UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
INSTITUTO DE CIÊNCIA, ENGENHARIA E TECNOLOGIA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DEMONSTRAÇÕES FORMAIS EM MATEMÁTICA E REPRESENTAÇÕES VISUAIS (PROVA SEM PALAVRAS): uma proposta de correlação e complementariedade.

Luiz Otávio Abi-acl Almeida

Teófilo Otoni

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
INSTITUTO DE CIÊNCIA, ENGENHARIA E TECNOLOGIA

DEMONSTRAÇÕES FORMAIS EM MATEMÁTICA E REPRESENTAÇÕES VISUAIS (PROVA SEM PALAVRAS): uma proposta de correlação e complementariedade.

Luiz Otávio Abi-acl Almeida

Orientador(a):

Weversson Dalmaso Sellin

Co-orientador(a):

Tiago de Oliveira Dias

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos exigidos para a conclusão do curso.

Teófilo Otoni

2021

Catalogação na fonte - Sisbi/UFVJM

L953 Almeida, Luiz Otávio Abi-acl
2021 Demonstrações Formais em Matemática e Representações Visuais (Prova sem Palavras) [manuscrito] : uma proposta de correlação e complementariedade / Luiz Otávio Abi-acl Almeida. -- Teófilo Otoni, 2021.
89 p. : il.

Orientador: Prof. Weversson Dalmaso Sellin.
Coorientador: Prof. Tiago de Oliveira Dias.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teófilo Otoni, 2021.

1. Resolução de Problemas. 2. Demonstração Formal. 3. Prova sem Palavras. 4. Representação Visual. 5. Oficina Pedagógica. I. Sellin, Weversson Dalmaso. II. Dias, Tiago de Oliveira. III. Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. IV. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFVJM
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Bibliotecário Rodrigo Martins Cruz / CRB6-2886
Técnico em T.I. Thales Francisco Mota Carvalho

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

LUIZ OTÁVIO ABI-ACL ALMEIDA

DEMONSTRAÇÕES FORMAIS EM MATEMÁTICA E REPRESENTAÇÕES VISUAIS (PROVA SEM PALAVRAS): UMA PROPOSTA DE CORRELAÇÃO E COMPLEMENTARIEDADE

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação **em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT** da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, **nível de Mestrado,** como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em MATEMÁTICA.**

Orientador: Prof. **Dr. Weversson Dalmaso Sellin**

Co-orientador: Prof. **Msc. Tiago de Oliveira Dias**

Data de aprovação 27/08/2021.

Prof. Dr. Fábio Silva de Souza - (UFVJM)

Prof. Dr. Rodney Alves Barbosa - (IFMG)

Documento assinado eletronicamente por **Weversson Dalmaso Sellin**, **Servidor**, em 27/08/2021, às 10:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6°, § 1°, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Fábio Silva de Souza**, **Servidor**, em 27/08/2021, às 10:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6°, § 1°, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **TIAGO DE OLIVEIRA DIAS**, **Usuário Externo**, em 27/08/2021, às 10:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6°, § 1°, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rodney Alves Barbosa**, **Usuário Externo**, em 27/08/2021, às 11:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6°, § 1°, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufvjm.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0425056** e o código CRC **F78ECF56**.

Referência: Processo nº 23086.006661/2021-84 SEI nº 0425056

Existencial e essencialmente, na vida,

se *prova* pouco ou nada em *palavras*.

A *demonstração* da espécie do ser

é concebida *imageticamente*,

na atividade autêntica do que se é,

na *representação efetiva*

da sua virtude ou escuridão.

Dedico este trabalho aos *crédulos*, aos *esperançosos*, aos *amoráveis* (ref. 1 *Co* 13).

AGRADECIMENTO

A Deus, sempre! O centro. O dono. O motivo. Minha Fé. Minha Esperança. O Amor.

A família: à vó Laura, pela resiliência; à mãe Izabel, pela humildade e bondade; ao meu pai Altair, pela preocupação e orgulho; à tia Eunice, pelo "lutar junto"; à prima Gabriely, pela irmandade inigualável.

Aos meus mestres-amigos, professores do Ensino Médio, Leila Bretas, Juraci e Ivone, por despertarem em mim o sonho de ser um professor sábio, engraçado e amável, como eles o são. Me ensinaram que a forma como tocamos a vida do nosso aluno é tão importante quanto o conhecimento que dialogamos com ele.

Aos amigos: Gui e Shay, por sempre e por tudo; à Dalila e Sarah, pelo companheirismo e lealdade; à Nádia, pela torcida e incentivo.

Aos amigos do mestrado: à Dani, pelo segurar de mãos e pela companhia nas zoeiras; ao Dionizio, pela amizade zelosa; ao Xandy, pela amizade companheira e presença leal desde o TCC da graduação; à Fran, pelo simples e incrível compartilhar de histórias comuns; à Dry, pelo amor iluminado da sua fé.

Aos meus orientador e co-orientador, Weversson e Tiago, extensivo aos demais membros da banca, Rodney e Fábio, pelos direcionamentos, considerações, sugestões, compreensões e pela crença na pesquisa.

Aos estudantes participantes na pesquisa, pelo amor à minha atuação como professor, pela amizade que consideram à mim e pelo "crer" nas minhas proposições.

Aos meus alunos e ex-alunos, pelo olhar de respeito, de amor e de gratidão à cada pedacinho da história que escrevemos juntos na sala de aula.

Ao IFMG-SJE, pelo arar da terra, pelo plantio das sementes e pela oportunidade de frutificar - em trabalho e em pesquisa na instituição.

A UFVJM, pela oportunidade de crescimento e qualificação.

“É preciso ter Esperança.”

Lida e escutada nas vozes de Deus, vó Laura ou Karnal, me remete à ação de *esperar lutando*!

Esperar porque a fé trabalha aliada ao tempo.

Lutando porque desacredito que “viver” é de outra forma.

Lecionar é ação de Esperança! Espero com fé e luto com amor para que cada plantio dê bom fruto, enquanto Deus torna a terra boa para receber a semente destinada a produzir “100 por 1” no devido tempo.

É o que eu acredito; esperanço; e amo.

Esperei lutando por família. Esperei lutando pela graduação. Esperei lutando para ingressar e concluir o mestrado. Esperei lutando a vida inteira... Os sonhos inteiros!

Ao final de cada etapa, reconheço a presença de Deus me entregando os frutos do meu suor com a mensagem de sempre: “Por aquilo que você luta, esperando em Mim, é alcançável!”

Então, o segredo revelado é este: **Quem** é a Minha Esperança!

Eu não sei crer, sem fazer. E, não sei fazer, sem crer.

RESUMO

O presente trabalho trata-se de uma pesquisa qualitativa realizada em duas turmas de terceiro ano do Ensino Médio integrado ao curso técnico em Informática, no Instituto Federal de Minas Gerais *campus* São João Evangelista, que objetivou discutir similaridades e contrapontos entre Demonstração em Matemática (prova formal) e a Representação Visual (prova heterogênea), aqui tratada como Prova sem Palavras (*Proof Without Words*). A pesquisa desenvolveu-se com um grupo de doze participantes por meio de uma Oficina Pedagógica *on-line* com aplicação de dez questões que permitem sua abordagem por demonstrações pelo Princípio de Indução Finita, por fórmulas da soma de elementos de uma sequência em Progressão Aritmética ou Geométrica e pela metodologia Prova sem Palavras. Ao final da oficina, foi aplicado um questionário eletrônico, afim de coletar dados e informações que tangem às percepções e concepções dos participantes sobre a metodologia adotada, as provas e demonstrações tradicionais e as abordagens visuais para os somatórios presentes nas questões e trabalhados no conjunto dos números naturais e racionais. Finalmente, são apresentados e discutidos os dados coletados e as representações figurativas construídas pelos participantes à luz da literatura adotada. À partir do debate com as ideias dos autores e com a experiência oportunizada pela Oficina, frente à atuação do grupo, a Prova sem Palavras é identificada como uma metodologia contributiva ao processo de formulação de ideias, de desenvolvimento do raciocínio, de identificação de padrões e de abstração para a generalização de fórmulas na Matemática.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Demonstração Formal, Prova sem Palavras, Representação Visual, Oficina Pedagógica.

ABSTRACT

The present work is a qualitative research carried out in two groups of third year of High School integrated to the technical course in Informatics, at the Federal Institute of Minas Gerais *campus* São João Evangelista, which aimed to discuss similarities and counterpoints between Demonstration in Mathematics (formal proof) and Visual Representation (heterogeneous proof), here treated as *Proof Without Words*. The research was developed with a group of twelve participants through a Pedagogical Workshop *on-line* with application of ten questions that allow its approach by demonstrations by the Finite Induction Principle, by formulas for the sum of elements of a sequence in Arithmetic or Geometric Progression and by the Proof without Words methodology. At the end of the workshop, an electronic questionnaire was applied, in order to collect data and information regarding the participants' perceptions and conceptions about the adopted methodology, traditional tests and demonstrations, and visual approaches to the sums present in the questions and worked on in the set of natural and rational numbers. Finally, the collected data and the figurative representations constructed by the participants in light of the adopted literature are presented and discussed. Based on the debate with the authors' ideas and the experience provided by the Workshop, in front of the group's performance, the Proof without Words is identified as a contributing methodology to the process of formulating ideas, developing reasoning, identifying patterns and abstraction for the generalization of formulas in Mathematics.

Keywords: Problem Solving, Formal Demonstration, Proof without Words, Visual Representation, Pedagogical Workshop.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Quem nunca se deparou com fórmulas matemáticas ou teoremas e não se questionou "como surgiu?, qual caminho à demonstração?, há uma forma menos complicada de se demonstrar?". São questionamentos comuns, principalmente, quando, dentro da disciplina de Matemática, os processos e exercícios de prova formal não são tão recorrentes, assim como, os caminhos menos complexos, como podem ser as ideias e propostas visuais, por exemplo. Frente à demonstração, sempre genérica e, logicamente, formal, em momentos, é necessário que seja traduzida para uma linguagem mais prática e didática, de forma que o público compreenda tanto a tradução quanto a própria demonstração. Estes detalhes são antigos! A discussão entre formalidade e rigor matemático e a noção intuitiva e criatividade no processo de uma demonstração formal é presente desde o surgimento da Geometria Analítica e a construção do cálculo diferencial em moldes geométricos feita por Newton, mas que, seu companheiro, Leibniz, chamava a atenção para questões intuitivas e de cunho criativo.

Ponte (2010), em seu texto *"Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem"*, relembra a fala de Bourbaki no começo dos *Elementos*[1]: "quem diz Matemática, diz demonstração". Cita Polya (1945): "a Matemática tem duas faces, é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais [...]. Matemática, no seu processo de criação, aparece como uma ciência experimental e indutiva". Kant (1998) diz "a Matemática não pode alcançar nada por meio de conceitos apenas, mas apressa-se imediatamente à intuição". Apresentadas estas possíveis facetas e vieses da ciência matemática e seus pilares de sustentação e estrutura, surge o enigma que norteia ou, no mínimo, questiona esta pesquisa: é possível aliar o rigor e a formalidade de uma demonstração matemática à criatividade e intuição? Se possível, de que forma?

Numa tentativa de se unir o que, aparentemente, é tão distante ou sem intersecções, a proposta deste trabalho foi um diálogo sistêmico entre as partes com suas similaridades e contrapontos, complementariedade e exclusividade. Mais especificamente, tratou-se da demonstração formal, com todo o rigor matemático, e as representações visuais em Matemática, chamadas de Prova sem Palavras *(Proof Without Words - PWW)*, com todo o palpite de "se fazer um desenho". Este termo começou a aparecer na *Mathematics Magazine*, por volta de 1975, e no *College Mathematics Journal*, em 1985.

Dito isto, o objetivo geral da pesquisa foi o de discutir similaridades e contrapontos entre a Demonstração (prova formal) em Matemática e a possibilidade de Representação Visual (Prova sem Palavras) de identidades matemáticas envolvendo somas de termos de

[1]Os Elementos é um tratado matemático e geométrico consistindo de 13 livros escrito pelo matemático grego Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C.

sequências numéricas.

Para alcançar o objetivo principal, especificamente, buscou-se:

- Apresentar e reconhecer o recurso da visualização pictórica como uma metodologia contributiva para o ensino e a aprendizagem em Matemática;
- Auxiliar na compreensão das somas de elementos de uma sequência no conjunto dos números naturais e racionais, por meio da sua possibilidade de representação visual;
- Incentivar, nos estudantes, a capacidade de identificação de padrões, abstração e generalização de fórmulas, observando-se os casos iniciais e, posteriormente, as perspectivas e métodos figurativos;
- Identificar as contribuições da complementariedade da representação visual para a demonstração pelo Princípio de Indução Finita ou pelas fórmulas da soma de termos de sequências em Progressão Aritmética ou Geométrica.

A presente proposta de pesquisa justificou-se pela experiência do autor com a disciplina de Lógica Matemática, atuando, em 2019, como professor substituto no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais *campus* São João Evangelista. Os estudantes de 1º ano do curso técnico integrado em Informática apresentaram dificuldades com o conteúdo de Indução Matemática, principalmente, nas manipulações algébricas exigidas nos momentos das demonstrações das somas no conjunto dos naturais pelo Princípio de Indução Finita, como, por exemplo, o somatório $1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Em concomitância, na disciplina de Seminários I, no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, houve o contato com um artigo de (ALENCAR; CÂNDIDO; FARIAS, 2019), que trata do tema "Prova sem Palavras", "Representações visuais". No artigo em questão, foi apresentada uma proposta de representar visualmente a soma dos n primeiros números ímpares e isto chamou a atenção do autor, sendo determinante no delineamento da proposta de pesquisa.

A questão norteadora da pesquisa trata-se de: a utilização de Representações Visuais, o método *Prova sem Palavras*, auxilia na compreensão, na definição de padrões e na generalização de fórmulas nas demonstrações de identidades envolvendo somas de termos de sequências numéricas relativas ao conjunto dos números naturais e fracionários? Vale e Pimentel (2009) consideram de particular importância, "[...] a utilização de padrões figurativos, em que o modo de ver o arranjo pode ajudar a estabelecer relações e consequentemente a produzir a generalização". Acredita-se que, a proposição de Representações

Visuais aplicadas em somas de termos de sequências numéricas no conjunto dos números naturais e fracionários, assim como em outras atividades, pode ser uma forma de auxiliar na compreensão, apropriação de conhecimento e aprendizagem, bem como, auxiliar e desenvolver a capacidade cognitiva no que se refere à identificação de padrões.

No Capítulo 2, na seção "Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC)", são abordadas ideias de autores tangíveis às contribuições da tecnologia para o ensino da Matemática. Alguns destes autores são: Borba et al. (2000), Allevato (2005), Mathias, Silva e Leivas (2019) e Nóbriga (2019). Na seção "Resolução de Problemas e Representações Visuais", são apresentados autores que discutem Resolução de Problemas, como Polya (1945, 1978), Hatfield (1978), Krulik e Reys (1980), Schroeder e Lester (1989), Onuchic e Allevato (2004), Onuchic e Allevato (2011), Onuchic (2012), Onuchic et al. (2014) e Morais e Onuchic (2014). Em seguida, na seção "Demonstrações Formais e Representações Visuais (Prova sem Palavras)", são trazidos autores que abordam o tema *Proof Without Words* (Prova sem Palavras) e as Demonstrações Formais, tais como Lesh, Post e Behr (1987), Eisenberg (1994), Speiser e Walter (1997), Casselman (2000), Costa (2002), Arcavi (2003), Duval (2003, 2009), Flores e Moretti (2005), Seoane (2006), Sedig e Sumner (2006), Gierdien (2007), Tripathi (2008), Vale e Pimentel (2009), Casanave, Vaz e Schultz (2009), Barbosa (2010), Alsina e Nelsen (2012), Mathias, Silva e Leivas (2019) e Couy et al. (2020).

No Capítulo 3, são apresentados os materiais, métodos e funcionamento da pesquisa, traçando-se o desenho metodológico e caracterizando-se a pesquisa como qualitativa e de campo exploratória-descritiva. Neste capítulo, delineia-se o desenvolvimento da pesquisa com delimitação do grupo participante e o formato de aplicação das atividades, que, neste caso, foi por meio de Oficina Pedagógica.

No Capítulo 4, é apresentada a aplicação da oficina desenvolvida com o grupo participante e é feita uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados obtidos em relação às atividades aplicadas e ao questionário eletrônico proposto.

Por último, no Capítulo 5, são trazidos problemas enfrentados no transcorrer da pesquisa, dados essenciais coletados com o grupo participante em relação à temática Prova sem Palavras, os resultados alcançados mediante os objetivos e a questão norteadora propostos, bem como, as ideias e intenções com a pesquisa para o ensino de Matemática.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesse capítulo é proposto um diálogo entre ideias, conceitos e pesquisas de diversos autores sobre os temas: Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), Resolução de Problemas, Demonstrações Formais e Representações Visuais (Prova sem Palavras).

2.1 Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC)

> *"Nosso ponto de partida é o fato de que o conhecimento é algo que se constrói. A questão fundamental é como se constrói o conhecimento" (BORBA, 2000, p. 100).*

As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação tem proporcionado uma infinitude de inovações nos contextos social, econômico, cultural, profissional e, logicamente, no educacional. Estas inovações, com toda certeza, alteram ou, no mínimo, sugerem novos comportamentos frente às atualizações. Fernandes (2020, p. 23) cita, por exemplo, que, na Educação Matemática, as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação passaram por quatro fases determinantes de desenvolvimento ao longo do tempo.

> A primeira fase ocorreu a partir de 1985, na qual foram inseridos como ferramentas de ensino o computador e a calculadora simples e científica. A segunda fase ocorreu a partir de 1990, onde foi acrescentada a possibilidade do uso das calculadoras gráficas. A terceira fase ocorreu a partir de 1999, nesta foram inseridas novas ferramentas, os *laptops* e a *internet*. E a quarta e última fase ocorreu a partir de 2004, com a inserção dos *tablets* e telefones celulares. A partir daí, consolidou-se as possibilidades de diversas ferramentas inovadoras para o ensino de matemática.

Na Educação, as tecnologias tangem às práticas de ensino do professor, uma vez que o público - estudantes - está incluso e participante no mundo tecnológico. Além destas urgências naturais e comuns à prática do professor, outras circunstâncias mais sérias como, por exemplo, a situação de uma pandemia, em escala global, pelo novo coronavírus SARS-CoV-2 [1], pontuam e exigem uma nova postura do professor e, portanto, a utilização de ferramentas digitais para alcançar o estudante e ofertá-lo ensino e aprendizagem de melhor qualidade dentro do quadro de isolamento social imposto pela pandemia provocada pelo SARS-CoV-2. Nesta perspectiva, Borba et al. (2000, p. 24) retratam que

[1] "A Covid-19 é uma infecção respiratória aguda causada pelo coronavírus SARS-CoV-2, potencialmente grave, de elevada transmissibilidade e de distribuição global. [...] descoberto em amostras de lavado broncoalveolar obtidas de pacientes com pneumonia de causa desconhecida na cidade de Wuhan, província de Hubei, China, em dezembro de 2019. Pertence ao subgênero Sarbecovírus da família Coronaviridae e é o sétimo coronavírus conhecido a infectar seres humanos." Disponível em: ⟨https://www.gov.br/saude/pt-br/coronavirus/o-que-e-o-coronavirus⟩. Acesso em: 20 de abril de 2021, às 20:41.

A Lei nº 13.979, de 06 de fevereiro de 2020, e os decretos que regulamentam as ações relativas à pandemia podem ser acessados em ⟨http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2019-2022/2020/lei/l13979.htm#view⟩. Acesso em: 20 de abril de 2021, às 21:10.

> se considerarmos um professor de matemática, é preciso que ele conheça *softwares* a serem utilizados no ensino de diferentes tópicos e que seja capaz de reorganizar a sequência de conteúdos e metodologias apropriadas para o trabalho com a tecnologia informática em uso.

Allevato (2005) chama a atenção para reflexões necessárias e que precisam ser recorrentes sobre as práticas educativas que o uso do computador sugere. Para a autora, a utilização do computador conduz educadores e pesquisadores a rever e repensar os métodos, os currículos de ensino e padrões já previamente determinados. A atuação dos educadores deve se orientar em como a aprendizagem da Matemática pode se realizar e, aliado a isto, de que forma os recursos tecnológicos podem ser utilizados em atividades e investigações matemáticas, principalmente, na perspectiva de Resolução de Problemas.

Mathias, Silva e Leivas (2019, p. 63) apresenta um conceito de "Demonstrações Matemáticas Dinâmicas", determinado por Nóbriga (2019), que não trata-se de uma nova maneira de demonstrar, "mas a um tipo específico realizado em ambientes de Matemática Dinâmica com a finalidade de explicar e não apenas de validar". Em seguida, é colocado que é possível aliar provas matemáticas e resolução de problemas às animações, e, que isto é uma oportunidade permitida e proveniente das tecnologias digitais.

Logo, fica ainda mais evidente, a necessidade de utilização das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação no trabalho matemático. Nesta pesquisa, essas tecnologias se apresentam como uma ferramenta primordial para a aplicação e desenvolvimento das atividades do pesquisador junto aos estudantes. A próxima seção dialoga concepções de autores acerca da Resolução de Problemas e as Representações Visuais. Tais temas são abordados em moldes de Oficina Pedagógica *on-line*, a qual depende de recursos da tecnologia e informação.

2.2 Resolução de Problemas e Representações Visuais

> *"O coração da atividade matemática, a Resolução de Problemas tem sido a força propulsora para a construção de novos conhecimentos [...]" (ONUCHIC, 2014).*

> *"Se nós fizermos o nosso trabalho corretamente, talvez as escolas se tornem lugares onde os alunos realmente aprendam a pensar" (SCHOENFELD).*

A conceituação do termo "Resolução de Problemas" vai além de um breve e superficial entendimento sobre resolver ou achar um resultado final para problemas. Na verdade, trata-se de um tema amplo que vem sendo discutido com intuito de aperfeiçoar e inovar práticas de ensino mais eficazes e colaborativas na sala de aula. Morais e Onuchic (2014) evidenciam que a Resolução de Problemas é uma estratégia para a docência, onde os professores e alunos se envolvem em comunidades de aprendizagem nas aulas de Matemática, com seus diferentes papéis e funções e focados na aprendizagem com significado. Dessa forma, fica mais do que evidente, a necessidade de professores repensarem suas práticas, bem como, os estudantes se comprometerem e se dedicarem à protagonização de sua aprendizagem, como posto por Onuchic et al. (2014). As autoras reiteram a necessidade de inovação da prática educativa de conhecimentos e conceder e incentivar aos estudantes à responsabilidade por sua própria aprendizagem, sabendo que estes são os personagens principais na construção de conhecimento.

Dentro dessa ideia, Onuchic e Allevato (2011, p. 82) reafirmam sobre o enfrentamento e a atuação tanto dos professores quanto dos estudantes.

> O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitude e postura, o que, nem sempre, é fácil conseguir.

Um ambiente propício a estes desenvolvimentos é a Resolução de Problemas. Uma estratégia defendida por George Pólya, o grande precursor do tema, nascido na Hungria, mas que promulgou estudos na área, em 1942, quando foi professor titular da Universidade de Stanford, nos Estados Unidos. Três anos depois, publica o livro na versão impressa *"How to solve it: a new aspect of mathematical method"*[2], no qual apresenta uma sequência de quatro fases para se resolver um problema: 1) compreender o problema; 2) estabelecer um plano; 3) executar o plano; e 4) examinar a solução obtida (POLYA, 1978).

A Resolução de Problemas no currículo iniciou-se em 1980, nos Estados Unidos, onde, em meio a tantas pesquisas produzidas desde Pólya, publicou-se um livro do *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)* - Conselho Nacional de Professores de Matemática, chamado *"A Resolução de Problemas na Matemática Escolar"*, composto por 22 artigos (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009). Dentre estes, o primeiro é de Pólya, tratando da Resolução de Problemas de Matemática na *high school* [3] e como ela pode ser trabalhada em sala de aula. Após estas três décadas de naufrágio do ensino (Movimento da Matemática Moderna[4]), a Resolução de Problemas ganha campo e amplitude, uma vez que já se tratava de uma área de pesquisa que há anos bem se fundamentava. A partir disso, os currículos escolares dos Estados Unidos colocam-a como prioridade no ensino,

[2]Tradução: *A arte de resolver problemas.*

[3]Equivalente ao ensino médio no Brasil.

[4]O "Movimento da Matemática Moderna" perdurou ao longo dos anos de 1950 a 1970. Inclusive, os motivos de seu insucesso são apresentados por Onuchic et al. (2014, p. 27) ao citarem Schoenfeld (1996) colocando que, além do despreparo dos professores em relação à abordagem e dificuldades das famílias em auxiliar os filhos nas tarefas escolares, "o nível de desempenho dos estudantes em Matemática não havia atingido o mínimo desejado, pois eles não aprendiam as abstrações e suas habilidades básicas tinham se perdido na mal sucedida pressa de ensinar, às crianças muito jovens, coisas como a nova teoria numérica".

assim como, um vasto número de países, e, portanto, inicia-se sua expansão e divulgação mundo à fora.

Na década de 80, através do documento *An Agenda for action – recommendations for School Mathematics of the 1980s*, publicado pelo Conselho Nacional dos Professores de Matemática (NCTM, 2000), é sugerido que a Resolução de Problemas seja o foco do ensino da Matemática a partir daquela década. Imediatamente após este documento, mesmo com a Resolução de Problemas sendo o *slogan* da idealidade no ensino de Matemática, sua implantação - o *como* torná-la o pilar, ainda foi um problema e era utópico, segundo Schoenfeld (2007). Isto, devido à indústria de livros apresentar edições com seções de resolução de problemas com a mesma abordagem e mesmos conteúdos, implicando, nas salas de aulas americanas, poucas mudanças. Infelizmente, a Resolução de Problemas ainda era tratada como *resolução de problemas com enunciado*.

Outro detalhe é o distanciamento entre Resolução de Problemas e a realidade. O Conselho Nacional dos Professores de Matemática (NCTM) coloca que o trabalho com Resolução de Problemas é regido e pautado pela "aplicação da matemática ao mundo real, servindo à teoria e à prática de ciências atuais e emergentes, e resolvendo questões que ultrapassem as fronteiras das ciências matemáticas" (NCTM, 2000, p. 2). Portanto, uma prática educativa com foco na aprendizagem matemática precisa levar em consideração as possíveis aplicações tangentes à ciência matemática.

Quanto aos tratamentos distintos ao ensino de Resolução de Problemas, Morais e Onuchic (2014, p. 37) citam Schroeder e Lester (1989) e Hatfield (1978), que definem três tipos de abordagem: (1) ensinando *sobre* Resolução de Problemas, (2) ensinando *para* Resolução de Problemas, e (3) ensinando *via* Resolução de Problemas. O "ensinar sobre" é trabalhar sobre a metodologia proposta por Pólya (1945) ou, no mínimo, dentro da perspectiva. Considera-se esse primeiro passo como um novo conteúdo. O "ensinar para" trata-se de o professor refletir sobre as maneiras que a Matemática pode ser aplicada em problemas. A aquisição do conhecimento de Matemática é primordial, mas, neste passo, o ensino tem como objetivo principal a habilidade de utilizá-lo, ou seja, neste momento, após o professor apresentar a parte teórica do conteúdo, ele propõe problemas com aplicações do que foi estudado. E, por último, no "ensinar via", os problemas não têm como função apenas de levar o indivíduo a aprender Matemática, mas a de fazê-la. É um momento onde Matemática e Resolução de Problemas caminham juntas, como é refletido por vários autores Hatfield (1978), Krulik e Reys (1980), Onuchic et al. (2014).

A perspectiva do "ensino via" Resolução de Problemas criou força e se consolidou a partir de vários trabalhos desenvolvidos pelo Conselho Nacional dos Professores de Matemática (NCTM), os quais levaram à publicação dos *Standards 2000* (NCTM, 2000).

Juntamente, neste movimento, o Brasil renova suas orientações curriculares, no caso, os Parâmetros Curriculares Nacionais: Brasil (1997), Brasil (1998) e Brasil (1999), de forma que a Resolução de Problemas torna-se o ponto primordial de atividades matemáticas em sala de aula, ou seja, a metodologia figura-se o fundamento do ensino de Matemática brasileiro.

O ponto de partida e que orienta o trabalho com Matemática em sala de aula nos documentos oficiais e ideias socioconstrutivistas de aprendizagem é o princípio de que, ao serem colocados em momentos e situações de resolução de problemas, a aprendizagem dá-se pela edificação de conceitos elaborados pelos próprios estudantes (ONUCHIC et al., 2014). Para isso, segundo as autoras, o papel do professor é ser o gerador de situações propícias e o confrontador das concepções criadas pelo estudante. A partir disso, este último é o construtor do próprio conhecimento matemático.

Cai e Lester (2012), apud Onuchic et al. (2014), evidenciam que é necessário os professores compreenderem que o desenvolvimento dos estudantes em Resolução de Problemas dá-se lentamente e, portanto, é ideal se ter uma cultura de trabalho com Resolução de Problemas em sala de aula, ou seja, torná-la uma prática consistente e regular.

Uma prática educativa plausível e com solidez matemática é pautada por Onuchic e Allevato (2004), quando salientam que os objetivos gerais da área de Matemática é levarem os estudantes a pensar matematicamente,

> levantar ideias matemáticas, estabelecer relações entre elas, saber se comunicar ao falar e escrever sobre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e de fora da matemática e desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p. 218).

Corroborando com essas discussões, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) - Brasil (2018) ressalta que conhecimentos específicos devem incentivar procedimentos mais eficazes para a reflexão e abstração, dando suporte aos estudantes para formularem e resolverem problemas com mais autonomia e recursos matemáticos.

> Os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. Assim, para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas à representação e à comunicação para expressar as generalizações, bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado (BRASIL, 2018, p. 529).

Nesta perspectiva, Polya (1945) destaca a identificação de padrões como uma das mais imprescindíveis estratégias de Resolução de Problemas e Barbosa (2010) defende que a oportunidade dos alunos resolverem problemas, num nível apropriadamente específico, potencializa o raciocínio para conjecturas e provas, além de que, tal atividade se assemelha e aproxima de práticas feitas por matemáticos.

Dreyfus (1991) apud Costa (2002) evidencia que o pensamento matemático possui distintos processos cognitivos, dentre os quais a abstração e a representação apresentam relações. À seguir, tem-se os

> processos envolvidos na representação de conceitos e de propriedades (o processo de representar-visualização, a mudança de representações e a tradução de uma formulação de um problema ou frase matemática para uma outra formulação, a modelação), processos envolvidos na abstracção (generalização e síntese são pré-requisitos básicos para a abstracção), processos que estabelecem relações entre o representar e o abstrair, e ainda processos que podem incluir entre outros a descoberta, a intuição, a verificação, a prova e a definição (COSTA, 2002, p. 261).

Uma proposta de ensino com Representações Visuais em Resolução de Problemas é considerada contributiva e relevante para Barbosa (2010), no que diz respeito ao desenvolvimento de capacidades intelectuais como, por exemplo, generalização, abstração e identificação de padrões matemáticos.

> Os conceitos matemáticos são na sua essência abstratos sendo necessário utilizar capacidades cognitivas de ordem superior para os interiorizar. A utilização de representações, em particular, representações de natureza visual, pode facilitar a compreensão de alguns desses conceitos tornando-os concretos e mais claros.
>
> As representações têm vindo gradualmente a ocupar um papel de destaque na aprendizagem da Matemática e, em particular, na Resolução de Problemas (BARBOSA, 2010, p. 27).

Tripathi (2008) evidencia que as Representações Visuais tem sido muito investigadas nos últimos anos, pois, além de estarem disponibilizadas facilmente, tem considerável importância no campo de Resolução de Problemas. Para Arcavi (2003), a proposta visual é uma componente determinante do raciocínio, da Resolução de Problemas e até da demonstração.

A autora Barbosa (2010) coloca que a utilização de imagens visuais no trabalho matemático foi feita por George (POLYA, 1945), quando o autor sugere *fazer um desenho*. Polya (1945) ressalta que é possível ser feito um desenho para um problema, mesmo que este não seja geométrico, e uma representação pode ser determinante em direção à solução.

Na crença de que, em Resolução de Problemas, pode-se criar estratégias metodológicas e/ou adaptar as existentes, objetivando o ensino de qualidade e a aprendizagem significativa, o próximo tópico dialoga ideias de autores que acreditam nas contribuições do trabalho com a metodologia "Provas sem Palavras" (*Proof Without Words - PWW*).

2.3 Demonstrações Formais e Representações Visuais (Prova Sem Palavras)

> *"Ademais, os signos são tanto mais úteis quanto mais expressam um conceito de uma coisa significada, de tal forma que não apenas podem servir para uma representação, como também para o raciocínio" (LEIBNIZ, 1982, p. 189, tradução nossa).*

> *"Representar um conceito é* ***criar uma imagem*** *dele" (PIMENTEL; VALE, 2012, p. 38, grifo nosso).*

Antes de se iniciar uma discussão acerca de Demonstrações Formais e Representações Visuais à partir de uma abordagem histórica, é válido propor as definições dos termos "visualização" e "representações visuais". Gutiérrez (1996) caracteriza a visualização em Matemática como o tipo de atividade que tem por base o recurso a elementos visuais ou espaciais, sejam mentais ou físicos, utilizados na Resolução de Problemas ou na demonstração de propriedades. Arcavi (2003, p. 217) reafirma que:

> a visualização é a capacidade, o processo e o produto de criação, interpretação, utilização e análise de figuras, imagens e diagramas, na nossa mente, no papel ou por intermédio de ferramentas tecnológicas, com o propósito de descrever e comunicar informação, pensar sobre e desenvolver ideias previamente desconhecidas e progredir no conhecimento.

Sedig e Sumner (2006) definem as Representações Visuais como "uma coleção de símbolos gráficos que codificam visualmente as propriedades causais, funcionais, estruturais e semânticas e as relações de um mundo representado – seja abstrato ou concreto". O NCTM (2000) evidencia que "representação" tem referência e aplicação tanto como ao produto como ao processo obtido externa e/ou internamente ao cognitivo dos estudantes quando desenvolvem Matemática.

Speiser e Walter (1997) ressaltam que, ao se falar de "representação", precisa-se levar em consideração a *forma apresentada* da criação do indivíduo, para si mesmo, como parte de um pensar em fluxo, ou, no caso de uma "forma apresentada" a terceiros, como um relato em progresso.

Barbosa (2010), na tentativa de categorizar as representações matemáticas que surgem no decorrer da aprendizagem da Matemática e na Resolução de Problemas, cita Lesh, Post e Behr (1987), os quais sugerem as seguintes classificações: "concretas (materiais manipuláveis); verbais (linguagem); simbólicas (notação); semi-concretas (pictóricas); e contextuais (situações da vida real)" (BARBOSA, 2010, p. 30). A proposta dessa pesquisa engloba representações matemáticas verbais e pictóricas, uma vez que trata da demonstração matemática formal (verbal/escrita) e representações visuais (semi-concretas).

Numa abordagem histórica, o formalismo axiomático e o rigor das demonstrações e construções geométricas foram lançados na Grécia por Euclides de Alexandria, autor de *Os Elementos*. As escrituras desta época apresentam uma forte característica dos estudiosos/matemáticos, a qual é apresentada na fala de Blane (2014, p. 4): "[...] matemáticos são seres que apagam seus rastros! Nas provas, só vemos a construção de um raciocínio limpo, sem chances a questionamentos, mas não o rascunho, a criatividade que leva a prova. Só tem-se a síntese de um processo não a sua análise."

Dentro desse formalismo e rigor da época, o surgimento da Geometria Analítica com Descartes e Fermat e na disputa entre Leibniz e Newton, a noção intuitiva é pautada por Leibniz na criatividade e o desenvolvimento. Neste momento, há pequenos indícios da presença da Prova sem Palavras com Leibniz e nos estudos do cálculo diferencial construído por Newton em moldes geométricos euclidianos.

Blane (2014) também faz referência a um período no século XIX, em que a exigência por melhores definições e conceitos abstratos é crucial, como, por exemplo, no desenvolvimento do cálculo diferencial em funções e nas séries de Fourier, levando ao distanciamento entre a Física e a Matemática. D'Ambrosio (2021, p. 67) coloca que, no final deste século, ocorria uma transição inesperada, "enquanto a matemática procurava meios de se fundamentar como um corpo de conhecimento que se desenvolvia num universo próprio, a física, como a ciência das explicações de fatos e fenômenos naturais, procurava também se fundamentar através da busca de um universo simbólico". Daí, para se provar algo em Matemática, o Princípio de Indução Finita era um caminho, herdado dos gregos, irrefutável e solucionava a ânsia pela demonstração.

Em prosseguimento, a transição do séc. XIX para o século XX, existia uma discussão entre *provas heterogêneas* e *provas sentenciais*. Casanave, Vaz e Schultz (2009) colocam que, as primeiras, referem-se às demonstrações com recursos figurativos, geométricos e diagramáticos, o que não era bem aceito, uma vez que, as segundas eram as legítimas e mais rigorosas, portanto, excluíam a utilização de recursos gráficos. No caso, a figuração, ou geometrização, ou "diagramatização" de algum processo numa prova tinham função meramente ilustrativa, não sendo determinantes ou influentes.

No final do século XX, a discussão é retomada, colocando a legitimidade das *provas diagramáticas* igual à das *provas formais*. Seoane (2006) coloca que tal legitimidade "não estaria associada ao uso de regras de inferência lógica, como ocorre em provas sentenciais", mas que, algumas informações, podem ser extraídas diretamente das Representações Visuais sem o rigor que seria exigido para o caso da demonstração formal dessas informações. O que se intenciona dizer é que, se um determinado passo numa prova formal é possível sua justificativa por meio diagramático, tal processo poderia ser considerado válido, uma vez que a representação visual sugere a validade do que é afirmado no meio diagramático. Um exemplo disso é a proposta de Manders (2008) com uma interpretação das demonstrações euclidianas constituídas por: ora textos (definições, postulados, noções comuns e proposições previamente demonstradas); e, ora graficamente, trazendo uma forma e atuação diferentes na prova.

Blane (2014) considera, finalmente, que, dentro de uma perspectiva histórica, há uma relação temporal entre o rigor e prova ainda não arrematada e, portanto, conclui que a Prova sem Palavras questiona o excesso de rigor, bem como, permite contribuições das demais áreas para o conhecimento das afirmações matemáticas, como exemplo a ciência da computação, incentivando matemáticos a serem um pouco flexíveis com a ideia de se provar e se considerar uma verdade.

A ciência da computação tem a capacidade de dar uma nova e mais poderosa roupagem para a Matemática. Além da sua grande, mas pouco explorada, capacidade de por à prova prática, os conceitos, teoremas e hipóteses, há também sua capacidade de processamento, análise e obtenção de resultados. Para muitos matemáticos puros, a verdade é o que é demonstrado rigorosa e formalmente pelos métodos da própria ciência matemática. Portanto, a definição de *prova formal*, aqui tratada como Demonstrações Formais, é definida por Casanave, Vaz e Schultz (2009) como uma

> sequência de fórmulas tal que cada uma delas, ou bem é um axioma, ou bem se segue de fórmulas anteriores na sequência por meio de uma regra de inferência. A ideia básica por trás deste conceito de prova é a de que provas, para serem legítimas, têm de ser rigorosas, sendo o rigor identificado com a explicitação de axiomas e regras de inferência (CASANAVE; VAZ; SCHULTZ, 2009, p. 14).

Quanto às suas funcionalidades, Hanna (2000) compila e apresenta alguns objetivos:

> a) verificação (preocupa-se com a verdade de uma afirmação);
>
> b) explicação (fornece informações sobre por que a afirmação é verdade);
>
> c) sistematização (preocupa-se com organização de vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas);
>
> d) descoberta (preocupa-se com a descoberta ou invenção de novos resultados);
>
> e) comunicação (transmite o conhecimento matemático);
>
> f) construção de uma teoria empírica;
>
> g) exploração do significado de uma definição ou as consequências de uma suposição;
>
> h) incorporação de um fato conhecido em uma nova estrutura e a possibilidade de visualizá-lo sob uma nova perspectiva (HANNA, 2000, p. 8).

Em contrapartida, Prova sem Palavras, que trata das Representações Visuais (provas heterogêneas), é definida por Casselman (2000) apud Gierdien (2007, p. 65) que "pode ser pensada como uma "prova" que faz uso de Representações Visuais, isto é, imagens ou outros meios visuais para mostrar uma ideia matemática, equação ou teorema. Não contém quaisquer palavras além de símbolos literais ou numéricos e desenhos geométricos". A utilização do termo *prova* entre aspas aqui é mantida, uma vez que, a ideia de prova em Matemática, só é válida se demonstrada formalmente com regras de inferência lógica, teoremas ou sequências de fórmulas.

Um ponto importante refletido por Mathias, Silva e Leivas (2019) é a fala de Alsina e Nelsen (2012) que considera a Prova sem Palavras como, no mínimo, um começo para a demonstração formal. Para eles, as figurações ou diagramas ajudam a entender o porquê de uma afirmação matemática ser verdadeira. Gierdien (2007) coloca que são provas que explanam visualmente processo e produto, onde, este último, é um meio de dar suporte à capacidade do aluno de descrever a demonstração.

Eisenberg (1994) salienta que a Matemática possui duas vertentes em sua essência: a abstração e a intuição e, nesta última, está o campo da visualização. "Há por um lado a tendência para a abstração [...]. A outra é a tendência para o pensamento intuitivo que contempla processos de visualização. Em geral as escolas têm vindo a concentrar-se na primeira e uma das consequências desta abordagem é que uma grande parte dos alunos não gosta de pensar com base em figuras (EISENBERG, 1994, p. 110)."

Hanna (1989) contribui para o debate sobre a natureza de uma prova em Matemática estabelecendo uma diferença entre as *provas que provam* e as *provas que explicam*. As *provas que provam* são aquelas que verificam um teorema, ou seja, que convencem de que tal afirmação é verdadeira. As *provas que explicam* são aquelas que mostram porque um teorema ou afirmação são verdadeiros.

No que diz respeito à complementariedade do recurso visual em relação à demonstração formal, Gierdien (2007) refere-se à visualização, colocando-a como um atrativo para preencher as palavras, afim de tornar verdadeiro o teorema ou a afirmação nesse tipo de tarefa. Isto é, ao se debruçar sobre uma Prova sem Palavras, deve-se tentar ver a matemática invisível, através da visualização (ARCAVI, 2003).

Pode-se concluir, portanto, que a Prova sem Palavras é uma metodologia que faz uso de noções intuitivas para representar, construir, exprimir ou traduzir imageticamente uma entidade ou afirmação matemática, assim como, mostra a validade e/ou a aplicabilidade de tais afirmações por meio de desenhos, diagramas, imagens ou animações, sem a utilização de palavras e/ou métodos formais de demonstração em Matemática.

Numa visão mais formalista da Matemática, a Prova sem Palavras não pode ser considerada demonstrações formais. Brown (1999) evidencia que

> os matemáticos, como o resto de nós, valorizam ideias inteligentes; em particular, eles se encantam com uma imagem engenhosa. Mas essa apreciação não subjulga um ceticismo predominante. Afinal de contas, um diagrama é (no melhor dos casos) apenas um caso especial e, portanto, não é possível estabelecer um teorema geral. Ainda pior, pode ser francamente enganador. Embora não seja universal, a atitude predominante é que as imagens não são mais que dispositivos heurísticos; eles são psicologicamente sugestivos e pedagogicamente importantes, mas não provam nada.

Outro detalhe a se considerar é, mesmo que um objeto matemático tenha vários registros de representação, tal objeto não pode perder sua referência.

> [...] Não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação. É essencial jamais confundir os objetos matemáticos, como os números, as funções, as retas, etc, com suas representações, quer dizer, as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados de figura... porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes. (DUVAL, 2009, p. 14)

Com a experiência do autor com a disciplina de Lógica Matemática e com o conteúdo de indução matemática para alunos do 1º ano do Ensino Médio do curso técnico em Informática do Instituto Federal de Minas Gerais *campus* São João Evangelista, nos momentos de aplicação do Princípio de Indução Finita, na demonstração de identidades envolvendo somas finitas de termos de sequências numéricas sobre o conjunto dos números naturais, percebeu-se grande dificuldade por parte dos estudantes em compreenderem a manipulação algébrica e o processo de demonstração característicos da técnica. Percebeu-se a necessidade de uma metodologia complementar e recreativa para tratar de uma matemática tão formal.

3 METODOLOGIA

Mediante as vivências do pesquisador, as concepções e o diálogo de ideias dos autores, os objetivos dessa pesquisa são retomados na tentativa de alcançá-los. Dessa forma, elaborou-se e ministrou-se uma Oficina Pedagógica com a proposta de Prova sem Palavras / Representações Visuais, a qual é melhor detalhada nesta seção.

Com a finalidade de alcançar os objetivos deste trabalho e embasando-se em definições de autores citados à seguir, a pesquisa é caracterizada como pesquisa qualitativa e de campo exploratório-descritivo. É qualitativa e de campo, uma vez que obtém-se dados descritivos definidos pela atuação e contato direto do pesquisador com as atividades do grupo ou ambiente estudados, assim como, tem a preocupação em caracterizar a perspectiva dos participantes (LUDKE; ANDRÉ, 2011), (GIL et al., 2007). Dessa forma, a maior parte do trabalho é realizada pessoalmente pelo pesquisador, dando a devida atenção e importância ao contato e vivência dele próprio na realidade que se dispõe a estudar (GIL et al., 2007). Outras características tangentes à pesquisa de campo é a autenticidade dos fatos e fenômenos, bem como, a espontaneidade presente na coleta de dados e nos registros de variáveis que, futuramente, são objetos de análise e discussão (LAKATOS; MARCONI, 2010).

Por último, é um estudo de campo exploratório-descritivo, pois, como define Lakatos e Marconi (2010, p. 171), trata-se de investigações na qual há a formulação de questões e tem tripla finalidade: "desenvolver hipóteses, aumentar a familiaridade do pesquisador com um ambiente, fato ou fenômeno, para a realização de uma pesquisa futura mais precisa [...]. Uma variedade de procedimentos de coleta de dados pode ser utilizada, como entrevista, observação participante [...]". A descrição, neste caso, objetivou a definição, o delineamento e a caracterização do fenômeno. Além disso, a participação do autor deu-se por observação e interação em momentos permissíveis com o grupo pesquisado.

O desenvolvimento da pesquisa, no que diz respeito à aplicação em campo, deu-se através de Oficina Pedagógica, a qual é uma metodologia de trabalho em grupo focada na construção conjunta de um conhecimento, de observação, reconhecimento e descrição de uma realidade estudada, confrontando ideias e dialogando experiências diversificadas de cada indivíduo participante de forma a amplificar o reconhecimento daquela realidade (CANDAU, 1999). Todo o saber se resume não somente a um resultado final da experiência de aprendizagem, mas, principalmente, ao processo de construção dele. Neste sentido, tal ideia se reforça quando educadores e educandos constroem juntos o conhecimento num tempo-espaço para convivência, para a reflexão, para a definição de conceitos e de atuação e participação (CUBELLES, 1987).

O grupo participante da pesquisa é composto por doze estudantes das duas turmas de terceiro ano do ensino técnico-integrado do curso de Informática do IFMG *campus* São João Evangelista, uma vez que o autor, em 2019, atuou como professor, no 1º ano, nas disciplinas de Matemática e Lógica Matemática, onde, nesta última mais especificamente, o conteúdo de Indução Matemática para a demonstração de identidades envolvendo somas finitas de termos de sequências numéricas sobre o conjunto dos números naturais fazia parte da ementa da disciplina.

Os doze participantes da pesquisa foram codificados para a discussão das questões, como P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, e P_{12}, afim de garantir sigilo quanto à sua identificação. A participação dos estudantes deu-se voluntariamente e, nem sempre, em cada encontro, todos os 12 colaboradores estavam presentes.

Na Oficina, houve a aplicação de um total de dez questões que abordaram: somas no conjunto dos números naturais (04), somas com números fracionários (04) e construções geométricas (02), onde todas possibilitaram o trabalho com a Prova sem Palavras / Representações Visuais. A escolha dessas questões foi devido ao fato dos participantes na pesquisa terem familiaridade com o conteúdo de Princípio de Indução Finita presente na disciplina Lógica Matemática no 1º ano, assim como, as Progressões Aritmética e Geométrica são conteúdo da ementa da disciplina de Matemática do 2º ano. Quanto às questões que trataram de construção geométrica, uma envolvia fatoração do produto notável $a^2 - b^2$ e, a outra abordava uma construção de um triângulo determinado por pontos específicos sobre o gráfico de uma função quadrática.

A Oficina se subdividiu em quatro aplicações / encontros *on-line* síncronos (24/02, 01/03, 03/03 e 05/03/2021), uma vez que, devido à pandemia, o distanciamento social foi necessário para evitar contaminação pelo coronavírus. Tais encontros, foram gravados para efeitos de análise do material e dados e, cada encontro, teve duração de, no máximo, duas horas.

No primeiro encontro síncrono, foram apresentados os motivos e incentivos referentes à ideia da pesquisa e ficaram acordados os dias dos próximos encontros. Além disso, foram pactuadas: a necessidade de postagem das resoluções de cada questão nas pastas específicas criadas no *Google Drive* e compartilhadas com os participantes da pesquisa, bem como, a necessidade de resposta, mesmo que não obrigatória, ao formulário eletrônico produzido com a ferramenta *Google Forms* (Apêndice B) que foi aplicado ao final da Oficina. As representações visuais relativas às atividades, foram, em sua grande maioria, feitas no aplicativo *Draw Bricks* e editadas no *Paint*. Quanto à distribuição das questões, no primeiro encontro síncrono, houve a aplicação de duas atividades. No segundo e terceiro encontros, houve a aplicação de três atividades. E, no último encontro, foram aplicadas duas atividades e o questionário eletrônico.

O pesquisador utilizou o quadro virtual, *Jamboard*, que é uma extensão / ferramenta do *Google*, para escrever algumas observações e considerações e discutir dúvidas e pontuações colocadas pelos estudantes. Outra grande contribuição do *Jamboard* é que toda e qualquer escrita nele fica armazenada no *Google Drive* e, portanto, os envolvidos na pesquisa podem acessá-lo posteriormente, além de permitir um trabalho colaborativo, de forma que os participantes podem interagir com escrita, postagens, etc.

No que se refere aos instrumentos de coleta de dados, foram utilizados fotografias das resoluções propostas pelos estudantes para cada questão sugerida, a gravação dos encontros síncronos através do *Google Meet* e, ao final das aplicações, o formulário eletrônico. Este último, foi aplicado utilizando-se a ferramenta *Google Forms* (vide Apêndice B) e foi composto por seis questões: quatro questões fechadas e duas abertas. Seu objetivo foi o de apreciar as opiniões e perspectivas dos participantes acerca das atividades, da validação da proposta sobre Representações Visuais (Prova sem Palavras), bem como, sugestões de melhorias e adaptações no que se refere ao método. A apreciação das impressões dos estudantes, no decorrer da Oficina, deu-se também por meio de observação participativa, destacando e buscando sanar e dialogar os aspectos como: dúvidas, dificuldades, erros e acertos, a participação e o envolvimento dos estudantes.

Todo o conjunto de instrumentos: a análise das respostas ao questionário, o encontro gravado e a observação ao participante nas aplicações e, as resoluções de cada questão propostas pelos estudantes, foi analisado e comentado em consonância com a fundamentação teórica adotada referente à utilização de Representações Visuais (Prova sem Palavras). A análise e as interpretações dos dados descritos foram feitas à luz da abordagem hermenêutica.

Com isso, permitiu avaliar a possibilidade, a escolha e o uso desta metodologia direcionada à identificação, definição de padrões matemáticos e generalização em situações permissíveis, e como uma sugestão metodológica para complementação de demonstrações formais.

Em referência à garantia do consentimento e participação na pesquisa, foi adotado e assinado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE – Anexo A) aos estudantes e suas respectivas famílias, a fim de proteger legal e moralmente o pesquisador e o grupo pesquisado. Por se tratar de um público-alvo com idade entre 12 a 18 anos incompletos, foi também adotado e assinado o Termo de Assentimento do Menor (Anexo B). Tais documentos foram arquivados, sob responsabilidade do autor, por 05 (cinco) anos após o término da pesquisa. Do mesmo modo, quanto à instituição parceira da pesquisa, o IFMG *campus* São João Evangelista, a direção de ensino autorizou a pesquisa e a documentação foi oficializada por meio da Carta da Instituição Co-participante.

Com base no exposto, o próximo capítulo traz os resultados e as discussões da pesquisa. Ao mesmo tempo, descreve a experiência permeada pela Oficina, compartilhando e detalhando alguns registros cruciais, como representações visuais, demonstrações e fórmulas utilizadas pelos estudantes e suas respostas ao formulário eletrônico, os quais tangem a proposta desta pesquisa e vão ao encontro das concepções dialogadas no "Referencial Teórico" acerca do método adotado Prova sem Palavras.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta e dialoga as ideias de resoluções propostas pelos participantes a cada questão aplicada na Oficina e, posteriormente, traz concepções coletadas acerca do grupo pesquisado, por meio do formulário eletrônico, que tangem às Representações Visuais e às Demonstrações Formais, permitindo uma discussão à ótica dos autores sobre o tema Prova sem Palavras.

4.1 A aplicação das questões

À seguir, a discussão das propostas de solução a cada questão sugeridas pelos estudantes e pesquisador.

4.1.1 Soma dos *n* primeiros números naturais

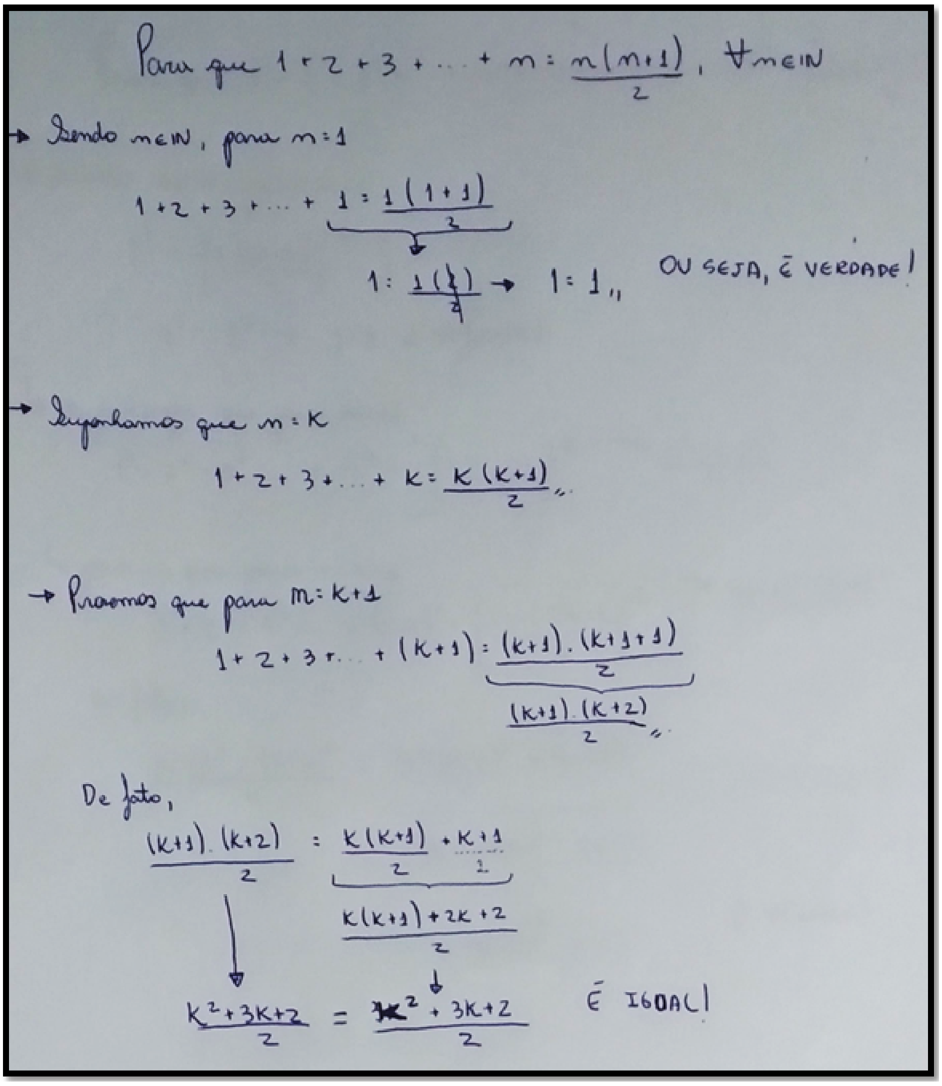
A primeira questão proposta ao grupo participante foi demonstrar a fórmula fechada para a soma dos n primeiros números naturais e cujo objetivo era identificar os métodos de demonstração utilizados pelos estudantes:

Questão 1. *Mostre a igualdade* $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Para a demonstração da igualdade, foram utilizados: o Princípio de Indução Finita e a fórmula da soma de n termos de uma Progressão Aritmética, uma vez que tais conteúdos foram estudados em disciplinas do ensino médio integrado ao técnico, como em Lógica Matemática (1º ano) e Matemática (2º ano), respectivamente. Como o grupo pediu para revisar a técnica de demonstração utilizando o Princípio de Indução Finita, o pesquisador ilustra os passos utilizando o quadro virtual, o *Jamboard*.

Um total de sete estudantes utilizaram o Princípio de Indução Finita e dois, a fórmula da soma de n termos de uma Progressão Aritmética. Uma resolução, proposta pelo estudante P_1, e que se assemelha à dos demais colegas, segue abaixo.

Figura 4.1: Proposta do estudante P_1.

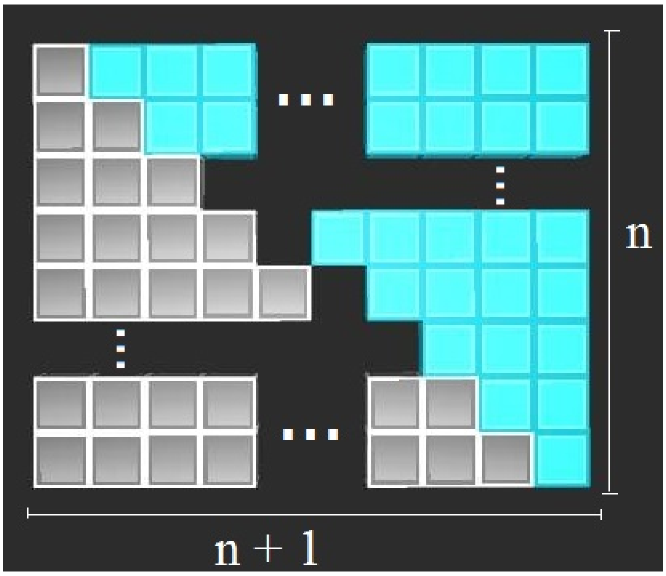


Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

O artifício de Representações Visuais, o método Prova sem Palavras, não apareceu em nenhuma solução proposta pelos participantes, o que evidencia o não contato dos mesmos com essa técnica de abordagem para problemas do tipo apresentado na questão. As soluções apresentadas pelos estudantes, como aquela da Figura 4.1, Casanave, Vaz e Schultz (2009) classificam-nas como provas sentenciais, que não utiliza-se de recursos gráficos ou pictóricos.

Após o recebimento das resoluções da primeira questão de cada participante, o pesquisador faz a primeira abordagem do tema introduzindo a Prova sem Palavras sugerida à soma dos n primeiros números naturais. A Figura 4.2 apresenta uma proposta de solução apresentada pelo pesquisador, para discussão com o grupo.

Figura 4.2: Soma dos n primeiros números naturais.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

Neste momento, os estudantes apresentaram curiosidade em relação à Prova sem Palavras. Após se explanar que a soma aplicada na imagem trata-se de, na primeira linha, de cima para baixo, haver um quadrado cinza; na segunda, haver dois quadrados cinza, e assim sucessivamente, até a n-ésima linha, onde há n quadrados cinza, assim como, é dada a mesma interpretação à quantidade de quadrados azuis de baixo para cima, é fácil visualizar a quantidade total de quadrados cinza (ou azuis). No caso, existem n linhas, onde, cada linha possui $n+1$ quadrados e, como há a mesma quantidade de quadrados azuis ou cinzas, a quantidade de quadrados cinza (ou azuis) é $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

4.1.2 Soma dos *n* primeiros números cúbicos

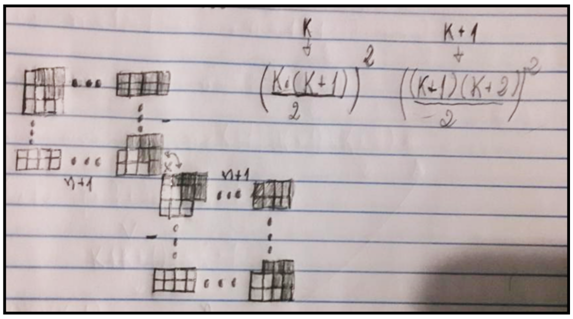
A segunda questão trata-se da soma dos n primeiros números cúbicos e é proposta com o objetivo de incentivar a utilização do método Prova sem Palavras, uma vez que, há a possibilidade de um diálogo entre a representação da questão anterior e a possibilidade de construção da solução análoga àquela apresentada pelo pesquisador, vide Figura 4.2.

Questão 2. *Mostre a igualdade* $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

A primeira questão tratava-se de uma Progressão Aritmética (P. A.) e, dessa forma, facilmente demonstrada pela fórmula da soma de n termos de uma P. A., o que de fato foi utilizado por alguns alunos em suas soluções. No entanto, a questão 2 não se trata de P. A. e nem de uma Progressão Geométrica (P. G.) o que, possivelmente, pode sugerir aos alunos a utilização do Princípio de Indução Finita como estratégia para a demonstração solicitada. Isto é concretizado quando observada a quantidade de estudantes que optaram por tal caminho: um total de seis soluções fizeram uso dessa estratégia. No entanto, nesta atividade, já nota-se que três estudantes tentaram uma abordagem visual para a solução, o que pode evidenciar que, para tais estudantes, a abordagem apresentada pelo pesquisador para a solução da questão 1 mostrou-se atrativa. No caso dos estudantes que optaram pelo Princípio de Indução Finita como estratégia de solução para a questão, alguns mencionam certa dificuldade em trabalhar algebricamente com polinômios na forma $(x+a)^3$ e identificar a igualdade no passo final de indução.

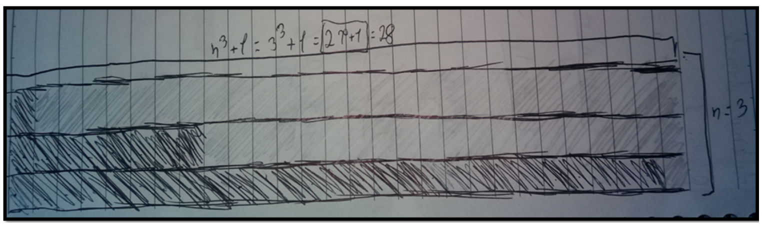
Apresenta-se à seguir duas tentativas de representação visual elaboradas pelos estudantes P_3 e P_4, embora os estudantes dizem que não conseguiram identificar ou criar um padrão visual para que, ao final, seja generalizado para o caso n.

Figura 4.3: Proposta do estudante P_3.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

Figura 4.4: Proposta do estudante P_4.

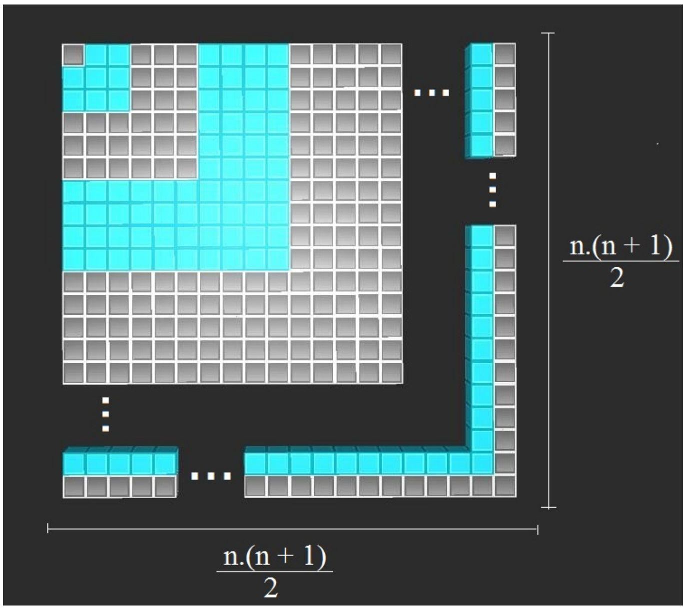


Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

O que se intenciona evidenciar são as tentativas dos estudantes em usar a Prova sem Palavras para se mostrar a igualdade, mesmo que não tenham conseguido chegar numa generalização. O estudante P_4, por exemplo, conseguiu identificar que, a soma dos três primeiros termos ($n = 3$), é verificada, mas não conseguiu chegar numa proposta geral visualmente, nem criar uma representação padronizada, assim como o estudante P_3.

A proposta visual do pesquisador foi apresentada logo em seguida.

Figura 4.5: Soma dos n primeiros números cúbicos.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

A aplicação visual da questão pode ser vista da seguinte maneira:

- Para o caso do primeiro número cúbico, 1, é óbvio;
- Para o caso do segundo número cúbico, 8, a soma $1+8=9$ gera um quadrado de lado igual a $1+2=3$ e $(1+2)^2=9$ quadradinhos (1 cinza + 8 azuis);
- Para o caso do terceiro número cúbico, 27, a soma $1+8+27=36$ gera um quadrado de lado igual a $1+2+3=6$ e $(1+2+3)^2=36$ quadradinhos (28 cinzas + 8 azuis);
- De maneira sucessiva, é perceptível que a soma dos n primeiros números cúbicos gera um quadrado de lado igual à soma dos n primeiros números naturais $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Dessa forma, concluímos que há $\dfrac{n(n+1)}{2}$ linhas e, em cada linha, há $\dfrac{n(n+1)}{2}$ quadradinhos, gerando assim, um total de $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ quadradinhos azuis e cinza, no caso, a soma dos n primeiros números cúbicos.

4.1.3 Soma dos *n* primeiros números ímpares

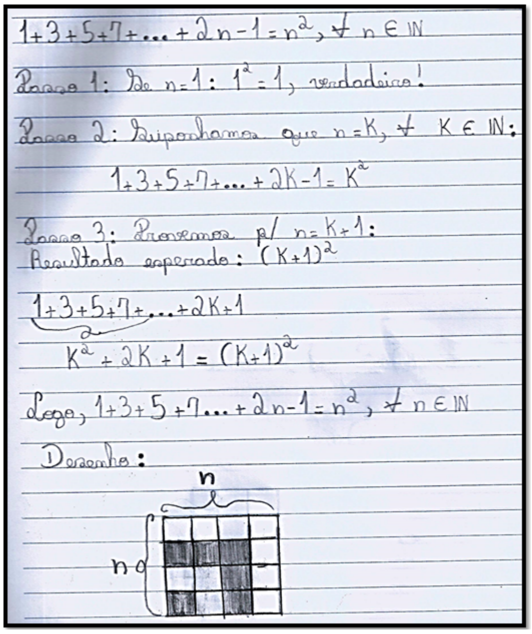
A terceira questão proposta trata-se da soma dos n primeiros números ímpares, cujo objetivo foi o de familiarizar os estudantes com construções visuais de tais somas no conjunto dos naturais, onde, diversas dessas igualdades de somatórios podem ser mostradas utilizando-se de polígonos regulares.

Questão 3. *Numa distribuição de balas, há uma quantidade n de crianças, onde cada uma delas, recebe* 02 *balas a mais que a criança anterior. Sabendo que a primeira criança recebeu* 01 *bala, qual a quantidade total de balas que devo comprar para tal distribuição ser feita?*

A partir da contextualização sugerida, os estudantes identificaram a soma finita dos números ímpares $1+3+5+\cdots+2n-1$, definiram o n-ésimo termo geral para a progressão $(2n-1)$ e relembraram que, tal soma, é igual a n^2. Um total de cinco alunos tentaram representá-la visualmente, dois alunos a demonstraram pelo Princípio de Indução Finita e três alunos utilizaram a fórmula da soma de Progressão Aritmética, a qual, neste caso, tem razão igual a 2 e primeiro termo igual a 1.

Uma representação visual sugerida pelo estudante P_2 está mostrada à seguir, inclusive P_2 utiliza, resumidamente, os passos do Princípio de Indução Finita.

Figura 4.6: Proposta do estudante P_2.

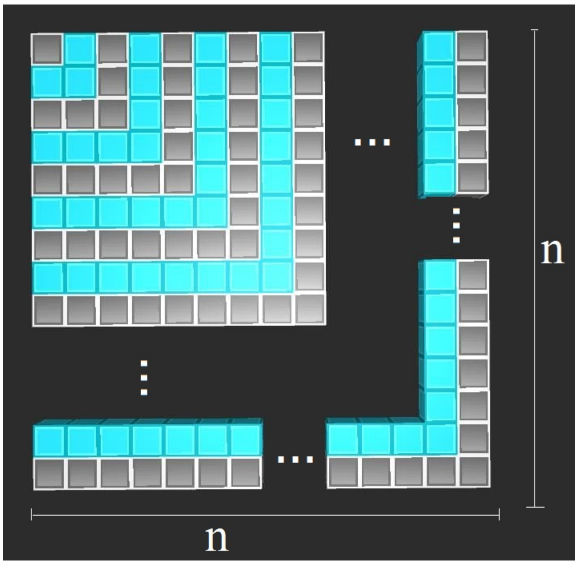


Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

Neste sentido, Duval (2009) coloca que pode-se haver distintas e variadas representações para um mesmo objeto matemático. Esta questão, por exemplo, se apresenta de maneira contextualizada, podendo ser interpretada como a soma dos n primeiros números ímpares, como também, possui uma representação figurativa.

A representação visual utilizada por P_2 vai ao encontro da proposta sugerida pelo pesquisador, que segue abaixo.

Figura 4.7: Soma dos n primeiros números ímpares.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

É perceptível visualmente que:

- Para o primeiro termo, 1, é óbvia a existência de um único quadradinho cinza;
- Para a soma, $1+3$, é observável que existem 4 quadradinhos que formam uma área gerada por dois números (1 e 3), ou seja, a medida do lado do quadrado de área 4 é 2;
- Para a soma, $1+3+5$, é observável que existem 9 quadradinhos que formam uma área gerada por três números (1, 3 e 5), ou seja, a medida do lado do quadrado de área 9 é 3;
- Para a soma, $1+3+5+7$, é observável que existem 16 quadradinhos que formam uma área gerada por três números (1, 3, 5 e 7), ou seja, a medida do lado do quadrado de área 16 é 4;
- De maneira sucessiva, é notório que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2, pois, se k é ímpar, então $k+2$ também é. Logo, é possível organizar cada próximo número ímpar $k+2$ ao ímpar anterior k e, isso implica o adicional de 1 unidade a cada lado do quadrado anterior, como apresentado nas representações do estudante P_2 e do pesquisador;
- Conclui-se que há n linhas por n colunas e, portanto, n^2 quadradinhos azuis e cinza.

Então, são necessárias n^2 balas para que se cumpra a distribuição efetuada para n crianças.

Percebe-se, nesta questão, que já houve uma proposta de solução visual, mas vinculada ao Princípio de Indução Finita, o que Casanave, Vaz e Schultz (2009) chamam de prova heterogênea (demonstrações com utilização de recursos figurativos). Neste sentido, o objetivo da questão foi parcialmente alcançado e nota-se, tanto nesta atividade quanto nas anteriores, uma apropriação significativa de métodos algébricos em detrimento de apelos visuais e/ou geométricos, o que evidencia que o ensino básico na área de Matemática tende a ser algebrizado.

4.1.4 Soma dos *n* primeiros números pares

A quarta atividade proposta foi a seguinte:

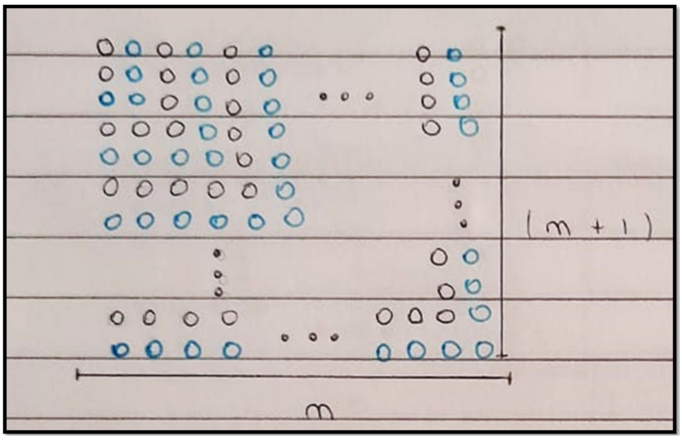
Questão 4. *Mostre que a soma dos n primeiros números pares é dada por n parcelas de seu sucessor.*

Primeiramente, foi necessária a identificação dos termos dessa sequência. No caso, trata-se da soma dos n primeiros números pares: $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$. Com esta questão, intencionava-se verificar a percepção dos estudantes referente a similaridade com a Questão 1, uma vez que, basicamente, a soma tratada refere-se ao dobro da igualdade presente na primeira questão: $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Os elementos da sequência construída estão em Progressão Aritmética de razão e primeiro termo iguais a 2, permitindo assim, o cálculo da soma dos n primeiros números pela fórmula da soma de P. A., bem como, a demonstração da igualdade é possível pelo Princípio de Indução Finita. Um total de três participantes utilizaram a fórmula da soma, sete estudantes tentaram o artifício de representação visual e nenhum utilizou o Princípio de Indução Finita. Devido à familiaridade e semelhança com as questões anteriores, percebe-se um aumento no número de estudantes tentando mostrar a igualdade visualmente.

A sugestão de representação visual foi trazida pelo estudante P_6, a qual segue abaixo.

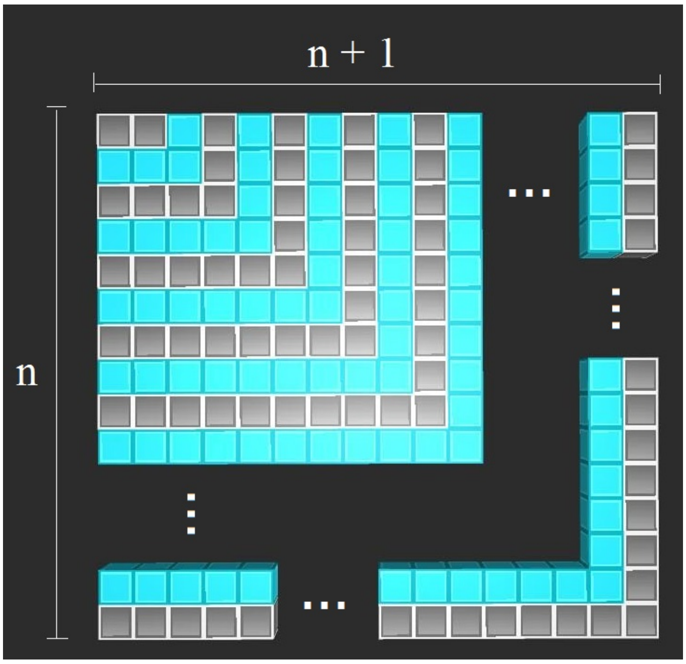
Figura 4.8: Proposta do estudante P_6.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

De forma semelhante, o pesquisador apresentou visualmente a questão aos estudantes e vários deles haviam feito construções parecidas, seguindo a mesma ideia da proposta por P_6.

Figura 4.9: Soma dos n primeiros números pares.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

A interpretação dada à quantidade de quadradinhos azuis e cinza pode ser percebida por haver $n+1$ linhas, tais que, em cada uma, existem n quadradinhos azuis e cinza. Logo, a quantidade total de quadradinhos é $n \cdot (n+1)$, a qual trata-se da soma dos n primeiros números pares. A diferença entre a proposta de P_6 e a do pesquisador é o posicionamento do primeiro elemento, 2, da sequência dos pares 2, 4, 6, $\cdots$, $2n$. Caso os dois quadradinhos sejam colocados na vertical, haverão $n+1$ linhas e n colunas, como feito por P_6. Caso sejam colocados na horizontal, o número de linhas é n e o de colunas $n+1$, como sugerido pelo pesquisador.

Já com a aplicação dessa atividade, nota-se uma clara mudança de estratégia dos estudantes na tentativa de solução, os quais em sua maioria passaram à utilização de representações visuais em suas abordagens. Dessa forma, julgam-se alcançados os objetivos propostos com esta atividade.

4.1.5 Soma infinita das potências de base 2 com expoente inteiro negativo

Mantendo-se em mente os objetivos do trabalho que é a utilização de representações visuais como recurso metodológico, apresentamos a quinta atividade trabalhada:

Questão 5. *Mostre que a soma infinita das potências de base 2 com expoente inteiro negativo é* 1.

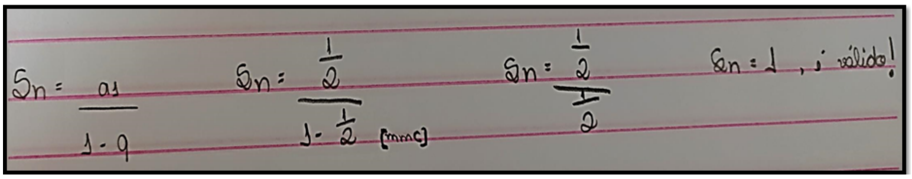
Primeiramente, foi necessário auxiliar os estudantes a transcreverem a questão da linguagem textual para a algébrica: $2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$, evidenciando, mais uma vez, a dificuldade de transição elementar: a interpretação textual e a transcrição algébrica. A linguagem algébrica é considerada primordial no processo de identificação de regularidades, desde os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998). Carmo (2003, p. 1) evidencia o quão é necessário dominar a linguagem algébrica frente à exigência do "aprendizado de seus códigos verbais, a fim de que a leitura de expressões matemáticas apresente algum sentido lógico para quem as lê".

Ainda sobre a linguagem algébrica, Carrasco (2007, p. 204) coloca que é natural que existam diferenças entre a linguagem comum dos estudantes e a científica, particularmente, a matemática, a qual objetiva facilitar o registro do conhecimento e formalizá-lo.

> Mas, até que o aluno se torne capaz de utilizar esta linguagem formalizada, ele precisa compreender o significado (a essência) do conceito ou teoria que esta sendo estudada e que se mostra, geralmente, na própria linguagem matemática. E precisa saber falar e escrever sobre este conceito, na sua linguagem usual, para só depois, fazê-lo na linguagem simbólica (CARRASCO, 2007, p. 204).

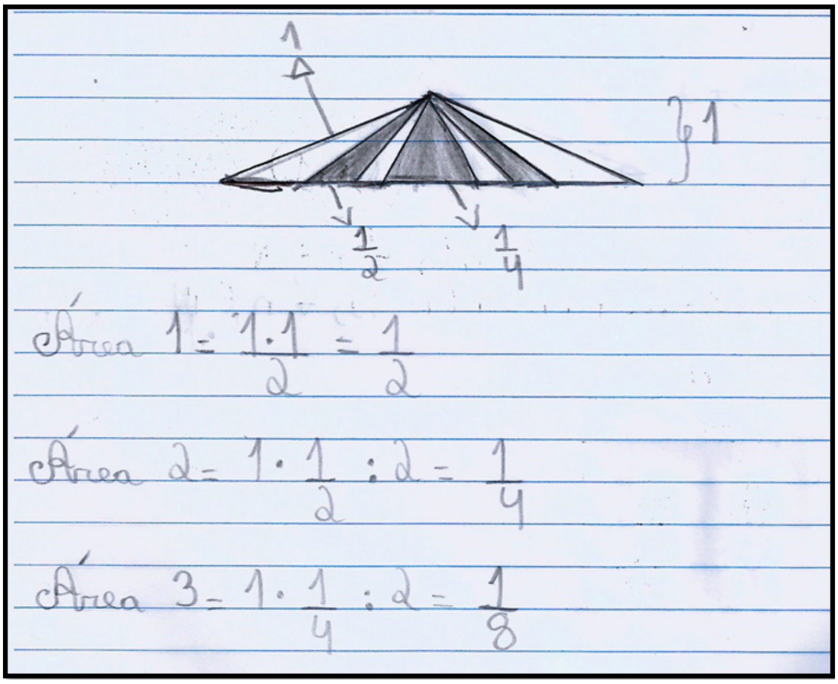
No caso, a igualdade pode ser mostrada, utilizando a fórmula da soma de Progressão Geométrica Infinita, pois o primeiro termo e a razão são iguais a $\frac{1}{2}$. Um total de cinco estudantes tentaram representá-la visualmente e quatro fizeram uso da fórmula da soma da Progressão Geométrica. À seguir, são apresentadas duas resoluções dos estudantes P_2 e P_5, nas quais P_5 utiliza a fórmula da soma e P_2 tenta, por meio de área de triângulos, mostrar a soma infinita, mas não consegue uma generalização ou descobrir um padrão.

Figura 4.10: Proposta do estudante P_5.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

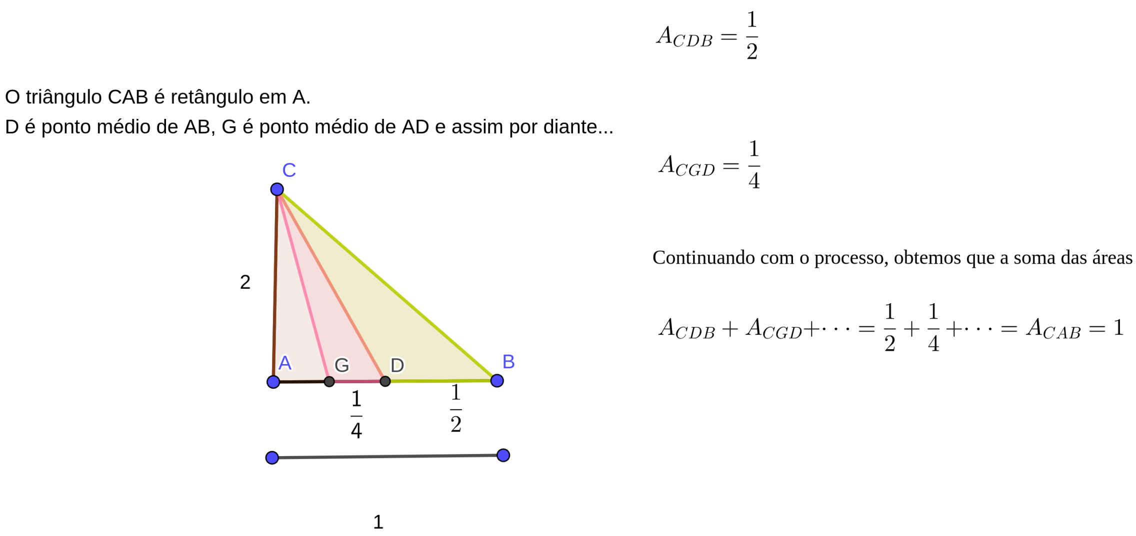
Figura 4.11: Proposta do estudante P_2.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

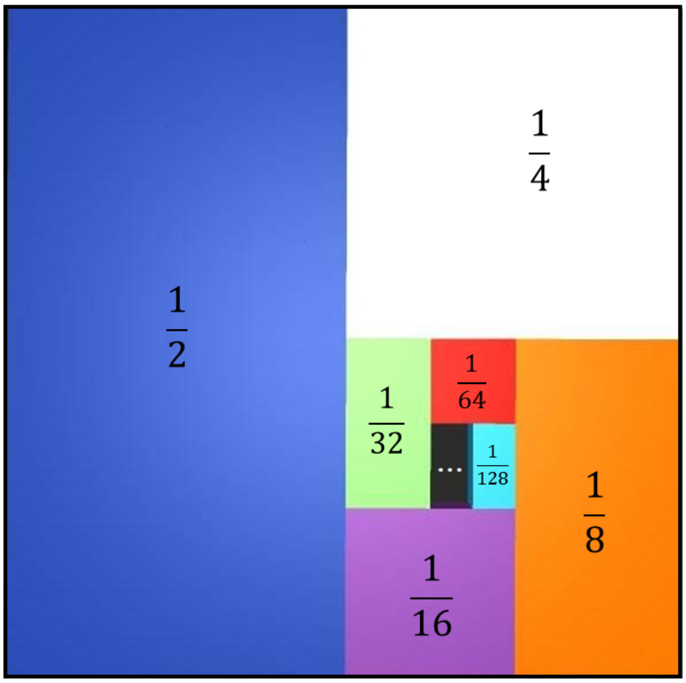
Em seguida, o pesquisador mostra duas propostas visuais para a soma infinita em questão: uma, embasando-se na representação visual do estudante P_2 (Figura 4.12), e a outra, como uma forma alternativa (Figura 4.13).

Figura 4.12: Proposta de solução com base na ideia do estudante P_2.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

Figura 4.13: Solução alternativa: soma infinita das potências de base 2 com expoente inteiro negativo.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

A área de um quadrado, 1 u. a., foi dividida em duas partes iguais, ou seja, cada parte tem área igual a $\frac{1}{2}$. Novamente, assumindo uma destas duas áreas, que tem área igual a $\frac{1}{2}$, dividiu-a em duas partes iguais, tais que, cada nova parte, tem área $\frac{1}{4}$. Seguindo o mesmo padrão, uma destas duas áreas, que tem área igual a $\frac{1}{4}$, foi dividida em duas partes iguais novamente e, portanto, cada uma, tem área $\frac{1}{8}$. Fazendo com que tal procedimento se repita infinitas vezes, a soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ tenderá a 1, ou seja, essas divisões e subdivisões tendem a preencher toda a área do quadrado de área 1 u. a., como sugerido pelo pesquisador visualmente. E, portanto, é visto que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = 1$.

Por se tratar da primeira questão trabalhada com números fracionários, alguns estudantes optaram por mostrar a igualdade com a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica Infinita de razão e primeiro termo iguais a $\frac{1}{2}$. Mesmo com a ocorrência de esboçá-la visualmente, dentre as representações visuais apresentadas pelos estudantes, a que mais condiz com a proposta é a do P_2.

4.1.6 Soma infinita das potências de base 4 com expoente inteiro negativo

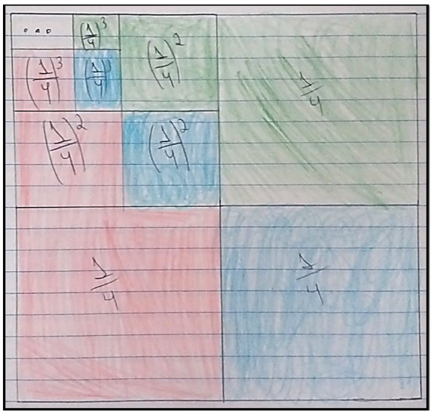
A sexta questão refere-se à soma infinita das potências de base 4 com expoente inteiro negativo. De modo semelhante à questão 5, o objetivo desta é apresentar a possibilidade de construções visuais com somas no conjunto dos números racionais.

Questão 6. *Mostre a igualdade* $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots=\frac{1}{3}$.

Um total de cinco participantes tentaram esboçar alguma representação visual, e cinco utilizaram a fórmula da soma infinita da Progressão Geométrica de razão e primeiro termo igual a $\frac{1}{4}$ para mostrar a igualdade. É importante ressaltar que um estudante se manteve resistente em tentar construções visuais. No questionário, por exemplo, aplicado ao final da Oficina, o estudante menciona que o grau de dificuldade de uma demonstração formal e uma Prova sem Palavras se equiparam, principalmente, devido à não familiaridade com o recurso.

Uma Prova sem Palavras referente à questão é proposta pelo estudante P_8, a qual aparece na Figura 4.14.

Figura 4.14: Proposta do estudante P_8.

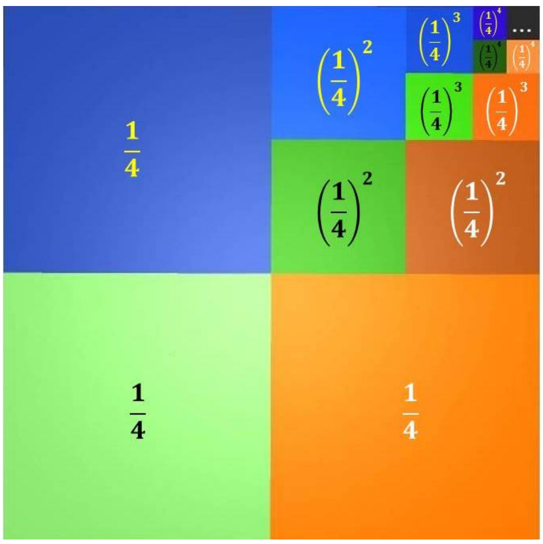


Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

Nesta questão, os objetivos foram alcançados, uma vez que P_8 propôs a representação acima, a qual se assemelha à ideia do pesquisador. Um quadrado de área 1, é dividido em quatro partes iguais, ou seja, cada parte tem área igual a $\frac{1}{4}$. Uma destas partes de área $\frac{1}{4}$, é subdividida em quatro partes iguais novamente e, portanto, cada nova parte tem área $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$. Tal processo, sendo repetido infinitas vezes, o somatório de áreas $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots$ tende a preencher $\frac{1}{3}$ da área do quadrado, como apresentado visualmente. Dessa forma, concluiu-se que $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{3}$.

Como dito, a representação visual do pesquisador se assemelha à do estudante P_8.

Figura 4.15: Soma infinita das potências de base 4 com expoente inteiro negativo.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

4.1.7 Soma infinita das potências de base 3 com expoente inteiro negativo

A sétima questão proposta refere-se à soma infinita de potências de base 3 com expoente negativo.

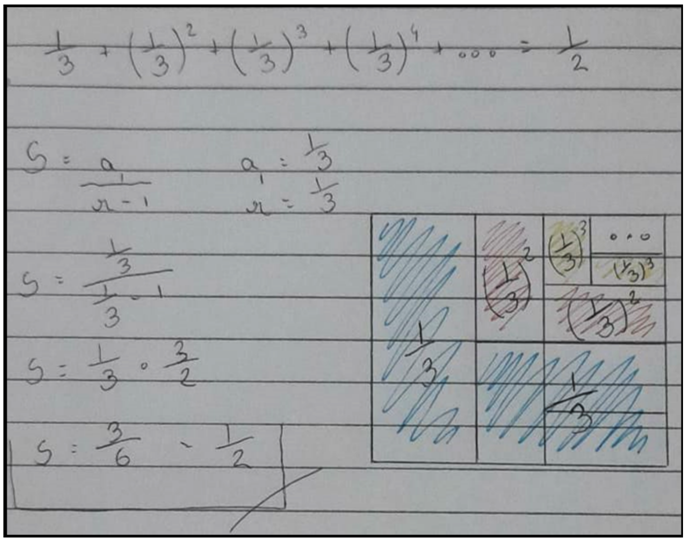
Questão 7. *Mostre a igualdade* $\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots=\frac{1}{2}$.

De modo semelhante às questões (5) e (6), essa atividade visa apresentar provas visuais com somas no conjunto dos números racionais.

Um total de seis participantes tentaram o artifício visual, cinco fizeram uso da fórmula da soma infinita da Progressão Geométrica de razão e primeiro termo igual a $\frac{1}{3}$ e um estudante não conseguiu mostrar a igualdade.

Uma Prova sem Palavras à questão é proposta pelo estudante P_6, a qual segue abaixo.

Figura 4.16: Proposta do estudante P_6.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

O estudante P_6, além de trazer uma representação visual, utiliza a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica Infinita. A Prova sem Palavras, neste caso, se assemelha à proposta do pesquisador; o que difere, é somente a organização dos retângulos interiores distribuídos na área do quadrado.

Couy et al. (2020), em referência aos estudos de registros de representação semiótica à luz das ideias de Duval (2003) no que se refere ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática, destacam a concepção de uso dos artifícios algébricos e visuais destacando a possibilidade de utilização de dois ou mais registros de representação simultaneamente numa questão, assim como, a comunicação factível entre eles. Chamam a atenção a este diferencial existente na ciência matemática em relação às outras ciências. Em contrapartida, fica evidente também certa automatização das técnicas de demonstração formal ou de se tendenciar ao uso de recursos mecanizados. Isto é perceptível, uma vez que a representação visual da questão anterior apresenta familiaridade com esta última e, novamente, os estudantes insistem em demonstrá-la pela fórmula da soma da Progressão Geométrica Infinita.

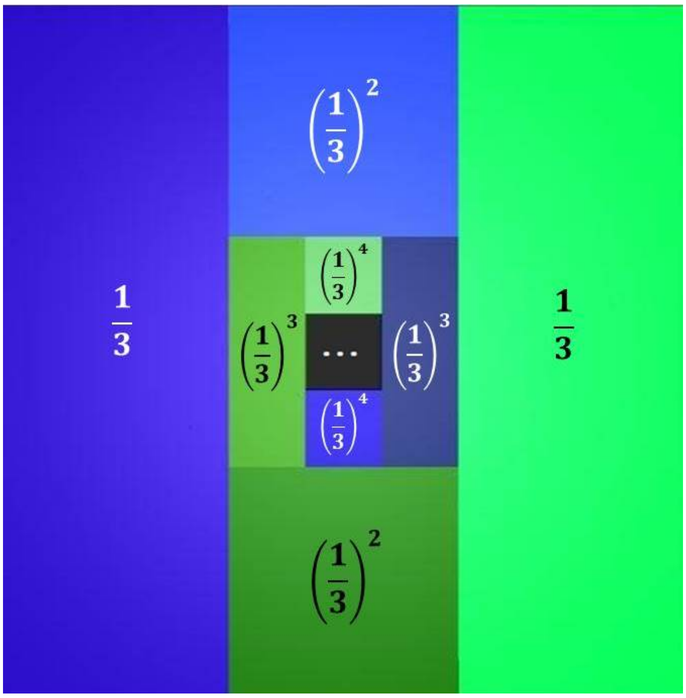
Um fato importante é ressaltado por Costa (2002) que refere-se à delimitação da autora ao momento em que os estudantes se envolvem nas definições propostas num problema na tentativa de gerarem significado. Para a autora, cada estudante desenvolve uma construção própria, partindo do que mais lhe dá suporte, sejam imagens ou sejam as próprias definições.

> Uns, podem criar estruturas formais poderosas apoiadas por uma variedade de imagética visual, cinestésica ou outra. Estes estudantes podem estar em conflito contínuo quando reconstroem a imagética informal para dar um significado rico à teoria formal. Outros estudantes podem concentrar-se antes na definição, usando-a e repetindo-a quando necessária até a escrever sem esforço, assim o foco está nas definições e nas deduções. Para este segundo tipo de estudantes, as imagens visuais e as intuições jogam um papel menos proeminente. Esta forma de abordagem pode produzir uma imagem formal do conceito capaz de usar as definições e provar teoremas quando se lhes é pedido.
>
> Os estudantes manejam o uso de definições do conceito de várias maneiras, ou reconstruindo as suas compreensões para chegar à teoria formal ou construindo por dedução, das definições do conceito, uma compreensão independente das formalidades (COSTA, 2002, p. 259).

Quanto à questão proposta, a interpretação da distribuição é a seguinte: um quadrado de área 1 é dividido em três partes iguais. Logicamente, cada parte (ou retângulo formado) tem área igual a $\frac{1}{3}$. Selecionando-se uma dessas partes e dividindo-a em três partes iguais, tem-se que, cada parte, tem área igual a $\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$. Tal procedimento sendo repetido infinitas vezes, a soma $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots$ tende a preencher metade da área do quadrado, como representado por P_6, ou seja, $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{2}$.

O pesquisador sugere a representação visual abaixo, a qual se assemelha à do estudante P_6, como dito anteriormente.

Figura 4.17: Soma infinita das potências de base 3 com expoente inteiro negativo.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

4.1.8 Soma infinita das frações $\frac{n}{2^n}$, com $n \in N^*$

A oitava questão proposta refere-se à soma infinita das frações $\frac{n}{2^n}$, com $n \in N^*$.

Questão 8. *Mostre que* $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots = 2$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Tratou-se de uma questão considerada como muito difícil pelos estudantes, pois, segundo eles: detectar um padrão visual ou de termo para termo foi dificultoso ou não foi possível; demonstrar, por fórmula da soma de uma Progressão Geométrica Infinita ou por Indução Matemática, foi impossível, uma vez que, em nenhum dos métodos tal somatório se encaixa na definição. É observável que, quando uma questão foge um pouco dos padrões recorrentes de abordagem ou representação, os estudantes apresentam dificuldades ou se sentem incapazes de resolvê-la, seja por demonstração ou por proposta visual.

O estudante P_6 deu uma interpretação visual para a igualdade de uma forma muito precisa e diferenciada, de forma que surpreendeu todos os presentes nesta aplicação da Oficina, inclusive o pesquisador.

Figura 4.18: Proposta do estudante P_6.

Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

O estudante representou a soma visualmente da seguinte forma:

- Dois quadrados de área 2, onde cada quadrado tem área 1, são divididos em partes;
- O primeiro quadrado foi dividido em duas partes de áreas iguais representando a soma $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$;
- O outro quadrado foi dividido em oito partes iguais, onde:
  - três destas partes, referem-se à $\frac{3}{8}$;
  - duas destas partes, referem-se à $\frac{2}{8}=\frac{4}{16}$;
  - uma parte mais $\frac{1}{4}$ da outra parte, referem-se à $\frac{5}{32}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}$;
  - $\frac{3}{4}$ da outra parte, refere-se à $\frac{6}{64}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}$;
  - e, a última oitava parte, possui $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}$ mais $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{4}$ desta oitava parte, a qual refere-se à $\frac{7}{128}=\frac{1}{32}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{32}+\frac{3}{128}$.
- De maneira sucessiva, é perceptível que o somatório de áreas em questão, como apresentado pelo estudante P_6, tende a preencher toda a área de ambos os quadrados. Logo, conclui-se que $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=2$.

Um passo muito determinante e evolutivo, nesta questão, é o fato do estudante P_6 apresentar um artifício visual totalmente diferente ao trazido pelo pesquisador. A soma infinita em questão é apresentada na seção *"Um pouco de história"* de um artigo[1], de autoria de Ávila (1996).

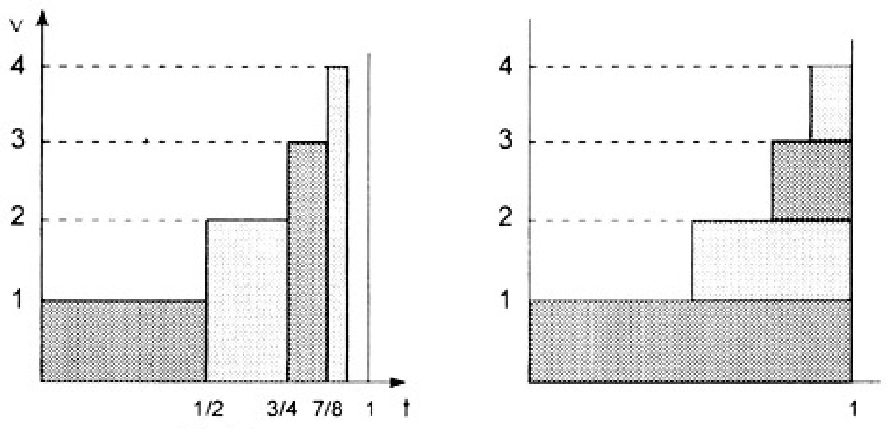
A proposta contextualizada da série em questão surge, por volta de 1350, com Richard Swineshead, um dos matemáticos de *Oxford*, na tentativa de se explicar o desenvolvimento de um movimento durante o intervalo de tempo $[0,1]$ da seguinte maneira:

> a velocidade permanece constante e igual a 1 durante a primeira metade do intervalo, de 0 a $\frac{1}{2}$ (veja a Fig. 4.19 (esquerda), onde o tempo é representado no eixo horizontal e as velocidades no eixo vertical): dobra de valor no segundo subintervalo $\left(\text{de duração } \frac{1}{4}\right)$, triplica no terceiro subintervalo $\left(\text{de duração } \frac{1}{8}\right)$, quadruplica no quarto subintervalo $\left(\text{de duração } \frac{1}{16}\right)$, etc.

O que é visto, a soma da série é construída à partir da soma dos produtos da velocidade (v) pelo tempo (t) em cada subintervalo de tempo, logo, representa o espaço total percorrido pelo objeto móvel.

A explicação geométrica para tal soma ser igual a 2 foi dada por Nicole Oresme (1325-1382), professor universitário e estudioso de Filosofia, Matemática, Astronomia, Ciências Físicas e Naturais, aliado ao raciocínio de Swineshead. Segue a representação à seguir.

Figura 4.19: Proposta disponível no artigo de Ávila.



Fonte: (ÁVILA, 1996).

Ávila (1996) explica o seguinte:

[1]"As séries infinitas". Disponível em ⟨https://www.rpm.org.br/cdrpm/30/3.htm⟩. Acesso em 07 de fevereiro de 2021.

> a soma das áreas desses retângulos verticais é igual à soma das áreas dos retângulos horizontais da Fig. 4.19 (direita). Ora, isso é o mesmo que substituir o movimento original por uma sucessão infinita de movimentos, todos com velocidade igual a 1: o primeiro no intervalo de tempo $[0,1]$; o segundo no intervalo de tempo $\left[\frac{1}{2},1\right]$; o terceiro no intervalo $\left[\frac{3}{4},1\right]$, e assim por diante.

É perceptível que o espaço novamente modelado (soma das áreas dos retângulos da Figura 4.19 (direita)) é descrito pela soma da série.

Os objetivos em relação à incentivar a utilização do recurso visual para mostrar a igualdade na série foram alcançados, principalmente, por causa do abrilhantamento trazido pela estudante P_6 com sua Prova sem Palavras.

4.1.9 Igualdade entre a diferença de quadrados e o produto da soma pela diferença de dois termos: $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$

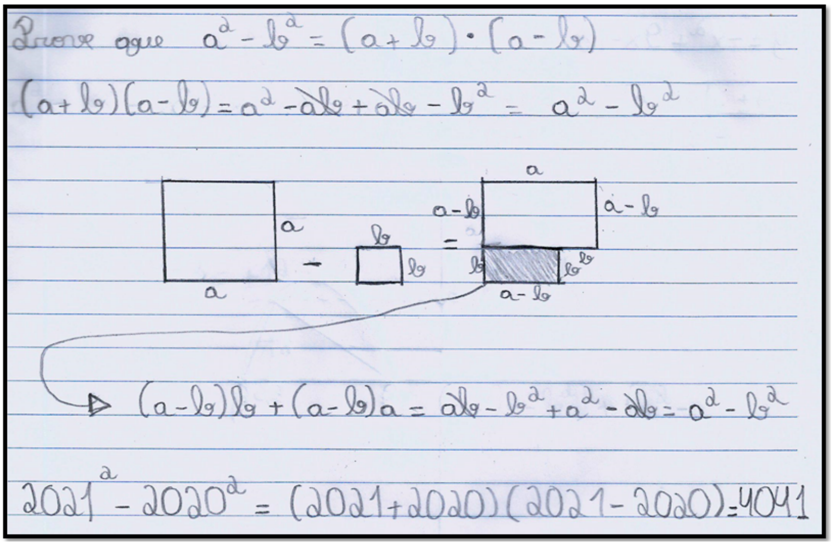
A nona questão proposta refere-se à igualdade entre a diferença de quadrados e o produto da soma pela diferença de dois termos.

Questão 9. *Mostre que* $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$, *com* $a > b$ *e* $a,b > 0$. *Em seguida, determine o valor de* $2021^2 - 2020^2$.

Facilmente, pela propriedade distributiva da multiplicação, foi possível mostrar a igualdade. Mas, a intenção aqui é incentivar os estudantes a um pensamento geométrico e apresentá-los uma aplicação da diferença de quadrados geometricamente. Três estudantes fizeram a representação visual e outros quatro utilizaram a distributividade.

O estudante P_2 trouxe a seguinte proposta visual atrelada à parte algébrica, mais uma vez, mostrando a dificuldade em desassociá-las ou na não utilização do recurso algébrico. Inclusive, não chegou a concluir a representação visual no que tange à apresentação de $(a+b)\cdot(a-b)$.

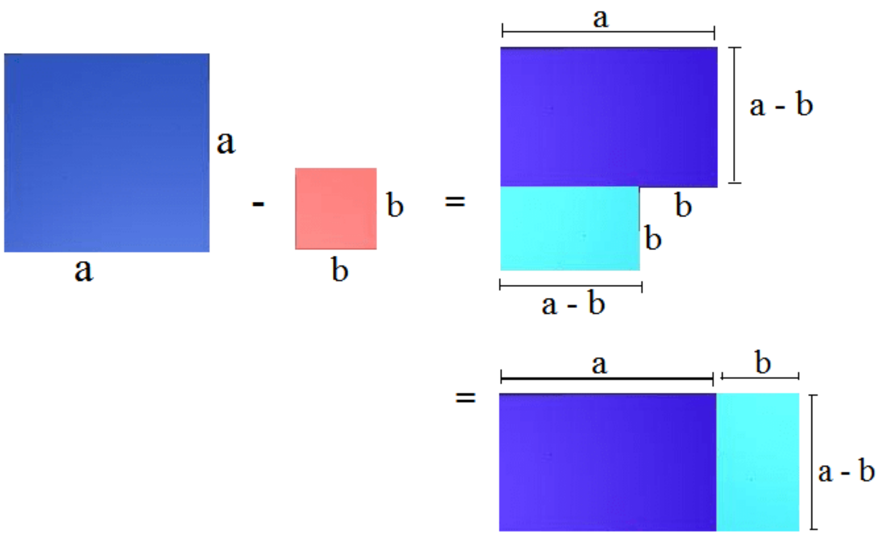
Figura 4.20: Proposta do estudante P_2.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

Os objetivos para esta questão foram parcialmente alcançados com o estudante, uma vez que P_2 utilizou-se de algebrismos para mostrar a igualdade inicialmente e, além disso, para concluir a proposta visual, retoma algebricamente as áreas geradas sem conectar a representação a um retângulo de medidas de lado $a+b$ e $a-b$, como sugerido abaixo pelo pesquisador.

Figura 4.21: Igualdade entre a diferença de quadrados e o produto da soma pela diferença de dois termos: $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

4.1.10 Adaptada do Exame Nacional de Acesso (ENA - 2015) ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

A décima questão segue abaixo.

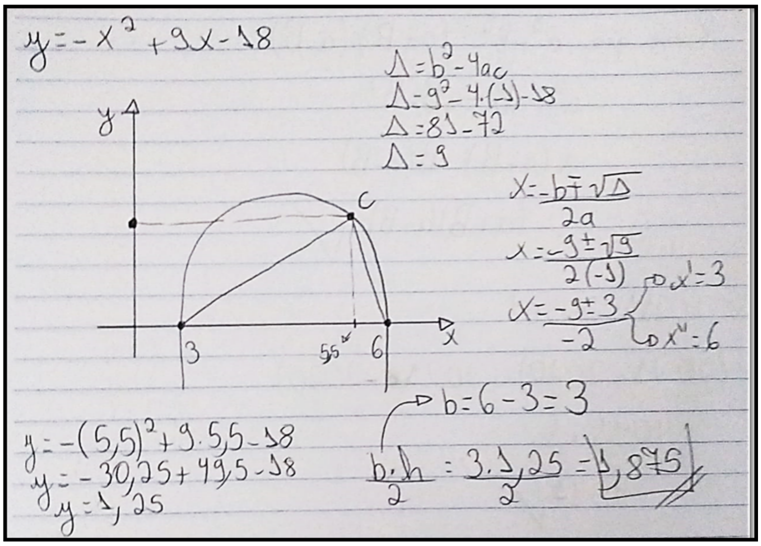
Questão 10. *A função quadrática* $y = -x^2 + 9x - 18$ *e o eixo x delimitam um triângulo com vértices A e B no eixo x e C pertencente à função dada, tal que a abscissa de C é 5,5. Determine a área do triângulo ABC.*

O objetivo desta questão é perceber, entre os estudantes, a necessidade do esboço do gráfico - representação visual - da função para direcionar os cálculos referentes à base e à altura do triângulo e, logo, fornecer a área.

Em discussão da questão com os estudantes, foi comum a ideia de que, para se calcular a área do triângulo, são necessárias: a base, que é a diferença $|x_B - x_A|$, ou seja, a distância entre as raízes da função $f(x) = -x^2 + 9x - 18$; e, a altura, que é dada por $f(5,5)$. Para tais identificações, o esboço do gráfico foi essencial.

O estudante P_8 solucionou a questão e, como dito, para compreender o processo de identificação da base como o módulo da diferença entre as raízes de f; e, da altura do triângulo, como o valor da ordenada do ponto C com abscissa $x_C = 5,5$.

Figura 4.22: Proposta do estudante P_8.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

A representação visual proposta pelo estudante P_8 é considerada aqui como uma representação semiótica. Esta última é definida por Duval (2003) como

> produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes.

A intenção com a proposição desta questão é, justamente, para mostrar que, em determinadas situações ou problemas matemáticos, utiliza-se algum tipo de representação (neste caso, a semiótica), como gráficos, por exemplo, na tentativa de se fazer um esboço visual do problema e gerar o entendimento. Mediante a leitura do enunciado, a coleta de dados do problema foi feita por intermédio de uma representação semiótica: para o triângulo ABC ser compreendido dentro das circunstâncias problemáticas, foi necessário esboçar o gráfico da função f, identificar os pontos A e B como as raízes da função e visualizar o ponto C como o ponto projetado perpendicularmente sobre o eixo x, neste caso, $C(5,5;f(5,5))$. Tais detalhes e identificações foram processadas "rascunhando-se um desenho", afim de gerar o entendimento da questão como um todo. Duval (2003) define o processo de se transformar a linguagem textual (enunciado) para o campo visual (gráfico) como "conversão".

É sabido que o desenvolvimento da matemática, no sentido de uma exatidão, conduziu à formalização de vários domínios desta ciência de modo que as demonstrações possam ser efetuadas de acordo com algumas regras mecânicas.

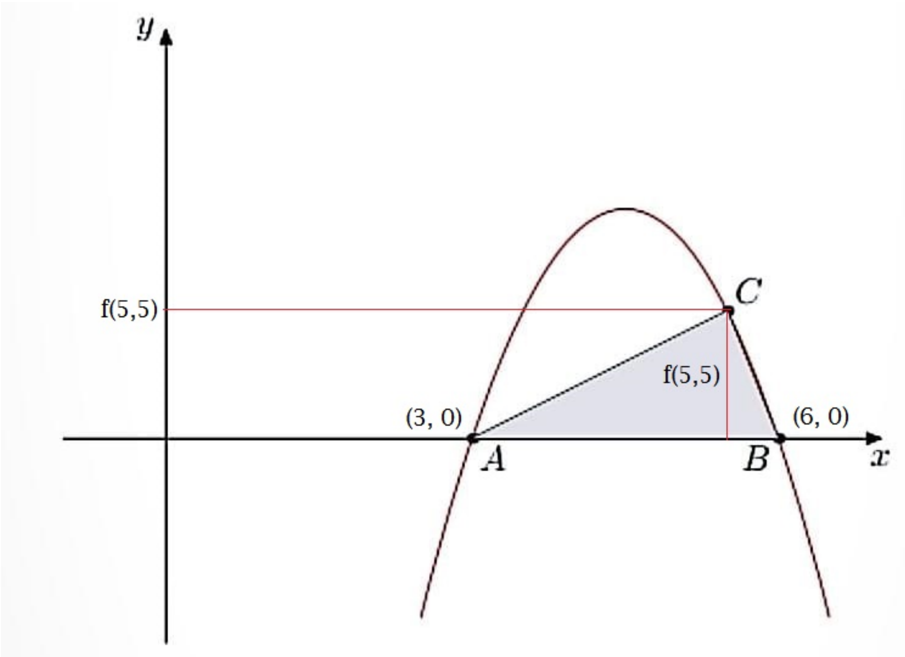
A descrição do pesquisador vai de encontro à ideia ressaltada por Flores e Moretti (2005, p. 2-3) acerca das representações semióticas e seus papéis diversificados em situações matemáticas.

> A atividade matemática, neste caso, é caracterizada pela dependência das representações semióticas, bem como pela grande variedade destas representações. Isso porque as representações semióticas, no domínio da matemática, assumem um papel considerável já que os objetos matemáticos, não sendo acessíveis pela percepção, só podem sê-lo por suas representações, lembrando que um mesmo objeto matemático poderá ter representações diferentes, dependendo da necessidade e do uso.

Afim de complementar a proposta do estudante P_8, o pesquisador propõe uma construção adaptada do Exame Nacional de Acesso ao PROFMAT[2].

[2] Original disponível em: ⟨https://www.profmat-sbm.org.br/⟩. Acesso em 12 de fevereiro de 2021.

Figura 4.23: Adaptada do Exame Nacional de Acesso (ENA - 2015) ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

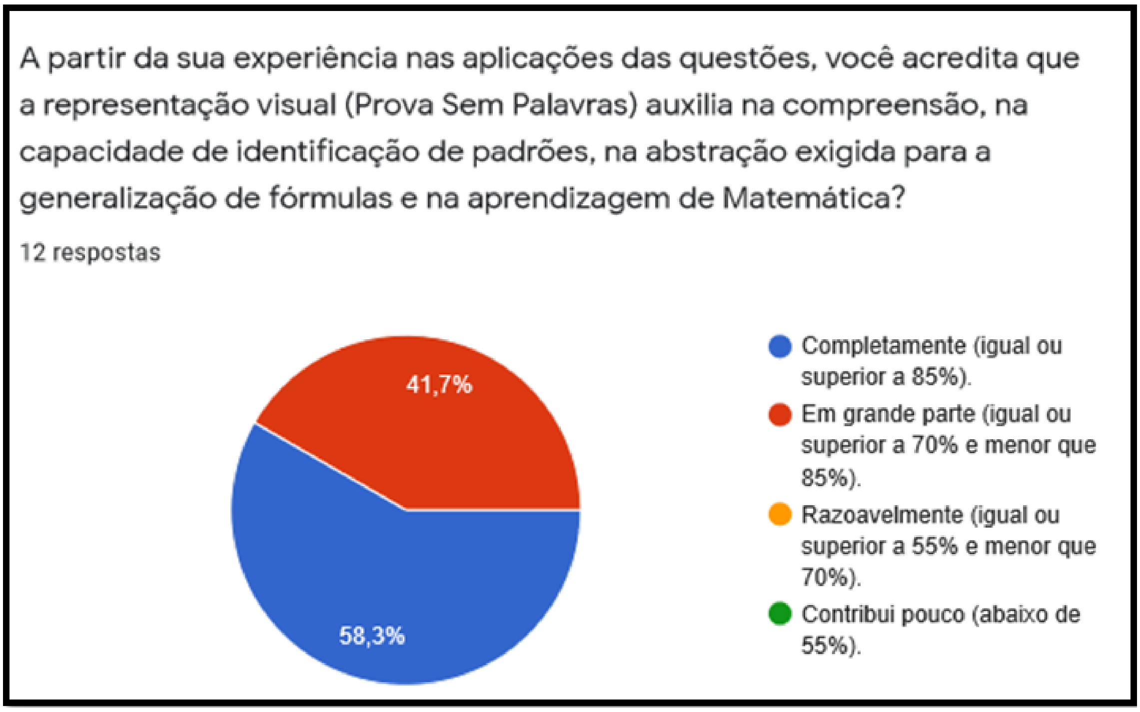
Finalizada a discussão das questões, a próxima seção trata e dialoga os dados obtidos na aplicação do questionário eletrônico.

4.2 O formulário eletrônico

Após a discussão das dez questões, esta seção discute as respostas dos estudantes ao formulário eletrônico.

A primeira questão do formulário busca identificar, na perspectiva dos estudantes, a participação e contribuições da Prova sem Palavras nas demonstrações formais, no que se refere ao desenvolvimento de capacidades como a identificação de padrões, abstração e generalização em Matemática.

Figura 4.24: Gráfico - Pergunta (1) do formulário do *Google*.

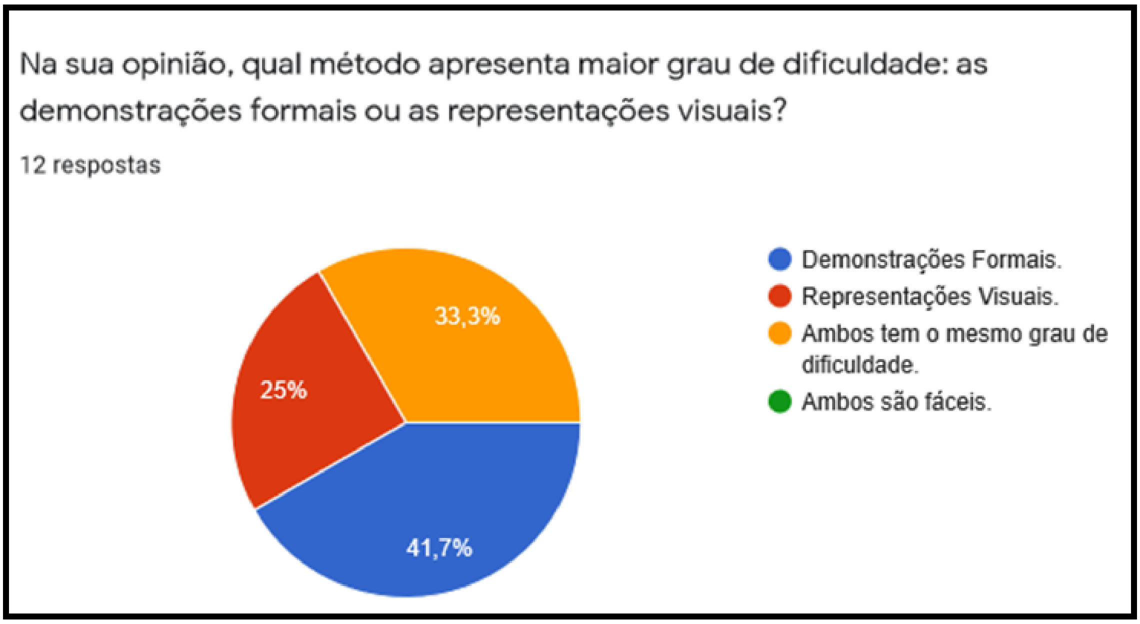


Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

O gráfico de setores (Figura 4.24) apresenta que a experiência na Oficina foi válida: 100% dos estudantes acreditam que contribui completamente ou em grande parte para o desenvolvimento das capacidades citadas. É sempre necessário utilizar capacidades mentais de ordem superior para se compreender conceitos dentro da Matemática que, por si só, essencialmente, são abstratos. Para auxiliar nisso, as representações visuais desempenham papel fundamental na concretização e clareza na compreensão dos conceitos (BARBOSA, 2010).

A segunda pergunta intenciona saber sobre a dificuldade dos métodos: demonstrações formais e representações visuais.

Figura 4.25: Gráfico - Pergunta (2) do formulário do *Google*.

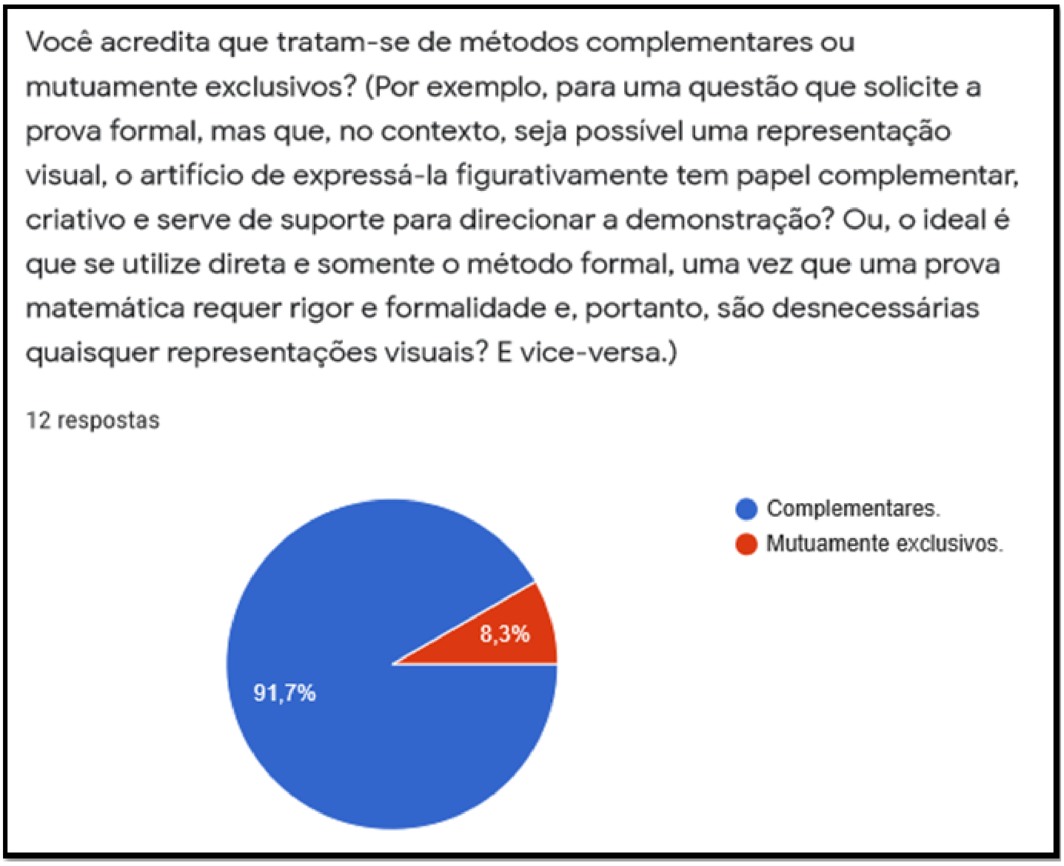


Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

De acordo com a Fig. 4.25, cerca de 05 participantes, 41,7%, dizem que as Demonstrações Formais são mais difíceis, 25% acreditam que sejam as Representações Visuais e outros 04 sentem as duas igualmente difíceis. Pode-se concluir nesta experiência que, a Prova sem Palavras é uma metodologia complexa, principalmente, quando não há familiaridade e maturidade prática do indivíduo com a utilização frequente. É possível que, com trabalho habitual, a Prova sem Palavras tornar-se uma atividade alternativa que traz praticidade aos métodos formais, além de contribuir para o desenvolvimento das capacidades mentais e a criatividade.

A terceira pergunta trata das perspectivas de utilização da Prova sem Palavras e as Demonstrações Formais: se complementam ou se excluem? Numa demonstração, cabe uma representação visual?

Figura 4.26: Gráfico - Pergunta (3) do formulário do *Google*.

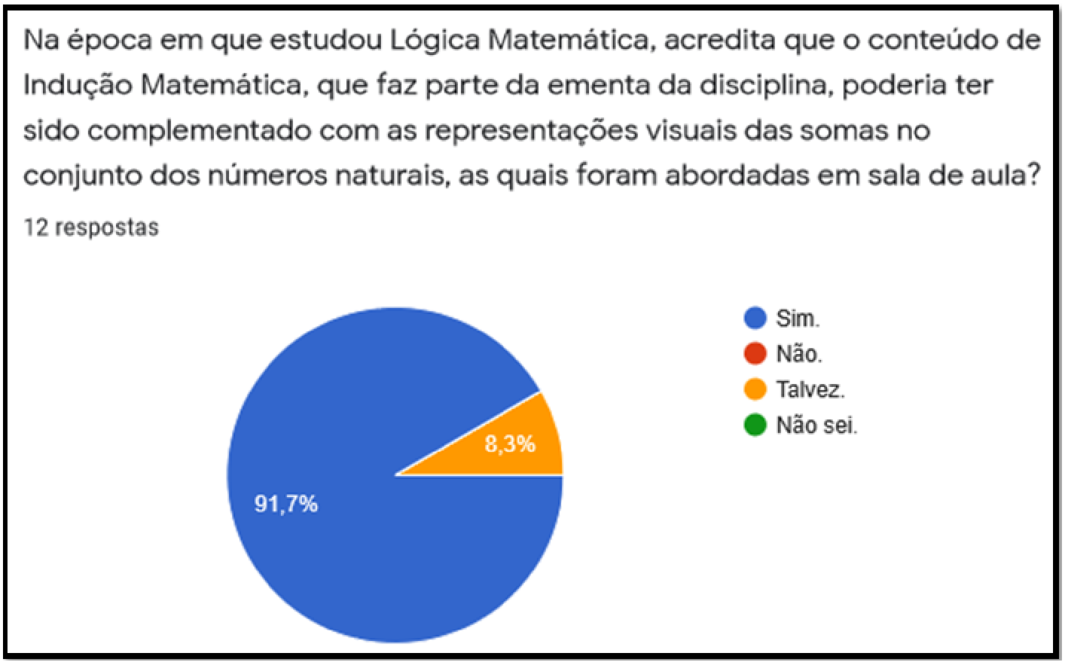


Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

Como apresentado na Fig. 4.26, na opinião de 11 destes estudantes, são complementares; apenas um, acredita que são mutuamente exclusivas. Afim de ampliar a discussão, Costa (2002) coloca que os processos mentais da Matemática avançada já estão, desde à infância, presentes nas pessoas e que "abstracções são feitas em física, representações são usadas em psicologia, análises são usadas em economia e visualização em arte" (COSTA, 2002, p. 262). Para a autora, há uma forte ligação entre imagens mentais e imagens matemáticas. Exatamente, nesta ligação entre Matemática e Psicologia, que os processos são de suma importância para a compreensão e aprendizagem em Matemática. Dessa forma, vê-se a necessidade do trabalho em Matemática afim do desenvolvimento das capacidades como abstrair, representar, analisar e visualizar.

Como o pesquisador atuou como professor de Lógica Matemática, em 2019, e não utilizou a metodologia Prova sem Palavras, a qual, em suas concepção, poderia ter sido abordada como um trabalho complementar em Indução Matemática, esta pergunta intenciona saber se a metodologia teria contribuído para a compreensão do conteúdo em sala de aula. Segue o gráfico.

Figura 4.27: Gráfico - Pergunta (4) do formulário do *Google*.

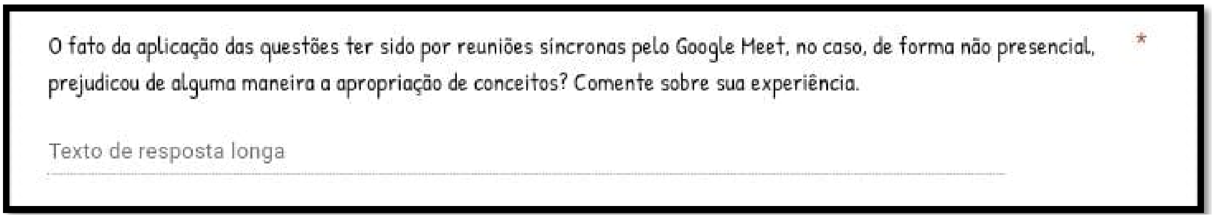


Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

Um total de 11 estudantes acreditam que a disciplina poderia ter sido complementada com a temática e um estudante aponta dúvida. Inclusive, o participante P_8 menciona: "[...] acredito que se a representação visual for acrescentada no ensino da lógica matemática, iria criar um novo caminho para uma aprendizagem mais solida do assunto [...]". Dessa forma, fica sugestivo para a utilização da Prova sem Palavras no ensino de Indução Matemática, por exemplo, como um método alternativo e complementar.

A quinta pergunta do questionário (Fig. 4.28) é discursiva, uma vez que busca perceber comentários relativos à experiência da aplicação das questões de forma *on-line* e quais os pontos determinantes e influentes no processo.

Figura 4.28: Pergunta (5) do formulário do *Google*.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

Algumas respostas são colocadas à seguir, na íntegra. Na maior parte da respostas, é possível identificar que, a aplicação ter ocorrido virtualmente, não interferiu na apropriação de conceitos essenciais, mas que, com toda certeza, a relação em grupo, para resolver e pensar num tratamento visual para as questões, seria um fator determinante.

Alguns não apontam prejuízos:

> P_{12}: *"Acredito que não ouve nenhum prejuízo na apropriação de conceitos, já o que o professor utilizou de diversos artifícios para explicar o conteúdo como imagens e principalmente um quadro virtual que facilitou muito a compreensão do conteúdo."*
>
> P_3:*"Não, [...] a aula foi gravada possibilitando o acesso para todo o conteúdo explicado."*
>
> P_{11}: *"Creio que não, por estar acostumado com as aulas síncronas e assíncronas, foi algo totalmente normal. [...] As respostas das minhas dúvidas eram claras e objetivas de fácil compreensão para bom ouvinte, e para quem quer aprender."*

Um ponto importante e que é necessário ser observado na fala do participante P_3 é que a aula gravada possibilita acesso futuramente. Isto, presencialmente, não é possível. Os estudantes podem vir a tirar dúvidas nas próximas aulas, mas vários fatores podem interferir nesta ação: timidez, a sequência de conteúdo estabelecida pelo conteúdo programático, questões temporais para o cumprimento da ementa, dentre outros. A gravação da aula é um recurso que possibilita retorno a qualquer momento e quantas vezes forem necessárias ao que foi discutido em sala de aula.

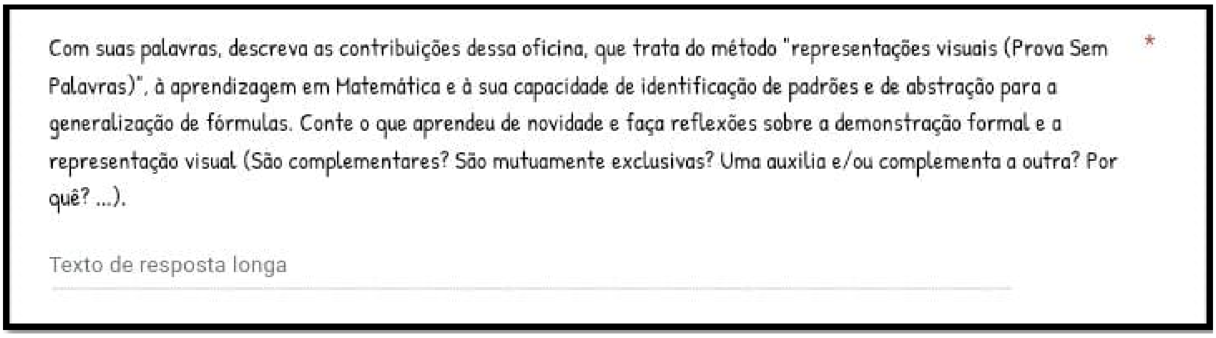
Outros, sugerem que a distância entre pesquisador e grupo interfere na aprendizagem, mesmo que tenha tido aproveitamento satisfatório.

> P_4: *"Sim, o aprendizado a distância é muito inferior em diversos aspectos na minha opinião, minha experiência em geral foi péssima nesse sistema, porém, os encontros foram muito proveitosos, foi sabido gerir bem todos os aspectos, a explicação foi excepcional, a aplicação de atividades foi bem feita, a única questão que deixou a desejar, foi exatamente o sistema não presencial."*
>
> P_5: *"[...] A ministração dos conceitos quanto das questões não tiveram interferência na qualidade e compreensão, todavia, creio que em condições mais favoráveis para realização destas pessoalmente, o espaço para discussões aprofundadas seria mais amplo."*

É perceptível nas falas dos participantes a crítica ao sistema *on-line*, mas, ao mesmo tempo, mencionam a qualidade da aplicação nos quesitos de gerenciamento, explicação e ministração das atividades. Pode-se dizer que, com a organização dos objetos e formas de ensino por parte do professor e, comprometimento e participação ativa na aprendizagem por parte dos estudantes, é possível desenvolver um trabalho eficaz no atual contexto, mesmo que este seja atípico.

A última pergunta (Fig. 4.29) refere-se a uma descrição, por parte do estudante, das contribuições da proposta e tema da Oficina para a aprendizagem e às capacidades de identificação de padrões e abstração exigidas à generalização de fórmulas e prova. Da mesma forma, a pergunta busca refletir quanto à complementariedade ou exclusividade da relação Demonstração Formal X Representação Visual.

Figura 4.29: Pergunta (6) do formulário do *Google*.



Com suas palavras, descreva as contribuições dessa oficina, que trata do método "representações visuais (Prova Sem Palavras)", à aprendizagem em Matemática e à sua capacidade de identificação de padrões e de abstração para a generalização de fórmulas. Conte o que aprendeu de novidade e faça reflexões sobre a demonstração formal e a representação visual (São complementares? São mutuamente exclusivas? Uma auxilia e/ou complementa a outra? Por quê? ...). *

Texto de resposta longa

Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

Seguem algumas considerações determinantes dos estudantes.

Quanto à proposta da Oficina em auxiliar a dimensionar e gerar compreensão matemática à partir da visualização semiótica, temos a seguintes falas:

> P_{10}: *"[...] A oficina me ajudou a explorar mais os caminhos para entender os problemas matemáticos."*

> P_1: *"[...] As vezes, demonstrar por contas é um trabalho complexo e difícil, que pode ser facilitado por uma figura; entretanto, representar visualmente também exige grande domínio e abstração. Portanto, a oficina mostra um grande complemento que pode ser utilizado tanto pelo professor quanto pelo aluno. [...]"*

Fica aqui a sugestão para um trabalho com *softwares* que permitem (ou desenvolvem) animações ou figuras em movimento. Neste trabalho, foram construídas imagens estáticas, sem movimentações, mas que podem ser aperfeiçoadas por objetos em curso.

Alguns argumentam que a formalidade gera certa confusão e que as Representações Visuais trazem clareza e concretude à aprendizagem.

> P_2: *"[...] As demonstrações formais muitas vezes deixam os alunos bem confusos no início, causando então uma maior demora e dificuldade para que seja entendido. Com as representações visuais acaba sendo menos confuso e dá mais clareza."*

> P_8: *"[...] Por mais que o método da demonstração formal é muito importante e para muitos um pouco complicado de entender, a Prova sem palavras facilitaria muito nesse desenvolvimento para uma aprendizagem mais fácil e mais concreta. [...]"*

> P_5: *"[...] A representação visual permite uma compreensão mais prática e fácil."*

> P_1: *"[...] A Prova sem Palavras é um conceito muito proveitoso e que ajuda a enxergar e compreender demonstração tradicional."*

Sobre a complementariedade da proposição visual em relação às demonstrações formais, alguns participantes pontuam:

P_9: "[...] Creio que poderia se tornar uma forma de ensino complementar aos meios formais justamente porque oferta uma percepção visual e compreensiva de um problema que as vezes poderia ser muito complicado devido à sua abstração."

P_8: "[...] é bom frisar o grau de dificuldade para a compreensão das representações visuais, no inicio da apresentação desse conceito tive um pouco de dificuldade para adaptar isso diretamente, porém com algumas explicações à mais tive a sensação de que com a Prova sem palavras tudo realmente se encaixa [...]."

P_3: "[...] A demonstração formal é de extrema importância para solucionar problemas [...] acadêmicos. No entanto a didática dessa forma é um tanto quanto confusa. Deste modo, a demonstração visual se encaixaria para entender o processo e facilitar a didática incentivando o raciocínio lógico sem causar pânico aos alunos com linhas e linhas de cálculos. Então induzo que a forma visual e a forma formal contribuem uma pra o entendimento da outra, sendo a representação formal sendo mais objetiva para solução de problemas e a representação visual sendo mais didática e voltada para o ensino, para a compreensão dos estudantes em relação ao conteúdo."

Os estudantes consideram que, tanto demonstrar quanto representar visualmente, são métodos difíceis e o pesquisador acredita que, com frequência e constância de aplicações de questões semelhantes, no caso, com proposições visuais, é possível que tal dificuldade seja amenizada. A fala do participante P_8 frisa tal dificuldade, inicialmente apresentada pela Prova sem Palavras, mas, com o caminhar das aplicações, tal problemática é solucionada e, inclusive, sente que, com o método, há uma formulação e entendimento de sentidos.

Outras considerações importantes são identificada na fala de P_3. A primeira é relativa à forma didática, qualificada ao ensino, que a representação visual permite e propõe, incentivando no estudante o desenvolvimento do próprio raciocínio sem lhe causar sensações de incapacidade ou medos. Novamente, chama a atenção à complementariedade da Prova sem Palavras e a demonstração, dizendo que "uma é complemento da outra". A última é objetiva para a solução de problemas, já a primeira, é ideal para a compreensão do conteúdo pelos estudantes, afinal é mais didática.

Uma evidência percebida na fala dos estudantes é a de que, devido as provas formais apresentarem certo grau de abstração e, portanto, dificuldade de compreensão, acreditam que a Prova sem Palavras é um caminho auxiliar e inovador, bem como, pode ser utilizado paralelamente às demonstrações. Defendem que *um desenho* pode representar uma ideia matemática abstrata de alto grau de generalização e formalidade. Em nenhum momento, excluem a necessidade, precisão e veracidade das demonstrações, somente pontuam que a representação visual pode ser associada a uma prova.

O próximo capítulo trata das conclusões, análises, perspectivas e considerações pessoais relativas à pesquisa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No início do trabalho, foram levantados alguns questionamentos acerca da aplicação da pesquisa, no caso, Representações Visuais por meio de Oficina Pedagógica. Isto, porque o mundo passa por uma pandemia por infecção respiratória (Covid-19) do novo coronavírus, SARS-CoV-2, e a população é orientada a ficar em isolamento social. As escolas não funcionam presencialmente e foram colocadas metas e novas versões para o ensino e trabalho educacional. O *home-office* tornou-se a "moda prioritária" do mercado de trabalho e, o ensino remoto emergencial, as aulas *on-line* que, mesmo não sendo ideais uma vez que apresentam problemas e defasagens, se mantiveram para permanecer o contato entre comunidade e escola, de modo que não houvessem rupturas no processo de ensino-aprendizagem. A grande dúvida era: como aplicar a Oficina Pedagógica com a proposta de Prova sem Palavras, a qual depende, essencialmente, da prática e da interação entre os indivíduos participantes? Foi desafiador, mas gerou muito aprendizado e contribuições às áreas de pesquisa relacionadas ao tema.

Em se tratando dos objetivos da pesquisa, consideram-se alcançados no que se refere à discussão entre rigor e intuição, formalidade e criatividade, demonstração formal e Prova sem Palavras. As reflexões mediadas pela literatura foram comprovadas praticamente, tendo em vista a opinião dos estudantes frente às aplicações e discussões das questões. Isto pode ser percebido na Fig. 4.24, a qual mostra que todos os estudantes validam a metodologia em questão, à saber a Prova Sem Palavras.

A partir desta experiência, a Prova sem Palavras é uma metodologia que contribui para o ensino de Matemática e oportuniza um trabalho com ferramentas visuais que, por meio de processos intuitivos, subsidiam suportes à identificação de padrões e à abstração no processo de generalização, sendo estas arranjos primordiais numa demonstração formal. Além disso, desde à própria essência da Matemática, a abstração e a intuição aliamse no desenvolvimento da Prova sem Palavras.

Como dialogado na bibliografia, o processo de representar pictoricamente uma entidade matemática é um fator complementar à prova da própria entidade, mesmo que, de certa forma, no produto final, tal representação não apareça diretamente.

A compreensão da aplicabilidade visual das somas no conjunto dos números naturais e racionais foi legitimada, já que, grande parte das somas propostas, foram trabalhadas com o Princípio de Indução Finita e com as fórmulas de Progressão Aritmética e Geométrica, sendo estes processos demonstrativos com caráter formal e puramente matemático. A proposta visual é justamente recomendada na intenção de auxiliar na abstração tão determinante em tais processos. A Prova sem Palavras é um caminho que demanda intuição e criatividade, bem como, desenvolve e aperfeiçoa estas competências.

Outro fato a se considerar é o da importância de se observar as verificações dos primeiros casos em cada somatório, visto que, à partir destas primeiras observações, a generalização é constituída e construída. Se o estudante compreende os casos iniciais, pode ter maiores chances de conceber a generalização para o n'ésimo caso. Isto ocorre na proposição visual, assim como, na demonstração pelo Princípio de Indução Finita.

A sensação, neste final, escrevendo tais considerações, é de muita satisfação e enriquecimento pessoal e científico. A pesquisa apresenta um diálogo na ciência matemática entre rigor e intuição historicamente recorrente. A admiração ao conhecimento matemático e ao desenvolvimento das pesquisas se potencializa, pois, mesmo que a Matemática se constitua como um campo sistemático, padronizado, formalizado, demonstrado e, aparentemente fechado, ela pode experienciar abordagens dinâmicas e criativas preconizadas e oportunizadas pela tecnologia e investigações na área.

É necessário que professores criem artifícios cada vez mais atualizados afim melhorarem o ensino e a aprendizagem de Matemática. Para isso, é importante que a sala de aula seja percebida como ambiente para pesquisas e para aplicações outrora desenvolvidas. As experiências educacionais precisam ser registradas, compartilhadas e analisadas para o aperfeiçoamento e o desenvolvimento da própria ciência. Neste sentido, o pesquisador anseia pelo doutorado afim de trazer suas experiências e contribuições.

Espera-se que a presente pesquisa contribua com o ensino e a aprendizagem da Matemática e desperte ideias inovadoras e novos pesquisadores à Prova sem Palavras, principalmente brasileiros, uma vez que trata-se de um tema pouco abordado no país e, logicamente, com pouca bibliografia nacional. As próprias referências dos textos nacionais trabalhados possuem embasamento em concepções de autores estrangeiros. Dessa forma, foi necessária a tradução de uma diversidade de materiais e produções bibliográficas para a construção do Referencial Teórico.

Almeja-se também que professores utilizem as Representações Visuais, as Provas sem Palavras desenvolvidas nesta pesquisa em suas aulas, principalmente aqueles que trabalham com Técnicas de Demonstração, como a Indução Matemática, por exemplo, ou com o conteúdo de Progressões Aritmética ou Geométrica.

Dessa forma, finaliza-se o presente trabalho com o primeiro *slogan* que faz referência à Prova sem Palavras, *faça um desenho* (POLYA, 1945). Uma representação visual é um mecanismo fundamental rumo, junto e/ou relacionado à demonstração. Portanto, aspira-se que a nova era de matemáticos e de seus ensinadores não apague os desenhos, as representações pictóricas, visuais ou geométricas ou os rascunhos tomados como base e que direcionaram à construção de um conhecimento posteriormente demonstrado sem trincas ou imperfeições.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, H.; CÂNDIDO, L.; FARIAS, M. Resoluções visuais de alguns problemas de matemática da educação básica. **Revista do Professor de Matemática Online**, v. 7, n. 1, p. 1–19, 2019.

ALLEVATO, N. S.; ONUCHIC, L. R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas[1]. **Boletim Gepem**, p. 133, 2009.

ALLEVATO, N. S. G. Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de experiência. **Tese de doutorado**, p. 1–370, 2005.

ALSINA, C.; NELSEN, R. B. Um convite a provas sem palavras. **ComCiência**, SciELO Brasil, n. 143, p. 0–0, 2012.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational studies in mathematics**, Springer, v. 52, n. 3, p. 215–241, 2003.

ÁVILA, G. As séries infinitas. **Revista do Professor de Matemática**, v. 30, 1996.

BARBOSA, A. C. C. A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2º ciclo do ensino básico. 2010.

BLANE, K. Provas sem palavras - para um matemático uma imagem vale mais que mil palavras? **IME-USP - Laboratório de Computação e Simulação**, n. USP-1082950, 2014.

BORBA, M. et al. A informática em ação. **São Paulo: Olho D Água**, 2000.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Ministério da Educação, 1997.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Ministério da Educação, 1998.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Ministério da Educação, 1999.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Ministério da Educação.

BROWN, J. R. Philosophy of mathematics: An introduction to the world of proofs and pictures. **Philosophia Mathematica**, 1999.

CAI, J.; LESTER, F. Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno. **Boletim Gepem**, v. 60, p. 147–162, 2012.

CANDAU, V. M. Educação em direitos humanos: uma proposta de trabalho. **CANDAU, VM, ZENAIDE, MNT Oficinas Aprendendo e Ensinando Direitos Humanos. João Pessoa: Programa Nacional de Direitos Humanos**, 1999.

CARMO, J. a. d. S. Conhecimentos de estudantes de licenciatura em matemática acerca de número 1. **Publicação do programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT.**, v. 10, 2003.

CARRASCO, L. H. Leitura e escrita na matemática. **IN: Iara CB et al.(orgs). Ler e escrever: um compromisso de todas as áreas**, v. 4, p. 175–189, 2007.

CASANAVE, A. L.; VAZ, B.; SCHULTZ, S. Diagramas e provas. **Doispontos**, v. 6, n. 2, p. 13–25, 2009.

CASSELMAN, B. Pictures and proofs. **Notices of the AMS**, v. 47, n. 10, p. 1257–1266, 2000.

COSTA, C. Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. **Anais do Encontro da Seção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação**, p. 257–273, 2002.

COUY, L. et al. Análise de livros-textos de cálculo quanto à utilização dos registros de representação semiótica. **Revista Mosaicum**, n. 32, 2020.

CUBELLES, G. Mt el taller de los talleres. **Buenos Aires: Talleres Gráficos de Indugraf**, 1987.

D'AMBROSIO, U. Expressionismo nas ciências. **Revista história da matemática para professores**, v. 7, n. 1, p. 65–90, 2021.

DREYFUS, T. On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In: **Proc. 15th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education**. Italy: [s.n.], 1991. v. 1, p. 33–48.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus**, p. 11–33, 2003.

DUVAL, R. Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. **São Paulo: Livraria da Física**, 2009.

EISENBERG, T. On understanding the reluctance to visualize. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 26, n. 4, p. 109–113, 1994.

FERNANDES, N. R. O uso dos softwares educacionais por professores de matemática. **Dissertação de Mestrado**, p. 1–107, 2020.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: ponto de análise para a aprendizagem matemática. **GT: Educação Matemática, São Paulo**, n. 19, 2005.

GIERDIEN, F. De provas sem palavras para provas que explicam in matemática secundária. 2007.

GIL, A. C. et al. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2007.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In: THE PROGRAM COMMITTEE OF THE 18TH PME CONFERENCE. **PME Conference**. London, 1996. v. 1, p. 1–3.

HANNA, G. More than formal proof. **For the learning of mathematics**, JSTOR, v. 9, n. 1, p. 20–23, 1989.

HANNA, G. Proof, explanation and exploration: An overview. **Educational studies in mathematics**, Springer, v. 44, n. 1, p. 5–23, 2000.

HATFIELD, L. Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving: Rationales and research. In: ERIC CLEARINGHOUSE FOR SCIENCE, MATHEMATICS AND ENVIRONMENTAL EDUCATION. **Mathematical problem solving: Papers from a research workshop**. Columbus, 1978. p. 21–42.

KANT, I. Critique of pure reason (p. guyer & aw wood, trans.). **Cambridge, U. K: Cambridge University Press. (Original work published 1781)**, 1998.

KRULIK, S.; REYS, R. E. Problem solving in school mathematics. national council of teachers of mathematics 1980 yearbook. ERIC, 1980.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. d. A. **Fundamentos da metodologia científica**. São Paulo: Atlas, 2010. 1–320 p.

LEIBNIZ, G. W. **Escritos Filosóficos**. Buenos Aires: Editorial Charcas, 1982.

LESH, R.; POST, T. R.; BEHR, M. Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In: **Problems of representations in the teaching and learning of mathematics**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1987. p. 33–40.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. **Em Aberto**, v. 5, n. 31, 2011.

MANDERS, K. Diagram-based geometric practice. 2008.

MATHIAS, C. V.; SILVA, H. A. da; LEIVAS, J. C. P. Provas sem palavras, visualização, animação e geogebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, v. 8, n. 2, p. 62–77, 2019.

MORAIS, R. d. S.; ONUCHIC, L. d. l. R. Uma abordagem histórica da resolução de problemas. **L. de La R., ONUCHIC; NSG, ALLEVATO; FCH, NOGUTI**, p. 17–34, 2014.

NCTM. Principles and standards for school mathematics. **National Council of Teachers of Mathematics**, 2000.

NÓBRIGA, J. C. C. Demonstrações matemáticas dinâmicas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 14, n. 1, p. 1–21, 2019.

ONUCHIC, L. d. L. R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos e para onde iremos? iv jornada nacional de educação matemática e xvii jornada regional de educação matemática. **UPF. Passo Fundo**, 2012.

ONUCHIC, L. d. l. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. **Educação Matemática: pesquisa em movimento**, Cortez São Paulo, v. 4, p. 232–252, 2004.

ONUCHIC, L. D. L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema-Mathematics Education Bulletin**, p. 73–98, 2011.

ONUCHIC, L. d. l. R. et al. **Resolução de problemas: teoria e prática**. [S.l.]: Paco Editorial, 2014.

PIMENTEL, T.; VALE, I. Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. **Quadrante**, XXI, n. 2, p. 29–50, 2012.

POLYA, G. **How to solve it: A new aspect of mathematical method**. New Jersey: Princeton university press, 1945.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. **Rio de Janeiro: interciência**, v. 2, p. 12, 1978.

PONTE, J. P. d. Explorar e investigar em matemática: Uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. **Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, FISEM, p. 13–30, 2010.

SCHOENFELD, A. H. In fostering communities of inquiry, must it matter that the teacher knows"the answer"? **For the learning of mathematics**, JSTOR, v. 16, n. 3, p. 11–16, 1996.

SCHOENFELD, A. H. Problem solving in the united states, 1970–2008: research and theory, practice and politics. **ZDM**, Springer, v. 39, n. 5-6, p. 537–551, 2007.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Desenvolvendo a compreensão da matemática por meio da solução de problemas. **Novas direções para matemática do ensino fundamental**, v. 31, 1989.

SEDIG, K.; SUMNER, M. Characterizing interaction with visual mathematical representations. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, Springer, v. 11, n. 1, p. 1–55, 2006.

SEOANE, J. Representar y demostrar. observaciones preliminares sobre diagramas. **Representaciones. Revista de Estudios sobre Representaciones en Arte, Ciencia y Filosofía**, v. 2, p. 105–125, 2006.

SPEISER, B.; WALTER, C. Performing algebra: Emergent discourse in a fifth-grade classroom. **The Journal of Mathematical Behavior**, Elsevier, v. 16, n. 1, p. 39–49, 1997.

TRIPATHI, P. N. Developing mathematical understanding through multiple representations. **Mathematics Teaching in the middle school**, National Council of Teachers of Mathematics, v. 13, n. 8, p. 438–445, 2008.

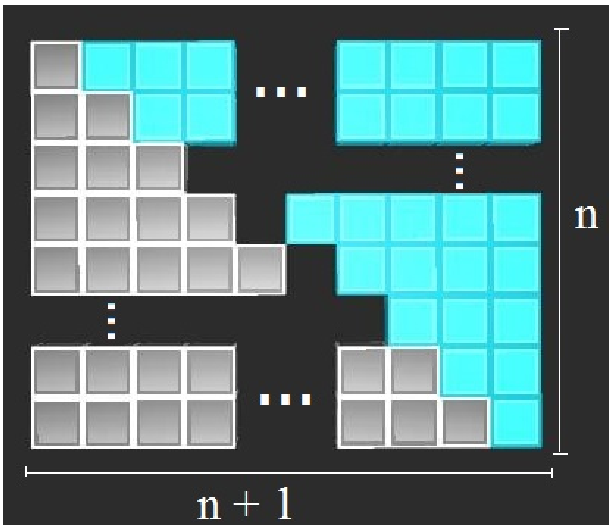
VALE, I.; PIMENTEL, T. Visual pattern tasks with elementary teachers and students: a didactical experience. **Padrões: múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática/Patterns: multiple perspectives and contexts in mathematics education**, p. 151–162, 2009.

APÊNDICE A – PROBLEMAS APLICADOS

1) **Problema:** Mostre a igualdade $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

   Proposta de resolução visual:

Figura A.1: Soma dos *n* primeiros números naturais.



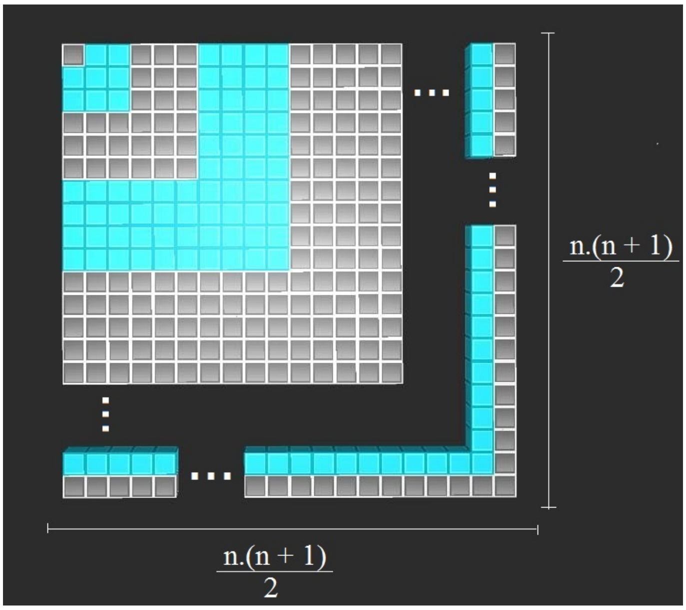
Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

2) **Problema:** Mostre a igualdade

   $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

   Proposta de resolução visual:

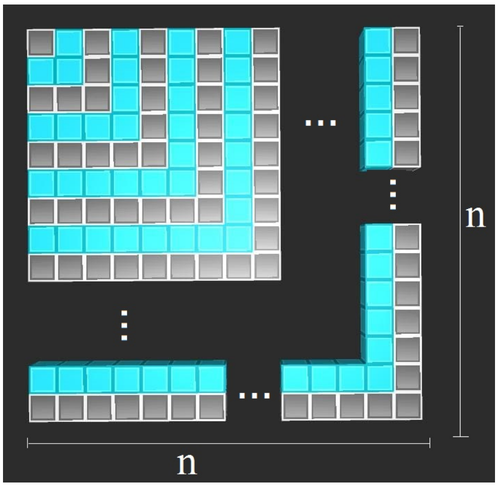
Figura A.2: Soma dos *n* primeiros números cúbicos.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

3) **Problema:** Há uma quantidade de *n* crianças, onde, cada uma delas, recebe 02 balas a mais que a criança anterior. Sabendo que a primeira criança recebeu 01 bala, qual a quantidade total de balas que devo comprar para se fazer essa distribuição?
   Proposta de resolução visual:

Figura A.3: Soma dos *n* primeiros números ímpares.

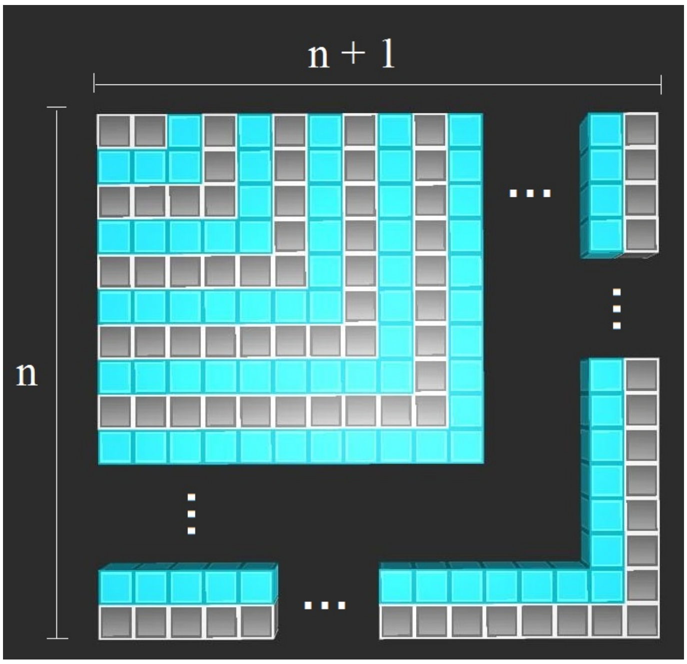


Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

4) **Problema:** Mostre que a soma dos *n* primeiros números pares é dada por *n* parcelas de seu sucessor.

   Proposta de resolução visual:

Figura A.4: Soma dos *n* primeiros números pares.

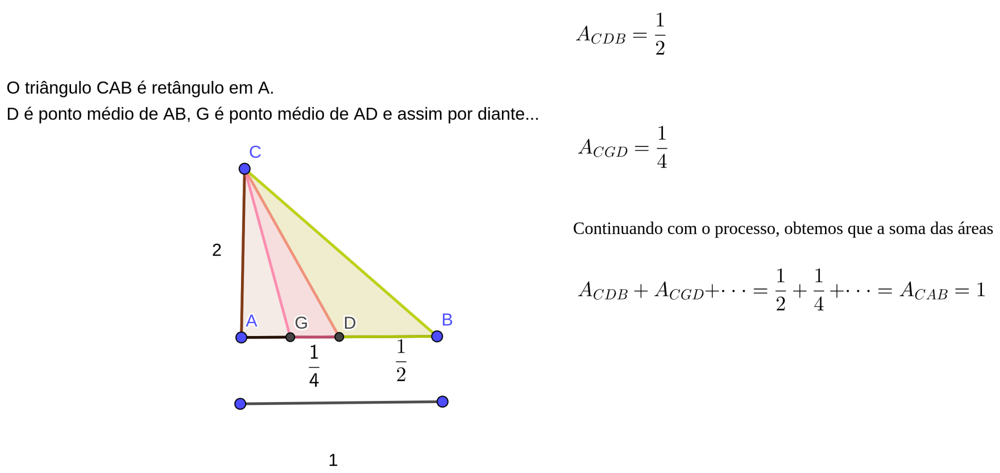


Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

5) **Problema:** Mostre que a soma infinita das potências de 2 com expoente inteiro negativo é 1.

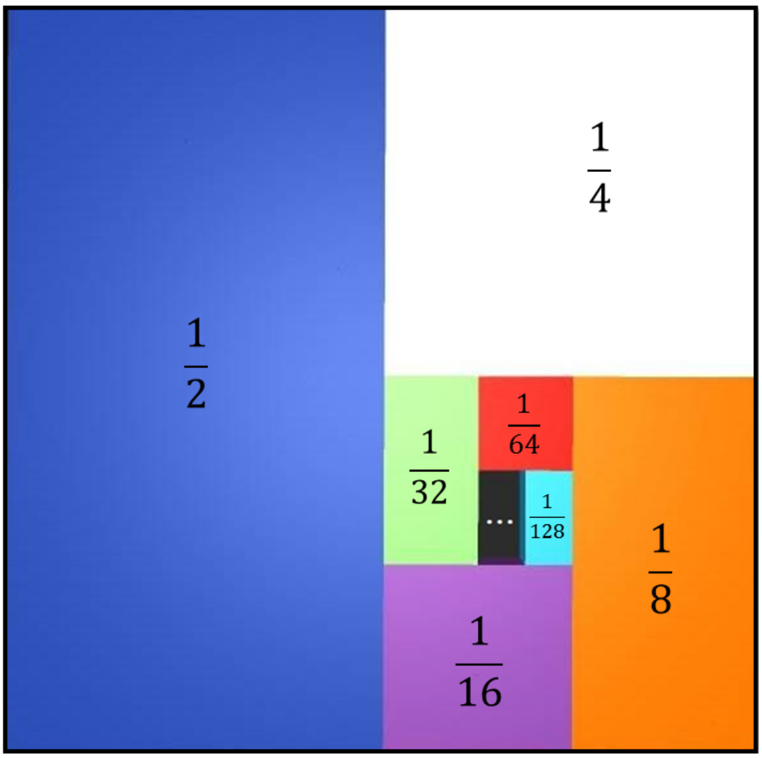
Proposta de resolução visual:

Figura A.5: Proposta de solução com base na ideia do estudante E_2



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

Figura A.6: Soma infinita das potências de base 2 com expoente inteiro negativo.

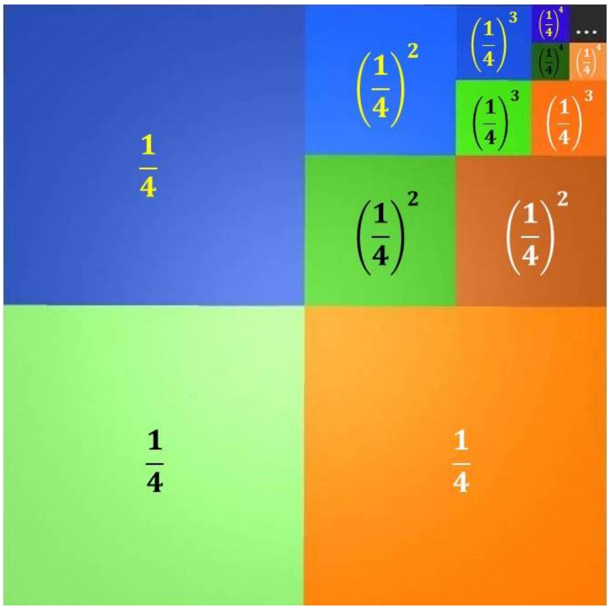


Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

6) **Problema:** Mostre a igualdade $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{3}$.

Proposta de resolução visual:

Figura A.7: Soma infinita das potências de base 4 com expoente inteiro negativo.

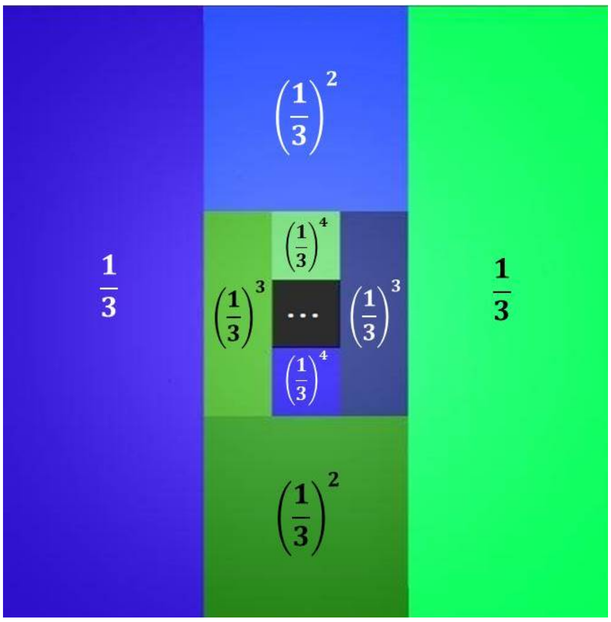


Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

7) **Problema:** Mostre a igualdade $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{2}$.

Proposta de resolução visual:

Figura A.8: Soma infinita das potências de base 3 com expoente inteiro negativo.

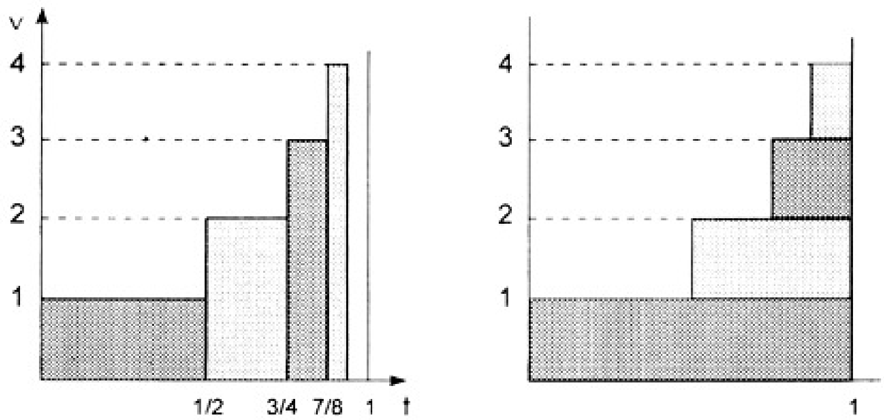


Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

8) **Problema:** Mostre que $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposta de resolução visual:

Figura A.9: Soma infinita das frações $\frac{n}{2^n}$, com $n \in N^*$.

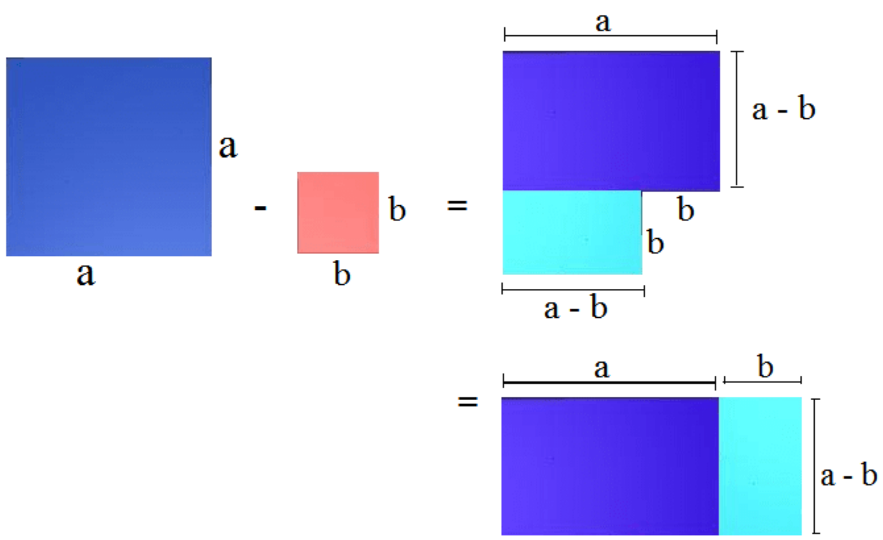


Fonte: (ÁVILA, 1996).

9) **Problema:** Mostre que $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$, com $a>b$ e $a,b>0$. Em seguida, determine o valor de 2021^2-2020^2.

Proposta de resolução visual:

Figura A.10: Igualdade entre a diferença de quadrados e o produto da soma pela diferença de dois termos: $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$.



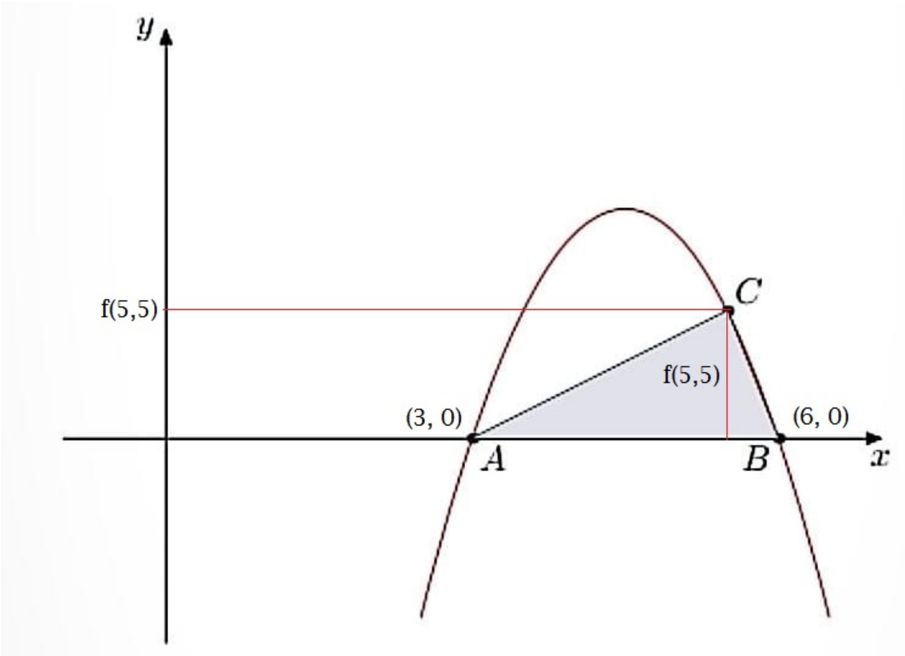
Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

10) **Problema:** ENA 2015 (Adaptada) - A função quadrática $y=-x^2+9x-18$ e o eixo x delimitam um triângulo com vértices A e B no eixo x e C pertencente à função

dada, tal que a abscissa de C é 5,5. Determine a área do triângulo ABC.

Proposta de resolução visual:

Figura A.11: Adaptada do Exame Nacional de Acesso (ENA - 2015) ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.



Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

APÊNDICE B – FORMULÁRIO DO *GOOGLE* - PESQUISA: DEMONSTRAÇÕES FORMAIS X PROVA SEM PALAVRAS

Olá, prezado(a)! Sou Luiz Otávio Abi-acl Almeida, mestrando do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal dos Vales Jequitinhonha e Mucuri campus Teófilo Otoni! Para minha pesquisa intitulada "DEMONSTRAÇÕES FORMAIS EM MATEMÁTICA E REPRESENTAÇÕES VISUAIS (PROVA SEM PALAVRAS): uma proposta de correlação e complementariedade", venho, após a aplicação das questões, por meio deste formulário, coletar dados / informações que tangem à experiência da aplicação, uma vez que as suas respostas irão contribuir com o diálogo que será feito no capítulo "Resultados e Discussões" da dissertação que está sendo produzida. Minha gratidão à você com sua participação na pesquisa, desde a aplicação das questões por reuniões via *Google Meet* à resposta a este questionário! Um abraço!

1) (Múltipla Escolha) A partir da sua experiência nas aplicações das questões, você acredita que a representação visual (Prova Sem Palavras) auxilia na compreensão, na capacidade de identificação de padrões, na abstração exigida para a generalização de fórmulas e na aprendizagem de Matemática?

   a) Completamente (igual ou superior a 85%).

   b) Em grande parte (igual ou superior a 70% e menor que 85%).

   c) Razoavelmente (igual ou superior a 55% e menor que 70%).

   d) Contribui pouco (abaixo de 55%).

2) (Múltipla Escolha) Na sua opinião, qual método apresenta maior grau de dificuldade: as demonstrações formais ou as representações visuais?

   a) Demonstrações Formais.

   b) Representações Visuais.

   c) Ambos tem o mesmo grau de dificuldade.

   d) Ambos são fáceis.

3) (Múltipla Escolha) Você acredita que tratam-se de métodos complementares ou mutuamente exclusivos? (Por exemplo, para uma questão que solicite a prova formal, mas que, no contexto, seja possível uma representação visual, o artifício de expressá-la figurativamente tem papel complementar, criativo e serve de suporte para direcionar a demonstração? Ou, o ideal é que se utilize direta e somente o método

formal, uma vez que uma prova matemática requer rigor e formalidade e, portanto, são desnecessárias quaisquer representações visuais? E vice-versa.)

a) Complementares.

b) Mutuamente exclusivos.

4) (Múltipla Escolha) Na época em que estudou Lógica Matemática, acredita que o conteúdo de Indução Matemática, que faz parte da ementa da disciplina, poderia ter sido complementado com as representações visuais das somas no conjunto dos números naturais, as quais foram abordadas em sala de aula?

a) Sim.

b) Não.

c) Talvez.

d) Não sei.

5) (Discursiva) O fato da aplicação das questões ter sido por reuniões síncronas pelo *Google Meet*, no caso, de forma não presencial, prejudicou de alguma maneira a apropriação de conceitos? Comente sobre sua experiência.

6) (Discursiva) Com suas palavras, descreva as contribuições dessa oficina, que trata do método ”representações visuais (Prova Sem Palavras)”, à aprendizagem em Matemática e à sua capacidade de identificação de padrões e de abstração para a generalização de fórmulas. Conte o que aprendeu de novidade e faça reflexões sobre a demonstração formal e a representação visual (São complementares? São mutuamente exclusivas? Uma auxilia e/ou complementa a outra? Por quê? ...).

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Você está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa intitulada: “DEMONSTRAÇÕES FORMAIS EM MATEMÁTICA E REPRESENTAÇÕES VISUAIS (PROVAS SEM PALAVRAS): UMA PROPOSTA DE CORRELAÇÃO E COMPLEMENTARIEDADE”, em virtude da necessidade de elaboração da dissertação de mestrado do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), coordenada pelo(a) Professor(a) Dr. Weversson Dalmaso Sellin e contará ainda com a coorientação do Professor(a) Me. Tiago de Oliveira Dias.

A sua participação não é obrigatória sendo que, a qualquer momento da pesquisa, você poderá desistir e retirar seu consentimento. Sua recusa não trará nenhum prejuízo para sua relação com o pesquisador, com a UFVJM ou com Instituto Federal de Minas Gerais campus São João Evangelista.

Os objetivos desta pesquisa são: Geral: Discutir distâncias e aproximações entre a demonstração (prova formal) em Matemática e a possibilidade de representação visual (prova sem palavras) de fórmulas.

Específicos: Apresentar e reconhecer o recurso da visualização como uma metodologia contributiva para o ensino e a aprendizagem em Matemática; Auxiliar na compreensão das fórmulas das somas no conjunto dos números naturais por meio da sua possibilidade de representação visual; Incentivar nos estudantes a capacidade de identificação de padrões, abstração e generalização de fórmulas, observando-se os casos iniciais e, posteriormente, as perspectivas e métodos figurativos; Identificar as contribuições da complementariedade da representação visual para a demonstração de fórmulas no que se refere a aprendizagem em Matemática; Propor aplicações que estimulem os raciocínios indutivo, dedutivo e abdutivo.

Caso você decida aceitar o convite, será submetido(a) ao(s) seguinte(s) procedimentos: 04 (quatro) reuniões gravadas por *Google Meet*, com duração de 02 horas cada; aplicação de 10 questões na forma de atividades; questionário do Google Formulário. O tempo previsto para a sua participação é de aproximadamente 08 (oito) horas subdivididas em 04 (quatro) encontros virtuais.

O risco relacionado à sua participação é relativo a administrar o tempo previsto distribuído acima, mas será minimizado pelo seguinte procedimento: aplicação das 10 questões e questionário no início do mês de fevereiro antes ou no início das aulas escolares, sem que comprometa-o(a) ou sobrecarregue-o(a) de atividades. O benefício relacionado à sua participação é relativo à aprendizagem, uma vez que as intenções da pesquisa se intersectam com a criatividade e animações dentro da formalidade das demonstrações em Matemática.

Os resultados desta pesquisa poderão ser apresentados em seminários, congressos e similares, entretanto, os dados/informações pessoais obtidos por meio da sua participação serão confidenciais e sigilosos, não possibilitando sua identificação.

Não há remuneração com sua participação, bem como a de todas as partes envolvidas. Não está previsto indenização por sua participação, mas em qualquer momento se você sofrer algum dano, comprovadamente decorrente desta pesquisa, terá direito à indenização.

Você receberá uma via deste termo onde constam o telefone e o endereço do pesquisador principal, podendo tirar suas dúvidas sobre o projeto e sobre sua participação agora ou em qualquer momento.

Coordenador(a) do Projeto: Luiz Otávio Abi-acl Almeida.

Endereço Rua Begônia, 91, Palmeiras, Senhora do Porto, MG.

Telefone (33) 988138852

Declaro que entendi os objetivos, a forma de minha participação, riscos e benefícios da mesma e aceito o convite para participar. Autorizo a publicação dos resultados da pesquisa, a qual garante o anonimato e o sigilo referente à minha participação, assim como, a gravação das reuniões por *Google Meet*.

Nome do participante da pesquisa:

Assinatura do participante da pesquisa:

Eu, $\cdots$, pai, mãe e/ou responsável pelo(a) participante acima, autorizo a sua participação na pesquisa e estou ciente dos riscos e benefícios na proposta, assim como, autorizo a publicação dos resultados e a gravação das reuniões por *Google Meet*.

Assinatura do(s) pai(s) ou responsável(is)

Informações – Comitê de Ética em Pesquisa da UFVJM

Rodovia MGT 367 - Km 583 - nº 5000 - Alto da Jacuba

Diamantina/MG CEP 39100-000 - Tel.: (38)3532-1240

Coordenadora: Prof.ª Simone Gomes Dias de Oliveira

Secretária: Leila Adriana Gaudencio Sousa

Email: cep.secretaria@ufvjm.edu.br

ANEXO B – TERMO DE ASSENTIMENTO DO MENOR (12 A 18 ANOS INCOMPLETOS)

Você está sendo convidado para participar da pesquisa "DEMONSTRAÇÕES FORMAIS EM MATEMÁTICA E REPRESENTAÇÕES VISUAIS (PROVAS SEM PALAVRAS): UMA PROPOSTA DE CORRELAÇÃO E COMPLEMENTARIEDADE", em virtude da necessidade de elaboração da dissertação de mestrado do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Seus pais permitiram que você participe. Os objetivos: Geral: Discutir distâncias e aproximações entre a demonstração (prova formal) em Matemática e a possibilidade de representação visual (prova sem palavras) de fórmulas. Específicos: Apresentar e reconhecer o recurso da visualização como uma metodologia contributiva para o ensino e a aprendizagem em Matemática; Auxiliar na compreensão das fórmulas das somas no conjunto dos números naturais por meio da sua possibilidade de representação visual; Incentivar nos estudantes a capacidade de identificação de padrões, abstração e generalização de fórmulas, observando-se os casos iniciais e, posteriormente, as perspectivas e métodos figurativos; Identificar as contribuições da complementariedade da representação visual para a demonstração de fórmulas no que se refere a aprendizagem em Matemática; Propor aplicações que estimulem os raciocínios indutivo, dedutivo e abdutivo. Os jovens que irão participar dessa pesquisa têm de 16 a 18 anos de idade. Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu, não terá nenhum problema se desistir. A pesquisa será feita com turmas do curso técnico integrado ao médio em informática do IFMG campus São João Evangelista, por reuniões no *Google Meet*, onde os jovens participarão resolvendo questões e fazendo pontuações nas representações visuais sugeridas pelo autor. Para isso, será usado/a aplicação de 10 questões e um questionário. O uso dos(as) questões e questionário é considerado(a) seguro(a), mas é possível existir dificuldades em administrar o tempo previsto, mas será minimizado pelo seguinte procedimento: aplicação das 10 questões e questionário no início do mês de fevereiro antes ou no início das aulas escolares, sem que comprometa-o(a) ou sobrecarregue-o(a) de atividades. Caso aconteça algo errado, você pode nos procurar pelos telefones (33) 988138852 do/a pesquisador/a Luiz Otávio Abi-acl Almeida. Mas há coisas boas que podem acontecer como evolução da aprendizagem, uma vez que as intenções da pesquisa se intersectam com a criatividade e animações dentro da formalidade das demonstrações em Matemática.

Ninguém saberá que você está participando da pesquisa, não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados, mas sem identificar os jovens que participaram da pesquisa. Quando terminarmos a pesquisa, os resultados poderão ser apresentados em seminários, congressos e similares, entretanto, os dados/informações pessoais obtidos por meio da sua participação serão confidenciais e sigilosos, não possibilitando sua identificação. Haverá também a apresentação dos resultados ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática com banca específica constituída por orientador, coorientador e demais membros, como requisito parcial para obtenção do título de mestre. Se você tiver alguma dúvida, você pode me perguntar ou a pesquisador/a Luiz Otávio Abi-acl Almeida. Eu escrevi os telefones na parte de baixo desse texto.

Eu, $\cdots$, aceito participar da pesquisa "DEMONSTRAÇÕES FORMAIS EM MATEMÁTICA E REPRESENTAÇÕES VISUAIS (PROVAS SEM PALAVRAS): UMA PROPOSTA DE CORRELAÇÃO E COMPLEMENTARIEDADE", que tem o/s objetivo(s) Geral: Discutir distâncias e aproximações entre a demonstração (prova formal) em Matemática e a possibilidade de representação visual (prova sem palavras) de fórmulas. Específicos: Apresentar e reconhecer o recurso da visualização como uma metodologia contributiva para o ensino e a aprendizagem em Matemática; Auxiliar na compreensão das fórmulas das somas no conjunto dos números naturais por meio da sua possibilidade de representação visual; Incentivar nos estudantes a capacidade de identificação de padrões, abstração e generalização de fórmulas, observando-se os casos iniciais e, posteriormente, as perspectivas e métodos figurativos; Identificar as contribuições da complementariedade da representação visual para a demonstração de fórmulas no que se refere a aprendizagem em Matemática; Propor aplicações que estimulem os raciocínios indutivo, dedutivo e abdutivo. Entendi as coisas ruins e as coisas boas que podem acontecer. Entendi que posso dizer "sim" e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer "não" e desistir que ninguém vai ficar furioso. Os pesquisadores tiraram minhas dúvidas e conversaram com os meus responsáveis. Recebi uma via deste termo de assentimento e li e concordo em participar da pesquisa.

(LOCAL), $\cdots$ de janeiro de 2021.

Assinatura do menor

Assinatura do(a) pesquisador(a)

Telefone do pesquisador: (33) 988138852.

AUTORIZAÇÃO

Autorizo a reprodução e/ou divulgação total ou parcial do presente trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, desde que citada a fonte.

Teófilo Otoni, ____ / ____ / ________.

Luiz Otávio Abi-acl Almeida

otavio.abiacl@gmail.com

Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Campus do Mucuri - Rua do Cruzeiro, n. 01 - Jardim São Paulo - CEP 39803-371.

UFVJM