nova ferramenta terapêutica ou preventiva eficaz (por exemplo: vacina) esteja disponível. Há controvérsias em relação a essas medidas de “isolamento horizontal”, particularmente no que concerne às suas repercussões econômicas, sociais e psicológicas em âmbito populacional.

Por fim, e não menos importante, é a fase de recuperação, quando há sinal consistente de involução da epidemia e o número de casos se torna residual. Essa última fase requer uma organização da sociedade para a reestruturação social e econômica do país. E, certamente, intervenção do Estado.

Em 31 de dezembro de 2019, na cidade de Wuhan, China, foi descoberto esse novo agente infeccioso o qual é responsável pela pandemia que assola o mundo. Segundo Macedo, Ornellas, Bonfim (2020 apud Araújo AAC et. al., 2020, [3]) “No Brasil, o primeiro caso da doença foi detectado em 26 de fevereiro de 2020 e tratava-se de um caso importado. Seguido a esse primeiro caso, cerca de 11 dias depois, foram confirmados 25 novos infectados”. A partir daí, a quantidade de casos de infectados e óbitos foi aumentando rapidamente até o país se tornar o epicentro mundial da doença, e hoje acumula cerca de meio milhão de óbitos e quase 17 milhões de casos acumulados, de acordo com o Ministério da Saúde.

Diferentemente de pandemias anteriormente enfrentadas pela humanidade, a da covid-19 ocorre num mundo baseado – e relativamente organizado – em dados. As ciências exatas se mostram agora fundamentais para combater a doença, por meio de modelos matemáticos que usam dados para prever a propagação do vírus e que podem ajudar autoridades a definir suas ações. (MACHADO, 2021, [20])

Para Alves (2017, p. 25, [1]), “[...] modelos matemáticos são um fator muito importante para orientar pesquisadores das mais diversas áreas. Permitem projetar diferentes cenários e analisá-los, contribuindo com elementos para a tomada de decisões sobre como equacionar problemas em saúde pública. Os estudos nesta área possibilitam, por exemplo, prever a velocidade de propagação de doenças por um território ou como podem afetar

determinadas populações.”

No contexto pandêmico em que se deseja compreender determinados aspectos da realidade que somos capazes de observar, uma ferramenta científica muito poderosa é comumente empregada: a criação de modelos matemáticos. De forma simples e direta, modelos matemáticos são representações simplificadas da realidade em forma de funções ou equações. Não existe o modelo perfeito, que represente a realidade exatamente como ela é, mas existem – e podem ser elaborados – modelos capazes de capturar características observadas específicas (e de interesse) da realidade. (ALVES, 2017, [1])

## 2.1 A COVID-19 no Piauí

No estado do Piauí, em 22 de janeiro de 2020, foi ativado o Centro de Operações de Emergências (COE) em Saúde Pública para a Covid-19. Esta estratégia adotada tem sua ativação prevista no Plano Nacional de Resposta às Emergências em Saúde Pública do Ministério da Saúde (MS).

De acordo com Marinelli (2020, [21]):

“Diante da emergência por doença respiratória, causada por agente Covid-19, conforme casos detectados na cidade de Wuhan, na China e em outros locais, considerando-se as recomendações da Organização Mundial de Saúde (OMS), as equipes de vigilância dos estados e municípios, bem como quaisquer serviços de saúde, devem ficar alerta aos casos de pessoas com sintomatologia respiratória e que apresentam histórico de viagens para áreas de transmissão local nos últimos 14 dias”.

A partir dessa situação alarmante, o Governo do Estado do Piauí passou a publicar uma série de atos normativos, começando pelo Decreto 18.884 de 16 de março de 2020, Leis, Portarias, Protocolos e Medida Provisória, afim de tentar conter o avanço da disseminação do vírus em todo o estado. Poucos dias após o primeiro decreto, em 19 de março de 2020, os primeiros casos do novo coronavírus são confirmados pela Secretaria de Saúde do Piauí - SESAPI, ver [18]. E, em 27 de março de 2020 o Piauí registrou a primeira morte por COVID-19 em Piracuruca, ver [19]. Tratava-se de um homem de 57 anos que era prefeito da cidade de São José do Divino.

Através do acesso ao site Painel Covid-19 Piauí, ver [25], em meados de junho de 2021, o Piauí já acumula quase 300 mil casos confirmados, pouco mais de 6 mil óbitos pelo novo coronavírus, em torno de 270 mil recuperados, 212 mil descartados e quase 18 mil altas médicas, que foram registrados em 222 municípios. Destes, os cinco municípios mais afetados são: Teresina, Parnaíba, Piripiri, Floriano e Picos. São Luís do Piauí e Massapê do Piauí são as duas cidades do Piauí que ainda não tiveram morte por Covid-19. Analisando os dados no site “Painel Covid-19 Piauí”, nota-se que os casos confirmados tem uma incidência maior no sexo feminino. Em contra partida, pouco mais da metade

dos óbitos pertencem ao sexo masculino. Já em relação à faixa etária, os casos confirmados concentram-se entre 30 e 39 anos, e os óbitos na faixa de 80 anos ou mais. A taxa de ocupação dos leitos de UTI que já chegou a 100% , inclusive tendo fila de espera para internação, e ao final dessa pesquisa apresentava variação em torno de 87%.

### 3 Referencial Teórico

Destinaremos este capítulo a introduzir uma aproximação de curvas bastante conhecida, chamada de interpolação polinomial. Nele, apresentaremos o método de Interpolação Polinomial de Lagrange e faremos a exposição de um teorema a respeito do erro de aproximação desse método, apresentando os conceitos de função polinomial necessários à introdução desse estudo.

#### 3.1 Polinômios e Equações Polinomiais

Para poder entender o que é uma função polinomial ou simplesmente um polinômio é necessário utilizar uma abordagem teórica e abstrata para conseguir construir todo o alicerce dessa temática. Para isso serão utilizados e discutidos definições, teoremas, corolários, dentre outros, no decorrer desta seção.

Existe uma diferença sutil entre polinômio e função polinomial. De forma geral, um polinômio é uma expressão do tipo

$$P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

onde  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  são números reais chamados de coeficientes. Se  $a_n \neq 0$  então dizemos que o polinômio tem grau  $n$  e coeficiente líder  $a_n$ . A saber, coeficiente líder ou dominante é o valor numérico que acompanha a parte literal de maior grau.

Cada polinômio  $P(x)$  corresponde a uma função polinomial  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por:

**Definição 3.1** (Função Polinomial). Uma função polinomial é uma função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que associa a cada  $x \in \mathbb{C}$ , o número complexo  $f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , na qual  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$  é uma sequência de números complexos com  $a_n \neq 0$ . Os valores dessa sequência são denominados coeficientes do polinômio, o valor  $x$  representa a variável independente.

Existe uma correspondência biunívoca entre o polinômio  $P$  e a função polinomial  $f$ . Por esse motivo, não há necessidade de fazer distinção entre  $P$  e  $f$ , ambos terão a mesma representatividade neste estudo.

Esta função, de natureza simples e elementar, tem um papel de destaque na matemática e nas ciências. Pode-se observar diversas situações do cotidiano ou da ciência em que uma função polinomial é bastante útil para modelar ou resolver um problema.

A seguir vamos a mais definições e propriedades relacionadas aos polinômios.

**Definição 3.2.** Dados o número complexo  $r$  e o polinômio  $f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , chama-se raiz de  $f$  em  $r$ , a imagem de  $r$  pela função  $f$ , isto é:

$$f(r) = a_0 + a_1r^1 + a_2r^2 + \dots + a_nr^n = 0.$$

Em particular, se  $r$  é um número complexo e  $f$  é um polinômio tal que  $f(r) = 0$ , dizemos que  $r$  é uma raiz de  $f$ .

**Definição 3.3** (Polinômios idênticos). Dizemos que dois polinômios  $f$  e  $g$  são iguais (ou idênticos) quando assumem valores numéricos iguais para todo  $x$  complexo. Em símbolos, indicamos:

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{C}.$$

**Definição 3.4.** Seja  $f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  um polinômio qualquer. Chama-se grau de  $f(x)$  e denota-se por  $gr[f(x)]$ , o maior valor dos expoentes de  $x$ , com coeficiente não nulo.

Sobre os polinômios podem-se certificar as aplicações das operações básicas de soma e produto. Sejam  $f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  e  $g(x) = b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$  dois polinômios definidos no conjunto dos números complexos, com  $n < m$ . Temos:

**Soma:**  $f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x^1 + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots + (a_m + b_m)x^m.$

**Produto:**  $f(x) \cdot g(x) = a_0(b_0 + b_1x^1 + \dots + b_mx^m) + a_1x^1(b_0 + b_1x^1 + \dots + b_mx^m) + \dots + a_nx^n(b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \dots + b_mx^m).$

**Produto Escalar:**  $k \cdot f(x) = (k \cdot a_0) + (k \cdot a_1)x^1 + (k \cdot a_2)x^2 + \dots + (k \cdot a_n)x^n.$

E para definir a subtração  $f(x) - g(x)$  basta fazer  $f(x) + (-1) \cdot g(x)$ .

A seguinte proposição auxilia a determinar o grau de um polinômio resultante.

**Proposição 3.5.** *Sejam  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  e  $j(x)$  polinômios, todos com coeficientes reais, tais que,  $h(x) = g(x) + f(x)$  e  $j(x) = f(x) \cdot g(x)$ . Então  $gr[h(x)] \leq \max\{gr[g(x)], gr[f(x)]\}$  e  $gr[j(x)] = gr[f(x)] + gr[g(x)]$ .*

*Demonstração.* Sejam  $f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  e  $g(x) = b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$  dois polinômios definidos no conjunto dos números complexos, com  $a_n \neq 0$  e  $b_m \neq 0$ .

Sem perda de generalidade, suponha  $n < m$ . Assim

$$h(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x^1 + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots + (a_m + b_m)x^m,$$

logo  $gr[h(x)] = m \leq m = \max\{gr[f(x)], gr[g(x)]\}$ .

Analogamente,

$$j(x) = a_0(b_0 + b_1x^1 + \dots + b_mx^m) + a_1x^1(b_0 + b_1x^1 + \dots + b_mx^m) + \dots + a_nx^n(b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \dots + b_mx^m),$$

e desenvolvendo a multiplicação dos termos de  $f(x)$  e  $g(x)$  temos,

$$j(x) = a_0b_0 + \cdots + a_0b_mx^m + a_1b_0x^1 + \cdots + a_1b_mx^{m+1} + \cdots + a_nb_0x^n + \cdots + a_nb_mx^{n+m}.$$

Portanto, para  $a_n \neq 0$  e  $b_m \neq 0$ ,  $gr[j(x)] = n + m$ . □

Na divisão de polinômios, temos um fato curioso, pois de acordo com Muniz (2016, [24]) o algoritmo da divisão pode ser estendido para polinômios. Assim, para dividir  $f(x)$  por  $g(x)$  devem existir polinômios  $q(x)$  e  $r(x)$  tal que  $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ , onde  $q(x)$  é denominado quociente da divisão e  $r(x)$  o resto, com  $gr[r(x)] < gr[g(x)]$ . Quando  $r(x) = 0$  dizemos que  $f(x)$  é divisível por  $g(x)$ , ou que  $g(x)$  divide  $f(x)$ .

Vejamos agora um resultado importante sobre fatoração de polinômios de acordo com IEZZI (2013, [14]), e que irá nos servir de base para a próxima seção.

**Teorema 3.6** (Teorema da decomposição). Todo polinômio  $P$  de grau  $n$  ( $n > 1$ )

$$P = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad (a_n \neq 0)$$

pode ser decomposto em  $n$  fatores do primeiro grau, isto é:

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdots (x - r_n),$$

em que  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  são números complexos tais que  $P(r_i) = 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Com exceção da ordem dos fatores tal decomposição é única.

*Demonstração.* Faremos a demonstração do Teorema em duas partes: existência e unicidade, usando a ideia de indução.

1) Existência.

Sendo  $P$  um polinômio de grau  $n \geq 1$ , podemos aplicar o Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.)<sup>1</sup> e  $P$  tem ao menos uma raiz  $r_1$ . Assim,  $P(r_1) = 0$  e, de acordo com o Teorema de D'Alembert<sup>2</sup>,  $P$  é divisível por  $x - r_1$ :

$$P = (x - r_1) \cdot Q_1 \tag{1}$$

em que  $Q_1$  é polinômio de grau  $n - 1$  e coeficiente dominante  $a_n$ .

Se  $n = 1$ , então  $n - 1 = 0$  e  $Q_1$  é polinômio constante. Portanto,  $Q_1 = a_n$  e  $P = a_n(x - r_1)$ , fica demonstrado nosso teorema.

---

<sup>1</sup>Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.) (ver [14]): Todo polinômio  $P$  de grau  $n > 1$  admite ao menos uma raiz complexa

<sup>2</sup>Teorema de D'Alembert (ver [14]): Um polinômio  $f$  é divisível por  $(x - a)$  se, e somente se,  $a$  é raiz de  $f$ .

Agora, se  $n \geq 2$ , então  $n - 1 \geq 1$  e o T.F.A. é aplicável ao polinômio  $Q_1$ , isto é,  $Q_1$  tem ao menos uma raiz  $r_2$ . Assim,  $Q_1(r_2) = 0$  e  $Q_1$  é divisível por  $x - r_2$ :

$$Q_1 = (x - r_2) \cdot Q_2 \quad (2)$$

Substituindo 2 em 1 resulta:

$$P = (x - r_1)(x - r_2) \cdot Q_2 \quad (3)$$

em que  $Q_2$  é polinômio de grau  $n - 2$  e coeficiente dominante  $a_n$ .

Se  $n = 2$ , isto é,  $n - 2 = 0$ , então  $Q_2 = a_n$  e  $P = a_n(x - r_1)(x - r_2)$ , ficando demonstrado nosso teorema.

Continuando assim, após  $n$  aplicações sucessivas do T.F.A. chegamos na igualdade:

$$P = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\dots(x - r_n) \cdot Q_n$$

em que  $Q_n$  tem grau  $n - n = 0$  e coeficiente dominante  $a_n$ . Portanto,  $Q_n = a_n$  e

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\dots(x - r_n).$$

## 2) Unicidade

Vamos supor que o polinômio  $P$  admita duas decomposições:

$$\begin{aligned} P &= a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\dots(x - r_n) \quad \text{e,} \\ P &= a'_m(x - r'_1)(x - r'_2)(x - r'_3)\dots(x - r'_m). \end{aligned}$$

Igualando os dois segundos membros, supondo-os reduzidos e ordenados, temos

$$a_n x^n - a_n S_1 x^{n-1} + \dots + (-1)a_n(r_1 \dots r_n) = a'_m x^m - a'_m S'_1 x^{m-1} + \dots + (-1)a'_m(r'_1 \dots r'_m),$$

onde  $S_1 = r_1 + \dots + r_n$  e  $S'_1 = r'_1 + \dots + r'_m$ , ver [10].

Pela definição de igualdade de polinômios, ver Definição 3.3, temos necessariamente:

$$n = m \quad \text{e} \quad a_n = a'_m$$

Assim, ficamos com a igualdade:

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\dots(x - r_n) = (x - r'_1)(x - r'_2)(x - r'_3)\dots(x - r'_n) \quad (4)$$

Atribuindo a  $x$  o valor de  $r_1$ , temos

$$0 = (r_1 - r'_1)(r_1 - r'_2)(r_1 - r'_3)\dots(r_1 - r'_n)$$

e, se o produto é nulo, então um dos fatores  $r_1 - r'_j$  é nulo. Com uma conveniente mudança na ordem dos fatores, podemos colocar  $r_1 = r'_1$ .

Com isso, a igualdade 4 se transforma em:

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\dots(x - r_n) = (x - r_1)(x - r'_2)(x - r'_3)\dots(x - r'_n)$$

e logo em seguida, cancelando  $(x - r_1)$  nos dois membros, em:

$$(x - r_2)(x - r_3)\dots(x - r_n) = (x - r'_2)(x - r'_3)\dots(x - r'_n)$$

Agora, tomando  $x = r_2$  na equação acima, temos

$$0 = (r_2 - r'_2)(r_2 - r'_3)\dots(r_2 - r'_n)$$

e, analogamente, um dos fatores  $r_2 - r'_k$  é nulo. Com uma conveniente mudança na ordem dos fatores, podemos colocar  $r_2 = r'_2$ .

Continuando com essa mesma ideia  $(n - 2)$  vezes, temos  $r_i = r'_i$  para todo  $i \in 1, 2, 3, \dots, n$ . Portanto, as igualdades  $m = n$ ,  $a'_m = a_n$ ,  $r'_1 = r_1$ ,  $r'_2 = r_2$ ,  $r'_3 = r_3, \dots$ ,  $r'_n = r_n$  são a prova da unicidade da decomposição.

□

## 3.2 Interpolação

Nesta seção “consideramos o problema de aproximar uma função genérica real de uma variável por meio de um grupo de funções mais simples. Existem vários usos para a função aproximação, dentre estes, a possibilidade de substituir funções intrincadas por outras funções mais simples, de tal maneira que seja possível retirar informações através de operações como a diferenciação e a integração com menos dificuldade. Outro aspecto importante da função aproximação é a relação de interpolação em tabelas, isto é, se conhecidos os valores numéricos da função a ser aproximada para um conjunto de pontos, na forma tabular, é possível calcular o seu valor numérico em um ponto que não conste na tabela. As classes de funções mais comumente utilizadas na aproximação de uma função dada são as funções polinomiais, as trigonométricas, as exponenciais e as funções racionais. Destas, o polinômio interpolador é, há muito tempo, a mais usada em computadores”.(CONTE, 1977, p. 83, [9])

Interpolar uma função  $f(x)$  consiste em aproximar essa função por uma outra função



Pode ser rapidamente notado, através do cálculo do determinante, que  $V \neq 0$  enquanto os  $x_k$  forem distintos. Resolvendo o sistema acima em relação aos coeficientes  $a_i$ , o polinômio

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0,$$

será com esses coeficientes, o Polinômio Interpolador que contém os  $n + 1$  pontos  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Para calcular  $V$ , consideremos a função  $V(x)$  definida por

$$V(x) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Aplicando o Teorema de Laplace<sup>4</sup> para expandir a expressão de  $V(x)$ , temos

$$\begin{aligned} V(x) &= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \end{vmatrix} + \cdots + x^n \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Desenvolvemos  $V(x)$  segundo os elementos da última linha e observamos que cada determinante menor, contendo  $n$  linhas e  $n$  colunas, não dependem de  $x$ . Assim, podemos garantir que a função  $V(x)$  é um polinômio de grau menor ou igual a  $n$ . Além disso, o coeficiente de  $x^n$  é  $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ . Conseqüentemente, por (3.6), podemos escrever

$$V(x) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}). \quad (9)$$

pois  $V(x)$  se anula em  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  (ver (8)).

Substituindo  $x$  por  $x_n$  em (9), obtemos a seguinte fórmula de recorrência

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1}). \quad (10)$$

---

<sup>4</sup>Teorema de Laplace (ver [15]): O determinante de uma matriz  $M$ , de ordem  $n \geq 2$ , é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

Observando o determinante de Vandermonde (7), temos que

$$V(x_0, x_1) = x_1 - x_0. \quad (11)$$

Utilizando a igualdade (10) e o resultado de (11), podemos escrever

$$V(x_0, x_1, x_2) = V(x_0, x_1)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1). \quad (12)$$

Agora, aplicando (12) em (10), conseguimos obter

$$\begin{aligned} V(x_0, x_1, x_2, x_3) &= V(x_0, x_1, x_2)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

Continuando com esse mesmo raciocínio, e utilizando (10) como uma fórmula de recorrência, obtemos

$$\begin{aligned} V &= V(x_0, x_1, \dots, x_n) \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \cdots \\ &\quad \cdots (x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}) \\ &= \prod_{\substack{k=0 \\ k>j}}^n (x_k - x_j). \end{aligned} \quad (13)$$

Por hipótese, os pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  são distintos e assim, por (13) concluímos que  $V \neq 0$ . Consequentemente, pelo Teorema de Cramer<sup>5</sup>, o sistema (6) tem uma, e uma só, solução  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .  $\square$

Vimos que, dados  $n + 1$  pontos distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e  $n + 1$  valores de uma função  $y = f(x)$  sobre esses pontos, isto é,  $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$ , existe um, e um só, polinômio  $P_n(x)$  de grau no máximo  $n$  tal que  $P_n(x_k) = f(x_k), k = 0, 1, \dots, n$ . Com base nisso, temos a seguinte definição.

**Definição 3.8.** Chama-se polinômio de interpolação de uma função  $y = f(x)$  sobre um conjunto de pontos distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ao polinômio de grau no máximo  $n$  que coincide com  $f(x)$  em  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Tal polinômio será designado por  $P_n(f; x)$  e, sempre que não causar confusão, simplesmente por  $P_n(x)$ .

<sup>5</sup>Teorema de Cramer (ver [15]): Seja  $D = \det(A)$  e  $S$  um sistema linear com matriz de coeficientes  $A$  e número de equações igual ao número de incógnitas. Se  $D \neq 0$ , então o sistema será possível e terá solução única  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ , tal que

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}, \quad \forall i \in 1, 2, 3, \dots, n$$

onde  $D_i$  é o determinante da matriz obtida de  $A$ , substituindo-se a  $i$ -ésima coluna pela coluna dos termos independentes das equações do sistema.

### 3.2.2 Fórmula de Lagrange

A partir do resultado exposto na demonstração do Teorema 3.7 onde foi provada a existência e a unicidade do Polinômio Interpolador, podemos agora exibir a fórmula desse polinômio. O próximo Teorema mostra como deve ser o Polinômio Interpolador de uma função real de uma variável a partir de alguns pontos conhecidos.

**Teorema 3.9.** *Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n$  os  $n + 1$  pontos distintos contidos num intervalo  $I$ . Consideremos uma função real  $f(x)$  e sejam  $f(x_k) = y_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) os valores da função nesses  $n + 1$  pontos. Então o polinômio*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (14)$$

é o polinômio interpolador dessa função.

*Demonstração.* Para isso, considere os polinômios  $l_k(x)$ , para  $k = 0, 1, \dots, n$ , de grau  $n$ :

$$\begin{aligned} l_k(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \end{aligned} \quad (15)$$

Note que, os polinômios  $l_k(x)$  satisfazem a seguinte propriedade:

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = j; \\ 0, & \text{se } k \neq j. \end{cases} \quad (16)$$

Com efeito, observa-se que o numerador de  $l_k(x)$  é um produto de todos os fatores da forma  $x - x_i$ , exceto  $x - x_k$ . Além disso, o denominador é um produto de todos os fatores da forma  $x_k - x_i$ , exceto  $x_k - x_k$ . Dessa forma, o numerador e denominador são iguais quando substituirmos  $x$  por  $x_k$  em (15):

$$l_k(x_k) = \frac{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} = 1.$$

Por outro lado, sendo  $k \neq j$ , ao substituirmos  $x$  por  $x_j$  em (15), o  $(j + 1)$ -ésimo fator do produto do numerador se anula, ou seja,

$$\begin{aligned} l_k(x_j) &= \frac{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{k-1})(x_j - x_j) \cdots (x_j - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, considerando os valores  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y_1 = f(x_1)$ , ...,  $y_n = f(x_n)$  da função

$y = f(x)$ , definamos o polinômio  $P_n(x)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) \\
 &= y_0 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^n \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} + y_1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^n \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} + \cdots + y_n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n}}^n \frac{x - x_j}{x_n - x_j} \\
 &= \sum_{k=0}^n y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Observe que o polinômio  $P_n(x)$ , definido em (17), possui grau menor ou igual  $n$ , pois é uma combinação linear dos polinômios  $l_k(x)$  que possuem grau  $n$ . Além disso, aplicando as condições de (16), temos que

- $P_n(x_0) = y_0 l_0(x_0) + y_1 l_1(x_0) + \cdots + y_n l_n(x_0) = y_0$ ;
- $P_n(x_1) = y_0 l_0(x_1) + y_1 l_1(x_1) + \cdots + y_n l_n(x_1) = y_1$ ;
- $P_n(x_n) = y_0 l_0(x_n) + y_1 l_1(x_n) + \cdots + y_n l_n(x_n) = y_n$ .

Logo,  $P_n(x)$  satisfaz a seguinte propriedade:

$$P_n(x_k) = y_k, \text{ para todo } k = 0, 1, \dots, n. \tag{18}$$

De acordo com o Teorema 3.7, como  $P_n(x)$  satisfaz a condição (18), então  $P_n(x)$  é o polinômio de interpolação de  $f(x)$  sobre os  $n + 1$  pontos distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .  $\square$

**Definição 3.10.** A fórmula (14) é chamada Fórmula de Lagrange do Polinômio de Interpolação.

Com o intuito de esclarecer melhor o Teorema 3.9, consideremos o caso particular em que  $n = 1$ , ou seja, o caso em que temos dois pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ . Assim sendo,

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \text{ e } L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 \\
 &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1 \\
 &= \frac{(x_1 - x)y_0 - (x_0 - x)y_1}{x_1 - x_0}.
 \end{aligned}$$

Este é o caso familiar de interpolação linear, que pode ser representado nas seguintes formas equivalentes:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix},$$

onde as barras indicam o determinante do arranjo.

### 3.2.3 Erro na aplicação do método

Ao ser utilizado, o polinômio interpolador exibe valores aproximados para a função  $f(x)$  em pontos distintos dos  $x_k$  dados, o que gera o seguinte questionamento: o que podemos dizer a respeito desta aproximação? Uma vez que é possível conseguir muitas funções que passem pelos mesmos  $n + 1$  pontos  $(x_k, f_k)$ , não podemos dizer muita coisa a respeito do erro de aproximação, tratando-se de um ponto não contido na tabela, a menos que tenhamos mais informações sobre a função original.

**Definição 3.11.** O erro  $R_n$  da interpolação polinomial  $P_n$  de uma função  $f$  em  $x$  no intervalo  $I$ , é definido por

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Para compreendermos melhor essa definição, e obtermos uma expressão do termo do erro, introduziremos os seguintes resultados.

**Teorema 3.12** (Teorema de Rolle). *Seja  $f(x)$  contínua definida no intervalo fechado  $[a, b]$  e diferenciável em cada ponto do intervalo aberto  $(a, b)$ . Se  $f(a) = f(b)$ , então existe um ponto  $\xi \in (a, b)$  tal que  $f'(\xi) = 0$ .*

Cabe-nos destacar que a demonstração desse Teorema 3.12 pode ser encontrada na referência (Figueiredo, 2008, p. 86), ver [11].

Enunciado o Teorema de Rolle, com o auxílio dele demonstraremos o Teorema de Rolle Generalizado.

**Teorema 3.13** (Teorema de Rolle Generalizado). *Seja  $n \geq 2$ . Suponhamos que  $f(x)$  seja contínua em  $[a, b]$  e que a derivada de ordem  $n - 1$  de  $f$ ,  $f^{n-1}(x)$ , exista em cada ponto de  $(a, b)$ . Suponhamos que  $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = 0$  para  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ . Então, existe um ponto  $\xi \in (x_1, x_n)$  tal que  $f^{n-1}(\xi) = 0$ .*

*Demonstração.* A demonstração desse teorema é uma aplicação direta do Teorema 3.12. Considere os pontos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . Usando o Teorema de Rolle, perceba que existem pontos  $x_1^* \in (x_1, x_2)$ ,  $x_2^* \in (x_2, x_3), \dots, x_{n-1}^* \in (x_{n-1}, x_n)$ , tais que

$$f'(x_1^*) = f'(x_2^*) = \dots = f'(x_{n-1}^*) = 0.$$

Agora note que temos os pontos  $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_{n-1}^*$  tais que  $(x_1^*, x_{n-1}^*) \subset (a, b)$ .

Nesses novos pontos obtidos, utilizando o Teorema de Rolle novamente, temos os seguintes pontos:

$$x_1^{**} \in (x_1^*, x_2^*), x_2^{**} \in (x_2^*, x_3^*), \dots, x_{n-2}^{**} \in (x_{n-2}^*, x_{n-1}^*),$$

tais que

$$f''(x_1^{**}) = f''(x_2^{**}) = \dots = f''(x_{n-2}^{**}) = 0.$$

Seguindo com este processo  $n - 2$  vezes, chegamos ao momento em que temos os pontos  $x_1^{(n-2)*} \in (x_1^{(n-1)*}, x_2^{(n-1)*})$  e  $x_2^{(n-2)*} \in (x_2^{(n-1)*}, x_3^{(n-1)*})$  tais que

$$f^{n-2}(x_1^{(n-2)*}) = f^{n-2}(x_2^{(n-2)*}) = 0.$$

Finalmente, usando o Teorema 3.12, pela  $(n - 1)$ -ésima vez, temos  $\xi \in (x_1^{(n-2)*}, x_2^{(n-2)*})$ , com  $(x_1^{(n-2)*}, x_2^{(n-2)*}) \subset (x_1, x_n)$ , tal que  $f^{n-1}(\xi) = 0$ .

□

Contudo, sob as condições fornecidas no Teorema 3.13, podemos obter a estimativa do erro, dada por (19). Vejamos agora o resultado que nos fornece uma expressão do termo do erro.

**Teorema 3.14.** *Seja  $I$  um intervalo contendo os  $n+1$  pontos interpoladores  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e  $f(x)$  uma função contínua e que possua derivadas contínuas de ordem  $n+1$  para todo  $x$  pertencente a  $I$ . Se  $P_n(x)$  é o polinômio que interpola  $f$  nos pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , então em qualquer ponto  $x$  pertencente a  $I$ , o erro é dado pela seguinte equação:*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\psi(x)f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad (19)$$

onde

$$\psi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \quad (20)$$

e  $\xi$  é algum ponto contido no intervalo  $I$ .

*Demonstração.* Inicialmente, observemos que, se  $x = x_k$ , com  $k = 0, 1, \dots, n$ , ambos os lados da igualdade (19) são iguais a zero, visto que  $P_n$  interpola  $f$  nos valores  $x_k$ , e  $\psi(x_k) = 0$  por sua definição (20).

Caso  $x \neq x_k$ , para todo  $k = 0, 1, \dots, n$ , construímos a função auxiliar

$$\phi(s) = f(s) - P_n(s) - g(x)\psi(s), \quad \text{para todo } s \in I,$$

onde

$$g(x) = \frac{f(x) - P_n(x)}{\psi(x)}. \quad (21)$$

Como  $x \neq x_k$ , então  $\psi(x)$  não se anula.

Note que, para  $s = x_k$ , temos

$$\begin{aligned} \phi(x_k) &= f(x_k) - P_n(x_k) - g(x)\psi(x_k) \\ &= P_n(x_k) - P_n(x_k) - g(x)\psi(x_k) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois  $f(x_k) = P_n(x_k)$  e  $\psi(x_k) = 0$ . Com isso, a função  $\phi(s)$  se anula nos  $n + 1$  pontos  $x_0, \dots, x_n$ . Além disso,  $\phi(s)$  se anula também quando  $s = x$ . De fato, devido à definição (21) de  $g(x)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \phi(x) &= f(x) - P_n(x) - g(x)\psi(x) \\ &= f(x) - P_n(x) - \left( \frac{f(x) - P_n(x)}{\psi(x)} \right) \psi(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, a função  $\phi(s)$  possui  $n + 2$  raízes no intervalo  $I$  e, pelo Teorema 3.13,  $\phi^{n+1}(s)$  deve ter, no mínimo, uma raiz  $\xi$  em  $I$ . Como a derivada de ordem  $(n + 1)$  de  $P_n(x)$  é nula, se derivarmos  $n + 1$  vezes  $\phi(s)$  e substituirmos  $s$  por  $\xi$ , alcançamos

$$\phi^{n+1}(\xi) = f^{n+1}(\xi) - g(x)(n + 1)! = 0.$$

Logo,

$$g(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n + 1)!}. \quad (22)$$

Finalmente, substituindo (22) em (21), conseguimos

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\psi(x)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

garantindo assim a estimativa de erro (19). □

A expressão do segundo membro de (19) é chamada termo do erro ou erro de truncamento. É o erro que se comete no ponto  $x$  quando se substitui a função por seu polinômio de interpolação calculado em  $x$ . É importante notar que  $\xi = \xi(x)$  depende do ponto  $x$  no qual a estimativa de erro é requerida.

### 3.2.4 Fórmula de Lagrange para Pontos Igualmente Espaçados

Dados  $n+1$  pontos  $x_i$  em um intervalo  $I$ , igualmente espaçados, isto é,  $x_{i+1} - x_i = h \neq 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Vamos determinar uma forma para o Polinômio Interpolador e para o erro, em termos de uma variável  $u$ , definida da seguinte maneira:

$$u = \frac{x - x_0}{h}. \quad (23)$$

Temos os seguintes lemas em função dessa variável  $u$ .

**Lema 3.15.** *Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n$  pontos igualmente espaçados de uma quantidade fixa  $h \neq 0$ . Então,*

$$x - x_r = (u - r)h, \text{ para todo } r = 0, 1, \dots, n,$$

onde  $x \in (x_0, x_n)$  e  $u$  é dado em (23).

*Demonstração.* Provaremos por indução em  $r$ .

a) Para  $r = 0$ , por (23), temos que

$$x - x_0 = uh = (u - 0)h.$$

Logo, para  $r = 0$  o resultado é verdadeiro.

b) Suponha válido  $x - x_r = (u - r)h$  para  $r = p$ , isto é,  $x - x_p = (u - p)h$ .

c) Provemos que vale  $x - x_r = (u - r)h$  também para  $r = p + 1$ . Com efeito, usando o fato dos  $x_i$  serem igualmente espaçados e a hipótese de indução apresentada em b), obtemos

$$\begin{aligned} x - x_{p+1} &= x - x_p + x_p - x_{p+1} \\ &= x - x_p - (x_{p+1} - x_p) \\ &= (u - p)h - h \\ &= (u - p - 1)h \\ &= (u - (p + 1))h. \end{aligned}$$

Portanto, o teorema vale para todo  $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

□

**Lema 3.16.** *Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n$  pontos igualmente espaçados de uma quantidade fixa  $h \neq 0$ . Então,*

$$x_r - x_s = (r - s)h, \text{ para todo } r, s = 0, 1, \dots, n.$$

*Demonstração.* Provaremos por indução em  $s$  e em  $r$ .

1. Fixando  $r$  e aplicando indução sobre  $s$ .

a) Para  $s = 0$ , como os  $x_i$  são igualmente espaçados por uma quantidade  $h$ , então

$$x_r - x_0 = rh = (r - 0)h.$$

Logo, para  $s = 0$  o resultado é verdadeiro.

b) Suponha válido  $x_r - x_s = (r - s)h$  para  $s = k$ , isto é,  $x_r - x_k = (r - k)h$ .

c) Provemos que vale  $x_r - x_s = (r - s)h$  também para  $s = k + 1$ . De fato, por b), temos que

$$\begin{aligned}x_r - x_{k+1} &= x_r - x_k + x_k - x_{k+1} \\ &= (x_r - x_k) - (x_{k+1} - x_k) \\ &= (r - k)h - h \\ &= (r - k - 1)h \\ &= (r - (k + 1))h.\end{aligned}$$

2. Agora, vamos fixar  $s$  e aplicar indução sobre  $r$ .

a) Para  $r = 0$ , usamos a hipótese dos  $x_i$  serem igualmente espaçados por uma quantidade  $h$ , obtendo assim

$$x_0 - x_s = -(x_s - x_0) = -sh = (0 - s)h$$

b) Suponha válido para  $r = k$ , isto é,  $x_k - x_s = (k - s)h$ .

c) Provemos que vale também para  $r = k + 1$ . Com efeito, pela hipótese de indução acima, chegamos a

$$\begin{aligned}x_{k+1} - x_s &= x_{k+1} - x_k + x_k - x_s \\ &= (x_{k+1} - x_k) + (x_k - x_s) \\ &= h + (k - s)h \\ &= (1 + k - s)h \\ &= ((k + 1) - s)h.\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que o resultado é válido para  $r, s \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

□

É comum encontrar problemas de Interpolação onde os valores de  $x_i$  possuem a característica de serem igualmente espaçados. Partindo dessa situação e tendo em mãos os resultados dos Lemas 3.15 e 3.16, pode-se enunciar e demonstrar o resultado do teorema a seguir.

**Teorema 3.17.** *Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n$  pontos distintos igualmente espaçados de uma quantidade fixa  $h \neq 0$ . Então, a fórmula de Lagrange do polinômio de interpolação de  $f$  é dada por*

$$P_n(x_0 + uh) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \lambda_k(u),$$

onde  $u$  é a mudança de variável vista em (23) e

$$\lambda_k(u) = \frac{u(u-1) \cdots (u-(k-1))(u-(k+1)) \cdots (u-n)}{k(k-1) \cdots (k-(k-1))(k-(k+1)) \cdots (k-n)}. \quad (24)$$

*Demonstração.* Fazendo a mudança de variável dada em (23) no polinômio de interpolação de  $f$  sobre  $x_0, x_1, \dots, x_n$  visto em (14) e usando os resultados dos Lemas 3.15 e 3.16, obtemos

$$\begin{aligned} P_n(x_0 + uh) &= \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{(u-0)h(u-1)h \cdots (u-(k-1)h)(u-(k+1)h) \cdots (u-n)h}{(k-0)h(k-1)h \cdots (k-(k-1)h)(k-(k+1)h) \cdots (k-n)h} \\ &= \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{u(u-1) \cdots (u-(k-1))(u-(k+1)) \cdots (u-n)}{k(k-1) \cdots (k-(k-1))(k-(k+1)) \cdots (k-n)}. \end{aligned} \quad (25)$$

De forma mais simples, (25) pode ser reescrito da forma

$$P_n(x_0 + uh) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \lambda_k(u), \quad (26)$$

onde  $\lambda_k(u)$  é a expressão definida em (24). □

Portanto, para a função  $f(x)$ , o polinômio interpolador sobre  $n+1$  pontos  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  se escreve, como se tem em (25) em termos da variável  $u = \frac{x-x_0}{h}$ . Essa fórmula tem em sua utilização uma grande vantagem, pelo fato de  $\lambda_k(u)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  serem sempre os mesmos para  $n+1$  pontos distintos igualmente espaçados de  $h$ , isto é, temos que os polinômios  $\lambda_k(u)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  independem dos  $x_k$ .

De modo análogo, podemos obter o erro do polinômio interpolador como mostra o teorema a seguir.

**Teorema 3.18.** *Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n$  pontos distintos igualmente espaçados de uma quantidade fixa  $h \neq 0$ . Então, o erro de truncamento do polinômio de interpolação de  $f$  é dado por*

$$R_n(u) = \frac{u(u-1) \cdots (u-n)}{(n+1)!} \frac{d^{n+1} f}{du^{n+1}}(\eta),$$

onde  $u$  é a mudança de variável vista em (23) e  $\eta = \frac{\xi - x_0}{h}$ , com  $\xi$  apresentado em (19).

*Demonstração.* Aplicando o Lema 3.15 na fórmula do erro de truncamento (19), obtemos

$$\begin{aligned} R_n(x_0 + uh) &= [(u-0)h] \cdot [(u-1)h] \cdots [(u-n)h] \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \\ &= u(u-1) \cdots (u-n) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \end{aligned} \quad (27)$$

Agora, para exprimir  $f(x)$  em termos de  $u$ , vamos usar a Regra da Cadeia<sup>6</sup>. Primeiro, note que

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{df}{du}. \quad (28)$$

Utilizando novamente a Regra da Cadeia e usando (28), conseguimos

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) = \frac{d}{du} \left( \frac{df}{dx} \right) \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} \left( \frac{1}{h} \cdot \frac{df}{du} \right) \frac{1}{h} = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{d^2 f}{du^2}.$$

Após sucessivas aplicações da Regra da Cadeia, concluímos

$$\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}} = \frac{1}{h^{n+1}} \frac{d^{n+1} f}{du^{n+1}}. \quad (29)$$

Portanto, substituindo (29) em (27), temos que

$$R_n(u) = \frac{u(u-1)\cdots(u-n)}{(n+1)!} \frac{d^{n+1} f}{du^{n+1}}(\eta),$$

onde  $\eta = \frac{\xi - x_0}{h}$  pertence ao intervalo  $(0, n)$ , se supusermos os pontos  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  em ordem crescente e  $x \in (x_0, x_n)$ . □

---

<sup>6</sup>Regra da cadeia (ver [16]): Sejam  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(X) \subset Y$ ,  $a \in X \cap X'$ ,  $b = f(a) \in Y \cap Y'$ . Se existem  $f'(a)$  e  $g'(b)$ , então  $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável no ponto  $a$ , valendo  $(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$ .

## 4 Resultados e Discussões

Neste capítulo, será realizada uma descrição dos resultados da aplicação do método de Interpolação Polinomial de Lagrange (ver Definição 3.10). Para este trabalho foram utilizados dados referentes ao número de pessoas contaminadas e vítimas fatais da pandemia de COVID-19 no estado do Piauí, coletados a partir das publicações da Secretaria de Estado da Saúde do Piauí - SESAPI, onde a catalogação dos dados foi feita desde o dia 18 de março de 2020 até 18 de março de 2021.

Pôde-se verificar, através das Tabelas 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, que os dados utilizados são de natureza não linear, pois crescem e decrescem de acordo com o período em que são coletados, dependendo de outros fatores e podendo gerar alterações durante o percurso. Devido a isso, o uso da Interpolação Polinomial de Lagrange é a ferramenta ideal para aplicação, pois exhibe uma função não linear que pode ser alimentada com diversos dados e possui uma taxa de erro pequena em comparação com outros tipos de cálculos, sem a necessidade de interagir com muitas outras funções. (VIAIS NETO, 2020, [30])

O Polinômio de Lagrange, Definição 3.10, foi utilizado como função única e principal, pois ele é capaz de apresentar resultados mais precisos conforme mais valores forem informados. Para isso, utilizamos o software MAXIMA, onde o uso do referido programa se fez necessário para facilitar o trabalho em calcular, através do Teorema 3.9, o polinômio de interpolação. O software serviu também como ferramenta para visualizar os gráficos gerados por este mesmo polinômio interpolador, visto que uma quantidade razoável de pares ordenados  $(x, P(x))$  (domínio, imagem) foram utilizados nos cálculos.

Um sistema de computação algébrica, como o MAXIMA, permite manipular e explorar expressões matemáticas de maneira simbólica e interactiva. O usuário digitaliza na janela do programa algumas fórmulas, comandos e o sistema avalia-os devolvendo uma resposta que pode ser manipulada posteriormente, caso seja necessário. É-nos permitido também obter soluções numéricas aproximadas e visualizar graficamente quer dados, quer funções matemáticas. O MAXIMA, como se trata de um software do tipo “freeware”, com funcionalidades similares aos softwares comercializados, não estimula o uso de cópias não autorizadas. (SANTOS, 2009, p. 11, [28])

Um cálculo padrão tem graus limitados, ou seja, só aceita uma determinada quantidade de dados. No caso desse estudo, 20 pontos foi o maior número possível de dados inseridos no software, já que a partir do 21<sup>o</sup> ponto tabelado, o gráfico do polinômio interpolador começou a apresentar problema de instabilidade que foi aumentando à medida que inserimos mais dados. Fato esse que nos motivou a fazer esse estudo em quatro etapas: os três primeiros períodos juntos equivaleram a um ano, que é exatamente o mesmo tempo do quarto e último período.

Trata-se de um estudo bibliográfico de caráter quantitativo descritivo onde exibiremos os resultados dos cálculos feitos a partir de dados extraídos do “Painel COVID-19 Piauí”,

o qual possui acesso de forma online e gratuita. Desse modo, pode-se estimar o Polinômio Interpolador de Lagrange (ver Definição 3.10) e o Erro (ver Definição 3.11) de aproximação do mesmo, afim de compará-lo com o modelo amplamente divulgado e, a partir daí ter uma discussão à respeito dos resultados do uso da Interpolação Polinomial de Lagrange.

Vale ressaltar que não buscaremos previsões para o desenvolvimento da Covid-19, e sim relacionar o estudo do Polinômio de Lagrange com os casos da atual pandemia. Para isso, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, [7]) foram nosso alicerce, já que neles contém as finalidades do ensino da Matemática no Ensino Médio, e dentre elas, destacamos as duas a seguir:

- I. Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- II. Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade.

## 4.1 Análise dos casos de infectados

Para realizar os cálculos seguintes, foram utilizados os registros apresentados pela SESAPI, desde o primeiro indivíduo infectado, onde esses foram agrupados em intervalos de 10 dias nos três primeiros períodos e 20 dias no último período desse estudo. E, posteriormente, armazenados em uma planilha própria assim como os dados obtidos pela aplicação dos números oficiais na Interpolação Polinomial de Lagrange.

A cada novo registro, feito diariamente, da quantidade de infectados da COVID-19 lançado pela SESAPI, também foi executado o programa MAXIMA informando-se todos os dados a fim de obter o resultado do Polinômio Interpolador e da série de gráficos.

### 4.1.1 Período entre 18 de Março de 2020 e 24 de Setembro de 2020

Inicialmente, foi feita a seguinte relação dentre o período de 18 de Março de 2020 até 24 de Setembro de 2020 com um número natural (do 1 até o 20) com a finalidade de adequar os pontos numa tabela para interpolá-los polinomialmente, onde o intervalo desse período da pesquisa foi a cada 10 dias.

18/03/20	→	1
28/03/20	→	2
⋮		⋮
16/06/20	→	10

$\vdots$                      $\vdots$   
14/09/20 → 19  
24/09/20 → 20

A partir disso foi montada a Tabela 1 de valores,  $(x, f(x))$  para interpolação, que foram adaptados com base nos dados oficiais da COVID-19 no Piauí. Note que cada valor de  $x$  corresponde ao dia e que cada valor  $f(x)$  corresponde à média móvel do respectivo dia. Tendo essas informações em mãos, mesmo sem conhecer a função que gerou o gráfico da Figura 2, foi possível montar o gráfico do polinômio interpolador afim de compará-lo com o fornecido pela SESAPI.

Tabela 1: MÉDIA MÓVEL DE INFECTADOS

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	0	1	1,86	11,71	31,71	75,86	136,43	198,71	363,86	457,14	693,14
$x$	12		13	14	15	16	17	18	19	20	
$f(x)$	1013,14		826,86	996,86	986,00	870,86	803,00	672,86	664,14	565,14	

Fonte: Adaptado pelo autor.

Apresentemos agora, todos os procedimentos necessários para que o Software Maxima consiga executar a Interpolação Polinomial de Lagrange e também gerar o gráfico. Essa mesma estrutura lógica foi usada em todo o corpo desse trabalho, mudando sempre os dados de cada um dos períodos analisados. Aqui inserimos os pontos tabelados e usamos um comando para o cálculo do polinômio através da Fórmula de Lagrange, a partir dos pontos tabelados (conhecidos como Nós da Interpolação) contidos na Tabela 1. A partir daqui, onde se vê  $(\%in)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , representa o comando inserido no programa. E  $(\%on)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , representa o que foi gerado por ele após a inserção de cada comando.

```
(%i1) Pontos:[[1,0],[2,1],[3,1.86],[4,11.71],[5,31.71],[6,75.86],[7,136.43],[8,198.71],[9,363.86],
[10,457.14],[11,693.14],[12,1013.14],[13,826.86],[14,996.86],[15,986],[16,870.86],[17,803],
[18,672.86],[19,664.14],[20,565.14]];
(%o1) [[1,0],[2,1],[3,1.86],[4,11.71],[5,31.71],[6,75.86],[7,136.43],[8,198.71],[9,363.86],
[10,457.14],[11,693.14],[12,1013.14],[13,826.86],[14,996.86],[15,986],[16,870.86],[17,803],
[18,672.86],[19,664.14],[20,565.14]]

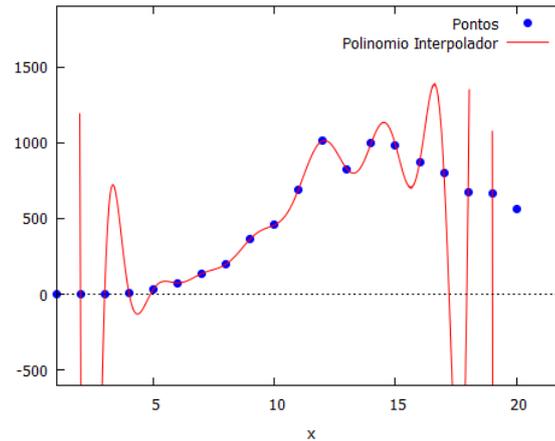
(%i2) load("interpol");
(%o2) "C:/maxima-5.44.0/share/maxima/5.44.0/share/numeric/interpol.mac"

(%i3) lagrange(Pontos);
```

$$\begin{aligned}
& (\%o3) 4.645809803277273 * 10^{-15} * (x-19) * (x-18) * (x-17) * (x-16) * (x-15) * (x-14) * \\
& (x-13) * (x-12) * (x-11) * (x-10) * (x-9) * (x-8) * (x-7) * (x-6) * (x-5) * (x-4) * (x-3) * (x- \\
& 2) * (x-1) - 1.037334011611685 * 10^{-13} * (x-20) * (x-18) * (x-17) * (x-16) * (x-15) * (x- \\
& 14) * (x-13) * (x-12) * (x-11) * (x-10) * (x-9) * (x-8) * (x-7) * (x-6) * (x-5) * (x-4) * (x- \\
& 3) * (x-2) * (x-1) + 9.458585640794634 * 10^{-13} * (x-20) * (x-19) * (x-17) * (x-16) * (x-15) * \\
& (x-14) * (x-13) * (x-12) * (x-11) * (x-10) * (x-9) * (x-8) * (x-7) * (x-6) * (x-5) * (x-4) * \\
& (x-3) * (x-2) * (x-1) - (73 * (x-20) * (x-19) * (x-18) * (x-16) * (x-15) * (x-14) * (x-13) * \\
& (x-12) * (x-11) * (x-10) * (x-9) * (x-8) * (x-7) * (x-6) * (x-5) * (x-4) * (x-3) * (x-2) * (x- \\
& 1)) / 11412430848000 + 2.774837086455252 * 10^{-11} * (x-20) * (x-19) * (x-18) * (x-17) * (x- \\
& 15) * (x-14) * (x-13) * (x-12) * (x-11) * (x-10) * (x-9) * (x-8) * (x-7) * (x-6) * (x-5) * (x- \\
& 4) * (x-3) * (x-2) * (x-1) - (493 * (x-20) * (x-19) * (x-18) * (x-17) * (x-16) * (x-14) * (x- \\
& 13) * (x-12) * (x-11) * (x-10) * (x-9) * (x-8) * (x-7) * (x-6) * (x-5) * (x-4) * (x-3) * (x-2) * \\
& (x-1)) / 5230697472000 + 2.223419227663055 * 10^{-10} * (x-20) * (x-19) * (x-18) * (x-17) * \\
& (x-16) * (x-15) * (x-13) * (x-12) * (x-11) * (x-10) * (x-9) * (x-8) * (x-7) * (x-6) * (x-5) * \\
& (x-4) * (x-3) * (x-2) * (x-1) - 3.425030810116789 * 10^{-10} * (x-20) * (x-19) * (x-18) * (x- \\
& 17) * (x-16) * (x-15) * (x-14) * (x-12) * (x-11) * (x-10) * (x-9) * (x-8) * (x-7) * (x-6) * (x- \\
& 5) * (x-4) * (x-3) * (x-2) * (x-1) + 6.294963563895442 * 10^{-10} * (x-20) * (x-19) * (x-18) * \\
& (x-17) * (x-16) * (x-15) * (x-14) * (x-13) * (x-11) * (x-10) * (x-9) * (x-8) * (x-7) * (x-6) * \\
& (x-5) * (x-4) * (x-3) * (x-2) * (x-1) - 5.263745658871687 * 10^{-10} * (x-20) * (x-19) * (x- \\
& 18) * (x-17) * (x-16) * (x-15) * (x-14) * (x-13) * (x-12) * (x-10) * (x-9) * (x-8) * (x-7) * (x- \\
& 6) * (x-5) * (x-4) * (x-3) * (x-2) * (x-1) + 3.471547869833804 * 10^{-10} * (x-20) * (x-19) * (x- \\
& 18) * (x-17) * (x-16) * (x-15) * (x-14) * (x-13) * (x-12) * (x-11) * (x-9) * (x-8) * (x-7) * (x- \\
& 6) * (x-5) * (x-4) * (x-3) * (x-2) * (x-1) - 2.260778808811216 * 10^{-10} * (x-20) * (x-19) * (x- \\
& 18) * (x-17) * (x-16) * (x-15) * (x-14) * (x-13) * (x-12) * (x-11) * (x-10) * (x-8) * (x-7) * \\
& (x-6) * (x-5) * (x-4) * (x-3) * (x-2) * (x-1) + 8.230992819562045 * 10^{-11} * (x-20) * (x-19) * \\
& (x-18) * (x-17) * (x-16) * (x-15) * (x-14) * (x-13) * (x-12) * (x-11) * (x-10) * (x-9) * (x- \\
& 7) * (x-6) * (x-5) * (x-4) * (x-3) * (x-2) * (x-1) - 3.042965764802185 * 10^{-11} * (x-20) * (x- \\
& 19) * (x-18) * (x-17) * (x-16) * (x-15) * (x-14) * (x-13) * (x-12) * (x-11) * (x-10) * (x-9) * \\
& (x-8) * (x-6) * (x-5) * (x-4) * (x-3) * (x-2) * (x-1) + 7.25142300869814 * 10^{-12} * (x-20) * \\
& (x-19) * (x-18) * (x-17) * (x-16) * (x-15) * (x-14) * (x-13) * (x-12) * (x-11) * (x-10) * (x- \\
& 9) * (x-8) * (x-7) * (x-5) * (x-4) * (x-3) * (x-2) * (x-1) - 1.010381508066693 * 10^{-12} * (x- \\
& 20) * (x-19) * (x-18) * (x-17) * (x-16) * (x-15) * (x-14) * (x-13) * (x-12) * (x-11) * (x-10) * \\
& (x-9) * (x-8) * (x-7) * (x-6) * (x-4) * (x-3) * (x-2) * (x-1) + 9.327946593709381 * 10^{-14} * \\
& (x-20) * (x-19) * (x-18) * (x-17) * (x-16) * (x-15) * (x-14) * (x-13) * (x-12) * (x-11) * \\
& (x-10) * (x-9) * (x-8) * (x-7) * (x-6) * (x-5) * (x-3) * (x-2) * (x-1) - 2.614655246541334 * \\
& 10^{-15} * (x-20) * (x-19) * (x-18) * (x-17) * (x-16) * (x-15) * (x-14) * (x-13) * (x-12) * \\
& (x-11) * (x-10) * (x-9) * (x-8) * (x-7) * (x-6) * (x-5) * (x-4) * (x-2) * (x-1) + ((x- \\
& 20) * (x-19) * (x-18) * (x-17) * (x-16) * (x-15) * (x-14) * (x-13) * (x-12) * (x-11) * (x- \\
& 10) * (x-9) * (x-8) * (x-7) * (x-6) * (x-5) * (x-4) * (x-3) * (x-1)) / 6402373705728000.
\end{aligned}$$

Na Figura 1 a seguir, temos o gráfico do polinômio interpolador calculado através do Teorema de Lagrange 3.9 e gerado pelo MAXIMA, com a inserção da série de dados contidos na Tabela 1. Ela diz respeito à quantidade de infectados que correspondem ao período de 18/03/2020 a 24/09/2020

Figura 1: Infectados do dia 18/03/2020 a 24/09/2020



Aqui contém os procedimentos necessários para que o Software Maxima consiga simplificar o polinômio interpolador e plotar o gráfico do mesmo:

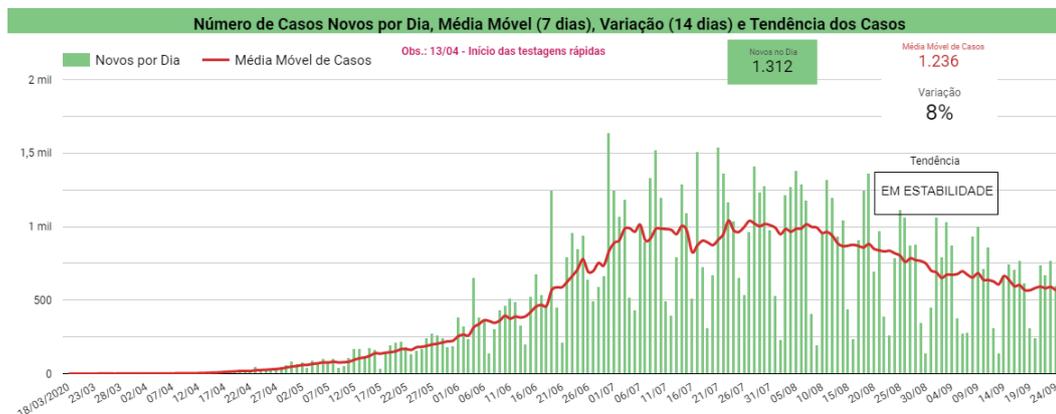
```
(%i4) p:ratsimp(%);
rat: replaced -2.614655246541334e-15 by -1/382459600103226 = -2.614655246541333e-15
rat: replaced 9.327946593709381e-14 by 4/42881892170111 = 9.327946593709383e-14
rat: replaced -1.010381508066693e-12 by -10/9897251602649 = -1.010381508066694e-12
rat: replaced 7.25142300869814e-12 by 116/15996860183285 = 7.25142300869814e-12
rat: replaced -3.042965764802185e-11 by -95/3121954282196 = -3.042965764802182e-11
rat: replaced 8.230992819562045e-11 by 272/3304583128217 = 8.230992819562043e-11
rat: replaced -2.260778808811216e-10 by -223/986385749596 = -2.260778808811213e-10
rat: replaced 3.471547869833804e-10 by 288/829601119727 = 3.471547869833798e-10
rat: replaced -5.263745658871687e-10 by -169/321064145102 = -5.263745658871681e-10
rat: replaced 6.294963563895442e-10 by 301/478160035312 = 6.294963563895447e-10
rat: replaced -3.425030810116789e-10 by -175/510944308831 = -3.425030810116784e-10
rat: replaced 2.223419227663055e-10 by 65/292342528981 = 2.223419227663058e-10
rat: replaced 2.774837086455252e-11 by 409/14739604065278 = 2.774837086455252e-11
rat: replaced 9.458585640794634e-13 by 33/34888937155331 = 9.45858564079463e-13
rat: replaced -1.037334011611685e-13 by -9/86760868719776 = -1.037334011611685e-13
rat: replaced 4.645809803277273e-15 by 1/215247726950547 = 4.645809803277269e-15
```

```
(%o4) (666879[185 digitos]217632*x19-130567[188 digitos]113553*x18+118860[190 digitos]
424959 * x17 - 668095[191 digitos]681272 * x16 + 259680[193 digitos]797708 * x15 -
740770[194 digitos]037526*x14+160634[196 digitos]842458*x13-270605[197 digitos]809364*
x12+358852[198 digitos]839524*x11-377289[199 digitos]188049*x10+315205[200 digitos]
621807 * x9 - 208810[201 digitos]746956 * x8 + 108963[202 digitos]415800 * x7 -
442692[202 digitos]576112*x6+137499[203 digitos]448176*x5-317663[203 digitos]161408*
x4 + 523481[203 digitos]934336 * x3 - 574928[203 digitos]989760 * x2 + 371647[203 digitos]
817600 * x - 104856[203 digitos]056000)/739359[195 digitos]856000
```

```
(%i5) plot2d([[discrete, Pontos],p],[x,1,22],[y,-1100,1400],[style,[points,2,7],[lines,1,2]],
[legend, "Pontos", "Polinomio Interpolador"]);
plot2d: some values were clipped.
```

Note que os pontos centrais, a partir do quinto ponto e até o décimo sexto ponto, isto é, compreendidos entre os dias 27/04/20 e 15/08/20, houve uma significativa aproximação com o gráfico oficial da Figura 2, apresentando variações mínimas. Porém, no começo e no final, o polinômio interpolador apresentou uma grande variação, visto que ele tende a assumir valores bem maiores tanto positivamente quanto negativamente nos pontos dos extremos. Isso acontece uma vez que o polinômio de interpolação não tem como propriedade se assemelhar graficamente a todas funções que tenham em comum esses mesmos pontos. O método de interpolação polinomial apenas gera um polinômio que contém tais pontos (os nós) em seu gráfico. Nesse caso, as distorções aconteceram nos quatro ou cinco primeiros pontos e também nos quatro ou cinco últimos pontos.

Figura 2: Infectados do dia 18/03/2020 a 24/09/2020



Fonte: Painel COVID-19 Piauí

As Figuras 1 e 2 apresentam gráficos que mostram a relação entre os dados tabelados no programa e os fornecidos oficialmente. Na Figura 2 temos o gráfico da situação real

baseado na média movel dos casos de pessoas infectadas no estado do Piauí durante o mesmo período de 18/03/2020 a 24/09/2020.

Elencamos aqui, os procedimentos necessários para que o Software Maxima consiga reescrever o polinômio interpolador na forma reduzida e calcular o Erro na aplicação do método:

```
(%i5) expand(p);
(%o5) (208399[184 digitos]131801 * x19)/231049[194 digitos]808000 - (118697[187 digitos]
010323 * x18)/672144[194 digitos]896000 + (396201[189 digitos]141653 * x17)/246453[195
digitos]952000 - (163748[189 digitos]099709 * x16)/181215[193 digitos]632000 + (127294[191
digitos]170577 * x15)/362430[193 digitos]264000 - (103749[192 digitos]266159 * x14)/103551
[193 digitos]504000 + (472453[194 digitos]671837 * x13)/217458[194 digitos]584000 - (397949
[195 digitos]938373 * x12)/108729[194 digitos]792000 + (175908[196 digitos]293331 * x11)/
362430[193 digitos]264000 - (672529[196 digitos]503009 * x10)/1317930[193 digitos]096000 +
(618050[198 digitos]423957 * x9)/144972[194 digitos]056000 - (132932[197 digitos]682757 *
x8)/470689[191 digitos]432000 + (320481[198 digitos]491887 * x7)/217458[192 digitos]355840
- (162754[200 digitos]634471 * x6)/271823[193 digitos]448000 + (624087[198 digitos]271943 *
x5)/335584[191 digitos]808000 - (324410[199 digitos]044849 * x4)/755064[191 digitos]568000
+ (252450[199 digitos]658851 * x3)/356558[191 digitos]296000 - (198043[197 digitos]604569 *
x2)/254684[189 digitos]766400 + (169338[193 digitos]438249 * x)/336884[185 digitos]424440
- 861983[185 digitos]852458/607800[178 digitos]923733
```

```
(%i6) p(x):=(208399[184 digitos]131801 * x19)/231049[194 digitos]808000 - (118697[187
digitos]010323 * x18)/672144[194 digitos]896000 + (396201[189 digitos]141653 * x17)/246453
[195 digitos]952000 - (163748[189 digitos]099709 * x16)/181215[193 digitos]632000 + (127294
[191 digitos]170577 * x15)/362430[193 digitos]264000 - (103749[192 digitos]266159 * x14)/
103551 [193 digitos]504000 + (472453[194 digitos]671837 * x13)/217458[194 digitos]584000 -
(397949 [195 digitos]938373 * x12)/108729[194 digitos]792000 + (175908[196 digitos]293331 *
x11)/362430[193 digitos]264000 - (672529[196 digitos]503009 * x10)/1317930[193 digitos]
096000 + (618050[198 digitos]423957 * x9)/144972[194 digitos]056000 - (132932[197 digitos]
682757 * x8)/470689[191 digitos]432000 + (320481[198 digitos]491887 * x7)/217458[192 digitos]
355840 - (162754[200 digitos]634471 * x6)/271823[193 digitos]448000 + (624087[198 digitos]
271943 * x5)/335584[191 digitos]808000 - (324410[199 digitos]044849 * x4)/755064[191 digitos]
568000 + (252450[199 digitos]658851 * x3)/356558[191 digitos]296000 - (198043[197 digitos]
604569 * x2)/254684[189 digitos]766400 + (169338[193 digitos]438249 * x)/336884[185 digitos]
424440 - 861983[185 digitos]852458/607800[178 digitos]923733
```

```
(%o6) p(x):=(208399[184 digitos]131801 * x19)/231049[194 digitos]808000 - (118697[187
digitos]010323 * x18)/672144[194 digitos]896000 + (396201[189 digitos]141653 * x17)/246453
```

$[195 \text{ digitos}]952000 - (163748[189 \text{ digitos}]099709 * x^{16}) / 181215[193 \text{ digitos}]632000 + (127294$   
 $[191 \text{ digitos}]170577 * x^{15}) / 362430[193 \text{ digitos}]264000 - (103749[192 \text{ digitos}]266159 * x^{14}) /$   
 $103551 [193 \text{ digitos}]504000 + (472453[194 \text{ digitos}]671837 * x^{13}) / 217458[194 \text{ digitos}]584000 -$   
 $(397949 [195 \text{ digitos}]938373 * x^{12}) / 108729[194 \text{ digitos}]792000 + (175908[196 \text{ digitos}]293331 * x^{11}) /$   
 $362430[193 \text{ digitos}]264000 - (672529[196 \text{ digitos}]503009 * x^{10}) / 1317930[193 \text{ digitos}]$   
 $096000 + (618050[198 \text{ digitos}]423957 * x^9) / 144972[194 \text{ digitos}]056000 - (132932[197 \text{ digitos}]$   
 $682757 * x^8) / 470689[191 \text{ digitos}]432000 + (320481[198 \text{ digitos}]491887 * x^7) / 217458[192 \text{ digitos}]$   
 $355840 - (162754[200 \text{ digitos}]634471 * x^6) / 271823[193 \text{ digitos}]448000 + (624087[198 \text{ digitos}]$   
 $271943 * x^5) / 335584[191 \text{ digitos}]808000 - (324410[199 \text{ digitos}]044849 * x^4) / 755064[191 \text{ digitos}]$   
 $568000 + (252450[199 \text{ digitos}]658851 * x^3) / 356558[191 \text{ digitos}]296000 - (198043[197 \text{ digitos}]$   
 $604569 * x^2) / 254684[189 \text{ digitos}]766400 + (169338[193 \text{ digitos}]438249 * x) / 336884[185 \text{ digitos}]$   
 $424440 - 861983[185 \text{ digitos}]852458 / 607800[178 \text{ digitos}]923733.$

```

(%i8) p(6.6); "dia 13/05/20";
(%o7) 104.0510067753494
(%o8) "dia 13/05/20"
(%i9) abs(104.71-p(6.6));
(%o9) 0.6589932246506152
(%i11) p(11.2); "dia 28/06/20";
(%o10) 777.735335033387
(%o11) "dia 28/06/20"
(%i12) abs(753.86-p(11.2));
(%o12) 23.87533503338693
(%i14) p(17.7); "dia 01/09/20";
(%o13) -1417.484257180244
(%o14) "dia 01/09/20"
(%i15) abs(689.43-p(17.7));
(%o15) 2106.914257180244

```

Para elucidar a proximidade entre o que foi gerado e o que está disponível no site da SESAPI, foi estimado o erro de aproximação na aplicação do método que gerou o polinômio interpolador e o gráfico do governo estadual, como está descrito na Definição 3.11. Para tal, foram selecionados três pontos aleatoriamente entre os intervalos dos pontos  $x$  mostrados anteriormente na Tabela 1, onde dois pontos estão situados na parte central, na qual houve uma maior precisão, e um ponto está em um dos extremos onde aconteceu um distanciamento maior do polinômio. Como são 10 dias entre os pontos tabelados, para o primeiro intervalo fizemos a seguinte relação:

18/03/20 → 1

$$\begin{array}{rcl}
19/03/20 & \rightarrow & 1.1 \\
& \vdots & \vdots \\
23/03/20 & \rightarrow & 1.5 \\
& \vdots & \vdots \\
27/03/20 & \rightarrow & 1.9 \\
28/03/20 & \rightarrow & 2,
\end{array}$$

afim de relacionar as datas a um número real para que esse pudesse ser usado como valor da abscissa do polinômio interpolador e então nos retornar um resultado que nesse caso é a ordenada  $P(x)$ . Essa mesma ideia de associação das datas foi feita entre cada um dos 19 intervalos do período estudado.

Tabela 2: ERRO DE APROXIMAÇÃO DA MÉDIA MÓVEL DE INFECTADOS

DIA	VALOR OFICIAL	$x$	$P(x)$	ERRO
13/05/20	104,71	6.6	104,05	0,65
28/06/20	753,86	11.2	777,73	23,87
01/09/20	689,43	17.7	-1417,48	2106,91

Fonte: adaptado pelo autor.

Com os valores aplicados no polinômio interpolador e baseado nesses três erros obtidos na Tabela 2, constata-se que, de fato, a parte central do gráfico da Figura 1 teve uma excelente proximidade com o gráfico do governo estadual (ver Figura 2) e na extremidade final houve uma enorme variação, revelando uma distorção entre o valor obtido pela Interpolação Polinomial de Lagrange e o valor da realidade.

#### 4.1.2 Período entre 16 de Julho de 2020 e 13 de Dezembro de 2020

A mesma lógica apresentada na Subseção 4.1.1, foi utilizada para realização do cálculo e geração gráfica dos infectadas por COVID-19, no período de 16/07/2020 a 13/12/2020, demonstrado pelo gráfico que está representado na Figura 3. Nessa situação buscou-se analisar o período compreendido entre o final do primeiro semestre e o início do segundo semestre, haja vista que houve uma instabilidade gráfica, geralmente em 4 ou 5 pontos, no tempo analisado.

Além disso, ficaria um pequeno intervalo sem representação gráfica exatamente entre os dias 24/09/2020 e 04/10/2020. E para que não houvesse toda essa perda que foi gerada devido às variações do polinômio interpolador, fez-se necessário essa análise em particular. Observe que a Figura 3 apresenta uma quantidade menor de pontos e, conseqüentemente, de pares  $(x, f(x))$  inseridos no software, 16 para ser mais exato.

A escolha dessa quantidade de pontos não foi por acaso, já que foi possível observar nos gráficos das Figuras 9 e 11, o comportamento do polinômio interpolador e perceber que as variações se deram de forma mais acentuadas nos quatro últimos pontos do primeiro semestre e nos quatro primeiros pontos do segundo semestre. Essa situação ocorre num intervalo de oito pontos tabelados situados entre os dias 25/08/2020 e 03/11/2020.

Com base nessas observações, foram selecionados mais oito pontos a partir dos extremos do intervalo citado: quatro pontos antes do dia 25/08/2020 e quatro pontos depois do dia 03/11/2020. Com isso, qualquer instabilidade gráfica que viesse a acontecer, seriam nesses oito novos pontos, agora extremos, e não nos oito pontos contidos no meio do intervalo que de fato nos interessa.

A seguir, foi feita a relação dentre o período de 16 de julho de 2020 até 13 de Dezembro de 2020 com um número natural (do 1 até o 16) da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl}
 16/07/20 & \rightarrow & 1 \\
 26/07/20 & \rightarrow & 2 \\
 & \vdots & \vdots \\
 24/09/20 & \rightarrow & 8 \\
 & \vdots & \vdots \\
 03/12/20 & \rightarrow & 15 \\
 13/12/20 & \rightarrow & 16,
 \end{array}$$

para que os pontos sejam adequados numa tabela com a finalidade de interpolá-los polinomialmente. A partir daí foi montada a tabela de valores que segue logo abaixo, onde os pares  $(x, f(x))$  foram adaptados com base nos dados oficiais da COVID-19 no Piauí. Logo temos a seguinte tabela:

Tabela 3: MÉDIA MÓVEL DE INFECTADOS

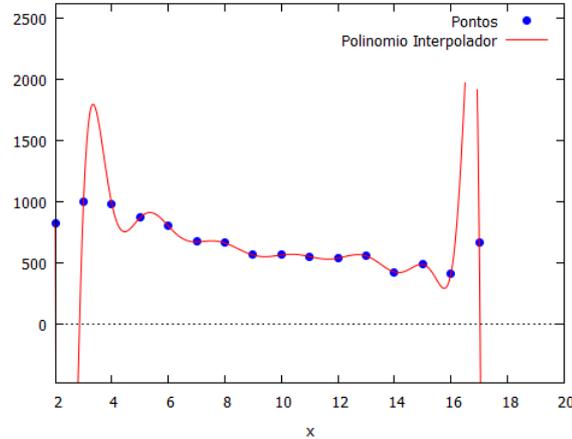
$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	826,86	996,86	986,00	870,86	803,00	672,86	664,14	565,14
$x$	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x)$	552,86	540,14	557,57	426,71	487,71	416	667,14	491,14

Fonte: adaptado pelo autor.

Na tabela acima, agora com uma quantidade menor de pontos, note que cada valor aplicado em  $x$  corresponde ao dia observado e que cada valor  $f(x)$  corresponde à média móvel do respectivo dia. A partir desses dados tabelados, foi possível montar o gráfico do

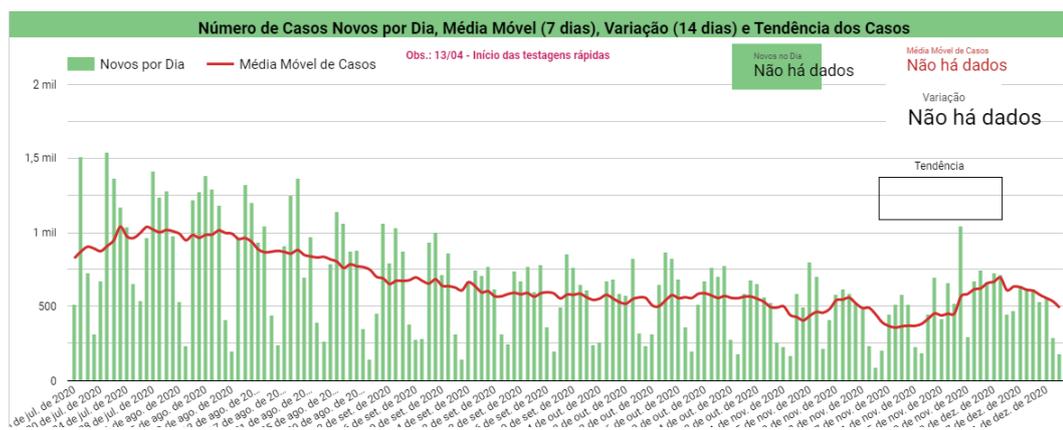
polinômio interpolador.

Figura 3: Infectados do dia 16/07/2020 a 13/12/2020



Perceba que nesse caso, referente ao período de 16/07/2020 a 13/12/2020, o polinômio interpolador contido na Figura 3, apresentou variação em uma menor quantidade de pontos das extremidades e por consequência uma aproximação mais precisa em uma quantidade maior de pontos centrais. Veja que foram apenas três pontos no início e dois no final do período estudado. Isso se deve à menor quantidade de pontos inseridos no MAXIMA e principalmente à menor variação nos valores da média móvel dentro do intervalo analisado.

Figura 4: Infectados do dia 16/07/2020 a 13/12/2020



Fonte: Painel COVID-19 Piauí

Para finalizar, foi estimado o erro de aproximação do polinômio, onde foram selecionados três pontos quaisquer entre os intervalos dos pontos  $x$  mostrados na Tabela 3. Dentre esses pontos, dois pontos estão situados na parte central e um ponto que está em um dos

extremos. Como são 10 dias entre os pontos tabelados, para o primeiro intervalo fizemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 16/07/20 &\rightarrow 1 \\
 17/07/20 &\rightarrow 1.1 \\
 &\vdots \\
 21/07/20 &\rightarrow 1.5 \\
 &\vdots \\
 25/07/20 &\rightarrow 1.9 \\
 26/07/20 &\rightarrow 2,
 \end{aligned}$$

afim de relacionar as datas a um número real para que esse pudesse ser usado como valor da abscissa do polinômio interpolador e então nos retornar um resultado que nesse caso é a ordenada  $P(x)$ . Essa mesma ideia de associação das datas foi feita entre cada um dos 15 intervalos do período estudado.

Tabela 4: ERRO DE APROXIMAÇÃO DA MÉDIA MÓVEL DE INFECTADOS

DIA	VALOR OFICIAL	$x$	$P(x)$	ERRO
15/09/20	636,71	7.1	673,91	37,20
07/11/20	554	12.4	560,48	6,48
06/12/20	634,29	15.3	433,79	200,50

Fonte: adaptado pelo autor.

Partindo dos valores aplicados no polinômio interpolante e dos números desses três erros da Tabela 4, verifica-se que a parte central do gráfico da Figura 3 teve uma excelente proximidade e na extremidade final houve uma grande variação.

#### 4.1.3 Período entre 04 de Outubro de 2020 e 18 de Março de 2021

Valendo-se das mesmas ideias mostradas nas Subseções anteriores 4.1.1 e 4.1.2, foi realizado o cálculo e obtido o gráfico dos infectados por COVID-19, no período de 04/10/2020 a 18/03/2021, demonstrado pelo gráfico que está representado na Figura 5. Nessa situação buscou-se analisar o período referente à segunda parte do ano avaliado em questão. Aqui fizemos a relação dentre o período de 04 de Outubro de 2020 até 18 de Março de 2021 com um número natural (do 1 até o 18) do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 04/10/20 &\rightarrow 1 \\
 14/10/20 &\rightarrow 2
 \end{aligned}$$

$\vdots$              $\vdots$   
02/01/21  $\rightarrow$  10  
 $\vdots$              $\vdots$   
13/03/21  $\rightarrow$  17  
18/03/21  $\rightarrow$  18,

com a finalidade de adequar os pontos numa tabela para interpolá-los polinomialmente. Essa relação foi elaborada com as datas da média móvel em intervalos de 10 dias, a partir do dia 04/10/2020, exceto o intervalo dos dois últimos dias tabelados que foi de apenas cinco dias por conta do período a ser estudado, que foi de 1 ano. A partir disso foi montada a tabela de valores,  $(x, f(x))$  para interpolação, que foram adaptados com base nos dados oficiais da COVID-19 no Piauí. Logo temos a seguinte tabela:

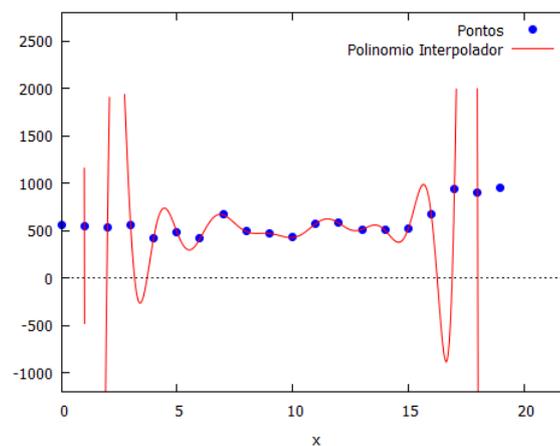
Tabela 5: MÉDIA MÓVEL DE INFECTADOS

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	552,86	540,14	557,57	426,71	487,71	416	667,14	491,14	470,00
$x$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$f(x)$	427,57	572,86	579,86	513,14	503,14	517,71	668,71	934,29	903,71

Fonte: adaptado pelo autor.

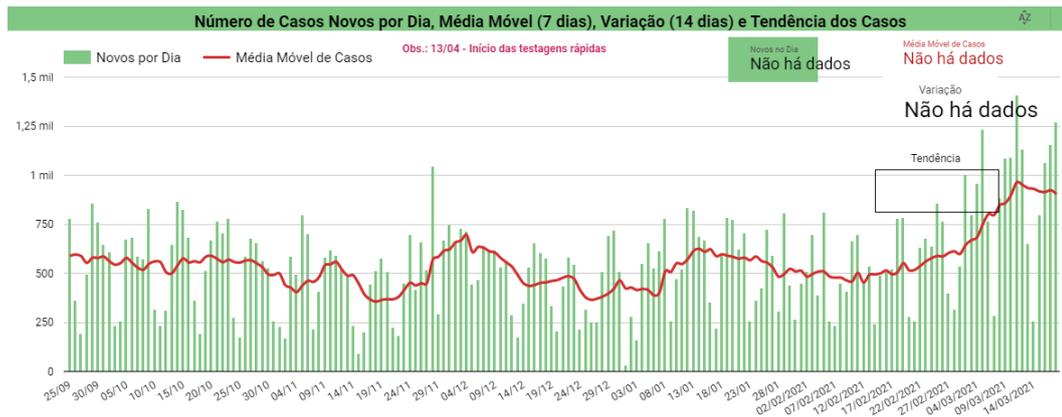
Cada valor aplicado em  $x$ , na tabela acima, corresponde ao dia observado e cada valor  $f(x)$  corresponde à média móvel de infectados do respectivo dia. Com base nessas informações, temos a seguir o gráfico do polinômio interpolador.

Figura 5: Infectados do dia 04/10/2020 a 18/03/2021



As Figuras 5 e 6 apresentam respectivamente os gráficos que mostram a relação entre os dados tabelados no software MAXIMA e os fornecidos oficialmente, onde é possível ver a proximidade entre eles. Na Figura 6 temos o gráfico da situação real baseado na média movel dos casos de pessoas infectadas no estado do Piauí durante esse período de 04/10/2020 a 18/03/2021.

Figura 6: Infectados do dia 04/10/2020 a 18/03/2021



Fonte: Painel COVID-19 Piauí

Comparando os dois gráficos acima, vê-se uma boa aproximação nos pontos centrais, mais especificamente a partir do quinto ponto até o 15<sup>o</sup> ponto, isto é, compreendidos entre os dias 13/11/20 e 21/02/21, apresentando poucas variações. Porém, os valores nos cinco primeiros pontos e nos quatro últimos pontos ficaram um pouco distantes.

Por fim, pudemos estimar o erro de aproximação do polinômio, valendo-se da Definição 3.11. Selecionamos três pontos entre os intervalos dos pontos  $x$  já mostrado na Tabela 5, onde dois pontos estão situados na parte central e um ponto está em um dos extremos. Como são 10 dias entre os pontos tabelados, para o primeiro intervalo fizemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 04/10/20 &\rightarrow 1 \\
 05/10/20 &\rightarrow 1.1 \\
 &\vdots \\
 09/10/20 &\rightarrow 1.5 \\
 &\vdots \\
 13/10/20 &\rightarrow 1.9 \\
 14/10/20 &\rightarrow 2,
 \end{aligned}$$

afim de relacionar as datas a um número real para que esse pudesse ser usado como valor

da abscissa do polinômio interpolador e então nos retornar um resultado que nesse caso é a ordenada  $P(x)$ . Essa mesma ideia de associação das datas foi feita entre cada um dos 17 intervalos do período estudado.

Tabela 6: ERRO DE APROXIMAÇÃO DA MÉDIA MÓVEL DE INFECTADOS

DIA	VALOR OFICIAL	$x$	$P(x)$	ERRO
07/10/20	528,43	1.3	-17832,31	18360,74
01/01/21	423,57	9.9	426,84	3,27
03/01/21	414,57	10.1	431,21	16,64

Fonte: adaptado pelo autor.

Com base nos valores aplicados no polinômio interpolador e nos números obtidos nesses três erros da Tabela 6, constata-se que a parte central do gráfico da Figura 5 teve uma excelente proximidade e na extremidade inicial houve uma enorme variação.

#### 4.1.4 Período entre 18 de Março de 2020 e 18 de Março de 2021

Aqui, veremos o resultado da aplicação dos dados reais no algoritmo em comparação com os dados oficiais, a respeito dos infectados por COVID-19 no estado do Piauí compreendido entre os dias 18/03/2020 e 18/03/2021. Nesse caso, devido às limitações na quantidade de inserção de dados encontradas durante os testes do MAXIMA, o gráfico da Figura 7 foi elaborado com os números da média móvel em intervalos de 20 dias, a partir do dia 18/03/2020, exceto o intervalo dos dois últimos pontos que foi de apenas cinco dias por conta do período a ser estudado, que foi um ano. Foi feita a seguinte relação dentre o período de 18 de Março de 2020 até 18 de Março de 2021 com um número natural (do 1 até o 20) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 18/03/20 &\rightarrow 1 \\
 07/04/20 &\rightarrow 2 \\
 &\vdots \\
 14/09/20 &\rightarrow 10 \\
 &\vdots \\
 13/03/21 &\rightarrow 19 \\
 18/03/21 &\rightarrow 20,
 \end{aligned}$$

com o intuito de adequar os pontos numa tabela para interpolá-los polinomialmente. Com isso, foi possível montar a tabela que contém os valores  $(x, f(x))$ , onde esses foram adaptados com base nos dados oficiais da COVID-19 no Piauí. Temos a seguinte tabela:

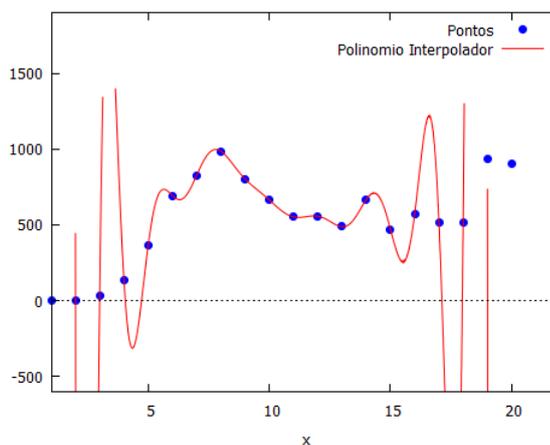
Tabela 7: MÉDIA MÓVEL DE INFECTADOS

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	0	1,86	31,71	136,43	363,86	693,14	826,86	986	803	664,14	552,86
$x$	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
$f(x)$	557,57	487,71	667,14	470	572,86	513,14	517,71	934,29	903,71		

Fonte: adaptado pelo autor.

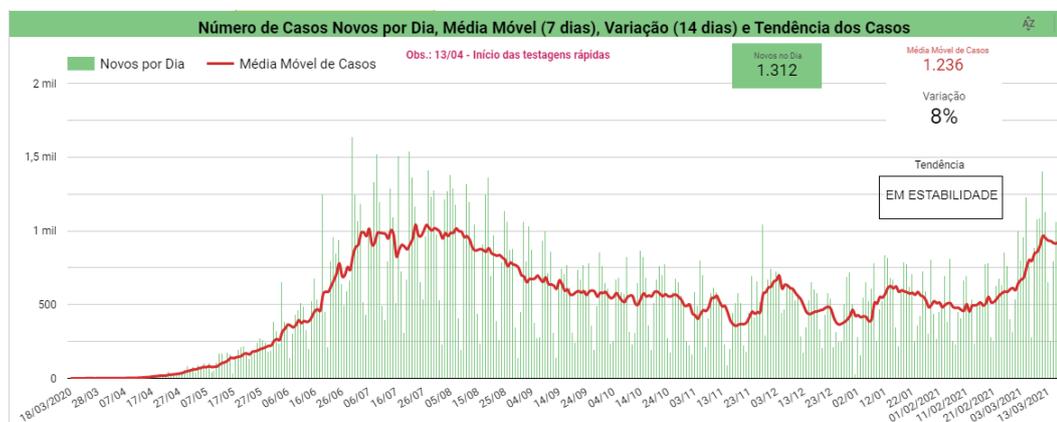
Nessa tabela, os valores aplicados em  $x$  correspondem aos dias analisados e os valores  $f(x)$ , à média móvel desses dias. Com isso, montamos o gráfico do polinômio interpolador.

Figura 7: Infectados do dia 18/03/2020 a 18/03/2021



Na Figura 8 temos o gráfico da situação real baseado na média móvel de infectados.

Figura 8: Infectados do dia 18/03/2020 a 18/03/2021



Fonte: Painel COVID-19 Piauí

As Figuras 7 e 8 apresentam respectivamente os gráficos que mostram a relação entre os

dados tabelados no software e os fornecidos oficialmente, onde é possível ver a proximidade deles. Comparando os dois gráficos acima, lembrando que aqui temos um intervalo de 20 dias entre os valores de  $x$  e maiores variações nos números da média móvel, conseguimos uma boa aproximação nos pontos centrais. Mais notadamente a partir do quinto ponto até o 15<sup>o</sup> ponto, ou seja, o período compreendido entre os dias 06/06/20 e 23/12/20, apresentou poucas variações. Nessa análise, aconteceram distorções de valores nos cinco primeiros pontos e nos seis últimos pontos.

Pela Definição 3.11, calculamos a estimativa do erro de aproximação do polinômio interpolador com o gráfico disponibilizado pela SESAPI. Para tal, foram selecionados três pontos entre os intervalos dos pontos  $x$  da Tabela 7, onde dois pontos estão situados na parte central e um ponto num dos extremos. Como são 20 dias entre os pontos tabelados, para o primeiro intervalo fizemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 18/03/20 &\rightarrow 1 \\
 20/03/20 &\rightarrow 1.1 \\
 &\vdots \\
 28/03/20 &\rightarrow 1.5 \\
 &\vdots \\
 05/04/20 &\rightarrow 1.9 \\
 07/04/20 &\rightarrow 2,
 \end{aligned}$$

afim de relacionar as datas a um número real para que esse pudesse ser usado como valor da abscissa do polinômio interpolador e então nos retornar um resultado que nesse caso é a ordenada  $P(x)$ . Essa mesma ideia de associação das datas foi feita entre cada um dos 19 intervalos do período estudado.

Tabela 8: ERRO DE APROXIMAÇÃO DA MÉDIA MÓVEL DE INFECTADOS

DIA	VALOR OFICIAL	$x$	$P(x)$	ERRO
13/05/20	104,71	3.8	797,33	692,62
21/08/20	838,86	8.8	838,45	0,40
16/10/20	555,29	11.6	556,04	0,75

Fonte: adaptado pelo autor.

Esses três erros da Tabela 8 nos mostram que a parte central do gráfico da Figura 7 teve uma excelente proximidade e na extremidade final houve uma maior variação.

## 4.2 Análise dos casos de óbitos

Nas análises de óbitos a seguir, aplicamos as mesmas técnicas da análise de infectados para obtenção dos próximos resultados. Os registros oficiais utilizados foram agrupados em intervalos de 10 dias nos três primeiros períodos e 20 dias no último período, e posteriormente armazenados em uma planilha própria, juntamente com os dados obtidos pela aplicação da Interpolação Polinomial de Lagrange. A cada novo registro, feito pela SESAPI, da quantidade de óbitos por COVID-19, executamos o MAXIMA informando-se todos os dados a fim de obtermos o resultado do Polinômio Interpolante e da série de gráficos.

### 4.2.1 Período entre 18 de Março de 2020 e 24 de Setembro de 2020

Assim como na análise do caso de infectados, aqui também foi feita a relação dentre o período de 18 de Março de 2020 até 24 de Setembro de 2020 com um número natural (do 1 até o 20), em intervalos de 10 dias, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} 18/03/20 &\rightarrow 1 \\ 28/03/20 &\rightarrow 2 \\ &\vdots \\ 16/06/20 &\rightarrow 10 \\ &\vdots \\ 14/09/20 &\rightarrow 19 \\ 24/09/20 &\rightarrow 20, \end{aligned}$$

a fim de adequar os pontos numa tabela para interpolá-los polinomialmente. A partir daí foi montada a tabela de valores que segue abaixo, onde os pares  $(x, f(x))$  foram adaptados com base nos dados oficiais da COVID-19 no Piauí. Logo temos a seguinte tabela:

Tabela 9: MÉDIA MÓVEL DE ÓBITOS

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	0	0,14	0,14	0,29	1	1,86	5	6,71	11,14	16,43	19

$x$	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(x)$	24,43	24,14	20,14	18,86	18,29	14,43	11,43	10,43	10,43

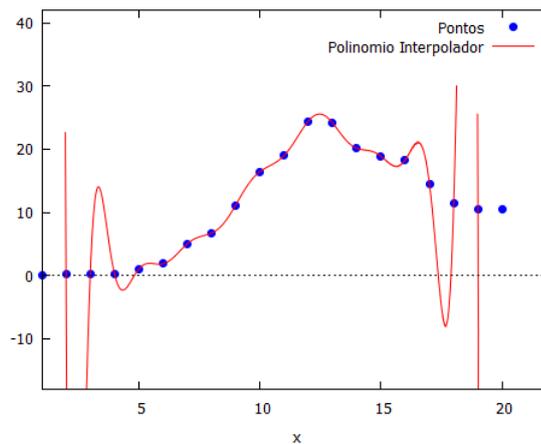
Fonte: adaptado pelo autor.

Na tabela acima, note que cada valor aplicado em  $x$  corresponde ao dia observado e que cada valor  $f(x)$  corresponde à média móvel do respectivo dia. Tendo essas informações

em mãos, mesmo desconhecendo a função que gerou o gráfico da Figura 10, foi possível montar o gráfico do polinômio interpolador.

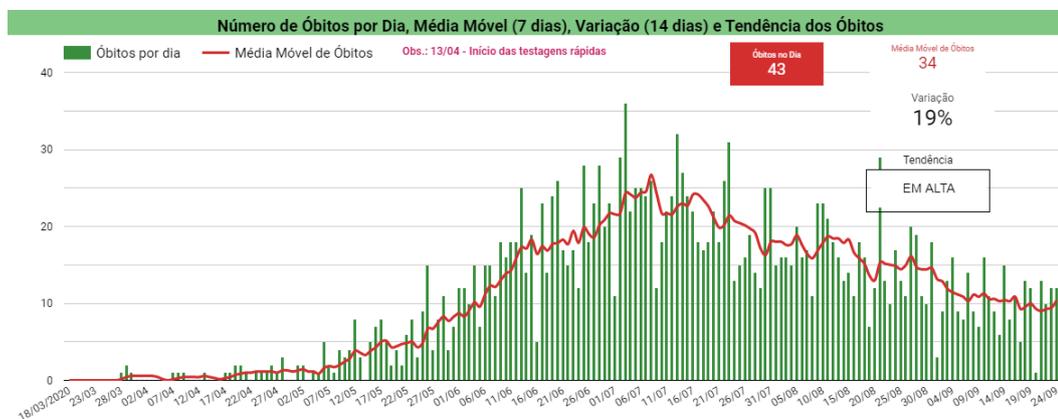
A Figura 9 foi feita a partir da inserção dos dados correspondentes ao período de 18/03/2020 a 24/09/2020. Nela temos o gráfico do polinômio interpolador calculado pelo Teorema de Lagrange 3.9 e gerado através do MAXIMA, onde foi determinada uma aproximação gráfica dos pontos tabelados com o gráfico oficial da Figura 10.

Figura 9: Óbitos do dia 18/03/2020 a 24/09/2020



Perceba que nos pontos centrais, do quinto ponto até o décimo sexto ponto, isto é, compreendidos entre os dias 27/04/20 e 15/08/20, houve uma significativa aproximação com o gráfico oficial, apresentando variações mínimas. Porém, nesse caso, o polinômio interpolador apresentou uma grande variação nos quatro ou cinco primeiros e últimos pontos.

Figura 10: Óbitos do dia 18/03/2020 a 24/09/2020



Fonte: Painel COVID-19 Piauí

As Figuras 9 e 10 apresentam os gráficos que mostram a relação entre os dados inseridos

no programa e os dados que são fornecidos oficialmente. Na Figura 10 temos o gráfico da situação real baseado na média móvel dos casos de pessoas que vieram a óbito no estado do Piauí durante esse período analisado.

Tendo em mãos a fórmula apresentada na Definição 3.11, estimamos o erro para demonstrar a proximidade entre o que foi calculado pelo polinômio interpolador e o que é disponibilizado pela SESAPI. A partir daí foram selecionados três pontos aleatoriamente entre os intervalos dos pontos  $x$  já mostrados na Tabela 9, dos quais dois pontos estão situados na parte central, na qual houve uma maior precisão, e um ponto está em um dos extremos onde aconteceu um distanciamento maior do polinômio. Como são dez dias entre os pontos tabelados, para o primeiro intervalo fizemos a seguinte relação:

$$\begin{array}{rcl}
 18/03/20 & \rightarrow & 1 \\
 \\
 19/03/20 & \rightarrow & 1.1 \\
 & \vdots & \vdots \\
 23/03/20 & \rightarrow & 1.5 \\
 & \vdots & \vdots \\
 27/03/20 & \rightarrow & 1.9 \\
 \\
 28/03/20 & \rightarrow & 2,
 \end{array}$$

afim de relacionar as datas a um número real para que esse pudesse ser usado como valor da abscissa do polinômio interpolador e então nos retornar um resultado que nesse caso é a ordenada  $P(x)$ . Essa mesma ideia de associação das datas foi feita entre cada um dos dezenove intervalos do período estudado.

Tabela 10: ERRO DE APROXIMAÇÃO DA MÉDIA MÓVEL DE ÓBITOS

DIA	VALOR OFICIAL	$x$	$P(x)$	ERRO
01/04/20	0,57	2.4	-94,24	94,81
16/05/20	4,29	6.9	4,65	0,36
04/07/20	24,14	11.8	23,39	0,75

Fonte: adaptado pelo autor.

Logo, os valores desses três erros da Tabela 10 nos permite dizer que a parte central do gráfico da Figura 9, de fato teve uma excelente proximidade central e na extremidade inicial houve uma variação bem considerável.

### 4.2.2 Período entre 04 de Outubro de 2020 e 18 de Março de 2021

Partindo dos mesmos princípios usados nos gráficos anteriores, determinou-se o polinômio interpolador dos óbitos por COVID-19, no período de 04/10/2020 a 18/03/2021, que está demonstrado pelo gráfico representado na Figura 11. Nesse caso buscou-se analisar o período referente à segunda parte do ano estudado. Aqui foi feita a relação dentre o período de 04 de Outubro de 2020 até 18 de Março de 2021 com um número natural (do 1 até o 18) da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} 04/10/20 & \rightarrow 1 \\ 14/10/20 & \rightarrow 2 \\ & \vdots \\ 02/01/21 & \rightarrow 10 \\ & \vdots \\ 13/03/21 & \rightarrow 17 \\ 18/03/21 & \rightarrow 18, \end{array}$$

com o intuito de adequar os pontos numa tabela para interpolá-los polinomialmente. Essa relação foi elaborada com as datas da média móvel em intervalos de dez dias, a partir do dia 04/10/2020, exceto o intervalo dos dois últimos dias tabelados que, nesse caso, foi de apenas cinco dias por conta do prazo estudado, 1 ano. A partir disso foi montada a tabela de valores,  $(x, f(x))$  para interpolação, que foram adaptados com base nos dados oficiais da COVID-19 no Estado do Piauí. Logo temos a seguinte tabela:

Tabela 11: MÉDIA MÓVEL DE ÓBITOS

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	7,86	10,43	8,71	10,43	8,43	7,29	7,14	6,14	6,14

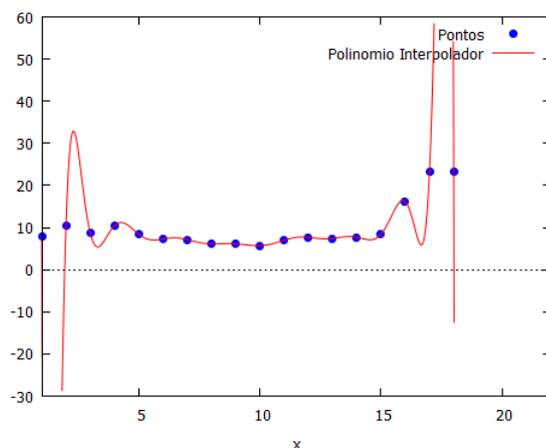
$x$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$f(x)$	5,71	7	7,71	7,43	7,71	8,43	16,14	23,29	23,29

Fonte: adaptado pelo autor.

Cada valor aplicado em  $x$ , na tabela acima, corresponde ao dia observado e cada valor  $f(x)$  corresponde à média móvel do respectivo dia avaliado. Com base nessas informações, foi possível montar o gráfico do polinômio interpolador e então compará-lo com o oficial fornecido pelo governo estadual (ver Figura 12).

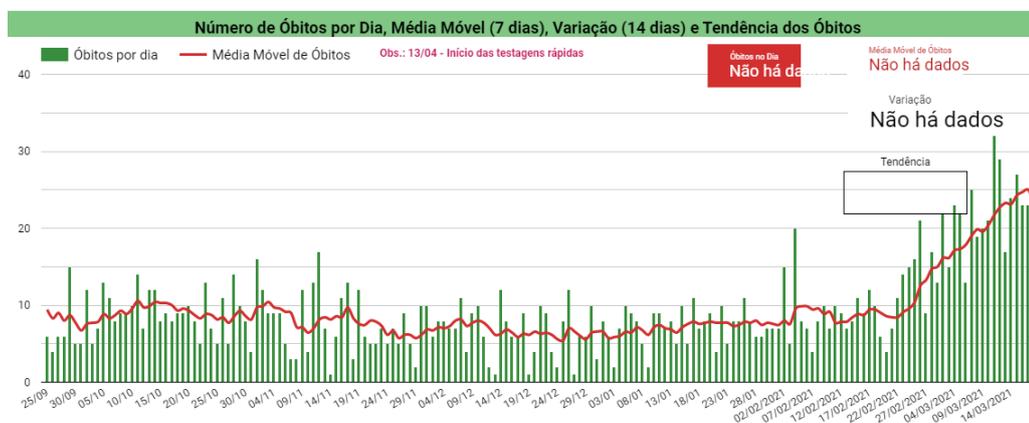
As Figuras 11 e 12 apresentam os gráficos que mostram a relação entre os dados tabelados no polinômio e os fornecidos oficialmente, onde nota-se a proximidade dos mesmos.

Figura 11: Óbitos do dia 04/10/2020 a 18/03/2021



Logo abaixo, temos o gráfico da situação real da Covid-19 baseado na média móvel dos casos de pessoas que morreram no estado do Piauí durante esse mesmo período, representado pela Figura 12.

Figura 12: Óbitos do dia 04/10/2020 a 18/03/2021



Fonte: Painel COVID-19 Piauí

Comparando esses dois gráficos, temos uma aproximação significativa nos pontos centrais, mais especificamente a partir do quarto ponto até o décimo sexto ponto. Ou seja, no período compreendido entre os dias 03/11/20 e 03/03/21, o polinômio apresentou mínimas variações. Todavia, no início e no final, o polinômio interpolador apresentou uma certa discrepância. Nessa análise, isso aconteceu nos quatro primeiros pontos e nos três últimos pontos, onde houve um distanciamento maior nos números da média móvel de óbitos. É notório que os pontos tabelados referentes ao intervalo dos dias 03/11/20 e 03/03/21, tiveram pouca diferença nos valores da média móvel, o que acabou gerando uma maior estabilidade gráfica e conseqüentemente uma melhor aproximação.

Por fim, pudemos estimar o erro de aproximação do polinômio, de modo que foram selecionados três pontos entre os intervalos dos pontos  $x$  da Tabela 11. Dois desses pontos estão situados na parte central e um ponto situado em um dos extremos. Como são dez dias entre os pontos tabelados, para o primeiro intervalo fizemos a seguinte relação:

$$\begin{array}{rcl}
 04/10/20 & \rightarrow & 1 \\
 05/10/20 & \rightarrow & 1.1 \\
 & \vdots & \vdots \\
 09/10/20 & \rightarrow & 1.5 \\
 & \vdots & \vdots \\
 13/10/20 & \rightarrow & 1.9 \\
 14/10/20 & \rightarrow & 2,
 \end{array}$$

afim de relacionar as datas a um número real para que esse pudesse ser usado como valor da abscissa do polinômio interpolador e então nos retornar um resultado que nesse caso é a ordenada  $P(x)$ . Essa mesma ideia de associação das datas foi feita entre cada um dos dezessete intervalos do período estudado.

Tabela 12: ERRO DE APROXIMAÇÃO DA MÉDIA MÓVEL DE ÓBITOS

DIA	VALOR OFICIAL	$x$	$P(x)$	ERRO
18/12/20	6,29	8.5	6,18	0,11
13/02/21	7,86	14.2	7,44	0,42
09/03/21	19,57	16.6	6,19	13,38

Fonte: adaptado pelo autor.

Baseado nesses três erros da Tabela 12, note que na parte central do gráfico da Figura 11 houve uma aproximação bem precisa e na extremidade teve uma diferença considerável.

#### 4.2.3 Período entre 16 de Julho de 2020 e 13 de Dezembro de 2020

Para a realização dos cálculos e da geração gráfica dos óbitos por COVID-19, no período de 16/07/2020 a 13/12/2020, demonstrado pelo gráfico que está representado na Figura 13 logo mais a frente, aqui foi utilizada a mesma linha de raciocínio apresentada nas Subseções 4.2.1 e 4.2.2. Nessa situação buscou-se analisar o período compreendido entre o final do primeiro semestre e o começo do segundo semestre, haja vista que houve uma considerável variação gráfica em três ou quatro pontos do tempo analisado anteriormente, como se pode ver nos gráficos passados. Além disso, ficaria um pequeno intervalo sem

representação gráfica contido entre o dia 24/09/2020 e o dia 04/10/2020. E para que não houvesse toda essa perda que foi gerada devido às variações do polinômio interpolador, fez-se necessário essa análise em particular. Observe que a Figura 13 apresenta uma quantidade menor de pontos, dezesseis para ser mais preciso e, conseqüentemente, de pares  $(x, f(x))$  inseridos no MAXIMA. A escolha dessa quantidade de pontos não foi por acaso, já que foi possível observar o comportamento do polinômio interpolador nos gráficos das Figuras 9 e 11 e notar que as variações se deram de forma mais acentuadas nos quatro últimos pontos do primeiro semestre e nos quatro primeiros pontos do segundo semestre, o que nos dá um total de oito pontos tabelados situados entre os dias 25/08/2020 e 03/11/2020. Com base nessas observações, foram selecionados outros oito pontos: quatro pontos antes e quatro depois, contados a partir das extremidades do intervalo que contém os oito pontos já citados anteriormente. Com isso, qualquer instabilidade gráfica que viesse a acontecer, seriam nesses oito novos pontos, agora extremos, e não nos oito pontos contidos no meio do intervalo, que de fato nos interessa.

A seguir, foi feita a relação dentre o período de 16 de julho de 2020 até 13 de Dezembro de 2020 com um número natural (do 1 até o 16) da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rcl}
 16/07/20 & \rightarrow & 1 \\
 26/07/20 & \rightarrow & 2 \\
 & & \vdots \\
 24/09/20 & \rightarrow & 8 \\
 & & \vdots \\
 03/12/20 & \rightarrow & 15 \\
 13/12/20 & \rightarrow & 16,
 \end{array}$$

afim de adequar os pontos numa tabela para interpolá-los polinomialmente. Com isso, foi possível montar a tabela que contém os valores de  $(x, f(x))$ , onde esses foram adaptados com base nos dados oficiais da COVID-19 no Piauí. Logo temos a seguinte tabela:

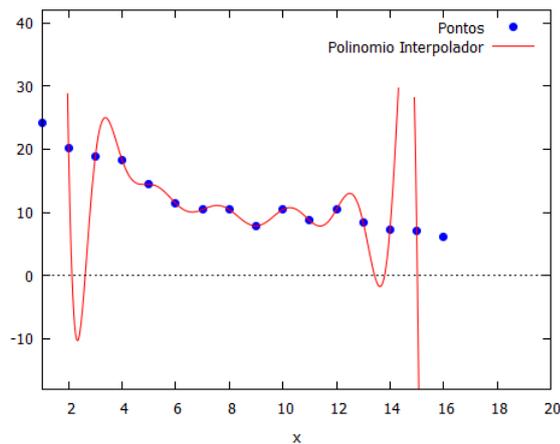
Tabela 13: MÉDIA MÓVEL DE ÓBITOS

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	24,14	20,14	18,86	18,29	14,43	11,43	10,43	10,43
$x$	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x)$	7,86	10,43	8,71	10,43	8,43	7,29	7,14	6,14

Fonte: adaptado pelo autor.

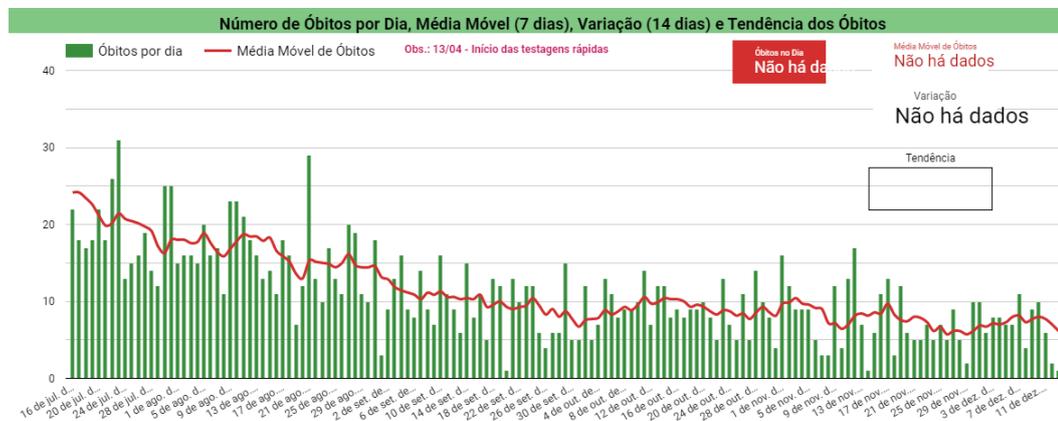
Olhando para o que aconteceu no gráfico da Figura 3 onde o polinômio interpolador apresentou variação em uma quantidade menor de pontos nas extremidades. Perceba que aqui nesse caso, referente aos óbitos do mesmo período de 16/07/2020 a 13/12/2020, a Figura 13, mostra que o polinômio interpolador apresentou variação em uma quantidade um pouco maior de pontos nas extremidades e, por consequência, em menos pontos na parte central.

Figura 13: Óbitos do dia 16/07/2020 a 13/12/2021



Veja que foram quatro pontos no início e quatro no final do período analisado. Isso se deve a uma maior variação nos valores da média móvel dentro do intervalo estudado. Nesse caso, a menor quantidade de pontos inseridos no software não se mostrou um fator suficiente para ajudar a reduzir as variações do polinômio interpolador com tanta precisão como foi no caso do número de infectados.

Figura 14: Óbitos do dia 16/07/2020 a 13/12/2021



Fonte: Painel COVID-19 Piauí

Para finalizar, foi estimado o erro de aproximação, valendo-se da Definição 3.11.

Escolheu-se três pontos quaisquer entre os intervalos dos pontos  $x$  mostrados acima na Tabela 13, onde dois pontos estão situados na parte central, e um ponto está em uma das extremidades. Como são dez dias entre os pontos tabelados, para o primeiro intervalo fizemos a seguinte relação:

$$\begin{array}{rcl}
 16/07/20 & \rightarrow & 1 \\
 17/07/20 & \rightarrow & 1.1 \\
 & \vdots & \vdots \\
 21/07/20 & \rightarrow & 1.5 \\
 & \vdots & \vdots \\
 25/07/20 & \rightarrow & 1.9 \\
 26/07/20 & \rightarrow & 2
 \end{array}$$

afim de relacionar as datas a um número real para que esse pudesse ser usado como valor da abscissa do polinômio interpolador e então nos retornar a ordenada  $P(x)$  como resultado. Essa mesma associação das datas foi feita nos quinze intervalos do período estudado.

Tabela 14: ERRO DE APROXIMAÇÃO DA MÉDIA MÓVEL DE ÓBITOS

DIA	VALOR OFICIAL	$x$	$P(x)$	ERRO
27/09/20	9	8.3	9,44	0,44
12/10/20	9,71	9.8	9,86	0,15
30/11/20	6,14	14.7	48,72	42,58

Fonte: adaptado pelo autor.

Nesse caso, os três erros da Tabela 14, mostra-nos que a parte central do gráfico da Figura 13 teve uma excelente aproximação e na extremidade houve uma grande variação.

#### 4.2.4 Período entre 18 de Março de 2020 e 18 de Março de 2021

Agora, vejamos o resultado da aplicação dos dados reais no algoritmo em comparação com os dados oficiais, a respeito dos óbitos por COVID-19 no estado do Piauí compreendido entre os dias 18/03/2020 e 18/03/2021. Nesse caso, devido às limitações na quantidade de inserção de dados encontradas durante os testes do programa MAXIMA, o gráfico da Figura 15 foi elaborado com os números da média móvel em intervalos de vinte dias, a partir do dia 18/03/2020, exceto o intervalo dos dois últimos pontos que foi de apenas cinco dias por conta do período analisado, um ano. Fez-se uma relação de alguns dias do período estudado com um número natural (do 1 até o 20) da seguinte forma:

18/03/20 → 1  
 07/04/20 → 2  
 ∴ ∴  
 14/09/20 → 10  
 ∴ ∴  
 13/03/21 → 19  
 18/03/21 → 20,

para que os pontos fossem adequados numa tabela afim de interpolá-los polinomialmente. A partir daí montamos a tabela de valores a seguir, onde os pares  $(x, f(x))$  foram adaptados com base nos dados oficiais da COVID-19 no Piauí. Logo temos a seguinte tabela:

Tabela 15: MÉDIA MÓVEL DE ÓBITOS

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	0	0,14	1	5	11,14	19	24,14	18,86	14,43	10,43	7,86

$x$	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(x)$	8,71	8,43	7,14	6,14	7	7,43	8,43	23,29	23,29

Fonte: adaptado pelo autor.

Na tabela acima, os valores aplicados em  $x$  correspondem aos dias analisados e que os valores  $f(x)$  correspondem à média móvel dos valores de óbitos desses respectivos dias. Baseado nisso, foi possível determinar o gráfico do polinômio interpolador.

Nas Figuras 15 e 16 são apresentados os gráficos onde é possível ver a proximidade entre o que foi gerado e o que é oficial. Na Figura 16 temos o gráfico da situação real baseado na média móvel dos casos de óbitos no Estado do Piauí durante esse período de 18/03/2020 a 18/03/2021.

Fazendo uma comparação entre os dois gráficos acima, apesar do intervalo de vinte dias entre os valores de  $x$  e das variações maiores nos números da média móvel, ainda assim conseguimos uma ótima aproximação nos pontos centrais. Mais especificamente, a partir do quarto ponto até o décimo sétimo ponto, isto é, o período compreendido entre os dias 17/05/20 e 01/02/21 apresentou pouca variação. Contudo, mais uma vez, é possível notar que o polinômio interpolador apresentou uma grande variação nos pontos dos extremos. Nessa análise, isso aconteceu nos quatro primeiros pontos e nos três últimos pontos.

Agora, calculemos a estimativa do erro de aproximação com três pontos entre os intervalos dos pontos  $x$  da Tabela 15, onde dois pontos estão situados na parte central, e

Figura 15: Óbitos do dia 18/03/2020 a 18/03/2021

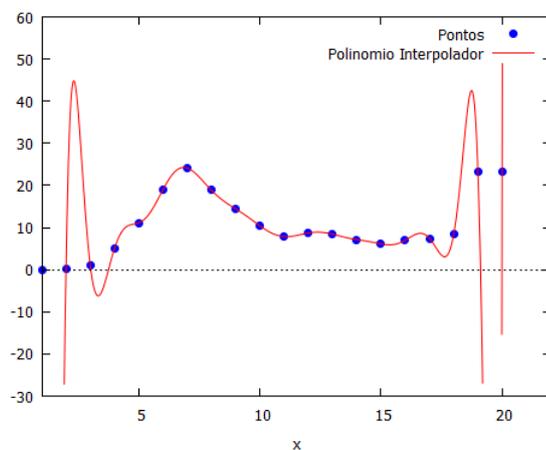
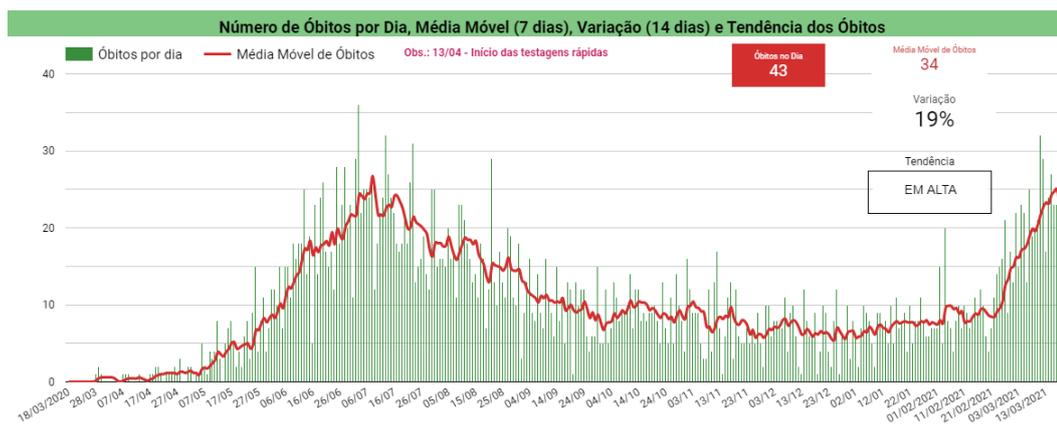


Figura 16: Óbitos do dia 18/03/2020 a 18/03/2021



Fonte: Painel COVID-19 Piauí

um ponto está em um dos extremos. Como são vinte dias entre os pontos tabelados, para o primeiro intervalo fizemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 18/03/20 &\rightarrow 1 \\
 20/03/20 &\rightarrow 1.1 \\
 &\vdots \\
 28/03/20 &\rightarrow 1.5 \\
 &\vdots \\
 05/04/20 &\rightarrow 1.9
 \end{aligned}$$

$$07/04/20 \rightarrow 2,$$

afim de relacionar as datas a um número real para que esse pudesse ser usado como valor da abscissa do polinômio interpolador e então nos retornar a ordenada  $P(x)$  como resultado. Essa mesma ideia de associação das datas foi feita entre cada um dos 19 intervalos do período estudado.

Tabela 16: ERRO DE APROXIMAÇÃO DA MÉDIA MÓVEL DE ÓBITOS

DIA	VALOR OFICIAL	$x$	$P(x)$	ERRO
03/05/20	1,14	3.3	-6,15	7,29
03/08/20	17,57	7.9	19,46	1,89
15/11/20	8,57	13.1	8,29	0,28

Fonte: adaptado pelo autor.

Dos valores obtidos nesses três erros da Tabela 16, temos na parte central do gráfico da Figura 15 uma excelente aproximação e na extremidade analisada um distanciamento maior do polinômio.

## 5 Conclusão

Neste trabalho, fizemos um estudo sobre a aproximação dos valores da média móvel de infectados e óbitos por Covid-19 no Piauí, através da Interpolação Polinomial, em particular, o método de Interpolação Polinomial de Lagrange em uma abordagem teórica e algébrica. Em uma abordagem geométrica, utilizamo-nos do software livre Maxima, como ferramenta de visualização dos referidos dados e apresentamos os resultados gráficos dos valores aplicados ao conteúdo, onde mostramos uma aplicação prática do mesmo. Estudamos também o Erro de aproximação, pois tão importante quanto aplicar o método de aproximação é saber o Erro na aplicação do método.

A partir dos resultados apresentados, concluímos através do erro de aproximação, que tivemos uma aproximação maior entre os valores oficiais e os valores obtidos através da Interpolação, e por consequência uma visualização melhor do gráfico, nos três primeiros períodos analisados que são equivalentes a um ano e são subdivididos em intervalos de dez dias. Resultado válido tanto no caso de infectados quanto no caso de óbitos, se comparados ao quarto período analisado no qual tem o mesmo tempo de um ano, só que subdividido em vinte dias. Esse maior espaçamento dos dias do último período, juntamente com a limitação que encontramos no programa nos motivou a fazer essas divisões de períodos.

Nota-se que, mesmo sem precisar usar os dados de todos os dias, conseguimos obter um polinômio interpolador onde seus valores ficaram muito próximos dos valores da função que corresponde ao gráfico real da covid, de modo que a primeira forma de visualizarmos isso foi através do gráfico e a comprovação se deu através do cálculo do erro. Com tudo isso, apesar de não conhecermos a função geradora do modelo oficial, conseguimos obter uma função muito parecida com ela, que é o polinômio interpolador. Ele nos mostra que existe similaridade entre os achados deste estudo e a situação real.

É possível notar que o uso de situações reais e cotidianas, por meio da Interpolação Polinomial de Lagrange, permite-nos afirmar que podemos relacionar os conteúdos matemáticos com a realidade. Com base nesse argumento, os estudantes “também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade” (BNCC, 2020, [6]). Dessa forma, temos expectativa que professores do ensino médio, utilizem-se desse método de Interpolação Polinomial no ensino de polinômios, valendo-se dos dados da pandemia. Propondo ainda, a utilização de softwares livres como o Maxima, afim de obter uma melhor relação entre a teoria e a prática, o que deve melhorar o ensino aprendizagem desses estudantes.

Valendo-se desses fatos expostos, compreendemos que os objetivos propostos neste trabalho foram cumpridos, ainda que tenhamos encontrado algumas limitações relacionadas à geração gráfica na execução do programa. Esse nosso estudo é pioneiro na análise de dados da covid-19 utilizando o Método de Interpolação Polinomial de Lagrange, porém já existe um trabalho, no acervo de dissertações do Profmat, que aborda os "dados dos nú-

meros de casos e óbitos relativos a COVID-19 no Brasil em 2020, utilizando o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) e o Modelo SIR discretizado". Isso significa que os achados nessa pesquisa podem abrir espaço para novas oportunidades de explorar e aprofundar os estudos sobre essa temática e outras relacionadas a aplicação da mesma no ensino médio.

## Referências

- [1] ALVES, JERSON LEITE., *Modelagem Matemática na Programação Linear: Método Simplex e Aplicações*. Teresina, 2017.
- [2] ANDRADE, L. N., *Maxima: um programa para as aulas de Matemática*. João Pessoa, 2015. Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/lenimar/maxproformat.pdf>. Acesso: 08 Abr. 2021.
- [3] ARAÚJO, AGOSTINHO ANTÔNIO CRUZ ET AL., *COVID-19: analysis of confirmed cases in Teresina, Piaui, Brazil*. Revista Prevenção de Infecção e Saúde, v. 6, 2020.
- [4] ARAÚJO, A. A. C.; AMARAL, J. V.; SOUSA, J. N.; FONSECA, M. C.S.; VIANA, C. M.C.; MENDES, P. H. M.; ET. AL., *COVID-19: analysis of confirmed cases in Teresina, Piaui, Brazil*. Rev Pre Infec e Saúde [Internet]. 2020;6:10569. Disponível em: <https://revistas.ufpi.br/index.php/nupcis/article/view/10569> DOI: <https://doi.org/10.26694/repis.v6i0.10569>. Acesso: 11 Mai. 2021.
- [5] BARROSO, L. C.; BARROSO, M. M. A.; CAMPOS, F. F. C.; CARVALHO, M. L. B.; MAIA, M. L, *Cálculo numérico (com aplicações)*. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1987.
- [6] BRASIL. BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR, *Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2016. VERSÃO FINAL*, Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso: 03 Jun. 2021.
- [7] BRASIL. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, *Ensino Médio - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação.
- [8] CARVALHEIRO, JOSÉ DA ROCHA. *Epidemias em escala mundial e no Brasil*. Estudos avançados, v. 22, p. 7-17, 2008.
- [9] CONTE, S. D., *Elementos de Análise Numérica*. Tradução de Luiz Ignácio Pio de Almeida. Porto Alegre: Globo, 1977.
- [10] DEFENDI, MARIA LÚCIA ET AL., *Teorema Fundamental da Álgebra - MA673*, Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas, 2016. 20-21 p. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/Maria2.pdf>. Acesso: 20 Jul. 2021.

- [11] FIGUEIREDO, D. G. DE , *Análise I*. 2 ed[reimpr]. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- [12] FRANCO, N. B, *Cálculo numérico*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- [13] GABETTA JUNIOR, A. M, *Aproximação de Funções por Interpolação: Método de Lagrange*. Dissertação ( Mestrado Profissional de Matemática), Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional. Campinas, 2015.
- [14] IEZZI, G, *Fundamentos de matemática elementar: complexos, polinômios, equações - Volume 6*. 8 ed. São Paulo: Atual, 2013.
- [15] IEZZI, G.; HAZZAN, S, *Fundamentos de matemática elementar: sequências, matrizes, determinantes e sistemas - Volume 4*. 2. ed. São Paulo: Atual, 1977.
- [16] LIMA, E.L, *Curso de Análise volume 1*. - 12.ed. - IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [17] LOPES, A. S, *Polinômio Interpolador de Lagrange: uma proposta para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de funções polinomiais e polinômios na educação básica*. Dissertação ( Mestrado Profissional de Matemática), Universidade Federal do Amazonas. Instituto de Ciências Exatas. Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional. Manaus, 2018.
- [18] *CORONAVÍRUS no Piauí: acompanhe a evolução da curva epidêmica*. G1, Piauí, 01/04/2020. Disponível em: <https://g1.globo.com/pi/piaui/noticia/2020/04/01/coronavirus-no-piaui-acompanhe-a-evolucao-da-curva-epidematica.ghtml>. Acesso: 03 Jun. 2021.
- [19] AIRES, S.; ROMERO, M, *Secretaria de Saúde confirma primeira morte pelo coronavírus no Piauí*. G1, Piauí, 28/03/2020. Disponível em: <https://g1.globo.com/pi/piaui/noticia/2020/03/28/piaui-registra-primeira-morte-pelo-novo-coronavirus-diz-sesapi.ghtml>. Acesso: 03 Jun. 2021.
- [20] MACHADO, L. M. *Legado de uma pandemia: 26 vozes conversam sobre os aprendizados para política pública*. Editora Autografia, 2021.
- [21] MARINELLI, N. P. ET AL. *Evolução de indicadores e capacidade de atendimento no início da epidemia de COVID-19 no Nordeste do Brasil, 2020*. Epidemiologia e Serviços de Saúde, v. 29, 2020.
- [22] MARTINS, F. I. S, *Modelagem de funções via Interpolação Polinomial de Lagrange*. Dissertação ( Mestrado Profissional de Matemática), Universidade Federal de Goiás. Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas. Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional. Jataí, 2017.

- [23] *MÉDICOS Sem Fronteiras*. Disponível em: [https://www.msf.org.br/o-que-fazemos/atividades-medicas/coronavirusutm\\_source=adwords\\_ msf& utm\\_ medium=& utm\\_ campaign=covid-19\\_ comunicacao& utm\\_ content\\_ epidemias\\_ brasil\\_39923&gclid=CjwKCAjwhOyJBhA4EiwAEcJdcQ2nDAH6LvMsHAnCirw80-f9DYNge5NkoV2zUxeANAIJ1MmvHcZwWBoC2gMQAvD\\_BwE](https://www.msf.org.br/o-que-fazemos/atividades-medicas/coronavirusutm_source=adwords_ msf& utm_ medium=& utm_ campaign=covid-19_ comunicacao& utm_ content_ epidemias_ brasil_39923&gclid=CjwKCAjwhOyJBhA4EiwAEcJdcQ2nDAH6LvMsHAnCirw80-f9DYNge5NkoV2zUxeANAIJ1MmvHcZwWBoC2gMQAvD_BwE). Acesso: 10 Set. 2021.
- [24] MUNIZ, A. C. N., *Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios. Vol. 6*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- [25] *PAINEL Covid-19 Piauí*. Disponível em: <datastudio.google.com/reporting/a6dc07e9-4161-4b5a-9f2a-6f9be486e8f9/page/2itOB>. Acesso: 03 Mar. 2021.
- [26] PRADO, M. F. DO. ET AL. *Análise da subnotificação de COVID-19 no Brasil*. Revista Brasileira de Terapia Intensiva, n. ahead, 2020.
- [27] RIOTORTO, M. R., *Primeiros passos no Maxima*. Trad. de Jorge Barros de Abreu. Ferrol-A Coruña, 2006. Disponível em: [http://www.mat.ufpb.br/sergio/software/maxima/maxima\\_pt.pdf](http://www.mat.ufpb.br/sergio/software/maxima/maxima_pt.pdf). Acesso: 08 Abr. 2021.
- [28] SANTOS, B, *Introdução ao Software MAXIMA*. Porto, 2009. Disponível em: [https://maxima.sourceforge.io/docs/tutorial/pt/Maxima\\_Bruna\\_Santos\\_2009.pdf](https://maxima.sourceforge.io/docs/tutorial/pt/Maxima_Bruna_Santos_2009.pdf). Acesso: 10 Mar. 2021.
- [29] VAZ, C. L. D, *O software Maxima e aplicações*. 1 ed. Belém: EditAedi, 2016. Disponível em: [https://livroaberto.ufpa.br/jspui/bitstream/prefix/200/1/Livro\\_SoftwareMaximaAplicacoes.pdf](https://livroaberto.ufpa.br/jspui/bitstream/prefix/200/1/Livro_SoftwareMaximaAplicacoes.pdf). Acesso: 08 Abr. 2021.
- [30] VIAIS NETO, D. S.; BORGES, V. A.; FRANCISCO, L. M. P. S, *Aplicação de Técnica de Machine Learning para previsão da curva de dados da COVID-19*, 9<sup>a</sup> Jornada Científica e Tecnológica da Fatec de Botucatu, São Paulo, 2020. Disponível em: <http://www.jornacitec.fatecbt.edu.br/index.php/IXJTC/IXJTC/paper/viewFile/2327/2876>. Acesso: 10 Mar. 2021.
- [31] WERNECK, G. L.; CARVALHO, M. S. *A pandemia de COVID-19 no Brasil: crônica de uma crise sanitária anunciada*. São Paulo, 2020.