CAROLINA PEREIRA VAZ MESQUITA

GRAFOS E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae.*

Orientador: Mehran Sabeti

Coorientador: Sérgio Henrique Nogueira

VIÇOSA – MINAS GERAIS
2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federalde Viçosa - Campus Florestal

T
M582g
2021

Mesquita, Carolina Pereira Vaz, 1986-
Grafos e suas aplicações no ensino da matemática [recurso eletrônico] / Carolina Pereira Vaz Mesquita. – Florestal, MG, 2021.
67 f.: il. (algumas color.).

Orientador: Carolina Pereira Vaz Mesquita.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.66-67.

1. Teoria dos Grafos. 2. Matemática. I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. II. Título.

518.4

Bibliotecário(a) responsável: Maria Aparecida Alves de Oliveira 1174

CAROLINA PEREIRA VAZ MESQUITA

GRAFOS E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae.*

APROVADA: 17 de junho de 2021.

Assentimento:

Carolina Pereira Vaz Mesquita

Carolina Pereira Vaz Mesquita
Autora

Mehran Sabeti

Mehran Sabeti
Orientador

Aos meus pais, marido e filha.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus primeiramente, por ter sempre me iluminado, fortalecido, guiado e me amparado nos momentos difíceis e nunca me deixar desistir.

A minha família: meu marido pelo apoio, incentivo e compreensão, a minha mãe pela presença, motivação e incansável incentivo para ampliar meus conhecimentos.

Ao meu orientador, Merhan Sabeti, e coorientador Ségio por seu conhecimento e competência profissional dispensados a mim.

A todos os meus professores, que me incentivaram, apoiaram e estavam sempre prontos a me orientar.

Aos meus colegas de curso, que cada um a sua maneira, contribuíram para eu chegar ao final desse curso.

À banca examinadora, pelas orientações necessárias e importantes para a finalização deste trabalho.

O meu agradecimento final aos meus amigos que de alguma forma de auxiliaram durante, e na conclusão deste curso.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela concessão da bolsa de estudos.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), pela concessão da bolsa de estudos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão da bolsa de estudos.

“O único lugar aonde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário”

(Albert Einstein)

RESUMO

MESQUITA, Carolina Pereira Vaz, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, junho de 2021.**Grafos e suas aplicações no Ensino da Matemática.** Orientador: Merhan Sabeti. Coorientador: Sérgio Henrique Nogueira.

O principal objetivo deste trabalho é mostrar a importância da utilização de grafos no ensino-aprendizado, tanto para o ensino fundamental quanto para o ensino médio. Para tal, é feita uma breve investigação sobre a Teoria dos Grafos, buscando apresentar um pouco da sua história seguido de um aporte teórico introdutório, definindo e exemplificando modelos de grafos e suas aplicações. Por fim, são descritos alguns dos conteúdos em que se pode aplicar a teoria dos grafos na matemática e alguns relatos de atividades aplicadas em sala de aula, mostrando como ele acaba sendo facilitador para a resolução de problemas matemáticos.

Temos como referência para esse trabalho, alguns pesquisadores na área da educação que defendem o uso dos problemas como um caminho para ensinar matemática, tais como, Dante (1998), Onuchic (2007), Zuffi (2007) e a BNCC (2017).

Palavras-chave: Dissertação. Grafos. Matemática.

ABSTRACT

MESQUITA, Carolina Pereira Vaz, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, June, 2021.**Grafos e suas aplicações no Ensino da Matemática.** Adviser: Merhan Sabeti. Co-adviser: Sérgio Henrique Nogueira.

The main objective of this work is to show the importance of using graphs in teaching and learning, both for Elementary and High Hchool. For this propose, a brief investigation on Graph Theory was made, seeking to present a little of its history followed by an introductory theoretical contribution, defining and exemplifying graph models and their applications. Finally, some of the contents in which graph theory can be applied in mathematics are described, as same as some reports of activities applied in the classroom showing how it ends up being a facilitator for solving mathematical problems.

We have as a reference for this work, some researchers in the area of education, who defend the use of problems as a way of teaching mathematics, such as, Dante (1998), Onuchic (2007), Zuffi (2007) and BNCC (2017) .

Palavras-chave: Dissertation. Graphs. Math.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SÚMARIO

1. INTRODUÇÃO

A palavra matemática tem origem grega (mátema) e significa “ciência, conhecimento, ou aprendizado”, em outras palavras, aquilo que pode ser aprendido.

Surgiu há 30 mil anos devido às necessidades básicas do homem primitivo que se utilizava da contagem de ossos, pedras e dedos das mãos para o controle de suas atividades.

Desenvolveu-se na Mesopotâmia, no Egito, na Grécia, na Índia e no Oriente Médio e intensificou-se na Europa a partir da Renascença, época de novas descobertas científicas.

Na sociedade atual, a matemática cada vez mais se caracteriza como ciência de significativa importância para o desenvolvimento da civilização. Tanto para descrever, modelar e resolver problemas nas diversas áreas da atividade humana quanto para a construção do conhecimento e da atitude autônoma dos estudantes.

O conhecimento matemático contextualizado está, atualmente, cada vez mais inserido às práticas vinculadas ao ensino de matemática. Ou seja, é necessário que os alunos estejam envolvidos no processo de ensino-aprendizagem, sejam protagonistas e que a matemática tenha aplicação e se torne significativa para os mesmos.

Sendo assim, a prática pedagógica em sala de aula exige que o professor desenvolva situações de ensino e aprendizagem que proporcionem aos estudantes a capacidade de estabelecer conceitos matemáticos que lhes permitam construir conhecimentos de forma crítica em relação aos conteúdos estudados. Isto é, torna-se necessário que o trabalho docente possibilite a conexão de diferentes temas e conceitos que, efetivamente, colaborem para a estruturação do pensar matemático.

A resolução de problemas faz parte da atividade de todo cidadão em seu dia a dia. Segundo a BNCC, é competência geral na educação básica exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular, resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (2)

A Teoria dos Grafos é um dos ramos da matemática que obteve avanços relativamente recentes e que dão a essa teoria destaques contemporâneos. Sua aplicação está presente em diversos campos de estudo, como na física com aplicação em resistores, na química com o interesse em moléculas de hidrocarbonetos e níveis de energia, na biologia com foco na cadeia alimentar, na economia com métodos para crescimento populacional, rotas de tráfego aéreo, modelos de menor caminho percorrido, modelos de contagem. Aparece também em tópicos da matemática pura e aplicada, o que demonstra sua importância no ensino e aprendizagem nos dias de hoje.

Nesse sentido, ela se apresenta como um importante tema que a educação básica deve valorizar pois tem sido um dos mais simples e poderosos instrumentos matemáticos utilizados para construção de modelos e resolução de problemas. Como exemplo, podemos responder à seguinte pergunta utilizando a teoria dos grafos. Quantas linhas de transmissão precisam falhar, no mínimo, para que soframos um apagão?

Segundo Spinillo: (23)

> *Formular problemas é um desafio para o aluno, pois além da pouca familiaridade com esta atividade, tem que lidar com outras competências que vão além do conhecimento matemático, como, os aspectos linguísticos; especificamente, a produção de um texto que possui uma estrutura definida por meio da qual são apresentadas as informações matemáticas, suas relações e aquilo que é buscado. (2017, p. 932)*

O presente trabalho apresenta um breve relato histórico, definições essenciais para o estudo da teoria dos grafos, algumas de suas aplicações ao se estudar a matemática no ensino fundamental e médio e, para finalizar quatro problemas que foram propostos em sala de aula objetivando destacar a importância da sua utilização nas aulas do professor de matemática de maneira a atribuir novas capacidades e desenvolver o raciocínio matemático simples, com fácil entendimento e que busque o interesse e participação de todos os alunos.

Os Grafos surgiram em 1736, através de um enigma que intrigava os moradores de Königsberg, cidade fundada em 1255 que foi capital e centro cultural e econômico da Prússia de meados do século XV a meados do século XX. Leonhard Euler foi quem desvendou o enigma em questão, sendo então dado o nome euleriano em sua homenagem. Iremos analisar algumas classes de grafos a partir do terceiro capítulo desse trabalho. Vamos conhecer o problema enfrentado por Euler no próximo capítulo e exemplificar, de forma didática de fácil assimilação e com grande capacidade lúdica e inovadora a teoria dos grafos que pode ser trabalhada no processo de ensino-aprendizagem matemática. (18)

2. O SURGIMENTO DA TEORIA DOS GRAFOS NA HISTÓRIA

Neste capítulo vamos entender melhor a história por trás da Teoria dos Grafos. Os motivos pelos quais foi preciso uma melhor aplicação para a resolução de um problema encontrado em uma cidade. (24)

2.1. CONTEXTO HISTÓRICO

Localizada ao norte da Europa, próxima à costa do Mar Báltico, Königsberg, que hoje é chamada de Kaliningrado, foi uma importante cidade da Rússia. A cidade possuía duas ilhas cortadas pelo Rio Pregel e, na época, seis pontes as ligavam às margens e outra fazia a ligação das duas ilhas entre si.

Figura 2.1: Ponte Schmiedebrücke.
Fonte: https://pt.wikipedia.org

Por volta de 1735, os moradores de Königsberg se desafiaram com o seguinte problema: como seria possível fazer um passeio a pé pela cidade de forma a passar uma única vez por cada uma das sete pontes e retornar ao ponto de partida?

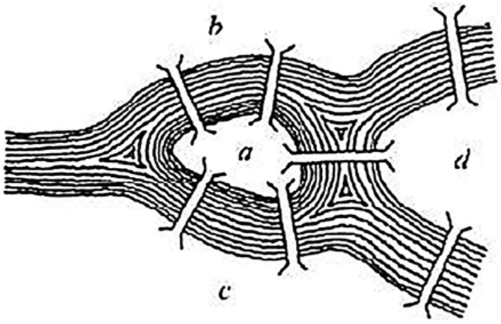


Figura 2.2: Representação das Sete Pontes
Fonte: MARCH, Lionel, STEADMAN, Philip. The Geometry of Enviornment. London: Methuen Co, 1971. p. 242

Na época, foi o matemático Leonhard Euler (Figura 2.5) quem decifrou o enigma e criou, possivelmente, o primeiro grafo da história. Ele usou um raciocínio muito simples, transformando os caminhos em linhas e suas intersecções em pontos.

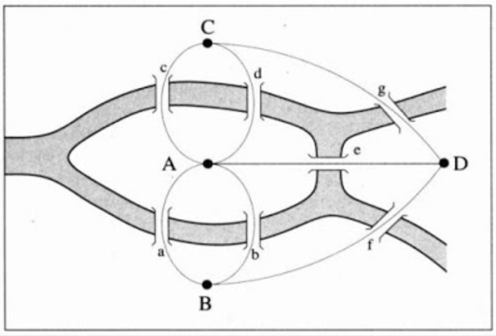


Figura 2.3: Pontos e Linhas Criados por Euler
Fonte: http://www.autoentusiastasclassic.com.br.

Euler percebeu que era preciso um caminho para entrar e outro para sair. Isto é, só seria possível atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte se houvesse exatamente zero ou dois pontos de onde saísse um número ímpar de caminhos, ou seja, de cada ponto deveria haver um número par de caminhos. Os dois pontos com caminhos ímpares referem-se ao início e ao final do percurso, pois estes não precisam de um para entrar e um para sair, respectivamente. Se não houver pontos com número ímpar de caminhos, pode-se (e deve-se) iniciar e terminar o trajeto no mesmo ponto, podendo esse ser qualquer ponto do grafo. Isso não é possível quando temos dois pontos com números ímpares de caminhos, sendo obrigatoriamente um o início e outro o fim.

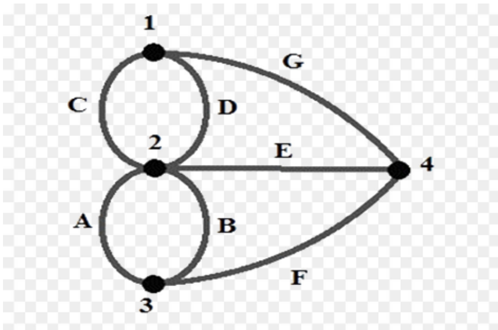


Figura 2.4: Grafo associado às pontes de Konigsberg Fonte:
https://br.pinterest.com/pin/585608757770220418

2.2. LEONARD EULER

Leonhard Euler (1707-1783) foi um importante matemático e cientista suíço, considerado um dos maiores estudiosos da matemática de todos os tempos. Sua contribuição teve como um dos pilares a Introdução à Análise dos Infinitos, obra que constitui um dos fundamentos da matemática moderna. (24)

Figura 2.5: Leonhard Euler, quadro a óleo por Johann Georg Brucker Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/LeonhardEuler

Filho de Paul Euler e Margaret Brucker, Leonhard Euler nasceu na Basileia, uma cidade da Suíça, no dia 15 de abril de 1707. Com um ano de idade mudou-se com a família para a cidade de Riehen. Lá passou grande parte de sua infância. Foi educado por seu pai que lhe ensinou os primeiros conceitos da matemática.

Ainda em sua infância, aos sete anos, iniciou seu estudo com um professor particular e começou a desenvolver sua leitura a partir de textos diversos. Já com 13 anos, retornou para a sua cidade natal a fim de estudar e se preparar para o curso de teologia na universidade local, desejo de sua família.

Embora muito religioso, ele não mostrou muita empolgação com estudo de teologia e nas horas vagas se dedicava a estudar matemática com a ajuda de Johann Bernoulli, que descobriu seu talento. Euler ingressou no curso de matemática que foi concluído em 1726. (8).

Por volta de 1730, Leonhard Euler passa a ocupar a cadeira de Filosofia Natural na Academia de Ciências de São Petersburgo. Três anos mais tarde, com a saída de Daniel Bernoulli (1700-1782), ele tornou-se o principal matemático da Academia, que, nessa época, tinha lançado uma revista de matemática, chamada de Commentarii Academia e Scientiarum Imperialis Petropolitanae, que teve suas páginas abastecidas com as constribuições de Euler durante muitos anos.

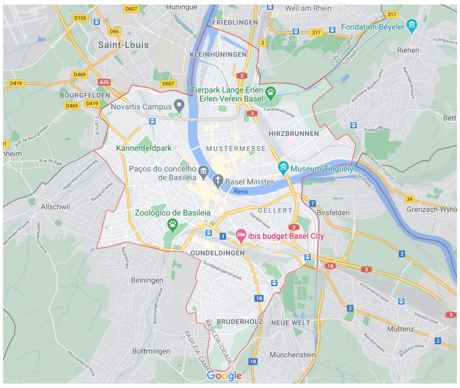


Figura 2.6: Basileia
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki

Embora muito religioso, ele não mostrou muita empolgação com estudo de teologia e nas horas vagas se dedicava a estudar matemática com a ajuda de Johann Bernoulli, que descobriu seu talento. Euler ingressou no curso de matemática que foi concluído em 1726. (8)

Por volta de 1730, Leonhard Euler passa a ocupar a cadeira de Filosofia Natural na Academia de Ciências de São Petersburgo. Três anos mais tarde, com a saída de Daniel Bernoulli (1700-1782), ele tornou-se o principal matemático da Academia, que, nessa época, tinha lançado uma revista de matemática, chamada de Commentarii Academia e Scientiarum Imperialis Petropolitanae, que teve suas páginas abastecidas com as contribuições de Euler durante muitos anos.

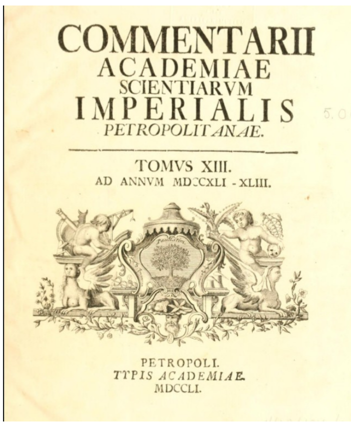


Figura 2.7: Revista: Commentarii Academia e Scientiarum Imperialis .
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki

Seu destaque foi tão grande que, após tomar conhecimento sobre a notoriedade de Euler, o prefeito de uma cidade próxima a Königsberg enviou uma carta, datada em 09 de março de 1736, ao matemático suíço em nome de Heinrich Kiihn, um professor de matemática local. As mensagens trocadas inicialmente não foram recuperadas, mas indica que eles haviam discutido o problema.

Após receber essa carta do prefeito, Euler escreveu a Giovanni Jacopo Marinoni (1676-1755), um matemático italiano que morava em Viena. Nesta carta, o matemático suíço apresentava o problema das Sete Pontes de Königsberg e alguns comentários com ele simulando a cidade russa a partir de um modelo matemático que hoje é chamado de grafo. Durante a sua elaboração, ele representou as porções de terra (ilhas e margens) por pontos e as pontes por linhas ligando esses pontos como mostrado anteriormente.

Euler apresenta uma extensa produção científica. Chegava a publicar, em média, um trabalho por semana. Ele é o responsável pela produção da mais extensa obra matemática de todos os tempos, em todas as áreas da matemática pura e aplicada. Álgebra, geometria, cálculo infinitesimal, teoria dos números, mecânica racional, mecânica celeste, geodésia, cartografia, balística e hidrodinâmica são alguns dos domínios científicos nos quais Euler deixou a sua contribuição.

Em Teoria dos Números, Euler é o maior nome que surgiu logo depois de Fermat. É o criador do cálculo das variações (funções que dependem de outras funções), da mecânica analítica e da geometria diferencial, que estuda as curvas e superfícies com os métodos do cálculo. Além de toda sua produção em pesquisa científica, escreveu vários livros textos, alguns dos quais traduzidos e publicados até os dias de hoje. (8)

2.3. O PROBLEMA DAS QUATRO CORES

O Problema das Quatro Cores é o responsável por muito do que se conhece hoje em relação à teoria de grafos. A tentativa de resolvê-lo possibilitou o desenvolvimento de vários ramos dessa teoria. Ele se refere à determinação do número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa, de países reais ou imaginários, de forma que países com fronteiras tenham cores diferentes. (19)

Em 1852, o matemático inglês Francis Guthrie (1831-1899) estava pintando um mapa dos condados da Inglaterra. Um dos critérios para pintá-lo, era pintar com cores diferentes os condados vizinhos. Durante a sua realização, ele notou que era possível colorir aquele mapa, utilizando apenas quatro cores. Curioso, tentou fazer o mesmo procedimento com outros mapas e conseguiu o mesmo resultado, surgindo assim o conhecido problema das quatro cores:

“Todo mapa (plano ou sobre uma superfície esférica) pode ser pintado com apenas quatro cores?”

Figura 2.8: Mapa dos Condados da Inglaterra
Fonte: http://gwydir.demon.co.uk/jo/maps/uktowns.gif

Francis Guthrie tentou provar que a resposta ao Problema das Quatro Cores era “sim”, porém não conseguiu elaborar nenhuma demonstração matemática para tal. Passou o problema para seu irmão Frederick Guthrie (1883-1866), que também não demonstrou que a conjectura era realmente verdadeira. Por fim, este passou o problema para seu professor Augustus De Morgan (1806-1871) que se mostrou interessado em resolvê-lo (1)

Durante seus estudos, ele observou que, em alguns mapas, existem quatro “países” que fazem fronteira com os outros três e que seria impossível pintá-los somente com três cores, respeitando os critérios de variação entre países vizinhos. Isso pode ser observado no mapa da América do Sul, em que os quatro países que são Brasil, Paraguai, Argentina
e Bolívia tem a propriedadede que cada um deles faz fronteira com os outros três. (6)

Figura 2.9: Mapa América do Sul
Fonte: O Autor.

A partir disso, conjecturou: tomando cinco “países” quaisquer de um mapa, pelo menos dois deles não o são vizinhos entre si. Ou seja, Augustus De Morgan supos que a conjectura de Francis Guthrie era verdadeira, pois caso exista algum mapa contendo um conjunto de cinco países, em que cada um deles faz fronteira com os outros quatro, então seriam necessárias pelo menos cinco cores para colori-lo.

O problema se tornou amplamente conhecido 26 anos depois de ter sido formulado por Francis Guthrie, quando, em 1878, um artigo que continha o problema foi publicado no periódico *Nature pela London Mathematical Society*. Tal divulgação trouxe frutos rapidamente, tanto que, no ano seguinte(1879) Alfred Bray Kempe (1849-1922), publicou uma demonstração de que quatro cores eram suficientes para colorir qualquer mapa. Esta foi analisada por diversos matemáticos, que a deferiram, pondo fim às investigações sobre o Problema das Quatro Cores.

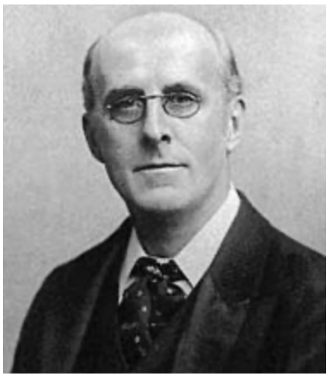


Figura 2.10: Alfred Bray Kempe
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/AlfredKempe

Porém, onze anos depois (1890), o Problema das Quatro Cores foi contestado por Percy John Heawood (1861-1955), que encontrou um erro em sua demonstração. Ele criou um mapa que possui uma face com cinco vizinhos, no qual, ao aplicar o processo descrito, faz com que algumas faces vizinhas sejam coloridas com a mesma cor, o que viola a lei inicial de que países vizinhos só podem ser coloridos com cores distintas. (20}

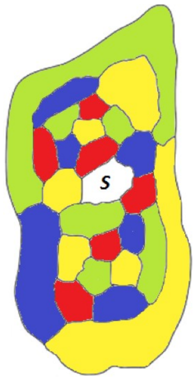


Figura 2.11: Mapa criado por Heawood como contraprova de Kempe
Fonte: FLOOD RICE WILSON,2011.

Em 1922, foi provado que todo mapa com 25 regiões ou menos pode ser colorido com quatro cores. Em 1928, esse limite passou para 28 regiões. Durante vários outros anos esse limite sofreu variação até 1970 ser novamente alterado para 96 regiões.

Finalmente, em 1976, a partir de um computador IBM 360, Kenneth Appel e Wolfgang Haken conseguiram apresentar uma demonstração do Teorema das Quatro Cores. Esta inclui mais de mil horas do uso de computadores de alta velocidade e era longa demais para ser verificada à mão, havendo ainda a possibilidade de os computadores terem cometido algum erro de difícil detecção.

Em Agosto de 1994, no Congresso Internacional de Matemática, em Zurique, Paul D. Seymour apresentou uma prova simplificada do Teorema das Quatro Cores, cuja formulação foi o resultado de trabalho conjunto com Neil Robertson, Daniel P. Sanders e Robin Thomas. Eles também não conseguiram dispensar o uso do computador. Contudo foram capazes de reduzir a quantidade de cálculos para um nível bastante mais tolerável.

3. TEORIA DOS GRAFOS

De maneira geral, grafo é um modelo matemático usado para representar uma coleção de objetos chamados vértices, que são ligados aos pares por outra coleção de objetos chamados arestas. São estruturas interessantes que contam com diversas aplicações em diferentes áreas da ciência, tais como geografia, química, educação, engenharia, etc.

Iremos apresentar neste capítulo as definições dos grafos, vértices, arestas, algumas aplicações e modelos diferentes de grafos. Além de desenvolver a ideia dos grafos tipo árvore e os grafos eulerianos. (3)

3.1. DEFINIÇÕES BÁSICAS

Definição 3.1 (Grafo): Grafo é uma estrutura matemática composta de vértices
(ou nós) e arestas (ou traços) representados por G(V, A), em que V é o conjunto não vazio de vértices e A o conjunto de arestas.

Na figura, temos os conjuntos de vértices V = {v1, v2, v3, v4} e as arestas
A = {e1, e2, e3, e4} .

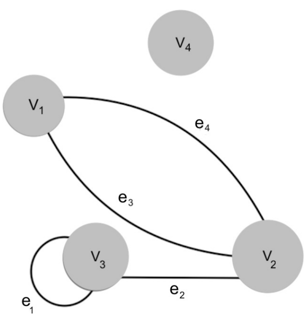


Figura 3.1: Representação Gráfica de um Grafo
Fonte: O Autor

Definição 3.2 (Vértices adjacentes): Dados dois vértices de um grafo, dizemos que eles são adjacentes (ou vizinhos) se existir uma aresta entre eles. Na figura, temos os vértices v_1, v_2 adjacentes.

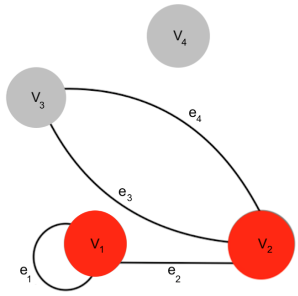


Figura 3.2: Vértices Adjacentes
Fonte: O Autor

Definição 3.3 (Arestas adjacentes): Dadas duas arestas de um grafo, dizemos que elas são adjacentes se tiverem um vértice em comum. Na figura, temos as arestas e_2 e e_3 adjacentes.

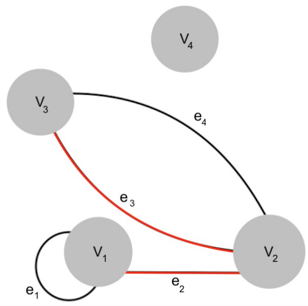


Figura 3.3: Arestas Adjacentes
Fonte: O Autor

Definição 3.4 (Vértices incidentes): Dados dois vértices de um grafo, dizemos que eles são incidentes em uma aresta se eles são extremos dela. Na Figura, v_2 e v_3 são vértices incidentes da aresta e_3 (ou e_4).

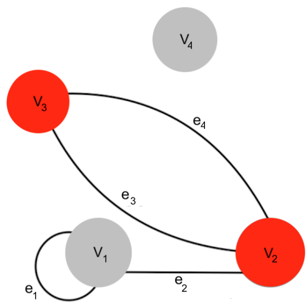


Figura 3.4: Vértices incidentes
Fonte: O Autor

Definição 3.5 (Arestas incidentes): Arestas incidentes são arestas que incidem em um vértice. Na Figura, e_2, e_3 e e_4 são arestas incidentes ao vértice v_2.

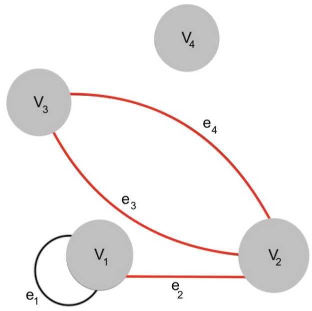


Figura 3.5: Arestas Incidentes
Fonte: O Autor

Definição 3.6 (Grau de um vértice): O grau de um vértice g(v) é o número de arestas que incidem nesse vértice. Na Figura 3.1, temos que: $g(v_1) = 3$, $g(v_2) = 3$, $g(v_3) = 2$ e $g(v_4) = 0$.

Definição 3.7 (Vértices isolados): Vértice isolado é todo vértice de grau zero. Na Figura 3.6 temos que o vértice v_4 é um exemplo de vértice isolado.

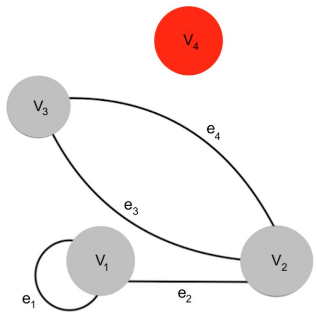


Figura 3.6: Vértice Isolado
Fonte: O Autor

Definição 3.8 (Grau de um grafo): O grau de um grafo G(V, A), é o máximo entre os graus de seus vértices, ou seja, g(G) = $max\ \{g(v_1), g(v_2), ..., g(v_k)\}$. Observe que o grau do grafo representado na Figura 3.1 é 3.

Definição 3.9 (Passeio entre vértices): Um passeio entre os vértices v_i e v_j de um grafo é uma sequência alternada de vértices e arestas com início v_i e fim em v_j. É importante ressaltar que tanto as arestas quanto os vértices podem ou não ser distintos. Se os vértices de origem e destino forem o mesmo, então o passeio é chamado de passeio fechado. Na Figura 3.7, temos que $v_1, e_1, v_1, e_2, v_2, e_4, v_4, e_6, v_3, e_3, v_2, e_5, v_5, e_9, v_6, e_8, v_4, e_7, v_5, e_{10}, v_6$ é um exemplo de passeio entre os vértices v_1 e v_6.

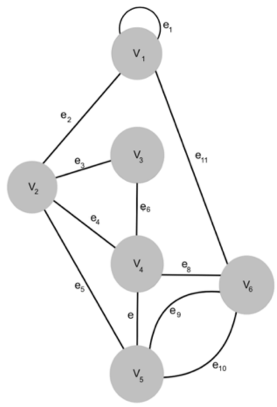


Figura 3.7: Passeio entre os vértices
Fonte: O Autor

Definição 3.10 (Caminhos): Um caminho é um passeio em que tanto as arestas quanto os vértices são distintos. Na Figura 3.8, temos que v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_6, v_4, e_7, v_5, e_9, v_6 é um exemplo de caminho entre os vértices v_1 e v_6.

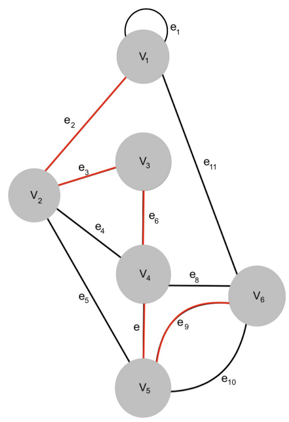


Figura 3.8: Caminhos
Fonte: O Autor

Definição 3.11 (Ciclos): Ciclo é um caminho em que o vértice de origem e o de destino são o mesmo. Na Figura 3.9, temos que v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_6, v_4, e_7, v_5, e_9, v_6, $e_1$1, v_1 é um exemplo de ciclo.

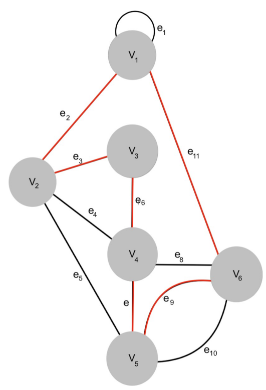


Figura 3.9: Ciclo
Fonte: O Autor

Definição 3.12 (Grafo trivial): Grafo trivial é um grafo com um único vértice e não tem arestas.

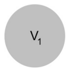


Figura 3.10: Grafo Trivial
Fonte: O Autor

Definição 3.13 (Grafo Simples): Grafos simples são grafos que não possuem arestas em paralelo, nem laços, ou seja, cada par de vértices é conectado por arestas únicas e nenhum vértice se conecta a si mesmo por uma aresta.

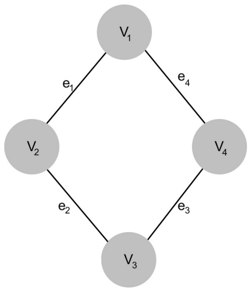


Figura 3.11: Grafo Simples
Fonte: O Autor

Definição 3.14 (Grafo Completo): Grafo Completo é aquele em que todos os vértices conectam-se uns aos outros.

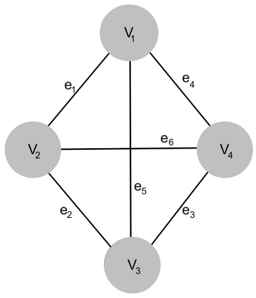


Figura 3.12: Grafo Completo
Fonte: O Autor

Definição 3.15 (Grafo regular): Grafo regular é aquele em que todos os seus vértices possuem o mesmo grau.

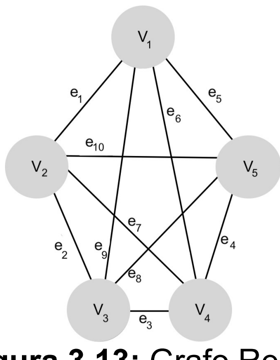


Figura 3.13: Grafo Regular
Fonte: O Autor

Definição 3.16 (Subgrafo Induzido): Um grafo H é dito subgrafo induzido de um grafo G quando removemos de G um vértice e todas as arestas incidentes nele.

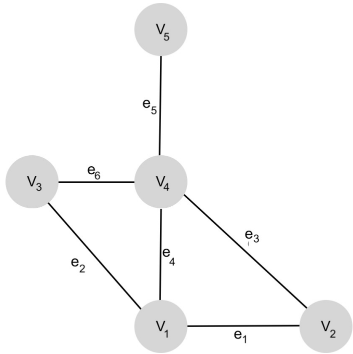


Figura 3.14: Grafo G
Fonte: O Autor

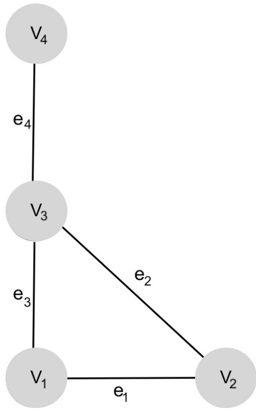


Figura 3.15: Grafo H
Fonte: O Autor

Definição 3.17 (Grafos Conexos): Um grafo G é dito conexo se dados dois vértices quaisquer *u,*v existe um caminho entre *u* e *v* em G.

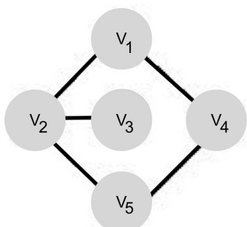


Figura 3.16: Grafo Conexo
Fonte: O Autor

Definição 3.18 (Grafos Desconexos): Um grafo é dito desconexo se não é conexo, isto é, existe pelo menos um par de vértices que não está ligado por nenhum caminho.

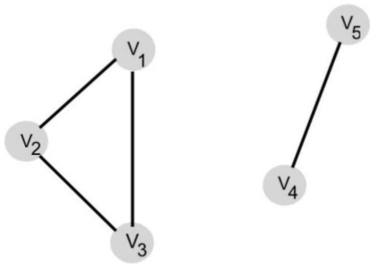


Figura 3.17: Grafo Desconexo
Fonte: O Autor

3.2. CLASSES DE GRAFOS

Nesta seção vamos entender um pouco sobre algumas das classes de grafos existentes, suas aplicações e usabilidade. Elas são importantes na medida em que solucionam problemas complexos ao serem restringidos para uma classe particular. Diante disso, podemos defini-las como um conjunto de grafos que tem alguma propriedade em comum.

3.2.1. GRAFOS BIPARTIDOS

Definição 3.21 (Grafos Bipartidos): Grafo bipartido é um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos X e Y tais que toda aresta conecta um vértice em X a um vértice em Y. (11)

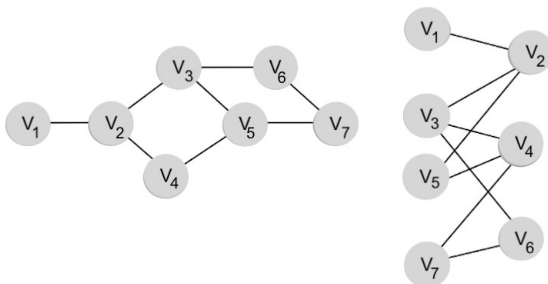


Figura 3.18: Exemplo Grafos Bipartidos
Fonte: O Autor

Teorema 3.2.1: Um grafo é bipartido se, e somente se, não contém ciclos de comprimento ímpar.

Demonstração: Seja G um grafo bipartido, iremos mostrar que este não contém ciclos ímpares. Sejam X e Y as duas partições de G. Todas as arestas de G não são adjacentes a vértice de mesmo conjunto, ou seja, cada aresta tem uma extremidade em X e a outra em Y, isso decorre da definição de bipartido. Suponha que um ciclo contenha o vértice v_i (um vértice qualquer de G) em uma das duas partições, para retornarmos a esse vértice teríamos que ir na outra partição e voltar um número de par de vezes.

Reciprocamente, seja G um grafo onde todo ciclo é de comprimento par. Seja um vértice v_i de G tal que $v_i \in X$ e todos os outros vértices que estão a uma distância par de v_i também são elementos da partição X, os outros vértices formam o conjunto Y. Se não houvesse aresta ligando vértice da mesma partição, G seria bipartido. Suponha que exista tal aresta com extremidade *l* e *t*, onde $l, t \in X$. Temos um caminho par entre *l* e *t* e acrescentando mais uma aresta teremos um ciclo de comprimento ímpar, o que contradiz a hipótese.

Portanto não pode existir outra aresta entre qualquer par de vértice da mesma partição e assim concluímos que o grafo G é bipartido.

□

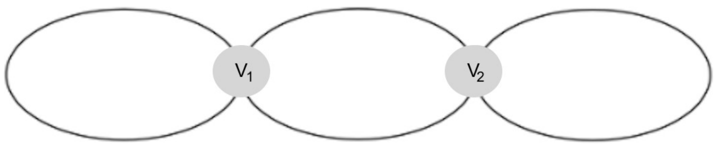
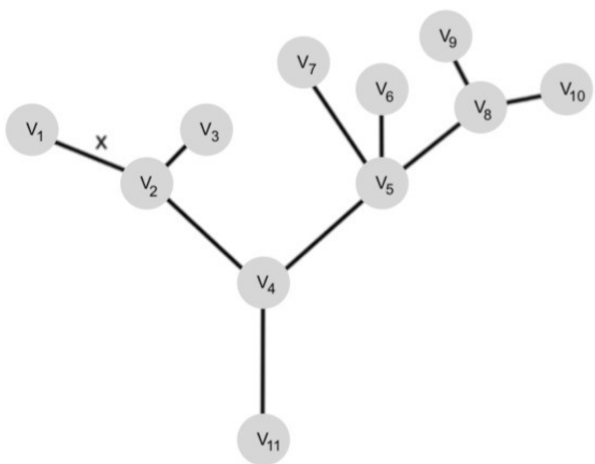


Figura 3.19: Ciclos
Fonte: O Autor

3.2.2. ÁRVORES

Definição 3.22 (Árvore): Uma árvore é um grafo conexo que não possui ciclos.



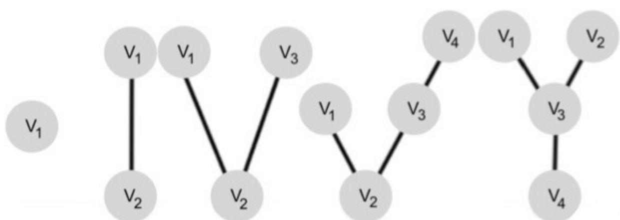


Figura 3.20: Alguns exemplos de Árvores
Fonte: O Autor

Um exemplo bem comum no nosso cotidiano é a árvore genealógica. Podemos observar na figura 3.21 um grafo onde as pessoas são os vértices e as arestas são as relações de parentesco em primeiro grau (mãe, (pai), filho(a)). (21)

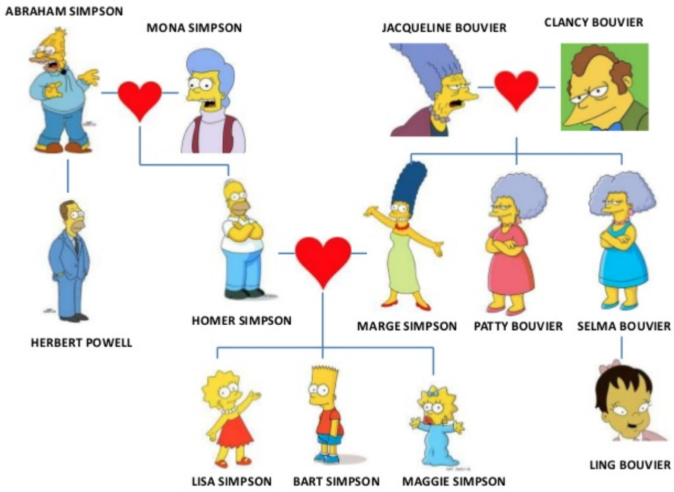


Figura 3.21: Árvore Genealógica
Fonte: RANGEL, Socorro

Teorema 3.2.2: Um grafo G é uma árvore se, e somente se, existir um e apenas um caminho entre cada par de vértices.

Demonstração: Se G é uma árvore, então, por definição, G é conexo e sem ciclos. Como G é conexo, então existe um caminho entre cada par de vértices.

Precisamos mostrar que este caminho é único. Vamos supor que existam dois caminhos distintos entre um par de vértices. Ora, se existem dois caminhos distintos entre um par de vértices então a união destes caminhos contém um ciclo. Mas por hipótese, o grafo não possui ciclos, portanto existe apenas um caminho entre cada par de vértices.

Reciprocamente vamos mostrar que se existe um, e apenas um, caminho entre cada par de vértices, então G é uma árvore. Como existe um caminho entre cada par de vértices, temos que G é conexo. Vamos supor que G contenha um ciclo. A existência de um ciclo no grafo implica que existe pelo menos um par de vértices a, b tais que existem dois caminhos distintos entre a e b. Mas por hipótese existe um e apenas um caminho entre cada par de vértices e, portanto, o grafo não tem ciclos.

Um resultado importante relaciona o número de vértices *v* com o número de arestas *a* é o teorema a seguir. (3)

Teorema 3.2.3: Se G é uma árvore, então $a = v - 1$

3.2.3. GRAFOS EULERIANOS

Após Leonard Euler ter descoberto a solução para o problema da cidade de Königsberg, foi dado o seu nome a um tipo de grafo usado por ele. (15) O grafo euleriano.

Definição 3.24 (Grafo Euleriano): Um grafo G é dito ser euleriano se há um ciclo em G que contenha todas as suas arestas. Este ciclo é dito ser um ciclo euleriano. O grafo da figura 3.22, por exemplo, é euleriano já que ele contém o ciclo: (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_3, v_1, v_6, v_2, v_7, v_3, v_6, v_7, v_1), que é euleriano.

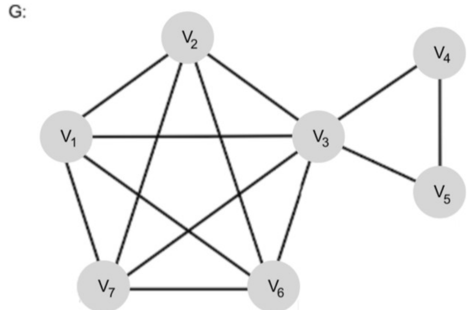


Figura 3.22: Exemplo de Grafo Euleriano
Fonte: O Autor

Teorema 3.2.4: Um grafo M é euleriano se, e somente se, M é conexo e cada vértice de M tem grau par.

Demonstração: Vamos provar que, se G é um grafo euleriano, então os graus de todos os vértices de G são pares.

Suponha que o grafo seja euleriano. Então G possui um ciclo euleriano, isto é, um ciclo que contém todas as suas arestas. Podemos contar os vértices durante o percurso, já que o mesmo, por ser euleriano, contém todas as arestas. Em cada vértice, vamos acrescentar uma unidade a contagem, partindo do valor zero de um vértice qualquer. Como, em cada um deles há uma entrada e uma saída, os graus dos vértices serão pares.

Reciprocamente, suponha agora que todos os vértices de G tenham grau par. Tome um vértice qualquer de G, por exemplo, vértice i, e comece a percorrer o grafo, a partir dele, sem repetir aresta, até não conseguir mais prosseguir, de modo que modo que todas as arestas incidentes a esse vértice tenham sido percorridas. Como todo vértice tem grau par, esse vértice tem que ser o i. Se o ciclo construído tiver todas as arestas, a demonstração está concluída.

□

3.2.4. GRAFOS HAMILTONIANOS

Grafos que contém ciclos hamiltonianos são chamados de grafos hamiltonianos e seu estudo é um dos principais tópicos da teoria dos grafos. (17)

Definição 3.25 (Grafo Hamiltoniano): Um caminho que contém todos os vértices de um grafo G é dito caminho hamiltoniano de G. Do mesmo modo, um ciclo que contém todos os vértices de G, é um ciclo Hamiltoniano. Se G contém um ciclo hamiltoniano, dizemos que G é um grafo hamiltoniano.

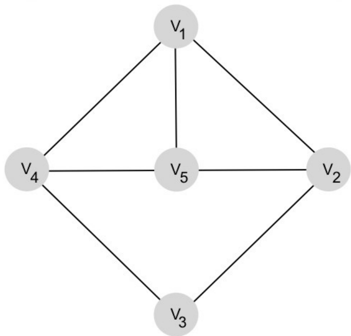


Figura 3.23: Exemplos de Grafos Hamiltonianos
Fonte: O Autor

Nota-se, na figura, que o grafo G contém o ciclo $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$ que é hamiltoniano.

3.2.5. GRAFOS PLANARES

Um grafo é planar se puder ser desenhado no plano sem que haja arestas se cruzando. As arestas se cortam quando há interseção das linhas que as representam em um ponto que não seja um vértice. Tal desenho é chamado representação planar do grafo. (16)

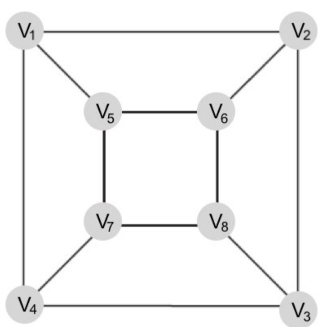


Figura 3.24: Exemplo de Grafo Planar
Fonte: O autor

A representação planar de um grafo divide o plano em regiões (uma é ilimitada). A representação planar do grafo abaixo divide o plano em seis regiões.

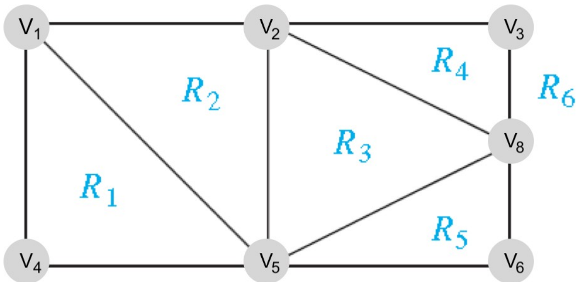


Figura 3.25: Plano dividido em seis regiões
Fonte: O Autor

Euler mostrou que a representação planar do grafo divide o plano no mesmo número de regiões. Chegou a esse resultado ao encontrar uma relação entre o número de faces, número de vértices e número de arestas de um grafo planar.

O teorema a seguir consta em (3).

Teorema 3.2.5: Seja *G* um grafo planar conexo com *a* arestas e *v* vértices. Seja *f* o número de faces na representação planar de *G*. Temos que:

$$v - a + f = 2.$$

Demonstração: Provaremos por indução em *f*, o número de faces de *G*. Se *f = 1*, então cada aresta de *G* é uma aresta de corte, isto é, uma aresta cuja remoção aumenta o número de componentes conexos do grafo, e, como *G* é conexo, então *G* é uma árvore. Nesse caso, o número de arestas é igual a *a* = *v - 1* pelo teorema 3.2.3. Então o teorema é válido.

Suponha que é verdade para todo grafo planar conexo com menos de *n* faces. Seja *G* um grafo planar conexo com *n* ≥ *2* faces.

Escolha uma aresta *e* de *G* que não é uma aresta de corte. Então, *G - e* é um grafo planar conexo e tem *n-1* faces, uma vez que as duas faces de *G* separadas por *e* combinam para formar uma face de *G - e*.

Pela hipótese de indução,

$$v(G - e) - a(G - e) + f(G - e) = 2$$

e usando a relação

$$v(G - e) = v(G), \qquad a(G - e) = a(G) - 1, \qquad f(G - e) = f(G) - 1,$$

obtemos

$$v(G) - a(G) + f(G) = 2$$

E o teorema segue pelo princípio da indução. □

3.3. EMPARELHAMENTO

O húngaro Dénes König (Figura 3.26) foi um dos primeiros matemáticos a conduzir um estudo relacionado a emparelhamentos em grafos. Em abril de 1914, em Paris, no Congresso de Filosofia Matemática, ele apresentou uma comunicação onde referia que todo grafo bipartido regular admitiria um emparelhamento. (12)

Figura 3.26: Dénes König
Fonte: https://www.wikipedia.org

O matemático francês Claude Berge (Figura 3.27) demonstrou o teorema que caracteriza se um dado emparelhamento é ou não máximo em função da existência de um caminho M- aumentante entre vértices livres do grafo. Em 1993, Claude Berge foi ganhador da Medalha Euler.

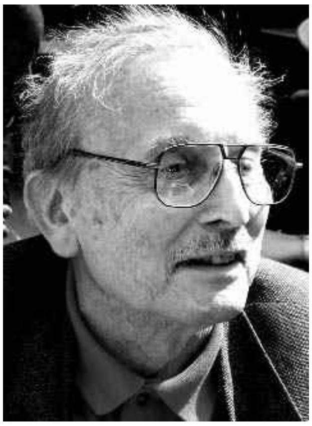


Figura 3.27: Claude Berge
Fonte:https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Berge/

Já Philip Hall (Figura 3.28), matemático britânico que recebeu o prêmio Berwick LMS em 1958, demonstrou o teorema que determina o critério de existência de um emparelhamento completo. (13)

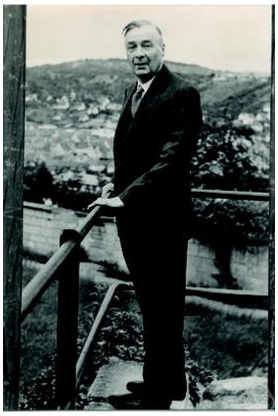


Figura 3.28: Philip Hall
Fonte: https://www.wikipedia.org

Definição 3.22 (Emparelhamento): Um emparelhamento (ou matching, ou acoplamento) em um grafo *G* é um conjunto de arestas tal que não existem duas arestas adjacentes neste conjunto.

Em outras palavras, um conjunto de arestas *M* de um grafo *G* é chamado emparelhamento se para cada vértice $v \in V(G)$ existe no máximo uma aresta de *M* que incide em *v*.

Dizemos que o emparelhamento *M* cobre o vértice *v* se existe uma aresta de *M* que incide em *v*. Caso contrário, dizemos que *v* é um vértice livre.

Definição 3.23 (Emparelhamento Máximo): Um emparelhamento *M* é máximo se não existe um emparelhamento *M'* tal que $|M'|>|M|$. Ou seja, um emparelhamento *M* será máximo em *G* se *M* possui o maior número possível de arestas.

Um emparelhamento *M* é maximal em *G* se qualquer acréscimo de aresta em *M* faz com que *M* deixe ser emparelhamento. Com isso, todo emparelhamento máximo é maximal, mas nem todo maximal é máximo.

Definição 3.24 (Caminhos Aumentante): Dado um grafo *G* e um emparelhamento *M*, um caminho alternante em *G* é aquele cujas arestas se alternam entre arestas que pertencem a *M* e arestas que não pertencem. Dizemos que um caminho é aumentante se for alternante e possuir extremos em vértices livres em M. Na figura 3.29, podemos encontrar um caminho alternante (A, B, C, D, E, F) e um caminho aumentante (G, C, D, H).

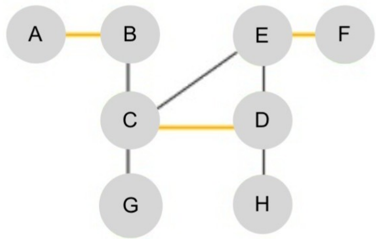


Figura 3.29: Exemplo de Emparelhamento (A,B),(C,D),(E,F)
Fonte: O Autor

3.3.1. TEOREMA DE BERGE, 1957

Um emparelhamento *M* de um grafo *G* é máximo se, e somente se, não existe em *G* um caminho aumentante.

A demonstração do Teorema podemos encontrar em (3).

3.3.2. APLICAÇÃO 1

Em uma escola há 8 alunos que desejam se candidatar a representantes de turma. Cada chapa deve ser composta por apenas dois integrantes. Cada um dos 8 alunos conhece apenas 3 desses outros que almejam o cargo. Determinaremos uma possível configuração de composição máxima de duplas para essa eleição.

De início, representamos os alunos por *a, b, c, d, e, f, g* e *h*. Vamos concectar os alunos conhecidos através de arestas tracejadas como mostra a figura 3.32.

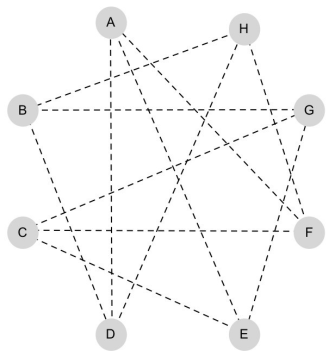


Figura 3.30: Grafo dos alunos que se conhecem
Fonte: O Autor

Para a escolha das chapas temos:

1) O aluno *a* escolhe sua dupla, suponhamos que seja *f*.

2) O próximo aluno a escolher sua dupla será um conhecido de *f*, por exemplo, *c*.

3) O aluno *c* escolhe seu conhecido *e*.

4) Seguindo esse processo, *g* escolhe *b* e, por fim, *d* escolhe *h*.

Sendo assim, a partir da primeira aresta, foram selecionadas as arestas que não são adjacentes em relação as já escolhidas. O grafo da figura 3.33 representa essas duplas por arestas contínuas.

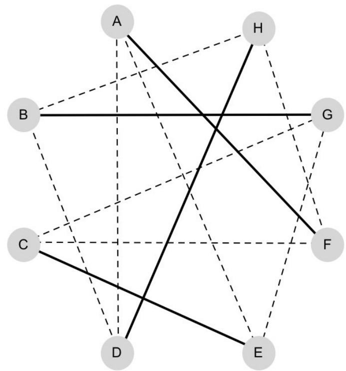


Figura 3.31: Grafo referente à composição das chapas
Fonte: O Autor

Dessa maneira teremos as chapas compostas, representadas pelas arestas *af, ce, gb* e *dh*. Temos assim, um emparelhamento de vértices no grafo dos alunos.

3.3.3. APLICAÇÃO 2

Em uma escola do ensino médio que contém apenas 5 turmas, está sendo feito um horário especial para o primeiro dia de aula. Neste dia, cada professor deve lecionar até o intervalo em uma mesma turma, e após, lecionar em uma turma diferente. Sabendo que nesse dia haverá apenas 5 professores na escola e que estes lecionam para as 5 turmas, podemos contruir esse horário utilizando grafos.

Para isso, representaremos os professores por p_1, p_2, p_3, p_4 e p_5 e as turmas por t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5, como sendo os vértices do grafo bipartido a ser construído.

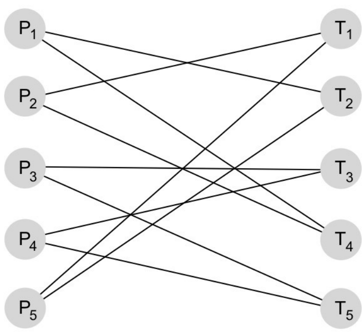


Figura 3.32: Professores e suas turmas
Fonte: O Autor

A confecção do horário especial para o primeiro dia de aula terá as arestas conectando os professores a suas respectivas turmas desse dia. As arestas mais espessas representarão a adequação do horário para que a aula só ocorra até o intervalo.

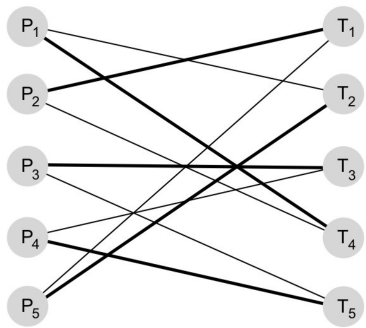


Figura 3.33: Professores e suas turmas do 1º horário
Fonte: O Autor

Assim, podemos notar que cada professor lecionaria em apenas duas turmas e que cada turma teria exatamente aula de dois professores. Isso significa que o grau de todos os vértices dessa grafo é igual a 2 e temos, portanto, um emparelhamento.

4. COLORAÇÃO

Dado um grafo qualquer, realizar uma coloração é atribuir rótulos a elementos de um grafo (vértices ou arestas), os quais chamamos de “cores”. Tal processo é efetuado com base em algumas restrições e é chamado de uma coloração de vértices (ou arestas). No caso de uma coloração própria de vértices, dois vértices adjacentes não devem receber a mesma cor e, no caso de uma coloração de arestas, atribuímos uma cor para cada aresta de modo que duas arestas adjacentes não possuam a mesma cor. (6)

4.1. COLORAÇÃO DE VÉRTICES

A coloração de vértices em grafos é a atribuição de cores aos vértices, em que cada um recebe uma, e apenas uma cor. Uma coloração pode ser também descrita como uma partição de um conjunto de vértices, onde cada bloco da partição corresponde a uma cor. (6)

Em um grafo, a coloração é validada quando em cada uma das pontas de uma aresta possui cores diferentes. Dizemos que um grafo é k-colorível caso haja uma coloração válida utilizando k cores.

A figura 4.1 mostra um grafo com coloração de vértices em 3 cores.

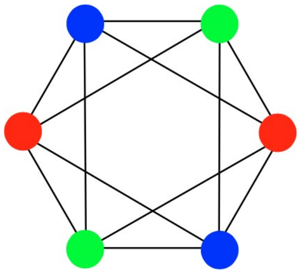


Figura 4.1: Grafo com Coloração de Vértices

Fonte: O Autor

Repare que a coloração é valida, pois os dois vértices existentes em cada uma das arestas possuem cores diferentes.

Podemos também perguntar: quantas cores são necessárias para colorir o mapa da região sudeste do Brasil, de forma que estados com a mesma fronteira não tenham a mesma cor?

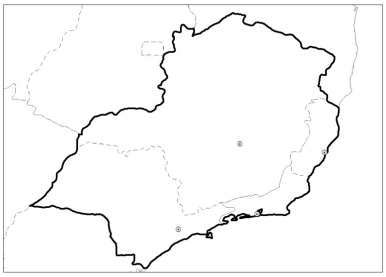


Figura 4.2: Mapa da Região Sudeste
Fonte: https://www.mapasparacolorir.com.br/mapa-regiao-sudeste.php

Para verificar as possibilidades de coloração, vamos utilizar um grafo G para representar o mapa da região sudeste,
de tal forma que os vértices e as arestas representem os estados e as fronteiras entre eles, respectivamente.

Primeiramente pode-se usar uma cor diferente para cada vértice do grafo, obtendo-se uma coloração própria de G com 4 cores, como pode ser visto na figura 4.3.

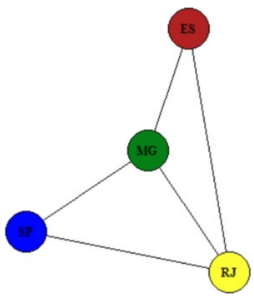


Figura 4.3: Grafo G, 4-colorível, representando a região sudeste do Brasil
Fonte: O Autor

Entretanto, se observarmos a coloração obtida, nota-se que o vértice que está colorido com a cor vermelha também poderia ser colorido com a cor azul e vice-versa assim, diminuindo a quantidade de cores usadas, sem deixar de obedecer as condições de uma coloração própria de vértices.

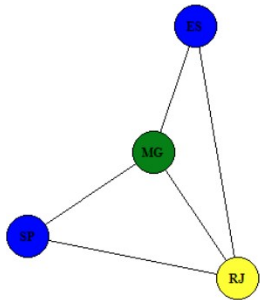


Figura 4.4: Grafo G, 3-colorível, representando a região sudeste do Brasil.
Fonte: O Autor

Então, tem-se uma coloração de *G* usando exatamente 3 cores, que é a quantidade mínima de cores necessárias para colorir esse grafo.

(Número Cromático): Chama-se número cromático de um grafo *G*, denotado por *X(G),* a menor quantidade *k* de cores distintas necessárias para uma coloração própria de vértices de *G*. Um grafo com essa característica é chamado de *k*-cromático.

Como já foi visto, um mapa no plano pode ser representado por um grafo e esse tipo de grafo tem uma propriedade importante: é planar.

O Teorema das Quatro Cores afirma que: num grafo planar *G* tem-se que $x(G) \leq 4$. Isso significa dizer que todo grafo planar pode ser colorido com um máximo de quatro cores. Esse parâmetro fornecido pelo Teorema das Quatro Cores é útil no que diz respeito à determinação do número cromático de um grafo planar, pois com exceção de alguns grafos especiais que serão mostrados a seguir, a determinação do número cromático é bastante complexa.

4.1.1. APLICAÇÕES

Um exemplo de coloração de grafos é a alocação de alunos em exames. As disciplinas são {M, N, O, P, Q, R, S} e elas serão representadas pelos vértices. Dois vértices serão ligados por aresta se houver um aluno que precise realizar os dois exames.

O objetivo é saber o número mínimo de horários diferentes que podem ser feitos de modo que dois exames que tenham alunos em comum não ocorram simultaneamente.

Observe a seguinte tabela contendo as disciplinas. Quando os dois vértices não forem adjacentes, eles serão representados pelo 0 e quando adjacentes, por 1.

Tabela 1 - Tabela dos Exames

	M	N	O	P	Q	R	S
M	0	0	1	1	1	0	1
N	0	0	1	1	1	0	1
O	1	1	0	1	0	1	1
P	1	1	1	0	1	1	0
Q	1	1	0	1	0	1	1
R	0	0	1	1	1	0	1
S	1	1	1	0	1	1	0

Figura 4.5: Tabela Exames

Assim, o problema de definir os horários corresponde a colorir um grafo onde dois vértices adjacentes não recebem a mesma cor. No grafo da figura abaixo apresentamos uma possível coloração.

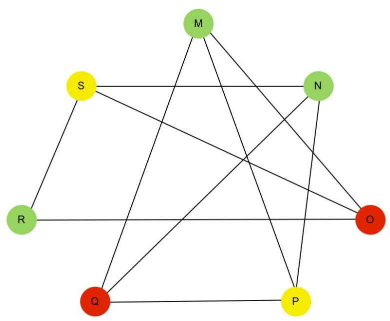


Figura 4.6: Grafos dos exames
Fonte: O Autor

Ela divide os vértices do grafo em 3 componentes: {M, N, R}, {S, P} e {O, Q}. Então são necessários apenas 3 horários para a realização dos exames.

4.2. COLORAÇÃO DE ARESTAS

Na coloração de arestas em grafos não-dirigidos temos a atribuição de cores às arestas, em que cada uma delas recebe apenas uma cor. A coloração de arestas é validada se para duas arestas adjacentes forem atribuídas cores diferentes.

A figura 4.7 mostra um grafo não-dirigido com coloração de arestas em 4 cores.

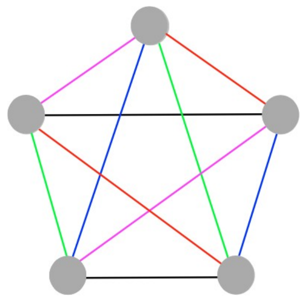


Figura 4.7: Grafo Não-dirigido com Coloração de Arestas
Fonte: O Autor

Repare que a coloração é valida, pois, todas as arestas adjacentes possuem cores diferentes.

4.2.1. APLICAÇÕES

Para exemplificar esse tipo de coloração de grafos, vamos supor que em uma sala de aula devemos formar várias duplas para realizar determinadas atividades sendo que estas não devem ser as mesmas.

Note que, neste tipo de problema, eventualmente, cada pessoa deve fazer parte de mais de uma dupla. Representando por meio de um grafo, as arestas representam as duplas e, como cada indivíduo só pode trabalhar em uma tarefa de cada vez, tarefas executadas simultaneamente não são possíveis sempre que uma mesma pessoa tiver que estar em dois grupos distintos no mesmo instante. Podemos fazer corresponder uma cor a cada horário de execução da atividade e, desse modo, nossa pergunta passa a ser:

"Qual o número mínimo de cores necessárias para colorir adequadamente as arestas do grafo?"

Lembrando que colorir adequadamente corresponde a efetuar uma coloração de modo que arestas incidentes a um mesmo vértice recebam cores diferentes.

Com base nisso, definimos:

(Índice Cromático): O menor número usado para colorir as arestas de um grafo de modo que arestas incidentes a um mesmo vértice recebam cores diferentes é chamado índice cromático do grafo, o qual denotaremos por $x'(G)$.

Analogamente ao caso do número cromático, o índice cromático de um grafo G com m arestas está bem definido, uma vez que sempre podemos colorir as arestas de G utilizando m cores. Além disso, como arestas incidentes a um vértice v devem ter cores distintas, claramente temos $x'(G) \geq \Delta(G)$. Uma estimativa mais precisa para

$x'(G)$. é apresentada abaixo. Para simplificar a notação, utilizaremos $\Delta(G) = \Delta$.

4.2.2. TEOREMA

O principal resultado da teoria de coloração de arestas é o Teorema de Vizing, obtido em 1964. Ele diz que o índice cromático de qualquer grafo *G* vale Δ ou $\Delta + \mathbf{1}$, onde Δ é o grau máximo de *G*. Assim, os grafos podem ser classificados em duas classes: um grafo G é classe um, se $X'(G) = \Delta$, ou classe dois, se $X'(G) = \Delta + \mathbf{1}$. Descobrir a qual classe pertence determinado grafo é chamado de problema da classificação.

(Vizing-1964): Para qualquer grafo *G*, $\Delta \leq \boldsymbol{x}`(\boldsymbol{G}) \leq \Delta + \mathbf{1}$.

Demonstração: Vamos provar por indução sobre o número de vértices *n*. Seja *G* um grafo com *n* vértices. Analisando o caso para $n=1$, temos um grafo completo $\boldsymbol{K_1}$ com um vértice e $\Delta(G)=0$. Para colorir esse grafo basta apenas uma cor, pois só tem um vértice. Logo, $x'(G) = 1 = 0 + 1 = \Delta\ (G)+1$.

Agora suponhamos que vale para *n-1* vértices, em que $n \geq 2$ e vamos mostrar que vale para *n* vértices. Seja $v \in V(G)$ um vértice qualquer de *G*. Removendo esse vértice de *G* temos um novo grafo *G-v* com *n-1* vértices. Usando a hipótese de indução neste grafo menor, temos que $x'(G\text{-}v) \leq \Delta\ (G\text{-}v) + 1$. Assim, *G-v* pode ser colorido com no máximo $\Delta\ (G\text{-}v) + 1$ cores.

Note que $g(v) \leq \Delta\ (G)$, isto é, os vizinhos de *v* podem usar no máximo $\Delta(G)$ cores. Analisemos dois casos possíveis para $\Delta(G)$.

Caso 1: $\Delta(G)= \Delta(G\text{-}v)$

Então, existe pelo menos uma cor de $\Delta(G\text{-}v)+1 = \Delta(G)+1$ não utilizada pelos vizinhos de *v*, assim *v* pode ser colorido por essa cor. Isso nos dá $\Delta(G)+1)$ - coloração de *G*, de modo que $x'(G) \leq \Delta(G)+1$.

Caso 2: $\Delta(G) \neq \Delta(G\text{-}v)$

Nesse caso só pode ocorrer $\Delta(G) > \Delta(G\text{-}v)$. Portanto, como pela hipótese de indução $x(G\text{-}v) \leq \Delta(G\text{-}v)+1$, isto é, $x'(G\text{-}v) < \Delta(G)+1$ podemos usar uma nova cor para *v*, implicando em $x'(G\text{-}v)+2 \leq \Delta(G)+1$, de onde segue que $x'(G) \leq \Delta(G)+1$.

Nos dois casos, temos que $x'(G) \leq \Delta(G)+1$, para *n* vértices. Com isso, provamos que todo grafo pode ser colorido com no máximo $\Delta+ 1$.

□

5. GRAFOS NO ENSINO-APRENDIZADO

Observamos no capítulo anterior vários tipos de grafos, o que nos proporciona utilizá-los de diversas formas na resolução de problemas matemáticos.

> *“Problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver...qualquer situação que estimule o aluno a pensar, que possa interessá-lo, que lhe seja desafiadora e não trivial" Onuchic e Zuffi, 2007. (19)*

Podemos perceber diferenças básicas entre problemas e exercícios. Nos exercícios o aluno não precisa decidir qual procedimento será utilizado para resolução de tal. Como exemplifica Pozo (1998, apud, SOARES & PINTO 2001):

> *“As tarefas em que precisa aplicar uma fórmula logo depois desta ter sido explicada em aula, ou após uma lição na qual ela aparece explicitamente... servem para consolidar e automatizar certas técnicas, habilidades e procedimentos necessários para posterior solução de problemas...”.*

A resolução de problemas está presente na vida de todos os cidadãos em seu dia a dia e, na maioria das vezes, exigem soluções que requerem estratégias. O aprendizado dessas estratégias auxilia o aluno a enfrentar diversas situações em diversas áreas do conhecimento.

Dante (9) afirma que a resolução de problemas é um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados na sala de aula pois é muito comum os alunos saberem efetuar os algoritmos de forma mecanizada e não conseguirem resolver um problema mais complexo que envolva a interpretação e o raciocínio antes da aplicação de tais algoritmos. Isso se deve à maneira com que os problemas matemáticos são trabalhados na sala de aula e apresentados nos livros didáticos. Muitas vezes eles apresentam apenas diversos exercícios de fixação, repetitivos dos conteúdos trabalhados.

Dante (10) ainda ressalta que um bom problema deve:

- ser desafiador para o aluno;
- ser real;
- ser interessante;
- ser o elemento de um problema realmente desconhecido;
- não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas;
- ter um nível adequado de dificuldade.

Segundo os PCN's de matemática (4), a resolução de problemas possibilita que os alunos mobilizem os seus conhecimentos e desenvolvam a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, eles terão a oportunidade de ampliar seus conhecimentos sobre os conceitos e procedimentos matemáticos assim como ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

5.1. BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da educação básica. Ela foi homologada em 20 de dezembro de 2017 pelo ministro da educação, Mendonça Filho.

Ela não exclui os demais documentos oficiais, mas dialoga com eles, consolidando uma necessidade historicamente situada, que é o estabelecimento e a organização progressiva das aprendizagens essenciais de toda a educação básica. Além disso, está fundamentada em bases legais presentes na Constituição Federal de 1988, na LDB de 1996, e nos fundamentos teórico-metodológicos presentes nas DCNs, nos PCNs e no PNE.

Foi elaborada por especialistas de todas as áreas do conhecimento para ser um documento completo que descreve a parte comum nos currículos da escola básica no Brasil.

As aprendizagens essenciais, chamadas de objetos de conhecimento, listadas na BNCC, devem garantir o desenvolvimento de competências gerais e competências específicas.

> *“Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (...) É imprescindível destacar que as competências gerais da Educação Básica, apresentadas a seguir, inter-relacionam-se e desdobram-se no tratamento didático proposto para as três etapas da Educação Básica (educação infantil, ensino fundamental e ensino médio), articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, nos termos da Lei de Diretrizes e Bases (LDB). (...)*
>
> *A área de matemática, no ensino fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No ensino médio, na área de matemática e suas tecnologias, os estudantes devem consolidar os*
>
> *conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da matemática, da matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da matemática à realidade.” [1, p. 8].*

Das dez competências gerais da BNCC (2), destacamos as competências nas quais a teoria dos grafos está relacionada:

• Competência Geral 1: Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

• Competência Geral 2: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções
(inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

• Competência Geral 3: Utilizar diferentes linguagens verbal (oral ou visualmotora, como libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital, bem
como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica,
para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

• Competência Geral 4: Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. [1, p. 9]

As competências gerais são expressas em cada área (matemática, português, história etc) através das competências específicas de área, que devem ser desenvolvidas ao longo dos doze anos de educação básica.
Sobre as competências específicas da matemática no ensino fundamental, podemos destacar, com referência somente à teoria dos grafos, as seguintes:

• Competência Específica 1: Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

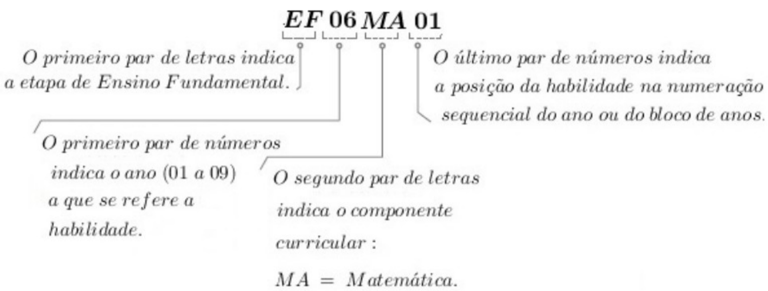
• Competência Específica 2: Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (aritmética, álgebra, geometria, estatística e probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

• Competência Específica 3: Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

• Competência Específica 4: Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

• Competência Específica 5: Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. [1, p. 267]

De acordo com a BNCC, as competências acima são desenvolvidas quando os alunos adquirem aprendizagens essenciais chamadas habilidades. Cada habilidade é identificada através de um código alfanumérico, que pode ser explicado conforme descrição abaixo:



Algumas das habilidades presentes na BNCC podem ser relacionadas à teoria de grafos, como:

• (EF06MA34) Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados.

• (EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.

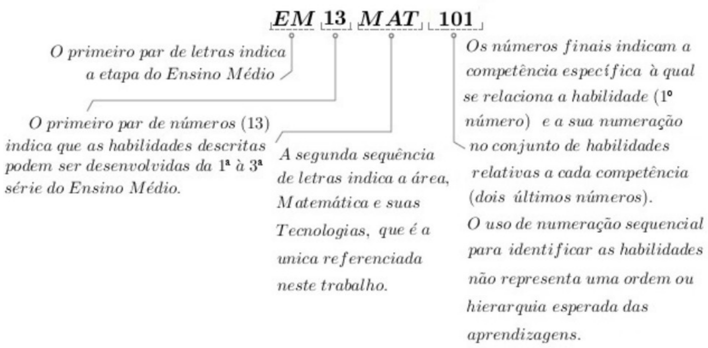
• (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

• (EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. [1, p. 305-307]

Segundo o texto da BNCC, as competências a serem desenvolvidas no ensino médio devem ser as mesmas do ensino fundamental, mas com foco na aplicação da matemática à realidade. Ele ainda defende o uso de recursos tecnológicos na investigação matemática, como continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional.

Para que as competências específicas do ensino médio sejam alcançadas, a BNCC afirma que os alunos devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas.

Cada habilidade do ensino médio também é identificada através de um código alfanumérico, que pode ser traduzido como:



Podemos relacionar algumas com a teoria dos grafos.

• Competência Específica 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das ciências da natureza e humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

– (EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos, contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.

• Competência Específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

– (EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

• Competência Específica 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

– (EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

– (EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise. [1, p. 531-539]

A nova estrutura do ensino médio traz uma flexibilização do currículo e permite que os estudantes escolham os assuntos de acordo com seus interesses, tornando-os cada vez mais protagonistas do seu desenvolvimento escolar. Estes assuntos, entre os quais poderia constar a teoria dos grafos, são os chamados itinerários formativos e tem função de desenvolver o aprofundamento de conhecimentos estruturantes dentro das áreas do saber, como matemática e suas tecnologias, por exemplo.

5.2. UTILIZANDO GRAFO NO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória é um ramo da matemática que estuda métodos e técnicas que permitem resolver problemas de contagem. É bastante utilizada nos estudos envolvendo probabilidade fazendo uma análise das possibilidades e das combinações possíveis entre um conjunto de elementos.

Geralmente, ela é ministrada no 2º ano do ensino médio. Apesar de ter várias aplicações práticas, é um conteúdo que causa um certo desconforto nos alunos, devido à quantidade de fórmulas existentes que devem ser aplicadas em problemas que exigem bastante interpretação de texto e muito raciocínio lógico.

Essa seção tem como objetivo mostrar a facilidade que a representação através dos grafos oferece na resolução de tais problemas. Além disso, sugere uma diferente abordagem e ao mesmo tempo estimula e desafia os alunos a estudarem e resolverem os problemas de contagem.

A seguir, serão descritos dois problemas. O primeiro problema apresenta uma proposta de ensino utilizando grafos para o aprendizado de conceitos básicos de análise combinatória. Tem como principais objetivos:

• Utilizar grafos para contagem;

• Aprimorar as resoluções dos problemas propostos através da leitura e interpretação dos dados dos enunciados propostos;

• Definir e utilizar o conceito de fatorial para construção das fórmulas usuais da análise combinatória;

Já o segundo problema é clássico no ensino de análise combinatória.

5.2.1. PROBLEMA 1

Em uma empresa há um setor com 5 homens e 6 mulheres acima de 35 anos, e 4 homens e 3 mulheres abaixo dessa faixa etária.

a) Qual o total de funcionários desse setor?

b) Quantas duplas compostas por um homem e uma mulher com faixa etária inferior há 35 anos podemos formar?

Solução:

a) Para determinar o total de funcionários desse setor, basta considerar um grafo desconexo que relaciona cada uma das pessoas a um vértice. O valor total da contagem desses vértices, 18, é o número procurado.

Figura 5.1: Letra a
Fonte: O Autor

b) Para determinar o número de duplas compostas por um homem e uma mulher com faixa etária inferior a 35 anos podemos construir um grafo representando cada um dos homens e cada uma das mulheres através de vértices que serão dispostos em dois níveis, cuja ordem não interfere no resultado.

Como há menos mulheres do que homens, para facilitar a resolução do problema, podemos supor que o grupo de vértice que representam as mulheres ficarão no primeiro nível e o de homens no segundo. Daí tomando-se um vértice arbitrário do primeiro nível tem-se que ele pode ser conectado por uma aresta a cada um dos vértices que representam os homens que estão no segundo nível, formando, desta maneira, uma árvore enraizada. O mesmo acontecerá com os demais vértices que representam as mulheres, formando, portanto, 30 caminhos diferentes compostos por dois vértices, isto é, as duplas da contagem. Assim, obtém-se o total de 30 duplas.

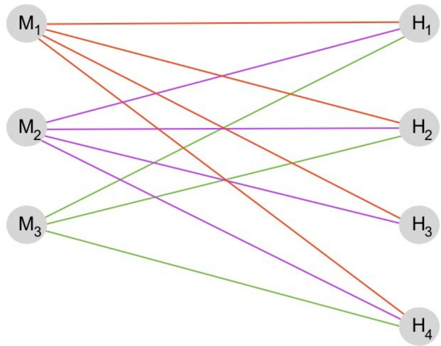


Figura 5.2: Letra b

Fonte: O autor

5.2.2. PROBLEMA 2

Em um congresso, há 13 comissões todas com igual número de professores. Cada professor pertence a duas comissões e cada duas comissões possui exatamente um membro em comum. Todos os professores participam. Quantos professores participaram desse congresso?

Solução:

Vamos considerar que cada comissão é um vértice de um grafo e as arestas desse grafo são os professores, uma vez que cada professor está relacionado a duas comissões. Como duas comissões possuem um professor em comum, todos os vértices estão conectados, formando um grafo completo. Dessa forma, o problema se resume ao cálculo do número de arestas do grafo completo.

Pensando no grafo como um polígono de 13 lados, podemos determinar a soma entre o número de lados e a quantidade de diagonais desse polígono a fim de encontrar o número total de professores neste congresso.

O número de lados é 13, e para encontrar a diagonal podemos utilizar a expressão $\frac{(13-3)3}{2}$. O resultado é igual a 65.

Desta forma temos *13+65 = 78* comissões.

Dessa forma, podemos concluir que a representação geométrica do problema facilita a sua resolução já que é muito mais fácil contar lados e diagonais do que usar as fórmulas de contagem.

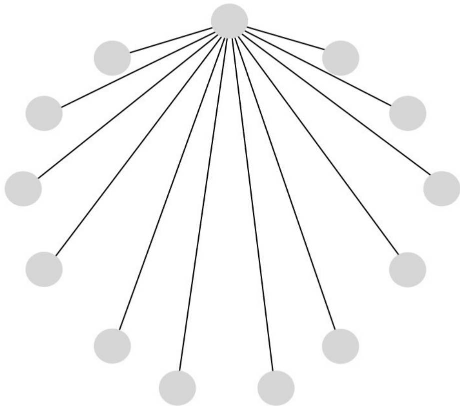


Figura 5.3: 13 comissões e seus respectivos professores
Fonte: O autor

5.3. GRAFOS E OS PRODUTOS NOTÁVEIS

Conforme Paim (2015), os produtos notáveis são expressões algébricas que resultam de multiplicações entre a soma e subtração de dois termos elevados ao quadrado, e também o produto entre uma soma e uma diferença de dois termos.

A fim de generalizar a fórmula dos produtos notáveis, utiliza-se umas expressões algébricas, que possibilita a troca das variáveis por números quaisquer. A fórmula *a+b*, representa a soma de dois termos, ou seja, dois números quaisquer. Já a fórmula *a-b* representa a diferença de dois números quaisquer e *a.b* representa o produto entre dois números (PAIM, 2015).

Conhecemos os seguintes produtos notáveis:

1) $(a+b)^2$ - Quadrado da soma de dois números;
2) $(a-b)^2$ - Quadrado da diferença entre dois números;
3) $(a+b).(a-b)$ - Produto da soma pela diferença de dois números;
4) $(a+b)^3$ - Cubo da soma de dois termos;
5) $(a-b)^3$ - Cubo da diferença de dois termos.

Geralmente este conteúdo é apresentado aos alunos do 8º ano do ensino fundamental 2. Mesmo sendo trabalhado em diversas situações problemas, não só no fundamental como também no ensino médio, ainda é grande o número de alunos que chegam ao fim da sua trajetória escolar com dificuldades em desenvolver $(x+y)^2$ e $(x+y)^3$.

Diante disso, percebemos que o seu ensino através da teoria dos grafos podem simplificar o seu cálculo e facilitar o entendimento de diversos alunos.

5.3.1. PROBLEMA

Considere *a* e *b* números reais, onde a soma é representada por $(a + b)$. O quadrado dessa soma pode ser obtido através pela propriedade distributiva e pela operação de multiplicação.

Já que a potenciação é uma multiplicação de fatores iguais, ao efetuar o quadrado da soma de dois números temos:

$(a + b)^2 = (a + b).(a + b)$

$(a + b)^2 = a.a + a.b + a.b + b.b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$, onde a é o primeiro termo e b é o segundo termo.

Essa expressão pode ser lida como: “o quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro número mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo número”. (22)

Como $(a + b)^2 = (a + b).(a + b)$ podemos criar o grafo abaixo.

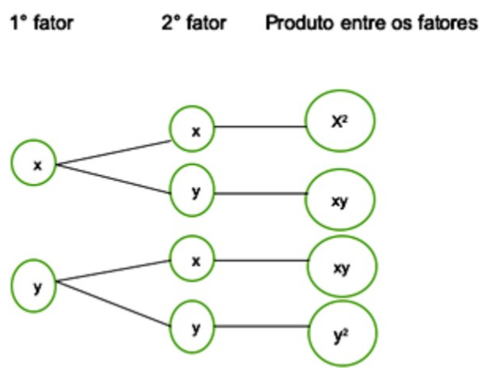


Figura 5.4: Quadrado da soma de dois termos
Fonte: O Autor

Assim, para determinar o resultado, basta apenas somar os resultados encontrados no produto entre os fatores.

Em relação ao produto notável que determina a soma do cubo de dois termos, o grafo se comporta da mesma maneira.

Como $(x + y)^3 = (x + y).(x + y).(x + y)$, temos o seguinte grafo como resultado.

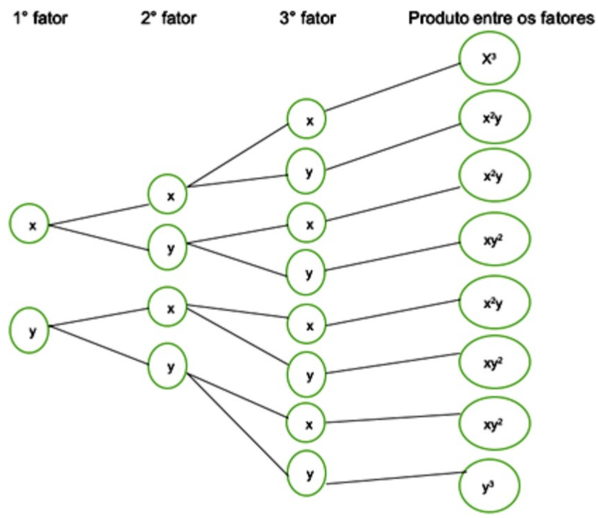


Figura 5.5: Cubo da soma de dois termos
Fonte: O Autor

6. APLICAÇÕES NO ENSINO - APRENDIZADO

A teoria dos grafos é, hoje, um campo que desperta muito interesse já que apropria-se de um extraordinário desenvolvimento teórico e é aplicado em diversos problemas, desde aqueles que se referem a localização e de traçados de rotas para diversos tipos de serviço à aplicações na física, química, genética, pesquisa operacional, computação, engenharia molecular, bioinformática, psicologia, sociologia, estatística, relações sociais e empresariais, no projeto de códigos, planejamento de transportes, na otimização de recursos humanos, no estudo de estrutura de DNA, dentre outros (JURKIEWICZ, 2009b; NETTO, 1979). (18)

Muitas vezes ao iniciarmos um conteúdo relacionado à matemática em sala de aula, os alunos já se assustam só com o nome. E ele acaba ficando mais desinteressante ainda quando não se aplica a realidade na qual o aluno está inserido.

De acordo com Carraher (5), a aprendizagem de matemática na sala de aula é um momento de interação entre a matemática organizada pela comunidade científica, ou seja, a matemática formal e a matemática como atividade humana. Sendo assim, quando um aluno consegue identificar a aplicabilidade em seu cotidiano ocorre uma motivação e, consequentemente, o conteúdo é absorvido de forma mais agradável.

Segundo Coll (7), o aluno é o responsável pelo seu processo ensino-aprendizagem, onde o sucesso desse processo está ligado à importância que o mesmo dá ao conteúdo que está sendo apresentado. O autor também afirma que professor e aluno possuem papéis distintos nesse processo, mas é papel do professor escolher as melhores técnicas para o sucesso do processo de ensino-aprendizagem.

Em cada um dos problemas apresentados neste capítulo, procurei fazer uma abordagem ao ensino da teoria de grafos com situações problema desafiadoras, envolvendo atividades presentes no cotidiano dos alunos e buscando despertar o interesse dos discentes. Além disso, são atividades fáceis de aplicar em sala de aula, uma vez que as situações problemas exigem poucas habilidades de cálculo.

6.1. PROBLEMA 1 – APERTO DE MÃOS

Alana, Bela, Clara, Dora e Érica se encontraram numa festa e apertaram as mãos, exatamente uma vez, de todas as pessoas que elas já conheciam neste grupo. Alana deu um aperto de mão, Bela deu dois, Clara deu três e Dora deu quatro apertos de mãos. Quantos apertos de mão deu Érica?

Este problema que foi proposto nas Olimpíadas do Canguru de Matemática do Brasil no ano de 2019. Estava presente na prova do nível C, isto é, naquela destinada aos os alunos do 9º ano do ensino fundamental.

Em sala de aula, apresentei e propus aos alunos do 6º ano do ensino fundamental e da 1ª série do ensino médio que resolvessem o problema da maneira que considerassem mais fácil. A maioria deles apenas raciocinaram e compartilharam o resultado encontrado através do chat da aula, já que estamos vivendo um momento de ensino remoto.

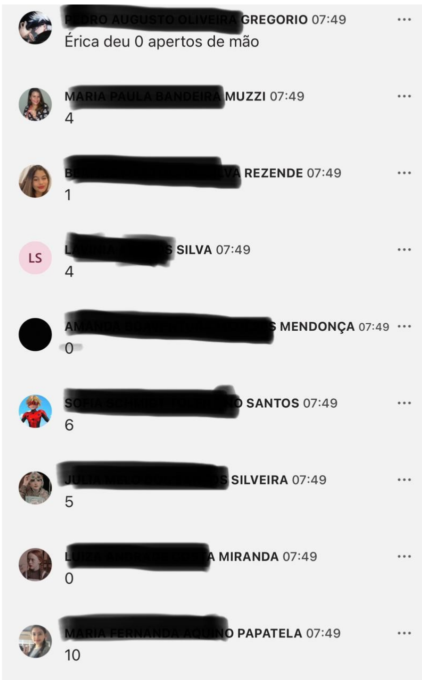


Figura 6.1: Respostas apresentadas por alunos do 6º ano

Podemos perceber que foram vários os resultados encontrados, que nem todos os alunos chegaram à solução correta, e que esta foi apresentada de diferentes maneiras. Após a primeira tentativa de resolução sem sucesso pela maioria, foi sugerido que eles pensassem nas nossas aulas de geometria e tentassem resolver os problemas construindo vértices que seriam as meninas e arestas representando os apertos de mãos. Seguem alguns dos resultados coletados.

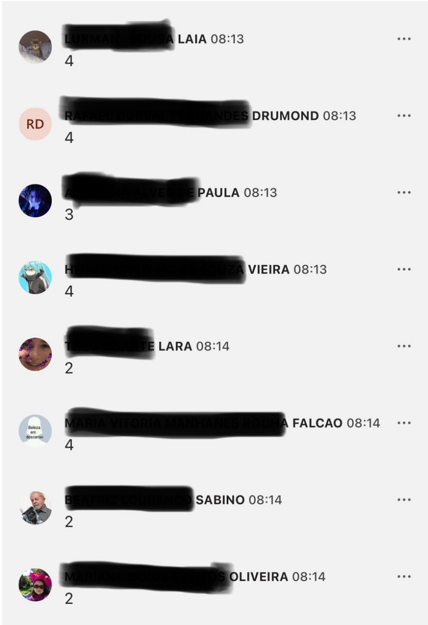


Figura 6.2: Respostas apresentadas por alunos da 1ª série

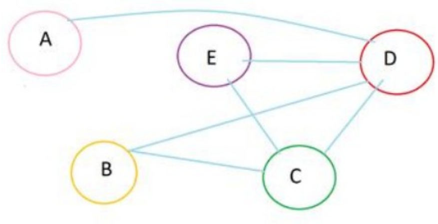


Figura 6.3: Resposta apresentada por um aluno do 6º ano.

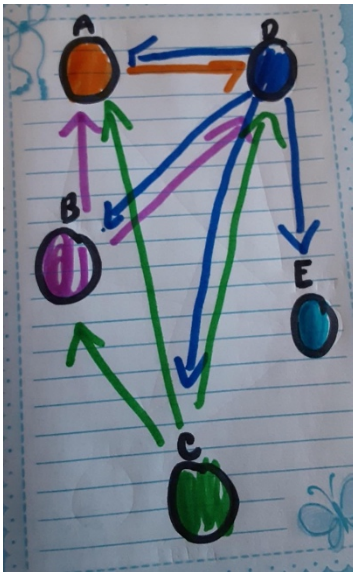


Figura 6.4: Resposta apresentada por um aluno do 6º ano

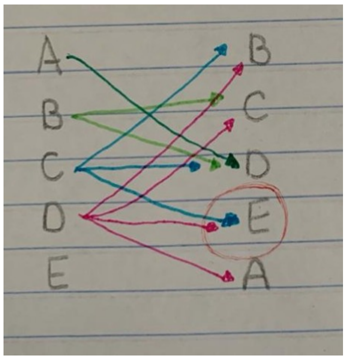


Figura 6.5: Respostas apresentadas por alunos da 1ª série

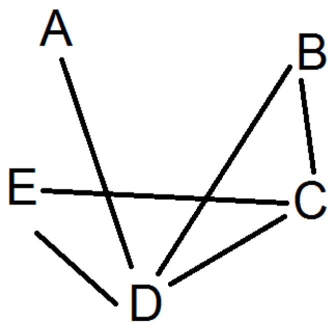


Figura 6.6: Respostas apresentadas por alunos da 1ª série

Podemos verificar que as tentativas de resolução apresentaram significativas melhoras, mesmo sem conhecerem o conceito de grafo, reafirmando que a resolução de problemas e desafios através de seu ensino desenvolve e torna o aluno protagonista da sua aprendizagem. Isso se tornou claro quando um aluno do sexto ano se propôs a apresentar sua tela, explicar e desenhar para toda a sua turma.

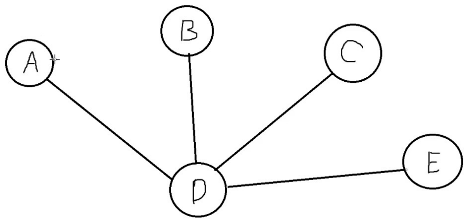


Figura 6.7: Primeiro Passo apresentado

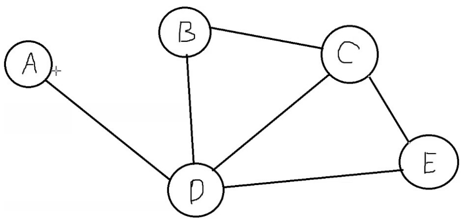


Figura 6.8: Segundo Passo apresentado

Ressalto que apenas um aluno do ensino médio conseguiu corretamente e utilizou o esquema abaixo para resolver logo da primeira vez que o problema foi proposto.

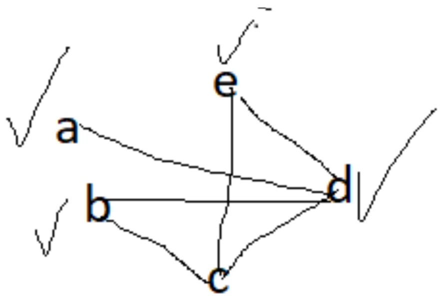


Figura 6.9: Esquema proposto pelo aluno da 1ª série A seguir, indico a resolução correta.

A seguir, indico a resolução correta.

Utilizando-se dos grafos para resolver este problema, podemos associar cada pessoa a um vértice (A-Alana, B-Bela, C-Clara, D-Dora e E-Érica) e interligá-las através das arestas, indicando duas pessoas que já se conheciam.

Dora apertou a mão de todas as outras quatro pessoas, ou seja, no grafo, o vértice D deve estar ligado a todos os outros vértices através das arestas. Da mesma forma, o vértice C que representa Clara deve estar ligado a todos os outros vértices, exceto ao A que representa Alana, já que esta apertou apenas a mão de Dora. Com isso, os vértices B e E devem estar ambos conectados aos vértices C e D, satisfazendo assim as condições do problema.

De acordo com o grafo abaixo construído podemos concluir que Érica apertou a mão de duas pessoas (Clara e Dora).

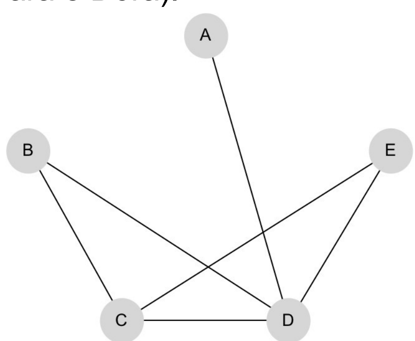


Figura 6.10: O autor

6.2. PROBLEMA 2 – COLORAÇÃO DOS ESTADOS BRASILEIROS

O Problema das Quatro Cores trata-se de determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa, de forma que locais com fronteira comum recebam cores diferentes.

Ele foi apresentado à turma do 7º ano com objetivo de fazer com que os alunos tentassem responder à seguinte pergunta: “Qual o número mínimo possível de cores para colorir o mapa do brasil, de modo que estados que façam divisa tenham cores diferentes?”

Com o ensino remoto, foi enviado um mapa em branco e proposto que eles utilizassem o Paint para a resolução. Abaixo encontra-se alguns dos resultados.

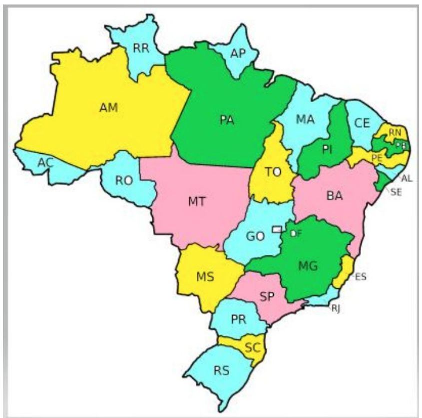


Figura 6.11: Imagem Enviada pelos Alunos

Figura 6.12: Imagem Enviada pelos Alunos

Figura 6.13: Imagem Enviada pelos Alunos

Os alunos deveriam concluir por tentativa e erro que 4 cores seriam suficientes para colorir o mapa sem que estados vizinhos tenham a mesma cor.

Após as tentativas e apresentação dos resultados para toda a turma, foi comentado que este é um resultado importante da teoria dos grafos, um assunto da matemática que possui uma das ligações com a geografia esta que faz extensas aplicações da Matemática: esferas, circunferências, distâncias (latitude e longitude), medidas de todos os tipos (temperatura, umidade do ar, pressão, entre outras).

Isto tudo configura como oportunidade para conectar conteúdos das disciplinas, construindo a desejada interdisciplinaridade.

Para concluir a atividade, foi explicado aos alunos o que é um grafo e que servem para representar, modelar situações entre conjuntos de objetos e as relações entre estes objetos. Um exemplo citado foi o das redes sociais, onde uma pessoa pode ser representada por um ponto que se liga a vários outros pontos, outras pessoas, e foi dito como isto pode gerar uma rede ou um grafo. Foram feitos desenhos com pontos (vértices) e linhas interligando estes pontos (arestas).

6.3. PROBLEMA 2 – PONTES DE KÖNIGSBERG

Como vimos no início do capítulo 2, o problema das pontes de Königsberg consiste em uma pessoa atravessar todas as pontes de Königsberg uma única vez e retornar ao ponto de partida. Por vários anos esse problema não teve solução até que em 1736, Leonhard Euler solucionou esse enigma. Como vimos, ele propôs transformar as partes de terra da cidade em pontos (vértices) e as pontes que os unia em linhas (arestas).

Aplicado aos alunos da 1ª série do ensino médio, o problema das pontes de Königsberg foi apresentado a eles como um desafio matemático. Eles deveriam passar pelas sete pontes sem que houvesse nenhuma repetição e com a obrigatoriedade de se passar por todas as pontes.

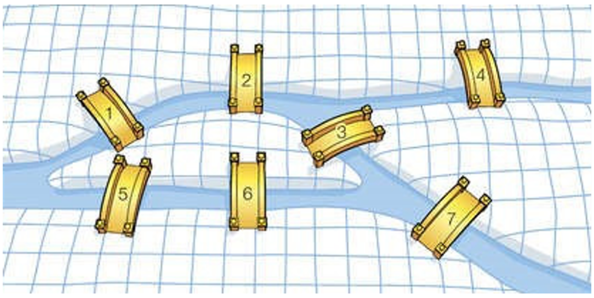


Figura 6.14: Imagem Enviada aos Alunos

O objetivo dessa atividade era a investigação matemática dos alunos, a fim de encontrar uma saída para o problema proposto. Eles deveriam por meio de tentativa e erro desvendar o enigma.

Apenas 15 alunos participaram da atividade, pela dificuldade do ensino remoto adotado na escola e pelo fim do ano letivo. Abaixo encontram-se dois resultados.

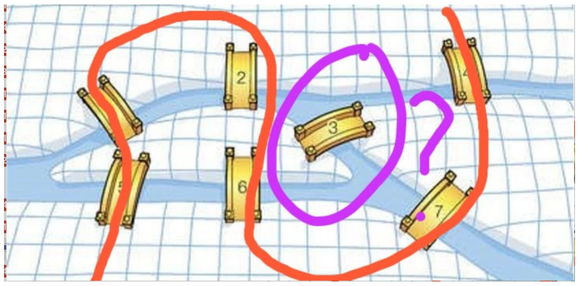


Figura 6.15: Imagem Enviada pelo Alunos

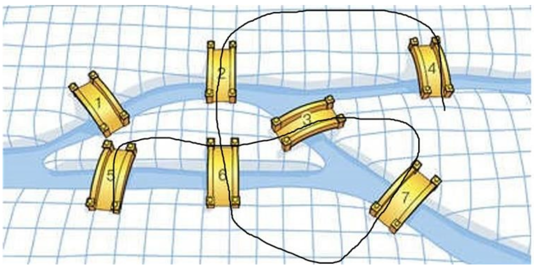


Figura 6.16: Imagem Enviada pelo Alunos

6.4. O PROBLEMA DAS TRÊS CASAS

Os estudantes do 7º ano foram apresentados ao clássico problema das três casas ligadas à água, luz e gás.

Você tem que levar água, luz e gás para 3 casas de uma cidade. As companhias de água, luz e gás permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única, ou seja, vocês devem considerar o plano. Como você resolveria esse problema?

O problema foi apresentado através de uma imagem compartilhada. Foi pedido aos alunos que fizessem o seu download e que fizessem as linhas sobre o desenho.

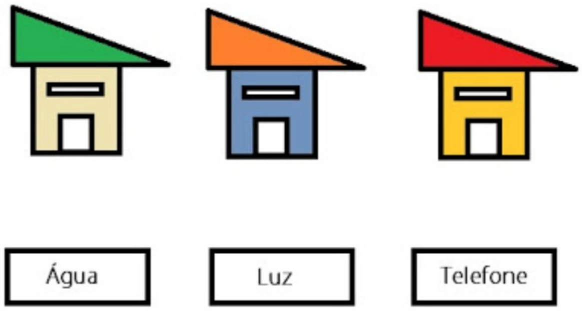


Figura 6.17: Imagem Enviada aos Alunos

Foi pedido aos alunos que tentassem resolver antes de dizer que era impossível e explicar as razões; aos alunos foi dado um tempo de 20 minutos para que chegassem às respostas. Depois explicou-se que era impossível, pois configura um grafo não planar. Foi dado o exemplo de que uma empresa de placas de circuito integrado, precisa muitas vezes fazer as placas com mais de uma camada porque as ligações elétricas e eletrônicas entre os componentes não podem se cruzar.

Abaixo segue alguns dos resultados apresentados por eles.

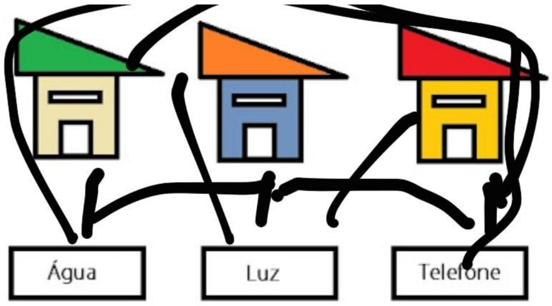


Figura 6.18: Imagem Enviada pelos Alunos

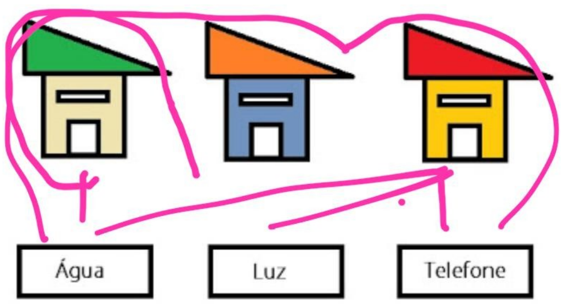


Figura 6.19: Imagem Enviada pelos Alunos

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabemos que o ensino da matemática, atualmente, não está trazendo resultados tão satisfatórios quanto poderiam. Boa parte dos alunos está cada dia mais desmotivada e uma outra tem muita dificuldade em assimilar os conteúdos estudados em sala de aula.

Um dos prováveis motivos dessa deficiência é a utilização apenas da metodologia tradicional no ensino, utilizada para o repasse de conhecimentos de boa parte das instituições de ensino da educação básica. Os métodos tradicionais, distanciam-se da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e não acompanham o processo de mudanças, em que o professor é mediador, contribuindo, sobretudo, para o desenvolvimento da autonomia perante o conhecimento, formando cidadãos críticos e capazes de fazer uma leitura consciente das situações que os cercam.

O presente trabalho traz alguns estudos e aplicações de grafos, pouco conhecidos, até mesmo desconhecidos, pela maioria dos estudantes e professores. Nele também foram apresentados alguns problemas históricos que foram resolvidos com a teoria dos grafos.

Tendo por principal objetivo a aplicação da teoria de grafos como ferramenta facilitadora no processo de ensino-aprendizagem em matemática, desde a revisão bibliográfica sobre sua história, foi possível observar as diversas formas possíveis para a realização de aplicações envolvendo o conteúdo abordado, em diferentes áreas da matemática.

Concluímos que a inclusão da teoria dos grafos seria uma alternativa de conteúdo a ser trabalhado com os alunos da educação básica, e sem grandes obstáculos, pois atende às expectativas de aplicabilidade do conhecimento adquirido na resolução de situações problema encontradas no cotidiano, além de ser uma porta de entrada para a apresentação de novos conteúdos.

Este trabalho pode ser uma importante ferramenta para o auxílio de professores de matemática que desejam levar para dentro da sala de aula a resolução de problemas diversos do componente curricular através de uma maneira diferente, baseada na teoria dos grafos.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1) ASSIS, D.F.C. Resolução de problemas via Teoria de Grafos: uma possibilidade de tornar a Matemática mais atraente na Educação Básica. São João Del-Rei, 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática). Acesso em 20 de fevereiro de 2021.

2) BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: Acesso em 30 de março de 2021.

3) BONDY, J. A. e MURTY, U. S. R. Graph Theory with applications.

4) BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Médio e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacional para o Ensino Médio (PCNEM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília. MEC, 2000

5) CARRAHER,T.N.et al. Na vida dez na escola zero - 6a. edição - São Paulo: Cortez, 1991.

6) COLORAÇÃO DE VÉRTICES. Disponível em:\ hiperlink{https://www.ime.usp.br}. Acesso em: 02 de Fevereiro de 2021

7) COLL, César Et al. O construtivismo na sala de aula. São Paulo: Ática, 1999

8) COSTA, P.P. Teoria de Grafos e suas Aplicações. São João Del-Rei, 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática). Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/tmelo/diss-polyanna.pdf>. Acesso em 20 de fevereiro de 2021.

9) DANTE, L. R. Didática da resolução de problemas de Matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 1991.

10) DANTE, L.R. Didática da Resolução de Problemas de Matemática. 2aed. São Paulo: Ática, 1998.

11) SILVA, Bruno César Sá. EMPARELHAMENTO EM GRAFOS BIPARTIDOS NO ENSINO MÉDIO. Dissertação de mestrado. IMPA, Rio de Janeiro. Acesso em: Maio 2021. Acesso em: Maio 2021.

12) DE SANTANA FERREIRA, Vêronica. DE GRAFOS A EMPARELHAMENTOS: Uma possibilidade viável de encantar-se com a matemática. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Sergipe, 2014.

13) FONSECA, Thiago Silveira da. Grafos e Emparelhamento em Grafos, Universidade Federal de Viçosa, 2018.

14) FONTE: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Alfred_Kempe>. Acesso em: 24 mar. 2021.}

15) GRAFOS EULERIANOS. inf.ufsc.br, 2021. Disponível em: \hiperlink{www.inf.ufsc.br}. Acesso em: 01 de Fevereiro de 2021.

16) GRAFO PLANAR. 2021. Disponível em: \hiperlink{https://homepages.dcc.ufmg.br} Acesso em: 13, Abril de 2021

17) GRAFOS HAMILTONIANOS \hiperlink{http://www.inf.ufsc.br/grafos/temas/hamiltoniano.htm}

18) JURKIEWICZ, SAMUEL. Grafos - Uma introdução. OBMEP, 2009. Acesso em Novembro 2020.

19) ONUCHIC, L.L.R. & ZUFFI, E. M. O ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas e os processos cognitivos superiores. Revista Iberoamericana de matemática, 2007, 79- 97.

20) RANGEL, Socorro. Teoria do Grafos, Notas de aula, IBILCE, Unesp, 2002-2013.

21) SILVA, Acásio Júnior.

GRAFOS: ÁRVORE E EMPARELHAMENTO, ABORDAGEM E SUGESTÕES DE APLICAÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO. Dissertação de mestrado. RECIFE. Acesso em: Maio 2021.

22) SILVA, Peterson Euzébio. Emparelhamento em Grafos. Dissertação (Mestrado em Matemática- RECIFE). Acesso em 20 de fevereiro de 2021

23) SPINILLO, A.G. et al. Formulação de Problemas Matemáticos de Estrutura Multiplicativa por Professores do Ensino Fundamental. Bolema, Rio Claro (SP). Acesso em 25 de julho de 2020.

24) TEORIA DOS GRAFOS. Disponível em: \hiperlink{<https://www.ibilce.unesp.br} Acesso em: 02, Fevereiro de 2021