UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Geraldo Erilson da Costa Silva Júnior

Proposta de aplicação dos Lemas de Kaplansky para o Ensino Médio

Campina Grande - PB
Agosto/2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Geraldo Erilson da Costa Silva Júnior

Proposta de aplicação dos Lemas de Kaplansky para o Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Alexsandro Bezerra Cavalcanti

Campina Grande - PB
Agosto/2021

S586p Silva Júnior, Geraldo Erilson da Costa.
Proposta de aplicação dos Lemas de Kaplansky para o Ensino Médio / Geraldo Erilson da Costa Silva Júnior. – Campina Grande, 2021.
64 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.
"Orientação: Prof. Dr. Alexsandro Bezerra Cavalcanti".
Referências.

1. Análise Combinatória. 2. Lemas de Kaplansky. 3. Sequência Didática. I. Cavalcanti, Alexsandro Bezerra. II. Título.

CDU 51:37.013(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA MARIA ANTONIA DE SOUSA CRB 15/398

Geraldo Erilson da Costa Silva Júnior

Proposta de aplicação dos Lemas de Kaplansky para o Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 27 de agosto de 2021:

Alexsandro Bezerra Cavalcanti

Professor Dr. Alexsandro Bezerra Cavalcanti
Orientador

Professor Dr. José de Arimatéia Fernandes
Membro interno - UFCG

DMEsteves

Professora Dra. Divanilda Maia Esteves
Membro externo - UEPB

Campina Grande - PB
Agosto/2021

Dedico esse trabalho a minha família em especial a minha mãe (Elza de Almeida) por me incentivar desde o começo nessa caminhada.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, que me concedeu saúde e força para seguir em frente permitindo realizar esse sonho, estando presente em todos os momentos da minha vida.

À minha mãe Elza, ao meu pai Erilson, à minha irmã Ericka, à minha esposa Geane e em especial aos meus dois pequenos Joaquim meu filho e Helena minha sobrinha, pelo amor, dedicação, carinho e incentivo que sempre tiveram comigo.

Ao Professor Dr. Alexsandro Bezerra Cavalcanti, pela orientação, dedicação, apoio e empenho durante o desenvolvimento da pesquisa.

A todos os colegas da UFCG, especialmente Bruno Lopes e José Renato pelo companheirismo, amizade, ajuda nos estudos e boas conversas em nossas viagens para as aulas do curso.

Aos Professores do PROFMAT-UFCG, pela paciência, empenho, competência e apoio durante o curso, compartilhando conhecimentos.

Aos meus amigos, pelo incentivo nos estudos em especial minha amiga Franciane Almeida que sempre me ajudou em trabalhos acadêmicos.

À gestão escolar, professores e alunos da Ecit Manoel Alves Campos pela colaboração e disposição no processos de implementação e obtenção dos dados desta pesquisa.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

"Cada segundo é tempo
para mudar tudo para sempre.
(Charles Chaplin)

Resumo

Este estudo tem por objetivo desenvolver uma proposta didática de aplicação dos Lemas de Kaplansky para o Ensino Médio. Para tanto, realizamos uma pesquisa de campo na qual desenvolvemos um conjunto de atividades que foram aplicadas em uma turma do 2º ano do Ensino Médio na disciplina de matemática. Levando em consideração que as aulas presenciais encontram-se suspensas em decorrência da pandemia da COVID - 19 e, desde então foi adotado o modelo de ensino remoto, tal aplicação ocorreu de modo assíncrono, por meio do Google Classroom, onde foi disponibilizada a sequência didática. Com base nos resultados, constatamos que, embora tenham surgido dificuldades na resolução das atividades, alguns alunos demonstraram ter compreendido bem o enunciado dos Lemas. Esperamos que esse possa ser um produto inicial para ser utilizado por professores e alunos da educação básica.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Lemas de Kaplansky. Sequência Didática.

Abstract

This study aims to develop a didactic proposal for the application of Kaplansky's Lemmas to High School. For that, we carried out a field research in which we developed a set of activities that were applied to a 2º year of High School class in the methematics subject. Taking into account that the in-person classes chosen were suspended due to the COVID - 19 pandemic and, since then, the remote learning model was adopted, such error request asynchronously, through Google Classroom, where the didactic sequence was made available. Based on the results, we found that, although there were difficulties in solving the activities, some students demonstrated that they understood the statement of the Lemmas enunciation well. We hope that this can be an initial product to be used by teachers and students of basic education.

Keywords: Combinatorial Analysis. Kaplansky's Lemmas. Didactic sequence.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

O interesse pela Análise Combinatória surgiu desde a minha graduação, onde tive a oportunidade de iniciar um aprofundamento em seu estudo e compreender melhor os aspectos relacionados ao seu processo de ensino e aprendizagem no ensino básico. Nesse sentido, o desejo de continuar estudando mais profundamente essa temática perdurou até o mestrado, o que acarretou na ideia para o desenvolvimento desta proposta de pesquisa.

Por meio de uma revisão bibliográfica sobre esse tema, foi possível perceber que em muitos casos as metodologias de ensino utilizadas pelos professores nem sempre favorecem a construção de significados e do pensamento combinatório por parte dos alunos, como aponta MARTINS (2018). Um dos fatores que contribui para as dificuldades na Análise Combinatória consiste na maneira de ensinar matemática no ensino básico, pois muitas vezes se prioriza uma abordagem dos conteúdos de modo mecânico.

Tratando-se da maneira como vem sendo desenvolvido o ensino da Análise Combinatória, segundo PASSOS (2017), por vezes, os professores fazem uma abordagem voltada à aplicação de fórmulas, tornando o trabalho automático e sem sentido. Dessa forma, vale salientar que mais importante do que decorar fórmulas e aplicá-las é interpretar, organizar os dados e criar estratégias de resolução, pois as fórmulas devem ser utilizadas como facilitadoras desse processo.

Embora a Análise Combinatória tenha aplicação em diversos ramos dentro e fora da matemática, como na Probabilidade, Estatística, Economia, Biologia, entre outros, sua abordagem no ensino básico por vezes se resume ao estudo de Permutações, Arranjos e Combinações, o que, conforme MORGADO (2016), corresponde a uma visão incompleta, pois a Análise Combinatória trata de vários tipos de problemas e de outras técnicas para solucioná-los.

Assim, formalizar outros métodos de contagem que são acessíveis aos alunos do ensino básico pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e da criatividade por parte dos estudantes, uma vez que, terão a possibilidade de lidar com situações e contextos diferentes daqueles que já estão habituados.

Diante do exposto, esperamos, com essa pesquisa, mostrar aos discentes a riqueza da aplicabilidade da Análise Combinatória por meio da abordagem de um dos métodos de contagem: os Lemas de Kaplansky. Dessa maneira, nos propomos a preparar uma sequência didática a ser aplicada com alunos do Ensino Médio que promova uma interação com esses Lemas.

Com o intuito de conhecer as produções relacionadas aos Lemas de Kaplansky, para então analisar as semelhanças e outras contribuições que podem ser oriundas da realização deste estudo, foi feito um levantamento bibliográfico no banco de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) sobre as dissertações produzidas que englobam esse tema. Assim, apresenta-se a seguir, de maneira sucinta, os trabalhos que foram encontrados.

TROVÃO (2015), em sua pesquisa, expõe alguns métodos que facilitam na resolução de problemas de contagem, entre eles têm-se os Lemas de Kaplansky. Por conseguinte, esses Lemas são abordados de maneira resumida nessa pesquisa, por meio da apresentação e soluções de alguns exemplos, para, em seguida, apresentar o desenvolvimento de sua fórmula. Feito isso, o autor segue com a exposição de outros temas.

Já LOPES (2016) apresenta, em sua dissertação, uma proposta para abordagem do conteúdo de Análise Combinatória para alunos do Ensino Médio. Assim, o autor mostra a importância de contribuir com a compreensão do desenvolvimento estrutural do raciocínio combinatório utilizado na construção das suas fórmulas, possibilitando que os alunos não façam apenas sua aplicação de forma mecânica.

Nesse estudo, os Lemas de Kaplansky são apresentados dentro do capítulo das Permutações e abordados com a utilização de estruturas simbólicas, em que a permutação dessas estruturas foi feita de maneira estratégica, sem o uso das Combinações. Desse modo, em seu trabalho, o pesquisador exibe soluções de questões retiradas de olímpiadas de matemática, de livros didáticos e de exames de seleção do Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA). Essas questões seguem uma mesma linha de raciocínio, no entanto, o nível de dificuldade vai evoluindo. Por fim, o autor espera que, com esses problemas, os alunos tenham a oportunidade de encontrar padrões e modelá-los na resolução de situações mais difíceis.

Com uma perspectiva semelhante, GARCIA (2017), em sua dissertação, busca favorecer a compreensão da Análise Combinatória pelos alunos do Ensino Médio. Além disso, o autor considera que sua pesquisa pode ser um material de referência para professores que ensinam esse conteúdo. Dessa forma, o pesquisador apresenta como desenvolver toda a Análise Combinatória tomando como base o Princípio Fundamental de Contagem (PFC), sem restringir-se ao uso de fórmulas e utilizando os conceitos de Arranjos e Combinações apenas para facilitar nos cálculos. Para tanto, nessa pesquisa, a Análise Combinatória foi construída por meio da resolução de problemas que necessitam de diversas estratégias, raciocínios e mostram a sua aplicabilidade. Nesse sentido, entre os temas abordados nesse estudo encontram-se os Lemas de Kaplansky.

Prosseguindo, Ferreira (2017), em sua pesquisa, apresentou algumas técnicas de contagem de grande utilidade para a resolução de muitos problemas de Análise Combinatória, entre as quais podemos encontrar os Lemas de Kaplansky. Além disso, a pesquisadora utilizou-as para apresentar duas formas distintas de resolver o Problema de Lucas [1] e finaliza o trabalho solucionando problemas semelhantes ao supracitado. Em suas considerações finais, a autora ressalta que, às vezes, no ensino de Análise Combinatória, algumas técnicas de contagem são negligenciadas por serem consideradas muito complexas. Então, com o desenvolvimento de sua pesquisa, foi possível perceber que essas podem ser aplicadas na solução de vários problemas práticos e interessantes.

Dando seguimento, LIMA (2020), buscou investigar a compreensão de alunos do 3º ano do Ensino Médio sobre a resolução de problemas de contagem relacionados ao Princípio das Gavetas aos Lemas de Kaplansky. Dessa forma, para coletar os dados, o pesquisador fez uso de questionários semiestruturados e testes contendo problemas de contagem. Além disso, também foram realizadas oficinas para o estudo do Princípio das Gavetas e dos Lemas de Kaplansky. O autor defende a possibilidade do estudo dessas temáticas por alunos do Ensino Médio, já que os conceitos básicos para desenvolvimento destes conteúdos já são estudados pelos alunos no ensino básico. Assim, por meio de sua investigação, o pesquisador alcançou resultados positivos que confirmaram que tais assuntos são acessíveis aos estudantes de nível médio.

Baseado nesses estudos, pode-se observar que há uma semelhança entre as pesquisas anteriormente apresentadas, pois elas buscam contribuir com a abordagem da Análise Combinatória, apresentando métodos de contagem que vão além do que está proposto nos currículos do ensino básico e sem fazer o uso demasiado de suas fórmulas, propondo a resolução de problemas práticos e o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Nesse sentido, esta pesquisa assemelha-se aos estudos apresentados, pois também visa produzir um material que possa contribuir no processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória. No entanto, nossa metodologia de ensino é diferente, já que se propõe a elaboração e aplicação de uma sequência de ensino para os Lemas de Kaplasnky de modo gradativo, onde buscamos levar os alunos a compreensão da importância de estudar sobre essa temática e quando ela pode ser aplicada, além de resolver diversos problemas que apresentem situações cotidianas.

Dessa forma, apresenta-se abaixo os objetivos geral e específicos que norteiam esta pesquisa.

1.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma proposta didática de aplicação dos Lemas de Kaplansky para o Ensino Médio.

[1] Conhecido também por Ménege Problem. Conforme Ferreira (2017), este problema foi formulado por François Édouard Lucas em 1891 e consiste em determinar de quantas maneiras certo número de casais podem sentar em torno de uma mesa circular, de modo que pessoas do mesmo sexo não sentem-se juntas e que nenhum casal fique ao lado do seu par.

1.2 Objetivos Específicos

- Apresentar alguns dos principais fundamentos da Análise Combinatória;
- Utilizar os Lemas de Kaplansky como método de resolução de diversos problemas;
- Construir e aplicar uma sequência didática, visando contribuir para o desenvolvimento dos Lemas de Kaplansky numa turma do 2º ano do Ensino Médio;
- Ampliar a abordagem dos conceitos da Análise Combinatória no Ensino Médio;
- Descrever como os documentos norteadores da educação básica no Brasil sugerem que seja desenvolvido o ensino da Análise Combinatória.

1.3 Organização

Esta pesquisa está organizada da seguinte forma: além deste Capítulo 1, que corresponde a Introdução do trabalho, no Capítulo 2, apresentamos as noções básicas da Análise Combinatória, seguida das suas definições e de exemplos da aplicação. Já no Capítulo 3, discorremos sobre o tema principal da pesquisa, que são os Lemas de Kaplansky, onde apresentamos seu enunciado, bem como uma demonstração para cada Lema e exemplos práticos de suas aplicações. No Capítulo 4, fizemos um levantamento nos documentos que norteiam a educação básica no Brasil, em algumas pesquisas acadêmicas sobre o ensino da Análise Combinatória e as dificuldades relacionadas ao seu processo de ensino e aprendizagem. O Capítulo 5 corresponde à abordagem metodológica da pesquisa, onde apresentamos os sujeitos participantes, os instrumentos utilizados e as etapas de sua realização. No Capítulo 6, discorremos sobre as análises e discussões dos resultados obtidos. Por fim, apresentamos as conclusões do trabalho, seguida das referências e do apêndice.

2 Noções Básicas da Análise Combinatória

2.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos os conceitos básicos da Análise Combinatória, bem como suas definições e exemplos. No caso dos Arranjos e das Combinações Simples, para cada problema é apresentado uma solução com a aplicação direta da definição e outra sem sua utilização, pois a finalidade é perceber que não há uma obrigatoriedade de uso de fórmulas, visto que, com a aplicação do Princípio Aditivo e/ou Multiplicativo,[1] estes problemas podem ser resolvidos. É importante ressaltar que as definições que constam nesse capítulo foram fundamentadas em HAZZAN (2013), MORGADO (2016) e TANEJA I.J.; ARAÚJO (2010).

2.2 Fundamentos Básicos da Análise Combinatória

Em primeiro lugar, consideramos ser importante apresentar os conceitos básicos da Análise Combinatória, tendo em vista que os alunos do ensino básico tem o primeiro contato com esse campo da matemática a partir do estudo desses conceitos. Além disso, eles podem ser aplicados em diversos problemas práticos e tem um papel importante também na teoria da Probabilidade. Sendo assim, a seguir apresentam-se estes conceitos.

2.3 Princípio aditivo

Definição 2.1 Sejam dois conjuntos A e B disjuntos[2] , sendo a e b o número de seus elementos, respectivamente. Então, $A \cup B$ possui $a + b$ elementos.

Exemplo 2.1: Lorena, com muita sede, foi a uma lanchonete onde havia disponíveis quatro opções de suco, cinco opções de refrigerante e duas marcas de água mineral. De quantas maneiras diferentes Lorena pode escolher uma bebida?

Solução: Considerando cada tipo bebida como um conjunto, ou seja, S o conjunto dos sucos, R o conjunto dos refrigerantes e A o das águas, é possível perceber que esses conjuntos são disjuntos, isto é, não possuem elementos em comum. Daí, pelo Princípio

[1] Também conhecido como Princípio Fundamental de Contagem.
[2] Dois ou mais conjuntos são ditos disjuntos quando não possuem elementos em comum.

Aditivo, tem-se que Lorena tem $4 + 5 + 2 = 11$ maneiras diferentes de escolher uma bebida.

2.4 Princípio Multiplicativo

Definição 2.2: Se uma escolha E_1 puder ser feita de m maneiras e se, realizada essa escolha E_1, a escolha E_2 puder ser feita de n maneiras, então o número de formas de se realizar as escolhas E_1 e E_2 é igual a $m \cdot n$.

Exemplo 2.2: Amanda deseja fazer uma viagem de Sanharó até o Rio de Janeiro. No entanto, não há como ela fazer essa viagem diretamente, ela precisará escolher uma linha de ônibus e uma companhia aérea para fazer o trajeto Sanharó - Recife - Rio de Janeiro. Para isso, ela tem três linhas diferentes de ônibus para ir de Sanharó até Recife e, chegando lá, ela dispõe de quatro companhias aéreas para o Rio de Janeiro. Nessas condições de quantas maneiras Amanda pode fazer essa viagem?

Solução: Sendo E_1 a escolha da linha de ônibus e E_2 a escolha da companhia aérea. Temos, então, 3 maneiras para escolher E_1 e 4 maneiras para E_2. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o número de maneiras disponíveis para Amanda realizar sua viagem é igual a $3 \cdot 4 = 12$.

2.5 Fatorial

Em problemas de contagem, é muito frequente a utilização da multiplicação de fatores consecutivos, então, antes de continuar com a apresentação dos conceitos da Análise Combinatória, é necessário definir a notação de fatorial.

Definição 2.3 Dado um número natural n, denomina-se fatorial de n o produto de todos os números naturais consecutivos de 1 até n. Em símbolos, $n!$ (lê-se "n fatorial" ou "fatorial de n"). Assim, temos a seguinte relação:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ para } n \geq 2.$$

Por convenção

$0! = 1,$

$1! = 1.$

O fatorial é útil na simplificação de expressões em que nem sempre é necessário desenvolver o produto de todos os números naturais, ou seja, o fatorial de um número natural é igual ao produto dele pelo fatorial do seu antecessor.

Exemplo 2.3: Simplifique a expressão $8!/5!$.

Solução: Aplicando a definição de fatorial, temos que:

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!$$

Daí;

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

2.6 Permutação Simples

Definição 2.4: Seja B um conjunto com n elementos, ou seja, $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_\mathrm{n}\}$. Denomina-se Permutação Simples, em símbolo P_n, dos n elementos de B, cada agrupamento ordenado sem repetição desses n elementos.

Exemplo 2.4: Davi, Bruna e Marcelo devem ser dispostos lado a lado, para uma foto. Qual o total de possibilidades de disposições?

Solução: Cada forma de disposição das três pessoas para foto é um agrupamento diferente, ou seja, é uma Permutação Simples das três pessoas. Então, para escolha da 1ª posição, temos 3 possibilidades, definida essa escolha, para a 2ª posição, temos 2 possibilidades, restando apenas 1 possibilidade para a 3ª posição. Daí, pelo Princípio Multiplicativo, existe $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ disposições.

Agrupando de forma organizada, temos as seguintes possibilidades:

(Davi, Bruna, Marcelo), (Davi, Marcelo, Bruna), (Bruna, Marcelo, Davi), (Bruna, Davi, Marcelo), (Marcelo, Davi, Bruna) e (Marcelo, Bruna, Davi).

Pode-se generalizar a ideia anterior para o caso de n elementos distintos, pois cada Permutação Simples de n elementos pode ser obtida em n etapas. Assim, na primeira etapa qualquer dos n elementos podem ser escolhidos, na segunda etapa há uma opção a menos que na etapa anterior, isto é, $n - 1$ opções, para a terceira etapa há duas opções a menos, ou seja, $n - 2$, e assim sucessivamente até que, para a última etapa, temos apenas 1 elemento.

Então, pelo Princípio Multiplicativo temos:

$$P_\mathrm{n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Exemplo 2.5: Quantos são os anagramas da palavra QUEIJO?

Solução: Anagramas são rearranjos das letras de uma palavra, então os anagramas da palavra QUEIJO consistem na ordenação das letras Q, U, E, I, J, O. Assim, temos 6 elementos para serem ordenados. Aplicando o conceito de Permutação Simples, temos:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ anagramas.}$$

2.7 Permutação Com Repetição

Primeiramente, analisemos o número de anagramas de uma palavra quando há letras repetidas, como é o caso de AMADA. Se todas as letras fossem distintas, o total de anagramas seria $P_5 = 5! = 120$. Contudo, a letra A aparece 3 vezes e a troca de posição entre essas letras não gera um novo anagrama. Portanto, é necessário desconsiderar os casos contados repetidamente que são $P_3 = 3! = 6$ casos. Logo, o total de anagramas da palavra AMADA é:

$$\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20.$$

Desse modo, apresenta-se a definição a seguir:

Definição 2.5: Dados n elementos, em que exista a repetição de um deles α_1 vezes, outro α_2 vezes, outro α_3 vezes e assim por diante, o total de permutações desses n elementos é dado por:

$$P_n^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \alpha_3! \cdot \ldots}.$$

Exemplo 2.6: Quantos são os anagramas da palavra SANHARÓ?

Solução: Nesse caso, temos 7 elementos (S, A, N, H, A, R e O). Além disso, a letra A aparece 2 vezes. Então, pela definição, esse é um caso de Permutação com repetição. Daí, para determinar o total de anagramas, calculamos:

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = 2520.$$

2.8 Arranjo Simples

Definição 2.6 Conforme HAZZAN (2013), dado um conjunto A com n elementos, ou seja, $A = \{a_1, a_2, ..., a_{\mathrm{n}}\}$, denomina-se arranjo dos n elementos, sendo eles tomados p a p $(1 \leq p \leq n)$, a qualquer r-upla (sequência de p elementos) formadas por elementos de A, todos distintos.

Então, um Arranjo Simples é uma sequência ordenada de p elementos distintos, em que cada elemento é escolhido a partir dos n elementos do conjunto A.

Pelo Princípio Multiplicativo, o número de arranjos é dado por:

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{n,p}} &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(p-1)) \\ A_{\mathrm{n,p}} &= \frac{n!}{(n-p)!}, (1 \leq p \leq n) \end{aligned}$$

Os problemas referentes a esse conceito não precisam necessariamente de sua fórmula para serem solucionados. Portanto, em cada exemplo a seguir apresentaremos uma solução sem o uso da fórmula e outra com sua utilização.

Exemplo 2.7: Em uma corrida, há 52 participantes em que todos têm a mesma chance de vencer. De quantas maneiras distintas se podem determinar os classificados em 1º, 2º e 3º lugar?

Solução 1: Nesse problema, é importante observar que a ordem de escolha para o 1º, 2º e 3º lugar é importante. Por exemplo, supondo o pódio formado pelos atletas (Ana, Bruno, Pedro), temos Ana em 1º lugar, Bruno em 2º e Pedro em 3º. Entretanto, o pódio formado pelos mesmos atletas, mas em uma disposição diferente altera a classificação, como no caso (Bruno, Pedro, Ana) em que teremos Bruno em 1º lugar, Pedro em 2º e Ana em 3º. Para solucionar esse problema, vamos determinar de quantos modos podemos escolher o pódio. Assim, temos que há 52 possibilidades para o 1º lugar, pois qualquer atleta pode vencer a corrida, já para o 2º lugar, temos 51 possibilidades, tendo em vista que um dos atletas já ocupou o 1º lugar, então temos uma possibilidade a menos e, seguindo esse mesmo raciocínio, temos 50 possibilidades para o 3º lugar. Daí, pelo Princípio Multiplicativo, temos $52 \cdot 51 \cdot 50 = 132600$ possibilidades para classificação no 1º, 2º e 3º lugar.

Solução 2: Para encontrar todas as possibilidades de classificação em 1º, 2º e 3º lugar, teremos que escolher 3 atletas de um total de 52, lembrando que a ordem interfere na classificação do pódio. Assim, de acordo com a definição, este é um problema de Arranjo Simples. Logo, para resolvê-lo basta calcular $A_{52,3}$. Então, teremos:

$$A_{52,3} = \frac{52!}{(52-3)!} = \frac{52!}{49!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{49!} = 52 \cdot 51 \cdot 50 = 132600$$

Portanto, há 132 600 maneiras diferentes de classificações em 1º, 2º e 3º lugar.

Exemplo 2.8: Quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 5, 7, 8 e 9?

Solução 1: Observe que nesse problema os algarismos não podem se repetir, então, para solucioná-lo, vamos determinar o número de possibilidades para escolha de cada algarismo. Assim, para o 1º algarismo, podemos utilizar qualquer um dos números disponíveis, ou seja, temos 5 possibilidades, já para o 2º algarismo, temos uma possibilidade a menos, pois não pode haver repetições, então temos 4 possibilidades, prosseguindo, temos 3 possibilidades para o 3º algarismo e, por fim, 2 para o 4º algarismo. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ números distintos.

Solução 2: Para determinar o total de números que podem ser formados, precisamos escolher 4 números distintos do total de 5. Então, estamos diante de um problema de Arranjo Simples, pois a ordem de escolha é importante e não pode haver repetição de algarismos. Desse modo, a quantidade de números formados é dada por:

$$A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Logo, o total de números nessa condição é 120.

2.9 Combinação Simples

Definição 2.7: Dado um conjunto A com n elementos, ou seja, $A = \{a_1, a_2, ..., a_{\mathrm{n}}\}$, denominamos Combinação Simples aos subconjuntos de A constituídos por p elementos tomados p a p $(0 \leq p \leq n)$.

Desse modo, a ideia de combinação está intuitivamente relacionada à noção de escolher subconjuntos em que a ordem de escolha dos seus elementos não é importante, por exemplo, o conjunto $\{a, b, c\}$ não é diferente do conjunto $\{c, a, b\}$. Para o cálculo de uma Combinação Simples, temos a seguinte fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}, \ (0 \leq p \leq n).$$

Assim como no caso do Arranjo Simples, os problemas relacionados à Combinação Simples não precisam ser solucionados obrigatoriamente com o uso de sua fórmula. Dessa maneira, apresentaremos novamente duas propostas de solução para cada exemplo, uma sem o uso da fórmula e outra com sua utilização.

Exemplo 2.9: De um grupo de 25 alunos, de quantas formas diferentes se pode formar uma comissão com 5 integrantes para organizar os jogos escolares?

Solução 1: Formar uma comissão corresponde a escolher pessoas de um grupo sem se preocupar com a ordem de cada escolha. Assim, temos um total de 25 alunos dos quais apenas 5 farão parte dessa comissão. Então, vamos pensar no total de possibilidades para escolha de cada membro dessa comissão. Logo, temos 25 possibilidades para fazer a primeira escolha, 24 possibilidades para fazer a segunda escolha, 23 possibilidades para a terceira escolha, 22 possibilidades para a quarta e 21 possibilidades para a quinta escolha. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, obtemos $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 6375600$ possibilidades. Contudo, os agrupamentos só são distintos quando apresentam pelo menos um elemento diferente, tendo em vista que inverter a ordem de escolha dos elementos não altera a comissão formada. Assim, é necessário desconsiderar os casos em que os membros simplesmente trocam de posição na comissão, ou seja, permutam entre si. Logo, devemos dividir o resultado anterior pelo número de permutações entre os 5 membros, isto é, por 5!, para descontar os casos contados a mais. Portanto, o número de maneiras de formar essa comissão é:

$$\frac{6375600}{5!} = \frac{6375600}{120} = 53130.$$

Solução 2: Dado que temos 25 alunos e será formada uma comissão, com apenas 5 destes, então, para determinar o total de possibilidades de formar essa comissão basta calcular $C_{25,5}$, ou seja, uma Combinação de 25 elementos tomados 5 a 5:

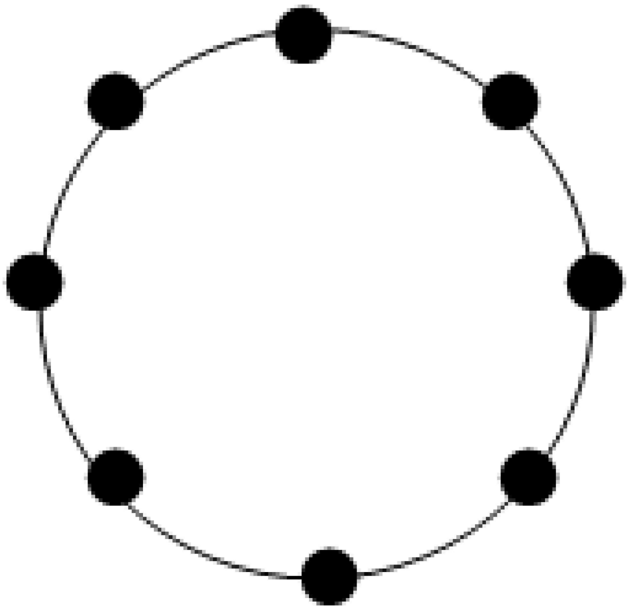
$$C_{25,5} = \frac{25!}{(25-5)!5!} = \frac{25!}{20!5!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20!}{20!120} = \frac{6375600}{120} = 53130.$$

Logo, podemos formar 53130 comissões distintas.

Exemplo 2.10: Sobre uma circunferência, marcam-se 8 pontos distintos. Com vértices nesses pontos, quantos triângulos distintos podem ser construídos?

Solução 1: Esse problema pode ser representado pela Figura 1.

Figura 1 – Representação do exemplo 2.12



Fonte: Autoria própria

Para formar triângulos com vértices nesses pontos, basta escolher 3 dos 8 pontos sobre a circunferência. Assim, há 8 possibilidades para escolha do primeiro ponto, 7 possibilidades para escolha do segundo ponto e 6 possibilidades para escolha do terceiro ponto. Pelo Princípio Multiplicativo temos $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ possibilidades. No entanto, é necessário lembrar que a permutação dos pontos não determina um triângulo diferente. Assim, para desconsiderar os casos contados a mais, devemos dividir o resultado obtido por $3! = 6$. Desse modo, o número total de triângulos distintos que podem ser construídos é:

$$\frac{336}{6} = 56.$$

Solução 2: Para formar esses triângulos, devemos escolher como vértices 3 dos 8 pontos que estão dispostos sobre a circunferência. Logo, o problema é de Combinação Simples. Então, vamos calcular uma combinação de 8 elementos tomados 3 a 3:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!6} = \frac{336}{6} = 56.$$

3 Lemas de Kaplansky

3.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos o primeiro e segundo Lemas de Kaplansky, publicados no *Bulletin of the American Mathematical Society* por Irving Kaplansky (1917-2006), em 1943. Tais Lemas foram desenvolvidos para resolver o Problema de Lucas ou *Ménage Pròbleme*. No desenrolar do capítulo, apresentaremos alguns problemas solucionados por meio da aplicação desses Lemas.

3.2 Primeiro Lema de Kaplansky

Antes de apresentar o primeiro Lema de Kaplansky, optamos por iniciar com um exemplo que caracteriza uma situação para sua aplicação. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 3.1 Considere o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. De quantos modos é possível formar um subconjunto com dois desses elementos de forma que não haja números consecutivos?

Solução Esse problema poderia ser resolvido por meio da enumeração de todos os casos, pois só há 6 subconjuntos que atendem as suas especificações, que são: $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$. No entanto, poderíamos chegar à mesma conclusão anterior sem a necessidade de enumerar caso a caso, como veremos a seguir.

Para solucionar esse problema, vamos marcar, de maneira ordenada, com o sinal de $(+)$ os elementos do conjunto que farão parte do subconjunto e com o sinal $(-)$ os elementos do conjunto que não farão parte do subconjunto. Assim, teríamos:

O subconjunto $\{1, 3\}$ representado por$+ - + - -$;

O subconjunto $\{2, 5\}$ representado por $- + - - +$;

O subconjunto $\{3, 4\}$ representado por $- - + + -$.

Observe que o exemplo de subconjunto $\{3, 4\}$ não satisfaz as especificações do problema, pois os dois sinais $(+)$ juntos representam que há dois números consecutivos, neste caso os números 3 e 4.

Analisando os exemplos acima, podemos perceber que, para solucionar o problema, devemos distribuir em uma fila 3 sinais $(-)$ e 2 sinais $(+)$ de modo que não haja sinais $(+)$ juntos.

Para isso, podemos determinar uma posição para os 3 sinais $(-)$ e escolher os espaços de colocar os sinais de $(+)$.

Figura 2 – Representação de uma possível disposição para os sinais de $(-)$ e $(+)$

Fonte: Autoria própria

Com base na Figura 2, dados os 3 sinais de $(-)$ vemos que há 4 opções de espaços vazios para colocar os 2 sinais $(+)$, isto significa que, das 4 opções disponíveis, devemos escolher duas delas. Assim, isso pode ser feito de $C_{4,2} = 6$ maneiras.

Logo, podemos formar 6 subconjuntos, com 2 elementos do conjunto dado, de forma que não haja números consecutivos.

Teorema 3.1 (Primeiro Lema de Kaplansky) O número de subconjuntos com p elementos de $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ nos quais não há números consecutivos é dado por:

$$f(n,p) = C^p_{n-p+1} = C_{n-p+1,p}$$

Demonstração: Considere $f(n,p)$ o número de subconjuntos com p elementos de A que não possui números consecutivos. De maneira análoga ao exemplo anterior, utilizamos novamente as representações com sinais $(+)$ e $(-)$ para os elementos do conjunto que farão parte do subconjunto e para os que não farão parte dele, respectivamente. Teremos, então, p sinais $(+)$ e $n-p$ sinais $(-)$. Então, organizando-os em fila de modo que não haja sinais $(+)$ consecutivos, entre os $n-p$ sinais $(-)$, existirão $n-p+1$ espaços disponíveis para colocar os p sinais $(+)$. Daí, só é preciso escolher entre os $n-p+1$ espaços disponíveis aqueles que serão ocupados pelos p sinais $(+)$.

Assim, teremos C^p_{n-p+1} maneiras de distribuir os sinais $(+)$ sem que haja números consecutivos.

Exemplo 3.2 Para assistir a uma apresentação no auditório, Pedro, Lucas e Eduardo chegaram atrasados e só encontraram uma fila com 12 lugares disponíveis para sentar. Como os rapazes não se falam, optaram por não sentar em cadeiras vizinhas. De quantas maneiras Pedro, Lucas e Eduardo poderão sentar-se?

Solução: Para resolver esse problema deve-se, inicialmente, escolher 3 cadeiras descontínuas das 12 que se encontram disponíveis, isso pode ser efetuado por meio da aplicação do primeiro Lema de Kaplansky para obter $f(12,3)$, que corresponde ao número de escolhas das 3 cadeiras não consecutivas. Assim, obtemos:

$$f(12,3) = C^3_{12-3+1} = C^3_{10} = 120.$$

Logo, há 120 maneiras de escolher as 3 cadeiras respeitando as condições estabelecidas. Além disso, cada rapaz deve ser designado para uma cadeira, então precisamos determinar o número de possibilidades de fazer essa distribuição, isto é, encontrar o número de permutações entre Pedro, Lucas e Eduardo, o que pode ser feito de $P_3 = 3! = 6$ maneiras.

Daí, pelo Princípio Multiplicativo, a resposta desse problema é dada por $120{\cdot}6 = 720$ maneiras para que Pedro, Lucas e Eduardo possam sentar-se sem que haja cadeiras consecutivas.

Exemplo 3.3 MORGADO (2016) Quantos são os anagramas de araraquara que não possuem duas letras "a"consecutivas?

Solução: Inicialmente, devemos fazer a escolha do número de espaços disponíveis para colocar a vogal a, de forma que não haja duas dessas vogais em espaços consecutivos. Assim, basta calcular $f(10,5) = C^5_{10-5+1} = C^5_6 = 6$ possibilidades de posições para a.

Dando continuidade, devemos agora calcular o número de maneiras de organizar as demais letras (3 letras r, 1 letra q e 1 letra u), ou seja, devemos encontrar os número de permutações das 5 letras sendo 3 delas repetidas, isso pode ser feito da seguinte maneira:

$$P_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3!1!1!} = 20.$$

Então, pelo Princípio Multiplicativo, há $6 \cdot 20 = 120$ anagramas da palavra araraquara que não possuem letras a consecutivas.

Exemplo 3.4 (Portal da Matemática OBMEP) Em uma loteria, seis números do conjunto $\{1, 2, 3, ..., 49\}$ são escolhidos aleatoriamente. De quantas maneiras isto pode ser feito, de modo que, dentre os seis números escolhidos, existam pelo menos dois deles que sejam consecutivos?

Solução Primeiramente, para solucionar esse problema, vamos determinar o total de possibilidades de escolher aleatoriamente 6 números desse conjunto. Para isso, basta calcularmos uma combinação simples em que, de 49 elementos, 6 serão escolhidos, o que pode ser feito de $C^6_{49} = 13983816$ modos. Entretanto, só interessam os casos em que há, entre os números escolhidos, pelo menos dois consecutivos. Logo, a estratégia utilizada para solucionar o problema consiste em retirar do total de possibilidades os casos que não atendem as suas especificações, isto é, devemos retirar os casos em que não há números consecutivos, e, como já foi exposto anteriormente, isso pode ser feito por meio da aplicação do primeiro Lema de Kaplansky.

Assim, vamos agora determinar o total de possibilidades de escolher 6 números do conjunto dado de modo que não haja números consecutivos. Daí, basta calcular:

$$f(49,6) = C^6_{49-6+1} = C^6_{44} = 7059052 \text{ modos.}$$

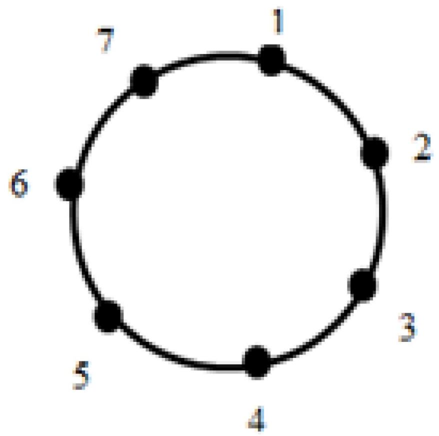
Portanto, o número de maneiras de escolher 6 números do conjunto $\{1, 2, 3, ..., 49\}$ de modo que haja pelo menos dois números consecutivos é $13983816 - 7059052 = 6924764$ maneiras.

3.3 Segundo Lema de Kaplansky

De modo semelhante ao que ocorreu na seção anterior, antes de apresentar o segundo Lema de Kaplansky, vamos analisar a sua aplicação por meio de um exemplo.

Exemplo 3.5 Suponha que os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ estão dispostos sobre um círculo. De quantas maneiras é possível formar um subconjunto com três desses elementos de forma que não haja números consecutivos?

Figura 3 – Representação da disposição dos elementos do conjunto sobre o círculo



Fonte: Autoria própria

Solução: Note que, nessa situação, o fato dos elementos do conjunto estarem dispostos sobre um círculo faz com que os números 1 e 7 sejam consecutivos, então, para encontrar a solução desse problema, podemos dividi-lo em dois casos: no primeiro, determinamos o número de possibilidades de formar subconjuntos com três elementos, de modo que o número 1 pertença a esses subconjuntos, e no segundo caso calculamos o número de subconjuntos nos quais o número 1 não pertence a esses subconjuntos.

Caso 1: O número 1 pertence aos subconjuntos com três elementos .

Sabendo que o número 1 pertence aos subconjuntos, temos que os números 2 e 7 não podem pertencer, pois são números consecutivos a ele. Assim, para formar esses subconjuntos, devemos escolher mais dois números entre os elementos $\{3, 4, 5, 6\}$ para compor os subconjuntos, de modo que não haja números consecutivos. Pelo primeiro Lema de Kaplansky, isso pode ser feito de $f(4, 2) = C^2_{4-2+1} = C^2_3 = 3$ modos.

Caso 2: O número 1 não pertence aos subconjuntos com três elementos.

Diante da informação que o número 1 não figura nos subconjuntos, basta escolher três elementos dentre os disponíveis $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, de maneira que não tenhamos números consecutivos. Logo, de acordo com o primeiro Lema de Kaplansky, isso pode ser feito de $f(6, 3) = C^3_{6-3+1} = C^3_4 = 4$ maneiras.

Daí, pelo Princípio Aditivo, temos $3 + 4 = 7$ maneiras de formar subconjuntos de três elementos sem que haja números consecutivos, os quais seriam: $\{1, 3, 5\}$,$\{1, 3, 6\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 4, 7\}$, $\{2, 5, 7\}$e $\{3, 5, 7\}$.

Teorema 3.2 (Segundo Lema de Kaplansky) O número de subconjuntos que podem ser formados com p elementos a partir de $\{1, 2, 3, ..., n\}$, de modo que não haja números consecutivos e que 1 e n são considerados consecutivos, é dado por:

$$G(n, p) = \frac{n}{n-p}\begin{pmatrix} n-p \\ p \end{pmatrix}.$$

Onde,

$$\begin{pmatrix} n-p \\ p \end{pmatrix} = C^p_{n-p}.$$

Demonstração: Considere $G(n, p)$ o número de subconjuntos com p elementos de $\{1, 2, 3, ..., n\}$ em que não há números consecutivos e 1 e n são ditos consecutivos. De forma semelhante ao exemplo anterior, vamos dividir o problema em dois casos:

Caso 1: O número 1 pertence aos subconjuntos com p elementos:

Com base na informação que o número 1 já pertence aos subconjuntos formados, temos, então, que os elementos 2 e n não podem pertencer a esses subconjuntos, pois são consecutivos do 1. Assim, precisamos determinar de quantos modos podemos escolher os $p-1$ elementos do conjunto $\{3, 4, 5, ..., n-1\}$, e isso pode ser determinado por meio da aplicação do primeiro Lema de Kaplansky. Portanto, o número de maneiras que isso pode ser feito é dado por:

$$f(n-3,p-1) = C^{p-1}_{n-3-(p-1)+1} = C^{p-1}_{n-p-1}.$$

Caso 2: O número 1 não pertence aos subconjuntos com p elementos:

Note que, neste caso, basta escolhermos os p elementos não consecutivos do conjunto $\{2,3,4,...,n\}$. Novamente, pelo primeiro Lema de Kaplansky, isso pode ser feito de:

$$f(n-1,p) = C^{p}_{n-1-p+1} = C^{p}_{n-p}.$$

Daí, pelo Princípio Aditivo, temos que:

$$\begin{aligned}
G(n,p) &= C^{p-1}_{n-p-1} + C^{p}_{n-p}\\
&= \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!(n-p-1-(p-1))!} + \frac{(n-p)!}{p!(n-p-p)!}\\
&= \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!(n-p-1-p+1)!} + \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!}\\
&= \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!}\\
&= \frac{p(n-p-1)!}{p(p-1)!(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!}\\
&= \frac{p(n-p-1)!}{p!(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!}\\
&= \frac{p(n-p-1)!}{p!(n-2p)!} + \frac{(n-p)(n-p-1)!}{p!(n-2p)!}\\
&= (n-p-1)!\frac{p+(n-p)}{p!(n-2p)!}\\
&= (n-p-1)!\frac{n}{p!(n-2p)!}\\
&= n\frac{(n-p-1)!}{p!(n-2p)!}\\
&= \frac{n}{n-p}\frac{(n-p)(n-p-1)!}{p!(n-2p)!}\\
&= \frac{n}{n-p}\frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!}\\
&= \frac{n}{n-p}C^{p}_{n-p}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.5 Airton, proprietário de uma loja de insumos agropecuários, recebeu uma proposta de empréstimos da empresa em que Francilma trabalha. A empresa libera 3 empréstimos por ano (sempre nos mesmos meses escolhidos), porém deve haver um intervalo de pelo menos 1 mês entre cada empréstimo. Airton gostou das condições que lhe foram passadas e deseja solicitar 3 empréstimos todo ano. De quantas maneiras

Airton pode escolher os meses para seus empréstimos?

Solução: Sabendo que a escolha dos meses será mantida pelos próximos anos, temos então que os meses de Janeiro e Dezembro são consecutivos. Assim, esse é um problema que representa uma situação que pode ser resolvida pela aplicação do segundo Lema de Kaplansky. Para tanto, basta escolher, dentre os 12 meses, os 3 em que Airton irá realizar seus empréstimos nas condições estabelecidas. Logo, isso pode ser feito de:

$$\begin{aligned} G(12,3) &= \frac{12}{12-3}\binom{12-3}{3} \\ &= \frac{12}{9}\binom{9}{3} \\ &= 112. \end{aligned}$$

Portanto, há 112 maneiras para Airton escolher os meses para seus empréstimos.

Exemplo 3.6 (MORGADO, 2016) 5 pessoas devem se sentar em 15 cadeiras colocadas em torno de uma mesa circular. De quantos modos isso pode ser feito se não deve haver ocupação simultânea de duas cadeiras adjacentes?

Solução Podemos iniciar a solução desse problema enumerando cada uma das cadeiras dispostas na mesa circular de 1 até 15, sendo importante observar que as cadeiras de número 1 e 15 são consecutivas. Prosseguindo, temos agora que escolher as cadeiras que as 5 pessoas deverão sentar-se, de modo que não seja feita a escolha de cadeiras adjacentes. Assim, podemos fazer a aplicação do segundo Lema de Kaplansky e determinar o total de possibilidades de fazer essa escolha, isso pode ser feito de:

$$\begin{aligned} G(15,5) &= \frac{15}{15-5}\binom{15-5}{5} \\ &= \frac{15}{10}\binom{10}{5} \\ &= 378. \end{aligned}$$

Logo, há 378 modos de escolher as 5 cadeiras não consecutivas que devem ser ocupadas. Para finalizar, é preciso determinar de quantas formas podemos fazer a acomodação das 5 pessoas nas cadeiras disponíveis, e isso pode ser encontrado por meio da permutação desses indivíduos, ou seja, $P_5 = 5! = 120$. Então, pelo Princípio Multiplicativo, há $378 \cdot 120 = 45360$ modos de 5 pessoas sentar-se em torno de uma mesa circular com 15 cadeiras, sem que haja a ocupação simultânea de duas cadeiras consecutivas.

Exemplo 3.7 (IME) 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo, não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

Solução: Sabendo que cada cavaleiro considera seus dois vizinhos como rivais e que, no grupo formado, não deve haver cavaleiros rivais, isso nos leva a conclusão de que não poderão ser escolhidos cavaleiros que se encontram sentados em cadeiras adjacentes. Além disso, temos que o primeiro e o décimo segundo cavaleiro são vizinhos. Daí, para determinar de quantas maneiras esse grupo pode ser formado, basta fazer a aplicação do segundo Lema de Kaplansky. Assim, teremos:

$$\begin{aligned} G(12,5) &= \frac{12}{12-5}\binom{12-5}{5} \\ &= \frac{12}{7}\binom{7}{5} \\ &= 36. \end{aligned}$$

Portanto, há 36 maneiras para formar esse grupo sem que haja cavaleiros rivais.

Exemplo 3.8 MORGADO (2016) De quantos modos é possível formar uma roda de ciranda com 7 meninas e 12 meninos sem que haja duas meninas em posições adjacentes?

Solução Para que não haja meninas em posições adjacentes, dos 19 lugares disponíveis, devemos escolher 7 para fazer a distribuição delas, isso pode ser feito de:

$$\begin{aligned} G(19,7) &= \frac{19}{19-7}\binom{19-7}{7} \\ &= \frac{19}{12}\binom{12}{7}. \end{aligned}$$

Após escolher as posições das meninas, devemos fazer a sua distribuição nos 7 locais disponíveis. Então, há 7! modos de distribuir as meninas e 12! maneiras de acomodar os meninos nos demais lugares que sobraram. Por fim, como a roda pode rotacionar de 19 maneiras, cada roda foi contada 19 vezes. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, a solução para o problema é dada por:

$$\begin{aligned}
&= \frac{19}{12}\binom{12}{7}\cdot\frac{7!12!}{19}\\
&= \frac{19}{12}\cdot\frac{12!}{7!5!}\frac{7!12!}{19}\\
&= \frac{11!12!}{5!}\\
&= \frac{11!\cdot 12\cdot 11!}{5!}\\
&= \frac{(11!)^2\cdot 12}{120}\\
&= \frac{(11!)^2}{10}.
\end{aligned}$$

Logo, há $(11!)^2/10$ maneiras de formar a roda de ciranda sem que haja meninas em posições vizinhas.

Nesse capítulo, foi possível perceber como estes dois Lemas podem contribuir na resolução de alguns problemas combinatórios.

4 Perspectivas do Ensino da Análise Combinatória nos Documentos Norteadores da Educação Básica e nas Pesquisas Acadêmicas

4.1 Introdução

A educação brasileira utiliza alguns documentos oficiais para nortear o trabalho do professor no ensino, desde seu planejamento até a execução de suas ações, com o intuito de contribuir com a reflexão do professor quanto a sua própria prática, sobre os métodos e os materiais que são utilizados, apontando caminhos para relacionar os conteúdos curriculares com suas aplicações em outras áreas ou no contexto realístico. Assim, neste capítulo discutiremos sobre o ensino da Análise Combinatória no contexto dos documentos oficiais e as dificuldades relacionadas à construção do seu conhecimento, conforme algumas pesquisas acadêmicas.

4.2 Indicações Curriculares para a Análise Combinatória nos Documentos Oficiais

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento criado com a finalidade de definir as principais competências e habilidades que os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica. Dessa forma, a BNCC propõe que os conteúdos escolares sejam trabalhados no Ensino Médio de maneira que os alunos possam construir uma perspectiva mais integrada da matemática, com foco na sua aplicabilidade. Tal cenário deve favorecer a vivência de ações que estimulem o desenvolvimento e o aprimoramento de aspectos relacionados à criatividade, reflexão, dedução, argumentação e sistematização dos estudantes.

Desse modo, na BNCC (BRASIL, 2018) sugere-se que os alunos possam mobilizar os seus conhecimentos para desenvolver habilidades relacionadas ao processo de construção de modelos, investigações e resolução de problemas. Assim, evidencia-se a necessidade da escola ser um ambiente que possibilita o protagonismo dos discentes.

Prosseguindo com a discussão, uma das cinco competências específicas da BNCC a ser desenvolvida pelos alunos na disciplina de matemática, visa à capacidade de utilizar diferentes estratégias e procedimentos matemáticos, para não apenas modelar e resolver problemas, mas também comunicar soluções para os demais colegas e analisar se os resultados encontrados são possivelmente verdadeiros (BRASIL, 2018).

Diante disso, articulada a essa competência, há algumas habilidades específicas relacionadas aos conceitos matemáticos que devem ser abordados ao longo do Ensino Médio, dentre as quais, encontra-se "Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore."(BRASIL, 2018).

Essa habilidade aponta uma ideia para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, em que os alunos deverão lidar com situações relacionadas a diversos tipos de agrupamentos. Assim, há a possibilidade do professor aprofundar o estudo da Análise Combinatória por meio da inserção de outros conceitos e discussões que sejam acessíveis aos alunos desse nível escolar, podendo tornar mais rico e significativo o processo de ensino e aprendizagem desses conceitos.

Dando prosseguimento, antes da elaboração e publicação da BNCC, outros documentos foram criados para nortear a prática do professor em sala de aula. Nesse sentido, a seguir vamos apresentar as considerações que esses documentos trazem sobre o ensino da Análise Combinatória.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) foram elaborados com o intuito de auxiliar no planejamento das aulas, no desenvolvimento do currículo, apresentando as habilidades e as competências a serem desenvolvidas pelos alunos em Biologia, Química, Física e Matemática nesse nível escolar.

Esse documento destaca a importância de relacionar conceitos de diferentes disciplinas, apontando, como exemplo, a Análise Combinatória, a Probabilidade e a Bioquímica, que podem dar sentido às leis da hereditariedade (BRASIL, 2000). Assim, a abordagem desses conceitos pode ser feita de forma mais contextualizada e articulada, mostrando uma das relações existentes entre a matemática e a biologia.

Além disso, em relação à Análise Combinatória, esse documento aponta que

> [...] aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. (BRASIL, 2000).

Então, os conceitos matemáticos acima citados possibilitam uma relação da matemática com situações reais, que podem representar circunstâncias cotidianas ou estar relacionados a outras áreas de atuação. Assim, é possível perceber que, embora esse documento não aponte de forma específica caminhos para abordar os conceitos combinatórios, fica claro que se espera que os alunos sejam capazes de aplicar o conhecimento desenvolvido em problemas reais que estejam relacionados a contextos dentro e fora da matemática.

Para guiar o aprendizado em diferentes perspectivas, as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) trazem indicações que objetivam apoiar o trabalho do professor, apresentando sugestões de práticas educativas e propondo a articulação dos conhecimentos disciplinares com as competências gerais a serem desenvolvidas pelos alunos.

Assim, para este documento, a Análise Combinatória proporciona uma abordagem mais completa da Probabilidade e possibilita o desenvolvimento do raciocínio combinatório (BRASIL, 2002). Então, tal raciocínio pode ser entendido como a forma de pensar e desenvolver estratégias que envolvam contagem, sendo importante valorizar as construções feitas pelos alunos.

Desse modo, outro aspecto defendido no PCN+ diz respeito ao uso das fórmulas no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos combinatórios, no qual esse documento aponta que

> [...] decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. (BRASIL, 2002).

Diante do exposto, o professor deve criar situações que levem os alunos a desenvolver o raciocínio combinatório, a organizar as informações, a criar e testar seus métodos de resolução, para que, por fim, as fórmulas possam ser apresentadas como facilitadoras desse processo. Corroborando com a discussão, PASSOS (2017) salienta que, muitas vezes, os conceitos da Análise Combinatória são abordados no ensino básico de forma mecânica, com foco na memorização de fórmulas, o que pode acarretar em uma limitação no desenvolvimento do pensamento combinatório dos alunos.

Então, é importante compreender que não deve haver uma dependência do uso de fórmulas para solucionar os problemas de contagem, ou seja, a solução desses não depende exclusivamente da utilização de fórmulas ou técnicas de contagem, sendo que, por meio de outros artifícios, os problemas também podem ser solucionados.

Outro documento que foi elaborado com o intuito de colaborar para melhorar na prática docente foi as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), tendo por finalidade que, por meio da reflexão a respeito da sua própria prática, o professor possa fazer uma reestruturação e organização dos métodos que são utilizados a fim de atender as necessidades relacionadas à aprendizagem. Esse documento é dividido em três volumes: o primeiro trata das Linguagens, Código e suas Tecnologias; o segundo, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; e o terceiro, Ciências Humanas e suas Tecnologias.

De acordo com esse documento, o estudo da Análise Combinatória é importante para que os estudantes possam construir conhecimentos relacionados ao levantamento de possibilidades. Além disso, é evidenciado que a função da Análise Combinatória não é apenas auxiliar nos cálculos da Probabilidade, embora haja uma relação no estudo de ambos os conceitos (BRASIL, 2006).

Ainda se tratando da Análise Combinatória, esse documento aponta que

> no Ensino Médio, o termo "combinatória" está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola – são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver.(BRASIL, 2006).

Então, se abre caminho para outras abordagens e aprofundamento do estudo da Análise Combinatória por meio de situações diferentes daquelas recorrentes na sala de aula, onde conceitos combinatórios que não estão nos livros didáticos do Ensino Médio também possam ser estudados pelos alunos desse nível escolar, buscando proporcionar que o aluno desperte sua criatividade, conheça outros contextos de aplicação dos conceitos abordados, possibilitando o desenvolvimento de outras capacidades relacionadas à combinatória.

4.3 Dificuldades no Processo de Ensino e Aprendizagem da Análise Combinatória

Não é de hoje que as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória é foco de diversas pesquisas, haja vista a importância desse conteúdo para diversas áreas e a necessidade de compreender os obstáculos enfrentados pelos alunos quando se encontram diante de problemas que exigem o desenvolvimento de um pensamento estratégico. Diante disso, nesta seção apresentamos o que algumas pesquisas acadêmicas discutem sobre a temática.

Para GONÇALVES (2014), a Análise Combinatória é vista como um obstáculo para os alunos por causa da forma que sua abordagem é feita em sala de aula, o que acarreta em dificuldades para solucionar problemas relacionados a esse conceito matemático, pois, para essa pesquisadora, os alunos ficam presos ao uso de fórmulas e muitas vezes encontram-se diante de problemas em que não sabem qual fórmula devem utilizar, isto é, não conseguem sequer identificar o tipo de agrupamento envolvido no problema.

Dessa maneira, podemos perceber que essa abordagem dos conceitos combinatórios não favorece o desenvolvimento do raciocínio combinatório, pois os alunos ficam restritos a aplicação de fórmulas e nem sempre conseguem resolver problemas que exigem mais criatividade e outros artifícios em busca de sua solução. Seguindo essa mesma linha de pensamento, MELLO (2017) salienta que, em se tratando das práticas relacionadas ao ensino da Análise Combinatória, grande parte dos professores restringe sua abordagem a execução de procedimentos a serem realizados mecanicamente. Dessa forma, novamente ressalta-se que o foco é dado na aplicação de fórmulas para solucionar os problemas combinatórios, o que possivelmente gera dificuldades para solucionar aqueles que exigem que o aluno tenha desenvolvido, de fato, um raciocínio combinatório.

Nessa mesma perspectiva, MARTINS (2018) sugere que a Análise Combinatória é considerada difícil para alunos e professores. A autora também atribui tal concepção para a maneira tradicional em que sua abordagem é dada em sala de aula. Assim, mais uma vez um pesquisador evidencia que essa não é a abordagem adequada para ensinar combinatória, pois "seus problemas não admitem uma padronização que permita reduzir as resoluções à aplicação de algoritmos simples." MARTINS (2018).

Então, o que esses pesquisadores têm evidenciado é que grande parte das dificuldades que surgem no processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória partem da forma como sua abordagem é feita em sala de aula, onde a ênfase é dada na explicação do conteúdo com a apresentação de fórmulas e os alunos acabam não compreendendo o raciocínio que está por traz daquilo. Portanto, a ideia não é abolir o uso das fórmulas, mas sim possibilitar que, antes de utilizá-las, os alunos sejam capazes de construir o raciocínio necessário para sua compreensão, o que está de acordo com as sugestões dos documentos oficiais. Portanto, em seu planejamento, o professor deve sempre buscar estratégias para minimizar tais dificuldades e potencializar o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

5 Abordagem Metodológica

5.1 Introdução

Neste capítulo, discorremos sobre o desenho metodológico do desenvolvimento deste estudo. Assim, apresentaremos uma breve descrição dos sujeitos envolvidos, da abordagem e natureza da pesquisa, bem como o instrumento utilizado para coleta dos dados e as etapas para sua realização.

5.2 Sujeitos da Pesquisa

Participaram dessa pesquisa 11 alunos[1] do 2º ano do Ensino Médio com faixa etária de 15 a 17 anos da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Manoel Alves Campos, da cidade do Congo-PB. A escola campo de pesquisa foi escolhida levando em consideração que o pesquisador desse estudo leciona em tal escola na referida turma, o que facilitou a aplicação da sequência didática neste período de ensino remoto.

Optamos por desenvolver nosso estudo em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, tendo em vista que, de acordo com o currículo escolar do ensino básico, é nesse ano que é dado um aprofundamento no estudo dos conceitos da Análise Combinatória.

5.3 Características da Pesquisa

Uma pesquisa de campo, de acordo com GIL (2002), tem como foco o estudo de um grupo ou comunidade específica, em que a pesquisa é construída por meio da observação das atividades desenvolvidas pelo grupo estudado. Além disso, possui a vantagem de não necessitar de equipamentos específicos para a coleta de dados e de apresentar resultados mais verdadeiros, tendo em vista que a pesquisa é realizada no próprio ambiente onde os fenômenos ocorrem.

Corroborando com a discussão, MARCONI M.A.; LAKATOS (2003) sugerem que antes que qualquer pesquisa de campo seja iniciada, é necessário realizar uma análise documental das fontes que poderão servir de suporte para a investigação, pois esse levantamento bibliográfico poderá servir de base para o embasamento da pesquisa.

Nesse sentido, consideramos que este estudo pode ser classificado como uma pesquisa de campo, pois concluímos que seria importante realizar um levantamento das

[1] O 2º ano do Ensino Médio, da referida escola possuía 24 alunos matriculados, no entanto, com a suspensão das aulas presenciais no período da pandemia do Covid-19, apenas 11 alunos participavam das aulas remotas e realizavam as atividades pelo Google Classroom.

produções que tratam sobre a temática deste trabalho e analisar a aplicação da sequência didática elaborada. Assim, as atividades foram aplicadas de maneira remota pelo pesquisador desse estudo, que também é o professor da turma, no ambiente natural em que os fenômenos se desenvolvem.

Além do mais, podemos dizer que nossa pesquisa se enquadra na abordagem quali-quantitativa, já que foi necessário analisar de maneira qualitativa a compreensão dos alunos com a aplicação da sequência didática sobre os lemas de Kaplansky, além de utilizar aspectos quantitativos para apresentar os resultados dos dados coletados.

5.4 Sequência Didática

Segundo OLIVEIRA (2013), uma sequência didática consiste em um conjunto de atividades que estão interligadas, sendo utilizada para sistematizar o processo de ensino e aprendizagem. Para essa autora, a participação dos alunos é fundamental, cabendo ao professor informar aos estudantes sobre a sua finalidade, assim como analisar e comunicar os resultados.

Dessa forma, a sequência didática deve ser elaborada pelo professor com o objetivo de, por meio das atividades criadas ou selecionadas, explorar o conhecimento dos alunos frente a algum conceito. Assim, para LIMA (2018), "a sequência didática tem como finalidade organizar e orientar o processo de ensino". Então, sua utilização pode possibilitar uma melhoria no processo de ensino e aprendizagem, tornando o desenvolvimento do conhecimento pelos estudantes mais significativo, pois, como aponta MACHADO (2013), a sequência didática possibilita a mobilização dos conhecimentos prévios e, ao interpretá-los como um conceito já estruturado, se aumenta a possibilidade que a aprendizagem seja construída com mais significado.

Diante do exposto, em nossa pesquisa construímos e aplicamos uma sequência didática, buscando contribuir, por meio de uma abordagem diferenciada, isto é, que não reflete na explicação e na resolução de exercícios, para que os alunos interajam com os lemas de Kaplansky durante o Ensino Médio. Desse modo, nossa sequência didática foi estruturada com o objetivo de possibilitar que os alunos resolvam problemas que representam situações de aplicação desses lemas, contribuindo, assim, para que os estudantes conheçam outros métodos de contagem que são acessíveis a esse nível escolar, porém não se encontram no currículo do ensino básico. Todas as 8 atividades que constituíram a nossa sequência didática encontram-se disponíveis no Apêndice A deste trabalho.

5.5 Etapas da Pesquisa

Nosso estudo foi realizado em quatro etapas: na primeira, foi feito um levantamento bibliográfico sobre os trabalhos que haviam sido desenvolvidos tratando-se dos lemas de Kaplansky, com o intuito de conhecer outras produções sobre o tema abordado e, assim, atualizar e aprofundar os estudos sobre a temática.

Já a segunda etapa consistiu na preparação da sequência didática para a abordagem dos lemas de Kaplansky na turma do 2º ano do Ensino Médio. Nessa fase, definimos as atividades que deveriam compor a sequência didática.

Na terceira etapa foram produzidos os dados da pesquisa por meio da aplicação da sequência didática e da coleta dos resultados. Essa fase foi realizada no mês de janeiro [2] de maneira remota, devido à suspensão das atividades presenciais durante o período de pandemia da Covid-19.

Figura 4 – Instruções para os alunos quanto à sequência didática

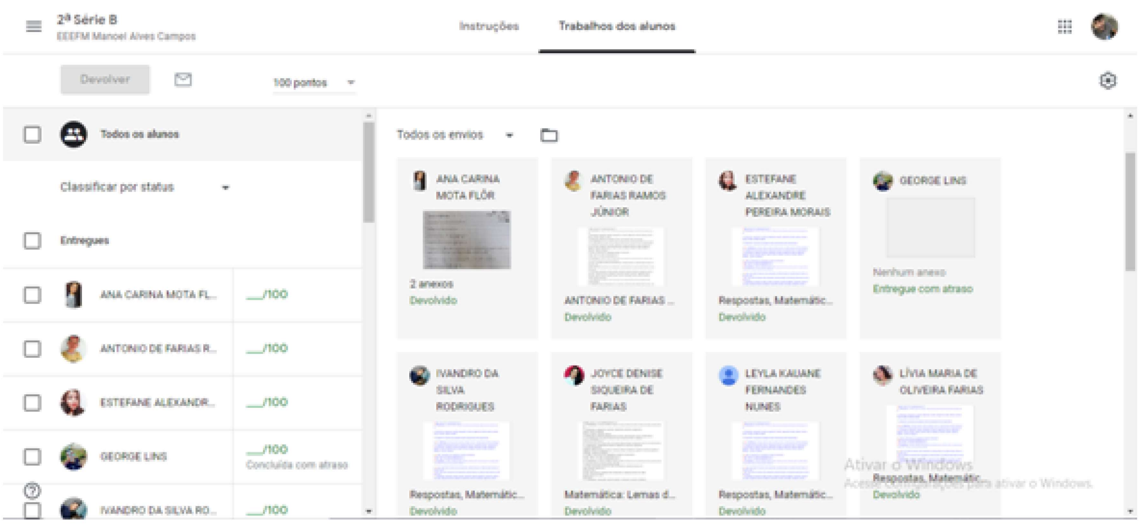
Fonte: Autoria própria

Assim, primeiramente utilizamos a plataforma do *Google Meet* para realizar uma videoconferência com os alunos, a fim de explicar a metodologia que seria utilizada por meio da sequência didática. Em seguida, foi disponibilizada para cada um dos alunos

[2] O ano letivo das escolas estaduais no estado da Paraíba foi estendido até janeiro de 2021 devido a necessidade reestruturar o calendário escolar do ano de 2020, haja vista a pandemia da Covid-19.

a sequência didática no *Google Classroom* [3], em que os alunos receberam o prazo de uma semana para apresentarem suas respostas por meio da própria plataforma ou via *WhatsApp*.

Figura 5 – Envio das respostas dos alunos



Fonte: Autoria própria

Por fim, foi realizada mais uma videochamada para socializar as respostas dos estudantes, bem como para dialogar sobre as atividades e formalizar para os alunos o conceito matemático envolvido.

Na quarta, e última etapa, analisamos e interpretamos os dados coletados na fase anterior.

[3] O *Google Classroom* é um recurso gratuito que auxilia a interação de professores e alunos em ambientes externos ou internos a escola, pois pode ser utilizado pelo celular ou computador, desde que o usuário tenha uma conta gmail e tenha acesso à internet. Por meio dele, o professor pode criar turmas e disponibilizar materiais de estudos em diversos modelos, facilitando o trabalho do docente de maneira remota.

6 Análise e Discussão de Resultados

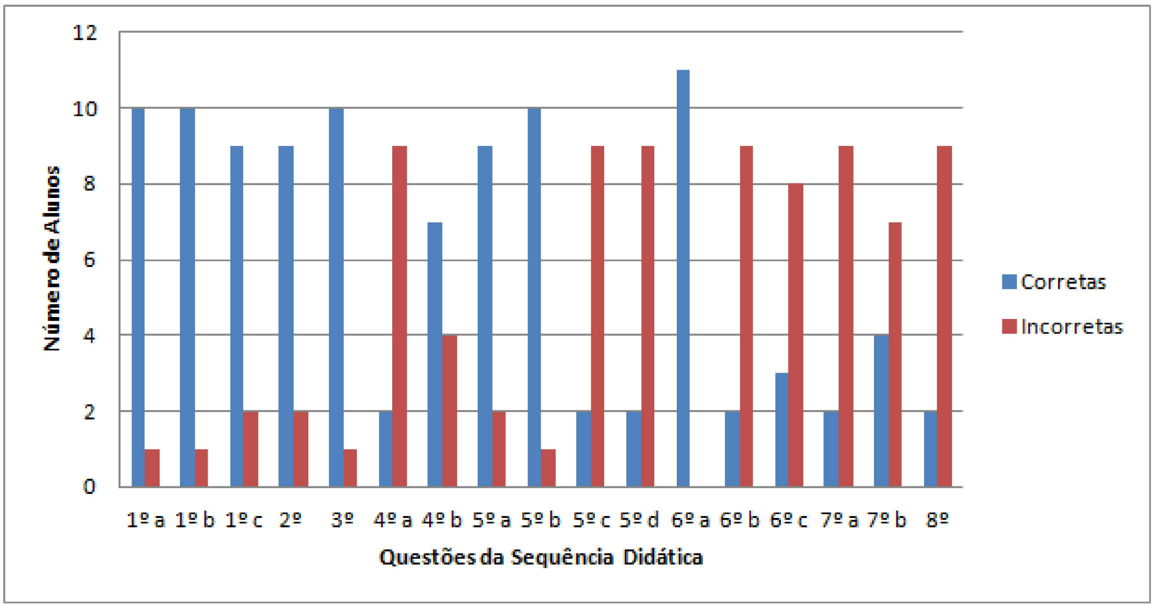
6.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos as análises e discussões referentes aos dados coletados durante a aplicação da sequência didática. Assim, iremos comentar sobre cada uma das atividades que se encontram disponíveis no Apêndice A.

6.2 Apresentação dos Dados Coletados na Sequência Didática

Buscando manter o sigilo na identificação dos alunos optamos por utilizar codificações para identificar cada estudante como A1, A2, A3 e assim por diante. Para representar os acertos e erros dos alunos em cada questão, utilizamos o gráfico exibido abaixo, onde o eixo vertical se refere ao total de alunos que obtiveram os resultados apresentados e o eixo horizontal contém a numeração das questões presentes na sequência didática. A seguir, iniciamos a discussão dos resultados obtidos com as atividades da sequência didática.

Figura 6 – Desempenho dos alunos na Sequência Didática



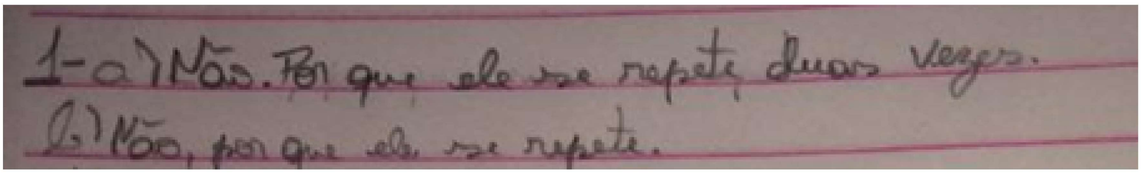
Fonte: Autoria própria

De acordo com os dados, na primeira questão da sequência didática os alunos apresentaram um resultado satisfatório. Podemos observar que a maioria dos estudantes conseguiu responder de maneira correta aos três itens dessa atividade.

Na sequência didática, os itens "a" e "b" tinham por finalidade analisar a compreensão dos alunos a respeito do enunciado da questão, pois, conforme MORGADO (2016), "[...] a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita no problema.". Assim, avaliar se os subconjuntos dados atendiam ou não as condições estabelecidas na situação apresentada, poderia contribuir para que os alunos tivessem um melhor entendimento dessa situação e conseguissem responder corretamente ao item "c".

Contudo, com base nos dados, um aluno respondeu de maneira incorreta a esses dois itens. Na Figura 7 encontra-se apresentada essa resposta.

Figura 7 – Resposta do aluno A1 para os itens "a" e "b" da primeira atividade



Fonte: Autoria própria

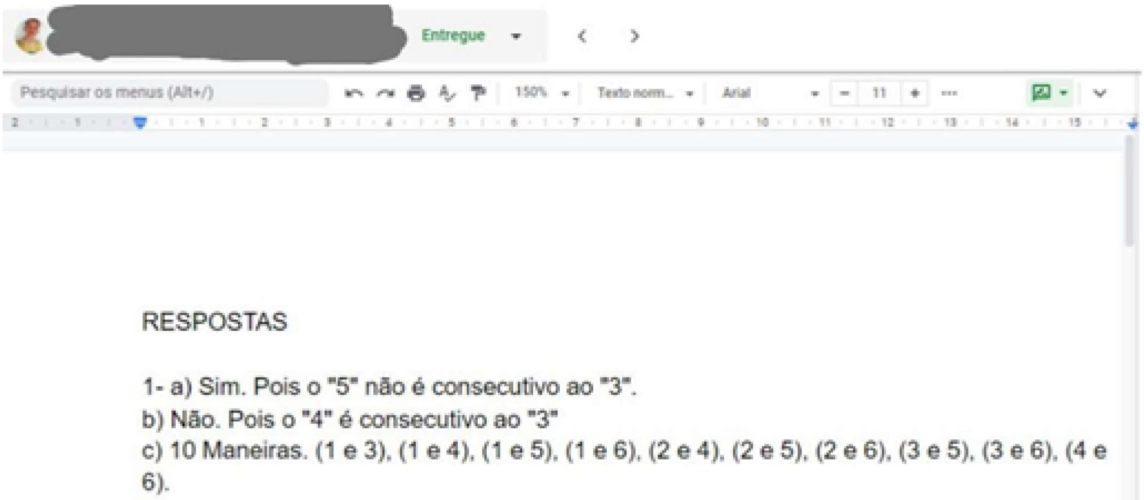
Em nenhum dos itens ficou evidente a compreensão do que o aluno em questão identificou como uma repetição, é possível que ele tenha associado de alguma maneira a palavra consecutiva ao ato de repetir, mas isso não ficou bem explícito em sua resposta. Dessa maneira, temos que o item "a" foi considerado incorreto, pois ela não conseguiu perceber que o subconjunto $\{3, 5\}$ atendia as especificações dadas no enunciado do problema, já que se tratava de um subconjunto com dois elementos não consecutivos. Em relação ao item "b", embora o aluno tenha dito que o subconjunto $\{4, 5\}$ não atendia as restrições impostas no problema, ele não conseguiu apresentar uma justificativa clara para esse fato, por isso esse item foi considerado incorreto.

Apesar disso, podemos considerar que houve uma boa compreensão por parte dos demais estudantes em relação aos itens "a" e "b", o que pode ter contribuído para um bom desenvolvimento do item posterior.

Já o item "c" tinha por finalidade apresentar aos alunos um problema de contagem que representava um caso de aplicação do 1º Lema de Kaplansky. Para esse item, esperávamos que os alunos utilizassem como estratégia descrever todos os casos e, em seguida, efetuassem a contagem do total de subconjuntos, pois, como sugere Ferreira (2017), o professor deve possibilitar que os alunos desenvolvam seu pensamento combinatório, sendo importante que, primeiramente, eles possam resolver problemas por meio de desenhos ou da listagem de todas as possibilidades, para que, posteriormente, possam ser capazes de resolver problemas mais complexos.

Como previsto, esse foi o método de resolução utilizado pelos estudantes, tendo em vista também que os sujeitos ainda não tinham conhecimento sobre os Lemas de Kaplansky. Na Figura 8, podemos observar uma das soluções.

Figura 8 – Resposta do aluno A2 para a primeira atividade



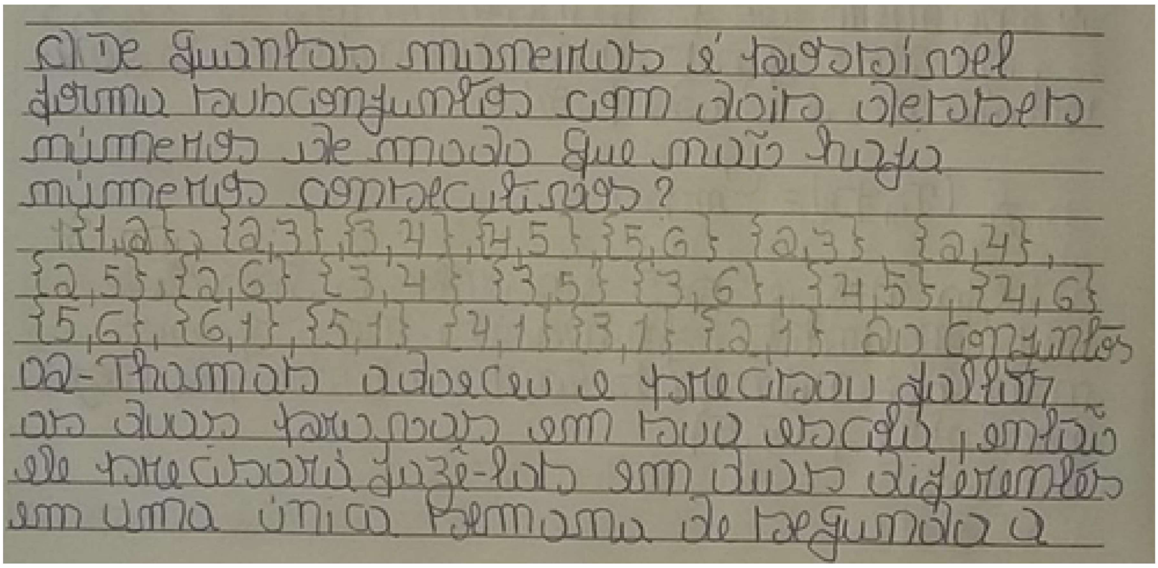
RESPOSTAS

1- a) Sim. Pois o "5" não é consecutivo ao "3".
b) Não. Pois o "4" é consecutivo ao "3"
c) 10 Maneiras. (1 e 3), (1 e 4), (1 e 5), (1 e 6), (2 e 4), (2 e 5), (2 e 6), (3 e 5), (3 e 6), (4 e 6).

Fonte: Autoria própria

Por outro lado, na solução apresentada a seguir observamos que nem todos os estudantes conseguiram utilizar essa estratégia corretamente. É possível perceber que o aluno A3 realizou uma má interpretação do enunciado da questão, tendo em vista que ele descreveu casos em que havia subconjuntos com números consecutivos.

Figura 9 – Resposta do aluno A3 para o item "c" da primeira atividade



c) De quantas maneiras é possível formar subconjuntos com dois desses números de modo que não haja números consecutivos?
{1,2}, {2,3}, {3,4}, {4,5}, {5,6} {2,3} {2,4},
{2,5}, {2,6} {3,4} {3,5} {3,6}, {4,5}, {4,6}
{5,6}, {6,1}, {5,1} {4,1} {3,1} {2,1} ao conjuntos
02- Thomas adoeceu e precisou faltar
as duas semanas em sua escola, então
ele precisará fazê-las em duas diferentes
em uma única semana de segunda a

Fonte: Autoria própria

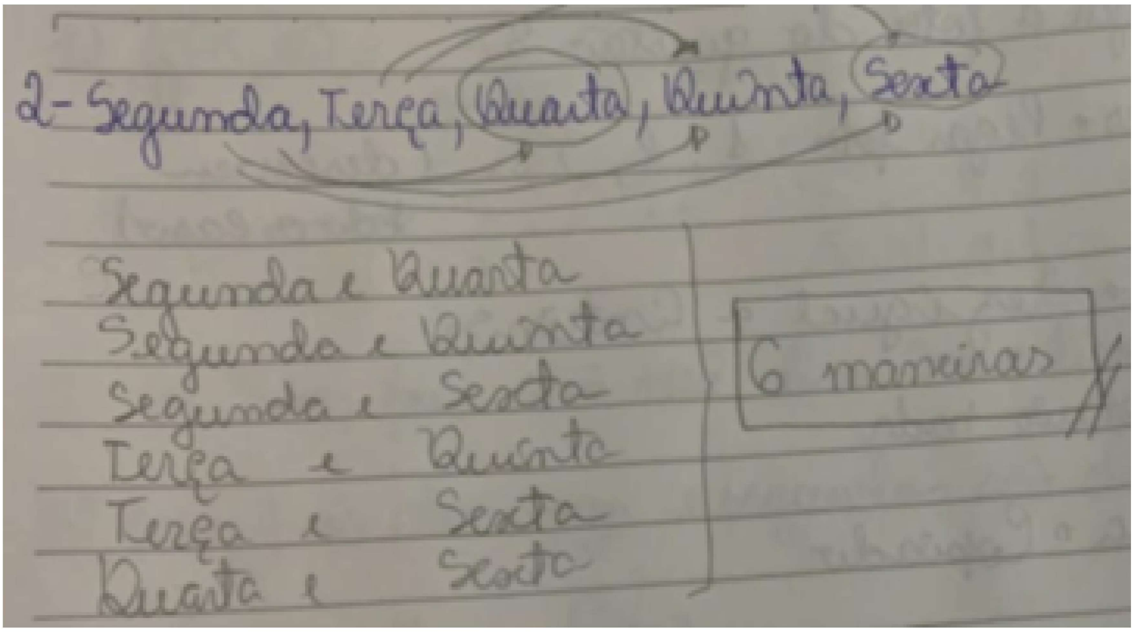
Então, podemos concluir que a maioria dos alunos conseguiu responder corretamente, a partir do seu conhecimento prévio, a uma situação que representava um caso de aplicação do 1º Lema de Kaplansky. Dessa forma, esse resultado nos fornece indícios do que foi apontado em nosso referencial teórico, que a abordagem dos problemas de contagem não deve levar em consideração o excessivo uso de fórmulas. MELLO (2017) salienta que o professor deve possibilitar que os alunos construam seus próprios caminhos na resolução de problemas. Assim, é importante criar condições para proporcionar que os alunos desenvolvam o raciocínio combinatório levantando hipóteses, criando estratégias de resolução para que, posteriormente, as fórmulas possam ser apresentadas.

Dando prosseguimento, a segunda atividade representava uma situação prática que correspondia à aplicação do 1º Lema de Kaplansky. O intuito de propor essa questão também foi de apresentar um contexto de aplicação para esse Lema, pois, conforme LEMOS (2016), relacionar a matemática com o que é real proporciona uma mudança de perspectiva quanto ao estudo dessa disciplina, deixando de ser abstrata e passando a ter significado. Dessa forma, estudar os conceitos matemáticos passa a ter mais sentido para os alunos, já que é possível identificar uma aplicação para os conteúdos trabalhados.

Então, consideramos que a situação descrita na atividade estava próxima do cotidiano dos discentes, tendo em vista que muitas são as situações em que nos encontramos diante da necessidade de escolher dias não contínuos para realizar algum tipo de atividade. Novamente, esperávamos que os alunos utilizassem como uma de suas possíveis estratégias, descrever todas as possibilidades de escolha de dois dias da semana não consecutivos para fazer a contagem dos casos no final.

Com base nos resultados, temos que a estratégia utilizada pelos alunos foi a esperada e o desempenho apresentado nessa atividade foi satisfatório, pois 81,8% dos estudantes responderam corretamente. Na Figura 10, apresentamos a solução utilizada por um dos alunos, em que todas as possibilidades foram descritas e contadas no final.

Figura 10 – Resposta do aluno A4 para a segunda atividade


2- Segunda, Terça, Quarta, Quinta, Sexta

Segunda e Quarta
Segunda e Quinta
Segunda e Sexta
Terça e Quinta
Terça e Sexta
Quarta e Sexta

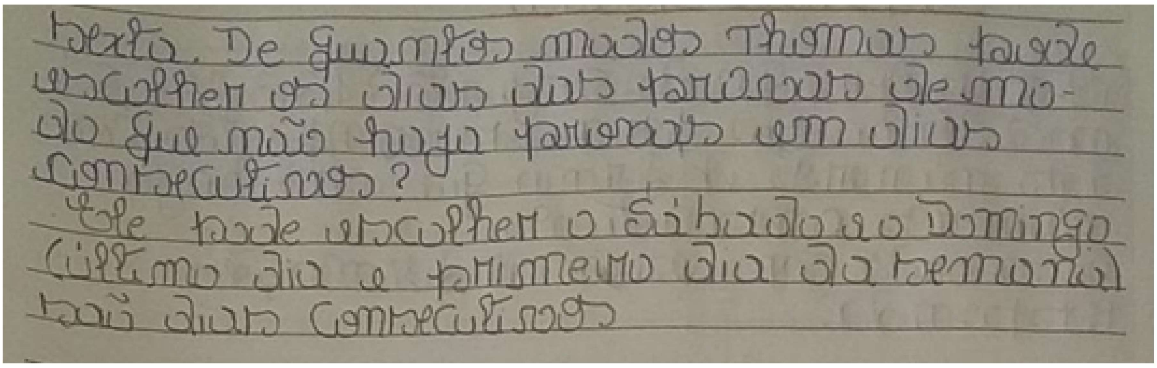
6 maneiras

Fonte: Autoria própria

Entretanto, os alunos A1 e A3 outra vez apresentaram respostas incorretas. Para o aluno A1, havia apenas "2 modos" para escolher os dias da semana atendendo as especificações do problema. Como esse aluno não descreveu quais seriam essas possibilidades e o caminho que ele utilizou para chegar a essa solução, não há como fazermos uma análise mais aprofundada da sua resposta.

Em contrapartida, o aluno A3 descreveu o seu entendimento sobre essa questão, como podemos observar na Figura 11:

Figura 11 – Resposta do aluno A3 para a segunda atividade


Sexta. De quantos modos Thomas pode escolher os dias das paradas de modo que não haja paradas em dias consecutivos?
Ele pode escolher o Sábado e o Domingo (último dia e primeiro dia da semana) são dias consecutivos

Fonte: Autoria própria

Analisando a referida resposta, percebemos que, mais uma vez, houve um equívoco na compreensão do enunciado da questão, o que pode ter feito com que o aluno respondesse o problema de forma incorreta, uma vez que escolheu dois dias que são consecutivos e que não estavam incluídos na disponibilidade de Thomas para fazer a prova, ou seja, nenhuma das condições apresentadas no enunciado do referido problema foi atendida nessa solução.

Dando continuidade, a terceira questão consistia em uma comparação entre as duas anteriores para identificar a sua semelhança, e tinha por finalidade que os alunos percebessem que essa similaridade consistia no fato de ambas corresponderem a situações em que era necessário determinar o número de subconjuntos que podiam ser formados com certa quantidade de elementos não consecutivos. Assim, independentemente do tipo desses elementos, a maneira de responder poderia ser a mesma, pois o importante era compreender que esses elementos não deveriam ser sucessivos.

A partir dos resultados, podemos considerar que a maioria dos alunos conseguiu responder a essa atividade de maneira correta, pois eles conseguiram identificar que a semelhança estava em formar subconjuntos com elementos não consecutivos, como podemos observar nas soluções apresentadas na Figura 12.

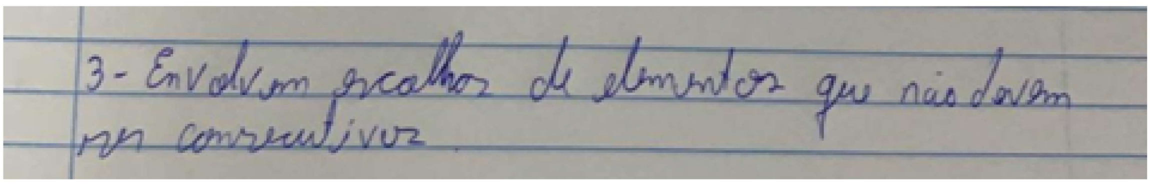
Figura 12 – Resposta do aluno A5 para a terceira atividade


3- Ambas têm conjuntos que possam formar subconjuntos não consecutivos.

Fonte: Autoria própria

Outra solução correta apresentada por um dos estudantes.

Figura 13 – Resposta do aluno A6 para a terceira atividade



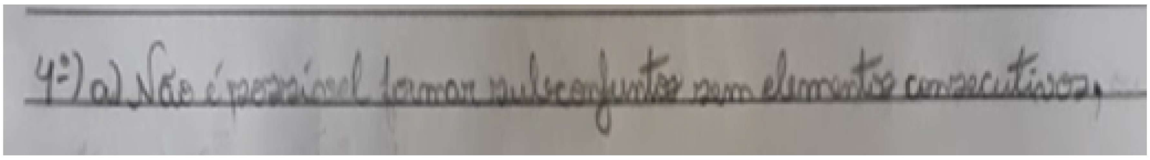
Fonte: Autoria própria

Então, podemos perceber que os alunos responderam de maneira semelhante, pontuando em suas respostas sempre o fato de escolher elementos ou formar subconjuntos que não sejam consecutivos. Contudo, apenas o aluno A3 apresentou uma solução incorreta, tendo em vista que, em sua solução, ele diz: "Falam sobre os subconjuntos e números consecutivos”, quando, na verdade, esperávamos que essa relação fosse feita aos não consecutivos.

A quarta atividade tinha por finalidade apresentar resumidamente aos alunos o enunciado do Primeiro Lema de Kaplansky, para que eles tivessem conhecimento sobre o conceito que estava sendo tratado nas questões, e essa informação pudesse ser utilizada como uma possibilidade estratégica para responder a atividade. No entanto, os resultados apontaram que apenas dois alunos conseguiram utilizar corretamente essa estratégia no item "b", os demais sujeitos que responderam corretamente fizeram uso da descrição de todas as possibilidades.

No item "a", esperávamos que os estudantes percebessem que não era possível formar subconjuntos em que não houvesse números consecutivos. Entretanto, apenas dois estudantes conseguiram ter essa percepção. A seguir, na Figura 14 apresenta-se a solução de um desses alunos.

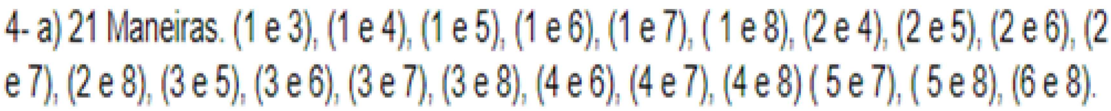
Figura 14 – Resposta do aluno A7 para o item "a" da quarta atividade


4º) a) Não é possível formar subconjuntos sem elementos consecutivos.

Fonte: Autoria própria

Em contrapartida, os demais discentes não conseguiram ter essa compreensão e buscaram caminhos para tentar solucionar a questão, por exemplo, na Figura 15, um dos estudantes tentou utilizar uma estratégia usada anteriormente, com a descrição de todas as possibilidades. No entanto, o aluno não compreendeu que, nesse caso, os subconjuntos formados deveriam conter cinco elementos e não dois, o que, possivelmente, levou o sujeito a responder a atividade de maneira equivocada.

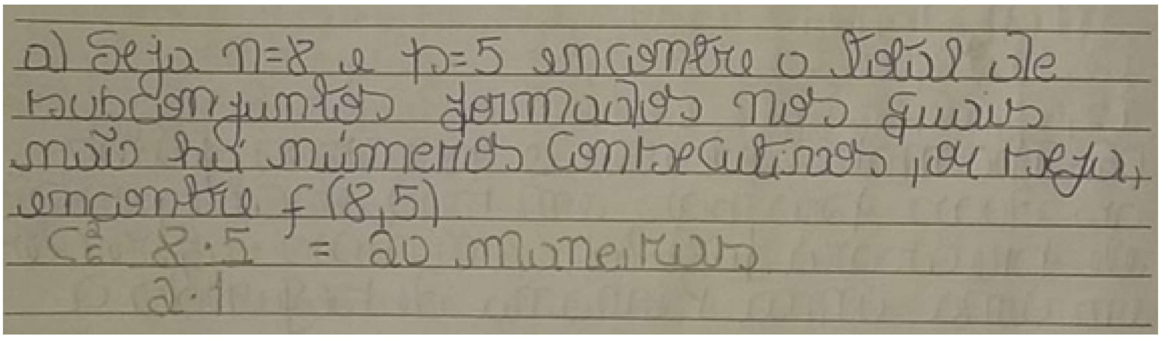
Figura 15 – Resposta do aluno A2 para o item "a" da quarta atividade


4- a) 21 Maneiras. (1 e 3), (1 e 4), (1 e 5), (1 e 6), (1 e 7), (1 e 8), (2 e 4), (2 e 5), (2 e 6), (2 e 7), (2 e 8), (3 e 5), (3 e 6), (3 e 7), (3 e 8), (4 e 6), (4 e 7), (4 e 8) (5 e 7), (5 e 8), (6 e 8).

Fonte: Autoria própria

Por outro lado, o aluno A3 fez a substituição das informações na fórmula apresentada na atividade, mas não conseguiu fazer essas substituições corretamente e perceber que não era possível calcular essa combinação simples. Esse fato sugere que os alunos precisam ter bem estruturados os conceitos básicos da Análise Combinatória, para que, assim, possa haver uma melhor apropriação dos Lemas de Kaplansky. Essa observação também foi feita por LIMA (2020) em sua pesquisa, na qual ele afirma que "se faz necessário uma consolidação dos conceitos básicos de contagem, visto que muitos desses conceitos são pré-requisitos para o estudo do Princípio das Gavetas e dos Lemas de Kaplansky.". Na Figura 16, encontra-se a resolução desse estudante.

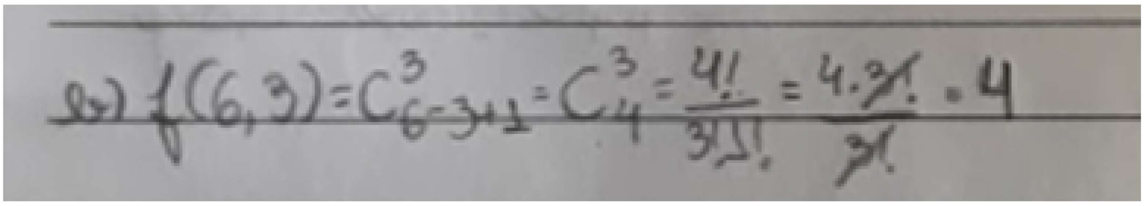
Figura 16 – Resposta do aluno A3 para o item “a” da quarta atividade



Fonte: Autoria própria

Já o item “b”, tinha por intuito apresentar aos alunos mais uma situação contextualizada que representava um caso de aplicação do Primeiro Lema de Kaplansky. Em relação a seu resultado, sete estudantes responderam corretamente, mas apenas dois deles utilizaram como artifício substituir as informações dadas na fórmula contida na atividade, como podemos observar na solução apresentada na Figura 17.

Figura 17 – Resposta do aluno A7 para o item “b” da quarta atividade

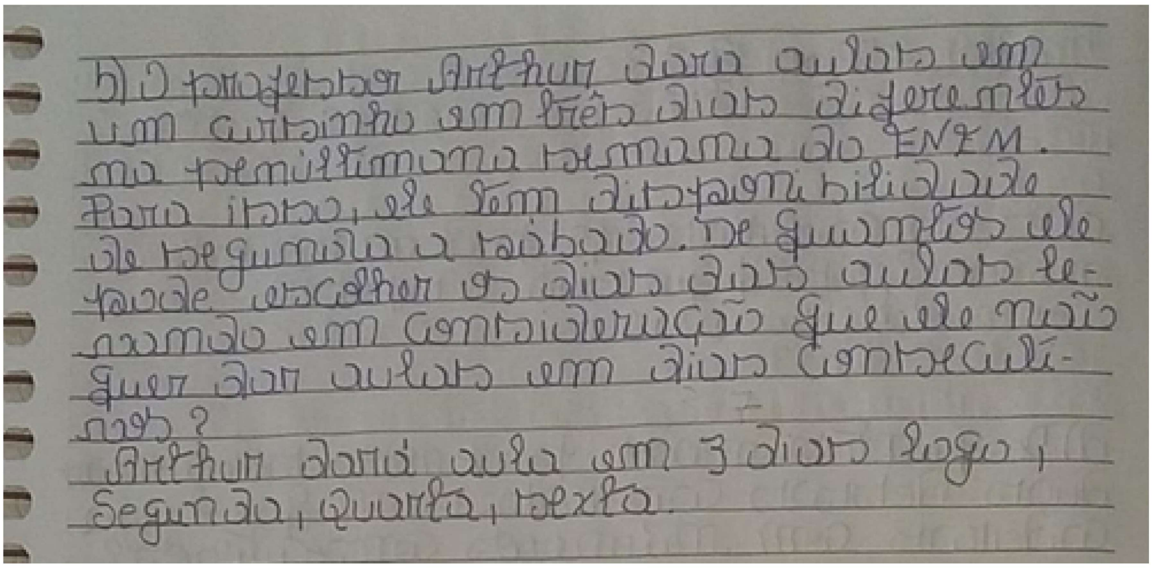


Fonte: Autoria própria

Dessa maneira, podemos perceber que o referido estudante conseguiu compreender o enunciado do Primeiro Lema de Kaplansky, identificando corretamente o total de elementos do conjunto e dos subconjuntos que deveriam ser formados. Além disso, esse sujeito demonstrou ter bem consolidado o conceito de combinação simples, visto que não apresentou dificuldades ao utilizá-lo em sua solução. Em relação aos demais estudantes que apresentaram soluções corretas, como mencionado anteriormente, preferiram empregar a estratégia de fazer a descrição de todas as possibilidades, para, assim, realizar a contagem de todos os casos possíveis.

No entanto, os sujeitos que restaram responderam a esse item de forma equivocada. A seguir, serão apresentadas algumas dessas soluções.

Figura 18 – Resposta do aluno A3 para o item “b” da quarta atividade

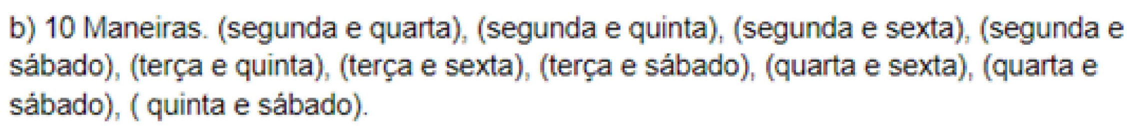

b) O professor Arthur dará aulas em
um cursinho em três dias diferentes
na penúltima semana do ENEM.
Para isso, ele tem disponibilidade
de segunda a sábado. De quantos ele
pode escolher os dias das aulas le-
vando em consideração que ele não
quer dar aulas em dias consecuti-
vos?
Arthur dará aula em 3 dias logo,
segunda, quarta, sexta.

Fonte: Autoria própria

Observamos que, na resposta apresentada na Figura 18, o aluno não compreendeu que deveria indicar o total de modos que Arthur poderia escolher os três dias para ministrar suas aulas. Ao invés disso, ele apenas indicou uma dessas possibilidades. É possível que uma má interpretação do enunciado do problema tenha levado o estudante a responder essa atividade incorretamente.

Outra solução equivocada foi dada por A2. Novamente ele tentou descrever todas as possibilidades para realizar a contagem no final. Contudo, o aluno não levou em consideração que o professor Arthur daria aulas em três dias, para ele Arthur ministraria suas aulas apenas em dois dias. Essa desatenção ou má interpretação do problema levou o estudante a responder incorretamente, como é possível observar na Figura 19.

Figura 19 – Resposta do aluno A2 para o item “b” da quarta atividade


b) 10 Maneiras. (segunda e quarta), (segunda e quinta), (segunda e sexta), (segunda e sábado), (terça e quinta), (terça e sexta), (terça e sábado), (quarta e sexta), (quarta e sábado), (quinta e sábado).

Fonte: Autoria própria

Os problemas seguintes estavam relacionados à aplicação do Segundo Lema de Kaplansky e, de acordo com a Figura 6, as questões relacionadas a este Lema apresentaram um número maior de erros. Discutiremos, a seguir, sobre os seus resultados.

Em relação à quinta atividade, os alunos apresentaram um resultado satisfatório nos itens “a” e “b”, enquanto que, nos itens “c” e “d”, este resultado foi insatisfatório, como veremos a seguir.

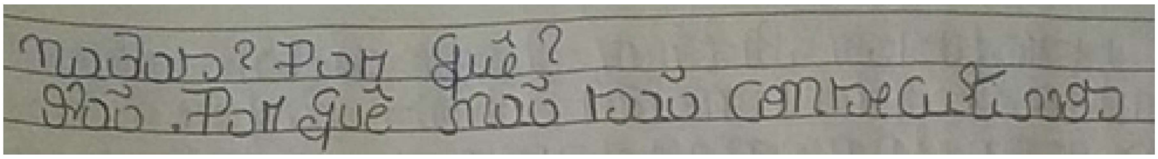
O item "a" tinha por finalidade que os alunos percebessem que, nesse problema, todos os números possuíam um consecutivo, diferentemente do que acontecia nas questões anteriores. Nesse sentido, acreditávamos que perceber tal distinção poderia contribuir na solução dos problemas propostos.

Os resultados apontaram que apenas os alunos A1 e A3 não conseguiram responder corretamente a esse item. O aluno A1 respondeu da seguinte maneira: "Sim o 5", isto é, para ele esse número não possuía um consecutivo. Enquanto que A3, em sua resposta, disse: "Sim existe", mas não chegou a mencionar qual seria o(s) número(s) sem consecutivo. Desse modo, esses estudantes demonstraram uma dificuldade de compreensão em relação ao que é ser um número consecutivo. Os demais sujeitos da pesquisa afirmaram corretamente que todos os números possuíam um sucessivo.

Dando continuidade, os itens "b" e "c" tinham um objetivo semelhante ao apresentado nos itens "a" e "b" da primeira atividade, que consistia em averiguar o entendimento dos alunos quanto ao enunciado da questão. Então, em cada caso, os discentes analisaram se os subconjuntos de cada item atendiam as especificações apresentadas no problema.

Assim, no item "b" apenas o aluno A3 respondeu incorretamente, como podemos ver na Figura 20.

Figura 20 – Resposta do aluno A3 para o item "b" da quinta atividade



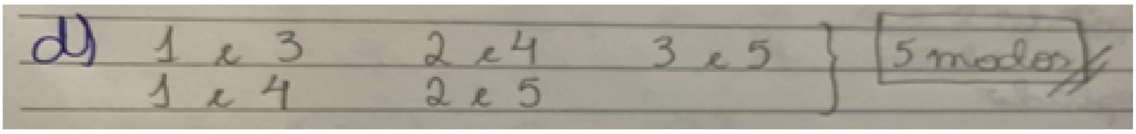
Fonte: Autoria própria

Podemos perceber que o sujeito em questão fez uma má interpretação dos dados do problema, ele compreende que os números 1 e 4 não são consecutivos, mas afirma que é justamente por isso que as cadeiras que contém esses números não podem ser selecionadas, quando, na verdade, é esse o fato que possibilita a seleção dessas duas cadeiras.

Por outro lado, embora no item "a" a maior parte dos sujeitos tenha percebido que todos os números possuíam um consecutivo, no item "c" apenas dois estudantes compreenderam que as cadeiras 1 e 5 são consecutivas, logo não poderiam ser selecionadas. Todos os demais alunos afirmaram que as referidas cadeiras poderiam ser escolhidas, pois 1 e 5 não são consecutivos. É possível que esses estudantes tenham se atentado a sequência dos números de 1 até 5 sem levar em consideração a situação exposta, onde as cadeiras numeradas com esses números estavam em volta de uma mesa circular.

Já o item “d” tinha o intuito de apresentar aos alunos uma situação que representava um caso de aplicação do Segundo Lema de Kaplansky. No que se refere ao seu resultado, apenas dois sujeitos conseguiram responder corretamente, usando como artifício descrever todas as possibilidades para fazer a contagem no final.

Figura 21 – Resposta do aluno A4 para o item “d” da quinta atividade

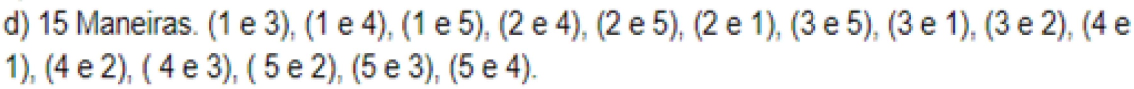

d) 1 e 3 2 e 4 3 e 5 } 5 modos
1 e 4 2 e 5

Fonte: Autoria própria

Os demais estudantes apresentaram soluções incorretas, sendo que alguns apenas indicaram o resultado final sem explicar a forma que utilizaram para chegar a essa solução. Entretanto, a maioria deles tentou, sem sucesso, escrever cada possibilidade para realizar a contagem total no final.

Na Figura 22, apresentamos uma tentativa de solução de um dos alunos. Podemos perceber que esse sujeito considerou, em sua contagem, casos repetidos, por exemplo, para ele escolher as cadeiras 2 e 4 era diferente de escolher 4 e 2. Então, o aluno em questão apresentou dificuldades na compreensão dos conceitos de arranjo e combinação simples, o que pode ter sido um dos motivos que o levou a apresentar uma solução incorreta.

Figura 22 – Resposta do aluno A2 para o item “d” da quinta atividade


d) 15 Maneiras. (1 e 3), (1 e 4), (1 e 5), (2 e 4), (2 e 5), (2 e 1), (3 e 5), (3 e 1), (3 e 2), (4 e 1), (4 e 2), (4 e 3), (5 e 2), (5 e 3), (5 e 4).

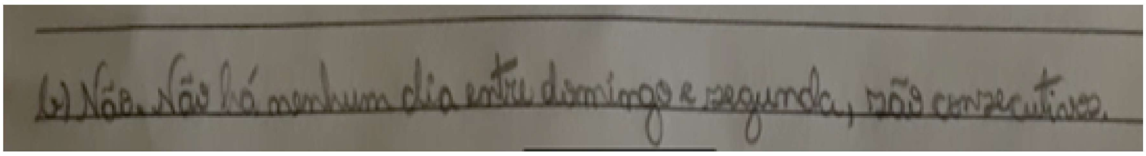
Fonte: Autoria própria

Além disso, para este estudante, as cadeiras $\{1, 5\}$, nessa ordem, não são consecutivas, então ele atribuiu essa possibilidade de escolha como válida, o que o levou a considerar uma possibilidade incorreta, assim como no caso de $\{2, 1\}$, $\{3, 2\}$, $\{4, 3\}$ e $\{5, 4\}$, que são todas cadeiras consecutivas. Porém, nos chamou atenção o fato dele não ter considerado a possibilidade $\{5, 1\}$, isso porque possivelmente o aluno pode ter associado como cadeiras com números consecutivos àquelas que se encontra imediatamente uma após a outra. Assim, para ele $\{1, 5\}$ era válido porque o número que vem imediatamente posterior ao 1 não é o 5, mas no caso $\{5, 1\}$ o 1 é o próximo número depois do 5, então foi considerado como consecutivo. Esse fato demonstrou uma dificuldade de compreensão para determinar quando os elementos são consecutivos diante de uma situação com posicionamento circular.

Se tratando da sexta atividade, os itens "a" e "b" tinham, por finalidade, analisar a compreensão dos alunos quanto ao enunciado do problema. No item "a", os sujeitos deveriam averiguar se a possibilidade $\{Segunda, Quarta, Sexta\}$ atendia as especificações do problema. Ressaltamos que, devido a sua simplicidade, foi o único item em que todos os alunos conseguiram responder corretamente, ou seja, não houve dúvidas que esse subconjunto só continha dias não consecutivos.

Por outro lado, no item "b" apenas dois alunos compreenderam que a possibilidade $\{Segunda, Quarta, Domingo\}$ não satisfazia as condições estabelecidas no problema. Como é possível observar na solução abaixo, o aluno A7 percebeu que, embora no subconjunto a Segunda e o Domingo estejam separados, se trata de dias consecutivos, pois, no problema, a escolha de Grace não se restringia ao período de uma única semana, já que estas aulas serão feitas ao longo de um ano.

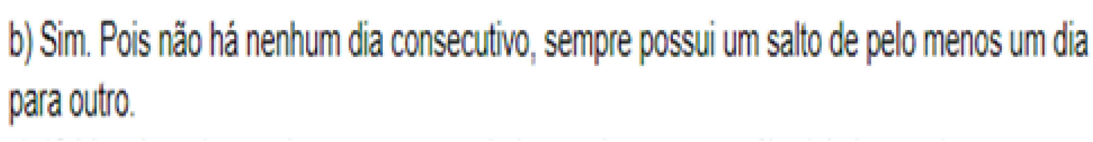
Figura 23 – Resposta do aluno A7 para o item "b" da sexta atividade



Fonte: Autoria própria

Entretanto, os demais sujeitos não tiveram essa mesma percepção e consideraram que Segunda e Domingo não são consecutivos. Umas das possibilidades é que os alunos tenham levado em consideração que as aulas de natação ocorreriam em uma única semana iniciando na Segunda, o que tornaria a primeira Segunda não consecutiva ao primeiro Domingo. A seguir, apresenta-se uma das soluções incorretas para esse item.

Figura 24 – Resposta do aluno A2 para o item "b" da sexta atividade


b) Sim. Pois não há nenhum dia consecutivo, sempre possui um salto de pelo menos um dia para outro.

Fonte: Autoria própria

Na resposta apresentada na Figura 24, percebemos que A2 justifica sua solução baseado no fato de haver uma separação entre os dias do subconjunto, sem levar em conta o período das aulas de natação que ocorreriam ao longo do ano. Também há a possibilidade dos alunos terem observado apenas o subconjunto $\{Segunda, Quarta, Domingo\}$ e não terem considerado todas as informações apresentadas no enunciado do problema.

Dando continuidade, o item "c" tinha por intuito levar os sujeitos a resolverem uma situação prática que representava um caso de aplicação do Segundo Lema de Kaplansky. De acordo com a Figura 6, apenas três sujeitos que participaram da pesquisa conseguiram responder corretamente. Novamente, a estratégia utilizada por esses estudantes consistiu na descrição de todas as possibilidades para realizar a contagem no final.

Com essa mesma perspectiva, os demais alunos também fizeram uso dessa estratégia, mas cometeram alguns equívocos no uso dos seus artifícios. A seguir, na Figura 25 destacamos a solução apresentada por um destes estudantes.

Figura 25 – Resposta do aluno A2 para o item "c" da sexta atividade

c) 10 Maneiras. (segunda, quarta e sexta), (segunda, quarta e sábado), (segunda, quarta e domingo), (segunda, quinta e sábado), (segunda, quinta e domingo), (segunda, sexta e domingo), (terça, quinta e sábado), (terça, quinta e domingo), (terça, sexta e domingo), (quarta, sexta e domingo).

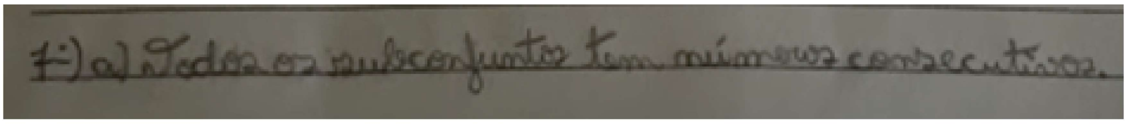
Fonte: Autoria própria

O fato de o aluno considerar Segunda e Domingo como dias não consecutivos fez com que ele apresentasse, em sua solução, os casos: $\{Segunda, Quarta, Domingo\}$, $\{Segunda, Quinta, Domingo\}$ e $\{Segunda, Sexta, Domingo\}$, os quais não satisfazem as condições dadas no problema e contribuiu para o insucesso da resolução. Desse modo, percebemos a importância ressaltada por MORGADO (2016) sobre a frequente necessidade de se ter uma boa compreensão da situação explicitada no problema para poder solucioná-lo.

Continuando, a sétima atividade tinha por objetivo apresentar sinteticamente para os sujeitos o enunciado do Segundo Lema de Kaplansky, a fim de que eles tomassem conhecimento do conceito envolvido nas atividades e pudessem aplicá-lo em suas resoluções. Com base nos dados, os alunos apresentaram um resultado insatisfatório, tendo em vista que apenas dois estudantes responderam corretamente ao item "a" e quatro ao item "b".

No primeiro item, esperávamos que os alunos compreendessem que não havia possibilidade de construir subconjuntos sem que houvesse números consecutivos, rompendo com a concepção de que todo problema tem solução, para que assim, outras habilidades possam ser desenvolvidas. Desse modo, MIRANDA (2015) aponta que "[...] devemos propor, também, problemas não convencionais, que exigem um processo de interpretação e investigação na sua resolução." A seguir, apresenta-se uma das soluções corretas, em que A7 entende que não havia como atender as condições estabelecidas na atividade.

Figura 26 – Resposta do aluno A7 para o item “a” da sétima atividade



Fonte: Autoria própria

Entretanto, na solução abaixo apresentada na Figura 27, o aluno A2 compreendeu que o conjunto tinha seis elementos, porém ele cometeu um equívoco ao considerar que os subconjuntos deveriam ser formados com dois elementos, e não com quatro, como havia sido solicitado no enunciado. Esse fato pode ter contribuído para a apresentação de uma solução incorreta.

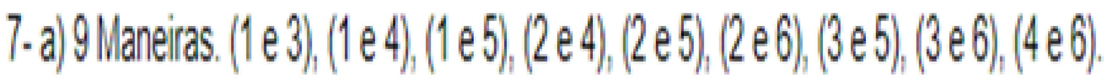


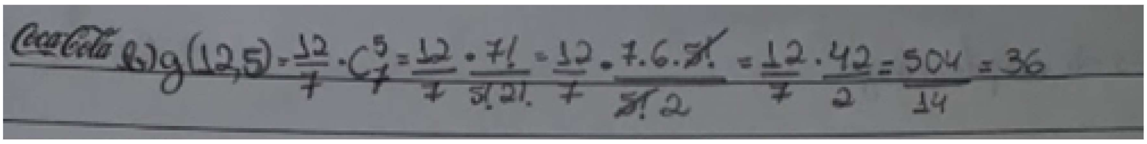
Figura 27 – Resposta do aluno A2 para o item “a” da sétima atividade
Fonte: Autoria própria

Em outra solução, o aluno A1 também não entendeu que a atividade solicitava o total de subconjuntos formados com quatro elementos e, em sua solução, apresentou apenas a possibilidade $\{2, 4, 6\}$, demonstrando sua má interpretação quanto a atividade.

O segundo item, que tinha como finalidade mostrar aos estudantes mais uma situação que representava um caso de aplicação do Segundo Lema de Kaplansky, apontou novamente um resultado insatisfatório, uma vez que apenas quatro sujeitos que participaram da pesquisa conseguiram responder corretamente.

Por meio da Figura 28, destacamos uma das soluções corretas, em que A7 utiliza as informações apresentadas sobre o Segundo Lema de Kaplansky para responder a atividade.

Figura 28 – Resposta do aluno A7 para o item “b” da sétima atividade

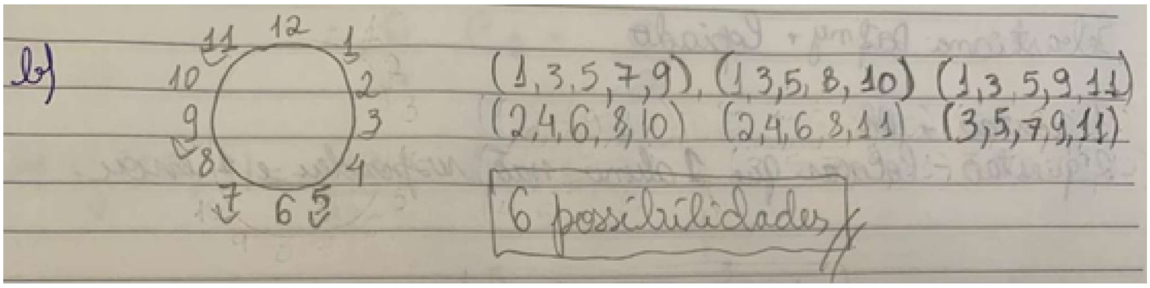


Fonte: Autoria própria

Desse modo, tal estudante demonstrou ter uma boa compreensão sobre o enunciado do referido Lema, conseguindo identificar corretamente o total de elementos do conjunto e dos subconjuntos que seriam formados, mostrando, também, ter um bom entendimento sobre o conceito de combinação simples, pois, como podemos observar, não houve dificuldades na utilização deste conceito em sua resolução.

Em contrapartida, os demais sujeitos não conseguiram responder corretamente a este item. Alguns apresentaram um resultado sem expor sua estratégia de resolução e outros tentaram descrever todas as possibilidades, mas cometeram alguns equívocos.

Figura 29 – Resposta do aluno A4 para o item “b” da sétima atividade

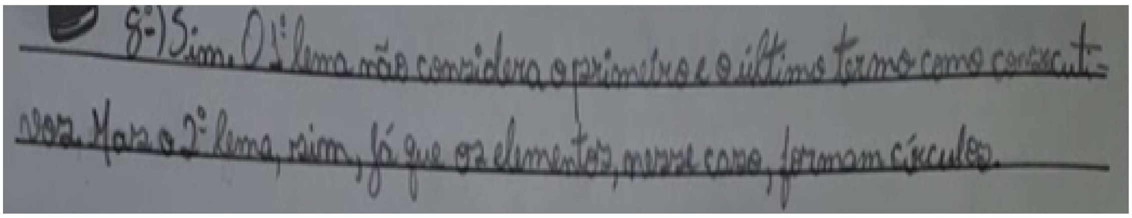


Fonte: Autoria própria

Observamos que, na solução dada na Figura 29, o sujeito não conseguiu fazer a descrição de todos os casos possíveis de escolha dos cavaleiros, o que o levou a apresentar uma solução incorreta para este item. No entanto, é importante ressaltar que A4 só escreveu subconjuntos com números que não eram sucessivos, o que demonstra que houve um entendimento quanto ao enunciado do problema.

A oitava e última atividade tinha por finalidade analisar se os alunos conseguiram identificar alguma diferença na utilização do Primeiro e Segundo Lema de Kaplansky. De acordo com os resultados, apenas dois sujeitos apresentaram respostas corretas, ressaltando que a diferença percebida estava no fato de considerar o primeiro e o último elemento como consecutivos ou não, como podemos observar na Figura 30:

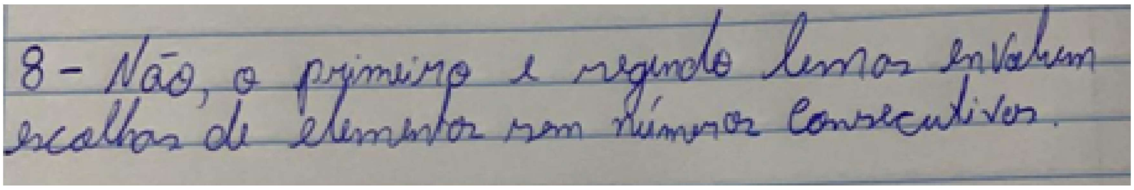
Figura 30 – Resposta do aluno A7 para a oitava atividade



Fonte: Autoria própria

Enquanto isso, alguns alunos não conseguiram identificar a distinção entre a aplicação desses Lemas e apresentaram não a diferença, mas sim a semelhança entre eles. Então, por meio da Figura 31, destacamos uma dessas soluções.

Figura 31 – Resposta do aluno A6 para a oitava atividade


8 - Não, o primeiro e segundo lemas envolvem escolhas de elementos sem números consecutivos.

Fonte: Autoria própria

As atividades propostas na forma de sequência didática tiveram como objetivo introduzir os Lemas de Kaplansky de maneira contextualizada, onde foram apresentadas situações que envolviam esse conteúdo. Nesse sentido, é importante ressaltar que, nessas atividades, os alunos estavam diante de problemas, em sua maioria, contextualizados e cotidianos, que possibilitavam que os estudantes pudessem construir uma visão mais integrada da matemática, com ênfase na sua aplicabilidade em contextos realísticos, como é orientado em (BRASIL, 2018).

De modo geral, os resultados apontaram que, mesmo diante de dificuldades, alguns dos sujeitos conseguiram resolver corretamente os problemas propostos, fazendo uso da enumeração de todas as possibilidades ou do enunciado dos Lemas apresentados durante as atividades.

7 Conclusões

Esta pesquisa teve por objetivo desenvolver e aplicar uma proposta didática para o ensino dos Lemas de Kaplansky no Ensino Médio. Para tanto, realizamos uma revisão bibliográfica em trabalhos acadêmicos que tratavam sobre esta temática para nos aprofundarmos no assunto e, assim, construir uma sequência didática que envolvesse esse conceito matemático, pois acreditamos que esse conhecimento, embora não esteja presente na grade curricular do ensino básico, pode ser acessível aos alunos do nível médio.

Nesse sentido, é importante ressaltar que a sequência didática foi aplicada de maneira remota, devido ao isolamento social ocasionado pelo momento pandêmico vivenciado pela Covid-19, e sem que os alunos tivessem um contato prévio com o conteúdo abordado. Nossa intenção era que, por meio das atividades propostas, a introdução dos Lemas de Kaplansky pudesse ser feita de maneira gradativa e contextualizada.

Por meio dessa aplicação, constatamos que, embora os alunos tenham apresentado algumas dificuldades em relação à resolução de algumas das atividades, principalmente se tratando do Segundo Lema, nem todas essas dificuldades estavam relacionadas à sua compreensão, uma vez que algumas delas eram oriundas de conceitos básicos da Análise Combinatória, como Arranjo e Combinação Simples. Esse fato também foi observado por LIMA (2020), pois, em sua pesquisa, alguns alunos também apresentaram dificuldades quanto a estes conceitos. Apesar disso, houve estudantes que conseguiram ter uma boa compreensão quanto ao enunciado desses Lemas e fazer a aplicação correta deles na resolução das atividades, bem como houve aqueles que utilizaram como principal estratégia enumerar todas as possibilidades para realizar a contagem total dos casos. Não podemos deixar de mencionar as dificuldades encontradas pelos alunos, em especial no entendimento do que significa “ser consecutivo”, além da própria dificuldade do tema. Sendo assim, confirmamos nossa suposição de que, com as devidas adaptações, é possível trabalhar com os Lemas de Kaplansky nas aulas de matemática do Ensino Médio.

Desse modo, compreendemos que os objetivos propostos foram alcançados e que a sequência didática trouxe contribuições para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, tendo em vista que os discentes estiveram diante de situações que não se limitavam apenas ao estudo dos conceitos básicos da Análise Combinatória, pelo contrário, eles puderam conhecer uma maior diversidade de contextos e problemas a ela relacionados.

O desenvolvimento e aplicação desta proposta metodológica não foram simples, tendo em vista que houve um rompimento com o modelo tradicional de aula que os estudantes estão habituados, tanto pelo fato do conteúdo não ter sido primeiramente exposto e exemplificado pelo professor, quanto por esta aplicação ter sido realizada de maneira remota. Dessa forma, os alunos foram levados a agir ativamente e com autonomia na busca pela solução dos problemas.

Embora a metodologia aplicada tenha sido suficiente para o alcance dos objetivos, consideramos que fazer a aplicação dessa sequência didática de forma presencial possa trazer resultados mais positivos, uma vez que poderá haver uma maior interação entre os estudantes, onde, por meio de discussões, um pode auxiliar o outro na elaboração de estratégias e tomada de decisões. Além disso, haveria um melhor acompanhamento e gerenciamento do professor no desenrolar das atividades, de modo a identificar e auxiliar os estudantes nas suas principais dificuldades, não fornecendo respostas, mas sim fazendo questionamentos que os façam refletir a respeito das decisões que estão sendo tomadas.

Concluímos que este trabalho pode servir de embasamento para professores que desejam ampliar a abordagem do estudo da Análise Combinatória no ensino básico e para alunos que aspirem aprofundar seus conhecimentos na temática. Assim, compreendemos que outras investigações podem surgir e complementar os estudos desenvolvidos nessa área, como, por exemplo, investigar as aplicações dos Lemas de Kaplansky nas olimpíadas de matemática, construir propostas metodológicas que visem à abordagem de outros conceitos como o Princípio da Reflexão, Permutações Caóticas e o Princípio de Dirichlet no ensino básico.

Por fim, evidenciamos nossa satisfação no desenvolvimento deste estudo que possibilitou uma reflexão sobre nossa própria prática, não apenas em relação à Análise Combinatória, mas também quanto aos demais conceitos matemáticos, uma vez que nem sempre são feitas conexões entre esses conceitos com conteúdos que não estão no currículo escolar. Desse modo, esta experiência será levada para nossa vida profissional e novos problemas para investigações irão surgir durante esta caminhada.

Referências

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio*. Brasília: Secretaria da Educação Média e Tecnológica, 2000. Citado na página 33.

BRASIL. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: Secretaria da Educação Básica, 2002. Citado na página 34.

BRASIL. *Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2006. Citado na página 35.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 32, 33 e 56.

FERREIRA, I. M. N. *Os lemas de Kaplansky e o problema de Lucas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 42.

GARCIA, R. *O uso do Princípio Fundamental da Contagem e estratégias para abordar e desenvolver a Análise Combinatória*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2017. Citado na página 12.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. Citado na página 37.

GONÇALVES, R. R. S. *Uma abordagem alternativa para o ensino de análise combinatória no ensino médio: a utilização do princípio multiplicativo e da resolução de problemas como ferramenta didático-pedagógica*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014. Citado na página 35.

HAZZAN, S. *Fundamentos de Matemática Elementar: combinatória, probabilidade*. 8. ed. São Paulo: ATUAL, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 18.

LEMOS, V. *Análise Combinatória: uma abordagem através da resolução de problemas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2016. Citado na página 44.

LIMA, D. A importância da sequência didática como metodologia no ensino da disciplina de física moderna no ensino médio. *Revista triângulo*, v. 11, n. 1, p. 151–162, 2018. Citado na página 38.

LIMA, T. *Resolução de problemas de contagem com o uso do Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Piauí, Teresina, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 13, 47 e 57.

LOPES, J. *Uma proposta de abordagem de análise combinatória no ensino médio por meio de estruturas lógicas fundamentais de contagem*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí, Parnaíba, 2016. Citado na página 12.

MACHADO, J. *A sequência didática como estratégia para aprendizagem dos processos físicos nas aulas de geografia do ciclo II do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013. Citado na página 38.

MARCONI M.A.; LAKATOS, E. *Fundamentos de Metodologia Científica*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003. Citado na página 37.

MARTINS, G. *Ensino de Análise Combinatória: um estudo das representações de professores de matemática do ensino médio público de São Mateus*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 36.

MELLO, H. *Desmistificando o ensino de análise combinatória*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 44.

MIRANDA, A. *Resolução de problemas como metodologia de ensino: uma análise das repercussões de uma formação continuada*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Citado na página 53.

MORGADO, A. e. a. *Análise Combinatória e Probabilidade*. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. Citado 7 vezes nas páginas 11, 15, 25, 29, 30, 42 e 53.

OLIVEIRA, M. *Sequência Didática Interativa no Processo de Formação de Professores*. Petrópolis: Editora Vozes, 2013. Citado na página 38.

PASSOS, G. *Análise Combinatória: teoria e aplicações para o ensino básico*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 34.

TANEJA I.J.; ARAÚJO, A. *Fundamentos de Matemática II*. 2. ed. Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2010. Citado na página 15.

TROVÃO, M. *Métodos de Contagem*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015. Citado na página 12.

APÊNDICE A – Sequência Didática

1. Considere que do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ você tenha que formar subconjuntos com dois números de forma que não haja números consecutivos.

   De acordo com essas informações responda:

   a) O subconjunto $\{3, 5\}$ atende as condições estabelecidas no problema? Por quê?

      Solução: Sim, pois os elementos do subconjunto {3,5} não são consecutivos.

   b) O subconjunto $\{4, 5\}$ atende as condições estabelecidas no problema? Por quê?

      Solução: Não, pois os elementos do subconjunto {4,5} são consecutivos.

   c) De quantas maneiras é possível formar subconjuntos com dois desses números de modo que não haja números consecutivos?

      Solução: {1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {3,5}, {3,6} e {4,6}. 10 Maneiras.

2. Thomas adoeceu e precisou faltar a duas provas em sua escola, então ele precisará fazê-las em dias diferentes em uma única semana de segunda a sexta. De quantos modos Thomas pode escolher os dias das provas de modo que não haja provas em dias consecutivos?

   Solução: {Segunda, Quarta}, {Segunda, Quinta}, {Segunda, Sexta}, {Terça, Quinta}, {Terça, Sexta} e {Quarta, Sexta}. 6 Modos.

3. Qual a semelhança entre as questões 1 e 2?

   Solução: Resposta pessoal, espera-se dos sujeitos a percepção que, ambas as questões envolvem escolhas de elementos não consecutivos de determinado conjunto.

4. Problemas como os anteriores podem ser resolvidos pelo Primeiro Lema de Kaplansky, a seguir apresenta-se seu enunciado:

   O número de p subconjuntos de $\{1, 2, 3, ..., n\}$ nos quais não há números consecutivos é dado por:

   $f(n, p) = C^{p}_{n-p+1}$

Em que "n" representa o total de elementos do conjunto e "p" o número de elementos dos subconjuntos que podem ser formados sem números consecutivos.

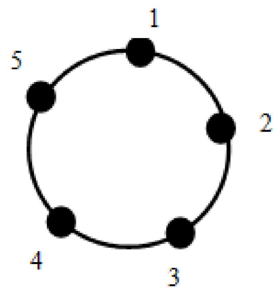
a) Seja $n = 8$ e $p = 5$ encontre o total de subconjuntos formados nos quais não há números consecutivos, ou seja, encontre $f(8, 5)$.

Solução: Não é possível formar subconjuntos sem que hajam elementos consecutivos.

b) O professor Arthur dará aulas em um cursinho em três dias diferentes na penúltima semana antes do ENEM. Para isso, ele tem disponibilidade de segunda a sábado. De quantos modos ele pode escolher os dias das aulas levando em consideração que ele não quer dar aulas em dias consecutivos?

Solução: $\boldsymbol{f(n,p) = C^p_{n-p+1} = C^3_{6-3+1} = C^3_4 = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4!}{3!} = 4.}$

5. Considere 5 cadeiras numeradas de 1 a 5 dispostas em uma mesa circular, como podemos ver abaixo.



Suponha que duas cadeiras com números consecutivos não possam ser selecionadas.

Com base nessas informações, responda:

a) Existe algum número nessa situação que não possua um consecutivo?

Solução: Não existe.

b) As cadeiras $\{1, 4\}$ podem ser selecionadas? Por quê?

Solução: Sim, pois as cadeiras do subconjunto {1,4} não são consecutivas.

c) E as cadeiras $\{1, 5\}$ podem ser selecionadas? Justifique sua resposta.

Solução: Não, pois as cadeiras do subconjunto {1,5} são consecutivas.

d) De quantos modos podemos selecionar duas dessas cadeiras sem que haja cadeiras com números consecutivos?

Solução: {1,3}, {1,4}, {2,4}, {2,5} e {3,5}. 5 modos.

6. Grace decidiu fazer aulas de natação três vezes por semana ao longo do ano. No entanto, ela não quer fazer aulas em dias consecutivos.

   Dias da Semana: Segunda/ Terça/ Quarta/Quinta/ Sexta/ Sábado/ Domingo/ Segunda/ Terça/...

   Com base nessas informações, responda:

   a) A possibilidade $\{Segunda, Quarta, Sexta\}$ atende as condições estabelecidas no problema anterior? Por quê?

      Solução: Sim, pois no subconjunto {Segunda, Quarta, Sexta} não há dias consecutivos.

   b) E a possibilidade $\{Segunda, Quarta, Domingo\}$ atende as condições estabelecidas no problema anterior? Por quê?

      Solução: Não, pois de acordo com as condições estabelecidas no subconjunto {Segunda, Quarta, Domingo} há dias consecutivos, que são {Segunda, Domingo}.

   c) De quantas maneiras ela pode escolher os três dias de aula, se não deve haver aulas em dias consecutivos?

      Solução: {Segunda, Quarta, Sexta}, {Segunda, Quarta, Sábado}, {Segunda, Quinta, Sábado}, {Terça, Quinta, Sábado}, {Terça, Quinta, Domingo}, {Terça, Sexta, Domingo} e {Quarta, Sexta, Domingo}. 7 Maneiras.

7. Problemas como os apresentados nas questões 5 e 6 podem ser resolvidos pelo Segundo Lema de Kaplansky, a seguir apresenta-se seu enunciado:

   O número de p subconjuntos de $\{1, 2, 3, ..., n\}$ nos quais não há números consecutivos, considerando 1 e n como consecutivos, é dado por:

$$g(n, p) = \frac{n}{n-p} \cdot \binom{n-p}{p}$$

   Em que "n" representa o total de elementos do conjunto e "p" o número de elementos dos subconjuntos que podem ser formados sem números consecutivos.

   a) Seja $n = 6$ e $p = 4$ encontre o total de subconjuntos formados nos quais não há números consecutivos, ou seja, encontre $g(6, 4)$.

      Solução: Não é possível formar subconjuntos sem que hajam elementos consecutivos.

b) (IME – 1986) 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo?

Solução: $g(12,5) = \dfrac{12}{12-5} \cdot \begin{pmatrix} 12-5 \\ 5 \end{pmatrix} = \dfrac{12}{7} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \dfrac{12}{7} \cdot \dfrac{7!}{5! \cdot 2!} =$

$$= \frac{12}{7} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2!} = \frac{12}{7} \cdot \frac{42}{2} = \frac{504}{14} = 36$$

8. Você percebeu alguma diferença na utilização do primeiro e segundo lema de Kaplansky? Justifique sua resposta.

   Solução: Resposta pessoal, espera-se dos sujeitos a percepção que, a principal diferença existente entre esses dois Lemas consiste no fato de, o primeiro Lema de Kaplansky não considerar o primeiro e o último elementos do conjunto como consecutivos, enquanto o segundo Lema de Kaplansky considera tais elementos consecutivos.