

Wallaci Antero Luz da Silva

**UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O
ENSINO DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS
RACIONAIS POR MEIO DA RESOLUÇÃO
DE PROBLEMAS**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

18 de Março de 2021

Wallaci Antero Luz da Silva

**UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE
OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS POR
MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Orientador: Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

18 de Março de 2021

FICHA CATALOGRÁFICA

UENF - Bibliotecas

Elaborada com os dados fornecidos pelo autor.

S586

Silva, Wallaci Antero Luz da.

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS / Wallaci Antero Luz da Silva. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2021.

123 f. : il.

Inclui bibliografia.

Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2021.

Orientador: Oscar Alfredo Paz La Torre.

1. Ensino de frações. 2. Resolução de Problemas. 3. Sequência Didática. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

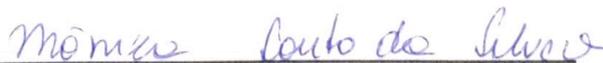
CDD - 510

Wallaci Antero Luz da Silva

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE
OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS POR
MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

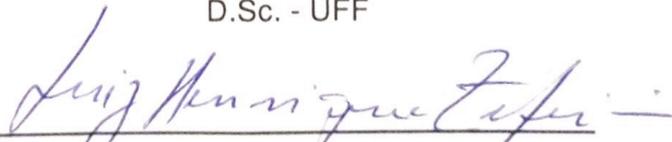
“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Aprovada em 18 de Março de 2021.



Profª Mônica Souto da Silva Dias

D.Sc. - UFF



Prof. Luiz Henrique Zeferino

D.Sc. - UENF



Prof. Rigoberto Gregório Sanabria Castro

D.Sc. - UENF



Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre

D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

*Aos meus pais Leoni e Wilson (in memoriam); e à minha
esposa Luciana.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem Ele nada disso seria possível.

À minha família, em especial aos meus pais, pelo apoio, incentivo e companheirismo ao longo dessa caminhada.

À minha esposa, por ter me aguentado por todos esses anos difíceis. Obrigada por não desistir, quando tudo estava impossível.

Em especial, ao Professor Oscar Alfredo Paz La Torre, por me aceitar como orientando nesta investida e pela consideração em me suportar até aqui.

Ao Professor Rigoberto Gregório Sanabria Castro, por todo o incentivo e explicações.

Aos colegas de curso Wellix Moreira da Silva e Marcos Paulo de Oliveira, pelo apoio incondicional.

Agradeço a todos que, de uma forma ou de outra, colaboraram para a conclusão desta etapa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil(Capes)-Código de Financiamento 001.

*“Todas as coisas são números.”
(Pitágoras)*

Resumo

A partir do objeto de estudo o ensino de frações, esta dissertação questionou: em que medida a metodologia desenvolvida por George Polya – Resolução de Problemas, aplicada em forma de Sequência Didática, na linha de Natanael Freitas Cabral, pode contribuir para o aprendizado de frações em turmas de 7º ano do Ensino Fundamental? Para responder a essa questão-problema, o objetivo geral traçado foi o de investigar, por meio de uma proposta de trabalho, de que forma as metodologias ora selecionadas – voltadas à reflexão, compreensão e resolução de problemas – podem ser utilizadas em sala de aula para facilitar o aprendizado do conteúdo de frações. Como objetivos específicos procurou-se: apresentar alguns dados relevantes da história da matemática, conceitos matemáticos e o surgimento dos números; interpretar com criticidade o ensino tradicional de frações; estabelecer fundamentos, de forma gradativa, sobre comparação, operação e a aplicação de números racionais no formato de fração; abordar sobre a metodologia do ensino de Resolução de Problemas e Sequência Didática; desenvolver uma proposta de trabalho em sala de aula com frações, propondo modelo com roteiro, seguindo as orientações metodológicas; aplicar a proposta deste trabalho via on-line a alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Os resultados daí obtidos evidenciaram que o ensino remoto online aplicado a alunos carentes de internet e aparelhos para acessá-la não abrangeu a turma como um todo. Mas os resultados foram produtivos para os que dele efetivamente participaram. Conclui-se que a aprendizagem precisa ser acessível, próxima do cotidiano do aluno, sequenciada e significativa no contexto de vida.

Palavras-chaves: Ensino de frações; Resolução de Problemas; Sequência Didática.

Abstract

From the object of study on the teaching of fractions, this dissertation questioned: to what extent can the methodology developed by George Polya – Problem Solving, applied in the form of a Didactic Sequence, along the lines of Natanael Freitas Cabral, contribute to the learning of fractions in 7th grade classes of elementary school? To answer this question-problem, the general objective outlined was to investigate, through a proposal for work, how the methodologies now selected – aimed at reflection, understanding and problem solving – can be used in the classroom to facilitate the learning of the content of fractions. As specific objectives, we sought to: present some relevant data on the history of mathematics, mathematical concepts and the emergence of numbers; critically interpret the traditional teaching of fractions; gradually establish foundations on comparison, operation and application of rational numbers in the form of a fraction; address about the teaching methodology of Problem Solving and Didactic Sequence; develop a work proposal in the classroom with fractions, proposing a model with a script, following the methodological guidelines; apply the proposal of this work via online to students of the 7th year of elementary school. The results obtained showed that online remote teaching applied to students lacking internet and devices to access it did not cover the class as a whole. But the results were productive for those who actually participated. It is concluded that learning needs to be accessible, close to the student's daily life, sequenced and meaningful in the context of life.

Key-words: Teaching of fractions; Problem solving; Following teaching.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação da fração $\frac{1}{2}$ 2000 a.c.	22
Figura 2 – Simbologia egípcia: representação de algumas frações	23
Figura 3 – Números naturais	24
Figura 4 – Partes tomadas do denominador	26
Figura 5 – Diagrama do conjunto dos números racionais	27
Figura 6 – Qual é a maior fração, $\frac{1}{6}$ ou $\frac{2}{6}$?	27
Figura 7 – Fração $\frac{1}{6}$	27
Figura 8 – Fração $\frac{2}{6}$	27
Figura 9 – Frações equivalentes	28
Figura 10 – Fração $\frac{3}{6}$	28
Figura 11 – Fração $\frac{1}{2}$	28
Figura 12 – Conjunto representativo de soma e subtração de frações com denominadores iguais	29
Figura 13 – Comentário do responsável de um estudante	62
Figura 14 – Estudante A	64
Figura 15 – Estudante A	64
Figura 16 – Estudante A	65
Figura 17 – Estudante A	66
Figura 18 – Estudante F	67
Figura 19 – Estudante F	67
Figura 20 – Estudante F	68
Figura 21 – Estudante f	68
Figura 22 – Canal Professor Wallaci Luz	70
Figura 23 – Esclarecimento de dúvidas	70
Figura 24 – Questão resolvida com base na Metodologia de POLYA - Compreensão	71
Figura 25 – Questão resolvida com base na Metodologia de POLYA - Planejamento	71
Figura 26 – Questão resolvida com base na Metodologia de POLYA - Execução	72
Figura 27 – Questão resolvida com base na Metodologia de POLYA - Análise	72
Figura 28 – Equivalência de frações	72
Figura 29 – Operações fundamentais com frações	73
Figura 30 – Estudante C	75

Figura 31 – Estudante D	75
Figura 32 – Pedido de uma das Professoras de Matemática	76
Figura 33 – Correção da avaliação diagnóstica	77
Figura 34 – Esclarecimento de dúvidas do estudante J	78
Figura 35 – Retorno após o esclarecimento de dúvidas do estudante J	79
Figura 36 – Estudante B	80
Figura 37 – Estudante B	81
Figura 38 – Estudante J	81
Figura 39 – Estudante J	82

Lista de quadros

Quadro 1 – Comparativo entre as teorias RP e SD	54
Quadro 2 – Resultado da avaliação diagnóstica	63
Quadro 3 – Resultado da avaliação diagnóstica 2	74
Quadro 4 – Resultado da avaliação final	79

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Curricular Comum
CNE	Conselho Nacional de Educação
EF	Ensino Fundamental
OCDE	Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
RP	Resolução e Problemas
SD	Sequência Didática

Sumário

Introdução	16
1 REFERENCIAL TEÓRICO	21
1.1 Frações: Um pouco de História	21
1.1.1 Números racionais no início da civilização	23
1.2 Frações: Conceitos Básicos	26
1.2.1 Noções Fundamentais	26
1.3 O ensino e o aprendizado de frações	31
1.4 Metodologia da Resolução de Problemas de George Polya	36
1.4.1 Etapas sugeridas por George Polya	37
1.5 Sequência Didática de Natanael Cabral	41
1.5.1 Fases sugeridas por Natanael Freitas Cabral	42
1.6 Trabalhos Relacionados	44
1.6.1 Tecnologias digitais e ensino de Matemática: o uso de Facebook no processo de ensino dos números racionais	44
1.6.2 Números racionais: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal	44
1.6.3 A divisão e os números racionais: uma pesquisa de intervenção psicopedagógica sobre o desenvolvimento de competências conceituais de alunos e professores	45
1.6.4 Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores de matemática	46
1.6.5 Uma sequência didática para resolver equações do segundo e terceiro graus no conjunto dos números racionais	46
1.6.6 Números racionais e ensino médio: uma busca de significados	47
1.6.7 Crenças e dificuldades de futuros professores de matemática no domínio dos números racionais	47
1.6.8 Graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais	48
2 ASPECTOS METODOLÓGICOS	49
2.1 Descrição do tipo de pesquisa	49
2.2 Campo da Pesquisa	50
2.3 Sujeitos da Pesquisa	51
2.4 Instrumentos da Pesquisa e procedimentos para análise dos dados	51

2.5	Proposta da aplicação metodológica de frações	53
2.6	Aulas da proposta	54
2.6.1	Aula 1	54
2.6.2	Aula 2	55
2.6.3	Aula 3	55
2.6.4	Aula 4	56
2.6.5	Aula 5	57
2.6.6	Aula 6	57
2.6.7	Aula 7	58
2.7	Considerações finais da proposta	58
3	RELATO DA EXPERIÊNCIA E ANÁLISE DOS DADOS . .	59
3.1	Descrição das atividades da sequência didática	62
3.1.1	Aula 1	62
3.1.2	Aula 2	69
3.1.3	Aula 3	70
3.1.4	Aula 4	76
3.1.5	Aula 5	77
3.1.6	Aula 6	77
3.1.7	Aula 7	78
3.2	Análise dos dados	79
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	83
	REFERÊNCIAS	85
	APÊNDICES	89
	APÊNDICE A – PLANO DE AULA 1	90
A.1	Plano de Aula 1	91
	APÊNDICE B – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA	92
B.1	Avaliação Diagnóstica	93
	APÊNDICE C – PLANO DE AULA 2	94
C.1	Plano de Aula 2	95
	APÊNDICE D – PLANO DE AULA 3	99
D.1	Plano de Aula 3	100
	APÊNDICE E – PLANO DE AULA 4	103

E.1	Plano de Aula 4	104
APÊNDICE F – PLANO DE AULA 5		107
F.1	Plano de Aula 5	108
APÊNDICE G – PLANO DE AULA 6		109
G.1	Plano de Aula 6	110
APÊNDICE H – AVALIAÇÃO FINAL		111
H.1	Avaliação Final	112
APÊNDICE I – PLANO DE AULA 7		113
I.1	Plano de Aula 7	114
APÊNDICE J – SEQUÊNCIA DIDÁTICA		115
J.1	Sequência Didática	116
APÊNDICE K – LISTA DE QUESTÕES NÃO CONTEXTUALI- ZADAS		122
K.1	Lista de Questões não contextualizadas	123

Introdução

Em sua Metodologia do ensino da matemática, [Fonseca \(1997, p. 53\)](#) afirma: “O ensino de números racionais é amplo e complexo”, e a prática cotidiana do autor desta dissertação – professor dessa disciplina por quinze anos ininterruptos – autoriza-o a concordar com o autor, pois se percebe que uma das maiores dificuldades presentes no cotidiano dos estudantes de Ensino Fundamental (EF) é a de analisar, comparar e operar um quociente não exato; em geral, o aluno compreende o contexto muito bem, porém apresenta dificuldades ao realizar as operações com frações. Segundo [Fonseca \(1997, p. 54\)](#)), são notáveis as dificuldades de analisar números decimais e dízimas periódicas, no formato de fração, no ato de comparar uma igualdade ou desigualdade bem como no ato de uma operação fundamental entre tais números. “Por isso, devem ser exploradas atividades que favoreçam a construção de conceitos, através das relações que estabelecem entre parte e todo, e que permitam novas descobertas”(FONSECA, 1997, p. 55)).

Os estudos de fração, entre outros, segundo [Fonseca \(1997, p. 55\)](#) se compõem de operações fundamentais: soma, subtração, multiplicação e a divisão de um número (numerador) por outro número (denominador). Mais adiante, o autor supracitado diz que são notáveis as dificuldades de analisar números decimais e dízimas periódicas, no formato de fração, no ato de comparar uma igualdade ou desigualdade bem como no ato de uma operação fundamental entre tais números. “Por isso, devem ser exploradas atividades que favoreçam a construção de conceitos, através das relações que estabelecem entre parte e todo, e que permitam novas descobertas” (FONSECA, 1997, p. 55).

O relatório da Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômicos (OCDE) sobre o Pisa 2015 reconhece que uma aprendizagem sólida de números racionais é de suma importância, pois o estudante, em diversos momentos de sua vida prática, irá se deparar com situações problemas em que o estudo das partes, ou seja, das quantidades de um todo será crucial para determinar a solução de um problema. E, no ano seguinte analisa, no aspecto matemático, a noção de quantidade e diz que “talvez seja mais abrangente e essencial com o qual nos envolvemos e trabalha” (BRASIL, 2016, p. 146). A noção “está presente na quantificação de características de objetos, relações, situações e entidades no mundo, na compreensão de várias representações de quantificações e no julgamento de interpretações e argumentos baseados em quantidades” (BRASIL, 2016, p. 146). E continua

suas ponderações:

Para se envolver com a quantificação do mundo, é necessário compreender medidas, contas, grandezas, unidades, indicadores, tamanhos relativos e tendências e padrões numéricos. Aspectos do raciocínio quantitativo, como a percepção dos números, a compreensão da múltipla representação de números, o requinte no cálculo mental e computacional, a estimativa e a avaliação da aceitabilidade de resultados, são a base do letramento matemático no que se refere a quantidade. A quantificação é um método primário de descrição e medição de um amplo conjunto de características do mundo. Ela permite a modelação de situações para a verificação de mudanças e relações, para a descrição e manipulação do espaço e das formas, para a organização e interpretação de dados e para a medição e avaliação de incertezas. Assim, o letramento matemático na área da quantidade aplica conhecimentos de números e operações numéricas a vários tipos de ambientes e situações (BRASIL, 2016, p. 147).

Com a finalidade de promover uma aprendizagem que faça sentido ao nosso estudante e que imprima justificativa a esta pesquisa, objetiva-se promover um estudo prático, contextualizado com diversas áreas, de operações com números racionais no formato de fração para que sirva à resolução de problemas do cotidiano. Isso porque concorda-se com Fâvero, Tonieto e Possel (2018, p. 147) quando afirmam ser “nesse espaço de colocação de problemas, tentativa de solução e avaliação crítica que se identifica o potencial criativo e crítico da interdisciplinaridade”.

Conforme os autores supracitados, a interdisciplinaridade tem, dentre muitos benefícios, o de promover ao estudante momentos de aplicações variadas do mesmo assunto, possibilitando assim o desenvolvimento da capacidade de analisar um problema por diversos pontos de vista. Obviamente porque, continuam os autores, ela está “presente em todas as fases do processo, promovendo a interação contínua e coordenada das diversas áreas do conhecimento, já que é compreendida como uma atitude epistemológica” (FÂVERO; TONIETO; POSSEL, 2018, p. 47).

Trazendo a matemática para a vida, de acordo com o que propõe a OCDE e conforme Brasil (2000) “o estudante faz um bom uso dos conteúdos dela no dia a dia, isto é, quando as disciplinas não são compartimentadas”. Assim, o conceito de interdisciplinaridade fica mais claro quando se considera o fato trivial de que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com outros conhecimentos, que pode ser de questionamento, de confirmação, de complementação, de negação, de ampliação, de iluminação de aspectos não distintos (BRASIL, 2000, p. 75).

É notável, então, a necessidade do uso diário dos números racionais na vida cotidiana, números que podem ser escritos como fração, portanto os números naturais, os inteiros, todos os números decimais e dízimas periódicas. E, “Nessa direção, pontua-se o potencial criativo da resolução de problemas como uma proposta epistemológica que suporta novas formas de pensar, projetar e agir no cotidiano das instituições de ensino”

(FÂVERO; TONIETO; POSSEL, 2018, p. 52). Refletindo sobre isso, vemos que no nosso cotidiano comparamos e operamos números fracionários o tempo todo, seja para organizar uma tarefa em etapas, seja para dosar uma receita utilizando meia xícara de açúcar, seja para repartir uma pizza, calcular um percentual e inclusive somar, subtrair, multiplicar e dividir frações que estão ligadas aos mais variados contextos.

Sendo assim, o presente trabalho justifica-se no fato de que é de suma importância a compreensão plena deste tema por parte do estudante, que necessita compreender, comparar e operar frações em suas vidas. Fâvero, Tonieto e Possel (2018, p. 52) assinalam ser premente necessidade de compreensão de conteúdos matemáticos com uma metodologia não limitada ao ato de decorar fórmulas, formatos e técnicas, mas sim promotora de um ambiente em que o estudante é levado a compreender o problema, planejar sua resolução, executar o plano e examinar a solução. E “O grande desafio de ensinar o método da resolução de problemas é que este não deve ser visto como uma fórmula exata que deve ser seguida sem objeções, mas como uma orientação” (FÂVERO; TONIETO; POSSEL, 2018, p. 52). Lembra Vaiano (2020, p. 1) que muitas das descobertas matemáticas, incluindo os números fracionários e suas comparações e operações, foram um dia um problema de um povo, e que um cientista resolveu depositar horas, dias, meses e (quem sabe?) até anos de dedicação e muito estudo para a proposição de uma possível solução para aquele problema. Além disso, tal solução foi testada, observada, analisada e passou a ser ou não considerada como efetiva, posto que “A matemática se nega a existir só por existir. Ela é muito eficaz na tarefa de explicar e manipular o mundo; eficaz de um jeito quase inverossímil” (VAIANO, 2020, p. 2). Polya (1978) – pilar referencial desta dissertação – parte do pressuposto da arte de resolver problemas, o que, segundo ele, possibilita ao estudante mobilizar conhecimentos num encadeamento reflexivo rumo à tomada de decisões operativas e eficazes ao considerar informações dispostas na própria situação problema.

Como se vê, pelo ano de publicação da obra 1978 e recuando mais ainda, a 1945, quando lançara o livro *How To Solve It: a new aspect of Mathematical Methods*, o autor já se pautava pelo ensino de resolução de problemas (RP). É realmente antiga a sistematização e publicação dessa técnica, cuja utilização prática, afirma Polya (1978) remonta à Grécia antiga. Com efeito, a partir da análise da obra do autor, se verifica a necessidade de se utilizar técnicas mais tangíveis em um ensino que vem, ao longo de séculos, aterrorizando muitos alunos, que acabam crendo no mito de que a matemática da educação básica é extremamente difícil. Outro autor que a incluir nesta dissertação é Natanael Freitas Cabral, teórico que, na sua obra *Sequências didáticas: Em* Cabral (2017) aborda a estrutura e a elaboração onde traça uma estratégia que se ajusta ao que se pretende nesta dissertação.

Procurou-se neste trabalho, como visto na questão acima, articular a RP Polya (1978) à metodologia da SD de Cabral (2017) por ser esta desenvolvida especificamente no ensino da matemática, o que pode facilitar ainda mais o processo da aprendizagem de

frações. Dessa forma, objetiva-se não só listar questões em que o estudante seja levado a encarar uma operação fundamental com frações no formato de problema, bem como criar um ambiente onde ele seja levado a compreender o problema, planejar sua resolução, executar o plano e examinar a solução, conforme orientam tanto [Polya \(1978\)](#) quanto [Cabral \(2017\)](#).

Alinhado ao problema desta pesquisa e ao modo de trabalho pretendido o objetivo geral do presente trabalho é o de investigar, por meio de nossa proposta de trabalho, de que forma a metodologia de ensino RP e e a estratégia educacional SD voltadas à reflexão, compreensão e resolução de problemas podem ser utilizadas em sala de aula para facilitar o aprendizado do conteúdo de frações em turmas de alunos dos anos finais do EF.

Nessa linha de raciocínio, estamos, também, seguindo os PCN ao recorrermos “a um saber diretamente útil e utilizável para responder às questões e aos problemas sociais contemporâneos” ([BRASIL, 2000](#), p. 21).

Acredita-se que assim a matemática ganha sentido para a vida, como explica [Flickinger \(2010, p. 49\)](#):

Ainda que tematizando supostamente o mesmo mundo, as disciplinas fazem-no com base em sua perspectiva premeditada que não influencia apenas as metodologias a serem elaboradas e os limites de sua pretensão de validade, senão também o horizonte dentro do qual seus questionamentos e interesses ganham sentido, ([FLICKINGER, 2010](#), p. 49).

Para o alcance pleno deste intento, procurou-se atingir os seguintes objetivos específicos:

1. Apresentar alguns dados relevantes da história da matemática, conceitos matemáticos e o surgimento dos números.
2. Interpretar com criticidade o ensino tradicional de frações.
3. Estabelecer fundamentos, de forma gradativa, sobre comparação, operação e a aplicação de números racionais no formato de fração.
4. Abordar sobre a metodologia do ensino de Resolução de Problemas e Sequência Didática.
5. Desenvolver uma proposta de trabalho em sala de aula com frações, propondo modelo com roteiro, seguindo as orientações metodológicas.
6. Aplicar a proposta deste trabalho via on-line a alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.

Além da Introdução, este estudo apresenta outras partes. A estrutura do seu desenvolvimento é composta de três capítulos de modo a cumprirem plenamente os objetivos delineados. Nesta introdução, descrevemos sumariamente sobre cada um deles.

Em suas seções, o Capítulo 1, destinado à revisão de literatura, procura contemplar os três primeiros objetivos específicos acima traçados, estabelecendo uma resenha histórica dos números na vida da humanidade e do surgimento de frações. Faz-se uma abordagem sobre o ensino tradicional de frações e suas práticas de ensino ainda permanentes na grande maioria das escolas brasileiras. Apresenta-se também aqui o referencial teórico-metodológico. Encerra-se o capítulo com descrições sumariadas de dissertações e teses brasileiras relacionadas ao ensino de números racionais.

O Capítulo 2 descreve a metodologia a ser utilizada no Capítulo 3 RP (POLYA, 1978) e o conjunto de atividades e intervenções encadeadas em prol de mais eficiência no aprendizado denominado SD (CABRAL, 2017). Cumpre-se aqui o terceiro objetivo específico. O final do Capítulo 2 propõe a aplicação metodológica de frações a partir de um roteiro de orientações de planejamento e aplicação – uma proposta pensada para o ensino presencial, mas, na prática, fora adaptada para o ensino remoto emergencial. Atinge-se, neste capítulo, o último objetivo específico.

O Capítulo 3 é a pesquisa aplicada feita remotamente com vista a contemplar o objetivo geral da pesquisa.

Findado o desenvolvimento, vem a Conclusão do trabalho. São reflexões pertinentes ao desenvolvimento e à proposta de aplicação aqui sugerida, seguida das Referências utilizadas nesta dissertação.

Capítulo 1

Referencial Teórico

Neste capítulo, são apresentados os principais conceitos que compõem esta pesquisa. Está subdividido em seis seções: A primeira seção traz um histórico do surgimento dos números racionais logo no início do processo de civilização. A segunda seção se inicia com uma perspectiva histórica e conceitual sobre o conjunto dos números racionais, apresentando suas características. A terceira estabelece uma comparação entre o ensino de frações entre a modalidade tradicional e a atual. Na quarta seção, faz-se uma revisão bibliográfica da metodologia de resolução de problemas de segundo Polya (1978) escolhidas para a aplicação de nossa proposta. Na quinta seção, faz-se uma revisão bibliográfica da sequência didática selecionada para aplicação, com todas as suas intervenções, conforme ??). Por fim, na última seção, há uma relação de oito trabalhos realizados no Brasil, envolvendo dissertações e teses, cuja temática incide sobre o ensino de números racionais.

1.1 Frações: Um pouco de História

Boyer (1996) explica que, com a evolução da sociedade, surgiam novos problemas da sociedade que envolviam números naturais e números inteiros, mas o homem aprimorou cada vez mais tais conhecimentos e passou a analisar, agrupar, comparar e manipular soluções, bem como as propriedades, operações e aplicações do conjunto dos números naturais e do conjunto dos números inteiros. Entretanto, com o avanço científico das sociedades, surgiram novos questionamentos e problemas que envolviam partes não inteiras de um todo para responder alguma questão do seu cotidiano. Foi nesse ponto que surgiu o conceito de fração, pois, mesmo que o homem já agrupasse muito bem objetos em quantias inteiras positivas, os números negativos, como vimos, demoraram a ser reconhecidos como números, uma vez que o homem ainda não os separava em grupos ou conjuntos quando necessitava agregar ou retirar algum elemento não inteiro, ou seja, fração (BOYER, 1996).

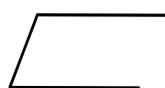
Fração é palavra de origem latina (*fractus*), que significa “partido”. Lê-se em Boyer

(1996, p. 9) que “Os homens da idade da Pedra não usavam frações, mas, com o advento de culturas mais avançadas, durante a Idade do Bronze, parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notações para frações”, nas medidas ou repartições, uma vez que a unidade não comportava um número inteiro de vezes, sendo, portanto, imperativo dividir essa unidade. Continuando, o autor esclarece que as notações em hieróglifos egípcios têm um sinal específico para as frações unitárias, as de denominador 1 (um) e explica que o oposto/inverso “de um número inteiro era indicado colocando sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado. Convém ressaltar que as frações (positivas, é claro) surgiram antes dos números negativos, que demoraram a ser aceitos como números” (BOYER, 1996).

Na verdade, foi na Idade Moderna que surgiu a noção de fração racional e nem sempre era relacionada ao sistema de número inteiro, até porque não era necessário nas tribos primitivas utilizar unidades quantitativas pequenas. “[...] aliás, as frações decimais foram essencialmente um produto da Idade Moderna da matemática e não do período primitivo” (GRANDE, 2008, p. 82).

Entretanto, consoante Davis (1992), há o registro de frações 2000 a.C. entre os babilônios, mas não como frações decimais que conhecemos, e sim em forma posicional, sem marca de separatriz, como a vírgula. Eles utilizavam a base sexagesimal, e o não registro dos denominadores eram potências sucessivas de sessenta. As frações unitárias têm seu primeiro registro no papiro Rhind, grafadas com o denominador embaixo, isto é, com o símbolo de fração e sendo, portanto, o tratamento sistemático pioneiro das frações unitárias. Conforme Davis (1992, p. 53), às vezes se escrevia, $1/2$ às vezes se escrevia como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Representação da fração $\frac{1}{2}$ 2000 a.c.

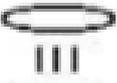


Fonte: (REYNAUD, 2010)

Em escrita cursiva hierática indicava-se a fração unitária por um ponto ou símbolo, chamado *ro*, colocado sobre o denominador. Nesse sentido, corrobora Eves (2011, p. 73) e acrescenta que sua indicação se dava, “na notação hieroglífica egípcia, pondo-se um símbolo elíptico sobre o número do denominador. Um símbolo especial era usado também para a fração excepcional $2/3$ e um outro símbolo às vezes aparecia para $1/2$ ”.

A fração sempre esteve presente na história da humanidade. Existem diversos registros históricos de diferentes povos que utilizaram as frações. Abaixo na (Figura2) verifica-se em alguns exemplos a diferença da nossa escrita para a egípcia.

Figura 2 – Simbologia egípcia: representação de algumas frações

escrita egípcia	nossa escrita
	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{12}$
	$\frac{1}{21}$

Fonte: (OLIVEIRA; STRASSBURG; MOACIR, 2017)

1.1.1 Números racionais no início da civilização

O abandono da vida nômade se deu sobretudo pela desertificação das savanas cujo processo dera início à civilização, numa região cortada pelos rios Tigres e Eufrates, na Mesopotâmia (hoje compreende Egito e Iraque), no chamado Período Neolítico. Forçados, os agrupamentos humanos se instalaram nas margens das bacias desses rios (BEZERRA, 2020, p. 1). Ali fixados, sentiram a necessidade de otimizar tecnologias que agregassem “eficiência na produção de alimentos e utensílios de uso geral” (GUILHERME, 2017, p. 1). Dentre muitas urgências, tiveram, primeiramente, de tratar da irrigação das terras cultiváveis e do provimento de água potável e até mesmo da construção de sistema de esgoto, em virtude da aglomeração de moradores em determinada extensão de terra (GUILHERME, 2017).

Para o plantio, que requer o prognóstico das estações férteis, foram necessários conhecimentos de astronomia, os quais demandavam a criação de calendários. Uma necessidade puxava outra(s) e assim sucessivamente. Nesse processo ininterrupto se estabelece o desenvolvimento da matemática e, conseqüentemente, da palavra escrita (GUILHERME, 2017, p. 2). Como se pode notar, historicamente o homem enfrentou os mais variados problemas desde o início de sua existência, os quais se dividiram, durante toda a história, em vários níveis de dificuldade. Tais níveis abarcam desde um problema simples do cotidiano, como contar objetos, frutas, animais, pessoas, passagens do tempo, até as descobertas mais incríveis, com o auxílio de cálculos avançados, que solucionaram problemas sérios de um povo como construção de cidades, ferramentas, e outros mais. Tudo isso incluía o estudo de frações, o qual não surgiu do nada, e sim da necessidade de

resolver certo(s) problema(s) (BEZERRA, 2020).

Na História dos conjuntos numéricos, conforme Bezerra (2020), podemos destacar os números naturais por meio dos quais se resolveram muitas questões. São estes os mais simples e utilizados pelo homem, há milênios, para a contagem (1, 2, 3, 4...) em suas necessidades básicas de sobrevivência; podem ser representados, por exemplo, numa linha reta.

Cada ponto da reta da Figura 3 abaixo é separado por uma unidade, todas as unidades são equivalentes; contudo, as necessidades elementares do cotidiano foram se tornando mais complexas com a evolução humana e havendo, assim, a necessidade de fracionar os números inteiros naturais em razões, daí serem estes denominados de números racionais (surgidos da abstração de medição). Desse modo, uma ou mais unidades da reta na Figura 3 pode se partir, pode fracionar-se.

Figura 3 – Números naturais



Fonte: Elaboração própria

Esclarece Neto (2016, p. 54), no seu livro História da Matemática, que os “números chamaram a atenção de alguns matemáticos de forma independente”, tratavam e tratam de quantias inteiras positivas e o zero (nulo), o qual surgira já nos primórdios dos tempos modernos com os hindus, diante de situações que envolviam operações e propriedades de números inteiros positivos e outras que tratavam o fato de não se ter algo, ou seja, a noção fundamental de zero; além de problemas que só foram resolvidos a partir do uso dos algarismos de 1 a 9 associados ao zero para formar as noções de dezenas, centenas, unidades de milhar e assim por diante. Conforme Neto (2016, p. 54), o conjunto de números naturais “contém os numerais mais primitivos, aqueles que muito provavelmente surgiram primeiramente no pensamento de quem se preocupava em contar e comparar quantidades”. Foi, então, com a necessidade de resolver novas questões do mundo e com a evolução do pensamento científico que o homem percebeu a necessidade de compreender e manipular quantias negativas, surgindo assim o subsequente conjunto numérico, o conjunto dos números inteiros.

Em seu livro *Números: racionais e irracionais*, Nivem (1984, p. 2) assim explica: “Quando os matemáticos falam dos números racionais eles querem dizer números inteiros (que podem ser representados como razões; por exemplo, $2 = 2/1 = 6/3$, etc.) e frações

tanto negativos, quanto positivos ou nulos”; “[...] a classe dos números racionais contém a classe dos inteiros” (NIVEM, 1984, p. 3).

Assim, os números racionais surgiram como abstração do processo de medir. Os números inteiros, por conseguinte, representam uma evolução do conjunto dos números naturais, pois surgiram não mais da necessidade de representar o fato de não ter uma determinada quantia, como foi o caso do zero, mas sim da necessidade de representar algo que faz falta, ou seja, algo que representa uma necessidade (NIVEM, 1984, p. 3).

No curso do tempo, o homem media, enfim, tudo o que estava relacionado com a sua vida em quantias que tinham como base de raciocínio uma unidade numérica referencial que era por sua vez um número utilizado para medir quantas vezes ele estava dentro de outra quantia inteira. Nesse aspecto porém, quando se deparou com um resultado em que a unidade referencial não cabia um número inteiro de vezes naquele algo a ser medido, iniciou-se ali o estudo do conjunto dos números racionais, aquele que assume representações diversas, como a fracionária, a decimal e a percentagem. Iniciou-se, então, “O conceito dos números racionais, que data de cerca de 3.000 a.C., no Antigo Egito, e surgiu da necessidade de representar partes de um inteiro” (COSTA, 2010, p. 5).

Com o passar do tempo, os egípcios (aproximadamente a 3000 anos a.C.) precisaram medir as terras em torno das margens do rio Nilo a fim de divisão de herança entre membros da família e também em casos de taxas/tributos ao Estado (COSTA, 2010, p. 6). Conforme Boyer (1996), a medição de terras era frequente em decorrência das muitas inundações desse rio que invadiam áreas cultiváveis, pois as inundadas não se prestavam para pagamento de tributos. O material utilizado pelos proprietários eram cordas, específicas de medidas, as quais eram esticadas em cada lado do terreno. Verificava-se quantas unidades havia daquela medida. Nem sempre, porém, as unidades (o número inteiro de vezes) eram exatas de cada lado – um obstáculo que levou os egípcios à criação do número fracionário (BOYER, 1996).

Foi então com o desenvolvimento de sistema de numeração que surgiram outras formas de cálculo: multiplicação e divisão simples entre dois números inteiros. Na Grécia de matemáticos como Pitágoras, Eudoxus, Euclides, prosperou o conhecimento dos números racionais incluindo o estudo de proporções, mas restrito à geometria. Podemos dizer que, nesse momento, o homem começou a estudar as frações – tópico especificado no subcapítulo a seguir (BOYER, 1996).

1.2 Frações: Conceitos Básicos

1.2.1 Noções Fundamentais

Lê-se em [Dante \(2018\)](#) - que, a partir do momento em que o homem passou a observar e investigar situações mais complexas de repartições, chegou à conclusão de que dados dois números inteiros a e b , com $b \neq 0$, teremos que um número racional é um número que representa uma razão ou divisão entre a e b , e essa divisão passou a se chamar fração sendo representada graficamente em duas partes, numerador e denominador, separadas por um traço horizontal:

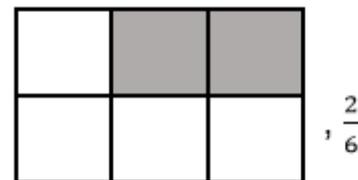
$$\frac{a}{b}, \text{ onde } a \text{ é o numerador e } b \text{ é o denominador}$$

Sendo assim, b é o número chamado de denominador, que representa em quantas partes estamos dividindo o inteiro adotado como referência inicial e a é o número chamado de numerador, que representa de quantas partes desse total b estamos destacando ([DANTE, 2018](#)).

Figura 4 – Partes tomadas do denominador



Fonte: Elaboração própria



Fonte: Elaboração própria

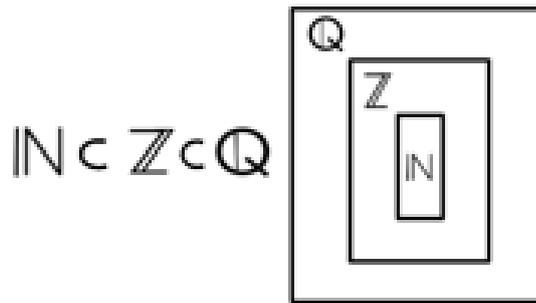
Podemos então admitir que todo número que pode ser representado no formato fracionário é um número racional e entre estes estão os números naturais, inteiros, decimais e dízimas periódicas ([DANTE, 2018](#)). Define-se, assim, tradicionalmente, o conjunto dos números racionais como Q sendo:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Segundo [Lima \(2001\)](#), todo número que pode ser escrito no formato de uma fração é racional, portanto Números Naturais e Inteiros também são números racionais, uma vez que podem ser escritos no numerador de uma fração cujo denominador é igual a 1. Neste estudo, vamos considerar como verdade as propriedades de que entre dois números racionais, sempre existirá outro número racional e que as quatro operações do conjunto dos números racionais são fechadas, ou seja, as respostas às quatro operações resultam em um número racional. Vale lembrar de acordo com [Lima \(2001\)](#), como vimos anteriormente,

que o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros estão contidos no conjunto dos números racionais; logo, quando falamos em racionais, estamos falando de números inteiros, números decimais ou dízimas periódicas.

Figura 5 – Diagrama do conjunto dos números racionais

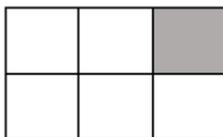


Fonte: Elaboração própria

Nos estudos de frações, uma das noções iniciais após a definição de fração está a noção de comparação. Para compararmos duas frações escrevendo qual delas é a maior, menor ou então se são equivalentes, devemos atentar para o denominador, pois este é a base do raciocínio das partes (DANTE, 2018). O denominador representa em quantas partes vamos dividir o todo e por isso mesmo é um grande referencial para compararmos frações. Como primeiro exemplo quando os mesmos são iguais, basta analisar o numerador que representa de quantas partes desse todo estamos tratando para dizer qual delas é a maior, menor ou se são iguais.

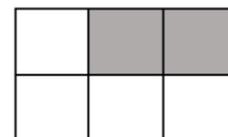
Figura 6 – Qual é a maior fração, $\frac{1}{6}$ ou $\frac{2}{6}$?

Figura 7 – Fração $\frac{1}{6}$



Fonte: Elaboração própria

Figura 8 – Fração $\frac{2}{6}$



Fonte: Elaboração própria

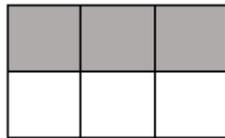
No exemplo acima fica claro que a fração dois sextos, ou dois de seis, é a maior, pois estamos tomando como base de raciocínio o mesmo denominador; então, conclui-se que, como 2 é maior que 1, a fração 2 sextos é maior do que a fração um sexto. Entretanto, quando os denominadores não são iguais, o estudante pode encontrar dificuldades ao

comparar duas frações que adotam referenciais diferentes (DANTE, 2018). Para sanar este problema, vamos entender a noção de fração equivalente.

Dada uma fração $\frac{a}{b}$, temos que uma fração equivalente será da forma $\frac{a \cdot k}{b \cdot k}$. “Toda fração equivalente representa o mesmo número fracionário” (DANTE, 2018). Vamos chamar, por ora, k de um número racional, pois nosso estudante ainda não conhece, no processo cronológico da história dos números, os próximos conjuntos numéricos. De uma forma mais simples, são frações que possuem numeradores diferentes, bem como denominadores diferentes, mas que entretanto possuem o mesmo valor quando calculamos a razão ao dividir o numerador pelo denominador. Analogamente, ainda podemos dizer que são frações que representam a mesma contagem de um todo. Nos exemplos abaixo, considerando que os retângulos das figuras possuem a mesma superfície; podemos perceber que $\frac{3}{6}$ e $\frac{1}{2}$ são frações equivalentes, pois representam a mesma parte geométrica de um todo, ou em forma de cálculos: $\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$ (DANTE, 2018).

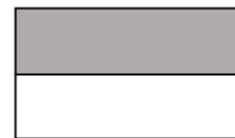
Figura 9 – Frações equivalentes

Figura 10 – Fração $\frac{3}{6}$



Fonte: Elaboração própria

Figura 11 – Fração $\frac{1}{2}$



Fonte: Elaboração própria

Então não se trata do fato de aumentar ou diminuir uma fração, e sim de reorganizar o denominador, como também o numerador em uma nova contagem. Tal conhecimento torna possível a descoberta de novas frações equivalentes a uma determinada fração. Por exemplo, podemos agora dizer que $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16}$, pois podemos escrever $\frac{3}{4} = \frac{6 = 2 \times 3}{8 = 2 \times 4} = \frac{12 = 4 \times 3}{16 = 4 \times 4}$.

De forma análoga, podemos agora transformar facilmente duas frações de denominadores diferentes em duas frações de denominadores iguais, se multiplicarmos o numerador e o denominador da primeira fração pelo número k_1 , que é o denominador da segunda fração e logo após multiplicarmos o numerador e denominador da segunda fração pelo número k_2 , que é o denominador da primeira fração. Por exemplo, vamos comparar as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$:

Temos que $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4} = \frac{9}{12}$ e que além disso $\frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{8}{12}$, logo temos as duas novas frações $\frac{9}{12}$ e $\frac{8}{12}$, respectivamente, equivalentes a $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$. Sendo assim, agora podemos compará-las e dizer que $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$, pois estamos tomando 9 partes de 12 enquanto

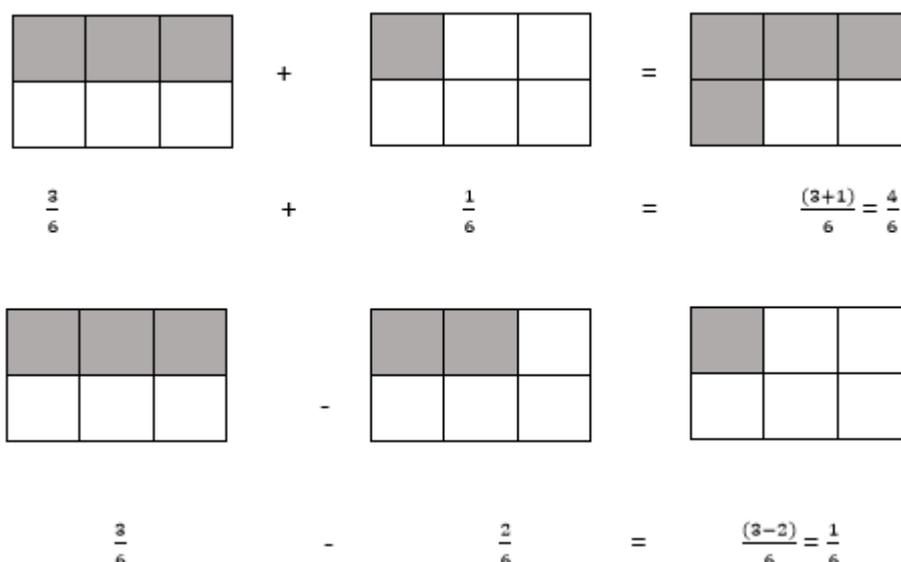
a segunda é apenas 8.

Um raciocínio recíproco e muito útil por facilitar os cálculos é o de simplificar uma fração tornando seu numerador e denominador menores através da divisão de numerador e denominador por um mesmo número (DANTE, 2018). Em uma comparação podemos trabalhar com a fração $\frac{32}{48}$ ou com a fração equivalente $\frac{2}{3}$, uma vez que podemos dividir, por exemplo, o numerador e o denominador de tal fração por 2 e ir obtendo frações equivalentes com numeradores e denominadores cada vez menores, chegando até o momento em que tais divisões não resultarão mais em números inteiros e, portanto, a essa última fração, anterior à divisão não exata, damos o nome de fração irredutível $\left(\frac{2}{3}\right)$:

$$\frac{32}{48} = \frac{16}{24} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

De acordo com Dante (2018), a definição de uma soma e de subtração se concretiza da seguinte forma: para somar ou subtrair duas ou mais quantias na forma de frações com denominadores iguais, basta somar ou subtrair os numeradores e repetir o valor do denominador na fração resultante, pois as duas ou mais frações em questão estão submetidas a uma contagem em que ambas possuem o todo, dividido em um número igual de partes.

Figura 12 – Conjunto representativo de soma e subtração de frações com denominadores iguais



Fonte: Elaboração própria

Em conformidade com Dante (2018), quando se deseja somar ou subtrair frações, basta que se aplique a técnica desenvolvida acima para a obtenção de frações equivalentes com denominadores iguais. Assim, logo em seguida, efetua-se, normalmente, a soma

ou a subtração, segundo a explicação mencionada anteriormente quando se abordou comparação de frações com denominadores diferentes.

Dante (2018) define que uma multiplicação é uma soma de vários fatores iguais, sejam eles positivos ou negativos, que foi escrita de forma simplificada. Por exemplo: a soma $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$ pode ser escrita como $4 \times \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$. Note que, na soma, como os denominadores são iguais, somamos os numeradores e repetimos o valor do denominador e, por esse exato motivo, é que multiplicamos o 4 apenas pelo numerador 2. De forma análoga, podemos estabelecer essa regra para todos os casos, inclusive de acordo com Dante (2018) para os casos em que multiplicamos duas frações:

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{7 \times 5} = \frac{12}{35}$$

Porém nesse ponto temos um denominador não inteiro e, por isso, vamos multiplicar tanto o numerador quanto o denominador por 7 para que o denominador se torne 35:

$$\frac{\frac{12}{7} \times 7}{5 \times 7} = \frac{12}{35}$$

Tal procedimento pode ser entendido, genericamente, da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b} \times c}{d} = \frac{\frac{a \times c}{b}}{d} = \frac{\frac{a \times c}{b} \times b}{d \times b} = \frac{a \times c}{d \times b}$$

E também pode ser aplicado ao caso supracitado:

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{7 \times 5} = \frac{12}{35}$$

Entretanto, consoante a Dante (2018), devemos levar em conta que a finalidade é de poupar o esforço contínuo de nosso estudante, ou seja, ele deve, antes, compreender o real motivo pelo qual ele multiplica direto um numerador por outro numerador e um denominador por outro denominador.

Para finalizar, vamos tratar a definição de divisão, em harmonia com Dante (2018), como um processo semelhante ao caso anterior em que simplificamos a fração. Por exemplo:

$$\frac{3}{5} \div \frac{7}{9} = \frac{3}{5} \times \frac{9}{7} = \frac{3 \times 9}{5 \times 7} = \frac{27}{35} = \frac{27}{35} = \frac{27}{35}$$

Tal procedimento é comumente simplificado nas escolas pela seguinte frase: “Repete-se a primeira fração e multiplica-se pelo inverso da segunda fração”.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Podemos verificar sua veracidade genericamente a seguir:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Enfim, a finalidade é ensinar o estudante a simplificar os cálculos e, de forma alguma, este método substitui a compreensão do real motivo pelo qual se faz esse tipo de cálculo.

1.3 O ensino e o aprendizado de frações

Em face da assertiva de que a matemática tem origem em situações práticas do cotidiano, [Fonseca \(1997\)](#) questiona por que motivo o seu ensino, anos a fio, permaneceu/permanece detido e engessado nas mãos do professor.

Em uma posição de destaque entre os conteúdos matemáticos está o estudo de frações, que só deve ser iniciado quando o aluno já domina questões significativas conceituais de números racionais; do contrário, surgirão obstáculos para a apreensão de subsequentes conceitos matemáticos. Com efeito, “a abordagem que consideramos relevante para o desenvolvimento dos números fracionários é mais conceitual e compreensiva, e não de figuras e regras memorizadas” ([BERTONI, 2009](#), p. 17). Por se desconsiderar esse aspecto, o processo de ensino e aprendizagem de frações vem sendo um desafio, um entrave que se sedimenta no imaginário dos alunos de difícil reversão, concebido em [Brousseau \(2008\)](#) como obstáculo didático. Afinal, “A abordagem tradicional, realmente, não contribui para um avanço na compreensão dos números” ([BERTONI, 2009](#), p. 17).

Segundo [Brasil \(2017\)](#), o ensino de frações no Brasil deve ser desenvolvido do segundo ano até o oitavo ano do ensino fundamental, sendo que nesse meio tempo o estudante deve ser um protagonista do aprendizado de modo a compreender plenamente conceitos, desenvolver propriedades, realizar operações e aplicações sobre o referido tema. Porém é notável que muitos estudantes têm dúvidas nos cálculos com números racionais e um dos motivos conforme [Berton \(2009\)](#) é o fato de que ainda convivemos com a educação tradicional, que mascara a complexidade desse ensino dando-lhe a aparência de entendimento quando, na verdade, o que se tem é uma reprodução, uma aprendizagem falsificada do que, de fato, deveria ser uma aprendizagem de boa qualidade.

Nesse sentido, este presente trabalho se restringe ao estudo do ensino de números racionais, por meio da metodologia de RP, apenas enquanto fração, pois, apesar de as frações fazerem parte de nossa vida cotidiana e que, por isso mesmo,

[...] as representações fracionárias e decimais os números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo ([BRASIL, 1998](#), p. 100-101).

Como se observa, é preciso avançar nesse ensino cuja abordagem se centra no conceito de fração muito simplório da relação parte/todo. É preciso ir além e problematizar situações para que a abstração fracionária se torne mais tangível, refletir nesta direção: “Para desenvolver corretamente o conceito de fração, a criança precisa ser solicitada a refletir sobre as seguintes questões: Qual é o todo? Quantos pedaços há no todo? São pedaços do mesmo tamanho?” (LIMA; BRITO, 2005, p. 115).

Partindo-se do que é visível e até mesmo palpável, a nomenclatura vai sendo inserida: um meio, dois terços e assim por diante. É fundamental que essa linguagem conceitual é estranha para a criança, cujo repertório linguístico ainda é incipiente. Aliado a tal incipiência, o seu conhecimento de mundo é relativamente estreito. Por isso, a linguagem precisa ser bem trabalhada para evitar embaraços (LIMA; BRITO, 2005, p. 2).

Nesse sentido, corroboram Mendes e Mendes (2016, p. 2), ao citarem como um dos pontos de dificuldade do aprendizado de frações ser “uma ênfase excessiva na nomenclatura – introduzindo-se termos como numerador, denominador, frações equivalentes, frações próprias e impróprias – antes da compreensão do significado e dos usos do número fracionário”. Com efeito, esse modelo educacional tradicional vem sendo amplamente discutido e criticado. Mas ele está em uso, pois pelas dúvidas dos estudantes isso é perceptível. Através de uma avaliação diagnóstica, logo no primeiro contato com a turma, ficou visível que eles ainda tratam os números racionais como uma mera memorização (MENDES; MENDES, 2016, p. 2).

Por isso, um dos maiores desafios da educação brasileira é tornar conteúdos complexos, como o conteúdo de números racionais, acessível a todos os estudantes. É indispensável chamar a atenção para as observações empíricas presentes na vida cotidiana e relacioná-las a representações matemáticas, como figuras e esquemas e então associar “essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas” (BRASIL, 2017, p. 265).

Por certo, consoante a Brasil (2017, p. 265) para que um estudante compreenda determinado conteúdo de matemática (como o de fração, por exemplo), é necessário que tal conteúdo faça sentido para ele em sua vida e em seu meio de trabalho. Porém, muitas vezes falta ao professor perceptibilidade de conceitos fundamentais; somado a isso, ele “não dispõe de conhecimentos didático-metodológicos suficientes para abordá-lo [o ensino] adequadamente e, por sua vez, quem aprende não consegue compreender significativamente o conceito envolvendo o conteúdo de fração” (ALVES; MARTENS, 2011, p. 9369).

Nessa perspectiva, as orientações de Mendes e Mendes (2016, p. 3) são relevantes:

[...] os números racionais devem ser tema planejado e distribuído ao longo do ano todo, a partir do 4º ou do 5º ano do Ensino Fundamental. Respeitar o tempo de aprendizagem é a justificativa para essa opção. Assim, os alunos

terão também tempo para vivenciar situações mais realistas quanto ao emprego das frações em situações próximas e significativas. No que diz respeito à nomenclatura excessiva, apesar de acreditarmos que a sala de aula deva ser rica em termos e expressões matemáticas, isso deve ser feito desde que os termos da linguagem matemática façam sentido para quem aprende. Aprender termos e usá-los não pode tomar o tempo da construção do conceito de fração propriamente dito. Por isso, a nomenclatura referente a números decimais e frações deve ser apresentada ao aluno à medida que se fizer necessária para a boa comunicação e para representar quantidades fracionárias.

Entretanto, consoante [Pires \(2000\)](#), tal aprendizado fruto de uma educação expositiva, em que os conteúdos e propriedades, ao invés de investigarem a realidade e a resolução de uma situação-problema, buscam a mera memorização e reprodução.

Praticamente o tempo todo o homem precisa utilizar direta ou indiretamente o conceito de fração para traduzir ou resolver situações-problema do cotidiano do cidadão e do trabalhador ([PIRES, 2000](#)). Entretanto, existem alguns problemas que não se restringem apenas ao conceito do que é uma fração e vão além, demandando comparar frações e operá-las. Essas são algumas das competências tratadas no sexto e no sétimo ano do EF e que são, em geral, abordadas de forma descontextualizada e não sequencial, uma vez que o ensino tradicional não possui como característica a construção do conhecimento, passo a passo pela lógica ([PIRES, 2000](#)). De acordo com [Pires \(2000, 67\)](#),

Marcos temáticos são fixados e devem ser percorridos sequencialmente; é um caminho cujo percurso é composto de passos, cuja lei de sucessão é ir do mais simples para o mais complexo. [...] Ao desenvolverem seu trabalho em sala de aula, tanto elaboradores de currículos de Matemática quanto professores se empenham em organizá-lo segundo uma “estrutura” lógica linear: cada assunto (capítulo ou unidade) supõe conhecidos assuntos precedentes.

Explica [Bertoni \(2009\)](#) que, se um estudante que antes, somente, reproduzia conteúdos e fórmulas, conseguia entender e compreender o conceito de frações bem como suas propriedades e operações dentro de uma situação-problema, ele passava de um ponto apenas de observação e reprodução para um ponto em que ele se tornava o protagonista da ação, ou seja, um agente responsável por planejamento, manipulação, execução e análise daquilo que estava sendo proposto como solução. A autora assevera: “É preciso encontrar caminhos para levar o aluno a identificar quantidades fracionárias em seu contexto cotidiano e a apropriar-se da ideia do número fracionário correspondente, usando-os de modo significativo ([BERTONI, 2009](#), p. 16). Tal fato não ocorre no ensino tradicional de frações, pois ali o estudante é restrito à exposição de conteúdos e à aplicação de técnicas de cálculos que não o levam a construir uma solução, nem manipular operações e propriedades as quais ele construiu com o conhecimento prático ([BERTONI, 2009](#)).

Esse ensino carece de material didático-pedagógico específico, não pode ficar apenas no âmbito conceitual (BERTONI, 2009). Conforme Alves e Martens (2011, p. 93), há necessidade de que o aluno estabeleça “relações significativas para elaboração de conceitos”, pois nem sempre suas experiências são “suficientes para tal volume de conceitos matemáticos, ou seja, há a necessidade de cuidadoso trabalho didático-pedagógico para que, nesse contexto, não se desenvolvam problemas com a aprendizagem desse conteúdo – frações”.

A educação tradicional detém o estudante em um casulo, de onde ele assume o papel de espectador: observa a mera exposição e decora a técnica que o professor utiliza para comparar e operar frações (BRASIL, 1998). Sobre essa situação de aprendizagem, orientam os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática que, obviamente, ela “não se dá pela simples memorização de fatos de uma dada operação, mas sim pela realização de um trabalho que envolve a construção, a organização e, como consequência, a memorização compreensiva desses fatos” (BRASIL, 1998, p. 73). Dessa forma, ele é moldado para ser um reprodutor de conceitos abstratos e fórmulas. Um estudante que aprende o conteúdo de frações pelo método tradicional não consegue fazer uma análise plena de um problema ou até mesmo manipular e discutir os conhecimentos com o professor e colegas, para propor uma solução (BRASIL, 1998, p. 73).

Preocupado com esse status quo, surge, em 2017, a Base Nacional Comum Curricular, que faz uma releitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais. No tocante ao EF, Brasil (2017, p. 266) assinala que nessa etapa, o ensino precisa se voltar para desenvolver o letramento matemático dos alunos, ou seja, “as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos”. Para tanto, há de se utilizar “conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas”, de modo a assegurar os alunos ao reconhecimento da relevância dos conhecimentos matemáticos “para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição)” (BRASIL, 2017, p. 266).

O aprendizado efetivo da matemática na educação básica é de extrema importância. Esta disciplina é uma ciência que vai do conhecimento mais elementar ao mais complexo de forma tal que traduz o universo em números. É uma ciência que está ao redor do homem o tempo todo ajudando-o a compreender cada detalhe do mundo em que vive, propondo soluções para problemas, equacionando experimentos, prevendo comportamentos da natureza e contribuindo em aplicações tecnológicas (BRASIL, 2017, p. 267).

Dessa forma o desenvolvimento de um conteúdo matemático, não pode ser uma mera exposição, antes, deve ser um processo gradual, constantemente avaliado, de cons-

trução colaborativa, não só entre estudantes e professores mas de uma forma proativa entre estudantes, professores, pais e comunidade. Diante desses aspectos, a avaliação da aprendizagem seja ela diagnóstica, somativa e formativa deve ser um compromisso de todos uma vez que é um instrumento norteador e sustentador do sucesso do processo de ensino-aprendizado.

A avaliação da aprendizagem escolar se faz presente na vida de todos nós que, de alguma forma, estamos comprometidos com atos e práticas educativas. Pais, educadores, educandos, gestores das atividades educativas públicas e particulares, administradores da educação, todos, estamos comprometidos com esse fenômeno que cada vez mais ocupa espaço em nossas preocupações educativas (LUCKESI, 2000, p. 1).

Enfim, a avaliação é um processo que deve ser aliado ao ensino de frações, pois além disso o sujeito é avaliado não só na escola, mas a todo momento em sua vida. Portanto o estudante protagonista que compreende efetivamente o conteúdo de frações, não só é avaliado pelo professor, para ser melhor atendido, como também avalia de uma forma melhor suas escolhas em sua vida.

Uma das características mais interessantes da história da matemática é o fato de que ela traz à tona muitos problemas de diversos povos em diferentes épocas. Tais problemas muitas vezes constituíam-se em entraves à sobrevivência de grupo(s) humano(s) em determinado local (BRASIL, 1998).

A aprendizagem não se dá com o indivíduo isolado, sem possibilidade de interagir com seus colegas e com o professor, mas em uma vivência coletiva de modo a explicitar para si e para os outros o que pensa e a dificuldade que enfrenta. Os alunos que não falam sobre Matemática e não tem oportunidade de produzir seus próprios textos nesta linguagem dificilmente serão autônomos para se comunicarem nesta área (BRASIL, 1998, p. 120).

O ensino e a aprendizagem atual de frações demanda um ambiente desafiador, composto de diálogo, interação entre os jovens e a prática, repleto de problemas interessantes e desafios matemáticos. Depreende-se, então, que grande parte do conteúdo em um livro de matemática traz, em sua gênese, uma aplicação prática que solucionou um problema de um determinado povo em uma determinada época. Cada descoberta foi passando em forma de conhecimento de geração em geração, integrando os homens em uma constante prática protagonista. Também na escola, tal integração ocorre quando ofertamos um ambiente de interação onde múltiplos saberes serão compartilhados entre professor e estudantes, entre os próprios estudantes, entre estudantes e comunidade escolar e por fim entre estudante e o meio de trabalho.

1.4 Metodologia da Resolução de Problemas de George Polya

A metodologia de George Polya descrita em [Polya \(1978\)](#) não é um formato ou técnica na qual o pesquisador se vale de um mecanismo que o leva até a resposta de um determinado problema, mas sim é uma metodologia que explica como se deve ler e compreender um problema, como se deve organizá-lo e estabelecer um plano, como se deve executar o plano pensado para então conseguir a solução e fazer uma retrospectiva de todas as etapas. Suas explicações encontram eco nas orientações propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, onde se lê:

A resolução de problemas é peça fundamental para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento dos desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas ([BRASIL, 1998](#), p. 112).

Resolver problemas é um fator de extrema importância na vida do estudante, tão importante quanto aprender e compreender os conceitos necessários para essa finalidade. É fácil perceber que resolver uma determinada situação problema é uma excelente forma de compreender um determinado conteúdo ([BRASIL, 2017](#)). Exemplificando a citação [Brasil \(1998, p. 112\)](#): na condição de professor de matemática, dá para exemplificar e fazer uma analogia da musculação com a nossa prática que, quando se quer fazer musculação não basta aprender e compreender a musculação; é imprescindível praticar o ato de fazer exercícios para obter músculos mais fortes ou mais trabalhados à partir da experimentação. Resolver problemas, então, é essencial para se adquirir experiência.

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas de atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o ensino fundamental ([BRASIL, 2017](#), p. 264).

Mas como resolver um problema? Não é uma tarefa simples como muitos pensam; não basta aplicar conhecimentos e fórmulas para se obter uma resposta. Se alguém assim o faz, provavelmente não está ensinando seu aluno adequadamente ([BRASIL, 2017](#), p. 264). Então, como construir uma aula a partir de um problema, ou então, como compreender e solucionar corretamente um problema se o nosso estudante apresenta, muitas vezes, diversas dificuldades ao resolvê-lo? Ainda nesse contexto, quais são as possíveis etapas que devemos percorrer para solucionar um problema? A próxima subseção busca, além de explorar as etapas sugeridas por Polya, essas respostas de acordo com a metodologia desenvolvida em [Polya \(1978\)](#).

1.4.1 Etapas sugeridas por George Polya

Segundo Polya (1978), os problemas devem ser organizados em etapas, sendo que cada uma das etapas demanda uma série de observações a serem feitas por aquele que deseja ensinar a pensar um problema e solucioná-lo de forma plena. Uma das primeiras perguntas que se deve fazer segundo a teoria de RP de George Pólya é: o que é um problema? Existem, pois, questões que configuram certa dificuldade para o estudante, mas que ele consegue identificar o que fazer para solucioná-las; portanto, já tem conhecimento da solução para aquele problema. Polya (1978) ainda salienta que esses casos são considerados como situação problema que precisa ser pensada, organizada e analisada. Para o autor, um problema é uma situação da qual não sabemos a solução e, por isso, necessitamos dividi-lo em etapas para melhor compreendê-lo.

Como já foi dito anteriormente, conforme Polya (1978) a Resolução de Problemas não é uma técnica, pois uma técnica é uma forma muito pequena perto da grandiosidade da metodologia de RP desse autor. Um dos fatos mais importantes de sua metodologia é o uso constante da heurística, pois esta promove um ambiente transformador onde o estudante se torna um verdadeiro investigador, que busca cada vez mais conhecimento por curiosidade manipulando os conhecimentos sobre o tema de forma criativa.

Antes mesmo de discursar sobre a primeira etapa, convém que se façam alguns esclarecimentos sobre a heurística, pois, na linha de Polya (1978), um estudo consciencioso considera suas bases lógicas e psicológicas. Em concordância com Polya (1978, p. 87), não é concebível esquecer o que autores da antiguidade (Pappus, Descartes, Leibnitz e Bolzano) escreveram sobre o tema, “mas muito menos pode desprezar a experiência imparcial. A experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atividade por parte dos outros devem constituir a base em que se assenta a Heurística”. Assim então, continua o autor:

Neste estudo, não devemos descurar nenhum tipo de problema, e sim procurar aspectos comuns na maneira de tratar de problemas de toda sorte: devemos considerar os aspectos gerais, independentemente do assunto específico do problema. O estudo da Heurística tem objetivos “práticos”: melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer uma certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da Matemática (POLYA, 1978, p. 87).

A metodologia da RP de Polya (1978) foi organizada por ele em quatro etapas moldadas pela heurística que se subdividem em outras igualmente importantes. Para ele, a heurística tem como natureza o ganho de conhecimentos a partir do praticar. O trabalho de Polya (RP) é uma forma de encaminhar ou conduzir o estudante de forma gradual por um caminho onde ele descobre e compreende dados e fatos sobre um determinado assunto através da prática. Assim então, resolver problemas não é nada mais do que uma habilidade

prática, “como nadar, esquiatar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. [...] se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom ‘resolvedor de problemas’, tem que resolver problemas” (POLYA, 1978, p. 65).

A heurística de Polya (1978) é algo incrível que trata da caminhada para se chegar à resposta de um problema e que, quando adotada com clareza, pode oferecer a quem a utiliza muito mais do que uma solução de um problema. Quando a RP se dá pelo raciocínio heurístico, ocorrerá a manifestação de problemas auxiliares de forma gradativa e natural durante todo o processo de resolução. Assim, o estudante poderá desfrutar de um aprendizado extra, muito além da particularidade de uma resposta de problema (POLYA, 1978).

Como destaca o autor, “Raciocínio heurístico é aquele que não se considera final e rigoroso, mas apenas provisório e plausível, e que tem por objetivo descobrir a solução do problema que se apresenta. Somos muitas vezes levados a usar o raciocínio heurístico” (POLYA, 1978, p. 132). A certeza absoluta de se atingir a solução final do problema se faz anteceder de um processo cuja satisfação se dá por um pressuposto aproximadamente provável. “É possível que precisemos do provisório antes de atingirmos o final. Para chegarmos a uma demonstração rigorosa, é necessário o raciocínio heurístico, assim como andaimes são necessários à construção de um edifício” (POLYA, 1978, p. 132).

As etapas que Polya estabelece para a RP são quatro, a saber: 1) Compreender o problema; 2) Construir um plano de ação; 3) Executar o plano; 4) Rever a resolução – partes estas inseparáveis, isto é, interligadas e embasadas no raciocínio heurístico (POLYA, 1978).

A primeira etapa abarca o momento de compreensão do problema pelo estudante. Cabe aqui o questionamento da possibilidade de podermos fazer uma ilustração, mesmo que um rascunho, sobre o fato narrado, analisar e escrever números e palavras segundo o contexto em que estão tais dados. Vale destacar que nesta etapa é muito importante compreender a natureza do problema observando se existe alguma dúvida. Caso exista, é indispensável questionar se ela tem uma possível resposta objetiva ou não, baseada sempre nos dados que foram informados no problema. Entretanto, Pereira (2020, p. 6), analisando este momento, infere que “Embora possa parecer óbvia, esta etapa é frequentemente negligenciada. Muitos novatos tentam dar uma resposta apressadamente a partir de uma leitura superficial, sem realmente entender o que está sendo proposto e solicitado no problema”.

É de suma importância compreender a essência do problema, bem como suas condições, quanto ao que o problema está querendo ou pedindo, para só depois verificar se é possível respondê-lo. A partir daí, dá para perceber se as diferentes condições (quando existem) são suficientes o bastante para então introduzir uma notação matemática própria e adequada para o assunto. É o que sugere Polya (1978) quando destaca as estratégias que

comportam o desenho de uma figura, de um esquema, de separação de dados em partes para a introdução da notação adequada.

Na segunda etapa, seguimos [Polya \(1978\)](#) quando propõe que devemos construir um roteiro, de forma organizada e sequencial, com a finalidade de ser um plano de ação o qual necessita de uma estratégia que será norteadada a partir da exploração dos dados obtidos na primeira etapa. Sugere-se que tais dados sejam interpretados em gráficos e tabelas de modo que possibilitem uma associação entre as possíveis dúvidas e os dados que coletamos. Com a finalidade de melhor gerenciar a execução, devemos sempre que possível dividir o problema em problemas menores, ou problemas auxiliares, pois, além de gerenciarmos melhor a resolução do problema, tal formato ainda contribui para que possamos organizar uma sequência lógica de resolução e também para não ficarmos na inércia quando não conseguimos pensar em nenhuma saída para o problema ([POLYA, 1978](#)).

Nesta etapa, orientado por [Pereira \(2020\)](#), seria interessante questionarmos se podemos fazer uma releitura do problema para verificar se já estudamos algo semelhante a essa questão para que possamos transformar o problema dado em outro equivalente, porém mais acessível. [Pereira \(2020, p. 8\)](#) ainda sugere esquecer por um momento o dado problema, pois ele acredita que “Aparentemente o inconsciente continua trabalhando, enquanto nos ocupamos de outras coisas (mas só depois que já trabalhamos bastante no problema!)”.

Nesta etapa, na trilha de [Polya \(1978\)](#), ainda é possível levantar hipóteses de conceitos, propriedades, teoremas ou até mesmo fórmulas que possam ajudar na elaboração de um plano. Não basta ao aluno compreender o problema, “deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante” ([POLYA, 1978, p. 5](#)).

Para [Pereira \(2020, p. 7\)](#), trata-se da etapa mais difícil e “artística”, pois envolve enxergar uma estratégia exequível, o que dependerá de “conhecimentos prévios e experiência em problemas semelhantes, mas também, em muitos casos, de uma dose de intuição e criatividade”, com o fim de descobrir “conexões entre os dados do problema e sua incógnita. É claro que a execução cuidadosa da Etapa 1 pode ajudar. Em alguns casos, uma conexão ‘emerge’ de maneira aparentemente misteriosa!” ([PEREIRA, 2020, p. 7](#)).

Na terceira etapa, vamos redigir o projeto. Inicialmente, porém, vamos fazer todos os cálculos que foram indicados no nosso projeto, pois agora já conseguimos incluir na execução todas as formas de leitura e comparações feitas anteriormente nas outras etapas. Após realizarmos tais cálculos, vamos conferir cada um dos passos que foram dados com muito cuidado, pois, nesta etapa, ao executar a estratégia proposta no plano, devemos atentar se alguma estratégia adotada foi equivocada. Afinal, se um plano for equivocado,

todas as ações adotadas nas etapas restantes, também, serão inadequadas. Portanto, é indispensável verificar cada passo questionando para ter a certeza de que cada um deles está correto.

Realizado com sucesso o plano da etapa 2, a etapa 3 se torna mais fácil carecendo quase que exclusivamente de paciência e cuidado. “Um ponto que precisa ser lembrado, porém, é a diferença entre intuição e formalização, ou seja, entre perceber ou intuir um fato e prová-lo (prova aqui sendo um argumento correto a partir de fatos aceitos, não uma demonstração rigorosa)” (PEREIRA, 2020, p. 9). Para tanto, as reflexões que Polya (2006) sugere para facilitar o processo desta etapa giram em torno da percepção de que cada passo deve estar claramente correto e se é possível provar a equivalência entre duas etapas consecutivas de resolução de uma questão.

Pereira (2020, p. 10), refletindo sobre o surgimento de dificuldades na execução do plano, entende que o caminho é voltar à segunda etapa e modificar o plano. Daí a importância de monitoramento constante em todo o processo para que não se insista num rumo infrutífero.

A quarta etapa é a etapa na qual vamos verificar tudo o que foi feito anteriormente, analisando cada uma das etapas anteriores, dos dados aos cálculos a fim de encontrar possíveis erros. Nesta etapa, devemos pensar se existem outros caminhos para solucionar o problema. Além disso, devemos analisar se o processo utilizado pode ser aplicado em outra situação problema de mesmo teor ou que tenha proximidade com o teor da questão. Para finalizar, é preciso verificar não só o resultado, bem como todos os argumentos utilizados em cada etapa e verificar, ainda, se é possível encontrar ou conhecer outro caminho que chegue à mesma solução obtida.

Segundo Pereira (2020, p. 11), esta etapa nem sempre é realizada, ainda que Polya (1978) ressalte sua relevância por ela poder “consolidar seu conhecimento e desenvolver sua habilidade de resolução de problemas. Também pode ocorrer que uma revisão acabe mostrando algum erro ou imprecisão no raciocínio ou então indicar uma solução mais simples”.

Posto isso, percebemos a grande contribuição de Polya (1978) no ensino matemático (e por que não em outras áreas do conhecimento?). O teórico nos faz lembrarmos de colocar em prática (o que quase sempre é esquecido no trabalho docente) a sistematização da heurística em momento de resolução de problemas, valorizando assim a análise retrospectiva permeada em todo o processo, tendo como foco o questionamento para alimentá-lo.

Dessa forma, tal metodologia contribui enormemente para que nosso estudante seja cada vez mais estudioso, dedicado e autônomo em sua vida como cidadão e como trabalhador.

1.5 Sequência Didática de Natanael Cabral

Em conformidade com Cabral (2017), a SD é uma expressão originária da área educacional a fim de nomear uma metodologia caracterizada pela organização de certo conteúdo em um grupo de etapas sequenciadas de modo que torne mais eficiente a aprendizagem proposta. Os Parâmetros Curriculares Nacionais em Brasil (2017), dão visibilidade a essa metodologia no Brasil, que já existia desde os anos 1980 na França, a fim de “descompartimentalizar” o ensino de língua francesa e promover um ensino integrado. No ensino da matemática, esse procedimento metodológico veio depois e são escassas ainda pesquisas nessa seara – um dos motivos que levava Cabral (2017) a se apropriar dos conhecimentos de construção da sequência didática e adaptá-los para o ensino de conteúdos matemáticos. E é por essa diretriz que nossa pesquisa se guia.

Preocupado com a transmutação de uma postura passiva, embasada no tripé definição/exemplo/exercício, para uma postura ativa do aluno, possibilitada pela discursividade dialógica incitadora de “interações verbais reflexivas”, capazes de levar o aluno ao estabelecimento de generalizações, Cabral (2017, p. 39) orienta o professor a assumir uma postura provocativa. Como a ciência nunca parte do zero, a sua produção é calcada em adaptação de modelos. Inclusive, recorre em Cabral (2017) aos estudiosos teórico-metodológicos específicos da SD que o antecederam como Antoni Zavala, o conhecido trio Dolz/Noverraz/Schneuwly, o outro trio Leal/Brandão/Albuquerque, dentre outros. Mais que isso, o construto que ele propõe

[...] se alimentou teoricamente em Rêgo (1995) com os pressupostos da Psicologia Histórico-Cultural em Vygotsky do conceito de zona de desenvolvimento proximal (ZDP), bem como com as contribuições de Goés (2000) com as noções de Análise Microgenética na investigação da construção de conhecimentos nas interações verbais foram determinantes em minha experiência profissional para a concepção desse modelo estruturante (CABRAL, 2017, p. 11).

Assim, Cabral disponibiliza aos profissionais do ensino matemático uma obra na qual adapta a SD a conteúdos disciplinares específicos no ensino da matemática, nos níveis fundamental e médio. Os conteúdos são trabalhados de modo articulado a expedientes de comunicação (oral e/ou escrita) para metodizar as mediações de ensino “com a intencionalidade objetiva de estimular a aprendizagem de algum conteúdo disciplinar de Matemática a partir da percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações adotando-se uma dinâmica de interações empírico-intuitivas” (CABRAL, 2017, p. 12). Tudo isso com adequação à capacidade de aprendizagem do aluno.

1.5.1 Fases sugeridas por Natanael Freitas Cabral

Convém não confundir SD com plano de aula até porque o que é preparado nesse processo metodológico caracterizado como um conjunto articulado de atividades, “como elos conectados de uma corrente”, permeado de diversas estratégias sequenciais de ensino e aprendizagem, intervenções planejadas em seu passo a passo, consome várias aulas, vários dias. Assim, “Cada elo posterior está devidamente articulado aos elos anteriores e permite outras articulações com elos subsequentes. Uma forma de rede que se estrutura a partir dessas articulações conceituais” (CABRAL, 2017, p. 33).

Cabral (2017, p. 40) compartimenta a SD em seis fases, todas elas intrinsecamente interligadas entre si, a saber: 1) Intervenção Inicial (I_i); 2) Intervenção Reflexiva (I_r); 3) Intervenção Exploratória (I_e); 4) Intervenção Formalizante (I_f); 5) Intervenção Avaliativa Restrita (IA_r); 6) Intervenção Avaliativa Aplicativa (IA_a).

A primeira fase, Intervenção Inicial (I_i), como o próprio nome indica, é o início do processo, tratado pelo autor como jogo, no âmbito do discurso dialógico-didático. A intervenção do professor, por meio de ações dirigidas e interativas, é fundamental e inalienável para estimular o aluno à percepção empírico-intuitiva de um conceito ou uma verdade do pensamento matemático em articulação com outro(a), orientar o pensamento em construção e a alcançar os objetivos propostos de aprendizagem – um modo de se promover as Zonas de Desenvolvimento Proximal (ZDP) na linha vygotskyana, que faculta a passagem de um Nível de Desenvolvimento Potencial (NDP) a um Nível de Desenvolvimento Efetivo (NDE) (CABRAL, 2017).

A segunda fase, Intervenção Reflexiva (I_r) é materializada por questionamento referente a aspecto(s) relacionado(s) ao objeto de reconstrução em seu conceito, pois assim há um tangenciamento de ideias a fatos que facultam a reelaboração final do objeto em questão. A reflexão permeia todo o jogo da aprendizagem, desde o que se faz e as consequências disso sobre outros pontos da atividade em desenvolvimento. Tudo isso demanda do professor expectativa de planejamento e de identificação acerca da organização imputada aos conceitos circunscritos, isto é, aos que de modo associado fomentam “a (re)descoberta do conceito objeto de reconstrução” (CABRAL, 2017, p. 41). Nesta fase, o professor orienta o aluno a formular hipóteses, estabelecer conjecturas, checar possibilidades e determinar consequências.

Já o objetivo da Intervenção Exploratória (I_e), terceira fase, é aprofundar a interpretação do estudante sobre as respostas conseguidas na fase anterior, a das Intervenções Reflexivas (I_r). Agora, em vez de questionamentos, o aluno é instigado a fazer “simulações, experimentações, descrições, preencher tabelas, elaborar gráficos e observações” (CABRAL, 2017). É imprescindível que o processo de ensino e aprendizagem passe por essa dinâmica interventiva e colaborativa que estimula o aluno a perceber algumas regulari-

dades circundantes do transcurso de reconstrução conceitual. Isso envolve a elaboração do cenário didático de modo que envolva o aluno à percepção, mesmo que intuitiva, de padrões, regularidades e formato de modelos generalizantes. Nessa lógica essencialmente empírica, o aluno se convence de “certas verdades” no universo da matemática, que não se dá por meio de argumentos estruturantes a partir de uma demonstração matemática excessivamente expositiva, mas pela combinação da Intervenção Interventiva à Exploratória. Nota-se, pois, a diferença dessa dinâmica da exposição didático do ensino tradicional.

A quarta fase, Intervenção Formalizante (I_f), decorre das duas fases anteriores, quando o professor, orientado pelo pensamento permeado pela SD, “se apropria dessas verdades ‘empírico-intuitivas’ (sugeridas pelos alunos)” (CABRAL, 2017, p. 42) e aperfeiçoa as verdades que os alunos redescobriram “com as vestes da formalidade Matemática. Aqui as percepções dos alunos são consolidadas com uma linguagem mais abstrata que procurar satisfazer as exigências do saber disciplinar formal, axiomático, próprio da natureza matemática” (CABRAL, 2017, p. 42). Por certo, Cabral não sugere que se abandonem as formalidades do saber matemático, mas que haja um olhar mais sensível às limitações do aluno – o que vai na contramão da formalização precedente à argumentação do aluno no ensino tradicional.

Agora, como primeiro critério (primeiros passos) de avaliação de aprendizagem da formulação do objeto de reconstrução”, vem, na SD, a quinta fase, Intervenção Avaliativa Restrita (IA_r). É o início da checagem do conceito aprendido, enfatizando as propriedades operacionais a partir da manipulação de algoritmos envolvidos. As reconstruções conceituais são justificadas no tocante a procedimentos aplicados como fundamento das verdades empírico-intuitivas instauradas. Tudo muito diferente do ensino permeado de regras e fórmulas não entendidas pelo aluno, a quem cabe memorizá-las e reproduzi-las, sem qualquer ênfase reflexivo-exploratória. Para a IA_r , há dois enfoques basilares: “O que é o objeto matemático em estudo? (o significado, o sentido) e, além disso, como se justificam e operam os algoritmos decorrentes? (propriedades e operações)” (CABRAL, 2017, p. 43).

Por fim, vêm, na sexta fase, Intervenções Avaliativas Aplicativas (IA_a), o grau mais alto de avaliação do processo de assimilação conceitual, momento em que é necessário ao aluno a capacidade de mobilização das “noções conceituais associadas às propriedades operacionais decorrentes (algoritmos) em situações que envolvam resolução de problemas aplicados aos diversos contextos reais e/ou abstratos adequados ao seu nível de ensino” (CABRAL, 2017, p. 43).

Para consolidar o texto de uma SD no ensino matemático, Cabral concebe duas modalidades que materializam a Intervenção Inicial: “Exploração Potencial” (I_i – EP) e “Conexão Pontual” (I_i – CP). Nessas modalidades, “a condução diretivo-dialógica do professor assume o papel de orientador do pensamento que tem como objetivo a (re)construção de um ou mais conceitos já sistematizados do saber disciplinar da Matemática sugerida no

currículo escolar” (CABRAL, 2017, p. 45). Com efeito, a intencionalidade permeia qualquer SD por se pautar na esfera do discurso dialógico, em que o aluno participa ativamente como ator de sua aprendizagem. Em suma, o que tomamos como direção metodológica da SD proposta por Cabral foi o que concerne a essas seis fases ora descritas.

1.6 Trabalhos Relacionados

Elaborou-se aqui um levantamento composto de oito trabalhos de conclusão de curso *stricto sensu* no âmbito da educação brasileira que tratam do ensino de números racionais no Brasil. Para tanto, utilizou-se como fonte de busca o Google Acadêmico. Foram considerados trabalhos referentes às duas primeiras décadas do século XXI, mais precisamente entre os anos 2005 e 2018. Descreve-se, resumidamente, abaixo, o que se encontrou.

1.6.1 Tecnologias digitais e ensino de Matemática: o uso de Facebook no processo de ensino dos números racionais

Este é o título da dissertação de Mestrado de Carla Denize Ott Felcher, apresentada em 2016, em Pelotas-RS, ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pelotas. A pesquisa foi aplicada ao 7º ano do EF, num ambiente virtual de aprendizagem (Facebook: grupo fechado). O trabalho partiu do seguinte problema: “de que maneira podemos utilizar a Rede Social Facebook para o ensino dos números racionais, considerando este conteúdo como aporte para desenvolver o pensar?” (FELCHER, 2016, p. 19) e objetivou, por meio do Facebook, potencializar o ensino dos números racionais. A metodologia utilizada foi a Pesquisa-ação. Esta pesquisa embora trate também do ensino de números racionais, segue metodologia e aplicativo tecnológico diverso do da presente dissertação.

A autora chega ao término do trabalho afirmando que os alunos consideraram o F@ceMAT favorável à aprendizagem. Isso também pôde ser constatado pelos resultados e evidências do aumento participativo deles e consequente aproveitamento.

1.6.2 Números racionais: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal

Autor da dissertação de Mestrado em Educação Matemática, pela PUC-SP, apresentada em 2005, Wilson Roberto Rodrigues partiu do seguinte questionamento: “Que aspectos do conceito de fração nos significados parte-todo e quociente permanecem sem ser apropriados por alunos de 8ª série do EF, 3ª série do Ensino Médio e Ensino Superior

na área de exatas? (RODRIGUES, 2005, p. 15)”. A 8ª série nessa época corresponde ao 7º ano, mas a pesquisa não se reduz ao EF, vai mais além: Ensino Médio e Ensino Superior.

Identificar aspectos do conceito de número racional cuja construção não se tem revelado eficaz no período da educação básica, quando são trabalhados em sala de aula, e que permanecem sem ser apropriados pelos alunos por longo tempo, durante o processo de escolarização (RODRIGUES, 2005, p. 11).

Trata-se de uma pesquisa descritiva a partir de um “estudo casual comparativo de caráter diagnóstico” (RODRIGUES, 2005, p. 66), cujos dados foram analisados qualitativa e quantitativamente, o que difere da dissertação que ora se realiza por não ir além investigação diagnóstica, pois não se aplica uma metodologia para ensinar aos alunos os números racionais.

O autor conclui que as dificuldades dos alunos pesquisados acerca de conceitos de frações se devem a falsos conceitos que eles carregam ao longo de sua trajetória escolar. Há falhas no ensino como a falta de preparação para a abstração relativa a significados de unidade, parte/todo, coeficiente e medida. Não se parte de situações problema para que tais conceitos se construam plenamente.

1.6.3 A divisão e os números racionais: uma pesquisa de intervenção psicopedagógica sobre o desenvolvimento de competências conceituais de alunos e professores

A tese de Doutorado em Psicologia, de 543 f., de Regina da Silva Pina Neves, defendida em 2008, na Universidade de Brasília, teve como ponto de partida esta questão: “É possível o desenvolvimento de competências conceituais de alunos e de professores em relação aos conteúdos curriculares da divisão e dos números racionais?” (NEVES, 2008, p. 5). O objetivo de Neves foi desenvolver competências conceituais acerca de “conteúdos curriculares da divisão e dos números racionais” (NEVES, 2008, p. iv), não apenas em alunos, mas também em professores, como o próprio título já esclarece. Em uma turma de geometria, a pesquisadora realizou uma intervenção pedagógica com os alunos a partir da metodologia da pesquisa-ação; já com 16 licenciados, “adotou a análise e discussão de casos de ensino” (NEVES, 2008, p. 138). Como se vê, no grupo dos pesquisados estão inclusos professores – outro ponto distintivo de nossa dissertação, além da utilização da metodologia da pesquisa-ação.

A conclusão a que o autor chegou acerca de sua questão-problema é que é possível sim, pela intervenção psicopedagógica, desenvolver novas competências conceituais de alunos e professores. E, desse modo, levá-los à consciência dos significados nos quais se ancoravam em suas práticas obsoletas.

1.6.4 Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores de matemática

Henrique Rizek Elias defendeu sua tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, na Universidade Estadual de Londrina-PR, 2017. Sua pesquisa não envolveu alunos – o que difere substancialmente da nossa dissertação ora em curso. A relação mais evidente que estabelece com a nossa dissertação é o tema. Inclusive nem o problema ora traçado pelo autor não envolveu alunos, mas sim a formação matemática de professores. Ele questiona: “de que maneira o corpo dos números racionais pode ser abordado em cursos de formação de professores com vistas a favorecer o desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais?” (ELIAS, 2017, p. 60). Nesse sentido, o objetivo proposto foi o de “investigar e propor fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática” (ELIAS, 2017, p. 56). O autor realizou uma pesquisa de campo, momento em que entrevistou professores na escola onde trabalhavam; procurou imprimir na pesquisa uma característica interpretativa.

Por fim, o autor conclui ser necessário que os números racionais sejam o foco do ensino em vez de serem apenas exemplo da estrutura algébrica corpo. Assim, será possível desenvolver o conhecimento matemático voltado ao ensino do corpo dos números racionais. Sendo a matemática uma atividade humana, o doutorando arremata sua tese apostando numa proposta de ensino direcionado a situações reais e mediado pela sequência de tarefas.

1.6.5 Uma sequência didática para resolver equações do segundo e terceiro graus no conjunto dos números racionais

Adriano Araújo em sua dissertação de Mestrado Profissional em Matemática, Costa (2013), investe numa aplicação metodológica que se alinha com a desta dissertação: a SD, mas não trabalha com o método RP. O objetivo do autor é o de

[...] apresentar uma nova proposta metodológica, baseada na teoria construtivista e na pedagogia montessoriana, para que os alunos, a partir do 8º ano do ensino fundamental, possam resolver equações do segundo e terceiro graus cujas raízes pertencem ao conjunto dos números racionais através da construção de retângulos e paralelepípedos utilizando o material dourado (COSTA, 2013, p. 5).

Para Costa, o problema instaurado é um ensino meramente ilustrativo, em vez da utilização de material concreto. Envolvido nessa problemática, o autor apresenta a sua proposta e a aplica numa pesquisa de campo.

Daí o mestrando chegou à conclusão de que a SD é mais uma ferramenta que possibilita o desenvolvimento de habilidades que motivam o aluno se empenhar na realização

da tarefa e, assim, alcançar o objetivo pretendido. Trabalhando sob a perspectiva da teoria construtivista, o autor percebeu em seus pesquisados o desenvolvimento da visão espacial e do desenvolvimento lógico dedutivo.

1.6.6 Números racionais e ensino médio: uma busca de significados

Em 2009, Daniela Fouchard Severo apresenta sua Dissertação de Mestrado em Ciências e Matemática, de 67 f., pela PUC-RS, com o objetivo de “analisar registros de representação de números racionais, apresentados por alunos de Ensino Médio, e verificar se esses alunos relacionam o significado dos racionais com situações da vida cotidiana em que esses números são empregados” (SEVERO, 2009, p. 5). A questão-problema levantada foi: “Quais as dificuldades apresentadas pelos alunos na atribuição de significados aos números racionais, em situações do cotidiano em que esses números estão envolvidos?” (SEVERO, 2009, p. 11). Diante desse problema, o objetivo do estudo foi: “Analisar os registros de representação de números racionais, apresentados por alunos de Ensino Médio, e verificar se esses alunos relacionam o significado dos números racionais com situações da vida cotidiana em que esses números são empregados” (SEVERO, 2009, p. 11). O trabalho apresentou uma pesquisa de campo com a participação de 50 estudantes do 1º ano do EM de uma escola pública, aos quais foi aplicado um teste, com questões contendo descritores recorrentes “das matrizes de referência de exames de avaliação de larga escala, realizados no Brasil” (SEVERO, 2009, 15). Como as dificuldades dos alunos foram muitas, a pesquisadora entrevistou os seus professores e percebeu a necessidade destes em ensinar o conteúdo partindo de problemas da vida real. A metodologia empregada foi de natureza qualitativa, do tipo naturalístico-construtiva e, por isso, procurou compreender os fenômenos examinando-os no contexto onde ocorrem. Apesar de trabalhar com o tema números racionais com uma metodologia de natureza qualitativa, os demais aspectos da dissertação são dissonantes da nossa.

Ao fim da pesquisa, a mestranda afirmou serem muitas as dificuldades dos alunos para transformar registros de representação de racionais e operar com tais números; eles não conseguem perceber o significado dos racionais em situações reais de vida. Por seu turno, os professores têm a percepção da falta de um ensino direcionado a problemas da vida cotidiana.

1.6.7 Crenças e dificuldades de futuros professores de matemática no domínio dos números racionais

A tese de Doutorado em Educação, de Maria Imaculada de Souza Marcenes Gonçalves, defendida em 2013 (201 f.), em Belo Horizonte, na UFMG, foi norteadada por este problema: “quais crenças e dificuldades os alunos do primeiro ano de um Curso de Licenciatura em Matemática trazem consigo em relação às frações?” (GONÇALVES, 2013, p. 19),

cujo objetivo foi o de apresentar resposta a essa questão, investigando alunos do 1º ano de um Curso de Licenciatura em Matemática, por meio de um estudo de caso no qual se realizou uma pesquisa qualitativa e interpretativa. Partiu-se do pressuposto de que há uma inseparabilidade entre afeto e cognição. Aos participantes foram aplicados questionário e entrevista. A afinidade desta pesquisa com a que se redige neste momento fica no nível da temática: números racionais.

Gonçalves concluiu afirmando que o descaso e limitação desse ensino é de responsabilidade central da escola. Para os cursos de desenvolvimento de professores, sugeriu a inclusão de temáticas acerca do propósito da afetividade no processo de ensino-aprendizagem.

1.6.8 Graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais

Fernanda Andréa Fernandes Silva defendeu sua Tese de Doutorado em Educação em Ensino das Ciências, de 258 f., na Universidade Federal Rural de Pernambuco, em 2018. A autora procurou respostas para esta questão: “quais são os graus de não congruência semântica que podemos identificar nas conversões entre os registros de representações semiótica, geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais?” (SILVA, 2018, p. 27). O objetivo foi o de “Propor uma categorização para os graus de não congruência semântica entre as conversões tendo como registro de partida o geométrico bidimensional e como registro de chegada o simbólico fracionário dos números racionais” (SILVA, 2018, p. 27). Para tanto, a autora se valeu de uma pesquisa empírica na Educação básica, em cinco escolas públicas alagoanas. Seus participantes foram 381 estudantes do 6º e 9º ano do EF e 1º e 3º anos do Ensino Médio, de cinco escolas da rede Estadual de Ensino de Alagoas, situadas no município de Maceió. Exceto a temática (números racionais), não há mais qualquer ponto de aproximação com a nossa pesquisa.

Finalmente, a doutoranda chegou a categorizar em sua pesquisa seis graus de não congruência semântica, como resposta à questão-problema envolvendo figuras geométricas: 1 perceptuais com um inteiro; 2 perceptuais com mais de um inteiro; 3 operatórias por inclusão das partes; 4 operatórias por divisão; 5 operatórias por modificação das formas; 6 operatórias por modificação das áreas e das formas.

Capítulo 2

Aspectos Metodológicos

Neste capítulo há sete seções. Na primeira, foi definida a descrição da pesquisa sobre a Metodologia da Resolução de Problemas de [Polya \(1978\)](#) sugerida, neste trabalho, para ser aplicada no ensino de frações aliada à sequência didática de [Cabral \(2017\)](#); na segunda, foi detalhado o campo da pesquisa; na terceira, identificamos os sujeitos da pesquisa; na quarta, há uma proposta de aplicação gradativa na qual interligamos e discorremos, em um conjunto de intervenções e passos, a metodologia de [Polya \(1978\)](#) à sequência didática de [Cabral \(2017\)](#); na quinta elaboramos a proposta da aplicação da união das duas metodologias; na sexta foi desenvolvida cada uma das propostas de aulas em detalhes, o como as metodologias dialogam uma com a outra; e, na sétima, foram apresentadas as considerações finais do ensino de frações baseadas na conexão e no diálogo entre a Metodologia de Polya e a Sequência Didática de Cabral.

2.1 Descrição do tipo de pesquisa

Assim que fora definido o objeto de estudo (ensino de frações), passamos à escolha dos procedimentos metodológicos que melhor pudessem fornecer respostas claras à questão-problema levantada, que, por certo, era passível de investigação. O primeiro momento foi o da pesquisa exploratória, o de levantamento de dados bibliográficos e das primeiras leituras. Isso ainda numa fase de projeto e início da investigação. Segundo [GIL \(2010\)](#), esse é o passo inicial de qualquer pesquisa acadêmico-científica; é quando o pesquisador levanta o material a ser consultado e inicia a leitura com respectivo fichamento – passo esse distinto do seguinte, da pesquisa descritiva, quando se inicia o registro dos achados de relevância, que passam por classificação, explicação e análise para que haja uma interpretação bem criteriosa do problema. Por fim, chega-se à pesquisa explicativa, que responde aos muitos porquês. Toda essa parte inicial foi realizada com aporte teórico, isto é, com base bibliográfica. Nesta dissertação, partiu-se da parte histórica da civilização, quando o homem começa a utilizar os números racionais e depois quando surgem as

frações até se chegar ao ensino destas no sistema educacional.

Recorreu-se à literatura também para apresentar trabalhos correlatos de dissertações e teses. Enfim, a revisão teórica, além de ampliar o conhecimento específico sobre o tema com o fito de embasar a redação do texto acadêmico-científico, impulsionou o pesquisador a reflexões que o ajudaram a conduzir a pesquisa aplicada.

Soares, Picolli e Casagrande (2018) esclarecem que pesquisa bibliográfica “apresenta-se, na literatura, como mais flexível, podendo, inclusive, ser apenas parte da pesquisa empírica, bem como ser apresentada na forma de um capítulo de tese ou dissertação”, como no caso do deste trabalho. Foi com base na leitura crítica de material bibliográfico impresso e on-line (pesquisas acadêmicas, anais de congressos, periódicos, livros e outros) que se procurou dissertar sobre o objeto de estudo, após muita análise teórica sobre o material coletado.

O segundo momento foi uma pesquisa aplicada, que, segundo Fleury (2020, p. 2), “requer rigor (na definição do problema, desenho, metodologia adotada, análise dos resultados) e relevância (impactos e externalidades); a dimensão ética lhe é fundamental”. A pesquisa aplicada pode fazer uso de diversos procedimentos metodológicos a respeito dos quais se passa a descrevê-los. Quanto à natureza ou qualidade da pesquisa aplicada, ela se caracteriza como qualitativa, dada a sua significação para uma explicação profunda do problema. “Numa abordagem qualitativa as diferenças são bem significativas abordando pontos de vista diferenciados em relação ao problema da pesquisa” (OLIVEIRA; STRASSBURG; MOACIR, 2017, p. 91). Ela parte do princípio da existência de um estreito elo entre sujeito e objeto.

Vale destacar que na análise dos dados dos resultados da avaliação diagnóstica e da avaliação final, lançou-se mão do viés quantitativo, sem a intenção, contudo, de generalização – o que não se configura como pesquisa quantitativa, até porque o que predomina na pesquisa é o enfoque qualitativo, isto é, na sequência de atividades, interpretação e análise.

Conforme GIL (2010, p. 134), “nas pesquisas qualitativas, necessita-se valer de textos narrativos, matrizes, esquemas etc.” – exatamente como se procedeu com a utilização das metodologias utilizadas nesta dissertação, que foram as de Polya (RP) e de Cabral (SD) – amplamente detalhadas nas próximas seções deste trabalho. A opção por essas duas linhas metodológicas se deu porque elas combinam entre si, se complementam, sem quaisquer estranhamentos.

2.2 Campo da Pesquisa

O presente trabalho desenvolvido por esse autor foi realizado por meio de uma pesquisa aplicada em uma escola pública estadual de um distrito do município de Itaperuna

que se encontra na região noroeste do estado do Rio de Janeiro, no ano de 2020.

O colégio oferece o ensino fundamental, de sexto ao nono ano, e todas as três séries do ensino médio. O campo da presente pesquisa exploratória teve como essência a investigação da aplicação de uma releitura da metodologia da Resolução de Problemas de [Polya \(1978\)](#) aliada ao desenvolvimento da Sequência Didática de [Cabral \(2017\)](#) no ensino de operações com frações. Como tal conhecimento é consolidado nos anos finais do ensino fundamental, optou-se por escolher como campo de pesquisa duas turmas de sétimo ano do ensino fundamental, totalizando 28 estudantes que estiveram juntos em um grupo de whatsapp.

Como professor do Colégio, optei por aplicar a pesquisa em meu próprio local de trabalho, uma vez que os alunos estavam repletos de dificuldades e dúvidas. Grande parte dos estudantes desta escola pertencem a famílias de baixa renda e por isso pouco acesso as tecnologias e internet. Para tanto, utilizamos vários tipos de atividades com a finalidade de verificarmos e interpretarmos dados, qualitativamente por meio de cada um dos passos e comentários feitos pelos estudantes durante a resolução de um problema matemático sobre operações com frações.

2.3 Sujeitos da Pesquisa

Esta pesquisa se deu com 28 adolescentes estudantes de idades entre 12 e 15 anos, pertencentes ao sétimo ano do Ensino Fundamental, cujo perfil de dificuldades foi sendo delineado a partir de sua participação na pesquisa.

Apesar de vários esforços de incentivo e apoio, tivemos uma participação máxima de 12 estudantes, sendo que a pesquisa desenvolvida contou também com o apoio e incentivo incansável da direção, coordenação pedagógica, professoras de matemática da turma e responsáveis dos estudantes.

Os estudantes do Colégio variaram entre residentes na zona urbana e na zona rural do distrito. Estudantes esses que, segundo os comentários iniciais das professoras, possuíam muitas dúvidas e dificuldades sobre operações com frações e, além disso estavam muito desmotivados devido a diversos problemas gerados pela pandemia.

2.4 Instrumentos da Pesquisa e procedimentos para análise dos dados

A coleta de dados se compõe do estudo das resoluções das questões desenvolvidas com os estudantes. Na metodologia de ensino, foram utilizadas as propostas de [Polya \(1978\)](#), Resolução de Problemas, e de [Cabral \(2017\)](#), Sequência Didática. Como a metodologia de

[Polya \(1978\)](#) não é um formato ou técnica na qual o pesquisador se vale de um mecanismo que o leva até a resposta de um determinado problema, fica difícil a aplicação de um questionário para a análise de dados.

Entretanto tal metodologia explica como se deve ler e compreender um problema, como se deve organizá-lo e estabelecer um plano, como se deve executar o plano pensado para então conseguir a solução e fazer uma retrospectiva de todas as etapas. Portanto os instrumentos de pesquisa se enquadram em análises de cada uma das etapas de resolução de um problema efetuadas pelos estudantes para solucionar um problema. Suas explicações encontram eco nas orientações propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, onde se lê:

A resolução de problemas é peça fundamental para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento dos desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas ([BRASIL, 1998](#), p. 112).

A presente pesquisa utiliza, inicialmente, a avaliação diagnóstica como instrumento para detectar onde e quando deve-se intervir. Resolver problemas é um fator de extrema importância na vida do estudante, tão importante quanto aprender e compreender os conceitos necessários para essa finalidade. É fácil perceber que resolver uma determinada situação problema é uma excelente forma de compreender um determinado conteúdo ([BRASIL, 2017](#)). Na condição de professor de matemática, dá para exemplificar com a nossa prática que, quando se quer fazer musculação, não basta aprender e compreender a musculação; é imprescindível praticar o ato de fazer exercícios para obter músculos mais fortes ou mais trabalhados. Resolver problemas, então, é essencial.

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas de atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o ensino fundamental ([BRASIL, 2017](#), p. 264).

Mas como resolver um problema? Não é uma tarefa simples como muitos pensam; não basta aplicar conhecimentos e fórmulas para se obter uma resposta. Se alguém assim o faz, provavelmente não está ensinando seu aluno adequadamente ([BRASIL, 2017](#), p. 264). Então, como construir uma aula a partir de um problema, ou então, como compreender e solucionar corretamente um problema se o nosso estudante apresenta, muitas vezes, diversas dificuldades ao resolvê-lo, partindo quase sempre da leitura inicial para compreender o que o problema deseja informar? Diante desse contexto os instrumentos de pesquisa

se enquadram em análises dos acertos e erros dos estudantes em cada um dos passos para solucionar um problema, dúvidas que externadas pelos alunos ou observadas pelo professor e comentários após os esclarecimento de dúvidas.

Além disso diante da necessidade de constante intervenção que a sequência didática de Cabral (2017) exige, fez-se necessário anotar cada um dos comentários dos estudantes sobre a que conclusão chegaram em cada uma das questões. Portanto todos os comentários, dúvidas, acertos e erros em cada passo das resoluções dos problemas somados as avaliações diagnósticas e as intervenções do professor compõem os instrumentos de pesquisa que ao serem transportados para quadros comparativos durante a trajetória de aprendizado promovem a análise dos dados.

2.5 Proposta da aplicação metodológica de frações

Este é o momento de apresentarmos uma sugestão de proposta que o professor pode realizar em forma de pesquisa aplicada, que, segundo Fleury (2020, p. 2), “requer rigor (na definição do problema, desenho, metodologia adotada, análise dos resultados) e relevância (impactos e externalidades); a dimensão ética lhe é fundamental”; ela pode fazer uso de diversos procedimentos metodológicos. Baseando-se em Oliveira, Strassburg e Moacir (2017), afirmamos que esta pesquisa é de natureza qualitativa, dada a sua significação para uma explicação profunda do problema. “Numa abordagem qualitativa as diferenças são bem significativas abordando pontos de vista diferenciados em relação ao problema da pesquisa” (OLIVEIRA; STRASSBURG; MOACIR, 2017, p. 91). Ela parte do princípio da existência de um estreito elo entre sujeito e objeto. Reiteramos que, para tal proposta, seguem duas linhas metodológicas: RP, sob as orientações de Polya (1978) e Sequência Didática na perspectiva de Cabral (2017).

A SD que ora sugerimos para ser aplicada em sala de aula do 7º ano do EF é elaborada e sistematizada com foco no alcance de nosso objetivo geral: “de demonstrar, por meio de nossa proposta de trabalho, de que forma as metodologias de ensino RP e SD voltadas à reflexão, compreensão e resolução de problemas podem ser utilizadas em sala de aula para facilitar o aprendizado do conteúdo de frações em turmas de alunos do EF”.

Dessa forma, a presente proposta configura-se no fato de unir uma sequência de passos necessários à resolução de problemas, “embebidos” de heurística, ou seja, repleto de investigação e descobertas a uma sequência didática densa e com constantes intervenções para que o estudante siga uma trajetória correta. Sendo assim, elaboramos uma proposta de construção de um processo de ensino e aprendizagem significativo e, em essência, reflexivo, que acreditamos poder potencializar a construção e o desenvolvimento de habilidades cognitivas que deem sustentação à realização de nosso objetivo. Esta elaboração demandou a sugestão de que as aulas conceituais se deem a partir de procedimentos e atitudes

estimulados à construção do conhecimento e desenvolvimento do raciocínio lógico. Para tanto, todas as aulas sugeridas foram pensadas com ênfase na Resolução de Problemas embasada por Polya (1978), isto é, por meio de problemas motivadores em contextos significativos e de forma sequenciada, seguindo o passo a passo desenhado por Cabral (2017). O quadro abaixo é um comparativo das duas teorias, em uma visão panorâmica, que se tornaram conhecidas do autor desta dissertação durante a trajetória de muita leitura e aprendizado prático, como professor de Matemática da Educação básica nesses últimos 16 anos. Tal quadro possui a intenção de mostrar em uma visão panorâmica como uma metodologia “dialoga” com a outra.

Quadro 1 – Comparativo entre as teorias RP e SD

Teoria	Resolução de Problemas	Sequência Didática
Autor	George Polya (2006)	Natanael Freitas Cabral (2017)
Obra	<i>A Arte de Resolver Problemas</i> . Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência 2006.	<i>Sequências didáticas: estruturas e elaboração</i> . Belém/PA: SBEM/SBEM-PA, 2017.
Etapas/Fases	1º compreender o problema; 2º construir um plano e ação; 3º Executar o plano; 4º. Rever a Resolução. Partes interligadas, inseparáveis, de base heurística	1º Intervenção Inicial; 2º Intervenção Reflexiva; 3º Intervenção explorativa; 4º Intervenção Formalizante; 5º Intervenção Avaliativa Restrita; 6º Intervenção Avaliativa Aplicativa. Conteúdos trabalhados de modo articulado a partir de estratégias sequenciais.
Fundamentação	Na heurística: os conhecimentos são acrescentados a partir da prática. Resolver problemas é uma habilidade prática	Na estimulação do aluno à percepção de base empírico-intuitiva

Fonte: Elaboração própria

2.6 Aulas da proposta

Expõe-se aqui, em detalhes como deve ser elaborada cada aula bem como a respectiva duração proposta de 50 minutos para cada uma delas.

2.6.1 Aula 1

O objetivo desta aula é conhecer o nível da turma no conteúdo de frações. Num primeiro momento, conversa-se um pouco com a turma sobre o conteúdo a ser trabalhado, ouvindo os alunos a respeito de suas apreciações sobre o conteúdo de frações (seção A.1). Em seguida, sugerimos uma avaliação diagnóstica (seção B.1), o que é de grande importância porque norteia a elaboração do plano da segunda aula, pois, de posse das resoluções

dos estudantes, o professor irá notar se há dificuldades como: erros na interpretação de dados, no plano de resolução e erros de cálculos em operações com frações, ou outros. Diante de qualquer constatação, é preciso incluir no plano da segunda aula questões auxiliares para que pequenos passos sejam dados na direção e sentido corretos.

Esta primeira aula guia o professor a levar o aluno a um conhecimento novo como o de frações de modo significativo, acoplando-o a seus conhecimentos prévios. Dessa forma, as atividades são pensadas de maneira que sejam acessíveis ao estudante, de modo que se leve em conta a zona de desenvolvimento proximal, conforme Cabral (2017).

2.6.2 Aula 2

O objetivo desta aula é desenvolver a comparação de duas ou mais frações com denominadores iguais ou diferentes. Portanto, nesta aula iniciamos de modo empírico-intuitivo a construção do conteúdo de comparação de frações partindo da ideia da problematização, de acordo com o Plano de Aula 2 (seção C.1). Nesta aula, desenvolvemos o conceito de fração instigando o estudante a formular hipóteses partindo da noção de dividir o inteiro de duas formas.

No primeiro momento, dividimos o inteiro em quantidades iguais, ou seja, trabalhamos com denominadores iguais e selecionamos, em exemplos diversos, partes desse inteiro para representar situações reais para que o nosso estudante possa simular e experimentar tais modelos. O papel aí do professor é o de Intervenção Inicial (I_i), como diria Cabral em sua teoria metodológica da SD, pois ocorre no domínio do discurso dialógico-didático do docente e se faz acompanhar de ações dirigidas e interativas. É essencial aí o estímulo à percepção empírico-intuitiva conceitual no âmbito da matemática.

No segundo momento da aula, com a finalidade de se estudar comparação de frações com denominadores diferentes, dividimos o mesmo inteiro, utilizando formas geométricas, em duas quantidades de partes diferentes. Então, comparamos essas frações em situações problema, de modo que o estudante aprofunde o tema de acordo com os quatro passos de Polya.

2.6.3 Aula 3

O objetivo desta aula é de desenvolver a soma e a subtração de frações. Nessa terceira aula (seção D.1), desenvolvemos, inicialmente, através do problema de dividir um mesmo inteiro em partes diferentes, o significado de frações equivalentes. E o experimentamos dentro de situações problema para que, a partir desse conteúdo, o aluno consiga desenvolver mais à frente, o algoritmo, a soma e a subtração de frações com denominadores diferentes.

Então, vêm questões sobre o conteúdo de soma e a subtração de frações com

denominadores iguais, ou seja, considerando o inteiro sendo dividido por um número igual de partes. Logo após, é disponibilizado um tempo para o estudo e o desenvolvimento do tema soma e subtração de frações. Esse é um momento de provocação do nosso estudante a experimentar e, enfim, formalizar, a partir da RP, o tema de soma e subtração de frações, seguindo as pegadas de RP propostas por Polya associando-as à Intervenção Reflexiva (I_r) indicada por Cabral em sua SD, na instância em que o aluno (re)descobre conceitos acerca do objeto de estudo.

Logo após, provocamos nosso estudante a formular hipóteses e experimentar, geometricamente, soma e subtração de frações com denominadores iguais. E no segundo momento nosso estudante foi instigado a aplicar o algoritmo do processo de construção de frações equivalentes para solucionar problemas, agora então envolvendo o propósito da aula, que ora reiteramos: a soma e subtração de frações com denominadores diferentes.

Nessa mesma aula também desenvolvemos a multiplicação e a divisão de frações (seção E.1) procurando, primeiramente, provocar o aluno a entender e simular uma soma geométrica partindo da concepção de que a multiplicação é uma soma de parcelas iguais. Antes de se aprofundar o tema, sugerimos a ideia de instigar o estudante multiplicar uma fração por um número inteiro, uma vez que contar quantia inteiras positivas é uma forma mais fácil para ele. E, só um pouco mais adiante, partir para o produto de duas frações não inteiras, que é o ponto mais complexo da aula.

Para tanto, utilizamos figuras geométricas de modo que aluno possa perceber visualmente que a multiplicação é uma soma de várias parcelas iguais – fase da Intervenção Exploratória (I_e), segundo Cabral, em que se estimula o aluno à percepção de certas regularidades que se dá na reconstrução conceitual.

No segundo momento dessa aula, tratamos a divisão de frações e trabalhamos com problemas em que a ideia de que uma fração é uma razão e, portanto, é a divisão do numerador pelo denominador. Para formalizar a divisão simulamos, em todo processo, o uso de uma fração no numerador e de outra no denominador. A partir daí nosso estudante pode multiplicar numerador e denominador de nossa razão pelo inverso da fração que está no denominador, conseguindo tornar a fração do denominador igual a 1, uma vez que este é o elemento neutro da multiplicação e da divisão. Nesse momento, transformamos nossa divisão em uma multiplicação e a operamos segundo o conceito de multiplicação que aprendemos anteriormente, qual seja: soma de parcelas iguais.

2.6.4 Aula 4

O objetivo desta aula é o de avaliar todo o ensino e aprendizado até o presente momento, revisar os conteúdos já compreendidos e aprofundar cada uma das características dos passos da resolução de problemas. Nesse momento também deve ser pensado no uso

adequado de todas as possibilidades de intervenções, até então trabalhadas, mediante o diálogo e detecção de possíveis deficiências do processo de ensino. Portanto essa aula, deve ser uma oportunidade de repensar e organizar o processo educativo, adaptando-o às necessidades identificadas pelo professor em suas observações.

Durante essa aula devem ser realizadas as análises de questões anteriores para que as possíveis dúvidas ali encontradas sejam investigadas, heurísticamente, em conjunto com os estudantes. Além disso, devem ser ofertadas questões extras interessantes, como campo de ação para que os estudantes possam participar de uma recuperação paralela ao desenvolvimento dos estudos. Dessa forma essa aula tem como o objetivo principal o de repensar a prática educacional desenvolvida até o momento e se necessário adaptá-la para melhor atender as expectativas e demandas educacionais que surgirem.

2.6.5 Aula 5

O objetivo desta aula é complementar os estudos de operações com frações por meio da análise de erros e acertos das questões da avaliação diagnóstica. Portanto, nessa quinta aula ([seção F.1](#)), desenvolvemos a correção da avaliação diagnóstica, analisando cada passo segundo as teorias metodológicas de RP de George Polya e de SD de Cabral. Nessa aula, analisamos os acertos dos alunos propondo melhorias, segundo os quatro passos do nosso teórico Polya, deixando clara a importância de pensar heurísticamente cada um deles, bem como os erros. É também aí que se dá a Intervenção Formalizante (I_f) ([CABRAL, 2017](#)), quando o professor toma as verdades “empírico-intuitivas” dos alunos e, juntamente com eles, as lapida com a roupagem da formalidade matemática, analisa os acertos propondo melhorias.

Em outras palavras: analisam-se aí as condições a partir da leitura do problema, constroem-se as hipóteses e estratégias para solucioná-lo; o aluno elabora e manipula algoritmos com a finalidade de formalizar matematicamente o cálculo e revisa cada uma das linhas de cada passo: a leitura/compreensão, o planejamento, a execução e a retrospectiva.

2.6.6 Aula 6

O objetivo desta aula é o de revisar o conteúdo trabalhado através de uma nova lista de questões. Nessa sexta aula ([seção G.1](#)), agora já com todo o conteúdo desenvolvido e toda a teoria de George Polya explorada, propõe-se a aplicação de uma Avaliação Final ([seção H.1](#)), contendo operações com números racionais no formato fracionário de modo que o estudante seja provocado a fazer uso de sua capacidade de ler e interpretar o problema, formular e checar possibilidades para resolvê-lo, simular cálculos e comparações, manipular algoritmos e, enfim, formalizar o conhecimento matemático.

O professor é aquele que instiga cada um desses passos e assim aplica a teoria da

referida metodologia da SD: Intervenção Avaliativa Restrita (IA_r), momento de reconstrução de conceitos que se alinham ao fundamento das verdades matemáticas sobre o objeto em estudo.

2.6.7 Aula 7

O objetivo desta aula é identificar possíveis dúvidas em operar números racionais que ainda persistem. Por fim, nesta sétima aula, vêm a correção e a análise de todas as questões da avaliação final, segundo a metodologia de RP para que os estudantes possam verificar, mais uma vez, os erros e os acertos (seção I.1).

Nesta aula se instaura o grau mais elevado de avaliação do percurso de assimilação conceitual, chamado por Cabral de Intervenções Avaliativas Aplicativas (IA_a). É quando o aluno entende que a matemática está na vida, rodeando-o nos mais simples e diminutos problemas cotidianos, pois associa os conceitos apreendidos a situações reais.

2.7 Considerações finais da proposta

Durante todo o processo, segundo o objetivo de nossa proposta, consideramos problemas e explicações diversas que possibilitam, segundo o nível da turma, a compreensão de que o pensamento matemático é uma forma de ler e resolver problemas ligados ao cotidiano, de instaurar melhorias na concentração, de evoluir o raciocínio lógico-matemático, de reduzir as dificuldades de aprendizagem e, conseqüentemente, melhorar, por meio da autoconfiança, a organização e a autonomia ao resolver problemas de frações.

Tudo isso deve ser colocado seguindo o passo a passo da SD, conforme sugerimos (seção J.1), após ler, reler e interpretá-la para a nossa realidade de professor de escola pública na educação básica e ajustar o que ponderamos ser plausível de aplicação. Por certo, cada professor, diante da realidade que tem, fará as devidas complementações e alterações no que considerar mais adequado no momento de aplicação dessa teoria.

Como se pode notar, na proposta sugerida, são levados em conta problemas e explicações diversas, cujas competências e habilidades têm grandes probabilidades de ser atingidas pelo fato fundamental de contemplar todas as fases propostas por Cabral, segundo o nível da turma e também de acordo com a metodologia de Polya – teorias essas que já funcionaram de modo profícuo como comprovam cientificamente esses próprios teóricos.

Capítulo 3

Relato da Experiência e Análise dos dados

Faz-se aqui, antes do relato, um esclarecimento indispensável sobre o contexto histórico do momento de aplicação da pesquisa. Em 2020, ano de aplicação do presente trabalho, ocorreu uma pandemia de um novo tipo de vírus, o Coronavírus (2019-nCoV ou SARS-CoV-2), cujo risco de contágio e de vida eram muito altos. Milhares de pessoas já foram vítimas fatais desse novo Corona vírus e o medo se tornou companheiro das pessoas. Existem muitas dúvidas sobre esse vírus, pois os cientistas e médicos ainda estão estudando o vírus e buscando conhecimento para produzir uma vacina. Diante desse cenário, muitas instituições, como as Escolas estão impedidas judicialmente de abrir suas portas devido à bandeira de risco de contágio. A segurança que temos até o momento são medidas de proteção recomendadas pela Organização Mundial de Saúde(OMS), medidas essas que têm salvado muitas vidas. Dessa forma estamos com as Escolas fechadas para o ensino presencial. Segundo [Belasco \(2020\)](#):

[...]a ausência de vacina contra o 2019-nCoV reforça entre a população, em geral, a adoção das medidas de prevenção contra a infecção, preconiza-das pela OMS, como realizar higiene das mãos, evitar ambientes fechados e contato com pessoas provenientes da região onde o surto teve início. Para os profissionais da área da saúde, o uso dos óculos de proteção ou protetor facial, máscara cirúrgica/N95, avental, luva de procedimento e lavagem das mãos devem ser utilizados para a prestação de assistência aos casos suspeitos ou confirmados de infecção por 2019-nCoV.

De acordo com [Brasil \(2020\)](#) ficou regulamentado em 18 de março, pelo Conselho Nacional de Educação (CNE), que os sistemas e as redes de ensino, de todos os níveis, etapas e modalidades, permitam aos estudantes que mantenham uma rotina básica de atividades escolares, mesmo afastados da escola, conforme medida, recomendada pela OMS, para evitar a propagação da COVID-19. Portanto, diante desse cenário de incertezas e insegurança, o Ministério da Educação optou por desenvolver a estratégia de introduzir o ensino remoto emergencial, que consiste no uso de ferramentas tecnológicas de videoconferência para conectar professores e estudantes em tempo real, denominado momento síncrono. Além disso foram viabilizados outros momentos de aprendizado com vídeoaulas

gravadas, podcasts e materiais para a leitura, denominados momentos assíncronos, de modo que o estudante pode acessar conteúdos também fora do horário convencional de aulas.

Dessa forma, o ensino remoto foi a alternativa de as escolas funcionarem, em razão da pandemia do Novo corona-vírus. E, diante desse horizonte, em uma Escola pública de um distrito de Itaperuna-RJ, foi realizada em 2020, uma pesquisa de campo com duas turmas de estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental que estiveram juntos compondo uma única turma de sétimo ano através do aplicativo whatsapp, durante a aplicação desta pesquisa. Esclarecemos que uma boa parte dos alunos desta escola (e também desta turma) reside em zona rural e é desprovida de internet e de smartphone.

Após o embasamento teórico e metodológico, e após também o desenvolvimento de uma proposta de trabalho seguindo as etapas e fases de Polya e Cabral, a pesquisa se realizou em campo, porém no modo do ensino remoto emergencial, decorrente do fechamento das instituições de ensino durante o período pandêmico pelo qual o mundo vem passando desde março de 2020. A pesquisa foi realizada durante o segundo semestre de 2020, com a permissão da Direção do Colégio, dos estudantes e dos pais dos estudantes, portanto foi desenvolvida com o conhecimento de todos os participantes. Tal permissão foi concedida por meio de conversas e reuniões iniciais de apresentação da proposta de ensino através do aplicativo Whatsapp.

Durante todo o desenvolvimento da pesquisa foi utilizado o whatsapp <<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.whatsapp>> e o Google Classroom <<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.google.android.apps.classroom>> como mecanismos assíncronos de contato entre professor e estudantes para esclarecimento de dúvidas e devolutivas, pois uma parte dos estudantes da turma não sabia utilizar mecanismos de aulas síncronas e a outra parte não possuía mecanismos e nem internet para acessar a aula no horário normal de aulas. Para esta última parte dos estudantes e para aqueles que não possuíam smartphone ou computador, com acesso a internet, foi adotado o uso de material impresso.

Após as reuniões com a direção, professoras e pais deu-se início a realização das aulas assíncronas, pois, como mencionado anteriormente, a turma não conseguia estar de modo síncrono com os professores. Para tanto, foram utilizados dois aplicativos sendo eles o blackboard-Magic Slate <<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.hirastudio.blackboard>> e schulheft <<https://play.google.com/store/apps/details?id=online.stoehr.blackboard>>, como lousa digital e o aplicativo gravador de tela, XRecorder <<https://play.google.com/store/apps/details?id=vidma.screenrecorder.videorecorder.videoeditor.lite>>. Todas as aulas foram desenvolvidas pelo professor autor do presente trabalho, que por trabalhar no Colégio escolheu as duas turmas de sétimo ano do ensino fundamental, mesmo não sendo o professor de matemática da turma no ano de 2020. Cabe aqui ressaltar que o incentivo da direção, das professoras da turma e da coordenadora pedagógica foi essencial

para a realização desse trabalho, pois muito contribuiu para que os estudantes ficassem motivados.

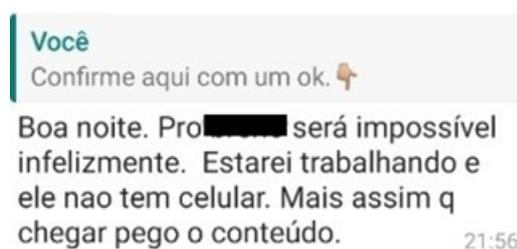
As gravações das aulas foram feitas de modo caseiro utilizando, celular, o aplicativo de lousa digital blackboard- Magic Slate, aplicativo gravador gravador de tela xrecorder e o aplicativo schulheft como segunda lousa digital. As gravações foram recheadas de explicações, resoluções de questões e momentos de esclarecimento de dúvidas que eram enviadas, oralmente ou por escrito via whatsapp, sendo que as aulas em vídeo foram, na primeira semana, postadas no grupo da turma por meio do aplicativo Google Classroom e whatsapp. Entretanto, devido à reclamação de alguns estudantes a respeito da falta de memória dos smartphones foi necessário criar o canal <https://www.youtube.com/channel/UCBZbT3_IWrZ9VpUwUJiPuzQ>, na plataforma de vídeos Youtube e fazer o upload das videoaulas que foram gravadas com o celular, com a finalidade de ajudá-los no acesso, pois dessa forma ficou mais rápido para que os estudantes acessassem as videoaulas através de links. Assim contornamos a necessidade do tempo de download do vídeo e o consumo de memória dos aparelhos smartphones. De forma análoga, havia uma reclamação a respeito da dificuldade de acessar o Google classroom, o que fez com que passássemos na segunda semana a utilizar constantemente o whatsapp.

Dessa forma, o campo da pesquisa se tratou de um campo de aplicação remota assíncrona, mas de constante atividade com perguntas, repostas, devolutivas e revisões. Foram realizadas duas reuniões iniciais, sendo a primeira com a direção da Escola que se mostrou muito atenciosa e pronta para colaborar com a pesquisa e a segunda com a direção e professoras da turma. Nessa reunião, foi declarada pelas professoras a grande dificuldade dos estudantes no ensino matemático bem como a enorme carência, de grande parte da turma, em utilizar mecanismos de comunicação em razão da precariedade socioeconômica. Essa declaração foi de extrema importância para nortear a elaboração e organização do nível das questões da avaliação diagnóstica. Após uma apresentação e conversa com os pais e estudantes, demos início à aplicação da avaliação diagnóstica, através do grupo do aplicativo whatsapp, sem que os mesmos tivessem qualquer ajuda inicial. Nesse momento, apenas 9 alunos do total de 28 participaram, devido a falta de internet de 11 estudantes e também devido a falta de motivação de outros 8 estudantes.

Em se tratando das aulas remotas, foi inviável delimitar a carga horária de cada aula devido a problemas como a falta de conectividade com a internet, de computadores e smartphones disponíveis no horário da aula. Delimitamos os contatos em sete aulas de, em média, 50 minutos cada uma. Entretanto para cada uma das aulas foi necessário estender o tempo para uma e em um caso a duas semanas com a finalidade de completarmos as resoluções de problemas, recebimento de perguntas e esclarecimentos de dúvidas. Convém assinalar que a direção corroborou a fala dos professores reforçando que os estudantes não tinham, de um modo geral, acesso aos mecanismos de videoconferência, pois a grande

maioria não possuía computador. Além disso, entre estes, muitas vezes, o único mecanismo de comunicação era o celular do pai ou da mãe, quando em algum momento do dia ou da noite ele poderia utilizá-lo, como podemos observar no comentário de um responsável de estudante na Figura 13.

Figura 13 – Comentário do responsável de um estudante



Fonte: Dados extraídos da pesquisa de campo sobre o mecanismo de comunicação do estudante

Dessa forma os estudantes acessavam os materiais em vídeo, áudio e texto quando podiam, o que inviabilizou o uso de videoconferências, bem como o esclarecimento imediato de dúvidas. Entretanto, seguimos com as atividades assíncronas durante toda a aplicação do presente trabalho. Mesmo com o uso da tecnologia nos deparamos com um quadro em que alguns dos estudantes não tinham nenhum computador ou smartphone, o que nos levou a imprimir as questões para entregar aos alunos e também a programar momentos de encontro presencial quando a bandeira de risco possibilitasse tal encontro. Entretanto, não conseguimos nos reunir presencialmente, pois ficamos impedidos judicialmente de reabrir a Escola para prestar atendimento aos estudantes devido ao risco de contágio da Covid-19 e um material autoinstrucional foi desconsiderado, pois inviabilizaria a proposta do presente trabalho que exige diversos passos e distintas intervenções.

3.1 Descrição das atividades da sequência didática

3.1.1 Aula 1

Na primeira aula, que durou uma semana, como já haviam estudado operações com frações no início do ano, os estudantes foram convidados, através do aplicativo whatsapp, a participar de uma avaliação diagnóstica (Apêndice B) sobre operações fundamentais com frações. Os mesmos receberam as imagens das questões e foram orientados a resolvê-las no caderno sem direito a esclarecimento de dúvidas nesse primeiro momento.

No primeiro dia, dois estudantes responderam e enviaram as fotos das resoluções, entretanto os demais, foram enviando as respostas gradativamente durante a semana. Os estudantes foram orientados a fazer com calma e sem consulta a qualquer material, pois o

objetivo não era julgar ou pontuar, e sim diagnosticar possíveis dificuldades no processo de resolução dos problemas.

No Quadro 2 está a representação do resultado e, na sequência, as análises de algumas amostras. Cabe esclarecer que, para preservar a identidade dos alunos, eles foram representados por letras: A, B, C... e assim por diante. No quadro abaixo, em cada uma das quatro questões foi registrado o percentual de acerto na questão com a finalidade de valorizar parcialmente os passos recomendados e propostos por [Polya \(1978\)](#).

Quadro 2 – Resultado da avaliação diagnóstica

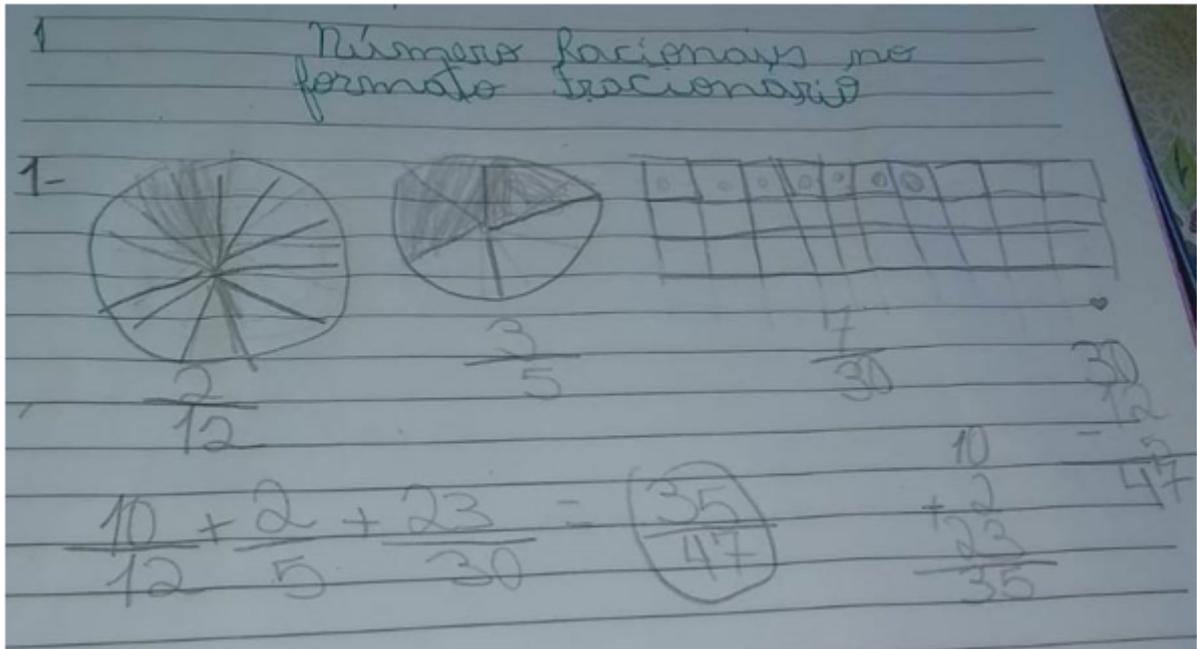
Estudante	A	B	C	D	E	F	G	H
Questão 1	0%	100%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Questão 2	50%	50%	100%	50%	50%	50%	0%	0%
Questão 3	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	0%
Questão 4	100%	100%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
Aproveitamento	37,5%	87,5%	50%	12,5%	37,5%	37,5%	0%	0%

Fonte – Dados extraídos da pesquisa de campo.

Eis a seguir alguns exemplos escolhidos ora para mostrar a dificuldade do aluno, ora para procurar entender o raciocínio desenvolvido em cada um dos passos de resolução dos problemas propostos.

Podemos observar na questão 1, [Figura 14](#), que o estudante A consegue representar cada uma das frações e entende que se trata de uma soma, pois constrói a armação da operação. Entretanto, o mesmo não consegue somar adequadamente, pois não conseguiu estabelecer o mesmo inteiro para todas as frações com a finalidade de comparar as frações e concluir o problema. Percebe-se então, nesse momento, que o estudante ou não consegue operar cálculos, desenvolvidos anteriormente pelas professoras da turma, como o mínimo múltiplo comum ou frações equivalentes.

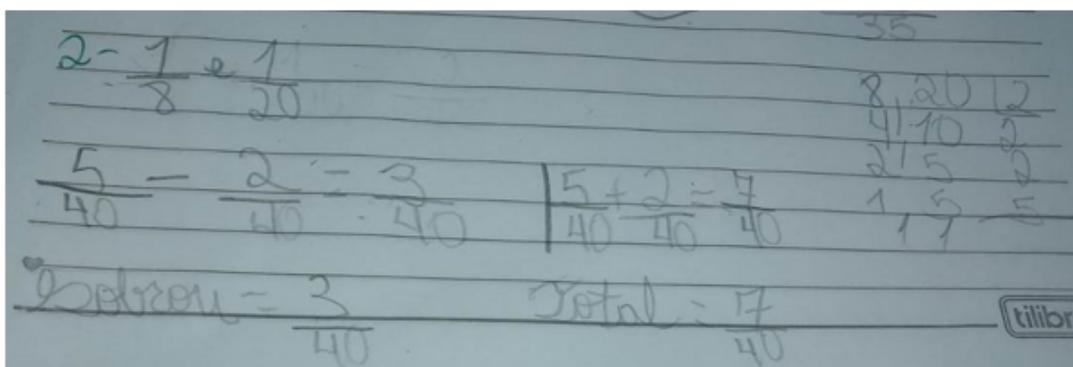
Figura 14 – Estudante A



Fonte: Dados extraídos da pesquisa de campo sobre soma de frações

Na questão 2, [Figura 15](#) abaixo, notamos que o estudante A já consegue construir frações com o mesmo denominador através do cálculo de mínimo múltiplo comum, porém interpreta de forma equivocada, subtraindo ao invés de inicialmente somar os gastos. Verifica-se claramente que esse aluno tem dúvidas no primeiro passo (leitura e interpretação) da resolução de problemas de [Polya \(1978\)](#).

Figura 15 – Estudante A



Fonte: Dados extraídos da pesquisa de campo sobre soma e subtração de frações

Se o estudante A tivesse somado os gastos, aí sim poderia subtrair do inteiro encontrando a resposta. Nota-se, na questão 3, [Figura 16](#), que ele sabe que deve identificar o quanto a fração vale do inteiro em questão, porém ele utiliza a regra de três de forma equivocada, errando nos cálculos. Nesse momento, encontramos aqui um erro no terceiro passo (execução do plano) da Resolução de Problemas de [Polya \(1978\)](#).

Figura 16 – Estudante A

3-A1

$$\frac{1}{2} = \frac{1000000}{x} \quad \frac{3}{10} = \frac{1000000}{x}$$

$$1x = 2000000 \quad 3x = 1000000$$

$$x = 2000000 \quad x = 333333,3333$$

C-4

$$\frac{1}{20} = \frac{1000000}{x}$$

$$4x = 2000000$$

$$x = 500000$$

Fonte: Dados extraídos da pesquisa de campo sobre multiplicação de frações

Ao estudante A foi perguntado como chegou a essa solução da questão 4 na [Figura 17](#) abaixo.

Figura 17 – Estudante A

$$\begin{array}{r} 4 - 1 \\ \hline \frac{1}{500} \\ 5 - 500 \\ \hline \frac{x}{5} \\ \hline x = 100 \end{array}$$

$\pi 05: \pi 1000$

Fonte: Dados extraídos da pesquisa de campo sobre divisão de frações

Ele relatou que “queria saber quantas vezes a fração $1/500$ está dentro da fração $1/5$ ”. Então, percebe-se que o cálculo não está escrito corretamente com todos os passos formais; mas de um modo eurístico está correto, pois ele considera que $1/500$ está para 1 assim como $1/5$ está para um número racional x qualquer e encontra corretamente 100. Percebe-se nesse caso um ponto extremamente positivo, pois nota-se a presença do raciocínio investigativo, cuja importância é lembrada por Polya durante todo o desenvolvimento de sua metodologia.

Na questão 1, observada na [Figura 18](#) abaixo, o estudante A sabe que deve existir uma soma, mas não compreende como operá-la e busca transformar as frações (provavelmente tentando enxergar algo em comum entre elas), mas não consegue e soma de forma equivocada. Desse forma o mesmo até planeja razoavelmente a resolução, mas não a executa bem apresentando portanto dificuldades no terceiro passo de resolução de problemas de [Polya \(1978\)](#).

Figura 18 – Estudante F

Handwritten work on lined paper showing the addition of fractions. The student has written:

$$1- \quad 2 = \frac{10}{12} \quad 3 = \frac{2}{5} \quad 4 = \frac{23}{30}$$

$$\frac{35}{44}$$

Fonte: Dados extraídos da pesquisa de campo sobre soma de frações

No caso do estudante F percebemos que ele interpreta corretamente a questão 2, na [Figura 19](#), pois percebe que deve somar, inicialmente, os gastos. Entretanto, não compreende qual é o real inteiro e erra a subtração. Portanto, o estudante acaba errando todos os outros passos seguintes, pois comete erros no primeiro passo (interpretação).

Figura 19 – Estudante F

Handwritten work on lined paper showing the subtraction of fractions. The student has written:

$$2- \frac{1}{8} - \frac{1}{20} = \frac{1}{40} \quad 5 - \frac{2}{40} = \frac{3}{40} \text{ figura debaixo}$$

$$5 + \frac{2}{40} = \frac{4}{40} \text{ total}$$

Fonte: Dados extraídos da pesquisa de campo sobre soma e subtração de frações

Nota-se na questão 3, [Figura 20](#), de forma análoga ao estudante A, o estudante F sabe que deve identificar o quanto a fração vale do inteiro em questão, porém ele utiliza a regra de três de forma equivocada errando nos cálculos, cometendo um erro no passo da execução.

Figura 20 – Estudante F

$3 - \frac{1}{2} \cdot 100000 = X$
 $X = 200000$

$B - \frac{3}{10} \cdot 100000 = X$
 $X = 100000$

$C - \frac{4}{20} \cdot 100000 = X$
 $4X = 2000000$
 $X = 5000000$

Fonte: Dados extraídos da pesquisa de campo sobre multiplicação de frações

Ao estudante F também foi perguntado como chegou a essa solução na questão 4 na [Figura 21](#).

Figura 21 – Estudante f

$4 - \frac{1}{500} = \frac{1}{5}$

$1 \times 5 = 5$
 $500 \times 1 = 500$
 $500 : 5 = 100$

Fonte: Dados extraídos da pesquisa de campo sobre divisão de frações

Ele relatou: “Aprendi assim no início do ano, pois $1/5$ é x e $1/500$ é 1 ”. Então, percebe-se que seu raciocínio é análogo ao do estudante anterior: o cálculo não está escrito corretamente com todos os passos formais, mas de um modo eurístico está correto, pois ele considera que se $1/500$ é um inteiro então quantos inteiros são $1/5$ e encontra corretamente 100.

Como podemos observar essa primeira etapa serviu como instrumento norteador para a elaboração das ações dirigidas e interativas que serão desenvolvidas nas próximas aulas segundo a Intervenção Inicial (I_i) da sequência didática adotada. De forma geral, os

estudantes que participaram da avaliação diagnóstica até conseguiram interpretar razoavelmente as questões, porém não sabiam conectar o que o problema queria com o que se deve fazer para solucionar. Ficou mais claro ao corrigir todas as avaliações e conversar com os estudantes, individualmente e via Whatsapp, pois notei que eles cometeram, de uma forma geral, erros semelhantes, em alguns casos, erros de interpretação e, em um percentual um pouco maior, erros de cálculos. Com a finalidade de corrigir cada uma das questões, em conjunto com os estudantes, de forma crítica e construtiva as resoluções de cada um foram guardadas para uma correção, posterior ao desenvolvimento da metodologia trabalhada nessa dissertação.

3.1.2 Aula 2

A segunda aula, que durou uma semana, foi desenvolvida através do whatsapp por meio de diálogos, envio de videoaulas de resolução de problemas e esclarecimento de dúvidas. Tais aulas possibilitaram a construção do significado e aplicação de frações equivalentes (seção C.1), a fim de incentivar a percepção empírico-intuitiva de nosso estudante e de lhe expor como podemos repartir um inteiro a partir de problemas geométricos. Nessa aula, já aplicamos, segundo a Intervenção Reflexiva (I_r), alguns questionamentos aos estudantes de modo que eles pudessem começar a formular hipóteses sobre possíveis comparações entre frações equivalentes, estabelecer conjecturas e checar possibilidades durante a leitura e interpretação (passo número 1), para solucionar os problemas conforme orienta Polya (1978).

Algumas aulas foram enviadas por whatsapp em forma de vídeos, porém, alguns estudantes não conseguiam assistir todas, pela questão da baixa memória dos aparelhos celulares dos estudantes, que necessitavam fazer o download para assistir e também, em outros casos, por falta de recursos tecnológicos (computador, internet e smartphone próprio). Por isso nesse momento foi extremamente necessário criar um canal no youtube <https://www.youtube.com/channel/UCBZbT3_IWrZ9VpUwUJiPuzQ>, gravar as aulas e disponibilizá-las através de links que foram enviados pelo whatsapp para que os estudantes assistissem às aulas. Mesmo assim ainda tínhamos um problema: alguns estudantes, que não possuíam smartphone, esperavam para poder utilizar o smartphone dos pais. A partir daí, continuamos a utilizar o whatsapp como instrumento para diálogos em conjunto, esclarecimento de dúvidas de forma in-box, envio e entrega de atividades para dar explicações mais específicas e o Youtube para o envio de vídeos de explicações ou de feedback de dúvidas para construir os conhecimentos de uma maneira geral Figura 22.

Figura 22 – Canal Professor Wallaci Luz

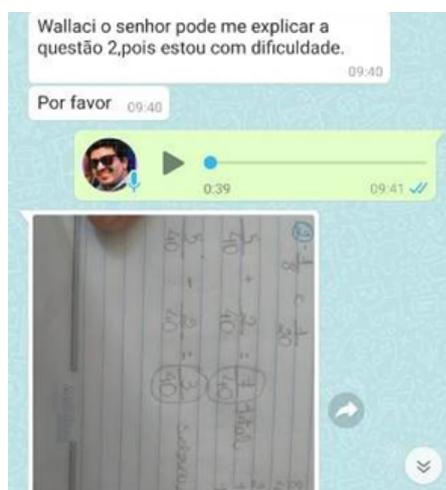


Fonte: Canal do Professor Wallaci Luz na plataforma de vídeos Youtube

3.1.3 Aula 3

Na terceira aula, que durou três semanas, foi explorado todo o conteúdo de operações fundamentais com frações por meio da problematização (seção D.1, seção E.1). Em todas as aulas o estudante foi questionado do que fazer e de como fazer, com a finalidade de construir e desenvolver competências sobre o tema a partir da Teoria de RP de Polya (1978) e para criar um ambiente onde o estudante fosse realmente um protagonista foi utilizado o sistema de interação com os estudantes pautado sempre pela SD de Cabral (2017). Muitas dúvidas surgiram e todas foram esclarecidas via whatsapp, por meio de áudio, material escrito e vídeo, como podemos exemplificar na Figura 23

Figura 23 – Esclarecimento de dúvidas



Fonte: Diálogo com os estudantes por meio de whatsapp

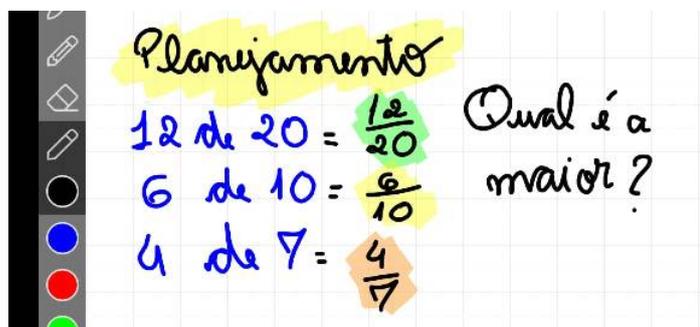
A Metodologia de Polya (1978) foi explicada de forma gradual a partir da segunda aula e se estendeu até a terceira e quarta aulas de resolução de problemas para que o estudante pudesse compreender e enxergar a utilidade da teoria de uma forma muito mais prática do que expositiva. Os estudantes, segundo a SD aplicada, isto é, na nossa seqüência didática inspirada na linha de Cabral (2017), foram orientados então não só a formular hipóteses, estabelecer conjecturas, checar possibilidades, mas também determinar consequências. Para tanto, foram utilizadas algumas listas de questões elaboradas pelo autor e outras do livro didático durante as aulas e para casa, com a finalidade de aprofundamento dos temas de modo que pudessem, segundo a Intervenção Exploratória (I_e), generalizar determinados comportamentos das operações com frações. Nesse ponto da trajetória nosso estudante já estava tendo contato com problemas resolvidos por meio de videoaulas direcionadas a leitura e interpretação, planejamento de forma organizada, execução de uma estratégia em forma de roteiro e análise da solução obtida e de possíveis outras soluções, como é o caso abaixo.

Figura 24 – Questão resolvida com base na Metodologia de POLYA - Compreensão



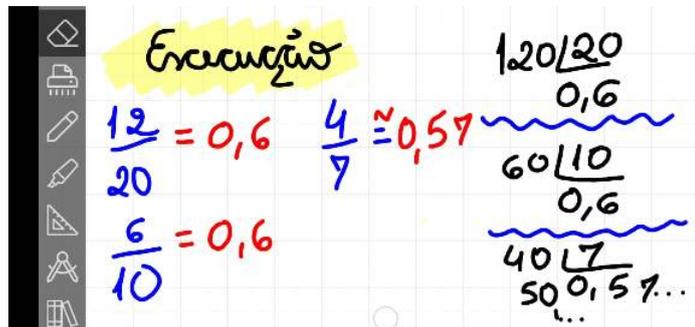
Fonte: Dados da pesquisa de campo

Figura 25 – Questão resolvida com base na Metodologia de POLYA - Planejamento



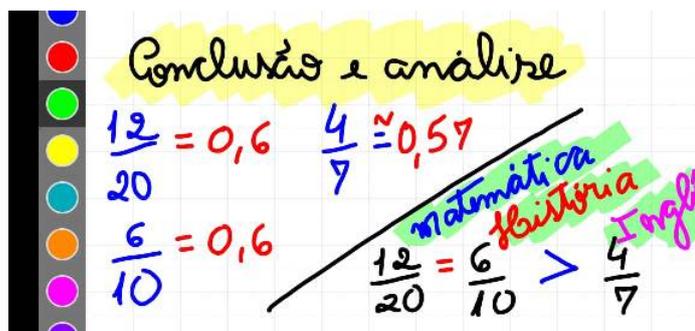
Fonte: Dados da pesquisa de campo

Figura 26 – Questão resolvida com base na Metodologia de POLYA - Execução



Fonte: Dados da pesquisa de campo

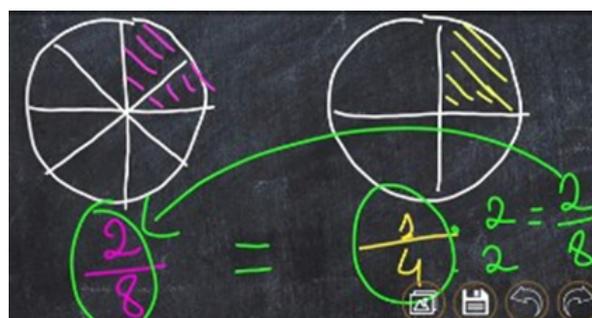
Figura 27 – Questão resolvida com base na Metodologia de POLYA - Análise



Fonte: Dados da pesquisa de campo

Além disso, o estudante, nesse mesmo momento, estava recebendo algumas listas para realizar o treino de tais passos. Abaixo temos a imagem de uma outra aula sobre a revisão da aplicação de frações equivalentes.

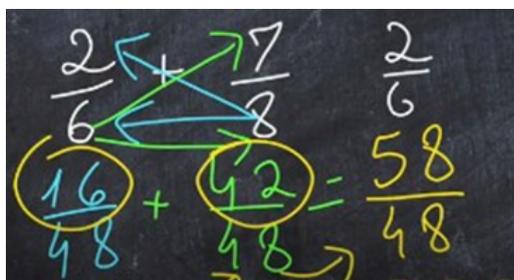
Figura 28 – Equivalência de frações



Fonte: Aulas gravadas e disponibilizadas no Youtube

Durante todo o processo ficamos na expectativa de que os estudantes assistissem a todas as aulas até o final e depois enviassem as dúvidas; entretanto, o retorno destas foi pouco, pois tivemos um baixo número de perguntas, além do baixo retorno de atividades prontas. Enfim, foram utilizados passos da metodologia de Polya ao invés de métodos tradicionais de resolução de questões. Através de operações com frações, procurando sempre trazer a idéia de equivalência de frações, bem como a explicação do porquê do uso e funcionamento de tais métodos. Foram utilizados também como últimos recursos de aprendizado alguns métodos mais rápidos, uma espécie de “macete” ?? que foi obtido pela equivalência de frações, explicada anteriormente na aula 2.

Figura 29 – Operações fundamentais com frações


$$\frac{2}{6} + \frac{7}{8} = \frac{16}{48} + \frac{42}{48} = \frac{58}{48}$$

Fonte: Aulas gravadas e disponibilizadas no canal do Youtube

Segundo Polya (1978), “se o estudante sabe o que fazer, ele não tem mais um problema, o problema existe quando ele tem que pensar o que deve fazer e quais estratégias deve adotar para fazer perguntas, levantar hipóteses para depois experimentar e fazer uma análise”. Nesse momento, já com o conteúdo todo desenvolvido de forma aplicada em questões durante as aulas, fizemos uso das recomendações de Polya e elaboramos uma nova lista (seção K.1), não tão contextualizada quanto a anterior, com a finalidade de verificar a capacidade dos estudantes de resolução de problemas auxiliares e a compreensão dos estudantes quanto ao cálculo das operações com frações fora de um contexto, ou seja, identificar dificuldades puramente no cálculo. Aplicamos a referida lista incentivando que o estudante utilizasse, a metodologia de Polya durante cada passo da resolução.

Quadro 3 – Resultado da avaliação diagnóstica 2

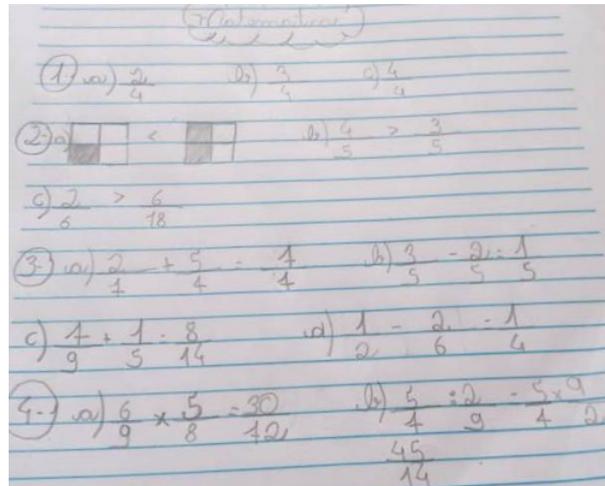
Estudante	Aproveitamento na atividade
A	59%
B	80%
C	75%
D	75%
E	0%
F	100%
G	9%
H	25%
I	9%
J	9%
K	25%
L	34%
Média	42%

Fonte – Dados da pesquisa de campo.

Como podemos perceber os resultados ficaram abaixo da média de 50%, média essa esperada pelo Colégio. Entretanto conseguimos a participação de mais 4 estudantes, que estavam desmotivados, totalizando agora 12 participantes. Abaixo estão algumas observações coletadas por amostragem que de certa forma identificam pontos positivos no aprendizado:

Nota-se na [Figura 30](#) que o estudante C adquiriu, razoavelmente, o conhecimento básico de comparações e operações com frações de mesmo denominador, entretanto fica claro que ainda possui algumas dificuldades, facilmente observadas nas questões 2-C, 3-C e 3-D, como a de comparar e operar soma e subtração com frações de denominadores diferentes.

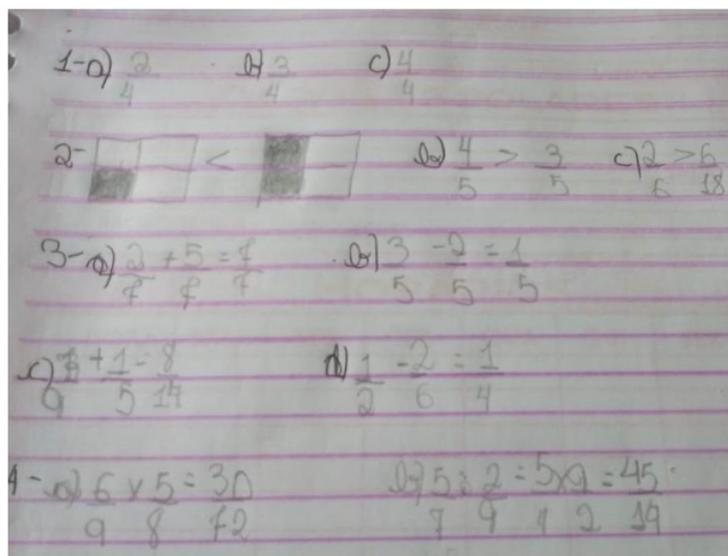
Figura 30 – Estudante C



Fonte: Dados da pesquisa de campo

No caso do estudante D, fica claro na [Figura 31](#) que o mesmo não compreendeu o conteúdo de comparações e operações com frações de denominadores diferentes. Esse caso chamou a atenção. Assim como os outros, o estudante foi questionado sobre o passo a passo de como resolveu as questões com denominadores diferentes, ao que ele respondeu: “eu sei o que é uma fração equivalente, mas não sei para que serve”.

Figura 31 – Estudante D



Fonte: Dados da pesquisa de campo

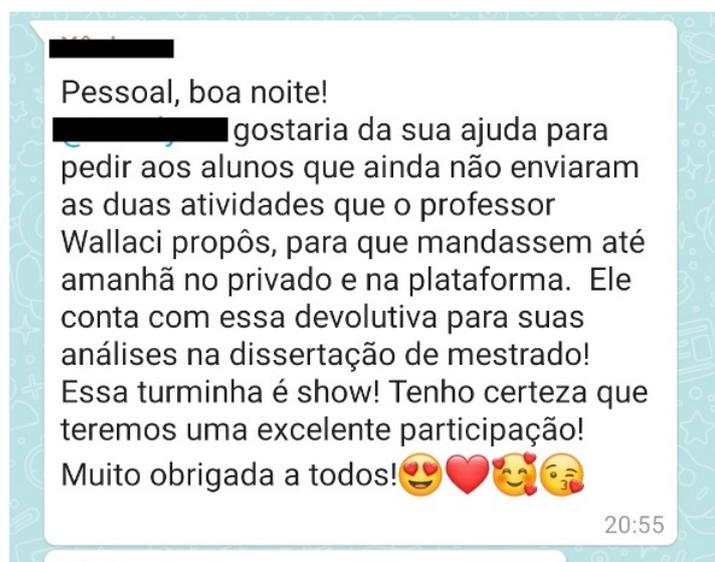
Nota-se com esses dados uma melhora no desempenho de muitos estudantes

quando aplicaram o conteúdo fora de um contexto em problemas auxiliares, mas tal melhora não foi notada em todos, pois os estudantes E, G, I e J deixaram muitas questões em branco alegando que ainda não sabiam operar e nem comparar frações. Nesse momento, há indício de uma nova dificuldade, além de comparar e operar: a de interpretar o problema. Por isso outras listas também foram disponibilizadas para que os estudantes pudessem treinar um pouco e expor as suas dúvidas sobre equivalência, soma, subtração, multiplicação e divisão de frações, para que então pudéssemos elaborar uma ação para sanar tais dúvidas.

3.1.4 Aula 4

Na quarta aula, realizamos uma semana para esclarecimento de possíveis dúvidas que ainda persistiam. Estávamos vivenciando dias difíceis de muitas perdas de amigos e familiares dos estudantes para o vírus da Covid-19, e com isso o clima inevitável de muito desânimo pairava nas aulas. Na tentativa de motivar os estudantes, foi realizado um diálogo pelo whatsapp incentivando os estudantes a realizarem as atividades enviadas que ainda estavam pendentes. Nesse momento, o incentivo das diretoras e das professoras, durante o diálogo, foi de extrema importância para que os estudantes se sentissem motivados a continuar, como o pedido de ajuda abaixo [Figura 32](#) feito por uma das professoras à diretora do Colégio.

Figura 32 – Pedido de uma das Professoras de Matemática



Fonte: Dados da pesquisa de campo

Fizemos uma revisão sobre os quatro passos de Polya (compreensão, planejamento, execução e análise), bem como a importância do espírito investigativo que um estudante protagonista deve ter ao estudar com o constante auxílio da heurística.

3.1.5 Aula 5

Na quinta aula, foi realizada a correção, utilizando o passo a passo de Polya (1978), das listas extras de recuperação e a correção da avaliação diagnóstica, parcialmente representada na Figura 33, por meio de videoaulas gravadas e postadas no youtube (seção F.1), de modo que cada uma das etapas da resolução de cada questão fosse desenvolvida por meio da heurística de Polya propondo, segundo a SD, observações, simulações, experimentações, descrições e a análise dos resultados.

Figura 33 – Correção da avaliação diagnóstica

A screenshot of a video showing a handwritten solution to a math problem. The text at the top reads: "PAULO COMPROU UMA PIZZA DE 12 FATIAS PARA COMER COM SEUS DOIS AMIGOS JOÃO E PEDRO. CHEGANDO EM CASA ELE DEIXOU A PIZZA SOBRE A MESA E FOI TOMAR BANHO. QUANDO VOLTOU PERCEBEU QUE JOÃO HAVIA COMIDO 2/12 DA PIZZA E QUE PEDRO HAVIA COMIDO 3/5 DO TOTAL INICIAL DE FATIAS. PAULO VENDO AQUELA SITUAÇÃO RESOLVEU COMER 7/30 DO TOTAL INICIAL DE FATIAS DA PIZZA. QUAL A FRAÇÃO QUE SOBROU DESSA PIZZA?". Below the text, the solution is written in green and red ink. It shows three fractions: $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{5}$, and $\frac{7}{30}$. These are converted to a common denominator of 60: $\frac{10}{60}$, $\frac{36}{60}$, and $\frac{14}{60}$. These are then added together: $\frac{10}{60} + \frac{36}{60} + \frac{14}{60} = \frac{60}{60}$. A red checkmark is drawn next to the final result.

Fonte: Canal do Youtube

Nesse ponto da trajetória, a Intervenção Formalizante (I_f), foi agregada à Metodologia de Polya no sentido de compreender o problema, planejar a sua resolução, executar o plano e examinar a solução, refletindo sobre todos os passos dados e possíveis outras formas de resolver a questão.

3.1.6 Aula 6

Na sexta aula, foi aplicada a avaliação final com a finalidade de ofertar o protagonismo ao estudante para que ele pudesse, segundo a Intervenção Avaliativa Restrita (IA_r) formalizar, aplicar e pensar em tudo o que construíra até então. Para tanto, foi elaborada uma nova lista com o mesmo teor da lista de questões da avaliação diagnóstica 1 (seção H.1), para que nesse momento os estudantes pudessem fazer uso não só do conteúdo explorado, mas também da metodologia, com a finalidade de que eles percebessem se ocorreu ou não uma melhora no processo de compreensão do conteúdo de operações com frações através do uso de tal metodologia.

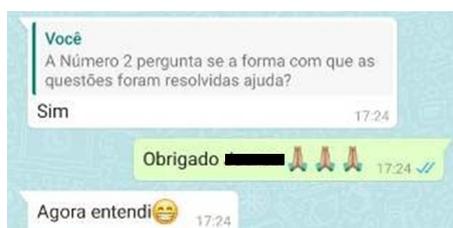
Apesar de os estudantes C, D, E e F não terem participado dessa atividade avaliativa, apareceram dois novos estudantes (estudante I e estudante J) para participar. Os nove

estudantes se mostraram confiantes e ficaram mais entusiasmados com a nova chance; entretanto, como mencionado anteriormente, o número de estudantes participantes ainda continuou baixo até o final. A direção do Colégio e as professoras da turma insistiram em convidar e perguntar aos estudantes que não participaram se eles precisavam de alguma ajuda, mas não receberam resposta. Além disso, Direção e Professoras da turma acompanharam e contribuíram, durante todo o processo, incentivando os estudantes e pais por mensagens de whatsapp e com a opinião em relação ao nível das questões que estavam sendo trabalhadas.

3.1.7 Aula 7

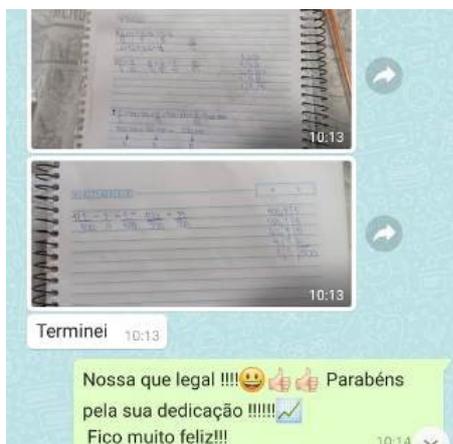
Por fim, a sétima aula, foi desenvolvida através de vídeo aulas gravadas as quais foram postadas no canal do Youtube mencionado anteriormente e também da mesma forma por meio de feedback de esclarecimentos de dúvidas através do aplicativo whatsapp como exemplificado na Figura 29 e na Figura 30 .

Figura 34 – Esclarecimento de dúvidas do estudante J



Fonte: Diálogo com os estudantes por meio de whatsapp

Figura 35 – Retorno após o esclarecimento de dúvidas do estudante J



Fonte: Diálogo com os estudantes por meio de whatsapp

Nessas aulas foram realizadas as análises do passo a passo das resoluções das questões da última lista atendendo às Intervenções Avaliativas Aplicativas (IAa), com a finalidade de que nosso estudante fizesse uso dos algoritmos de todo o conteúdo trabalhado, sendo então aplicado em outras diversas situações práticas. Durante toda a aplicação da presente proposta foram distribuídas listas de questões extras com a finalidade de ofertar ao estudante uma segunda oportunidade de aprender o conteúdo. O estudante durante esse diálogo se comportou expondo suas dúvidas e construindo assim com o professor aquilo que não ficou tão claro, paralelamente aos estudos.

3.2 Análise dos dados

A seguir, o Quadro 4 representa os resultados das pontuações por questão segundo os quatro passos de Polya e a pontuação total da avaliação final e os devidos comentários, na sequência. As questões dessa última atividade avaliativa foram elaboradas com o mesmo

Quadro 4 – Resultado da avaliação final

Estudante	A	B	G	H	I	J
Questão 1	0%	100%	0%	0%	0%	0%
Questão 2	50%	100%	0%	0%	0%	100%
Questão 3	0%	0%	0%	0%	0%	100%
Questão 4	100%	0%	100%	0%	0%	0%
Aproveitamento	37,5%	50%	25%	0%	0%	0%

Fonte – Dados da pesquisa de campo.

conteúdo e nível de dificuldade das questões da avaliação diagnóstica inicial. Tais questões

versaram entre comparação, soma, subtração, multiplicação e divisão de frações. Além da participação dos estudantes ter diminuído, a média de acertos da avaliação diagnóstica em comparação com a média da avaliação final também foi reduzida, em termos percentuais de 32,8 para aproximadamente 27. Apesar da redução na participação dos estudantes e na média de resultados, pudemos verificar uma melhora notável, por parte de alguns estudantes, na forma de como escrever formalmente a solução de problemas, como a explicação do estudante B na questão 2, 36.

Figura 36 – Estudante B

Handwritten work on lined paper:

1. fração 1 fração 2

$$\frac{4}{8} < \frac{5}{8}$$

2. $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ $\frac{7}{7} - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$

R: A fração da parte do muro feita e de $\frac{4}{7}$. A fração da parte do muro que deverá ser feita para ele conseguir terminar no terceiro dia e de $\frac{3}{7}$.

Fonte: Dados da pesquisa de campo

Ao observarmos os pequenos detalhes, encontramos em outras atividades de outros estudantes indícios de uma melhora, também, no raciocínio. Como exemplo, podemos observar que o estudante B, apesar de não conseguir resolver a questão 4, na questão 3 [Figura 37](#), conseguiu compreender que precisava de frações equivalentes para solucionar a questão e realmente consegue duas frações equivalentes, entretanto só não acertou completamente a questão, porque se tratava de 64 fatias, e não 128, ou seja, bastava uma simplificação e a questão estaria correta.

Figura 37 – Estudante B

$3 - 2 = \frac{16}{8} = 2$ $\frac{48}{198}$
 $\frac{16}{8} \Rightarrow \frac{2}{1}$

R: Paula comeu 16 pedaços e Julia comeu 48 fatias.

4-

Fonte: Dados da pesquisa de campo

Apesar dos resultados dos estudantes não significarem uma melhora de um modo geral, notamos pequenas melhoras parciais em cada estudante, como o estudante J, que apresentou grande dificuldade de interpretação e cálculo desde o início das aulas, mas enfim percebemos que, na questão 2 da [Figura 38](#), mesmo acertando apenas a metade da questão da última avaliação, ele conseguiu compreender que era necessário, inicialmente, a soma de frações, raciocínio que não estava conseguindo realizar no início das aulas. E, na questão 3, ele conseguiu compreender que necessitava de multiplicar a fração pelo número inteiro e o fez corretamente.

Figura 38 – Estudante J

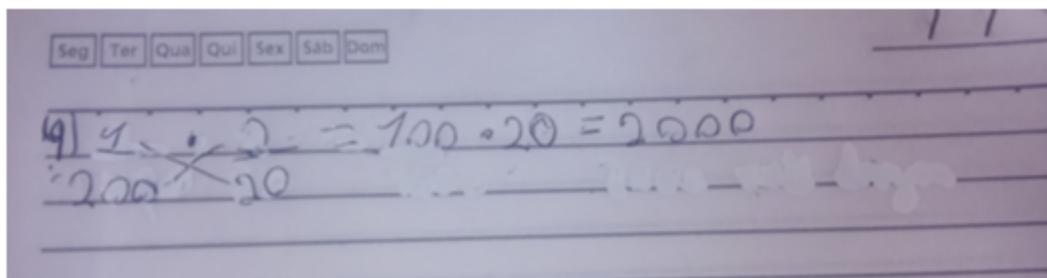
$\frac{18}{4} < \frac{8}{5}$
 2) $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$
 3) $2 \cdot \frac{64}{1} = \frac{128}{1} = 128$
 $3 \cdot \frac{64}{1} = \frac{192}{1} = 192$

Fonte: Dados da pesquisa de campo

O estudante J errou os cálculos da questão 4 [Figura 39](#), mas conseguimos entender que ele sabia que poderia utilizar a divisão de frações, pois quando questionado sobre o que fez na questão, ele disse: “transformei a conta em multiplicação” o que já é um aspecto

positivo quanto a interpretação.

Figura 39 – Estudante J



Fonte: Dados da pesquisa de campo

Durante todos os dias de aula, insistimos em incentivar os estudantes por meio de mensagens a eles enviadas e também aos pais com a finalidade de os motivar a participar das aulas online, pois estávamos impedidos judicialmente de dar aula presencialmente por conta da pandemia. Entretanto, a direção e as professoras da turma esclareceram que essa era uma grande dificuldade que todos os professores do Colégio estavam vivenciando. A situação é tão preocupante que atualmente a Secretaria Estadual de Educação elaborou uma estratégia de ensino híbrido para que durante os meses de fevereiro, março e abril fossem realizadas revisões e recuperações de conteúdos trabalhados no ano de 2020, e só a partir de maio seria iniciado o ano letivo com novos conteúdos.

As condições de realização desta pesquisa (tempo de pandemia, aulas remotas, falta de recursos tecnológicos dos alunos) impossibilitaram um resultado satisfatório, porém aos poucos que conseguiram participar evidenciaram que a proposta aqui sugerida apresentou algumas melhorias no aprendizado de frações.

Capítulo 4

Considerações Finais

As leituras dos teóricos elencados neste trabalho desvelaram muitos horizontes e consolidaram a própria prática deste pesquisador, que anos a fio vem procurando atuar em sala de aula de maneira mais sensível a fim de detectar meios de promoção de um ensino voltado à reflexão e avesso à memorização do não entendido. Aliás, o empenho na revisão teórica e metodológica foi fundamental para embasar de modo acadêmico-científico nossa proposta de trabalho com frações a serem aplicadas no 7º ano do EF, seguindo, obviamente, as metodologias RP e SD.

Compreender o contexto de dificuldades do ensino e aprendizagem como, neste caso o de frações, sem que os alunos já tenham aprendido a manipular os números racionais é uma tarefa infrutífera. Por isso, lançamos nossa questão-problema (em que medida a metodologia da RP desenvolvida por [Polya \(1978\)](#), aplicada em forma de Sequência Didática (SD) na linha de [Cabral \(2017\)](#), pode contribuir para o aprendizado de frações em turmas de 7º ano do EF?) e dentre os muitos achados mostrados ao longo da pesquisa de campo, constatamos que conteúdos prévios de números racionais e a noção de quantidade são requisitos fundamentais para se iniciar o estudo de fração e, ao mesmo tempo, desenvolver o letramento matemático.

O objetivo geral do presente trabalho (investigar, por meio de nossa proposta de trabalho, de que forma as metodologias de ensino RP e SD voltadas à reflexão, compreensão e resolução de problemas podem ser utilizadas em sala de aula para facilitar o aprendizado do conteúdo de frações em turmas de alunos do EF) foi atingido com os estudantes que participaram da pesquisa. Acreditamos que, se a aplicação da proposta fosse em ensino presencial, o resultado seria bem mais produtivo uma vez que estariam presentes os estudantes que não possuem internet e além disso, devido a ausência de videoconferências durante a aplicação da proposta, as dúvidas poderiam ser esclarecidas em uma sequência gradativa de forma mais rápida.

Concluimos que a pesquisa em que nos embasamos corroborou o que já pensávamos: a aprendizagem precisa ter sentido para interessar ao aluno, precisa aproximar-se

de sua vida cotidiana (e nisso a matemática está constantemente presente) e se tornar uma prática, em vez de uma abstração para além do convívio humano, que é, em essência, multi-, pluri- e transdisciplinar.

Com efeito, a matemática não surgiu para amedrontar a vida de ninguém; pelo contrário, ela foi buscada, em sua maioria, para resolver problemas da vida prática que foram surgindo quando o homem vai deixando de ser nômade para fixar-se em algum lugar coexistindo com outros humanos. É óbvio então que, se a matemática veio para facilitar a convivência humana, não há razão alguma para que se insista em dificultar o ensino e aprendizagem dela. Acreditamos ter demonstrado isso ao longo deste estudo, principalmente na sugestão de aplicação das metodologias de RP, de Polya, e SD, de Cabral – ambas radicalmente contra a memorização de um imenso cabedal de fórmulas e regras incompreendidas pelo estudante.

Podemos, enfim, dizer que nenhum ensino deve ser estático; deve, sim, ser reflexivo, e toda reflexão se dá pela mobilidade do pensamento – uma mobilidade fascinante quando associada à prática da vida cotidiana, trazendo respostas para os questionamentos sempre ali presentes. Inferimos que a metodologia de ensino influi substancialmente no aprendizado efetivo que, no nosso caso, é o de frações.

Todavia nas condições de pandemia a aplicação ficou muito prejudicada devido a muitos problemas de comunicação entre professor e alunos. Uma vez que a Metodologia da Resolução de problemas requer, entre outros fatores, um diálogo em tempo real, não foi possível uma aplicação eficiente devido a demora no retorno das mensagens que eram enviadas aos estudantes. Foram estabelecidas muitas tentativas de diálogo em tempo real entretanto, existiram muitas barreiras como as dificuldades de acesso a internet, dificuldades de não se ter uma aula síncrona devido ao fato de que muitos dependiam de computadores e celulares que eram de uso de mais entes da família e por último mesmo aqueles que possuíam aparelhos próprios também passaram por dificuldades devido ao sinal de rede de internet estar ruim por diversas vezes.

A aplicação da pesquisa remotamente escancarou o que já não era nenhuma novidade: a falta de recursos tecnológicos emperrando a comunicação na aprendizagem de alunos oriundos das classes mais desprivilegiadas socioeconomicamente – o que não é da alçada de um Mestrado voltado à Matemática, mas implica sobremaneira o ensino de quaisquer áreas .

Ainda assim, a elaboração da proposta que sugerimos ao ensino de frações nos levou à inferência de que os desafios nos movem a reinventar o que o invento não possibilitou – é o que podemos dizer ao término deste trabalho que, paradoxalmente, não está concluso, está em andamento junto com a ciência, que nunca para.

Referências

- ALVES, Denis Rogério Sanches; MARTENS, Adam Santos. Desafios para a construção do conhecimento de frações nas séries intermediárias do ensino fundamental. *X Congresso Nacional de Educação (Educere)*, nov. 2011. Disponível em: <encurtador.com.br/egtER>. Acesso em: 26 nov. 2020. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 34.
- BELASCO, Cassiane Dezoti da Fonseca e Angélica Gonçalves da Silva. Corona vírus 2020. *Revista Brasileira de Enfermagem*, mar. 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/0034-7167-2020730201>. Acesso em: 20 nov. 2020. Citado na página 59.
- BERTONI, Nilza Eigenheer. Módulo vi: Educação e linguagem matemática iv. *Universidade de Brasília*, 2009. Brasília. Citado 3 vezes nas páginas 31, 33 e 34.
- BEZERRA, Juliana. História da matemática. 2020. Disponível em: <encurtador.com.br/h1256>. Acesso em: 01 dez. 2020. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. [S.l.]: São Paulo, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 25.
- BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. [S.l.]: MEC/SEF, 1998. Citado 5 vezes nas páginas 31, 34, 35, 36 e 52.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*. Brasília: MEC/SEF, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.
- BRASIL. *Análises e Reflexões Sobre o Desenvolvimento dos Estudantes Brasileiros*. São Paulo: Fundação Santillana, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: MEC/Consed/Undime, 2017. Citado 6 vezes nas páginas 31, 32, 34, 36, 41 e 52.
- BRASIL. *Proposta de parecer sobre reorganização dos calendários escolares e realização de atividades pedagógicas não presenciais durante o período de pandemia da COVID 19*. Brasília: MEC/SEF, 2020. Citado na página 59.
- BROUSSEAU, Guy. *Introdução a teorias das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. [S.l.]: São Paulo, 2008. Citado na página 31.
- CABRAL, Natanael Freitas. Sequências didáticas: Estrutura e elaboração. *SBEM/SBEM-PA*, 2017. Citado 16 vezes nas páginas 18, 19, 20, 41, 42, 43, 44, 49, 51, 53, 54, 55, 57, 70, 71 e 83.

COSTA, Adriano Araújo. *Uma sequência didática para resolver equações do segundo e terceiro graus no conjunto dos números racionais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, Maceió - AL, 2013. Citado na página 46.

COSTA, A. C. Referenciais históricos e metodológicos para o ensino de frações. *Universidade Federal de São Carlos*, 2010. Citado na página 25.

DANTE, Luiz Roberto. *Teláris Matemática*. [S.l.]: São Paulo, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 26, 27, 28, 29 e 30.

DAVIS, Harold T. *História da computação. Tópicos da História da matemática para o uso em Sala de Aula*. [S.l.: s.n.], 1992. v. 2. Citado na página 22.

ELIAS, Henrique Rizek. *Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores de matemática*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina - PR, 2017. Citado na página 46.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. 5. ed. Campinas, SP: [s.n.], 2011. Citado na página 22.

FÂVERO, Altair Alberto; TONIETO, Carina; POSSEL, Bianca. A resolução de problemas como prática interdisciplinar na educação: uma proposta epistemológica. *Educação Por Escrito*, v. 9, n. 1, p. 41–53, jul. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

FELCHER, Carla Denize ott. *Tecnologias digitais e ensino de matemática: o uso de Facebook no processo de ensino dos números racionais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pelotas, Pelotas - RS, 2016. Citado na página 44.

FLEURY, Maria Tereza. Pesquisa aplicada: conceitos e abordagens metodológicas. escola de administração de empresas de são paulo. *Fundação Getúlio Vargas*, 2020. Disponível em: <encurtador.com.br/lzFW8>. Acesso em: 26 nov. 2020. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 53.

FLICKINGER, Hans-George. A caminho de uma pedagogia hermenêutica. *Campinas: Autores Associados*, 2010. Citado na página 19.

FONSECA, S. Metodologia do ensino da matemática. 1997. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 31.

GIL, Antônio Carlos. *Como elaborar projetos de pesquisa*. [S.l.]: Atlas, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

GONÇALVES, Maria Imaculada de Souza Marcenes. *Crenças e dificuldades de futuros professores de matemática no domínio dos números racionais*. Tese (Doutorado) — UFMG, Belo Horizonte, 2013. Citado na página 47.

GRANDE, Campo. *Referencial Curricular da Rede Municipal de Ensino 3º ao 9º ano do Ensino Fundamental*. Campo Grande: [s.n.], 2008. Citado na página 22.

GUILHERME. Matemática na grécia antiga. *Philos-Net*, 2017. Disponível em: <encurtador.com.br/hjS69>. Acesso em: 24 nov. 2020. Citado na página 23.

LIMA, Elon Lages. *A Matemática do ensino médio*. 5. ed. [S.l.]: SBM, 2001. Citado na página 26.

- LIMA, Valéria Scomparin; BRITO, Regina F. Mapeamento cognitivo e a formação do conceito de frações. *Psicologia da educação matemática: teoria e pesquisa*, 2005. Citado na página 32.
- LUCKESI, Cipriano C. *O que é mesmo o ato de avaliar a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2000. v. 3. Citado na página 35.
- MENDES, Eloá Cassiano; MENDES, Mirela. *Os múltiplos recursos para ensinar fração*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. Minicurso. Citado na página 32.
- NETO, João Eichenberger. *História da matemática*. Londrina: Educacional S.A., 2016. Citado na página 24.
- NEVES, Regina de Silva Pina. *A divisão e os números racionais: uma pesquisa de intervenção psicopedagógica sobre o desenvolvimento de competências conceituais de alunos e professores*. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília, Brasília - DF, 2008. Citado na página 45.
- NIVEM, Ivan. Números: racionais e irracionais. *Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)*, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- OLIVEIRA, Nilton Marques de; STRASSBURG, Udo; MOACIR, Piffer. Técnicas de pesquisa qualitativa: uma abordagem conceitual. *Ciências Sociais Aplicadas em Revista Unioeste/MCR*, v. 17, n. 32, p. 87–110, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 23, 50 e 53.
- PEREIRA, Antônio L. Os 4 passos de polya. seminário de resolução de problemas. *Instituto de Matemática e Estatística da USP (Imesp)*, 2020. ISSN São Paulo. Citado 3 vezes nas páginas 38, 39 e 40.
- PIRES, C. M. C. Currículo de matemática: da organização linear à ideia de rede. são paulo. *FDT*, 2000. Citado na página 33.
- POLYA, George. A arte de resolver problemas. *Interciência*, 1978. ISSN Rio de Janeiro. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Citado 24 vezes nas páginas 18, 19, 20, 21, 36, 37, 38, 39, 40, 49, 51, 52, 53, 54, 63, 64, 65, 66, 69, 70, 71, 73, 77 e 83.
- REYNAUD, Inês. *Os egípcios e as frações*. [S.l.], 2010. Disponível em: <encurtador.com.br/eD248>. Acesso em: 27 nov. 2020. Citado na página 22.
- RODRIGUES, Wilson Roberto. *Números racionais: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal*. Dissertação (Mestrado) — PUC-SP, São Paulo, 2005. Citado na página 45.
- SEVERO, Daniela Fouchard. *Números racionais e ensino médio: uma busca de significados*. Dissertação (Mestrado) — PUC-RS, Porto Alegre - RS, 2009. Citado na página 47.
- SILVA, Fernanda Andréia Fernandes. *Graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife-PE, 2018. Citado na página 48.

SOARES, Sandro Vieira; PICOLLI, Icaro Roberto Azevedo; CASAGRANDE, Jacir Leonir. Pesquisa bibliográfica, pesquisa bibliométrica, artigo de revisão e ensaio teórico em administração e contabilidade. *Administração: Ensino e Pesquisa Rio de Janeiro*, v. 19, n. 2, p. 308–339, ago. 2018. Citado na página 50.

VAIANO, Bruno. A matemática foi descoberta ou inventada?. 2020. Disponível em: <encurtador.com.br/kDK19>. Acesso em: 30 nov. 2020. Citado na página 18.

Apêndices

APÊNDICE A

Plano de Aula 1

A.1 Plano de Aula 1

 PROFMAT	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho	Turma: _____	 UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
	Aluno: _____ Prof. Wallaci Luz	Data: ____ / ____ / 2020	

Plano de Aula

I Plano de Aula 1

II Dados de Identificação

Escola: COLÉGIO ESTADUAL NICOLAO BASTOS FILHO

Professor (a): WALLACI ANTERO LUZ DA SILVA

Disciplina: MATEMÁTICA

Série: 7º ano Turma: Período: Uma semana.

III Tema Operações fundamentais com Frações

IV Objetivos

Objetivo geral: Investigar as competências e habilidades sobre frações.

Objetivos específicos

Precisar as dúvidas em comparações de frações.

Precisar as dúvidas em soma de frações.

Precisar as dúvidas em subtração de frações.

Precisar as dúvidas em multiplicação de frações.

Precisar as dúvidas em divisão de frações.

V Conteúdo Operações com frações.

VI Desenvolvimento do tema

Aplicar um pré-teste para analisar o passo-a-passo das resoluções dos estudantes.

Elaborar estratégias para a próxima aula mediante os resultados do pré-teste.

VII Recursos didáticos Avaliação Diagnóstica, whatsapp, Google Meet e Plataforma Google.

VIII Avaliação

A avaliação será baseada inicialmente na correção da Atividade Avaliativa, pois ela será um diagnóstico para que possamos identificar e planejar próximas ações a serem desenvolvidas durante a aula de conteúdos e em um momento posterior na aula de resolução de problemas. A correção dessa atividade não será feita em sala, nesse momento.

XIX Bibliografia

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

BIANCHINI, Edwaldo. Matemática. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011. (6º ao 9º ano)

APÊNDICE B

Avaliação Diagnóstica

B.1 Avaliação Diagnóstica

 PROFMAT	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho	Turma: _____	 UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
	Aluno: _____ Prof. Wallaci Luz	Data: ____ / ____ / 2020	

Avaliação Diagnóstica

Tema: NÚMEROS RACIONAIS NO FORMATO FRACIONÁRIO

1) Paulo comprou uma pizza de 12 fatias para comer com seus dois amigos João e Pedro. Chegando em casa ele deixou a pizza sobre a mesa e foi tomar banho. Quando voltou percebeu que João havia comido $\frac{2}{12}$ da pizza e que Pedro havia comido $\frac{3}{5}$ do total inicial de fatias. Paulo vendo aquela situação resolveu comer $\frac{7}{30}$ do total inicial de fatias da pizza. Qual a fração que sobrou dessa pizza?

2) Jennifer utilizou $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{20}$ do seu salário, desse mês de dezembro, para comprar presentes para o marido e para o filho, respectivamente. Que fração do seu salário Jennifer utilizou para comprar os dois presentes? E qual fração, do seu salário, sobrou?

3) Em uma empresa, todo mês, o lucro é dividido de forma diretamente proporcional a quantidade de ações que cada sócio possui. Se o sócio A possui $\frac{1}{2}$ de ações, o sócio B $\frac{3}{10}$ de ações e o sócio C $\frac{4}{20}$ de ações, determine o quanto cada sócio recebeu, respectivamente, em um mês onde o lucro obtido foi de um milhão de reais.

4) Em uma fábrica de sucos o suco é envasado em recipientes de $\frac{1}{500}$ da capacidade total do reservatório da máquina distribuidora. Quantos recipientes de suco foram envasados em certo dia que o reservatório estava com $\frac{1}{5}$ de sua capacidade total?

APÊNDICE C

Plano de Aula 2

C.1 Plano de Aula 2

	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho	Turma: _____
	Aluno: _____	Data: ____ / ____ / 2020
	Prof. Wallaci Luz	



Plano de Aula

I Plano de Aula 2

II Dados de Identificação

Escola: COLÉGIO ESTADUAL NICOLAO BASTOS FILHO

Professor (a): WALLACI ANTERO LUZ DA SILVA

Disciplina: MATEMÁTICA

Série: 7º ano Turma: Período: Uma semana.

III Tema Frações equivalentes

IV Objetivos

Objetivo geral: Desenvolver o conceito e aplicação de frações equivalentes.

Objetivos específicos:

Compreender frações equivalentes

Comparar frações de mesmo denominador.

Comparar frações de denominadores diferentes.

V Conteúdo Comparação de frações

VI Desenvolvimento do tema

Parte 1

Resolver passo a passo (compreender, planejar, executar e revisar) questões cujo foco seja dividir geometricamente dois inteiros em um número igual de partes para, depois, tomarmos duas frações desses inteiros e compará-las.

Parte 2

Resolver passo a passo (compreender, planejar, executar e revisar) questões cujo foco seja dividir geometricamente dois inteiros em um número diferente de partes para, depois, tomarmos duas frações desses inteiros, uma de cada, e compará-las.

VII Recursos didáticos Black Boardapp (aplicativo de lousa virtual), Livro didático, Whatsapp, Google Meet e Plataforma Google.

VIII Avaliação A avaliação será baseada em observações e nas resoluções de questões dos estudantes.

XIX Bibliografia

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011. (6º ao 9º ano).



Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho

Aluno: _____

Turma: _____

Prof. Wallaci Luz

Data: ____ / ____ / 2020

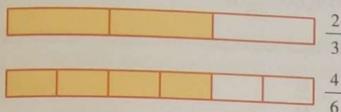


28. As frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ são equivalentes, pois representam a mesma parte do inteiro.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

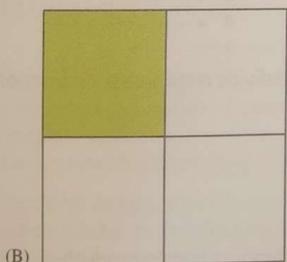
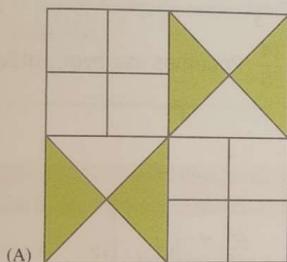
28 Observe as figuras, que representam o mesmo inteiro, e verifique se as frações são equivalentes. Justifique sua resposta.



29 Se de um rolo de barbante com 45 metros de fio eu cortar $\frac{2}{5}$ ou $\frac{6}{15}$ desse barbante, obterei um fio de mesmo comprimento? Por quê?

Sim, pois $\frac{2}{5}$ e $\frac{6}{15}$ são frações equivalentes.

30 Nas duas figuras abaixo (A e B), considere o "quadrado" como um mesmo inteiro.



a) Que fração representa a parte pintada de verde em cada figura? A: $\frac{4}{12}$ e B: $\frac{1}{4}$
 b) As frações obtidas em A e em B são equivalentes? Por quê? Sim, pois representam a mesma parte do inteiro, embora com formas diferentes.

31 Se 20% das pessoas que compareceram a uma festa eram do sexo feminino, é possível dizer que $\frac{1}{4}$ dos presentes era do sexo feminino? Por quê? Não, pois $20\% = \frac{20}{100}$, e não é equivalente a $\frac{1}{4}$, já que não há um mesmo número pelo qual possamos dividir 20 e 100 para obter 1 e 4, respectivamente.

33. a) $4 \cdot 27 = 9 \cdot 12$; $4 \cdot 36 = 9 \cdot 16$; $4 \cdot 63 = 9 \cdot 28$;
 $12 \cdot 36 = 27 \cdot 16$; $12 \cdot 63 = 27 \cdot 28$; $16 \cdot 63 = 36 \cdot 28$

32 Quais das seguintes frações são equivalentes à fração $\frac{5}{8}$?

- a) $\frac{10}{16}$ c) $\frac{20}{16}$ e) $\frac{30}{56}$
 b) $\frac{15}{24}$ d) $\frac{25}{40}$ f) $\frac{8}{5}$

33 Reúna-se com um colega, e façam o que se pede.

- a) Dadas as frações equivalentes $\frac{4}{9}$, $\frac{12}{27}$, $\frac{16}{36}$ e $\frac{28}{63}$, para cada par calculem os produtos do numerador de uma com o denominador da outra. Em seguida, comparem esses dois produtos.
 b) Escrevam duas frações equivalentes, diferentes das do item a. Calculem os produtos do numerador de uma com o denominador da outra e, em seguida, comparem esses produtos. *resposta pessoal*
 c) Dadas duas frações equivalentes, o que vocês podem concluir sobre os produtos do numerador de uma com o denominador da outra? *Esses produtos são iguais.*
 d) Sabendo que as frações $\frac{5}{8}$ e $\frac{?}{48}$ são frações equivalentes, calculem o produto de 8 por "?" e, em seguida, o valor de "?". 240, 30

34 Encontre a fração equivalente a $\frac{2}{5}$ que tenha denominador 15. Você pode encontrar essa fração multiplicando seus dois termos por um mesmo número. $\frac{6}{15}$

35 Determine uma fração de numerador 42 equivalente à fração $\frac{7}{10}$. $\frac{42}{60}$

36 Determine as frações equivalentes a $\frac{2}{3}$ e a $\frac{3}{4}$ com denominador 12. $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$

37 Nas seguintes equivalências falta um termo de uma das frações, representado por "?". Calcule quanto vale "?" em cada caso.

- a) $\frac{3}{4} = \frac{15}{?}$ 20 c) $\frac{5}{?} = \frac{35}{21}$ 3
 b) $\frac{6}{9} = \frac{?}{15}$ 10 d) $\frac{?}{18} = \frac{3}{2}$ 27

	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho Aluno: _____ Turma: _____ Prof. Wallaci Luz Data: ____ / ____ / 2020	
---	---	---

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

38 Simplifique as frações, tornando-as irredutíveis. *d) Já é irredutível.*

a) $\frac{4}{10}$ $\frac{2}{5}$ b) $\frac{18}{24}$ $\frac{3}{4}$ c) $\frac{25}{50}$ $\frac{1}{2}$ d) $\frac{14}{15}$

39 Simplifique, quando possível, as frações para obter denominadores iguais a 6. *c) impossível*

a) $\frac{72}{48}$ $\frac{9}{6}$ b) $\frac{14}{42}$ $\frac{2}{6}$ c) $\frac{12}{38}$ d) $\frac{20}{30}$ $\frac{4}{6}$

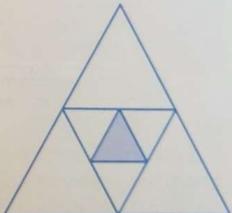
160
CAPÍTULO 6 | NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA DE FRAÇÃO

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Observe a figura ao lado e responda às questões em seu caderno.

- Quantos triângulos há na figura? **9**
- Quantos  preciso ter para cobrir o triângulo grande? **16**
- O menor triângulo corresponde a que fração do maior triângulo? $\frac{1}{16}$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATIUSA



Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho

Aluno: _____
Prof. Wallaci Luz

Turma: _____
Data: ____ / ____ / 2020



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

43 Compare os números e escreva, em seu caderno, sentenças usando os sinais < ou >.

a) $\frac{2}{6}$ e $\frac{4}{6}$ $\frac{2}{6} < \frac{4}{6}$

b) $\frac{1}{7}$ e $\frac{5}{7}$ $\frac{1}{7} < \frac{5}{7}$

c) $\frac{5}{9}$ e $\frac{2}{9}$ $\frac{5}{9} > \frac{2}{9}$

d) $\frac{4}{10}$ e $\frac{3}{10}$ $\frac{4}{10} > \frac{3}{10}$

44 Em uma classe, $\frac{4}{9}$ dos alunos são meninos, e $\frac{5}{9}$ são meninas. Nessa classe há mais meninos ou meninas? *meninas*

45 Compare os números e escreva, em seu caderno, sentenças usando os sinais <, = ou >.

a) $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$ $\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$

b) $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{10}$ e $\frac{4}{15}$ $\frac{3}{10} > \frac{4}{15}$

d) $\frac{7}{6}$ e $\frac{21}{18}$ $\frac{7}{6} = \frac{21}{18}$

46. O maior é $\frac{5}{6}$, pois $\frac{5}{6}$ é o mesmo que $\frac{10}{12}$ e $\frac{3}{4}$ é o mesmo que $\frac{9}{12}$.

46 Qual desses números é maior: $\frac{5}{6}$ ou $\frac{3}{4}$?

47 Na pintura de uma parede foram misturados $\frac{3}{5}$ de um galão de tinta azul com $\frac{5}{8}$ de um galão de tinta branca. Qual é a cor da tinta mais usada nessa mistura? *branca*

EMAGIO COELHO



48 Em uma mesma semana, Felipe fez provas de Matemática, História e Inglês. Ele acertou 12 das 20 questões de Matemática, 6 das 10 questões de História e 4 das 7 questões de Inglês. Em qual das provas ele se saiu melhor?

Felipe teve o mesmo desempenho nas provas de Matemática e História, porque $\frac{12}{20} = \frac{6}{10}$, $\frac{12}{20} > \frac{4}{7}$ e $\frac{6}{10} > \frac{4}{7}$.



IZAAC BRITO

49 Se Lúcia caminhou $\frac{7}{12}$ de uma trilha para pedestres, ela percorreu mais ou menos da metade dessa trilha? *mais da metade*

50 Um painel decorativo foi montado com lajotas de mesmo tamanho. Do total de lajotas, $\frac{2}{6}$ têm cor azul, $\frac{2}{4}$ têm cor amarela e $\frac{2}{12}$ têm cor vermelha.

- a) Qual é a cor de lajota mais usada nesse painel? *amarela*
- b) Qual é a cor de lajota menos usada nesse painel? *vermelha*

51 Reduza as frações a seguir a um mesmo denominador.

a) $\frac{3}{5}, \frac{5}{4}, \frac{12}{20}, \frac{25}{20}$ d) $3\frac{1}{2}, 1\frac{5}{6}, \frac{21}{6}, \frac{11}{6}$

b) $\frac{2}{6}, \frac{7}{4}, \frac{4}{12}, \frac{21}{12}$ e) $3\frac{1}{5}, 2\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{64}{20}, \frac{55}{20}, \frac{10}{20}$

c) $3, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}$ f) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$
 $\frac{45}{15}, \frac{6}{15}, \frac{5}{15}$ $\frac{8}{8}, \frac{4}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}$

APÊNDICE D

Plano de Aula 3

D.1 Plano de Aula 3

	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho	Turma: _____	
	Aluno: _____ Prof. Wallaci Luz	Data: ____ / ____ / 2020	

Plano de Aula

I Plano de Aula 3

II Dados de Identificação

Escola: COLÉGIO ESTADUAL NICOLAO BASTOS FILHO

Professor (a): WALLACI ANTERO LUZ DA SILVA

Disciplina: MATEMÁTICA

Série: 7º ano Turma: Período: Três semanas

III Tema Operações com frações

IV Objetivos

Objetivo geral : Desenvolver o conceito e aplicações da soma e subtração de frações.

Objetivos específicos

Aplicar, em questões, a soma e a subtração de frações com denominadores iguais.

Aplicar, em questões, a soma e a subtração de frações com denominadores diferentes.

V Conteúdo Somar e subtrair frações

VI Desenvolvimento do tema

Parte 1

Resolver passo a passo (compreender, planejar, executar e revisar) questões de soma e subtração de frações com denominadores iguais.

Parte 2

Resolver passo a passo (compreender, planejar, executar e revisar) questões de soma e subtração de frações com denominadores diferentes.

VII Recursos didáticos BlackBoardapp(aplicativo de lousa virtual), Livro didático, Google Meet, Whatsapp e Plataforma Google.

VIII Avaliação A avaliação será baseada em observações e nas resoluções de questões dos estudantes

XIX Bibliografia

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011. (6º ao 9º ano)



Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho

Aluno: _____
 Prof. Wallaci Luz

Turma: _____
 Data: ___ / ___ / 2020



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. a) $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$ e $\frac{6}{8}$, respectivamente 1. b) $\frac{2}{8} + \frac{4}{8} = \frac{6}{8}$

1 Observe a figura ao lado.

a) Determine as frações de denominador 8 que representam a parte pintada de amarelo, a parte pintada de verde e a figura toda.

b) Represente por meio de uma adição de frações a parte pintada de verde e amarelo da figura.

c) Represente por meio de uma subtração a parte da figura que não está pintada nem de verde nem de amarelo. $\frac{8}{8} - \frac{6}{8} = \frac{2}{8}$

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

2 Um terreno foi dividido em três canteiros da seguinte maneira:

- um canteiro de margaridas ocupando $\frac{1}{6}$ do terreno;
- um canteiro de rosas ocupando $\frac{4}{6}$ do terreno;
- um canteiro de violetas ocupando o restante do terreno.

a) Represente essa situação por meio de uma figura. construção de figura

b) Determine a parte do terreno que o canteiro de violetas ocupa. $\frac{1}{6}$

172
CAPÍTULO 7 | OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA DE FRAÇÃO



Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho

Aluno: _____

Prof. Wallaci Luz

Turma: _____

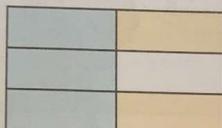
Data: ___ / ___ / 2020



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

9 Considere a figura a seguir e faça o que se pede.



- a) Determine a fração de denominador 2 que representa a parte pintada de azul. $\frac{1}{2}$
- b) Determine a fração de denominador 3 que representa a parte pintada de amarelo. $\frac{1}{3}$
- c) Qual é a fração que representa a parte colorida de azul e amarelo da figura? $\frac{5}{6}$
- d) Determine a fração que representa a parte branca da figura. $\frac{1}{6}$
- e) É possível responder aos itens c e d por meio de operações com frações? Justifique.

resposta possível: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; $\frac{6}{6} - \frac{5}{6}$

10 Reduza as frações ao mesmo denominador, faça os cálculos e dê o resultado com a fração mais simples.

- a) $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{7}{10}$
- b) $\frac{2}{3} + \frac{7}{6} - \frac{11}{6}$
- c) $\frac{2}{9} + \frac{3}{4} - \frac{35}{36}$
- d) $3 - \frac{1}{2} + \frac{4}{5} - \frac{43}{10}$

11 Determine as diferenças.

- a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{2}{15}$
- b) $\frac{5}{4} - \frac{4}{5} - \frac{9}{20}$
- c) $3 - \frac{2}{5} - \frac{13}{5}$
- d) $3\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4} - \frac{3}{4}$

12 Calcule o valor das expressões.

- a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{11}{12}$
- b) $3 - 2\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$
- c) $\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4} - \frac{7}{12}$
- d) $\frac{11}{12} - \frac{5}{6} + \frac{2}{9} - \frac{11}{36}$

13 Sabendo que $a = 3\frac{1}{4} - \frac{5}{3}$ e $b = 1\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$, calcule $a + b$. $\frac{11}{4}$

14 Um motorista saiu da cidade A em direção à cidade B. No primeiro dia, percorreu $\frac{1}{2}$ da distância que separa as duas cidades e, no segundo dia, $\frac{1}{3}$ dessa mesma distância.

Agora, responda:

- a) Qual é a fração que representa a distância percorrida após os dois dias de viagem? $\frac{5}{6}$
- b) Qual é a fração que representa a distância que falta para chegar à cidade B? $\frac{1}{6}$
- c) Sabendo que a distância que falta para chegar à cidade B é de 60 quilômetros, qual é a distância entre essas duas cidades? 360 quilômetros

15 Em um sítio, $\frac{3}{8}$ das terras são destinados ao plantio de milho, $\frac{2}{5}$, a um pasto para criação de carneiros, e a parte restante é arrendada para o plantio de cana-de-açúcar. Qual é a fração que corresponde à parte arrendada desse sítio? $\frac{9}{40}$

APÊNDICE E

Plano de Aula 4

E.1 Plano de Aula 4

	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho	Turma: _____
	Aluno: _____	Data: ____ / ____ / 2020
	Prof. Wallaci Luz	



Plano de Aula

I Plano de Aula 4

II Dados de Identificação

Escola: COLÉGIO ESTADUAL NICOLAO BASTOS FILHO

Professor (a): WALLACI ANTERO LUZ DA SILVA

Disciplina: MATEMÁTICA

Série: 7º ano

Turma:

Período: Uma semana

III Tema

Operações com frações

IV Objetivos

Objetivo geral: Desenvolver o conceito e aplicações da multiplicação e divisão de frações

Objetivos específicos

Aplicar, em questões, a multiplicação e divisão de frações com denominadores iguais.

Aplicar, em questões, a multiplicação e divisão de frações com denominadores diferentes.

V Conteúdo

Multiplicação e divisão de frações

VI Desenvolvimento do tema

Parte 1

Resolver passo a passo (compreender, planejar, executar e revisar) questões de multiplicação e divisão de frações com denominadores iguais.

Parte 2

Resolver passo a passo (compreender, planejar, executar e revisar) questões de multiplicação e divisão de frações com denominadores diferentes.

VII Recursos didáticos BlackBoardapp(aplicativo de lousa virtual), Livro didático, Whatsapp, Google Meet e Plataforma Google.

VIII Avaliação

A avaliação será baseada em observações e nas resoluções de questões dos estudantes.

XIX Bibliografia

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011. (6º ao 9º ano)



Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho

Aluno: _____
 Prof. Wallaci Luz

Turma: _____
 Data: ___ / ___ / 2020



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

28 Em seu caderno, calcule cada produto abaixo, simplificando quando possível.

a) $\frac{9}{20} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{8}$

b) $\frac{3}{8} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{8}$

c) $3 \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$

d) $2 \frac{1}{3} \times 3 \frac{2}{5} \times \frac{119}{15}$

e) $\frac{1}{2} \times \frac{2}{11} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{77}$

f) $\frac{4}{5} \times 0 \times \frac{5}{4} = 0$

g) $\frac{6}{15} \times \frac{5}{2} = 1$

h) $\frac{7}{3} \times \frac{3}{7} = 1$

29 Para a festa de aniversário de seu filho Cauê, Josefa estimou que 60 copos de refrigerante seriam suficientes. Ela sabe que em cada copo cabe $\frac{1}{5}$ do refrigerante de um litro. Quantos litros Josefa deve comprar? **12 litros**



ENRADIO COELHO

30 Sabendo que, com um trator, Lúcio ara $\frac{3}{20}$ de um terreno em um dia, responda:

a) De segunda-feira a sábado, que parte do terreno Lúcio consegue arar? $\frac{9}{10}$

$\frac{1}{10}$ b) Considerando que no domingo ele descanse, quanto faltará arar na semana seguinte?

c) Ele conseguirá terminar na segunda-feira? Justifique sua resposta.

Sim, pois: $\frac{1}{10} = \frac{2}{20}$ e $\frac{2}{20} < \frac{3}{20}$

31 Em casa, a regra é dividir tudo em partes iguais para as 6 pessoas da família. De uma barra de chocolate, comi metade do que cabia a mim, e meus pais comeram cada um a sua parte.



ENRADIO COELHO

Responda às perguntas abaixo com uma fração.

a) Quanto meus pais comeram juntos? $\frac{1}{3}$

b) Quanto eu comi? $\frac{1}{12}$

c) Quanto sobrou? $\frac{7}{12}$

32 Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

a) Calculem $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{5}$ de $\frac{4}{3}$. Entre os dois produtos, qual é o maior? $\frac{8}{15}$; $\frac{8}{15}$ São iguais.

b) Calculem $\frac{3}{7}$ de $\frac{2}{11}$ e $\frac{2}{7}$ de $\frac{3}{11}$. Entre os dois produtos qual é o menor? $\frac{6}{77}$; $\frac{6}{77}$ São iguais.

c) Escolham dois números racionais escritos na forma de fração e multipliquem esses números. Em seguida, troquem entre si apenas os numeradores dessas frações e multipliquem os novos números racionais. Qual dos produtos obtidos é maior? São iguais.

d) Dos números escolhidos no item c, troquem entre si apenas os denominadores das frações e multipliquem os novos números racionais. O produto destes é igual ao produto daqueles? sim

e) Escrevam uma conclusão a respeito dos resultados obtidos nos itens anteriores.



JOSE LUIS JUNIAS

32. e) Espera-se que os alunos concluaem que, na multiplicação de dois números racionais escritos na forma de fração, o produto se mantém quando trocamos entre si os numeradores ou os denominadores.



Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho

Aluno: _____

Turma: _____

Prof. Wallaci Luz

Data: ___ / ___ / 2020



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

40 Efetue as divisões indicadas, simplificando quando possível.

- a) $\frac{5}{8} : \frac{7}{6} = \frac{15}{28}$ c) $\frac{1}{8} : \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ e) $2 : 3 = \frac{1}{2}$ $\frac{4}{7}$
 b) $\frac{9}{5} : \frac{3}{2} = \frac{6}{5}$ d) $3\frac{1}{2} : 7 = \frac{1}{2}$ f) $0 : 3 = \frac{1}{9}$ 0

41 Para realizar um trabalho, dividiu-se um fio de cobre em 3 partes iguais. Cada uma dessas partes foi dividida ao meio, finalmente, cada uma dessas partes foi dividida em 4 partes iguais. Qual é a fração do fio que cada uma dessas partes menores representa? $\frac{1}{24}$ $\frac{42}{35}$ $\frac{6}{35}$

42 Qual é o número que multiplicado por $\frac{7}{3}$ dá $\frac{2}{5}$?

43 Osvaldo resolveu repartir um sítio. Ele ficou com $\frac{1}{3}$ das terras e dividiu a outra parte entre seus quatro filhos. Represente com uma fração a parte do sítio que cada filho de Osvaldo recebeu. $\frac{1}{6}$

44 Comprei um tablet. Dei de entrada $\frac{2}{5}$ do valor e dividi o restante em 6 prestações iguais. Represente com uma fração a parte do valor do tablet que deverei pagar em cada prestação. $\frac{1}{10}$

45 Para fazer um creme de baunilha para 4 pessoas, são necessários os seguintes ingredientes:

- $\frac{3}{4}$ de litro de leite; $\frac{3}{8}$
- 2 colheres das de sopa de açúcar; 1
- $\frac{3}{2}$ colheres das de sopa de amido de milho; $\frac{3}{4}$
- 2 gemas; 1
- $\frac{1}{3}$ de colher das de sopa de baunilha. $\frac{1}{6}$

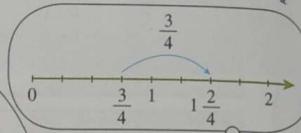
Faça a adaptação dessa receita para 2 pessoas.

46 Do dinheiro que Vagner tinha depositado em uma conta bancária, ele retirou $\frac{3}{8}$ para comprar uma coleção de livros e $\frac{3}{5}$ para uma bicicleta. Restaram-lhe ainda 20 reais.

- a) Quanto Vagner tinha na conta? 800 reais
 b) Quanto ele pagou pela coleção de livros? 300 reais

47 Para calcular mentalmente $2 \times \frac{3}{4}$ e $2 : \frac{1}{4}$, Tom imagina "saltos" em uma reta numérica.

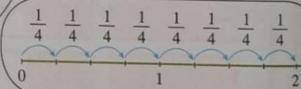
- Para calcular $2 \times \frac{3}{4}$.



Sei que $2 \times \frac{3}{4}$ é o mesmo que $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$. Então, penso em duas unidades da reta numérica dividida em oito partes iguais. Na reta, localizo $\frac{3}{4}$ e dou um salto de $\frac{3}{4}$ no sentido crescente, chegando a $\frac{6}{4}$, que também pode ser escrito como $1\frac{2}{4}$.



- Para $2 : \frac{1}{4}$.



Penso em duas unidades da reta numérica dividida em quartos. Na reta, dou saltos de $\frac{1}{4}$ no sentido crescente, até chegar ao 2. Verifico que $\frac{1}{4}$ cabe 8 vezes em 2. Portanto, $2 : \frac{1}{4} = 8$.



Calcule mentalmente as operações abaixo.

- a) $3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ c) $5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ e) $2 : \frac{1}{3} = 6$
 b) $2 \times \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$ d) $3 : \frac{1}{5} = 15$ f) $\frac{2}{3} : 4 = \frac{1}{6}$

APÊNDICE F

Plano de Aula 5

F.1 Plano de Aula 5

 PROFMAT	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho	Turma: _____
	Aluno: _____	Data: ____ / ____ / 2020
	Prof. Wallaci Luz	



Plano de Aula

I Plano de Aula 5

II Dados de Identificação

Escola: COLÉGIO ESTADUAL NICOLAO BASTOS FILHO

Professor (a): WALLACI ANTERO LUZ DA SILVA

Disciplina: MATEMÁTICA

Série: 7º ano Turma: Período: Uma semana

III Tema Correção da Avaliação Diagnóstica.

IV Objetivos

Objetivo geral Identificar os erros e acertos em operações com frações.

Objetivos específicos

Analisar os erros e os acertos em operações com frações.

Estruturar as possíveis melhorias e correções.

V Conteúdo Soma, subtração, multiplicação e divisão de frações.

VI Desenvolvimento do tema

Aplicar a atividade avaliativa.

Fazer a correção em conjunto com os estudantes no formato de debate, permitindo que os mesmos externem opiniões e desenvolvam as soluções para a turma.

VII Recursos didáticos BlackBoardapp(aplicativo de lousa virtual), Livro didático, Whatsapp, Google Meet e Plataforma Google.

VIII Avaliação

A avaliação será baseada em observações, comentários dos estudantes e nas resoluções de questões.

XIX Bibliografia

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011. (6º ao 9º ano).

APÊNDICE G

Plano de Aula 6

G.1 Plano de Aula 6

 PROFMAT	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho	Turma: _____
	Aluno: _____	Data: ____ / ____ / 2020
	Prof. Wallaci Luz	



Plano de Aula

I Plano de Aula 6

II Dados de Identificação

Escola: COLÉGIO ESTADUAL NICOLAO BASTOS FILHO

Professor (a): WALLACI ANTERO LUZ DA SILVA

Disciplina: MATEMÁTICA

Série: 7º ano

Turma:

Período: Uma semana

III Tema

Avaliação Final sobre Operações com Frações

IV Objetivos

Objetivo geral Interiorizar as operações com frações.

Objetivos específicos

Analisar uma questão de operações com frações.

Estimar o plano de ação para operar as frações.

Aplicar as operações fundamentais com frações.

V Conteúdo

Soma, subtração, multiplicação e divisão de frações.

VI Desenvolvimento do tema

Aplicar a avaliação final para analisar o passo-a-passo das resoluções dos estudantes.

VII Recursos didáticos

BlackBoardapp(aplicativo de lousa virtual), Livro didático, Whatsapp, Google Meet e Plataforma Google.

VIII Avaliação

A avaliação será baseada em observações, comentários dos estudantes e nas resoluções de questões.

XIX Bibliografia

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011. (6º ao 9º ano)

APÊNDICE H

Avaliação Final

H.1 Avaliação Final

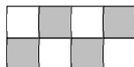
	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho	Turma: _____	
	Aluno: _____	Data: ____ / ____ / 2020	
	Prof. Wallaci Luz		

Avaliação Final

Tema: NÚMEROS RACIONAIS NO FORMATO FRACIONÁRIO

1) Determine o valor numérico de cada fração e compare-as utilizando os sinais >(maior que), < (menor que) ou =(igual).

Fração 1



Fração 2



2) João é um pedreiro que está construindo um pequeno muro. No primeiro dia ele construiu $\frac{1}{7}$ do muro, no segundo dia ele construiu $\frac{3}{7}$ do muro. Qual fração do muro foi construída nesses dois dias? Se ele deseja acabar a obra do muro em três dias, qual deve ser a fração construída no terceiro dia?

3) Paula e sua amiga Júlia fizeram um bolo e o dividiram em 64 fatias iguais. Na hora de saborear o bolo, Paula comeu $\frac{2}{16}$ e Júlia comeu $\frac{3}{8}$. Quantas fatias cada uma comeu?

4) Um cientista retirou uma dose de um experimento equivalente a $\frac{1}{200}$ de um barril cheio desse experimento. Em um dia em que o barril estava com $\frac{2}{20}$ de sua capacidade total, determine quantas doses desse experimento podemos retirar do barril nesse dia?

APÊNDICE I

Plano de Aula 7

I.1 Plano de Aula 7

 PROFMAT	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho	Turma: _____
	Aluno: _____	Data: ____ / ____ / 2020
	Prof. Wallaci Luz	



Plano de Aula

I Plano de Aula 7

II Dados de Identificação

Escola: COLÉGIO ESTADUAL NICOLAO BASTOS FILHO

Professor (a): WALLACI ANTERO LUZ DA SILVA

Disciplina: MATEMÁTICA

Série: 7º ano Turma: Período: Uma semana.

III Tema Correção da Avaliação Final

IV Objetivos

Objetivo geral Identificar os erros e acertos em operações com frações

Objetivos específicos

Analisar os erros e os acertos em operações com frações.

Estruturar as possíveis melhorias e correções.

Descrever todas as etapas anteriores verificando:

- A existência de erros.
- Maneiras diferentes de se resolver.
- Se podemos utilizar uma solução em outro tipo de problema.

V Conteúdo Soma, subtração, multiplicação e divisão de frações.

VI Desenvolvimento do tema

Fazer a correção em conjunto com os estudantes no formato de debate, permitindo que os mesmos externem opiniões e desenvolvam as soluções para a turma.

VII Recursos didáticos BlackBoardapp(aplicativo de lousa virtual), Livro didático, Whatsapp, Google Meet e Plataforma Google.

VIII Avaliação

A avaliação será baseada em observações, comentários dos estudantes e nas resoluções de questões.

XIX Bibliografia

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011. (6º ao 9º ano)

APÊNDICE J

Sequência Didática

J.1 Sequência Didática

 PROFMAT	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho	Turma: _____	 UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
	Aluno: _____ Prof. Wallaci Luz	Data: ____ / ____ / 2020	

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Escola: COLÉGIO ESTADUAL NICOLAO BASTOS FILHO

Professor (a): WALLACI ANTERO LUZ DA SILVA

Disciplina: MATEMÁTICA

Série/Ano: 7º ano

▪ **Tema:** Frações

▪ **Conteúdos trabalhados:** Operações com números racionais no formato fracionário.

▪ **Habilidades (BNCC)**

(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.

(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.

(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.

(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.

(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

▪ **Tempo da Sequência Didática** Sete aulas de 50 minutos (350 minutos)

▪ **Materiais Necessários para a sequência didática**

BlackBoardapp (aplicativo de lousa virtual), Livro didático, Whatsapp, Google Meet e Plataforma Google.

AULA 1

	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho		
	Aluno: _____		Turma: _____
	Prof. Wallaci Luz		Data: ___ / ___ / 2020

▪ Organização da turma

Individual pelo whatsapp e plataforma Google.

Em times por meio de videoconferência.

Em debate com todos por meio de videoconferência através do Google Meet.

▪ Introdução

Conversa inicial com os estudantes para esclarecer os objetivos das aulas.

▪ Desenvolvimento

Aplicar um pré-teste para analisar o passo-a-passo das resoluções dos estudantes.

▪ Conclusão

A conclusão da aula será feita com questões de extras para que os estudantes façam sozinhos e com outras para atividades de casa.

▪ Avaliação

Será feito um registro de dúvidas e opiniões dos estudantes. Sugerimos, que a recuperação seja paralela e com aulas e listas extras recheadas de resumos e mapas mentais.

AULA 2**▪ Organização da turma**

Individual pelo whatsapp e plataforma Google.

Em times por meio de videoconferência.

Em debate com todos por meio de videoconferência através do Google Meet.

▪ Introdução

Conversa inicial com os estudantes para esclarecer os objetivos das aulas e recordarmos o conteúdo da aula anterior.

▪ Desenvolvimento

Parte 1

Resolver passo a passo (compreender, planejar, executar e revisar) questões cujo foco seja dividir geometricamente dois inteiros em um número igual de partes para, depois, tomarmos duas frações desses inteiros e compará-las.

Parte 2

Resolver passo a passo (compreender, planejar, executar e revisar) questões cujo foco seja dividir geometricamente dois inteiros em um número diferente de partes para, depois, tomarmos duas frações desses inteiros, uma de cada, e compará-las.

▪ Conclusão

A conclusão da aula será feita com questões de extras para que os estudantes façam sozinhos e com outras para atividades de casa.

 PROFMAT	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho	 UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
	Aluno: _____ Prof. Wallaci Luz	

▪ Avaliação

Será feito um registro de dúvidas e opiniões dos estudantes. Sugerimos, que a recuperação seja paralela e com aulas e listas extras recheadas de resumos e mapas mentais.

AULA 3**▪ Organização da turma**

Individual pelo whatsapp e plataforma Google.

Em times por meio de videoconferência.

Em debate com todos por meio de videoconferência através do Google Meet.

▪ Introdução

Conversa inicial com os estudantes para esclarecer os objetivos das aulas e recordarmos o conteúdo da aula anterior.

▪ Desenvolvimento

Parte 1

Resolver passo a passo (compreender, planejar, executar e revisar) questões de soma e subtração de frações com denominadores iguais.

Parte 2

Resolver passo a passo (compreender, planejar, executar e revisar) questões de soma e subtração de frações com denominadores diferentes.

▪ Conclusão

A conclusão da aula será feita com questões de extras para que os estudantes façam sozinhos e com outras para atividades de casa.

▪ Avaliação

Será feito um registro de dúvidas e opiniões dos estudantes. Sugerimos, que a recuperação seja paralela e com aulas e listas extras recheadas de resumos e mapas mentais.

AULA 4**▪ Organização da turma**

Individual pelo whatsapp e plataforma Google.

Em times por meio de videoconferência.

Em debate com todos por meio de videoconferência por meio do Google Meet.

▪ Introdução

	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho		
	Aluno: _____		Turma: _____
	Prof. Wallaci Luz		Data: ___ / ___ / 2020

Conversa inicial com os estudantes para esclarecer os objetivos das aulas e recordarmos o conteúdo da aula anterior.

▪ **Desenvolvimento**

Parte 1

Resolver passo a passo (compreender, planejar, executar e revisar) questões de multiplicação e divisão de frações com denominadores iguais.

Parte 2

Resolver passo a passo (compreender, planejar, executar e revisar) questões de multiplicação e divisão de frações com denominadores diferentes.

▪ **Conclusão**

A conclusão da aula será feita com questões de extras para que os estudantes façam sozinhos e com outras para atividades de casa.

▪ **Avaliação**

Será feito um registro de dúvidas e opiniões dos estudantes. Sugerimos, que a recuperação seja paralela e com aulas e listas extras recheadas de resumos e mapas mentais.

AULA 5

▪ **Organização da turma**

Individual pelo whatsapp e plataforma Google.

Em times por meio de videoconferência.

Em debate com todos por meio de videoconferência através do Google Meet.

▪ **Introdução**

Conversa inicial com os estudantes para esclarecer os objetivos das aulas e recordarmos o conteúdo da aula anterior.

▪ **Desenvolvimento:**

Aplicar a atividade avaliativa.

Fazer a correção em conjunto com os estudantes no formato de debate, permitindo-lhes que externem opiniões e desenvolvam as soluções para a turma.

▪ **Conclusão**

A conclusão da aula será feita com questões de extras para que os estudantes façam sozinhos e com outras para atividades de casa.

▪ **Avaliação**

Será feito um registro de dúvidas e opiniões dos estudantes. Sugerimos, que a recuperação seja paralela e com aulas e listas extras recheadas de resumos e mapas mentais.

 PROFMAT	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho	Turma: _____	 UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
	Aluno: _____		
Prof. Wallaci Luz			

AULA 6

Organização da turma

Individual pelo whatsapp e plataforma Google.

Em times por meio de videoconferência.

Em debate com todos por meio de videoconferência através do Google Meet.

▪ **Introdução**

Conversa inicial com os estudantes para esclarecer os objetivos das aulas e recordarmos o conteúdo da aula anterior.

▪ **Desenvolvimento**

Aplicar a avaliação final para analisar o passo-a-passo das resoluções dos estudantes.

▪ **Conclusão**

A conclusão da aula será feita com questões de extras para que os estudantes façam sozinhos e com outras para atividades de casa.

▪ **Avaliação**

Será feito um registro de dúvidas e opiniões dos estudantes. Sugerimos, que a recuperação seja paralela e com aulas e listas extras recheadas de resumos e mapas mentais.

AULA 7

▪ **Organização da turma**

Individual pelo whatsapp e plataforma Google.

Em times por meio de videoconferência através do Google Meet.

Em debate com todos por meio de videoconferência.

▪ **Introdução**

Conversa inicial com os estudantes para esclarecer os objetivos das aulas e recordarmos o conteúdo da aula anterior.

▪ **Desenvolvimento**

Fazer a correção em conjunto com os estudantes no formato de debate, permitindo que os mesmos externem opiniões e desenvolvam as soluções para a turma.

▪ **Conclusão**

A conclusão da aula será feita com questões de extras para que os estudantes façam sozinhos e com outras para atividades de casa.

▪ **Avaliação**

Será feito um registro de dúvidas e opiniões dos estudantes.

	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho	
	Aluno: _____ Turma: _____ Prof. Wallaci Luz	

Finalização da Sequência

Analisar os erros e os acertos em operações com frações para estruturar as possíveis melhorias e correções. Descrever todas as etapas anteriores verificando a existência de erros, maneiras diferentes de se resolver e se podemos utilizar uma solução em outro tipo de problema. Sugerimos que a recuperação seja paralela e com aulas e listas extras recheadas de resumos e mapas mentais, mas se necessário sugerimos a recuperação final com estudos que envolvam listas de questões repletas de problemas auxiliares como sugere George Polya.

APÊNDICE K

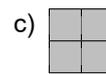
Lista de Questões não contextualizadas

K.1 Lista de Questões não contextualizadas

	Escola: Colégio Estadual Nicolao Bastos Filho Aluno: _____ Turma: _____ Prof. Wallaci Luz Data: ___ / ___ / 2020	
---	--	---

Lista de questões não contextualizadas

1) Escreva qual é a fração representada pela parte colorida em cada figura.



2) Compare as frações utilizando os sinais =(igual), >(maior que) ou <(menor que).



b) $\frac{4}{5} \dots \frac{3}{5}$

c) $\frac{2}{6} \dots \frac{6}{18}$

3) Calcule o valor das somas e subtrações abaixo.

Obs. Os retângulos da letra d possuem as mesmas dimensões.

a) $\frac{2}{7} + \frac{5}{7}$

b) $\frac{3}{5} - \frac{2}{5}$

c) $\frac{7}{9} + \frac{1}{5}$



4) Calcule o valor do produto e do quociente abaixo.

a) $\frac{6}{9} \times \frac{5}{8}$

b) $\frac{5}{7} : \frac{2}{9}$