



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional PROFMAT



Aplicações das superfícies mínimas na arquitetura: teoria e uma proposta para o ensino médio [†]

por

Rodrigo Castilho de França

sob a orientação do

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Julho/ 2021
João Pessoa – PB

[†]O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F814a França, Rodrigo Castilho de.

Aplicações das superfícies mínimas na arquitetura :
teoria e uma proposta para o ensino médio / Rodrigo
Castilho de França. - João Pessoa, 2021.

134 f. : il.

Orientação: Allan George de Carvalho Freitas.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Geometria diferencial. 2. Superfícies mínimas. 3.
Arquitetura. 4. Película de sabão. I. Freitas, Allan
George de Carvalho. II. Título.

UFPB/BC

CDU 514.7(043)

Aplicações das superfícies mínimas na arquitetura: teoria e uma proposta para o ensino médio †

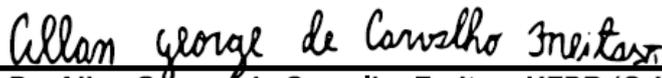
por

Rodrigo Castilho de França

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:



Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas- UFPB (Orientador)



Profa. Dra. Gabriela Albuquerque Wanderley- UFPB

Documento assinado digitalmente



Gregorio Manoel da Silva Neto
Data: 21/09/2021 09:21:12-0300
Verifique em <https://verificador.itl.br>

Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto- UFAL

Julho/ 2021

AGRADECIMENTOS

Ao professor Allan George de Carvalho Freitas, por ter me apresentado o rico e maravilhoso mundo das superfícies mínimas, por todas as suas orientações, paciência, dedicação, profissionalismo e disponibilidade.

Aos membros da banca, Profa. Dra. Gabriela Albuquerque Wanderley e Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto, pelas colaborações e sugestões.

A Universidade Federal da Paraíba e aos professores do Programa de Pós-Graduação e do departamento de Matemática.

Aos amigos e familiares pelo incentivo. A todas as pessoas que acreditaram no meu trabalho e me ajudaram durante este processo, e que, direta ou indiretamente, me apoiaram.

Em especial, aos meus pais, meus irmãos, minhas filhas Gabriella e Lavínia e minha esposa Suênia, por todo amor, carinho e apoio.

RESUMO

Neste trabalho, as superfícies mínimas são estudadas e apresentadas de maneira que se desperte a curiosidade pelo tema para que este seja alcançável a matemáticos, arquitetos, alunos do ensino básico e pessoas que se interessem pelo assunto. Vamos introduzir o contexto histórico a fim de despertar a curiosidade do leitor pela teoria, indo desde os experimentos com películas de sabão e suas aplicações, até os conceitos matemáticos que envolvem as superfícies mínimas. As inúmeras aplicações dessas superfícies são acompanhadas de uma beleza natural que agrada e desperta o interesse de qualquer observador. O desafio, que intrigou matemáticos por séculos, de encontrar a superfície de menor área dado um contorno fixado, a natureza soluciona e mostra caminhos para aplicarmos em nossas moradias e espaços de convívio de uma maneira geral. Neste sentido, a teoria é seguida das aplicações com ênfase na arquitetura e seus principais expoentes. Por fim, serão apresentados os resultados dos nossos próprios experimentos com películas de sabão bem como sugestões de atividades para serem feitas com alunos do ensino médio que motivem o estudo de nosso tema.

Palavras-chave: Superfícies mínimas. Geometria Diferencial. Arquitetura. Películas de Sabão.

ABSTRACT

In this work, the minimal surfaces are studied and presented in a way that arouses curiosity about the theme so that it can be reached by mathematicians, architects, students and people who are interested in the subject. We will introduce the historical context in order to arouse the reader's curiosity for the theory, ranging from the experiments with soap films and their applications, to the mathematical concepts that involve the minimal surfaces. The countless applications of these surfaces are accompanied by a natural beauty that pleases and arouses the interest of any observer. The challenge, which has intrigued mathematicians for centuries, of finding the surface of the smallest area given a fixed outline, nature solves and shows ways to apply it in our homes and living spaces in general. In this sense, the theory is followed by applications with an emphasis on architecture and its main exponents. Finally, the results of our own experiments with soap films will be presented, as well as suggestions for activities to be done with high school students that motivate the study of our theme.

Key-words: Minimal surfaces. Differential Geometry. Architecture. Soap films.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Mostra do plano tangente a uma superfície.....	20
Figura 2 - Mostra de uma variação normal de $x(D)$	28
Figura 3 - Mostra da representação do plano.....	35
Figura 4 - Mostra da representação do helicóide.....	37
Figura 5 - Mostra a representação do catenóide.....	39
Figura 6 - Mostra da representação da superfície Enneper.....	42
Figura 7 - Mostra da representação da superfície de Costa.....	43
Figura 8 - Mostra a superfície Costa-Hoffman-Karcher-Meeks Tori.....	44
Figura 9 - Mostra a superfície Costa-Hoffman-Meeks simetrizadas.....	44
Figura 10 - Mostra da representação da superfície de Scherk.....	45
Figura 11 - Mostra da representação da superfície de Schwarz.....	45
Figura 12 - Mostra da superfície Esfera com extremidade índice dois.....	46
Figura 13 - Mostra a superfície K-Noids prismáticos.....	46
Figura 14 - Mostra a superfície Catalan.....	47
Figura 15 - Mostra a superfície Helicoidal Karcher-Scherk.....	47
Figura 16 - Mostra a catenária no catenóide e uma representação prática.....	50
Figura 17 - Mostra do sistema de distribuição de carga do arco romano.....	51
Figura 18 - Mostra o Panteão, Roma, Itália. E aqueduto romano, Tarragona, na Espanha	51
Figura 19 - Mostra ponte com arcos de ferro fundido, construída em 1796, Wearmouth, na Inglaterra. E o uso dos arcos na torre Eiffel, Paris, 1887.....	52
Figura 20 - Mostra a maquete de correntes suspensas de Gaudí na Casa Milà. O Gateway Arch (1963–1965) em St. Louis de Eero Saarinen. E o uso da catenária na ponte Akashi Kaikyo, no Japão	53
Figura 21 - Mostra a comparação de superfícies mínimas e formas encontradas na natureza.....	54
Figura 22 - Mostra a comparação de superfícies mínimas e formas encontradas na natureza.....	55
Figura 23 - Mostra algumas estruturas helicoidais das obras de Gaudí, em Barcelona, Espanha.....	57

Figura 24 - Mostra o estudo e o uso da catenária e colunas orgânicas nas obras de Gaudí em Barcelona, Espanha.....	58
Figura 25 - Mostra da Igreja da Sagrada Família em Barcelona e seus estudos com catenárias - Espanha, projeto de Gaudí.....	58
Figura 26 - Mostra o estudo e o uso da catenária no icônico arco de entrada de St. Louis, EUA.....	59
Figura 27 - Mostra os esboços originais do Rinque de Hóquei de Yale (Eero Saarinen, 1956) e seu telhado que tem a forma de uma película de sabão.....	60
Figura 28 - Mostra os estudos e o Terminal TWA, em Nova Iorque, EUA, projeto de Eero Saarinen (1962)	60
Figura 29 - Mostra da Einsteinturm (torre Einstein) em Potsdam, Alemanha de Erich Mendelsohn em 1921.....	61
Figura 30 - Mostra da catedral de Brasília, catedral de Belo Horizonte e a superfície mínima o Catenóide	62
Figura 31 - Mostra da Estação Ciências em João Pessoa, Centro Cultural de Le Havre, na França e o uso do Helicóide	63
Figura 32 - Mostra de alguns estudos de superfícies, do arquiteto Frei Otto com bolhas de sabão	65
Figura 33 - Mostra de alguns estudos de superfícies, do arquiteto Frei Otto com bolhas de sabão	64
Figura 34 - Mostra de alguns estudos de superfícies, do arquiteto Frei Otto com bolhas de sabão	66
Figura 35 - Mostra de alguns estudos de superfícies, do arquiteto Frei Otto com bolhas de sabão.....	67
Figura 36 - Mostra do pavilhão da Alemanha Ocidental na feira mundial de 1967, em Montreal.....	67
Figura 37 – Mostra do Institute of Lightweight Structures, na Universidade de Stuttgart, em Vaihingen, Alemanha (1967)	68
Figura 38 - Parque Olímpico em Munique-Alemanha.....	69
Figura 39 - Parque Olímpico em Munique-Alemanha.....	69
Figura 40 – Uma das obras de Frei Otto.....	70
Figura 41 - Mostra de Multihalle em Mannheim - construída entre 1970 e 1975.....	70
Figura 42 - Mostra do Guarda-chuvas desenhados para a turnê da banda Pink Floyd nos Estados Unidos - 1977.....	71

Figura 43 - Mostra do Aviário do zoológico de Munique - obra construída entre 1979 e 1980.....	71
Figura 44 – Mostra do Diplomatic Club Heart Tent em Riad, 1980 (Arabia Saudita)..	72
Figura 45 – Mostra do Pavilhão japonês da Expo 2000, obra realizada em parceria com Shigeru Ban em Hannover – 2000.....	72
Figura 46 - Mostra da Maquete do projeto de Frei Otto para a sua cidade no Ártico.....	73
Figura 47 - Swiss Re Tower em Londres – Inglaterra. E a Superfície Helicoidal Karcher-Scherk variação do Helicóide.....	75
Figura 48 - Swiss Re tower e um estudo de carga de vento, e a comparação da construção com um croqui.....	76
Figura 49 - Mostra do Water Hotel na costa mexicana (Inspirado na superfície Costa)	77
Figura 50 – Mostra de bolhas de sabão quadradas.....	78
Figura 51 - Mostra da solução proposta por Lord Kelvin.....	79
Figura 52 - Mostra da estrutura da espuma de Weaire-Phelan.....	80
Figura 53 - Mostra do Cubo D’água em Pequim, China (2008)	80
Figura 54 - Mostra da construção do Cubo D’água em Pequim, China (2008)	81
Figura 55 - Mostra do exterior do Australian Wildlife Health Centre, em Melbourne, Austrália.....	81
Figura 56 - Mostra do interior do Australian Wildlife Health Centre, em Melbourne, Austrália.....	82
Figura 57 - Mostra do interior do Australian Wildlife Health Centre, em Melbourne, Austrália.....	82
Figura 58 - Mostra vista externa e a maquete do Main Station Stuttgart.....	84
Figura 59 - Mostra de um antigo estudo de Frei Otto, da superfície mínima, inspiração para o Main Station Stuttgart.....	84
Figura 60 - Mostra da vista interna e externa do Main Station Stuttgart.....	85
Figura 61 - Mostra da vista interna e externa do Main Station Stuttgart.....	85
Figura 62 - Mostra do Pavilhão Cambo e a superfície de Enneper.....	86
Figura 63 - Mostra do Pavilhão Cambo.....	87
Figura 64 - Mostra do Pavilhão Cambo.....	87
Figura 65 - Mostra do material usado para produção das peças.....	89
Figura 66 - Mostra das peças produzidas para os primeiros experimentos.....	90

Figura 67 - Mostra dos materiais usados na solução de imersão dos contornos.....	90
Figura 68 - Mostra de uma representação do Plano.....	91
Figura 69 - Mostra da produção do Catenóide.....	92
Figura 70 - Mostra da produção do Helicóide.....	92
Figura 71 - Mostra da produção da Superfície Enneper.....	93
Figura 72 - Mostra da ideia da Superfície Sherk.....	93
Figura 73 - Mostra da produção da Superfície Sherk.....	94
Figura 74 - Mostra da produção da superfície de Costa.....	94
Figura 75 - Mostra do resultado de produção da superfície de Costa.....	95
Figura 76 - Mostra do material usado na produção da superfície de Costa.....	95
Figura 77 - Mostra do processo de produção da superfície de Costa.....	96
Figura 78 - Mostra do processo e resultado de produção da superfície de Costa.....	96
Figura 79 - Mostra da reprodução de um dos experimentos de Frei Otto.....	97
Figura 80 - Mostra da reprodução de um dos experimentos de Frei Otto.....	98
Figura 81 - Mostra da reprodução de um dos experimentos de Frei Otto.....	98
Figura 82 - Mostra da reprodução de um dos experimentos de Frei Otto.....	99
Figura 83 - Mostra da reprodução de um dos experimentos de Frei Otto.....	99
Figura 84 - Mostra da reprodução de um dos experimentos de Frei Otto.....	100
Figura 85 – Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto.....	100
Figura 86 - Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto.....	101
Figura 87 - Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto.....	101
Figura 88 - Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto.....	102
Figura 89 - Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto.....	102
Figura 90 - Mostra experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto.....	103
Figura 91 - Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto.....	103
Figura 92 - Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto.....	103
Figura 93 - Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto.....	104
Figura 94 - Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto.....	104
Figura 95 - Mostra da apresentação.....	106
Figura 96 - Mostra da apresentação.....	106
Figura 97 - Mostra da apresentação.....	107
Figura 98 - Mostra da apresentação.....	108
Figura 99 - Mostra da apresentação.....	108
Figura 100 - Mostra da apresentação.....	108

Figura 101 - Mostra da apresentação.....	109
Figura 102 - Mostra da apresentação.....	109
Figura 103 - Mostra da apresentação.....	110
Figura 104 - Mostra da apresentação.....	110
Figura 105 - Mostra da apresentação.....	111
Figura 106 - Mostra da apresentação.....	111
Figura 107 - Mostra da apresentação.....	112
Figura 108 - Mostra da apresentação.....	112
Figura 109 - Mostra da apresentação.....	113
Figura 110 - Mostra da apresentação.....	113
Figura 111 - Mostra da apresentação.....	114
Figura 112 - Mostra da apresentação.....	114
Figura 113 - Mostra da apresentação.....	115
Figura 114 - Mostra da apresentação.....	116
Figura 115 - Mostra da apresentação.....	116
Figura 116 - Mostra da apresentação.....	116
Figura 117 - Mostra da apresentação.....	117
Figura 118 - Mostra da apresentação.....	117
Figura 119 - Mostra da apresentação.....	118
Figura 120 - Mostra da experiência sobre a menor distância entre pontos.....	128

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados percentuais do questionário aplicado em alunos.....	115
--	-----

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Projeto: Superfícies mínimas no Ensino Médio.....	130
--	-----

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	14
2.	Teoria das superfícies mínimas	18
2.1	SUPERFÍCIE PARAMETRIZADA REGULAR.....	18
2.2	PLANO TANGENTE E VETOR NORMAL.....	20
2.3	PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL.....	22
2.4	SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL.....	24
2.5	CURVATURAS DE UMA SUPERFÍCIE.....	26
2.6	VARIAÇÃO DA ÁREA E SUPERFÍCIES MÍNIMAS.....	27
2.7	EXEMPLOS DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS.....	34
2.7.1	O plano	35
2.7.2	O Helicóide	36
2.7.3	O Catenóide	37
2.7.4	Superfície Mínima de Enneper	40
2.7.5	Outros Exemplos de Superfícies Mínimas	42
3.	Aplicações na arquitetura	48
3.1	A CATENÁRIA NA ARQUITETURA.....	50
3.2	ARQUITETOS NOTÁVEIS NA UTILIZAÇÃO DE SUPERFÍCIES ORGÂNICAS NO SÉCULO XX.....	54
3.2.1	Antoni Gaudí (1852-1926)	56
3.2.2	Eero Saarinen (1910-1961)	59
3.2.3	Erich Mendelsohn (1887-1953)	61
3.2.4	Oscar Niemeyer (1907-2012)	61
3.3	FREI PAUL OTTO O GRANDE PRECURSOR NA UTILIZAÇÃO DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS NA ARQUITETURA.....	64
3.4	PROJETOS ARQUITETÔNICOS E AS SUPERFÍCIES MÍNIMAS NO SÉCULO XXI.....	74
3.4.1	Swiss Re tower	75
3.4.2	Water Hotel	76
3.4.3	O Cubo D'água	78
3.4.4	Australian Wildlife Health Centre	81
3.4.5	Main Station Stuttgart (Estação principal de Stuttgart)	83
3.4.6	Pavilhão Cambo	86
4.	Películas de sabão, superfícies mínimas e arquitetura: um estudo preliminar para o ensino médio	88
4.1	OS EXPERIMENTOS COM PELÍCULA DE SABÃO.....	89
4.1.1	Experimentos iniciais e superfícies mínimas clássicas	91
4.1.2	Experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto	96
4.2	APRESENTAÇÃO E EXPERIMENTOS COM OS ALUNOS.....	105
5.	Arquitetura e superfícies mínimas no ensino médio: um projeto didático	119
6.	REFERÊNCIAS	132

INTRODUÇÃO

O desafio de encontrar a superfície de menor área limitada por um contorno fixo tem feito parte de trabalhos de vários matemáticos há séculos. Matemáticos como Newton e Bernoulli se dedicaram e produziram estudos sobre problemas de minimização da área. Em 1744, Leonard Euler, que foi aluno de Bernoulli, desenvolveu uma equação diferencial para descrever tal problema. Anos depois, Lagrange simplificou esta equação, que hoje é chamada de equação Euler-Lagrange. Como veremos neste trabalho, superfícies com essa propriedade pertencem à classe das chamadas superfícies mínimas.

O plano já conhecido desde o trabalho de Euclides, por volta de 300 a.C, é considerado a primeira superfície mínima. O Catenóide foi a primeira superfície mínima, não trivial, descoberta por Euler, em 1764, a princípio ele a chamou de “allyside” mais tarde foi renomeado por Plateau. Alguns anos depois, em 1776, Jean Baptiste Meusnier descobriu a segunda, conhecida como helicóide.

Usando as equações de Lagrange, Scherk, em 1835, descobriu novas superfícies mínimas. Importantes avanços aconteceram na década de 60, do século XIX. Em 1864, Enneper descobriu uma nova superfície mínima que leva seu nome. Em 1865, H. A. Schwarz e B. Riemann, seguidos de K. Weierstrass, em 1866, contribuíram com novas superfícies.

Em meados do século XIX, o físico belga Plateau desenvolveu um importante estudo com películas de sabão. Em seus experimentos ele provou que a película formada ao se mergulhar um contorno de arame em uma solução de água e sabão é a superfície de menor área possível e o desafio de provar matematicamente a existência de tais superfícies, ficou conhecido como problema de Plateau. Além disso, ele formulou as Leis de Plateau que determinam os ângulos com os quais as películas se encontram.

A solução para o problema de Plateau foi apresentada por Jesse Douglas, em 1928, todavia sua demonstração se mostrou incompleta. Mas em 1930, o matemático húngaro Tibo Radó publicou uma solução para esse problema. Em 1936, Jesse Douglas teve o reconhecimento de suas inúmeras contribuições no campo das superfícies mínimas ao ser agraciado com a medalha Fields (o prêmio de maior

prestígio mundial em matemática, ocorrido a cada quatro anos, concedido apenas a pesquisadores com menos de quarenta anos de idade).

Mesmo com a dedicação de inúmeros matemáticos de renome, como Gauss e Riemann, bem como seus colaboradores, e com todo o avanço nesta área da geometria diferencial, até 1982, o plano, o catenóide e o helicóide eram as únicas superfícies mínimas conhecidas, ditas completas e mergulhadas (sem auto interseções quando expandidas para o infinito). Foi então que o brasileiro Celso Costa descobriu a quarta superfície mínima com estas propriedades, que ficou conhecida posteriormente como a Superfície de Costa. Esta descoberta teve grande repercussão no mundo da matemática por resolver um problema que estava aberto a mais de 200 anos. Naquela época, Costa estava trabalhando em sua tese de doutorado no IMPA.

Em uma entrevista¹, o matemático Celso Costa (1982 apud KAWANO, 2007) declarou como veio a inspiração para conceber esta brilhante ideia, dizendo,

[...] eu assistia a um filme sobre escola de samba e um sambista desfilava com um bizarro chapéu de três abas. Naquele momento tive a inspiração crucial e final do modo como a figura geométrica da superfície que eu buscava se apresentava no espaço [...].

Dois anos mais tarde, em 1984, tendo em mãos as equações do brasileiro e também potentes computadores, J. Hoffman, D. Hoffman e W. W. Meeks, da Universidade de Massachusetts, conseguiram criar a imagem dessa superfície.

Celso Costa (2014) declarou ainda em entrevista dizendo: “[...] Porque eu dei as equações, fiz um desenho num guardanapo dizendo que a superfície era daquela maneira, e que depois o computador confirmou [...]” (COSTA, 2014, apud ALBERTINI; DURAN, 2014, p. 228-229).

Sua descoberta tem contribuído para um grande número de outros trabalhos nesta área. Com o rápido avanço da computação gráfica foi possível estudar variações de superfícies clássicas e visualizar novas. As aplicações das superfícies mínimas são de grande importância na física, biologia, química, medicina, astronomia, engenharia e arquitetura.

¹ Carmem Kawano traz trechos desta entrevista em sua matéria por título “A bolha de sabão em números”, para a edição 187, de fevereiro de 2007, da Revista Galileu, da Editora Globo. Disponível em: <<http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT656726-2680,00.html>>. Acesso em: 05 jul. 2021.

Nosso trabalho pega este componente, mais especificamente as aplicações na arquitetura e busca fazer uma ponte entre esta teoria complexa, com uma abordagem simples. Para que possa ser um material de apoio para professores e alunos do ensino médio.

À Introdução, capítulo 1, destinamos o momento introdutório dos aspectos metodológicos que compuseram nosso transcurso investigativo, bem como, como se estrutura este escopo dissertativo. Em sequência, teremos no capítulo 2 uma introdução simplificada da teoria das superfícies mínimas, onde faremos um estudo das superfícies parametrizadas regulares, coeficientes das primeiras e segundas formas fundamentais, das curvaturas e variação da área. Mais especificamente, veremos a demonstração matemática que relaciona as superfícies minimizantes de área com as superfícies mínimas. Os cálculos são mostrados com riqueza de detalhes em demonstrações e também nas superfícies mínimas clássicas. Apresentaremos também outras superfícies mínimas de maneira menos formal.

O capítulo 3 foi destinado a uma dentre várias aplicações que podem ser trabalhadas com intuito de motivar e dar significado ao apresentarmos o tema para os alunos do ensino básico. A arquitetura foi escolhida por se apresentar, de uma maneira ou de outra, como parte do cotidiano de todos. Sendo assim, começamos com o uso da catenária, a curva geradora do catenóide, na arquitetura, com um contexto histórico das estruturas arqueadas e suas aplicações mais modernas. Apresentaremos os principais arquitetos que deram início e influenciaram os estudos de formas orgânicas e das superfícies mínimas em projetos arquitetônicos, como Antoni Gaudí, com seus estudos estruturais inovadores através da catenária e Frei Otto, com seus importantes estudos através das películas de sabão. Mostraremos algumas obras resultantes desse tipo de projeto e as superfícies mínimas usadas diretamente ou nas quais foram inspirados. Maiores detalhamentos serão relacionados em alguns casos, mas não temos a pretensão de fazer uma análise arquitetônica profunda da obra, como conceito e partido arquitetônicos desses projetos. Queremos aqui, oferecer ao leitor a relação e os benefícios que o uso de tais superfícies agregam aos projetos na busca de estabilidade estrutural, economia de material, harmonia com o ambiente em que está inserido, além de forma e design.

No capítulo 4, faremos a descrição de experimentos e aulas realizadas com os alunos do ensino médio de uma escola estadual da Paraíba. Os experimentos foram realizados com película de sabão, em um primeiro momento, fizemos as

superfícies mínimas clássicas como o plano, o Catenóide, o helicóide, a superfície de Scherk, a superfície de Enneper entre outros, também foram produzidas duas esculturas representativas da superfície de Costa. Então, num segundo momento, começamos uma série de testes e experimentos inspirados nos estudos do arquiteto alemão Frei Otto, precursor no uso deste tipo de experimentos e aplicação de superfícies mínimas, propriamente ditas, em arquitetura. As possibilidades de resultados são inúmeras, pois podemos mesclar vários contornos entre si e observar o comportamento das superfícies formadas para determinados movimentos. Assim, contamos em detalhes, como foi a apresentação para os alunos, os questionamentos e resultados sobre a percepção deles em relação à formação de películas que representem a menor área, sendo os resultados mostrados em uma tabela e analisados.

Finalizaremos, no capítulo 5, trazendo uma sugestão para se trabalhar as superfícies mínimas e a matemática neste nível de ensino, através da prática pedagógica na perspectiva do trabalho com projetos, seguindo as orientações da BNCC (2017), na busca por novos conhecimentos de forma a incentivar nos alunos raciocínios, representações, comunicações e argumentações.

Capítulo 2

Teoria das superfícies mínimas

Neste capítulo, temos o objetivo de apresentar a teoria das superfícies mínimas sob o ponto de vista de superfícies parametrizadas como imagem de uma aplicação. Para tanto, iniciaremos com a ideia geral de superfície parametrizada regular, plano tangente e vetor normal, primeira e segunda formas fundamentais, curvaturas, variação da área e superfícies mínimas clássicas. Realizaremos, com detalhes, os cálculos da curvatura média de algumas superfícies mínimas clássicas e veremos outros exemplos de tais superfícies obtidas por estudos posteriores.

Para tanto, nesta introdução simplificada da teoria das superfícies mínimas seguiremos de perto os estudos de Carmo (2014) e Tenenblat (2008).

2.1 SUPERFÍCIE PARAMETRIZADA REGULAR

Intuitivamente consideramos uma superfície como um conjunto de pontos do espaço que se assemelha a uma porção do plano numa vizinhança de cada um deles, tal como a superfície da Terra. Embora esférica, parece plana a um observador nele colocado que consegue ver somente até a linha do horizonte. Isso ocorrerá quando a superfície for a imagem de uma aplicação suficientemente regular de um conjunto de pontos do plano em pontos de \mathbb{R}^3 .

A grosso modo, uma superfície regular em \mathbb{R}^3 é obtida tomando-se pedaços do plano, deformando-os e colando-os entre si, de tal modo que a figura resultante não apresente pontas, arestas ou auto intersecções; e que tenha sentido falar em plano tangente nos pontos desta figura. A ideia é definir um conjunto que seja, em certo sentido, bi-dimensional e que seja também suficientemente suave de forma que as noções usuais de Cálculo possam ser estendidas a um tal conjunto (CARMO, 2014, p. 61).

Para nossos objetivos, o conceito de superfície parametrizada regular será muito importante e o elucidamos a partir de agora.

Definição 1. Uma superfície parametrizada regular ou simplesmente uma superfície é uma aplicação $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 , tal que:

- X é diferenciável de classe C^∞ ;
- Para todo $q = (u, v) \in U$, a diferencial de X em q , $dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é injetora.

As variáveis u, v são chamadas de parâmetros da superfície. O subconjunto S de \mathbb{R}^3 obtido pela imagem da aplicação X é denominado *traço de X* .

Vamos analisar o que a definição nos diz sobre o comportamento de uma superfície. A condição (a) impõe que a aplicação $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é diferenciável de classe C^∞ isto é, as funções x, y, z têm derivadas parciais de todas as ordens e são contínuas. A condição (b) vai garantir a existência de plano tangente em cada ponto da superfície (para esta definição, veja a sessão 1.2). Vejamos algumas formas equivalentes de expressar essa condição. Sejam \vec{e}_1, \vec{e}_2 os vetores da base canônica de \mathbb{R}^2 . Para cada $q = (u_0, v_0) \in U$, sabemos que a matriz associada a dX_q nas bases canônicas é a matriz jacobiana dada por

$$J(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$dX_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right),$$

$$dX_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

2.2 PLANO TANGENTE E VETOR NORMAL

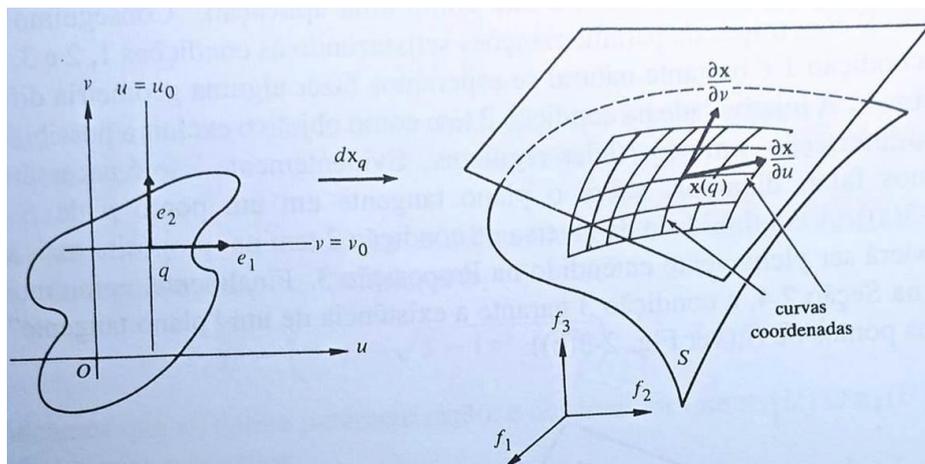
Denotando esses dois vetores por $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$, respectivamente, observamos que as seguintes afirmações são equivalentes:

- b.1. dX_q é injetora;**
- b.2. A matriz $J(u_0, v_0)$ tem posto 2;**
- b.3. Os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são linearmente independentes;**
- b.4. $X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$.**

2.2 PLANO TANGENTE E VETOR NORMAL

Definição 2. Se $X(u, v)$ é uma superfície parametrizada regular, dizemos que um vetor w de \mathbb{R}^3 é um vetor tangente a X em $q = (u_0, v_0)$ se $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$.

Figura 1 - Mostra do plano tangente a uma superfície



Fonte: Carmo, 2014, p. 63.

Definição 3. O plano tangente a X em (u_0, v_0) é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em (u_0, v_0) , que denotamos por $T_q X$, onde $q = (u_0, v_0)$.

Proposição 1. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$. Então T_qX é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$.

Demonstração: (c.f. TENENBLAT, 2008, p. 133).

Por definição de superfície parametrizada regular, X_u e X_v são vetores linearmente independentes. Portanto, segue-se da proposição anterior que T_qX é um plano do \mathbb{R}^3 , gerado por X_u e X_v . Observamos que, em geral, X_u e X_v não são ortogonais, nem unitários.

Definição 4. Se $X(u, v)$ é uma superfície e $q = (u_0, v_0)$, dizemos que um vetor de \mathbb{R}^3 é *normal* a X em q se é ortogonal a T_qX , isto é, é ortogonal a todos os vetores tangentes a X em q .

Dado um plano tangente T_qX , existe uma única direção normal a este plano e, portanto, existem exatamente dois vetores unitários normais a X em q . Podemos definir o vetor normal a q por

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q).$$

Se o domínio da superfície X é um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, então, variando, temos uma aplicação diferenciável $N: U \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$, onde S^2 é a esfera centrada na origem de raio 1, denominada *aplicação normal de Gauss* e definida por

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v).$$

A seguir, veremos um importante exemplo de superfície parametrizada para o nosso trabalho, o qual veremos novamente nas sessões seguintes.

Exemplo 1. Seja $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$, $0 < u < 2\pi$, $-\infty < v < \infty$. Esta superfície parametrizada é conhecida como o helicóide.

Temos que os vetores que geram o plano tangente no ponto (u, v) são dados por

$$X_u = (\cos v, \sin v, 0),$$

$$X_v = (-u \sin v, u \cos v, a).$$

Calculando produto vetorial $X_u \times X_v$, temos:

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & 0 \\ -u \operatorname{sen} v & u \cos v & a \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(a \operatorname{sen} v) - \vec{j}(a \cos v) + \vec{k}(u \cos^2 v + u \operatorname{sen}^2 v) \\ &= (a \operatorname{sen} v, -a \cos v, u). \end{aligned}$$

Além disso, vemos que $\|X_u \times X_v\| = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 v + a^2 \cos^2 v + u^2} = \sqrt{a^2 + u^2}$.

O vetor normal unitário será dado por

$$\vec{N} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \left(\frac{a \operatorname{sen} v}{\sqrt{a^2 + u^2}}, \frac{-a \cos v}{\sqrt{a^2 + u^2}}, \frac{u}{\sqrt{a^2 + u^2}} \right).$$

2.3 PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL

Nesta seção, veremos o importante conceito de primeira forma fundamental, que passamos a descrever agora.

Definição 5. Seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, $\forall q \in U$, a aplicação

$$I_q: T_p X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2$$

É denominada a primeira forma fundamental de X em q .

Consideremos uma superfície dada por $X(u, v)$ e um ponto $q = (u_0, v_0)$. Então, um vetor $w \in T_q X$ é da forma

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

Onde $a, b \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$I_q(w) = \langle aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0), aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0) \rangle$$

$$\Rightarrow I_q(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0).$$

Usando a notação

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0),$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0),$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0).$$

Temos que

$$I_q(w) = a^2 E(u_0, v_0) + 2ab F(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0).$$

Variando (u, v) , temos funções $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ diferenciáveis, que são chamadas de **coeficientes da primeira forma fundamental**.

Exemplo 2. Seja $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$, a superfície parametrizada do helicóide. Segue que os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \cos^2 v + \sin^2 v + 0^2 = 1,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v + 0 = 0,$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + a^2 = u^2 + a^2.$$

A primeira forma fundamental está relacionada ao conceito de área, o qual usaremos mais a diante. Desta forma, enunciaremos tal definição agora

Definição 6. Seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $D \subset U$ uma região de \mathbb{R}^2 , tal que X restrita ao interior de D é injetiva. A área da região $X(D)$ é dada por

$$A(X(D)) = \int_{\bar{D}} \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental de X .

2.4 SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

Nesta seção, introduziremos o conceito de segunda forma fundamental de uma superfície parametrizada, a qual passaremos a ver a partir de agora.

Definição 7. Seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Fixado $q = (u_0, v_0) \in U$, a segunda forma quadrática de X em q é uma aplicação $II_q: T_q X \rightarrow \mathbb{R}$, que para cada vetor $w \in T_q X$ associa $II_q(w)$ da seguinte forma: se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva diferenciável da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = q$ e $\alpha'(t_0) = w$, então definimos $II_q = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle$, onde N é o vetor normal a X .

Vamos verificar que $II_q(w)$ não depende da curva escolhida. Seja $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$, e consideremos uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ tal que $(u(t_0), v(t_0)) = q$ e $\alpha'(t) = w$, isto é,

$$(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0), (u'(t_0), v'(t_0)) = (a, b).$$

Como

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t))$$

e

$$\begin{aligned} \alpha''(t) = & u''(t)X_u(u(t), v(t)) + (u'(t))^2 X_{uu}(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t), v(t)) \\ & + (v'(t))^2 X_{vv}(u(t), v(t)) + v''(t)X_v(u(t), v(t)). \end{aligned}$$

Temos que

$$II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle$$

$$\Rightarrow II_q(w) = a^2 \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0),$$

onde a expressão acima não depende da curva α .

Usando a notação

$$e(u_0, v_0) = \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0),$$

$$f(u_0, v_0) = \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0),$$

$$g(u_0, v_0) = \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0).$$

Temos que

$$II_q(w) = a^2 e(u_0, v_0) + 2abf(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0).$$

Variando (u, v) , temos funções $e(u, v)$, $f(u, v)$ e $g(u, v)$ diferenciáveis, que são chamadas de **coeficientes da segunda forma fundamental** da superfície parametrizada X .

Exemplo 3. Considerando a superfície parametrizada do helicóide $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$, temos que, $X_{uu} = (0, 0, 0)$; $X_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$; $X_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0)$

$$e N = \left(\frac{a \sin v}{\sqrt{a^2 + u^2}}, \frac{-a \cos v}{\sqrt{a^2 + u^2}}, \frac{u}{\sqrt{a^2 + u^2}} \right).$$

Desta forma, os coeficientes da segunda forma fundamental para esta superfície serão dados por

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = 0,$$

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{-a \sin^2 v}{\sqrt{a^2 + u^2}} + \frac{-a \cos^2 v}{\sqrt{a^2 + u^2}} + 0 = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + u^2}},$$

$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{-a u \sin v \cos v}{\sqrt{a^2 + u^2}} + \frac{a u \sin v \cos v}{\sqrt{a^2 + u^2}} + 0 = 0.$$

2.5 CURVATURAS DE UMA SUPERFÍCIE

A partir de agora, veremos a importante noção de curvatura para uma superfície parametrizada, começaremos pelo conceito de curvatura normal.

Definição 8. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$. A função curvatura normal em q é uma aplicação $k_n: T_qX - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que, para cada vetor $w \in T_qX$ não nulo, associa

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)}.$$

A partir do conceito de curvatura normal podemos definir as chamadas curvaturas principais.

Definição 9. Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e k_n a função curvatura normal de X em $q = (u_0, v_0)$. Então, existem valores unitários e ortogonais w_1 e $w_2 \in T_qX$, tais que $k_1 = k_n(w_1)$ e $k_2 = k_n(w_2)$ são valores mínimos e máximos da função k_n .

Com a notação da proposição anterior w_1 e w_2 são chamados vetores principais de X em q e as curvaturas k_1 e k_2 são denominadas curvaturas principais de X em q . As direções de T_qX determinados pelos vetores principais são chamadas de direções principais.

O produto das curvaturas principais $K(q) = k_1 \cdot k_2$ denomina-se curvatura gaussiana de X em q e a semissoma de k_1 e k_2 , $H(q) = \frac{k_1 + k_2}{2}$, é chamada de curvatura média X em q .

Neste sentido, existe uma forma prática de calcular as curvaturas gaussiana e média a partir dos coeficientes das primeira e segundas formas fundamentais.

Proposição 2. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Então

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}.$$

Demonstração: (c.f. TENENBLAT, 2008, p. 166 - 167).

2.6 VARIAÇÃO DA ÁREA E SUPERFÍCIES MÍNIMAS

Um ponto central neste trabalho se refere ao estudo de superfícies com curvatura média nula. Neste sentido, uma superfície que tem curvatura média identicamente nula é denominada de *superfície mínima*.

Exemplo 4. Seja $X(u, v) = (ucosv, usenv, av)$, a superfície parametrizada do helicóide. Conhecidos os coeficientes das formas fundamentais, temos que a curvatura gaussiana desta superfície será dada por

$$K = -\frac{a^2}{a^2 + u^2} \cdot \frac{1}{a^2 + u^2} = \left(\frac{a}{a^2 + u^2}\right)^2.$$

Além disso, a curvatura média será dada por

$$H = \frac{1}{2} \frac{0}{a^2 + u^2} = 0.$$

Como $H = 0$, o helicóide é uma superfície mínima.

2.6 VARIAÇÃO DA ÁREA E SUPERFÍCIES MÍNIMAS

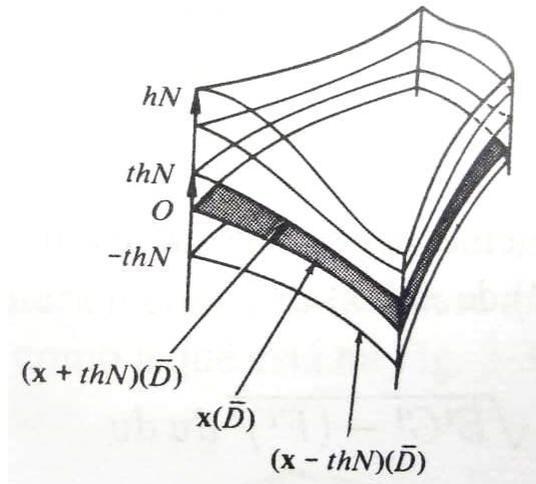
Nesta seção, vamos apresentar a noção de variação da área e como consequência iremos compreender o uso da palavra *mínima* para tais superfícies que possuem curvatura média nula.

Seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Escolha um domínio limitado $D \subset U$ e uma função diferenciável $h: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$, onde \bar{D} é a união do domínio D e sua fronteira ∂D . A *variação normal* de $X(\bar{D})$, determinada por h , é a aplicação φ dada por,

$$\varphi: \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(u, v, t) = X(u, v) + th(u, v)N(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}, t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Figura 2 - Mostra de uma variação normal de $X(D)$



Fonte: Carmo, 2014, p. 235.

Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ fixado, a aplicação $X^t: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$$

é uma superfície parametrizada com

$$(X^t)_u = X_u + thN_u + th_uN$$

$$(X^t)_v = X_v + thN_v + th_vN.$$

Agora, iremos calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais. Antes de mais nada, como X_u e X_v são vetores tangente e N é um vetor unitário, segue que

$$\langle X_u, N \rangle = \langle X_v, N \rangle = 0$$

e

$$\langle N, N \rangle = 1 \Rightarrow \langle N_u, N \rangle = \langle N_v, N \rangle = 0.$$

Dessa forma, denotando por E^t, F^t, G^t os coeficientes da primeira forma fundamental de X^t , obtemos

2.6 VARIAÇÃO DA ÁREA E SUPERFÍCIES MÍNIMAS

$$\begin{aligned}
 E^t &= \langle (X^t)_u, (X^t)_u \rangle = \langle X_u + thN_u + th_uN, X_u + thN_u + th_uN \rangle \\
 &= \langle X_u, X_u \rangle + th\langle X_u, N_u \rangle + 0 + th\langle X_u, N_u \rangle + t^2h^2\langle N_u, N_u \rangle + 0 + 0 + t^2h_uh_u. \quad 1 \\
 &\Rightarrow E^t = E + th(\langle X_u, N_u \rangle + \langle X_u, N_u \rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_u \rangle + t^2h_uh_u,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F^t &= \langle (X^t)_u, (X^t)_v \rangle = \langle X_u + thN_u + th_uN, X_v + thN_v + th_vN \rangle \\
 &= \langle X_u, X_v \rangle + th\langle X_u, N_v \rangle + 0 + th\langle X_v, N_u \rangle + t^2h^2\langle N_u, N_v \rangle + 0 + 0 + t^2h_uh_v. \quad 1 \\
 &\Rightarrow F^t = F + th(\langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_v \rangle + t^2h_uh_v
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 G^t &= \langle (X^t)_v, (X^t)_v \rangle = \langle X_v + thN_v + th_vN, X_v + thN_v + th_vN \rangle \\
 &= \langle X_v, X_v \rangle + th\langle X_v, N_v \rangle + 0 + th\langle X_v, N_v \rangle + t^2h^2\langle N_v, N_v \rangle + 0 + 0 + t^2h_vh_v. \quad 1 \\
 &\Rightarrow G^t = G + th(\langle X_v, N_v \rangle + \langle X_v, N_v \rangle) + t^2h^2\langle N_v, N_v \rangle + t^2h_vh_v.
 \end{aligned}$$

Como, $\langle X_u, N \rangle = 0$, então,

$$\frac{\partial(\langle X_u, N \rangle)}{\partial u} = \langle x_{uu}, N \rangle + \langle x_u, N_u \rangle = 0.$$

Desta forma, $e + \langle X_u, N_u \rangle = 0$, isto é, $\langle X_u, N_u \rangle = -e$.

Como, $\langle X_u, N \rangle = 0$, então,

$$\frac{\partial(\langle X_u, N \rangle)}{\partial v} = \langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_u, N_v \rangle = 0.$$

Desta forma, $f + \langle X_u, N_v \rangle = 0$, vemos que, $f + \langle X_u, N_v \rangle = 0 \Rightarrow \langle X_u, N_v \rangle = -f$, e analogamente teremos, $\langle X_v, N_u \rangle = -f$, e portanto, $\langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle = -2f$.

Como, $\langle X_v, N \rangle = 0$, então,

$$\frac{\partial(\langle X_v, N \rangle)}{\partial u} = \langle X_{vu}, N \rangle + \langle X_v, N_u \rangle = 0.$$

Desta forma, $g + \langle X_v, N_v \rangle = 0$, vemos que, $\langle X_v, N_v \rangle = -g$.

Utilizando o fato de que

$$\langle X_u, N_u \rangle = -e, \quad \langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle = -2f, \quad \langle X_v, N_v \rangle = -g,$$

temos que

$$E^t = E - 2eth + t^2 \cdot R_1$$

$$F^t = F - 2fth + t^2 \cdot R_2$$

$$G^t = G - 2gth + t^2 \cdot R_3.$$

Assim

$$\begin{aligned} E^t G^t &= (E - 2eth + t^2 \cdot R_1)(G - 2gth + t^2 \cdot R_3) \\ &= EG - 2gthE + Et^2 \cdot R_3 - 2ethG + 4egt^2 h^2 - 2et^3 hR_3 + Gt^2 \cdot R_1 - 2gt^3 hR_1 + t^4 \cdot R_1 R_3 \\ &\Rightarrow E^t G^t = EG - 2th(Eg + Ge) + t^2 \cdot S_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -(F^t)^2 &= -(F - 2fth + t^2 \cdot R_2)^2 \\ -(F^t)^2 &= -F^2 - 4f^2 t^2 h^2 - t^4 \cdot R_2^2 + 4Ffth - 2Ft^2 \cdot R_2 + 4fht^3 \cdot R_2 \\ &\Rightarrow -(F^t)^2 = -F^2 + 4th(Ff) + t^2 \cdot S_2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - 2th(Eg + Ge) + t^2 \cdot S_1 - F^2 + 4th(Ff) + t^2 \cdot S_2 \\ &\Rightarrow E^t G^t - (F^t)^2 = EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + t^2 \cdot S_1 S_2 \end{aligned}$$

Como a curvatura média H é dada por

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{(EG - F^2)},$$

então

$$E^t G^t - (F^t)^2 = (EG - F^2)(1 - 4thH) + R,$$

onde, $R = t^2 \cdot S_1 S_2$.

Como, $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t^2 \cdot S_1 S_2}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} (t \cdot S_1 S_2) = 0$, então, $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{R}{t} \right) = 0$.

Se ε é suficientemente pequeno, X^t é uma superfície parametrizada regular.

Além disso, como visto na definição x, a área $A(t)$ de $X^t(\bar{D})$ é dada por

$$A(t) = \int_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} dudv$$

Dessa forma, $A(t) = \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}\sqrt{EG - F^2}} dudv$, onde, $\bar{R} = \frac{R}{(EG - F^2)}$

Assim, se ε é pequeno, A é uma função diferenciável e

$$\begin{aligned} A'(t) &= \int_{\bar{D}} \frac{1}{2} (1 - 4thH + \bar{R})^{-\frac{1}{2}} (-4hH) \sqrt{EG - F^2} dudv. \\ &= - \int_{\bar{D}} (1 - 4thH + \bar{R})^{-\frac{1}{2}} (2hH) \sqrt{EG - F^2} dudv \end{aligned}$$

e a sua derivada em $t = 0$ é (observe que, $\lim_{t \rightarrow 0} \bar{R} = 0$).

$$\begin{aligned} A'(0) &= - \int_{\bar{D}} (1)^{-\frac{1}{2}} (2hH) \sqrt{EG - F^2} dudv \\ &= - \int_{\bar{D}} 2hH \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (I) \end{aligned}$$

Estamos agora preparados para justificar o uso da palavra mínima em conexão com as superfícies com curvatura média nula.

Teorema 1. Seja $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e seja $D \subset U$ um domínio limitado em U . Então X é mínima se e somente se $A'(0) = 0$ para todo domínio D e toda variação normal de $X(\bar{D})$.

Demonstração. Se X é mínima, $H \equiv 0$ e é claro que a condição é satisfeita. Reciprocamente, suponha que a condição é satisfeita e que $H(q) \neq 0$ para algum $q \in D$. Escolha $h: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(q) = H(q)$, $hH > 0$ e h seja identicamente nula fora de uma pequena vizinhança de q . Então $A'(0) < 0$ para a variação determinada por essa função h , o que é uma contradição. ■

O resultado anterior nos diz que as superfícies mínimas caracterizam os pontos críticos do funcional área de uma superfície parametrizada. Em particular, superfícies que minimizam a área devem ser superfícies com a curvatura média nula.

Convém introduzir, para uma superfície parametrizada regular, o vetor curvatura média definido por $\mathbf{H} = HN$. O significado geométrico da direção de \mathbf{H} pode ser obtido a partir da Equação (I). De fato, escolhendo $h = H$ temos que para essa variação particular,

$$A'(0) = -2 \int_{\bar{D}} \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle \sqrt{EG - F^2} dudv < 0.$$

Isto significa que se deformarmos $X(\bar{D})$ na direção de H , a área é inicialmente decrescente.

Vamos agora obter uma outra caracterização para superfícies mínimas, a partir de um tipo de superfície parametrizada especial.

Uma superfície parametrizada regular $X = X(u, v)$ é chamada isotérmica se $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$ e $\langle X_u, X_v \rangle = 0$.

Proposição 2. Seja $X = X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e suponha que x é isotérmica. Então

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H},$$

onde $\lambda^2 = \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$.

Demonstração. Como X é isotérmica, temos que $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$ e $\langle X_u, X_v \rangle = 0$.

Derivando a primeira igualdade em relação a u , temos:

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle + \langle X_u, X_{uu} \rangle = \langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_v, X_{uv} \rangle$$

$$\Rightarrow 2\langle X_{uu}, X_u \rangle = 2\langle X_{uv}, X_v \rangle$$

$$\Rightarrow \langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle X_{uv}, X_v \rangle \quad (II)$$

Derivando a segunda igualdade em relação a v , temos:

$$\langle X_u, X_v \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle X_{vu}, X_v \rangle = -\langle X_u, X_{vv} \rangle \quad (III)$$

De (II) e (III), temos que:

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = -\langle X_u, X_{vv} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle X_{uu}, X_u \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle = 0.$$

Logo,

$$\langle X_{uu} + X_{vv}, X_u \rangle = 0.$$

Analogamente, podemos obter que

$$\langle X_{uu} + X_{vv}, X_v \rangle = 0.$$

Como, $X_{uu} + X_{vv}$ é perpendicular a X_u e também a X_v . Consequentemente, temos que $X_{uu} + X_{vv}$ é paralelo a N .

Como X é isotérmica, e

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 g - 0 + \lambda^2 e}{\lambda^2 \lambda^2 - 0} \Rightarrow H = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 (g + e)}{\lambda^4} \\ &\Rightarrow H = \frac{1}{2} \frac{g + e}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$2\lambda^2 H = g + e = \langle X_{uu} + X_{vv}, N \rangle.$$

Como, $\mathbf{H} = HN$ temos que, $\langle \mathbf{H}, N \rangle = \langle HN, N \rangle$ e, desta forma, $\langle \mathbf{H}, N \rangle = H \langle N, N \rangle$, mas $\langle N, N \rangle = \|N\|^2 = 1$, segue que $\langle \mathbf{H}, N \rangle = H$.

Assim,

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 \langle \mathbf{H}, N \rangle &= \langle X_{uu} + X_{vv}, N \rangle \\ \Rightarrow \langle 2\lambda^2 \mathbf{H}, N \rangle &= \langle X_{uu} + X_{vv}, N \rangle. \end{aligned}$$

Desta forma, vemos que

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H}. \blacksquare$$

Lembramos que uma função $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, é dita harmônica se $f_{xx} + f_{yy} = 0$. Com esta definição temos o seguinte corolário, que dá uma caracterização para as superfícies mínimas a partir de suas funções coordenadas.

Corolário 1. Seja $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ uma superfície parametrizada regular e suponha que X é isotérmica. Então X é mínima se e somente se as suas funções coordenadas x, y, z são harmônicas.

Neste momento, veremos uma nova parametrização para o helicóide, esta sendo isotérmica, de modo a aplicar o resultado anterior.

Exemplo 5. Seja $X(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au)$, uma nova parametrização do Helicóide. Segue que:

$$X_u = (-a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, a),$$

$$X_v = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0).$$

Notamos que

$$\begin{aligned} E = \langle X_u, X_u \rangle &= a^2 \sinh^2 v \sin^2 u + a^2 \sinh^2 v \cos^2 u + a^2 \\ &= a^2 (\sinh^2 v + 1) = a^2 \cosh^2 v, \end{aligned}$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -a^2 \cosh v \sinh v \cos u \sin u + a^2 \cosh v \sinh v \cos u \sin u = 0,$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \cosh^2 v \cos^2 u + a^2 \cosh^2 v \sin^2 u + 0 = a^2 \cosh^2 v.$$

Desta forma, vemos que esta é uma parametrização isotérmica para o helicóide.

Além disso, $X_{uu} = (-a \sinh v \cos u, -a \sinh v \sin u, 0)$ e $X_{vv} = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, 0)$.

Como X é isotérmica e $X_{uu} + X_{vv} = 0$, segue do Corolário 1 que X é uma superfície mínima.

2.7 EXEMPLOS DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS

Nesta seção, veremos outros exemplos de superfícies mínimas, começando com o cálculo da curvatura média de algumas clássicas superfícies parametrizadas.

2.7.1 O plano

Seja $X(u, v) = (u, v, Au + Bv + C)$, a superfície parametrizada do plano, onde A, B e C são números reais.

Figura 3 - Mostra da representação do plano



Fonte: Extraída do site Math.net², 2021.

Desta forma,

$$X_u = (1, 0, A),$$

$$X_v = (0, 1, B).$$

Calculando o produto vetorial $X_u \times X_v$, temos:

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & B \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(-A) - \vec{j}(B) + \vec{k}(0) \\ &= (-A, -B, 0). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{A^2 + B^2 + 0^2} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

e, com isto

$$\vec{N} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \left(\frac{-A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{0}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right).$$

² Disponível em: <<https://www.math.net/plane>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

Observamos que os coeficientes da primeira forma fundamental serão dados por

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + 0 + A^2 = 1 + A^2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0 + 0 + AB = AB$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 0 + 1 + B^2 = 1 + B^2$$

Além disso, como $X_{uu} = (0,0,0)$; $X_{uv} = (0,0,0)$; $X_{vv} = (0,0,0)$, os coeficientes da segunda forma fundamental serão dados por

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = 0$$

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0$$

$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = 0$$

Portanto a curvatura Gaussiana do plano é $K = 0$

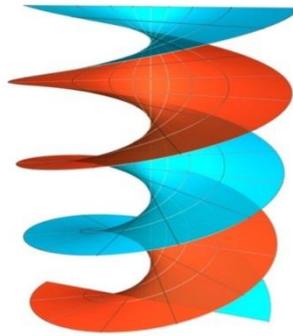
Além disso, a curvatura Média será dada por

$$H = \frac{1(1+A^2).0 - 2AB.0 + (1+B^2).0}{2((1+A^2)(1+B^2) - AB^2)} = 0$$

Como $H = 0$, o plano é um exemplo de superfície mínima.

2.7.2 O Helicóide

Como calculado, nas seções anteriores o *helicóide* é um exemplo de superfície mínima. A imagem que segue é uma ilustração de um helicóide.

Figura 4 - Mostra da representação do helicóide

Fonte: Extraída da página na internet Minimalsurfaces.blog, 2021³.

2.7.3 O Catenóide

Seja $X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av)$, a superfície parametrizada do Catenóide, onde A, B e C são números reais.

Desta forma,

$$X_u = (-a \cosh v \sin u, a \cosh v \cos u, 0),$$

$$X_v = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, a).$$

Calculando o produto vetorial $X_u \times X_v$, temos:

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \cosh v \sin u & a \cosh v \cos u & 0 \\ a \sinh v \cos u & a \sinh v \sin u & a \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(a^2 \cosh v \cos u) - \vec{j}(-a^2 \cosh v \sin u) \\ &\quad + \vec{k}(-a^2 \sinh v \cosh v \sin^2 u - a^2 \sinh v \cosh v \cos^2 u) \\ &= \vec{i}(a^2 \cosh v \cos u) - \vec{j}(-a^2 \cosh v \sin u) + \vec{k}(-a^2 \sinh v \cosh v). \end{aligned}$$

Assim temos o vetor:

³ Disponível em: <<https://minimalsurfaces.blog/home/repository/singly-periodic/the-helicoid>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

2.7 EXEMPLOS DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS

$$X_u \times X_v = (a^2 \cosh v \cos u, a^2 \cosh v \sin u, -a^2 \sinh v \cosh v).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\| &= \sqrt{a^4 \cosh^2 v \cos^2 u + a^4 \cosh^2 v \sin^2 u + a^4 \sinh^2 v \cosh^2 v} = \\ &= \sqrt{a^4 \cosh^2 v (1 + \sinh^2 v)} = \sqrt{a^4 \cosh^4 v} = a^2 \cosh^2 v \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \left(\frac{a^2 \cosh v \cos u}{a^2 \cosh^2 v}, \frac{a^2 \cosh v \sin u}{a^2 \cosh^2 v}, \frac{-a^2 \sinh v \cosh v}{a^2 \cosh^2 v} \right) \\ &= \left(\frac{\cos u}{\cosh v}, \frac{\sin u}{\cosh v}, \frac{-\sinh v}{\cosh v} \right). \end{aligned}$$

Observamos que os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cosh^2 v \sin^2 u + a^2 \cosh^2 v \cos^2 u =$$

$$\Rightarrow E = \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cosh^2 v$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -a^2 \cosh v \sinh v \cos u \sin u + a^2 \cosh v \sinh v \cos u \sin u$$

$$\Rightarrow F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \sinh^2 v \cos^2 u + a^2 \sinh^2 v \sin^2 u + a^2$$

$$= a^2 (\sinh^2 v (\cos^2 u + \sin^2 u) + 1) = a^2 (\sinh^2 v + 1)$$

$$\Rightarrow G = \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \cosh^2 v$$

Além disso, como $X_{uu} = (-a \cosh v \cos u, -a \cosh v \sin u, 0)$;

$$X_{uv} = (-a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, 0);$$

$$X_{vv} = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0)$$

$$e N = \left(\frac{\cos u}{\cosh v}, \frac{\sin u}{\cosh v}, \frac{-\sinh v}{\cosh v} \right).$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental serão dados por

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{-a \cosh v \cos^2 u}{\cosh v} + \frac{-a \cosh v \sin^2 u}{\cosh v}$$

$$\Rightarrow e = \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{-a \cosh v}{\cosh v} = -a$$

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{-a \sinh v \sin u \cos u}{\cosh v} + \frac{a \sinh v \cos u \sin u}{\cosh v}$$

$$\Rightarrow f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0$$

$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{a \cosh v \cos^2 u}{\cosh v} + \frac{a \cosh v \sin^2 u}{\cosh v}$$

$$\Rightarrow g = \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{a \cosh v}{\cosh v} = a.$$

Portanto a curvatura gaussiana do catenóide é

$$K = \frac{-a^2}{a^4 \cosh^4 v} = \frac{-1}{a^2 \cosh^4 v}.$$

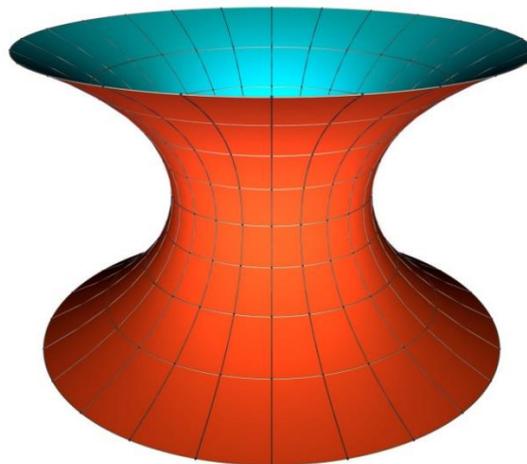
Além disso, a curvatura média será dada por

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}$$

$$\Rightarrow H = \frac{a^3 \cosh^2 v - a^3 \cosh^2 v}{2a^4 \cosh^4 v} = 0.$$

Como $H = 0$, o catenóide é um exemplo de superfície mínima.

Figura 5 - Mostra a representação do catenóide



Fonte: Extraída da página na internet Minimalsurfaces.blog, 2021⁴.

2.7.4 Superfície Mínima de Enneper

A próxima superfície foi descoberta em 1871 por Alfred Enneper (1830-1885) e por esta razão é conhecida como superfície de Enneper.

Seja $X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$ esta superfície parametrizada, onde $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Desta forma,

$$X_u = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u),$$

$$X_v = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v).$$

Calculando o produto vetorial $X_u \times X_v$, temos:

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 - u^2 + v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1 - v^2 + u^2 & -2v \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-2uv^2 - 2u - 2u^3) - \vec{j}(-2v - 2v^3 - 2u^2v) + \vec{k}(1 - u^4 - v^4 - 2u^2v^2)$$

$$X_u \times X_v = (-2uv^2 - 2u - 2u^3, 2v + 2v^3 + 2u^2v, 1 - u^4 - v^4 - 2u^2v^2).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\| &= \sqrt{(-2uv^2 - 2u - 2u^3)^2 + (2v + 2v^3 + 2u^2v)^2 + (1 - u^4 - v^4 - 2u^2v^2)^2} \\ &= \sqrt{4u^2(u^2 + v^2 + 1)^2} = 2u(u^2 + v^2 + 1) \end{aligned}$$

e, com isto

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \left(\frac{-u^2 - v^2 - 1}{(u^2 + v^2 + 1)}, \frac{v(u^2 + v^2 + 1)}{u(u^2 + v^2 + 1)}, \frac{(u^2 + v^2 + 1)(-u^2 - v^2 + 1)}{2u(u^2 + v^2 + 1)} \right) \\ &\Rightarrow \vec{N} = \left(-1, \frac{v}{u}, \frac{(-u^2 - v^2 + 1)}{2u} \right). \end{aligned}$$

Observamos que os coeficientes da primeira forma fundamental serão dados por

⁴ Disponível em: <<https://minimalsurfaces.blog/home/repository/singly-periodic/the-helicoid>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

2.7 EXEMPLOS DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS

$$\begin{aligned} E = \langle X_u, X_u \rangle &= 1 + u^4 + v^4 - 2u^2 + 2v^2 - 2u^2v^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 \\ &= u^4 + v^4 + 2v^2 + 2u^2 + 2u^2v^2 + 1 \end{aligned}$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 2uv - 2u^3v + 2uv^3 + 2uv - 2uv^3 + 2u^3v - 4uv = 0$$

$$\begin{aligned} G = \langle X_v, X_v \rangle &= 4u^2v^2 + 1 + v^4 + u^4 - 2v^2 + 2u^2 - 2u^2v^2 + 4v^2 \\ &= u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + 1. \end{aligned}$$

Além disso, como

$$X_{uu} = (-2u, 2v, 2), X_{uv} = (2v, 2u, 0) \text{ e } X_{vv} = (2u, -2v, -2)$$

$$\text{e } \vec{N} = \left(-1, \frac{v}{u}, \frac{(-u^2 - v^2 + 1)}{2u} \right),$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental serão dados por

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \left(2u + \frac{2v^2}{u} + \frac{(-u^2 - v^2 + 1)}{u} \right) = \frac{u^2 + v^2 + 1}{u},$$

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = (-2v + 2v) = 0,$$

e

$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \left(-2u - \frac{2v^2}{u} - \frac{(-u^2 - v^2 + 1)}{u} \right) = -\frac{(u^2 + v^2 + 1)}{u}.$$

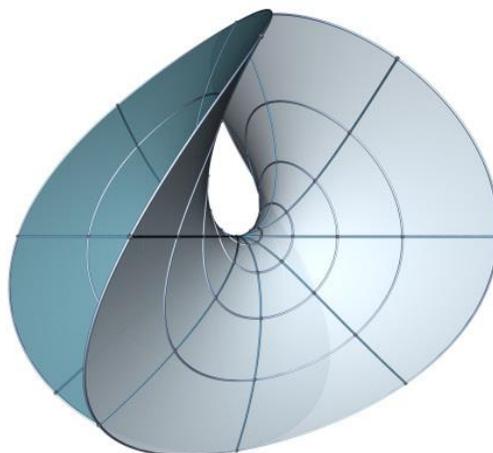
Portanto a curvatura média será dada por

$$H = \frac{\left[-\frac{(u^2 + v^2 + 1)}{u} \right] + \left[\frac{u^2 + v^2 + 1}{u} \right]}{2(u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + 1)} = 0.$$

Como $H = 0$, a superfície de Enneper é um exemplo de superfície mínima.

Outra forma de verificar isso é notando que X é uma parametrização isotérmica tal que $X_{uu} + X_{vv} = 0$ (Corolário 1).

Figura 6 - Mostra da representação da superfície Enneper



Fonte: Extraída do blog [Minimalsurfaces⁵](#), 2021.

2.7.5 Outros Exemplos de Superfícies Míminas

Nesta subseção mostraremos uma pequena classe de exemplos dentre muitas superfícies mínimas conhecidas atualmente. O objetivo aqui é apenas uma rápida visualização, sem maiores aprofundamentos teóricos, para que o leitor possa apreciar e se motivar a mergulhar nas inúmeras possibilidades que fazem parte desse universo das superfícies mínimas.

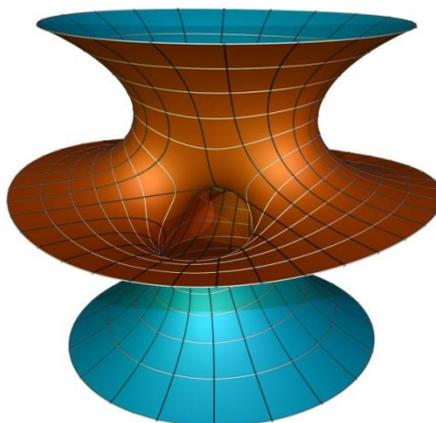
a) Superfície de Costa

Esta superfície merece um destaque especial. Seja, por seu tipo, pelo ano no qual foi descoberta e também por seu autor. Em sua tese de doutorado no IMPA, o brasileiro Celso José da Costa, foi responsável por uma das maiores descobertas da geometria no campo das superfícies mínimas, em 1982, a quarta superfície mínima

⁵ Disponível em: <<https://minimalsurfaces.blog/home/repository/spheres/enneper-surface/>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

completa e mergulhada, a então batizada de *Superfície Costa*. Para se ter ideia da importância deste feito a terceira superfície dessa classe chamada Helicóide foi apresentada em 1776, por Jean Baptiste Meusnier. Com ajuda de programas digitais, em 1984, D. Hoffman e W. W. Meeks, da Universidade de Massachusetts, obtiveram a imagem da inovadora superfície mínima. A nova prova, invalidou a teoria defendida por muitos matemáticos, ao longo de mais de dois séculos, que afirmavam existir apenas três superfícies mínimas desse tipo, o plano, o catenóide e o helicóide.

Figura 7 - Mostra da representação da superfície de Costa



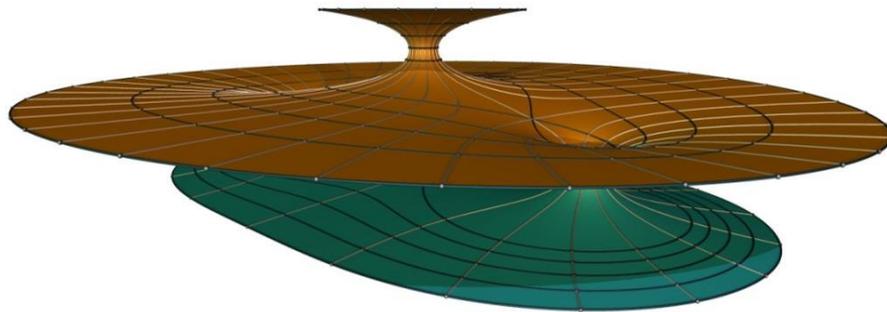
Fonte: Extraída do repositório do blog *Minimalsurfaces*, 2021⁶.

b) Costa-Hoffman-Karcher-Meeks Tori

Representa uma variação da superfície Costa. Apresentada em 1987 por William Meeks e David Hoffman.

⁶ Disponível em: <<https://minimalsurfaces.blog/home/repository>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

Figura 8 - Mostra da representação da superfície Costa-Hoffman-Karcher-Meeks Tori

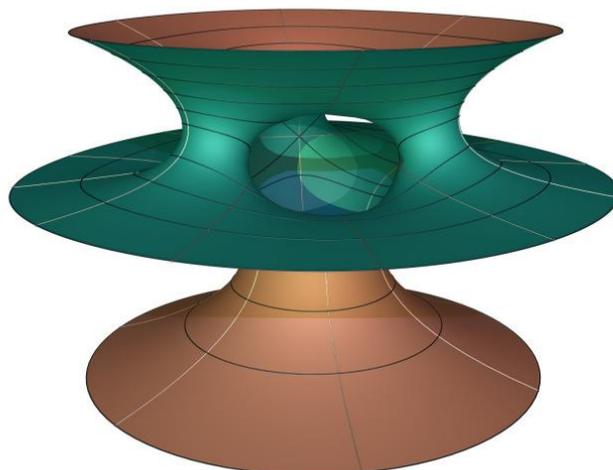


Fonte: Extraída do repositório do blog Minimalsurfaces, 2021.

c) Superfícies Costa-Hoffman-Meeks simetrizadas

Representa mais uma variação da superfície Costa. Apresentada por David Hoffman e Hermann Karcher em 1995.

Figura 9 - Mostra da representação da superfície Costa-Hoffman -Meeks simetrizadas



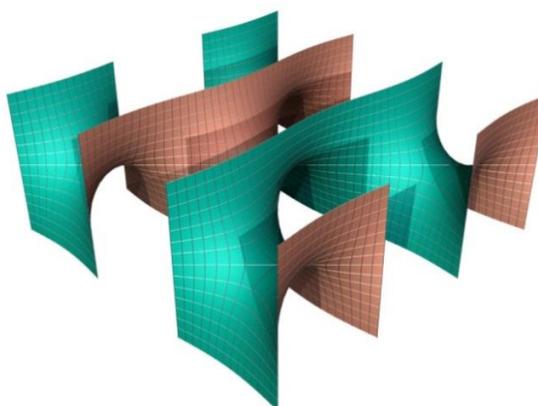
Fonte: Extraída do repositório do blog Minimalsurfaces, 2021.

2.7 EXEMPLOS DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS

d) Superfície Duplamente Periódica de Scherk

Em 1830, Heinrich Ferdinand Scherk publicou um artigo com novas superfícies mínimas.

Figura 10 - Mostra da representação da superfície de Scherk

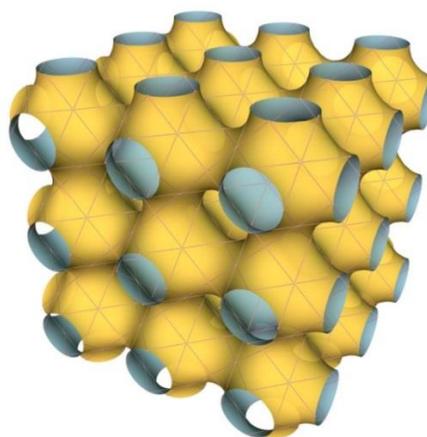


Fonte: Extraída do repositório do blog Minimalsurfaces, 2021.

e) Schwarz P-superfície

Em 1867, Hermann Amandus Schwarz apresenta Superfície Primitiva ou Superfície P.

Figura 11 - Mostra da representação da superfície de Schwarz



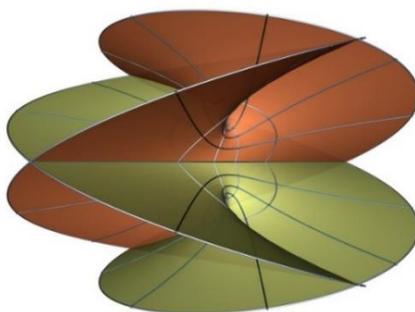
Fonte: Extraída do repositório do blog Minimalsurfaces, 2021.

2.7 EXEMPLOS DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS

- f) Esfera com duas extremidades de índice dois

Descoberta por Francisco López em 1992.

Figura 12 - Mostra a superfície Esfera com extremidade índice dois

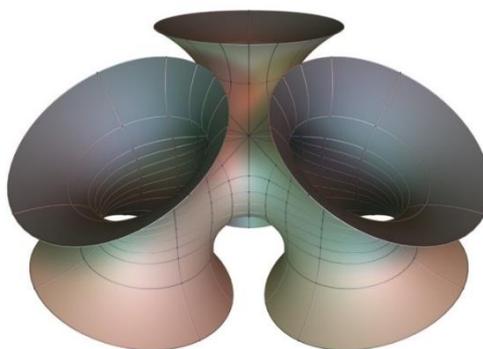


Fonte: Extraída do repositório do blog Minimalsurfaces, 2021.

- g) K-Noids prismáticos

São formados a partir de um prisma regular. Sua construção resulta na junção de vários Catenóides.

Figura 13 - Mostra a superfície K-Noids prismáticos

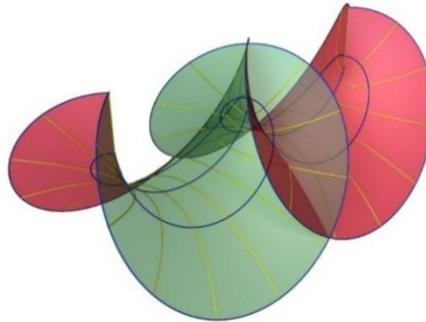


Fonte: Extraída do repositório do blog Minimalsurfaces, 2021.

h) Superfície Catalan

Descoberta por Eugène Charles Catalan, em 1855.

Figura 14 - Mostra a superfície Catalan

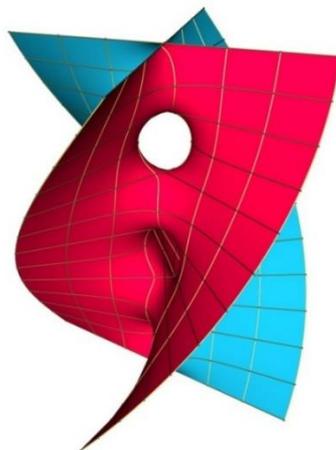


Fonte: Extraída do repositório do blog *Minimalsurfaces*, 2021.

i) Superfície Helicoidal Karcher-Scherk

Em 1988, foi descrita por Hermann Karcher, uma variação da Superfície de Scherk e do Helicóide.

Figura 15 – Mostra a superfície Helicoidal Karcher-Scherk



Fonte: Extraída do repositório do blog *Minimalsurfaces*, 2021.

Capítulo 3

Aplicações na arquitetura

As superfícies mínimas são associadas a vários ramos de estudo em diferentes áreas, como a matemática, física, química, biologia e arquitetura.

Este capítulo tem como objetivo fazer a conexão entre as superfícies mínimas e suas aplicações em arquitetura, mostrando alguns exemplos das influências arquitetônicas e as inspirações matemáticas por trás delas.

No sentido das construções, por exemplo, um questionamento muito relevante se refere à como encontrar superfícies que apresentem economia de material. Ou seja, qual seria a superfície de menor área responsável para cobrir determinado espaço e manter a estabilidade estrutural? E, além disso, qual será a forma de tal superfície, seu design? Qual seria o contorno necessário para formá-la?

Como apresentado no **Teorema 1**, as superfícies mínimas estão diretamente ligadas à essa busca pela minimização da área. Como visto no capítulo anterior, a matemática por trás desta resposta não é trivial. Por outro lado, a natureza nos mostra algumas respostas para tais questionamentos. Como por exemplo, no crescimento de plantas, na formação da catenária através da gravidade e nas películas de sabão naturalmente formadas em um determinado contorno. Com respeito a geometria das películas de sabão, o físico belga Joseph Antoine Ferdinand Plateau (1801-1883) foi pioneiro na realização deste tipo de estudo. Em seus experimentos, ele mostrou que a película formada ao mergulhar um contorno de arame em uma solução de água e sabão é a superfície de menor área possível, e o desafio de se provar matematicamente tais superfícies ficou conhecido como problema de Plateau. Seu trabalho possibilitou a aplicação da teoria das superfícies mínimas em diferentes áreas do conhecimento, entre elas, a arquitetura. De acordo com Pottman et al. (2007, p. 647, **grifos do autor**),

[...] **Superfícies mínimas.** Um dos mais antigos e famosos problemas de otimizações geométricas para superfícies é o problema de Plateau, que foi formulado pelo matemático francês J. L. Lagrange (1769), mas nomeado após pelo físico belga J. Plateau - quem o apresentou em 1866.

Dada uma curva fechada suave c sem auto interseções, encontre o retalho de superfície com curva limite c que tem a menor área de superfície A . A superfície ótima S é chamada de superfície mínima. Podemos observar uma superfície mínima como a forma de uma membrana de sabão através de um fio fechado c . Negligenciando a gravidade, tensão superficial aplicada a membrana de sabão atingirá a forma com o mínimo de superfície [...].

A natureza segue os princípios de otimização, economia de material, equilíbrio e interação com o ambiente exterior. Nela, as formas são “projetadas” para resistir às forças do mundo exterior ao mesmo tempo em que economiza substâncias, sem perder a beleza. Assim, a inspiração que muitos arquitetos buscam na natureza, vem de maneira espontânea para àqueles que buscam tais conceitos em seus projetos e a ponte para essa relação é a geometria diferencial.

Bertol (1994, p. 15-17) faz a relação de formas naturais e artificiais. As formas podem ser classificadas através de seus elementos e com isso, podemos fazer a união de classes que a princípio parecem completamente diferentes. As formas encontradas na natureza são caracterizadas pela transformação contínua. A autora destaca alguns exemplos como, crescimento de organismos, o fluxo de água, as formas de nuvens e chapas. Em seu estudo das formas artificiais ela sugere um paralelo entre as formas feitas pelo homem e as formas naturais por meio de suas propriedades geométricas. Segundo o autor (1994, p. 17),

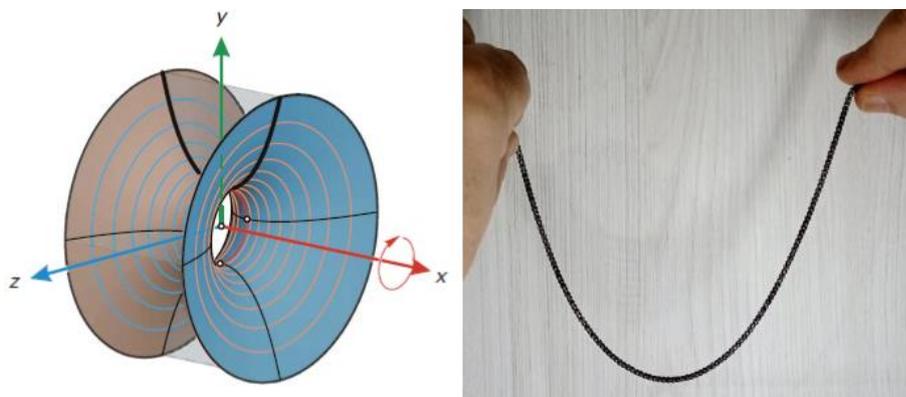
[...] Formas na natureza (para usar Exemplos de D'Arcy Thompson) como 'as ondas do mar, as pequenas ondulações na costa, a curva extensa da baía arenosa entre os promontórios, o contorno das colinas, a forma das nuvens', e o próprio corpo humano, ainda podem ser interpretados por meio de modelos geométricos. As células são moldadas como superfícies mínimas, as conchas têm configurações espirais e alguns esqueletos se assemelham a tetraedros e malhas hexagonais [...].

Sendo assim, este capítulo está dividido em quatro seções, nas quais tentamos mostrar tais conexões. A primeira, é dedicada ao amplo uso da catenária na arquitetura, onde daremos alguns exemplos históricos e atuais. Na segunda, mostraremos como alguns arquitetos do século XX embalados pelas novas tecnologias pós revolução industrial, buscando novas formas e superfícies orgânicas fizeram uso das superfícies mínimas. Daremos, na terceira seção, um destaque especial ao arquiteto Frei Otto e seus experimentos com película de sabão. E por fim, mostraremos como a arquitetura atual vem trabalhando com as superfícies mínimas auxiliada pela programação digital.

3.1 A CATENÁRIA NA ARQUITETURA

Esta seção é dedicada ao uso da catenária na arquitetura, temos, então, uma aplicação indireta das superfícies mínimas, uma vez que a catenária é a curva geradora do catenóide, a única superfície mínima de revolução e as propriedades de estabilidade estão presentes em ambas. Sua forma é considerada como a forma de um arco ideal. Na matemática, tal curva é representada por funções hiperbólicas. Contudo, esta curva pode ser obtida de maneira prática e simples. Usando uma corda com dois pontos de apoio de tal forma que sua distância seja menor que a parte da corda entre eles, sob a ação da gravidade a forma de equilíbrio é alcançada e sua inversão tem como resultado o arco perfeito para as dimensões experimentadas (POTTMANN, 2007, p. 652).

Figura 16 - Mostra a catenária na formação do catenóide e uma representação prática.

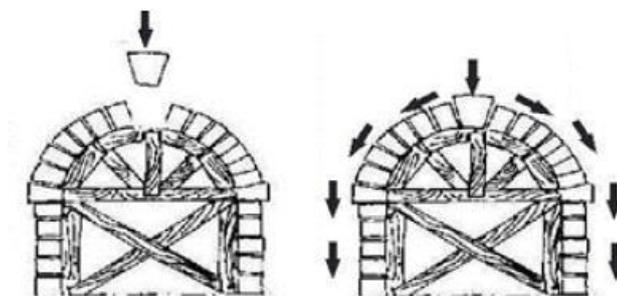


Fonte: Imagem à esquerda extraída de Pottmann, 2007, p. 652. Imagem à direita, elaboração própria, 2021.

Tais propriedades são exploradas nas construções há muitos séculos. Glancey (2000, p. 30) explica que os romanos conquistaram o mundo ocidental e ligaram seu império por meio de estradas e grandes aquedutos. Sua engenharia foi superior e permaneceu insuperável muitos séculos após a queda do Império, em 476 d.C. O Panteão, um dos símbolos de sua arquitetura, era um edifício vasto: sua cúpula formada por catenárias, de 43,2 m de diâmetro, foi a mais ambiciosa do mundo até Brunelleschi erguer a sua na catedral de Florença entre 1420 e 1436. Eles utilizaram os arcos em larga escala, sendo as abóbodas, cilindros e cúpulas suas derivações

mais conhecidas. O arco romano funciona através de um sistema de distribuição de cargas que convergem das aduelas para os pilares, travado pela colocação final de uma pedra-chave no meio do vão. Com isso permitem uma melhor distribuição do peso e maiores vãos, se comparados com o sistema de colunas e pilares dos gregos.

Figura 17 - Mostra do sistema de distribuição de carga do arco romano



Fonte: Blog O Baricentro da Mente⁷, 2021.

Figura 18 – Mostra o Panteão, Roma, Itália. E aqueduto romano, Tarragona, na Espanha.



Fonte: Primeira imagem à esquerda de António Alfarroba⁸, 2009. Segunda imagem à direita extraída do site THE TITI TUDORANCEA BULLETIN⁹, 2021.

⁷ Disponível em: <<https://www.obaricentrodamente.com/2019/09/matematica-engenharia-e-arte>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

⁸ Disponível em: <<https://www.flickrriver.com/search/italian/>>. Acesso em: 08 jul. 2021.

⁹ Disponível em: <https://www.titudorancea.com/z/pont_du_gard.htm>. Acesso em: 08 jul. 2021.

A catenária é usada, nos dias atuais, nas estruturas de pontes e viadutos. Mas, diferentemente dos romanos, normalmente fazendo uso de materiais metálicos. Desde a Revolução Industrial, quando o ferro e o aço foram amplamente utilizados na engenharia e na arquitetura. A paisagem urbana mudou para sempre com a chegada da revolução industrial, a construção civil foi impulsionada pelas fábricas, pontes e ferrovias (GLANCEY, 2000, p. 144-145). Glancey (2000, p. 139-154) explica que os arquitetos, do século XIX, buscaram descobrir o que fazer com os novos materiais, novos conceitos de cidade e novas tecnologias. E ressalta que o desejo deles é de seguir adiante, em alguns casos eles exploram o passado, mas o reformulam para novos fins.

Figura 19 – Mostra ponte com arcos de ferro fundido, construída em 1796, Wearmouth, na Inglaterra. E o uso dos arcos na torre Eiffel, Paris, 1887.



Fonte: Primeira imagem à esquerda extraída do site do CEAM - UFMG¹⁰. Segunda imagem à direita de Getty Images, 1900, hospedada no site hypeness¹¹, 2020.

No final do século XIX, o arquiteto espanhol Antoni Gaudí, utilizava a catenária em seus projetos através de estudos feitos com construções de grandes maquetes utilizando correntes.

¹⁰ Disponível em: <<https://www.sites.google.com/site/acoufmg/home/historico>>. Acesso em: 08 jul. 2021.

¹¹ Disponível em: <<https://www.hypeness.com.br/2020/08/a-historia-de-alguns-projetos-concorrentes-da-torre-eiffel/>>. Acesso em: 08 jul. 2021.

Outros exemplos da utilização de arcos catenários, atualmente, estão na arquitetura das estruturas tensionadas que vêm sendo amplamente utilizadas nas construções de arenas esportivas, aeroportos, centro de convenções e outros projetos de grande porte, usando inúmeras formas e técnicas construtivas com os mais variados materiais.

Figura 20 – Mostra a maquete de correntes suspensas de Gaudí na Casa Milà. O Gateway Arch (1963–1965) em St. Louis de Eero Saarinen. E o uso da catenária na ponte Akashi Kaikyo, no Japão



Fonte: Primeira imagem à esquerda extraída do site Não Trivial¹², 2021. Segunda imagem à direita extraída de Pottmann, 2003, p.653. Terceira imagem posicionada abaixo, extraída do blog PET ENG CIVIL UFPR, 2021¹³.

¹² Disponível em: <<https://naotrivial.wordpress.com/2017/03/29/a-catenaria-gaudi-e-confusoes-de-nomenclatura/>>. Acesso em: 08 jul. 2021.

¹³ Disponível em: <<http://petcivil.blogspot.com/2018/03/akashi-kaikyo-maior-ponte-suspensa-do.html>>. Acesso em: 08 jul. 2021.

3.2 ARQUITETOS NOTÁVEIS NA UTILIZAÇÃO DE SUPERFÍCIES ORGÂNICAS NO SÉCULO XX

Nesta seção, veremos alguns dos notáveis arquitetos que na busca pela inovação e beleza são considerados mestres na utilização de superfícies não triviais, que chamaremos de superfície orgânica, pois as principais inspirações eram buscadas nas curvas e superfícies da natureza, as quais se incluem entre elas, as superfícies mínimas.

Na natureza, encontramos superfícies mínimas como o helicóide, o catenóide, giróides, lidinóides e outras. Sendo assim, esses arquitetos também utilizaram em alguns momentos as propriedades e formas destas superfícies que proporcionam um menor gasto de material, estão em equilíbrio, possuem estabilidade e o resultado visual é em geral plasticamente exuberante, propriedades ideais em se tratando de arquitetura.

Figura 21 – Mostra a comparação de superfícies mínimas e formas encontradas na natureza.



Fonte: Superior: Imagem à esquerda extraída do site ppbio¹⁴. Imagem ao centro extraída do site pt.wikipedia¹⁵. Imagem à direita extraída do site tudoporemail¹⁶. Inferior: Imagem à esquerda e ao centro extraída do repositório do blog Minimalsurfaces, 2021. Imagem à direita autoria própria.

¹⁴ Disponível em: < <https://ppbio.inpa.gov.br/fungoteca/paginainicial>>. Acesso em: 08 jul. 2021.

¹⁵ Disponível em: < <https://pt.wikipedia.org/wiki/Simetria> >. Acesso em: 12 jul. 2021.

¹⁶ Disponível em: < <https://www.tudoporemail.com.br/content.aspx?emailid=14669> >. Acesso em: 12 jul. 2021.

Figura 22 - Mostra a comparação de superfícies mínimas e formas encontradas na natureza.



Fonte: Imagem à esquerda extraída do site twitter¹⁷. Imagem ao centro extraída do site escoladebotanica¹⁸. Imagem à direita extraída do repositório do blog Minimalsurfaces, 2021.

A arquitetura contemporânea auxiliada pela tecnologia e programas de computadores, de acordo com Kolarevic (2003, p. 11), “configuram formas que podem ser não tipológicas, descontínuas, amorfas, não perspectivas, a-históricas, mas não sem precedentes”. O autor (2003, p. 04) destaca que no Barroco os arquitetos tentavam formas novas a fim de inovar e contrapor-se às linhas retas. As formas mais orgânicas foram valorizadas neste período e também posteriormente, nos séculos seguintes. Já no início do século XX, esta tendência fica ainda mais evidente com Gaudí, o expressionismo da década de 1920, o movimento *Art Nouveau*, arquitetos do período modernista, tais como Erich Mendelsohn com *Einsteinturm*, em 1921, Eero Saarinen com o Terminal TWA, em 1962, o brasileiro Oscar Niemeyer com os projetos em Brasília no final da década de 1950, servindo como fontes de inspiração para os arquitetos contemporâneos e para as futuras gerações.

Sobre o modernismo, Glancey (2000, p. 186) enfatiza a liberdade estética interna e externa, desvinculada da associação com regimes autocráticos, identificados por uma arquitetura pesada e repleta de simbolismos.

Kolarevic (2003, p. 04) expressa que, na vanguarda dos anos 1960, os modernistas com seus designs utópicos, quebraram a monotonia ortogonal e linear.

¹⁷ Disponível em: < <https://twitter.com/robsongfreira/status/1273638000195502082> >. Acesso em: 11 jul. 2021.

¹⁸ Disponível em: < <https://www.escoladebotanica.com.br/post/cipo-chumbo> >. Acesso em: Acesso em: 9 jul. 2021.

Eles foram responsáveis pelo surgimento de uma nova geometria desconhecida e questionada na arquitetura. Conscientemente, eles evitavam a carência de forma na qual o *Art nouveau* teria se perdido.

3.2.1 Antoni Gaudí (1852-1926)

Como já mencionado anteriormente, a arquitetura atual busca harmonizar-se com a natureza. Neste sentido, o maior influenciador desta tendência foi o renomado arquiteto espanhol Antoni Gaudí. Suas obras mais famosas estão na cidade de Barcelona.

A obra de Gaudí ficou marcada pelo uso das formas orgânicas, onde na busca pela beleza ele utilizou inúmeras formas que remetem às superfícies mínimas, como o helicóide e o catenóide.

Para Glancey (2000, p. 168), “[...] A obra de Gaudí é única. É extrema, só que suas estruturas são lógicas e a geometria aparentemente estranha estão enraizados na natureza. De certa maneira, ele estava tentando criar uma arquitetura que ligasse os homens a Deus e à natureza [...]”.

A obra de Gaudí apresenta-se com grandes edifícios esculturais, com formas geométricas orgânicas complexas rigorosamente projetadas por meio de seu próprio método inventado de modelar curvas catenárias suspendendo cadeias interligadas (KOLAREVIC, 2003, p. 04). E completa Glancey (2000, p. 169) afirmando que, “[...] a linha reta pertence ao homem, a curva, a Deus [...]”.

Glancey (2000, p. 168) diz em suas palavras que “[...] renunciou a todos os trabalhos no fim da vida para poder se dedicar à sua obra prima, a Igreja da Sagrada Família, em Barcelona (a partir de 1882). Não existe nenhum outro edifício como esse em nenhuma parte do mundo [...]”.

Figura 23 –Mostra algumas estruturas hecoidais das obras de Gaudí, em Barcelona, Espanha.



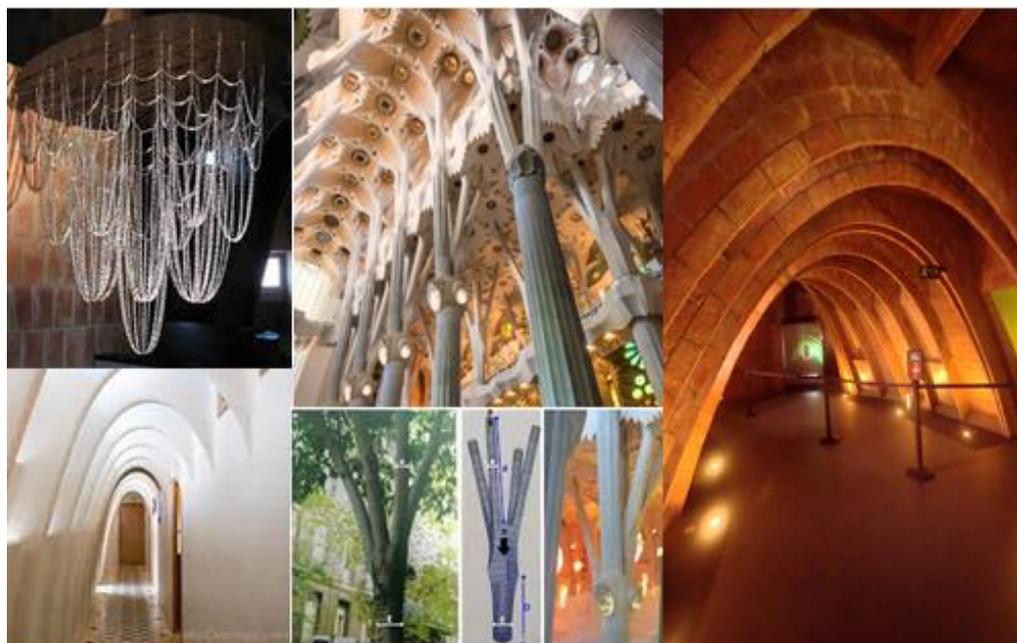
Fonte: Superior: Imagem à esquerda extraída do site flickr¹⁹. Imagem ao centro extraída do site valor²⁰. Imagem à direita extraída do blog Minimalsurfaces, 2021. Inferior: : Imagem à esquerda e a direita extraída do site pt.dreamstime²¹.

¹⁹ Disponível em: < <https://www.flickr.com/photos/darrellg/4104797739>> Acesso em: 16 jul. 2021.

²⁰ Disponível em: < <https://valor.globo.com/eu-e/noticia/2012/05/08/moto-continuo.ghtml>>. Acesso em: 16 jul. 2021.

²¹ Disponível em: <https://pt.dreamstime.com/foto-editorial-chamin%C3%A9s-de-gaudi-image60171421>. Acesso em: 16 jul. 2021.

Figura 24 - Mostra o estudo e o uso da catenária e colunas orgânicas nas obras de Gaudí em Barcelona, Espanha.



Fonte: Imagens extraídas do site jrzetina²².

Figura 25 - Mostra da Igreja da Sagrada Família em Barcelona e seus estudos com catenárias - Espanha, projeto de Gaudí.



Fonte: Cavalcanti, 2020, hospedado no portal da Revista Istoé Dinheiro²³, na internet, 2021.

²² Disponível em: <<https://www.jrzetina.com/438260442>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

²³ Disponível em: <<https://www.istoedinheiro.com.br/nas-paginas-de-gaudi>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

3.2.2 Eero Saarinen (1910-1961)

Eero Saarinen (1910-1961) é um importante nome da segunda geração de modernistas. Este arquiteto finlandês ficou famoso por seus projetos com efeitos visuais exuberantes e referências históricas, como no uso de arcos (Ver Figura 20).

Glancey (2000, p. 184) sobre o modernismo da segunda metade do século XX, nos Estados Unidos, destaca que não se trata de um estilo, e sim de uma maneira de projetar e construir, que juntou a energia e a habilidade da indústria norte-americana de fazer edificações pré-fabricadas sob a influência de arquitetos e projetistas europeus, entre outros, Saarinen.

Kolarevic (2003, p. 04) comenta que Eero Saarinen dizia que sua maior motivação para o uso de superfícies plásticas e orgânicas é a estética, mas que seu ressurgimento, naquela época, se deu com as novas técnicas construtivas. Na visão do autor (2003), Eero era cauteloso quando comparado com outros modernistas.

No Terminal TWA, em Nova Iorque, Saarinen fez um desenho moderno e aerodinâmico com superfícies orgânicas futuristas tanto no exterior quanto no interior deste edifício.

Figura 26 - Mostra o estudo e o uso da catenária no icônico arco de entrada de St. Louis, EUA.

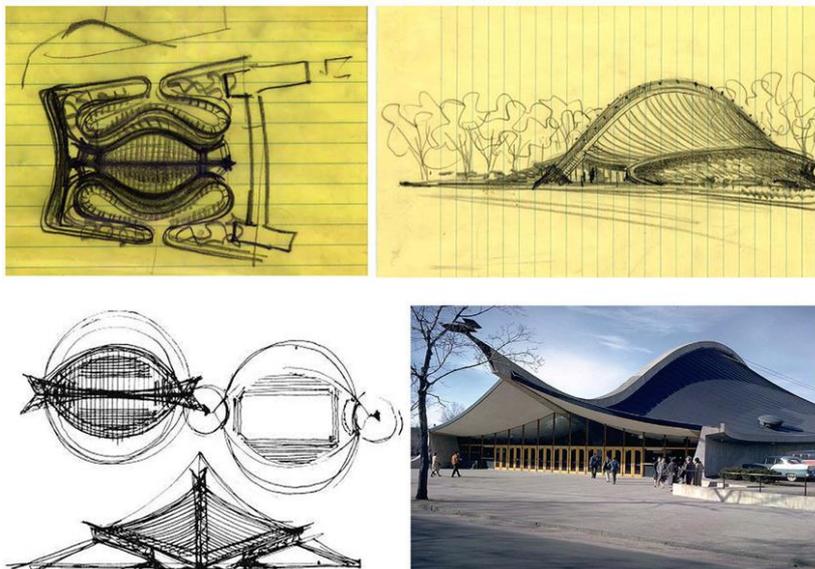


Fonte:: Imagem à esquerda extraída do site knoll²⁴. Imagem à direita extraída do site archdaily²⁵.

²⁴ Disponível em: < <https://www.knoll.com/designer/Eero-Saarinen>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

²⁵ Disponível em: < <https://www.archdaily.com.br/br/804033/documentario-apresenta-a-vida-e-a-obra-de-eero-saarinen>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

Figura 27 – Mostra os esboços originais do Rinque de Hóquei de Yale (Eero Saarinen, 1956) e seu telhado que tem a forma de uma película de sabão.



Fonte: Imagens extraídas do site researchgate²⁶.

Figura 28 – Mostra os estudos e o Terminal TWA, em Nova Iorque, EUA, projeto de Eero Saarinen (1962)



Fonte: Holanda, 2012, hospedada no site Clássicos da Arquitetura²⁷, 2021.

²⁶ Disponível em: < https://www.researchgate.net/figure/Original-sketches-for-the-Yale-Hockey-Rink-built-1956-58-by-architect-Eero-Saarinen_fig1_220936845>. Acesso em: 15 jun. 2021.

²⁷ Disponível: <<https://www.archdaily.com.br/br/01-76775/classicos-da-arquitetura-twa-terminal-saarinen>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

3.2.3 Erich Mendelsohn (1887-1953)

Nascido na Polônia, o arquiteto Erich Mendelsohn (1887-1953) é considerado um mestre do expressionismo arquitetônico, estilo que se destaca pela inovação em materiais, formas e volumes. Em seu projeto para Einsteinturm (torre Einstein), podemos perceber formas e superfícies sinuosas, que nos remetem aos desenhos de Gaudí, além do uso da superfície mínima em sua escadaria helicoidal.

Figura 29 - Mostra da Einsteinturm (Torre Einstein) em Potsdam, Alemanha de Erich Mendelsohn em 1921



Fonte: Extraída do site BRANDENBURG, 2021.

3.2.4 Oscar Niemeyer (1907-2012)

O arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer (1907-2012) é respeitado mundialmente como um dos principais nomes da arquitetura moderna. Em 1936, foi colaborador do projeto do Ministério da Educação do Rio de Janeiro, quando teve a oportunidade de trabalhar de perto com o grande arquiteto Suíço Le Corbusier. Niemeyer ficou conhecido pelos vários edifícios projetados por ele em Brasília. Contudo sua importância e notoriedade vão muito além, com mais de 600 projetos

espalhados pelo mundo. De acordo com Glancey (2000, p. 190), “[...] Niemeyer trouxe para o movimento modernista um grau de sensualidade sem precedentes... ofereceu à arquitetura uma força estrutural que, no primeiro encontro, pode ser avassaladora. Talvez, tudo o que boa parte da arquitetura precisasse fosse uma injeção de paixão latina [...]”.

Seus estudos de curvas e superfícies saíram do papel através da técnica construtiva do concreto armado, e o tornou um dos arquitetos mais influentes do século XX. Essa técnica permitiu que forma e estrutura caminhassem de mãos dadas. Desta forma, o uso das superfícies mínimas, nas obras de Niemeyer, é notado ora em partes, ora como elemento principal de seus projetos. Como por exemplo na concepção da catedral de Brasília em que se percebe o catenóide como elemento central no design e também como aporte estrutural. Outro exemplo, é o projeto da Estação Ciência em João Pessoa, onde o helicóide é parte integrante do projeto.

Destaca ainda Glancey (2000, p. 191) que, “[...] desde Brasília, governos nacionais e regionais pelo mundo todo buscaram realçar sua identidade e poder de atração turística investindo em arquitetura teatral e monumental: a Ópera de Sydney e Museu Guggenheim, Bilbao são dois exemplos [...]”.

Figura 30 - Mostra da catedral de Brasília, a catedral de Belo Horizonte e a superfície mínima o Catenóide



Fonte: Imagem à esquerda extraída de Marfan, 2016, hospedada no Wikipédia²⁸. Imagem ao centro, extraída do site g1²⁹. Imagem à direita, extraída do blog Minimalsurfaces³⁰, 2021, da internet.

²⁸ Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Catedral_Metropolitana_de_Bras%C3%ADlia>. Acesso em: 15 jun. 2021.

²⁹ Disponível em: <<http://g1.globo.com/minas-gerais/noticia/2011/07/nova-catedral-de-bh-pode-custar-r-100-milhoes-diz-arquidiocese.html>> Acesso em: 15 jun. 2021.

³⁰ Disponível em: <<https://minimalsurfaces.blog/home/repository/spheres/the-catenoid/#jp-carousel-95>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

Figura 31 - Mostra da Estação Ciências em João Pessoa, Centro Cultural de Le Havre, na França e o uso do Helicóide.



Fonte: Imagem à esquerda, extraída de Alves, 2013, hospedada no blog Última Parada³¹. Imagem à direita, extraída do site revistaambientesce³².

³¹ Disponível em: <<https://ultimaparada.wordpress.com/2013/01/08/a-historica-joao-pessoa>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

³² Disponível em: <<https://www.revistaambientesce.com.br/2020/02/21/a-genialidade-de-oscar-niemeyer>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

3.3 FREI PAUL OTTO O GRANDE PRECURSOR NA UTILIZAÇÃO DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS NA ARQUITETURA

Quando se fala da utilização de superfícies mínimas na arquitetura, o primeiro nome que normalmente é mencionado é o do arquiteto e engenheiro alemão, ganhador do Prêmio Pritzker em 2015 (o mais significativo prêmio mundial em arquitetura), Frei Paul Otto.

Convocado para o serviço militar alemão, no final da Segunda Guerra, Otto foi capturado e virou prisioneiro de guerra. Episódio que despertou no jovem estudante de arquitetura a vontade de construir abrigos e tendas levando em conta a economia de material. Segundo ele, seu objetivo era projetar novos tipos de edifícios para ajudar pessoas após desastres naturais e catástrofes.

A utilização de superfícies mínimas vão de encontro às ideias do arquiteto, pois podem ser feitas com a menor quantidade de material sem perder a estabilidade. Seus projetos são leves, orgânicos, econômicos, democráticos, arejados e luminosos. No ano de 1950 ele viajou para os Estados Unidos, onde estudou Urbanismo na Universidade da Virgínia. Em 1952, abriu seu próprio escritório de arquitetura, em Berlim, onde também fez seu doutorado em Engenharia Civil (1954). Seu entusiasmo por uma concepção orgânica do design o levou a fundar o grupo de pesquisa “Biologia e Construção”, que contava com a presença de arquitetos, engenheiros e biólogos. E fundou também o Instituto de Estruturas Leves e Design Conceitual da Universidade de Stuttgart, onde foi professor titular até 1991.

Na época, sem o auxílio de programas de computadores, ele buscava respostas na natureza e nas bolhas de sabão. Otto realizou uma série de experimentos com películas líquidas com a meta de descobrir novas opções de superfícies estruturalmente equilibradas. A escolha era feita levando em conta vários aspectos, como beleza, relação área e volume e, principalmente, a estabilidade das tensões.

Segundo Burry, J. e Burry, M. (2010, p. 09-10), o conhecimento matemático nos projetos de construção ficou concentrado na Engenharia, com a Revolução Industrial, notáveis obras do século passado, que ousaram em formas e cálculos e que devem-se aos engenheiros, em especial, à Frei Otto. Os autores (2010) destacam ainda que arquitetos do século XX já utilizavam conceitos da arquitetura atual, mas

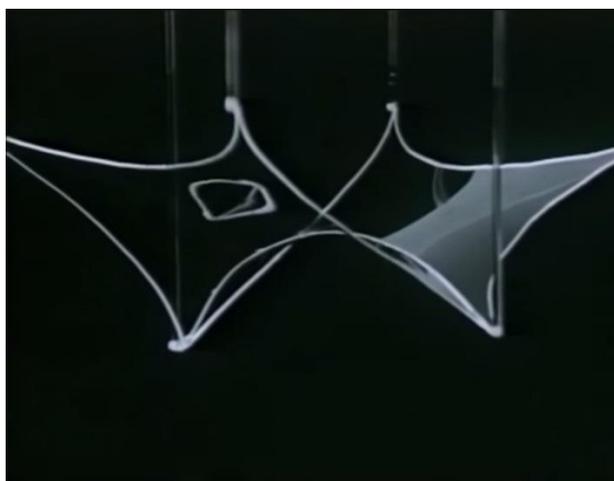
sem a tecnologia digital, como era o caso dos estudos realizados com as superfícies orgânicas e plásticas da arquitetura modernista (visto na Seção 3.2). A arquitetura atual vale-se de vários conceitos matemáticos, sendo um destes as superfícies mínimas.

Figura 32 - Mostra de alguns estudos de superfícies, do arquiteto Frei Otto com bolhas de sabão



Fonte: Extraída do site École De Design D'Architecture³³, 2021.

Figura 33 - Mostra de alguns estudos de superfícies, do arquiteto Frei Otto com bolhas de sabão



Fonte: Azkarate, 2015, para o blog De ARCH Depicted Architecture³⁴, 2015.

³³ Disponível em: <<https://fre.architecturaldesignschool.com/frei-otto-importance-experimentation-architecture>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

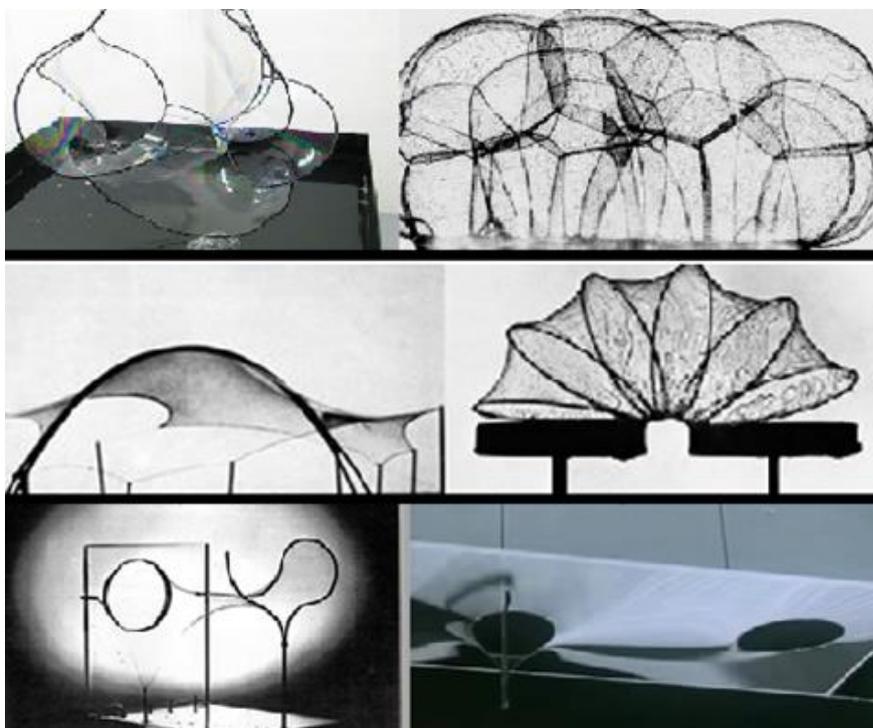
³⁴ Disponível em: <<https://depictedarchitecture.wordpress.com/2015/03/22/frei-otto>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

"[...] O computador pode apenas calcular o que já está conceitualmente dentro dele; nos computadores encontra apenas o que buscas. No entanto, com a experimentação livre, pode-se encontrar o que não foi buscado [...]" (FREI OTTO 1961 apud SONGEL, 2008, 2010, p. 38).

Modelos e maquetes sempre fizeram parte de seus estudos na concepção estética e funcional de um projeto, mas foi com as bolhas de sabão, a partir de 1961, que Otto descobriu um novo e praticamente inexplorado mundo, com o objetivo de descobrir superfícies mínimas e aplicá-las em estruturas habitacionais e de convívio, temporárias ou permanentes. Seus experimentos com bolhas de sabão o levaram a novas formas e resultados, que somente hoje com a ajuda da tecnologia dos programas de computadores podemos vislumbrar.

"[...] agora é possível calcular, algo que por mais de quarenta anos foi impossível. Eu não esperei que fosse possível serem calculadas para construí-las [...]" (FREI OTTO, 1961 apud, FRANCO, 2015).

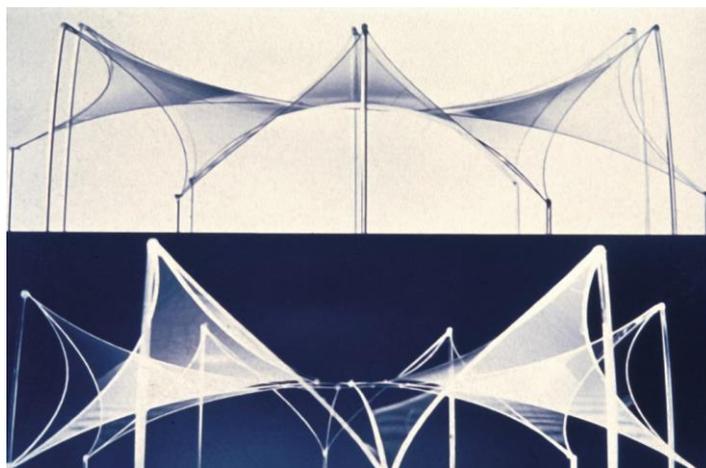
Figura 34 - Mostra de alguns estudos de superfícies, do arquiteto Frei Otto com bolhas de sabão



Fonte: Hospedada por Franco, 2015, no site de arquitetura archdaily³⁵, 2015.

³⁵ Disponível em: <<https://www.archdaily.com.br/br/763720/video-frei-otto-experimentando-com-bolhas-de-sabao>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

Figura 35 - Mostra de alguns estudos de superfícies, do arquiteto Frei Otto com bolhas de sabão



Fonte: Hospedada por Symeonidou, 2014, no blog do *Institut für Architektur und Medien*³⁶ (IAM) an der TU Graz, 2014.

O primeiro grande projeto internacional de Otto foi o pavilhão da Alemanha Ocidental na feira mundial de 1967, em Montreal. Uma estrutura inovadora de cobertura tensionada por cabos de aço.

Figura 36 - Mostra do pavilhão da Alemanha Ocidental na feira mundial de 1967, em Montreal



Fonte: Hospedada por Langdon, 2015, no site de arquitetura archdaily³⁷, 2015.

³⁶ Disponível em: <<https://iam.tugraz.at/workshop14s/2014/03/25/soap-bubbles-and-minimal-surfaces>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

³⁷ Disponível em: <<https://www.archdaily.com.br/br/794650/classicos-da-arquitetura-pavilhao-alemao-da-expo-67-frei-otto-e-rolf-gutbrod>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

Figura 37 – Mostra do *Institute of Lightweight Structures*, na Universidade de Stuttgart, em Vaihingen, Alemanha (1967)



Fonte: Extraída da Revista online de arquitetura architectmagazine³⁸, 2021.

Com o sucesso de Montreal, ele foi chamado junto com o arquiteto Günter Belnish para projetar o Parque Olímpico de Munique para as Olimpíadas de 1972.

Com grandes membranas, onde as tensões se anulavam através de sistemas de cabos, eles projetaram estruturas leves de rara beleza e inovadora para época. As coberturas interligadas dos estádios, das pistas e das piscinas totalizaram 74 800 m². Neste sentido, ele foi precursor, novamente, ao aplicar os cálculos matemáticos e computação para estudar o comportamento das superfícies, tendo como fruto a maior combinação de superfícies mínimas já construídas até àquele momento.

³⁸ Disponível em: <<https://www.architectmagazine.com/project-gallery/institute-for-lightweight-structures-at-the-university-of-stuttgart-6723>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

Figura 38 - Parque Olímpico em Munique-Alemanha



Fonte: SCHLAICH BERGERMANN UND PARTNER, 2021, hospedada no portal MET@LICA Construção Civil³⁹, 2021.

Figura 39 - Parque Olímpico em Munique-Alemanha



Fonte: extraída do site SustentArqui⁴⁰, 2021.

³⁹ Disponível em: <<https://metalica.com.br/estruturas-tensionadas-para-grandes-vaos>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

⁴⁰ Disponível em: <<https://sustentarqui.com.br/arquiteto-frei-otto-e-o-vencedor-pritzker-2015>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

Figura 40 – Uma das obras de Frei Otto



Fonte: Revista VEJA, 2015, extraída do site da Pistelli PELZ Engenharia⁴¹, 2015.

Figura 41 - Mostra de *Multihalle em Mannheim* - construída entre 1970 e 1975



Fonte: Blog Folha e Catraca Livre, 2015, hospedado por ACONTECE, 2015, no blog Galeria da Arquitetura⁴², 2015.

⁴¹ Disponível em: <<http://www.estruturas.arq.br/noticias/frei-otto-premio-pritzker-morte.html>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

⁴² Disponível em: <<https://blog.galeriadaarquitetura.com.br/post/o-legado-de-frei-otto-para-a-arquitetura>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

Figura 42 - Mostra do Guarda-chuvas desenhados para a turnê da banda Pink Floyd nos Estados Unidos - 1977



Fonte: Blog Folha e Catraca Livre, 2015, hospedado por ACONTECE, 2015, no blog Galeria da Arquitetura⁴³, 2015.

Figura 43 - Mostra do Aviário do zoológico de Munique - obra construída entre 1979 e 1980



Fonte: Extraídas do site Pinterest⁴⁴, 2021.

⁴³ Disponível em: <<https://blog.galeriadaarquitetura.com.br/post/o-legado-de-frei-otto-para-a-arquitetura>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

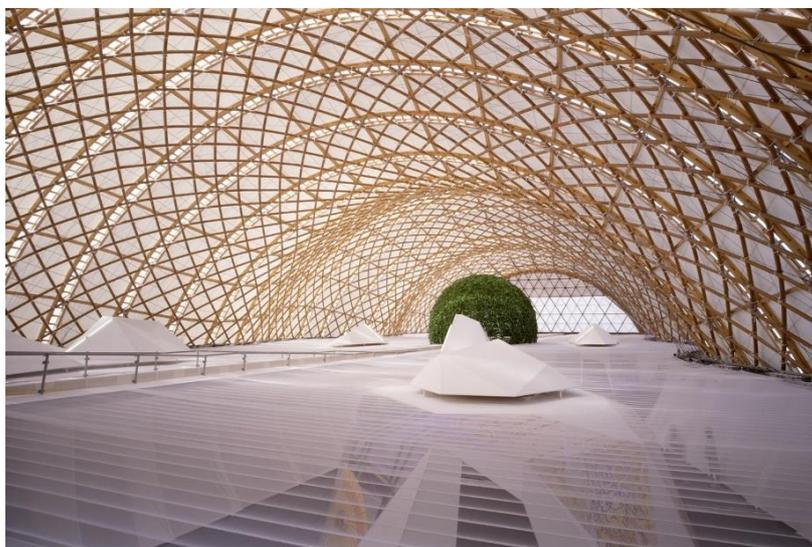
⁴⁴ Disponível em: <<https://www.pinterest.es/pin/551057704387171474>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

Figura 44 – Mostra do *Diplomatic Club Heart Tent* em Riad – 1980 (Arabia Saudita)



Fonte: Extraída da Revista online de arquitetura architectmagazine⁴⁵, 2021.

Figura 45 – Mostra do *Pavilhão japonês da Expo 2000*, obra realizada em parceria com Shigeru Ban em Hannover – 2000



Fonte: Blog Marco Milazzo Arquitetura⁴⁶, 2014.

⁴⁵ Disponível em: <<https://www.architectmagazine.com/project-gallery/diplomatic-club-heart-tent-6725>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

⁴⁶ Disponível em: <<https://milazzo.com.br/blog/2014/04/25/shigeru-ban>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

Figura 46 - Mostra da *Maquete do projeto de Frei Otto para a sua cidade no Ártico*



Fonte: Hospedada por Rosenfield, 2015, no site de arquitetura plataforma arquitectura⁴⁷, 2015.

A arquitetura contemporânea vem se mostrando cada vez mais engajada aos conceitos de projetos sustentáveis que fazem uso da estrutura, do material e das formas e superfícies de maneira consciente, optando por escolhas responsáveis, econômicas e ecológicas, contrapondo-se aos grandes projetos que valorizam a estética em detrimento do papel social e do inconsequente impacto ambiental.

Otto mudou a relação homem-natureza com sua arquitetura, fazendo grandes questionamentos sobre o papel da habitação e do meio ambiente em que ela está inserida. O ar foi usado como material de construção, uma vez que as superfícies mínimas são empregadas usando as propriedades matemáticas e físicas para encontrar o equilíbrio de maneira estrutural e minimizando material.

Neste sentido, Otto deixa um verdadeiro legado, em meio a um cenário de desigualdades. Seus estudos e projetos inspiram as novas gerações de arquitetos a projetar espaços dignos a baixo custo, sem deixar de lado a beleza e a estabilidade estrutural. Ensinou pelo exemplo, que as superfícies mínimas são parceiras ideais para a concepção de um projeto com essas características e que muitas vezes a natureza mostra a melhor forma de empregá-las, seja nas formas biológicas seja com as bolhas de sabão.

⁴⁷ Disponível em: <<https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/763659/12-cosas-que-no-sabias-sobre-frei-otto-premio-pritzker-2015>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

3.4 PROJETOS ARQUITETÔNICOS E AS SUPERFÍCIES MÍNIMAS NO SÉCULO XXI

Na segunda metade do século XX, o uso de novas técnicas e novas tecnologias fica ainda mais evidente, principalmente após os anos 80 com o nascimento da computação gráfica, que permitiu uma infinidade de novas possibilidades de design e cálculos estruturais cada vez mais avançados. Aqui vale ressaltar que, ainda hoje, com todo o avanço tecnológico, na maioria dos projetos arquitetônicos, essas novas curvas e superfícies representam um desafio para a maioria dos arquitetos, pois estas se mostram complexas em termos espaciais e de estruturas geométricas.

No início de tais mudanças, o conceito usado em muitos projetos arquitetônicos era o de controle total, a tecnologia sugeriu para muitos a ideia de individualidade nas construções e que o domínio das condições ambientais é artificialmente possível. No entanto, entre arquitetos, engenheiros e financiadores públicos e privados, a concepção de sustentabilidade vem ganhando adeptos nas últimas décadas. Na busca por novas alternativas de energia limpa, reaproveitamento de materiais e a crescente conscientização do impacto que grandes centros urbanos têm na natureza e na biodiversidade do planeta. A arquitetura, sustentável energeticamente e econômica em se tratando de redução de material gasto com alta estabilidade e eficiência, vem se aprofundando no estudo das superfícies mínimas.

Atualmente, não existe um roteiro ordenado para os projetos construtivos, em alguns, a forma é determinada somente nas últimas etapas pelo computador através de inúmeras equações paramétricas; nestes casos o que se vê é uma inversão na ordem tradicional dos projetos (KOLAREVIC, 2003, p. 27).

Com estas novas perspectivas, de formas e superfícies no design arquitetônico, estamos novamente passando por uma fase de descobertas. Existe hoje uma corrente de arquitetos que ignoram as convenções de estilo ou estética em favor da experimentação contínua, eles representam uma ruptura ideológica, conceitual e formal. Entretanto, como já vimos anteriormente, com os modernistas do século XX e também com Frei Otto, esta busca por novas formas e superfícies tem precedentes em diferentes épocas. As formas biomórficas, por exemplo, não são

novas, pois esforços na tentativa de aplicar tais conceitos na arquitetura são feitos desde o barroco (KOLAREVIC (2003, p. 03-04).

A seguir, veremos alguns exemplos de obras cujo conceito de seus projetos na busca por novas formas, superfícies e soluções de design arquitetônico, beberam na fonte das superfícies mínimas.

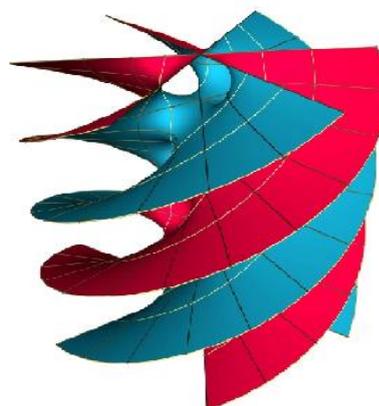
3.4.1 Swiss Re tower

Com 180 metros de altura, o edifício de escritórios Swiss Re é considerado o primeiro arranha-céu sustentável de Londres. Devido ao seu projeto, assinado por Norman Foster, a torre pode economizar 50% de energia quando comparada a uma construção convencional.

Com a estrutura em forma de cilindro retorcido e com diâmetro variando, o edifício é extremamente eficiente no quesito aerodinâmica. Seu design nos remete à superfície mínima Helicoidal Karcher-Scherk, uma variação do Helicóide.

Assim, uma malha de perfis de aço de alta resistência dispostos helicoidalmente otimizam a estrutura.

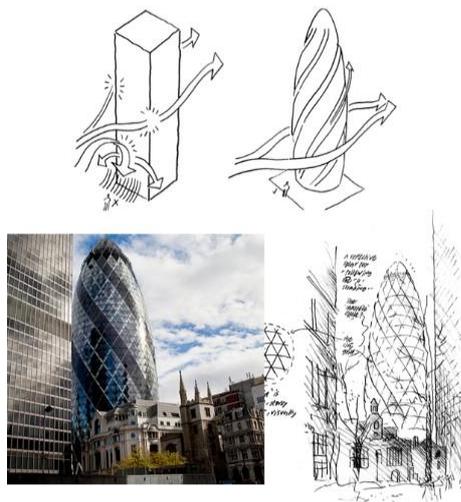
Figura 47 - Swiss Re Tower em Londres – Inglaterra. E a Superfície Helicoidal Karcher-Scherk variação do Helicóide



Fonte: Primeira imagem à esquerda extraída do site Brazil Journal⁴⁸, 2014. Segunda imagem à direita extraída do repositório do blog Minimalsurfaces⁴⁹, 2021.

Uma camada dupla na casca potencializa a circulação de ar entre os andares, e ao mesmo tempo permite o isolamento térmico interno. Vejamos a imagem que segue.

Figura 48 - Swiss Re tower e um estudo de carga de vento, e a comparação da construção com um croqui



Fonte: Hospedado por WHY910901, 2013, no portfólio digital Emily INTERIOR DESIGN⁵⁰, 2013.

3.4.2 Water Hotel

O arquiteto Tobias Walliser é declaradamente um entusiasta da matemática e da computação gráfica como ferramenta eficiente na arquitetura. Fascinado por modelos geométricos, como fonte de inspiração para concepção de seu trabalho.

Com a evolução dos programas computacionais voltados para o design em arquitetura, o entendimento e investigação das formas e superfícies em um grande projeto vêm ficando cada vez mais rico, com a compreensão dos conceitos matemáticos, mesmo que superficialmente, este estudo fica ainda mais completo.

⁴⁸ Disponível em: <<https://braziljournal.com/safra-paga-3-bilhoes-de-reais-por-predio-londrino>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

⁴⁹ Disponível em: <<https://minimalsurfaces.blog/home/repository>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

⁵⁰ Disponível em: <<https://emilyinteriordesign.wordpress.com/2013/10/15/design-practicen1>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

No projeto do Water Hotel, localizado no oceano Pacífico, no território mexicano, a inspiração foi a superfície mínima, chamada Superfície de Costa.

De posse de uma razoável bagagem no campo da geometria, nesse projeto, especificamente, o uso de ferramentas digitais foi menos decisivo, pois o arquiteto trabalhou de maneira mais espontânea. A ideia foi de potencializar a vista, bem como a iluminação natural.

A releitura da Superfície de Costa, com grandes aberturas, permitiu uma perfeita integração entre o céu, a água e os diferentes níveis do Hotel. No estudo da volumetria, a estratégia foi inserir a superfície mínima em uma esfera, maximizando o resultado. Esteticamente, sua forma foi alongada para lembrar uma gota d'água.

Após vários estudos paramétricos estruturais e diferentes abordagens nos contornos, a superfície foi projetada com três orifícios, o que garante maior estabilidade para vinte andares, uma vez que se forma um esquema de tripé.

Assim sendo, a inspiração para esse projeto está na Superfície-Costa, provada e idealizada em 1982 pelo brasileiro Celso Costa. Mas qual a finalidade do uso matemático em projetos de arquitetura?

A resposta, segundo Tobias Walliser, é a necessidade de um pensamento analítico ao se tomar decisões diante dos desafios e possibilidades que os novos softwares de design proporcionam. Logo, o domínio de alguns conceitos matemáticos é extremamente importante quanto à concepção de um projeto arquitetônico harmonioso.

Figura 49 - Mostra do Water Hotel na costa mexicana (Inspirado na superfície Costa)



Fonte: Primeira imagem à esquerda extraída do site LAVA - LABORATORY FOR VISIONARY ARCHITECTURE⁵¹, 2021. Segunda imagem à direita extraída do repositório do blog Minimalsurfaces⁵², 2021.

⁵¹ Disponível em: <<https://www.l-a-v-a.net/projects/mexico-monde-d-eau-hotel-resort/>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

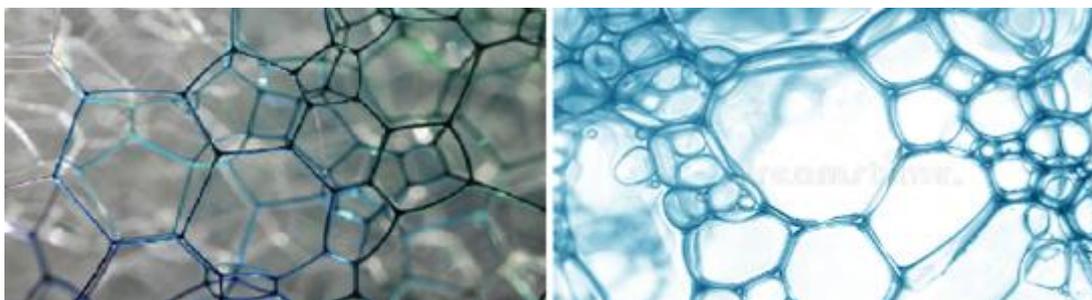
⁵² Disponível em: <<https://minimalsurfaces.blog/home/repository/tori/the-costa-surface/>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

3.4.3 O Cubo D'água

O Centro Aquático de Pequim foi projetado pelo arquiteto John Pauline, e sua construção foi realizada para os jogos Olímpicos de 2008.

A otimização do volume do Centro Nacional de Natação é alcançada com a eficácia de cada uma de suas partes. Fato que é comumente visto nas formas biológicas, estruturas celulares, em cristais e minerais encontrados na natureza e também nas estruturas formadas pelas bolhas de sabão.

Figura 50 – Mostra de bolhas de sabão quadradas



Fonte: Extraídas do blog AZEHEB Laboratórios Educacionais⁵³, 2021.

No final do século XIX, Lord Kelvin lançou um desafio: “Se tentarmos subdividir o espaço tridimensional em compartimentos múltiplos, cada um de igual volume, que forma eles teriam para que as superfícies subdivisoras tenham uma área mínima?”

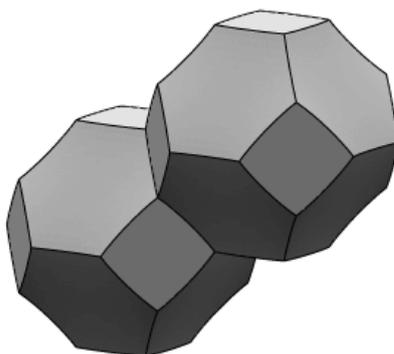
O problema proposto se mostrou intrigante, tanto pelo ponto de vista conceitual como pelo fato de que tais formas são recorrentes na natureza.

O estudo das bolhas de sabão é um excelente lugar para iniciar os estudos sobre o questionamento de Lord Kelvin. O físico belga Plateau já tinha constatado em 1873 que quando bolhas de sabão se juntam, elas sempre se juntam em três superfícies ao formar um ângulo de 120° graus na lateral. E essas laterais sempre se encontram, quatro em cada canto, num ângulo tetraédrico de aproximadamente 109,47° graus.

⁵³ Disponível em: <<https://azeheb.com.br/blog/saiba-como-fazer-bolha-de-sabao-quadrada>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

Em 1887, Lord Kelvin propôs uma solução para seu próprio problema baseado numa figura de 14 lados feita de 08 hexágonos regulares e 06 quadrados. Essa figura pode ser construída cortando as arestas de um octaedro regular.

Figura 51 - Mostra da solução proposta por Lord Kelvin



Fonte: Extraída do blog Ken Brakke - Department of Mathematics and Computer Science⁵⁴, of the Susquehanna University, Selinsgrove, 2021.

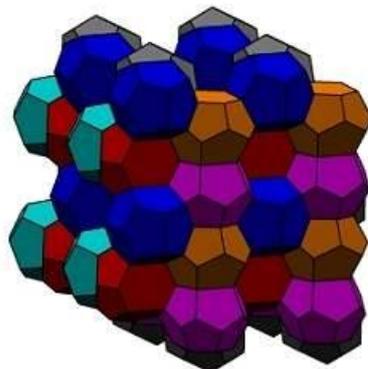
Entretanto, o ângulo reto de um quadrado é de 90° graus e de um hexágono é de 120° graus. Ambos estão longe dos $109,47^\circ$ graus de Plateau. Um pentágono regular tem um ângulo interno de 108° graus, porém dodecaedros (a figura de doze lados feita com pentágonos regulares) não podem ser dispostos lado a lado sem deixar um espaço entre eles.

Durante vários anos presumiu-se que formas compostas de combinações de pentágonos e hexágonos eram mais adequadas do que a espuma de Kelvin. Entretanto, em 1993 os professores irlandeses Weaire e Phelan, produziram espumas com dois tipos polidédricos distintos, o primeiro de quatorze faces, formados por dois hexágonos e doze pentágonos, e outro de doze faces, formados apenas por pentágonos, provando assim que utilizavam menos superfície quando comparado com a espuma de Kelvin.

A espuma de Weaire-Phelan ainda hoje é considerada como a melhor configuração a fim de otimizar o espaço tridimensional. Desta forma, ela foi usada como base no projeto da estrutura para o Centro Nacional de Natação de Pequim.

⁵⁴ Disponível em: <<https://facstaff.susqu.edu/brakke/kelvin/kelvin.html>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

Figura 52 - Mostra da estrutura da espuma de Weaire-Phelan



Fonte: Extraída do site inovação tecnológica⁵⁵, 2021.

Aparentemente, se trata de uma estrutura altamente complexa e orgânica, mas na verdade ela se configura através de várias repetições e padrões. Usando apenas três faces distintas, quatro extremidades e três cantos ou nós. Sendo assim, podemos dizer que o Centro Nacional de Natação obteve uma solução social, técnica e ecológica. Pois fez uso de moldes estruturais baseados na resolução de um dos problemas mais desafiadores da matemática.

Figura 53 - Mostra do Cubo D'água em Pequim, China (2008)



Fonte: Extraída do blog L@ranja Interativa⁵⁶, 2008.

⁵⁵ Disponível em: <<https://www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/noticia.php?artigo>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

⁵⁶ Disponível em: <<http://laranjainterativa.blogspot.com/2008/08/cubo-dgua-pequim-2008.html>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

Figura 54 - Mostra da construção do Cubo D'água em Pequim, China (2008)

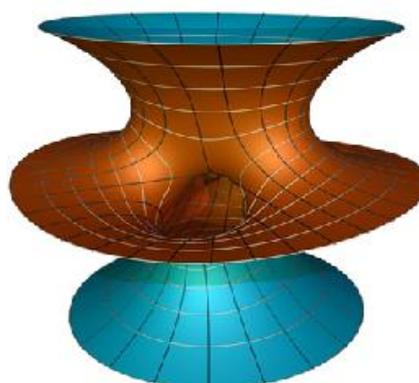


Fonte: Extraída do blog Primavera em Pequim⁵⁷, 2008.

3.4.4 Australian Wildlife Health Centre

Projetado pelo arquiteto australiano Paul Minifie, o centro de tratamento de animais nativos, o *Australian Wildlife Health Centre*, é claramente inspirado na Superfície de Costa.

Figura 55 - Mostra do exterior do *Australian Wildlife Health Centre*, em Melbourne, Austrália



Fonte: Primeira imagem à esquerda, extraída do site ARCHITECTUREAU⁵⁸, 2006. Segunda imagem à direita, extraída do repositório do Minimalsurfaces, 2021.

⁵⁷ Disponível em: <<http://primaveraempequim.blogspot.com/2008/01/beijing-2008-apresenta>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

⁵⁸ Disponível em: <<https://architectureau.com/articles/australian-wildlife-health-centre>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

A superfície mínima é o elemento central e organizador de todo o edifício. Em suas palavras, o arquiteto Paul Minifie afirma que a superfície escolhida é “difícil de compreender à primeira vista, os padrões de conexão e os fluxos e partições espaciais que ela cria são um tanto confusos” (MINIFIE, 2010, p. 53). A escolha da Superfície de Costa passa pela semelhança desta com os catenóides muito usados em torres de resfriamento.

Figura 56 - Mostra do interior do *Australian Wildlife Health Centre*, em Melbourne, Austrália



Fonte: Extraída do site ARCHITECTUREAU, 2006.

Figura 57 - Mostra do interior do *Australian Wildlife Health Centre*, em Melbourne, Austrália



Fonte: Hospedada por Snape, 2006, no site Cunningham Martyn Design⁵⁹, 2006.

⁵⁹ Disponível em: <<http://www.themightywonton.net.au/wp2777/australian-wildlife-health-centre-healesville>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

O arquiteto se inspirou na matemática para conceber um design com conexões com a anatomia animal, uma vez que a superfície costa pode ser associada a uma válvula cardíaca.

O ambulatório com paredes de vidro permite a integração do público com os procedimentos veterinários. O projeto faz a união de vários ambientes através de um único telhado com simetria tripla, de tecido de tração, que se molda em uma Superfície de Costa e cria a sensação de que o telhado se contorce para dentro.

Descoberta em 1984 pelo brasileiro Celso Costa, a Superfície Costa se ajustou perfeitamente ao projeto, com o auxílio computacional se fez a união harmônica entre design e funcionalidade. A superfície de gênero três (possui três furos) cria três clarabóias que levam a luz natural por todo o pátio e ao redor do ambulatório, além de funcionar como chaminés solares.

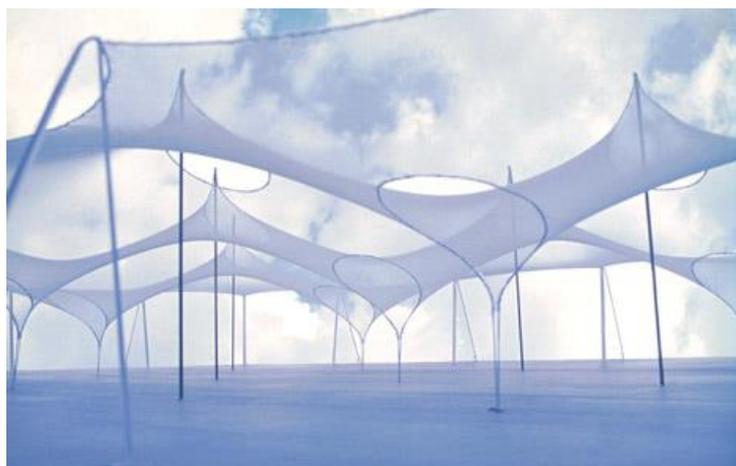
3.4.5 Main Station Stuttgart (Estação principal de Stuttgart)

Projeto do arquiteto Christoph Ingenhoven, a estação central de trem Main Station Stuttgart, tem como objetivo integrar a velha e a nova Stuttgart e, além disso, conectar a cidade com as principais cidades da Europa. O prédio antigo será mantido e a nova estação será construída em um nível de 12 metros abaixo e se estenderá até o parque histórico Schlossgarten.

O Projeto contou com a colaboração do arquiteto Frei Otto. A estrutura é uma casca contínua que possui 28 orifícios, com a finalidade de otimizar a estabilidade, o conforto e a sustentabilidade da estação, fazendo chegar luz e ventilação naturais. Neste sentido, a superfície mínima foi devidamente utilizada, sua geometria leva a uma eficiência estrutural bem como à economia de material e consumo mínimo de energia primária.

Figura 58 - Mostra vista externa e a maquete do Main Station Stuttgart

Fonte: Primeira imagem à esquerda extraída do site Bahnprojekt Stuttgart-Ulm⁶⁰, 2021. Segunda imagem à direita extraída hospedada por Bolsover (dpa / AP / AFP), no site DW Made for minds⁶¹, 2021.

Figura 59 - Mostra de um antigo estudo de Frei Otto, da superfície mínima, inspiração para o Main Station Stuttgart

Fonte: Hospedada por Winston, 2015, no site dezeen / architecture and design magazine⁶², 2015.

Com um projeto moderno, o Main Station Stuttgart é um excelente exemplo de como as superfícies mínimas podem enriquecer a arquitetura tanto em termos de design como em sustentabilidade, economia e conforto.

⁶⁰ Disponível em: <<https://www.bahnprojekt-stuttgart-ulm.de/en/details/new-stations/stuttgart-main-station/>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

⁶¹ Disponível em: <<https://www.dw.com/en/thousands-protest-against-stuttgart-railway-plans/a-5974069>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

⁶² Disponível em: <<https://www.dezeen.com/2015/03/11/frei-otto-a-life-in-project>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

Figura 60 - Mostra da vista interna e externa do Main Station Stuttgart

Fonte: Extraída do site LafargeHolcimFoundation⁶³, 2021.

Em termos de espessura e leveza, a superfície estrutural formada por conchas de concreto fundamentou-se em estudos feitos no Instituto de Estruturas Leves da Universidade de Stuttgart desde 1963, baseados em membranas de filme de sabão, onde as tensões são uniformemente distribuídas e as cargas podem ser sustentadas sem um pico de tensão local. As superfícies mínimas podem ser concebidas em torno de uma abertura (olho).

Figura 61 - Mostra da vista interna e externa do Main Station Stuttgart

Fonte: Extraída do site LafargeHolcimFoundation⁵³, 2021.

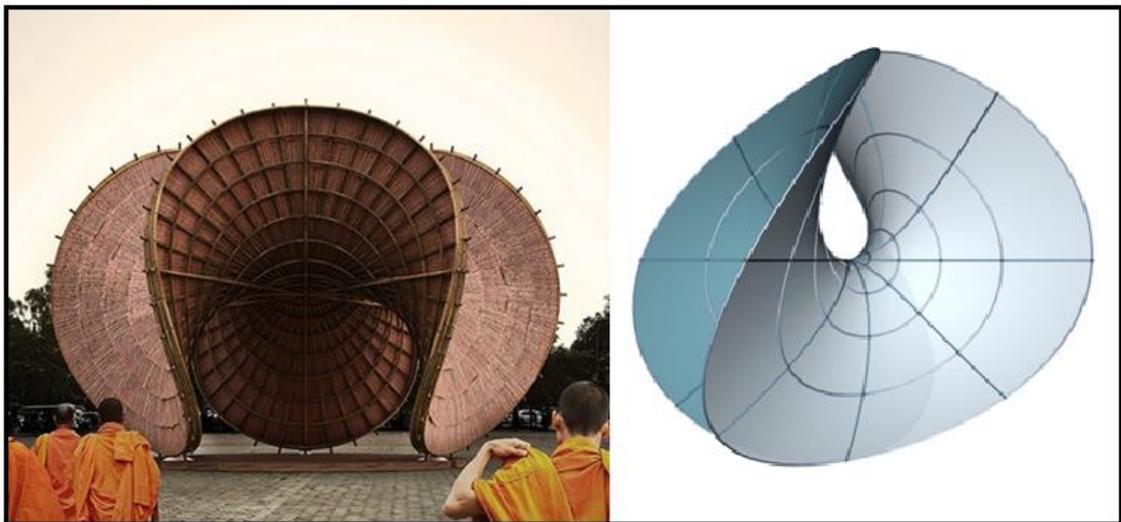
⁶³ Disponível em: <<https://www.lafargeholcim-foundation.org/projects/main-station-stuttgart-germany>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

3.4.6 Pavilhão Cambo

O projeto de pavilhão foi idealizado para o Festival Internacional de Bambu de 2017 do building trust em Phnom Penh, no Camboja. A proposta do estúdio italiano Luca Poian, consiste em um ambiente onde o bambu é o elemento predominante, com técnicas construtivas que exploram as propriedades estruturais desse material, além de preservar as tradições locais.

A beleza e suavidade da superfície mínima de Enneper foi o resultado acertado para um projeto que buscou design moderno, eficiência construtiva, leveza com estabilidade estrutural e redução de matérias.

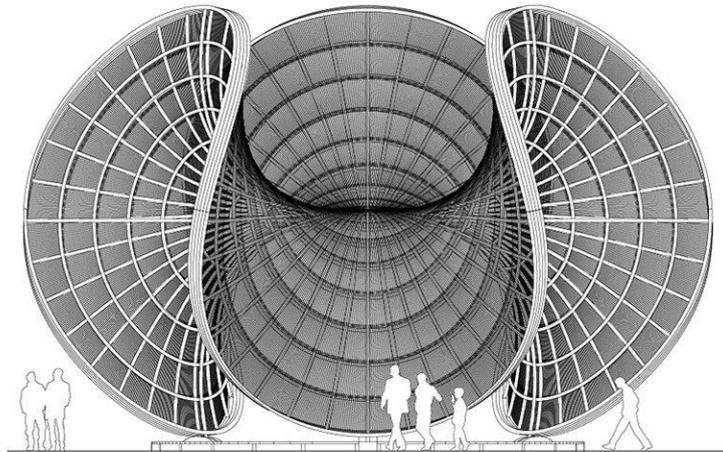
Figura 62 - Mostra do Pavilhão Cambo e a superfície de Enneper



Fonte: Primeira imagem à esquerda extraída de Poian, 2021, hospedada no site designboom⁶⁴, 2021. Segunda imagem à direita extraída do repositório do blog Minimalsurfaces, 2021.

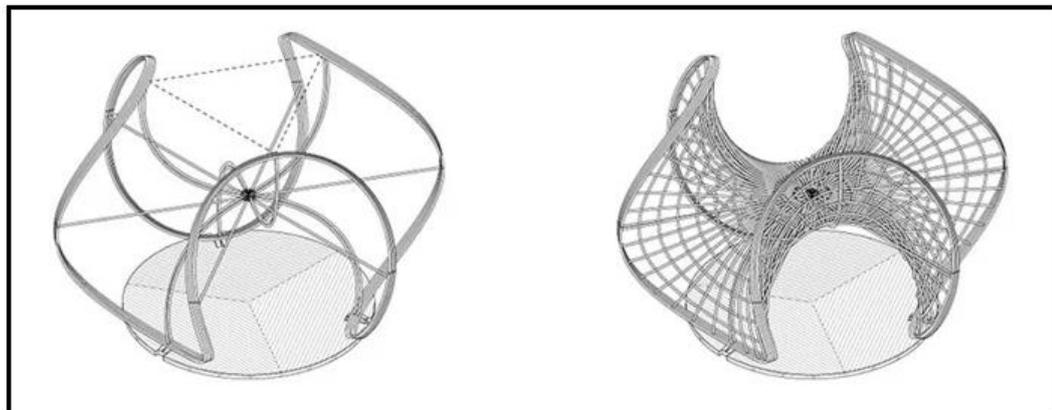
⁶⁴ Disponível em: <<https://www.designboom.com/architecture/luca-poian-forms-cambo-pavilion>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

Figura 63 - Mostra do Pavilhão Cambo



Fonte: Extraída de Poian, 2021, hospedada no site designboom⁵⁴, 2021.

Figura 64 - Mostra do Pavilhão Cambo



Fonte: Extraída de Poian, 2021, hospedada no site designboom⁵⁴, 2021.

CAPÍTULO 4

Películas de sabão, superfícies mínimas e arquitetura: um estudo preliminar para o ensino médio

Este capítulo será dividido em duas seções. Num primeiro momento, vamos comentar sobre as experiências e testes realizados, com películas de sabão, pelo autor, a fim de checar resultados e produzir um material didático a ser aplicado num projeto para alunos do ensino médio. Num segundo momento, realizamos uma aula piloto com alunos do 2º ano do ensino médio, através de uma reunião remota, dadas as atuais condições sanitárias. Faremos a descrição dessa apresentação e seus principais resultados e percepções. Sendo assim, este capítulo servirá como suporte para a construção do capítulo 5, onde faremos uma proposta de projeto para ser aplicado no decorrer do ano letivo, onde indicamos as possíveis relações das superfícies mínimas com os conteúdos programáticos da matemática, bem como, interdisciplinaridades com as disciplinas de física, química, biologia e artes.

4.1 OS EXPERIMENTOS COM PELÍCULA DE SABÃO

Como já observado nos capítulos anteriores, a teoria de superfícies mínimas está intrinsicamente ligada a experimentos com películas de sabão. Além disso, a visualização de superfícies mínimas através de tais estruturas propõe uma forma muito palpável de observação de fenômenos físicos, químicos e biológicos da natureza, que podem ser apreciados por alunos em níveis básicos de instrução. Neste sentido, o autor realizou tais experimentos a fim de checar resultados e produzir um material didático a ser aplicado num projeto para alunos do ensino médio.

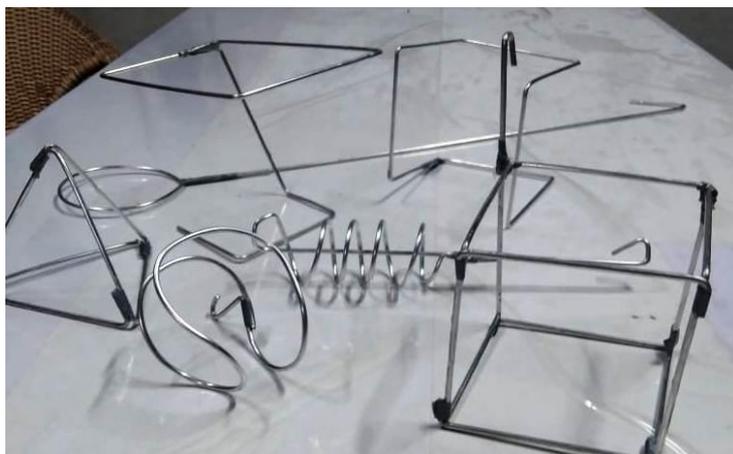
Um primeiro questionamento para realizar os testes se deteve a produção das estruturas para gerar as películas. Foram feitos com arames para produção de peças e contornos que seriam mergulhados nesta mistura. Observamos que o resultado obtido com hastes de alumínio (1m) foi bastante adequado para os nossos objetivos. Pois se mostrou um material que pode ser moldado, mas ao mesmo tempo mantém forma rígida, não se desgasta ao ser mergulhado inúmeras vezes na solução e o resultado estético é bom.

Figura 65 - Mostra do material usado para produção das peças



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 66 - Mostra das peças produzidas para os primeiros experimentos



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Outro desafio para os experimentos se deteve na busca para a melhor solução que gerasse as películas. Os primeiros testes que foram feitos utilizaram uma solução de água e sabão. Ao pesquisar na internet, apareceram algumas sugestões de produtos que adicionados a essa mistura deixariam a película mais estável. Realizamos testes com glicerina e também com glicose de milho. Os resultados mais satisfatórios foram obtidos com a seguinte solução: uma parte de detergente neutro (500 ml) e uma parte de glicose de milho (500 ml) para quatro partes de água (2 litros).

Figura 67 - Mostra dos materiais usados na solução de imersão dos contornos



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Fizemos testes para mostrar que película busca minimizar a área coberta, usamos poliedros para simular o encontro de vários planos e as principais peças foram produzidas com o foco nas superfícies mínimas clássicas e também nos experimentos de Frei Otto, a fim de fazer a ligação da película de sabão com a arquitetura que é mostrada no capítulo anterior.

4.1.1 Experimentos iniciais e superfícies mínimas clássicas

Como já visto anteriormente, o plano é chamado de superfície mínima trivial. Para obtermos a representação dele com película de sabão, basta usarmos um contorno plano, como um círculo, um triângulo, um hexágono, entre outros. A figura a seguir mostra um possível exemplar, feito a partir de um retângulo, pois o entendimento de um plano através deste contorno é mais comum.

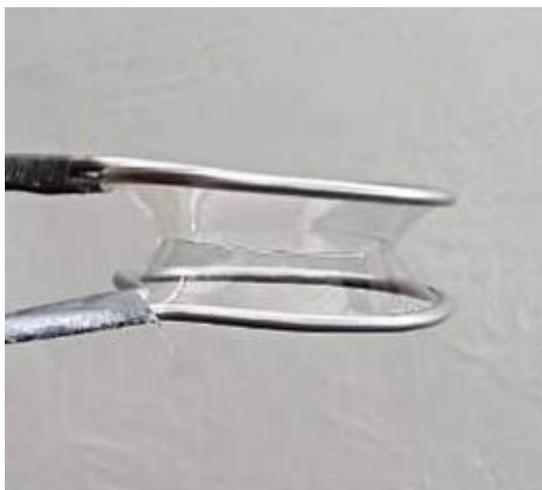
Figura 68 - Mostra de uma representação do Plano



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Para a produção do Catenóide, foi observado, após alguns testes, que a melhor estratégia é fazer dois círculos de mesmo diâmetro, e depois de mergulhados na solução, faz-se a união deles e, em seguida, um movimento para afastá-los paralelamente. Um dos resultados é mostrado a seguir.

Figura 69 - Mostra da produção do Catenóide



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Na produção do Helicóide, fizemos uma peça em espiral como uma “mola”, o resultado satisfatório somente foi atingido quando a peça produzida também contava com uma haste central, um dos resultados é mostrado a seguir.

Figura 70 - Mostra da produção do Helicóide



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Para a produção da superfície de Enneper, foi feito um contorno na forma de “sela” e um dos resultados é mostrado a seguir.

Figura 71 - Mostra da produção da Superfície Enneper

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Para a da superfície de Scherk, foram produzidas duas peças, a primeira mostra a superfície formada em cada período e na segunda temos uma repetição do padrão obtido neste primeiro contorno. No primeiro caso foi feito um contorno na forma de quatro traves interligadas e um dos resultados é mostrado a seguir.

Figura 72 - Mostra da ideia da Superfície Scherk

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Para a segunda peça repetiu-se nove vezes a ideia da primeira, intercalando os movimentos de tal maneira que o resultado ficou muito próximo da superfície de Scherk clássica, e este é mostrado a seguir.

Figura 73 - Mostra da produção da Superfície Sherk

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Para a superfície de Costa, foi proposto uma ideia diferente. A fim de obter peças palpáveis para um melhor entendimento da superfície, a estratégia foi a produção de duas esculturas, uma de arame de alumínio, massa de modelar e massa epóxi e outra esculpida em barras de sabão. Assim temos um material didático concreto para trabalharmos e entender melhor a superfície estudada. A seguir mostramos o processo de produção dessas peças.

Figura 74 - Mostra da produção da superfície de Costa

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 75 - Mostra do resultado de produção da superfície de Costa



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Inicialmente, faríamos uma peça apenas, pois já seria suficiente para atingirmos o objetivo de ter mãos um material para estudos. Contudo, com o fito de também realizar este experimento com materiais mais sustentáveis, decidimos pela produção da segunda escultura e o material escolhido foi o sabão em barra, pois é um material de fácil acesso, reutilizável e biodegradável. Desta forma, pretendemos estimular alunos, colegas e o leitor de maneira geral à tal produção.

Figura 76 - Mostra do material usado na produção da superfície de Costa



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 77 - Mostra do processo de produção da superfície de Costa



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 78 - Mostra do processo e resultado de produção da superfície de Costa



Fonte: Elaboração própria, 2020.

4.1.2 Experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto

Nesta subseção, tentaremos simular algumas experiências e estudos feitos, sobre estruturas tensionadas e comportamento das superfícies, pelo renomado arquiteto alemão Frei Otto, com películas de sabão. Após uma investigação através de bibliografia, sites e vídeos, percebemos a dinâmica de alguns destes experimentos. Notou-se ainda, que tais experimentos eram realizados principalmente no intuito de mostrar, estudar e visualizar a superfície mínima mais adequada, levando em conta a

estrutura necessária para sustentá-la, bem como para formá-la, sua estabilidade, além é claro de estudar o resultado estético alcançado.

Nossa pretensão aqui é de passar pelas experiências de maneira similar as que Otto passou e chegar a resultados parecidos esteticamente, sem maiores formalismos com relação a estrutura.

Para tanto, em nosso processo de estudo com películas de sabão, vamos reutilizar algumas peças da subseção anterior e mesclar com outras produzidas especificamente para tais experimentos.

Estes experimentos mostram a forma e o movimento que estruturas tensionadas assumem mediante determinadas forças. E a película de sabão permite a visualização desta superfície com a maior estabilidade e ainda com a menor área.

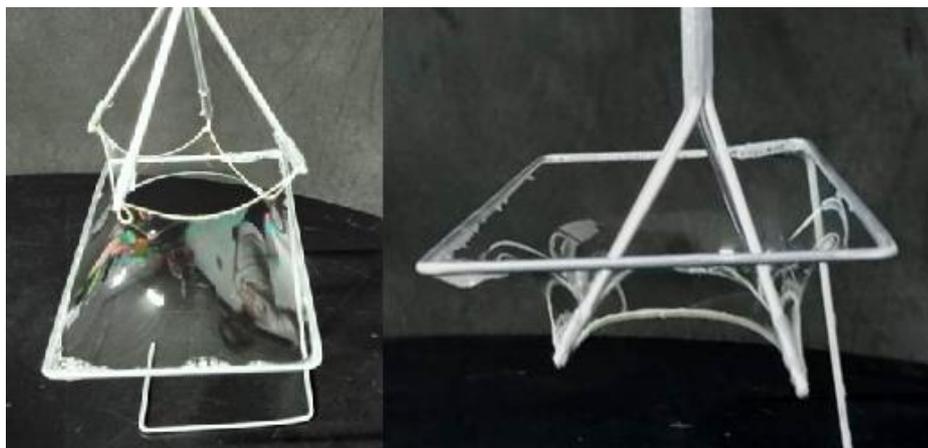
Começaremos com o plano sendo interceptado por um sistema de quatro hastes unidas por um fio. Assim podemos observar o comportamento da superfície mínima resultante, que simula uma cobertura tipo tenda, após alguns movimentos verticais.

Figura 79 - Mostra da reprodução de um dos experimentos de Frei Otto



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 80 - Mostra da reprodução de um dos experimentos de Frei Otto



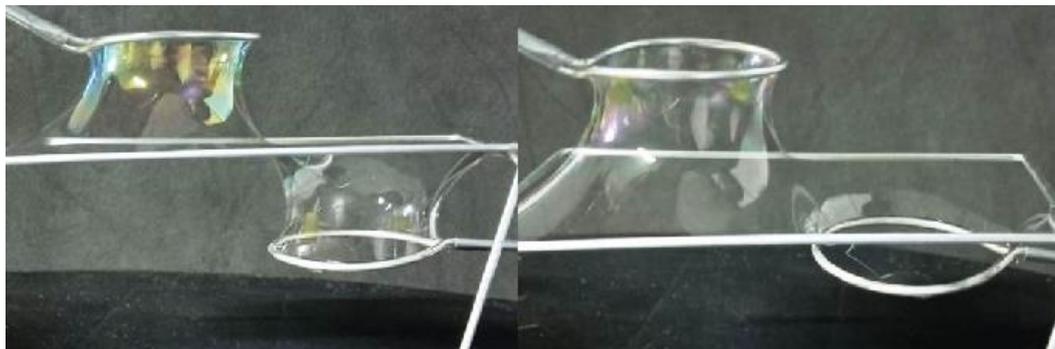
Fonte: Elaboração própria, 2020.

Neste experimento, observamos o comportamento da superfície anteriormente plana, que depois de acoplada a duas circunferências foi levada simultaneamente para cima e para baixo.

Figura 81 - Mostra da reprodução de um dos experimentos de Frei Otto



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 82 - Mostra da reprodução de um dos experimentos de Frei Otto

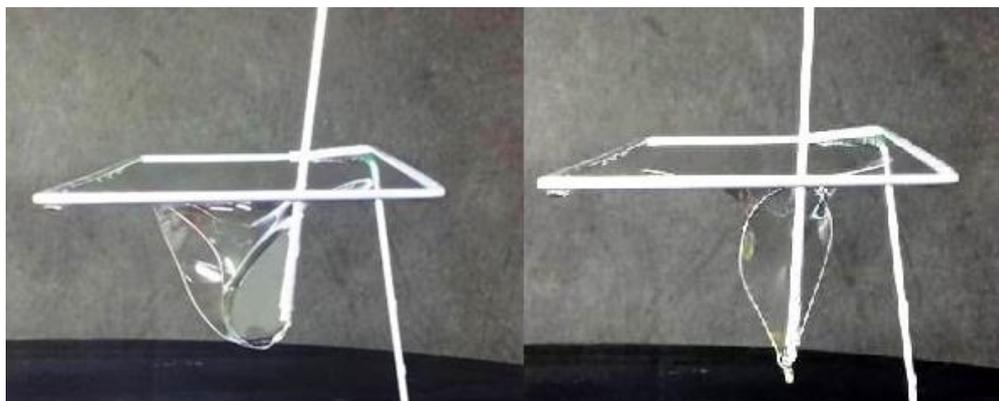
Fonte: Elaboração própria, 2020.

Aqui podemos simular os estudos realizados, com a colaboração de Otto, para o projeto da Estação de Central de Stuttgart, vista no capítulo anterior. Partindo de um plano, uma haste contendo um fio de nylon, é movimentada verticalmente. A película interior ao fio é rompida, assim podemos visualizar as superfícies que sustentam as claraboias dessa referida construção.

Figura 83 - Mostra da reprodução de um dos experimentos de Frei Otto

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 84 - Mostra da reprodução de um dos experimentos de Frei Otto



Fonte: Elaboração própria, 2020.

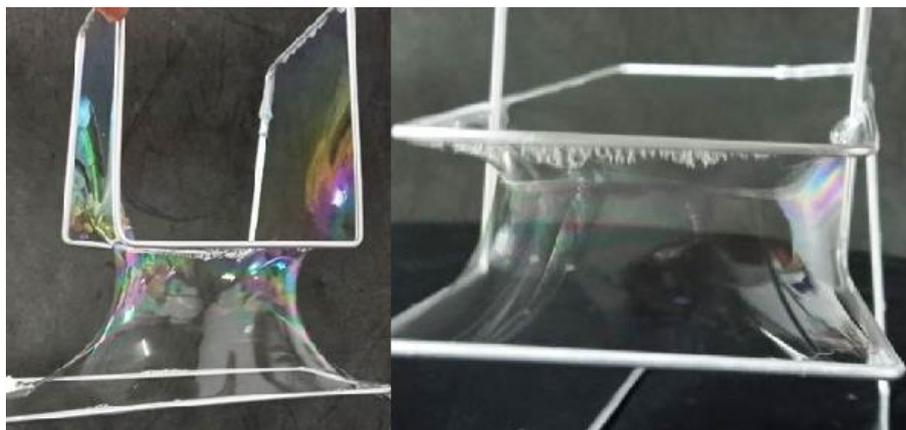
Figura 85 – Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Agora, vamos visualizar as superfícies resultantes de alguns movimentos feitos com as traves usadas anteriormente para a produção da superfície de Enneper e com o plano limitado pelo retângulo. A fim de conseguir diferentes soluções, a película foi rompida em diferentes regiões.

Figura 86 - Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 87 - Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto



Fonte: Elaboração própria, 2020.

A foto abaixo nos mostra as superfícies resultantes de movimentos feitos com o contorno do tetraedro e com o plano limitado pelo retângulo.

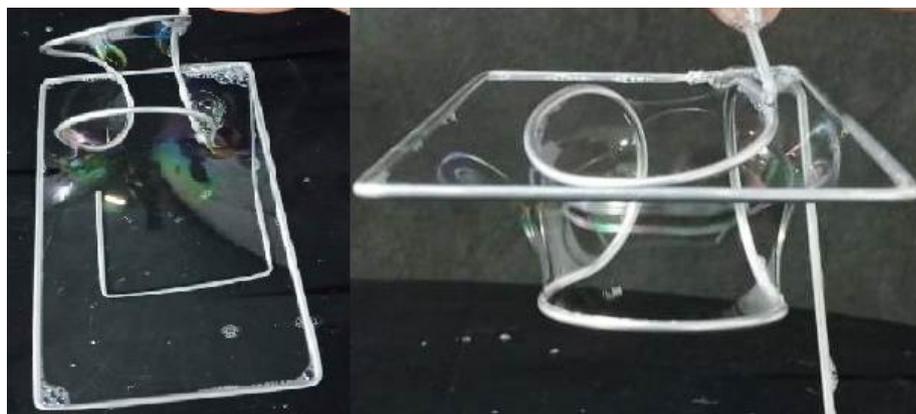
Figura 88 - Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto



Fonte: Elaboração própria, 2020.

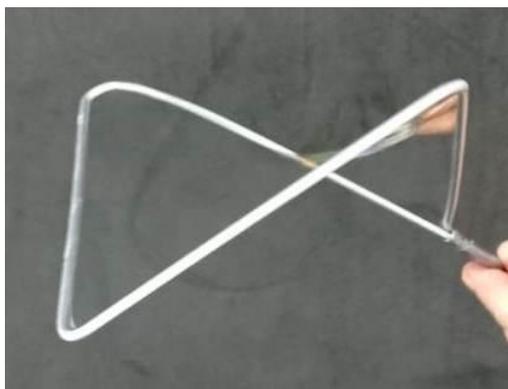
Na próxima imagem, vamos visualizar as superfícies resultantes de alguns movimentos feitos com o contorno em forma de “sela” usada anteriormente para a produção da superfície de Scherk e com o plano limitado pelo retângulo.

Figura 89 - Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Fizemos também outros testes onde não usamos o plano como ponto de partida, o contorno a seguir foi produzido a partir de um losango, mas de tal forma que, seus lados consecutivos, dois a dois são coplanares, e ao mesmo tempo o contorno é não coplanar.

Figura 90 - Mostra experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Desta maneira, as três próximas figuras mostram estudos feitos com esse novo contorno e algumas composições com outras peças. Primeiro com um círculo e depois com o conjunto de hastes onde um fio se prende a cada uma delas, em seguida com a peça que gera a superfície de Scherk.

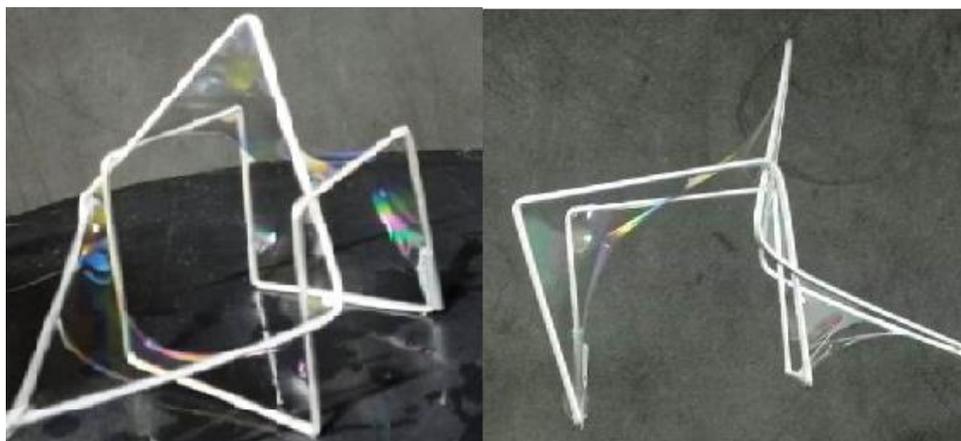
Figura 91 - Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 92 - Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 93 - Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Para finalizarmos este estudo, observamos as superfícies geradas por duas circunferências, quando estas se entrelaçam. Podemos ressaltar ainda que inúmeras outras possibilidades foram pensadas, entretanto tivemos que limitar os experimentos uma vez que nossos objetivos, anteriormente mencionados, foram cumpridos.

Figura 94 - Mostra de experimentos inspirados nos estudos de Frei Otto



Fonte: Elaboração própria, 2020.

4.2 APRESENTAÇÃO E EXPERIMENTOS COM OS ALUNOS

No dia 11 de maio de 2021, uma aula foi apresentada com os alunos do 2º ano do ensino médio, da escola estadual Sesquicentenário em João Pessoa, Paraíba, com o objetivo de entender as percepções deste público perante o tema, superfícies mínimas suas relações e aplicações com outras disciplinas, mais especificamente suas relações e aplicações com a arquitetura. Bem como, testar, discutir e colher dados conforme as reações dos alunos diante das experiências com película de sabão. Os alunos foram divididos em dois grupos, o primeiro com sete alunos e o segundo com oito alunos.

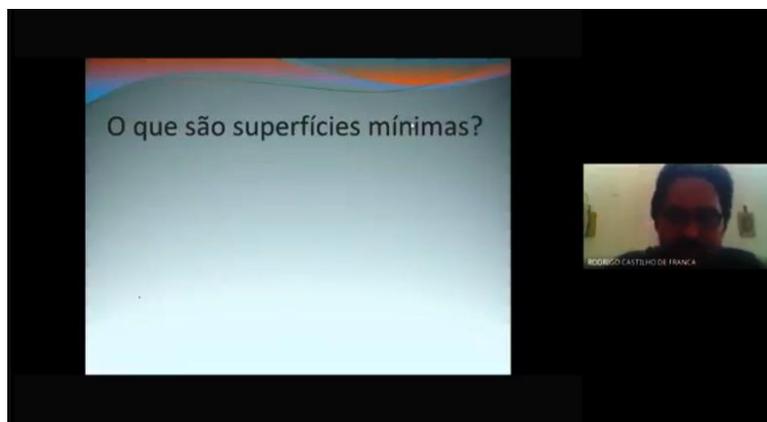
A pandemia, pela qual estamos passando, há mais de um ano, impossibilita, neste momento, as aulas presenciais e desta forma as apresentações foram realizadas através do Google Meet. Optamos, eu e meu orientador, por fazer apresentações para grupos reduzidos de alunos, tendo como estratégia abordar o tema do trabalho e deixar os alunos mostrarem interesse pelo assunto. Desta forma, o público presente foi de alunos que gostam de matemática, geometria, arquitetura, engenharia, e aqueles que demonstram curiosidade por experiências com películas de sabão.

Neste contexto, os objetivos da apresentação foram de mostrar, ainda que, de uma forma superficial o que é uma superfície mínima; as inúmeras aplicações que tais superfícies têm com diferentes áreas do conhecimento como física, química, biologia, medicina, astronomia e arquitetura; as superfícies mínimas clássicas e os principais nomes que contribuíram para o desenvolvimento da teoria matemática por trás destas aplicações, entre eles o brasileiro Celso Costa, com a superfície que leva seu nome; desenvolver a intuição na formação de uma película de sabão; mostrar a formação das principais superfícies mínimas em película e o contorno que as produzem; mostrar experimentos, com película de sabão, aplicados na arquitetura; oferecer um primeiro contato com aqueles arquitetos que foram precursores na utilização das superfícies mínimas em projetos arquitetônicos; mostrar algumas obras inspiradas nestas superfícies; além de estimular os alunos a investigar e aprofundar o tema.

A apresentação foi bastante interativa, de tal forma que os alunos eram questionados e também eram motivados a questionar cada situação proposta. Num primeiro momento eles visualizaram alguns slides e então foi apresentada a ideia de

superfície mínima com sendo a superfície de menor área que abrange um contorno pré-fixado.

Figura 95 - Mostra da apresentação



Fonte: *Print screen* de tela. Elaboração própria, 2020.

Mostramos algumas relações das superfícies mínimas em diferentes áreas como as pontes de Hidrogênio que se formam como um tetraedro e sua ligação central é visualizada quando mergulhamos este contorno na solução de água e sabão, o D.N.A. e seu movimento helicoidal, algumas plantas e seu crescimento que busca sempre o menor esforço, portanto buscando a superfície de menor área para um determinado contorno a ser coberto. Citamos e visualizamos alguns fenômenos astronômicos, como buracos negros e buracos de minhoca e seus prováveis movimentos helicoidais e do tipo Catenóide, respectivamente.

Figura 96 - Mostra da apresentação



Fonte: *Print screen* de tela. Elaboração própria, 2020.

Um breve histórico, da evolução e descobertas matemáticas das superfícies mínimas, foi apresentado com a definição do plano (Euclides, séc. IV a.C), o Catenóide (Euler em 1764), o Helicóide (Meusnier em 1776), a superfície de Sherk (1835), superfície de Enneper (1864) e a superfície de Costa (1982), esta última tendo maior destaque, a fim de motivar os alunos, pois seu autor é um brasileiro, além disso foi uma descoberta que abriu caminhos para novos trabalhos e inspirou artistas e arquitetos pelo mundo.

Assim, os alunos estavam ansiosos para visualizar as anunciadas experiências com as películas de sabão. A estratégia foi de montar, nas quatro primeiras experiências, perguntas com três alternativas de possíveis formações de superfícies, para determinados contornos que eram previamente mostrados a eles. Com isso, cada participante anunciava sua resposta e os dados foram coletados em uma tabela para que pudessem ser analisados nesse trabalho. Outras experiências também foram realizadas sem tal formalismo, como veremos mais a frente. A seguir descrevemos tais experiências, suas respectivas opções de solução e os resultados apresentados pelos alunos.

Experiência 1: Nesta experiência queremos provar que a película de sabão realmente tem a menor área possível. Para tanto, foi mergulhado um círculo com uma linha amarrada nele e nesta linha foi feito um laço.

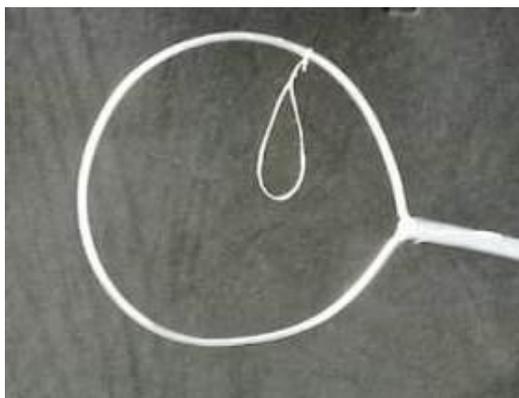
A pergunta feita foi: **Qual será a película resultante quando rompermos a película, dentro deste laço?**

Figura 97 - Mostra da apresentação



Fonte: *Print screen* de tela. Elaboração própria, 2020.

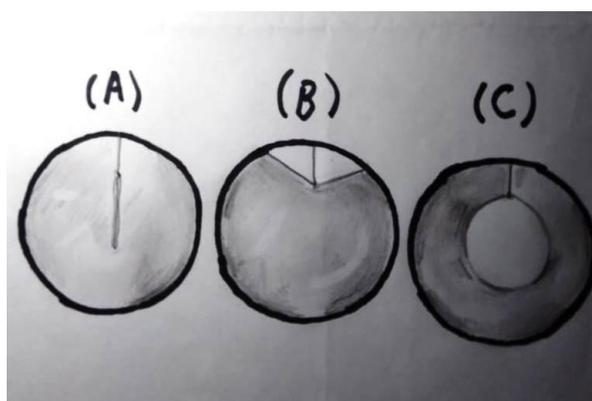
Figura 98 - Mostra da apresentação



Fonte: Elaboração própria, 2020.

As alternativas apresentadas estão na figura abaixo.

Figura 99 - Mostra da apresentação



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 100 - Mostra da apresentação



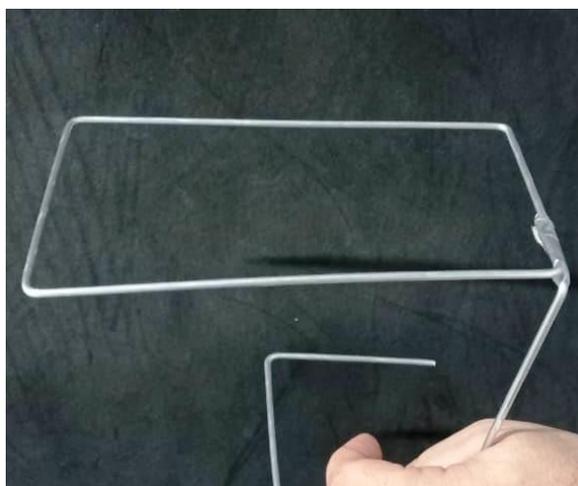
Fonte: *Print screen* de tela. Elaboração própria, 2020.

Conforme foto acima, a resposta certa seria a letra C. Conforme os dados coletados apenas 20% dos alunos escolheram esta alternativa. Neste momento se faz necessário explicar o porque do laço assumir a forma circular. Hora, é fato que o círculo contém a maior área possível para um determinado contorno fixo, então este deveria ser o formato para que a película restante tivesse a menor área possível, o que justifica o formato resultante.

Experiência 2: Nesta experiência queremos provar que o plano é uma superfície mínima. Para tanto, foi mergulhado um contorno retangular.

A pergunta feita foi: **Qual será a película resultante quando retirarmos este retângulo?**

Figura 101 - Mostra da apresentação



Elaboração própria, 2020.

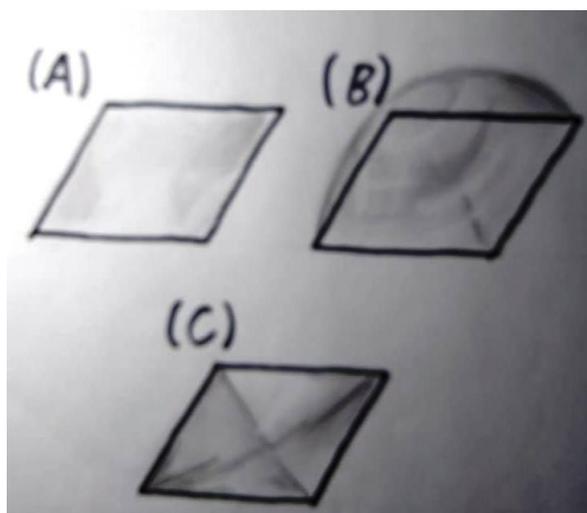
Figura 102 - Mostra da apresentação



Fonte: *Print screen* de tela. Elaboração própria, 2020.

As alternativas apresentadas estão na figura que segue.

Figura 103 - Mostra da apresentação



Elaboração própria, 2020.

Figura 104 - Mostra da apresentação

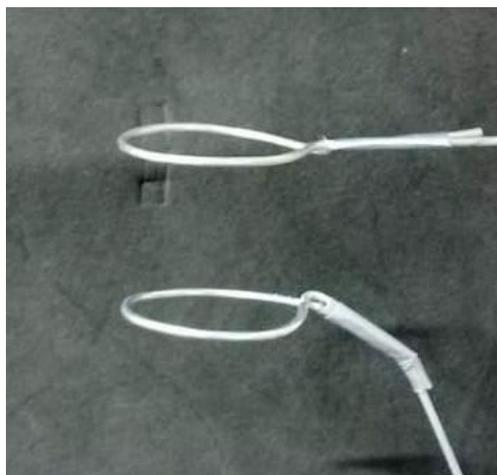


Fonte: *Print screen* de tela. Elaboração própria, 2020.

Conforme foto acima, a resposta certa seria a letra A. Conforme os dados coletados 60% dos alunos escolheram esta alternativa. Neste momento se faz necessário ressaltar que o plano é uma superfície mínima e como o retângulo é um contorno plano, então o resultado não poderia ser diferente.

Experiência 3: Nesta experiência queremos provar que o Catenóide é uma superfície mínima. Para tanto, foram mergulhados dois contornos circulares de mesmo diâmetro, e depois de unidos faríamos um movimento no sentido oposto, tornando-os paralelos, mas com certo distanciamento. Após a explicação de todos os movimentos foi feita a pergunta: **Qual será a película resultante quando fizermos esta sequência de movimentos?**

Figura 105 - Mostra da apresentação



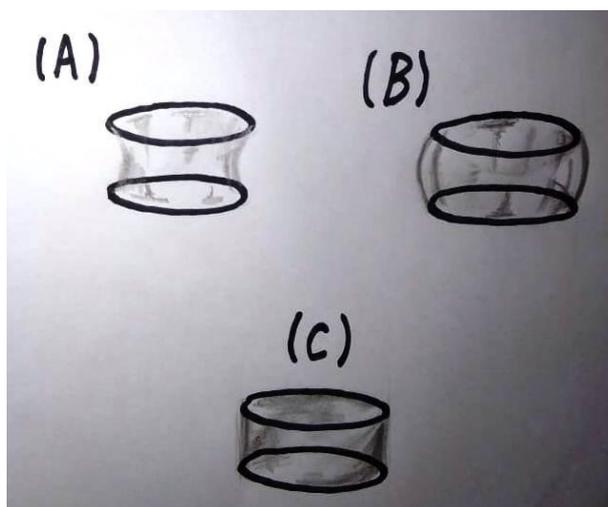
Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 106 - Mostra da apresentação



Fonte: Elaboração própria, 2020.

As alternativas apresentadas estão na figura que segue.

Figura 107 - Mostra da apresentação

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Podemos visualizar o resultado na figura abaixo.

Figura 108 - Mostra da apresentação

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Conforme foto acima, a resposta certa seria a letra A. Conforme os dados coletados 80% dos alunos escolheram esta alternativa. Neste momento se faz necessário ressaltar que o Catenóide é uma superfície mínima e, desta maneira, a película vai buscar esta forma.

Experiência 4: Nesta experiência queremos provar que o Helicóide é uma superfície mínima. Para tanto, foi mergulhado um contorno em forma de espiral. Após a explicação e visualização da peça, foi feita a pergunta.

Figura 109 - Mostra da apresentação

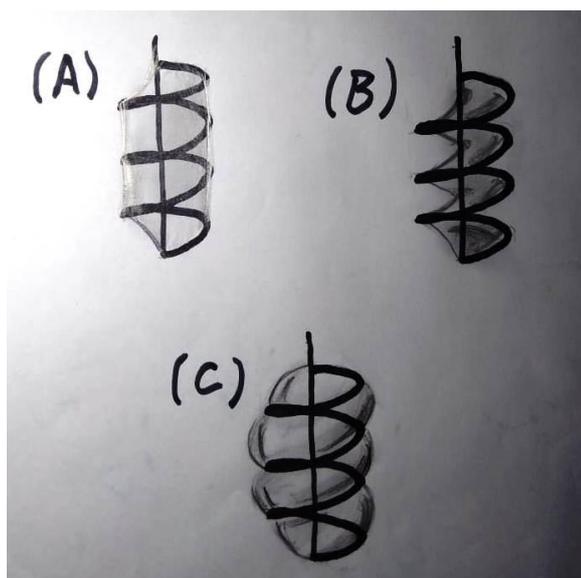


Fonte: Elaboração própria, 2020.

A pergunta feita foi: Qual será a película resultante quando fizermos a retirada da peça imersa na solução preparada?

As alternativas apresentadas estão na figura abaixo.

Figura 110 - Mostra da apresentação



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 111 - Mostra da apresentação

Fonte: *Print screen* de tela. Elaboração própria, 2020.

Figura 112 - Mostra da apresentação

Fonte: Elaboração própria, 2021.

Conforme foto acima, a resposta certa seria a letra B. Conforme os dados coletados 80% dos alunos escolheram esta alternativa. Neste momento se faz necessário ressaltar que o Helicóide é uma superfície mínima, desta maneira a película vai buscar esta forma.

A tabela abaixo mostra os dados coletados, com as porcentagens, de acordo com as respostas dos alunos. Em vermelho estão as repostas corretas. Assim, podemos extrair desta e pequena amostra que no primeiro momento os alunos não tinham, de maneira intuitiva, a ideia da película se acomodando em um contorno buscando a menor área. A porcentagem de erro (80%) da primeira pergunta nos

mostra esse fato. Com a evolução dos questionamentos e debates dos porquês das formas resultantes, ocorridos durante esses experimentos, percebemos a evolução deste pensamento. Neste sentido, concluímos que nossa percepção pode ser treinada quando entendemos um padrão de comportamento.

Tabela 1 – Dados percentuais do questionário aplicado em alunos

	Pergunta 1	Pergunta 2	Pergunta 3	Pergunta 4
A	9 (60%)	9 (60 %)	12 (80 %)	3 (20 %)
B	3 (20 %)	5 (33,3 %)	1 (6,7%)	12 (80 %)
C	3 (20 %)	1 (6,7%)	2 (13,3%)	X

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Na sequência de nossa apresentação continuamos com outros experimentos, mas sem tanto formalismo. No intuito de deixar a aula mais dinâmica, apresentamos os resultados da imersão de alguns poliedros como o cubo e o tetraedro, suas relações com formas biológicas e com experimentos de Plateau. Contudo, o foco ainda eram as superfícies mínimas, tais como Ennepper, Scherk, superfície de Costa e suas relações com a arquitetura. Então após mostrarmos alguns resultados com película, retornamos aos slides para mostrar aos alunos através de fotos como essas superfícies são contempladas em vários projetos arquitetônicos contemporâneos.

Figura 113 - Mostra da apresentação



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 114 - Mostra da apresentação



Fonte: *Print screen* de tela. Elaboração própria, 2020.

Figura 115 - Mostra da apresentação



Fonte: *Print screen* de tela. Elaboração própria, 2020.

Figura 116 - Mostra da apresentação



Fonte: *Print screen* de tela. Elaboração própria, 2020.

Figura 117 - Mostra da apresentação

Fonte: *Print screen* de tela. Elaboração própria, 2021.

Com esta ligação das superfícies mínimas com a arquitetura moderna, retornamos aos experimentos com a meta de mostrar aos participantes as simulações dos experimentos de Frei Otto e compará-los com sua obra, além de perceber a influência que o arquiteto alemão teve para as gerações seguintes de arquitetos nas obras modernas anteriormente citadas.

Figura 118 - Mostra da apresentação

Fonte: *Print screen* de tela. Elaboração própria, 2020.

Nesta parte final de nossa apresentação percebemos certa euforia dos alunos e, de modo geral, a resposta deles foi além das expectativas. Durante toda a apresentação eles estavam muito admirados com o novo mundo de superfícies colocado diante deles com tantas possibilidades. Aqui vale contar, que quando agendamos a apresentação foi criado um grupo de whatsapp, para facilitar a comunicação, e após as apresentações foi possível visualizar várias mensagens

positivas. Alguns participantes da primeira apresentação se fizeram presentes também na segunda aula. Na imagem a seguir temos um compilado de tais mensagens, sem dúvidas de muita valia para nossos objetivos.

Figura 119 – Compilado de mensagens do Whatsapp



Fonte: *Print screen* de tela. Elaboração própria, 2020.

CAPÍTULO 5

Arquitetura e superfícies mínimas no ensino médio: um projeto didático

Conforme aprofundávamos no estudo das Superfícies Mínimas, no decorrer da elaboração deste trabalho, fomos amadurecendo a proposta de um trabalho mais a longo prazo com os alunos. Desta forma, para os próximos anos pretendemos implementar um projeto para trabalhar com as Superfícies Mínimas, em turmas do segundo ano do Ensino Médio, contudo, este pode ser facilmente adaptado para outras turmas, até mesmo do ensino fundamental.

Neste capítulo final do nosso trabalho, iremos apresentar uma proposta de projeto para ser vivenciada com alunos do ensino médio. Para tanto, se faz necessário entender que a prática pedagógica na perspectiva do trabalho com projetos, precisa estar focada em uma aprendizagem que tem como princípio norteador a problematização e a contextualização, isto é, ao ensinar os conteúdos de matemática é necessário estarmos atentos para suas funções, bem como os contextos em que se utiliza, para que esta experiências não seja desprovida de seus significados e sua importância, deve ser entendido como uma proposta de organização e desenvolvimento dos conteúdos com participação dos alunos no processo de construção do conhecimento. O papel do professor é propor problemas e orientar os alunos na busca da solução. Já o do aluno é participar da construção do conhecimento por meio da pesquisa/ação. O projeto ora apresentado vem trazendo experiências concretas que possibilitam uma leitura associando a teoria com a prática. Um outro aspecto que consideramos importante nesta proposta de trabalho é a aprendizagem numa perspectiva interdisciplinar possibilitando os aprofundamentos dos conhecimentos a partir daquilo que agrega as áreas de conhecimento, apesar de suas peculiaridades.

Neste contexto, o projeto deve observar as orientações da BNCC (2017). Assim, em conformidade com esta, pretendemos apresentar aos alunos novos conhecimentos de forma a incentivar seus próprios raciocínios, representações, comunicações e argumentações, fazendo investigações e construções de modelos na busca pela resolução de problemas através de recursos matemáticos. De acordo com a BNCC (2017, p. 529),

[...] novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos.

Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas.

Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.

Projeto: Superfícies mínimas no ensino médio e suas aplicações na arquitetura.

Ano escolar; duração: este projeto está organizado para ser implementado no contraturno das aulas convencionais, visando atender os alunos que fizerem opção por matemática e ciências das naturezas na implantação do novo ensino médio. A duração será de 9 semanas com uma carga horária de 18 aulas de 45 minutos, ou seja 1 hora e meia (duas aulas) por semana.

Justificativa: as superfícies mínimas no ensino médio trazem no seu bojo uma variedade de conceitos relacionados com diversas aplicações, o que sucinta um cenário favorável para o ensino e aprendizagem da Matemática contrapondo-se ao modelo de ensino em que os conceitos são abordados seguindo uma ordem de definição – teorema – exemplos – exercícios, sendo que os exercícios são resolvidos de maneira mecanizada e desprovidos de qualquer contextualização. Tal modelo não proporciona situações que permitam ao aluno elaborar hipóteses e conjecturas acerca do objeto de estudo no sentido não somente de se procurar buscar a solução para o problema, mas também construir o conhecimento. Embora não seja um tema contemplado pelo Enem e nem esteja relacionado, de maneira direta, nas habilidades

citadas na BNCC (2017), podemos fazer diversas pontes e correlações entre este e aquelas que estão. Neste sentido, nossa proposta busca trabalhar as superfícies mínimas tanto em momentos específicos direcionados por práticas, experiências, construções e pesquisa como também em paralelo com o as aulas em que serão trabalhados os conteúdos curriculares tradicionais, ou seja, tentaremos aproveitar da melhor maneira a matemática, no nível do ensino médio, ligada a este rico tema. Podendo ainda ser ampliado, pois podemos trabalhar de maneira interdisciplinar com as aulas de artes, onde a montagem e confecção das peças seriam realizadas. Ainda no sentido da interdisciplinaridade alguns tópicos podem ser abordados em colaboração com física, biologia e química. Com a física, onde podemos abordar a tensão superficial, as propriedades da óptica nas películas de sabão, a física de superfície, energia mínima, as leis de Plateau, as formas helicoidais e do tipo Catenóide, dos buracos negros e buracos de minhoca respectivamente, entre outros. Na biologia podemos destacar, a utilização dos princípios de otimização da natureza em usos diversos, como os radiolários, micro-organismos marinhos com formato semelhantes às películas de sabão em contornos poliédricos, a forma helicoidal do DNA e do crescimento de algumas plantas, entre outros. Nas aulas de química podemos investigar as propriedades químicas dos melhores aditivos para nossa mistura de água e sabão, além disso, as pontes de hidrogênio e ligações dos alcanos que assumem formatos semelhantes às películas de sabão em contornos poliédricos, podem ser exploradas. Dessa forma, queremos não somente que o estudante perceba as conexões e aplicações das superfícies mínimas, mas também, que toda a matemática pode ser inserida em um contexto do seu cotidiano e relacionada com inúmeras áreas do conhecimento.

Sendo assim, em nossa própria disciplina devemos relacionar alguns conteúdos e habilidades tradicionais de maneira a motivar o interesse dos estudantes por toda a matemática, dessa forma queremos estimular as soluções individuais dentro de trabalhos em grupos de maneira dinâmica. De acordo com a BNCC (2017, p. 530),

[...] no Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir aos estudantes o desenvolvimento de competências específicas. Relacionadas a cada uma delas, são indicadas, posteriormente, habilidades a ser alcançadas nessa etapa.

As competências não têm uma ordem preestabelecida. Elas formam um todo conectado, de modo que o desenvolvimento de uma requer, em determinadas situações, a mobilização de outras. Cabe observar que essas competências consideram que, além da cognição, os estudantes devem desenvolver atitudes de autoestima, de perseverança na busca de soluções e de respeito ao trabalho e às opiniões dos colegas, mantendo predisposição para realizar ações em grupo.

Por sua vez, embora cada habilidade esteja associada a determinada competência, isso não significa que ela não contribua para o desenvolvimento de outras [...].

E deste modo, conforme a BNCC (2017, p. 538), “[...] para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível”.

Problemas a serem discutidos: para direcionar a investigação dos alunos sobre as relações entre superfícies mínimas, arquitetura e a geometria do ensino médio, sem prejuízo de outras que eles possam propor, alguns questionamentos devem ser feitos, como por exemplo: Por quê a película de sabão assume a menor área para um contorno fixo? Como podemos provar este fato usando a matemática do ensino médio? Como se iniciou o estudo das superfícies mínimas? Como elementos geométricos são usados na arquitetura? Como podemos perceber a variação da área de uma superfície no contexto do ensino médio? Como podemos trabalhar o conceito de distâncias mínimas, usando película de sabão? Por quê a bolha de sabão é esférica? Como os arquitetos utilizaram os estudos com película de sabão em seus projetos?

Objetivos gerais e específicos do projeto:

Objetivos gerais: contribuir para a integração do estudante na sociedade em que vive, proporcionando-lhe conhecimentos básicos de teoria e prática da geometria das Superfícies Mínimas. Desenvolver a capacidade de raciocínio lógico e organizado, relacionando a geometria das Superfícies Mínimas e suas aplicações na arquitetura com problemas práticos e com outros conceitos matemáticos.

Objetivos específicos: compreender que a película de sabão assume a menor área para um contorno fixo. Entender as propriedades da tensão superficial de uma película de sabão. Comprovar que o círculo é o contorno com a maior área para um comprimento fixo. Entender os contornos que formam as superfícies mínimas clássicas e outras. Entender o método de aproximação para obter a área. Entender os diferentes métodos para obter a área e concluir que para um contorno qualquer película de sabão mostra superfície de menor área. Estudar as aplicações das superfícies mínimas na arquitetura e os conceitos de translação, reflexão, rotação. Estudar as aplicações das superfícies mínimas e os conceitos de semelhança, ampliação e redução. Entender a formação das menores distâncias entre pontos na prática experimental. Estudar e compreender o cálculo de distâncias usando, a segunda lei de Plateau e lei dos cossenos. Estudar e compreender as o cálculo de distâncias em situações contextualizadas. Visualizarmos a superfície mínimas formada em contornos poliédricos. Estudar e compreender o cálculo de volumes em poliedros. Estudar e compreender o cálculo de áreas superficiais em poliedros. Estudar e compreender a propriedade isoperimétrica das bolhas de sabão. Estudar e compreender, de maneira simplificada, os primeiros passos de um projeto arquitetônico: Estudo da forma e da estrutura, na construção de maquetes.

Conteúdos: no decorrer de nosso projeto, devemos ter em mente certa flexibilização para argumentos e sugestões que se apresentarem, contudo, algumas habilidades que por hora pensamos ser adequadas aos nossos objetivos, podem ser destacadas, as quais são apresentadas pela BNCC (2017, p. 543-545):

[...] (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para

construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

Tais habilidades serão relacionadas com novos saberes e teremos a missão, no decorrer deste projeto, de fazer a ponte entre as superfícies mínimas e a matemática curricular tradicional, considerando os objetivos específicos. Neste sentido, serão trabalhados, sequencialmente os seguintes tópicos e conteúdos: tensão superficial, área de figuras planas, contexto histórico e Superfícies Mínimas clássicas, aplicações das Superfícies Mínimas na arquitetura, transformações em superfícies, variação da área em superfícies planas e função quadrática, superfícies Mínimas no cálculo de distâncias, superfícies Mínimas e poliedros, propriedade isoperimétrica das bolhas de sabão, projeto arquitetônico: Estudo da forma e da estrutura, projeto arquitetônico: Construção da maquete.

Metodologia de ensino: o professor antes de iniciar as experiências/atividades propostas é importante lembrar de apresentar problemas que sejam acessíveis ao entendimento dos alunos, gerem interesse e proporcionem uma concepção preliminar da tarefa, ligar os problemas à prática social dos alunos e ao seu cotidiano, levantar as concepções prévias dos alunos sobre os problemas, colocar os alunos em contato com o tema a ser desenvolvido (contextualização), procurando despertar sua curiosidade e motivando-os para a aprendizagem, orientar os alunos para a busca de informações, levantar com os alunos as possibilidades de solução do problema, propor observações, experimentos e estabelecer correlações com outras áreas de conhecimento. Sendo assim, no início das aulas faremos apresentações de slides para que os alunos tenham os primeiros contatos com os novos saberes e aplicações das superfícies mínimas e suas aplicações em arquitetura. Nossas atividades e experimentos serão realizados em grupos. Então faremos, juntamente com os alunos,

as experiências referentes às atividades propostas, onde faremos registros fotográficos, anotações e tabelas, além de construções de peças e maquetes. Em seus experimentos e observações o aluno será estimulado a manter o pensamento crítico em relação às suas hipóteses, para que ele possa formalizar seus resultados sob as orientações do professor e juntos demonstrar a validade ou não da conjectura inicial. Segundo a BNCC (2017, p. 540),

[...] Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais 'formais', incluindo a demonstração de algumas proposições.

Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar seus resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.

Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências.

ATIVIDADES PROPOSTAS:

Atividade dinâmica 1: tensão superficial

Em todo líquido está presente a chamada tensão superficial, que é a resistência da superfície deste líquido ao sofrer uma pressão no sentido de romper tal superfície. Na água esta tensão é alta, mas quando misturamos detergente ela diminui consideravelmente e essa superfície se torna mais flexível. Normalmente a superfície de um líquido é comparada à uma membrana elástica. Podemos observar a tensão superficial da água colocando pequenos objetos, como um clipe, em sua superfície, de tal forma que este não afunde. Para uma comparação das tensões superficiais da água e da mistura de água e sabão, faremos o seguinte experimento: Preparamos dois potes iguais, um com água e o outro com a mistura de água e sabão. Em seguida colocamos talco em ambos, assim poderemos perceber que no pote que contém apenas água o talco fica na superfície diferentemente do pote com a mistura de água e sabão, pois neste a tensão superficial será menor. Para nossos próximos experimentos precisamos

usar tal mistura, pois as moléculas de detergente (sabão) se misturam com as moléculas de água e reduzem a tensão superficial, ao mesmo tempo as moléculas de sabão se atraem reduzindo a área superficial. Desta forma a película de sabão terá a menor área para um determinado contorno.

Atividade dinâmica 2: área máxima e área mínima

Nesta proposta queremos explorar a matemática em torno do experimento 1, Seção 4.2. A partir de linhas com 30 centímetros (este comprimento é apenas uma sugestão que se justifica pela grande quantidade de divisores o que facilita a construção de polígonos regulares), construiremos vários contornos poligonais, regulares, polígonos quaisquer, outros contornos devem ser trabalhados como contornos aleatórios e também aqueles compostos por setores circulares e finalmente o círculo. Queremos aqui calcular as áreas e compará-las. Qual é o contorno que proporciona a maior área? Para estes cálculos a estratégia é dividi-los em três momentos, o cálculo intuitivo, experimental e formal. No primeiro faremos a coleta e análise dos resultados, no segundo usaremos uma malha quadriculada para desenvolvermos o importante estudo das aproximações, este momento é último para os contornos aleatórios e por fim usaremos as fórmulas para maior precisão, conclusão e prova do experimento citado. Ainda para este último momento de cálculos destacamos que eles serão realizados em paralelo com as aulas convencionais pois de acordo com produção direcionada dos contornos faremos uma revisão completa de áreas de figuras planas, com as várias formas de calcular área de triângulos, incluindo a fórmula de Heron, quadriláteros, polígonos regulares, setor circular e círculo cuja demonstração fica mais cognoscível quando comparamos com a demonstração para polígonos regulares (produto entre semiperímetro e apótema).

Com os resultados em mãos poderemos realizar experimento 1, Seção 4.2, onde provaremos então que a película de sabão assume a menor área possível para um contorno dado. Desta forma, estaremos em conformidade com a habilidade EM13MAT307, já descrita neste escopo dissertativo.

Atividade dinâmica 3: superfícies mínimas clássicas

Nesta atividade, mostraremos com mais detalhes o histórico das superfícies mínimas e suas aplicações com ênfase nas aplicações ligadas à arquitetura. Em seguida, cada grupo deverá produzir os contornos necessários para a produção das superfícies mínimas clássicas como descrito no capítulo anterior e realizaremos os experimentos 2, 3 e 4 da Seção 4.2, onde cada grupo fará uma apresentação.

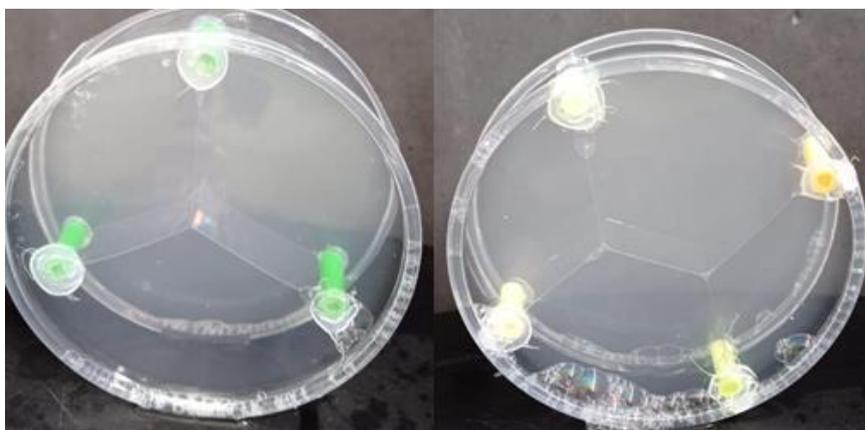
Atividade dinâmica 4: pesquisa arquitetônica

A proposta agora é de que cada grupo pesquise obras arquitetônicas nas quais devemos identificar as seguintes características: superfícies mínimas, superfícies ou elementos que sofreram transformações isométricas e superfícies ou elementos que sofreram transformações homotéticas, estas características podem estar em um único projeto ou não, além disso as obras devem conter uma ficha com arquiteto responsável, localização e ano de sua execução. Esta proposta será realizada em paralelo com as aulas convencionais, onde reforçaremos os conceitos de translação, reflexão, rotação, semelhança, ampliação e redução, através de conceitos, exemplos e questões contextualizadas (ENEM-2ª aplicação 2018, prova azul, questão 140). Encerrado o período investigativo, cada grupo fará uma apresentação. Desta forma, estaremos em conformidade com a habilidade EM13MAT105.

Atividade dinâmica 5: menor trajetória na ligação de pontos

Iremos visualizar, através da prática experimental, a menor trajetória na ligação de pontos. Para dois pontos, a reta é a resposta relativamente óbvia para alunos neste nível. Entretanto, para outras quantidades não é tão trivial, analisaremos suas repostas intuitivas para três e quatro pontos e então com placas transparentes paralelas unidas por pinos teremos as respostas para as conjecturas apresentadas por eles, após retirarmos tais conjuntos da solução de água e sabão.

Figura 120 - Mostra da experiência sobre a menor distância entre pontos.



Fonte: Elaboração

Neste contexto, iremos trabalhar com questões contextualizadas e a matemáticas por trás dos cálculos de distâncias, poderemos provar na prática a segunda lei de Plateau que afirma que superfícies de sabão sempre se encontram em três formando ângulos de 120° entre elas. Então, conhecido um dos ângulos outras possibilidades se abrem, faremos cálculos de distâncias e áreas usando a lei dos cossenos e a fórmula da área de um triângulo conhecidos dois lados consecutivos e o ângulo entre eles, fará parte desta atividade a criação de uma questão contextualizada que envolva a nossa região, por exemplo, qual seria a melhor localização para que o governo estadual construísse determinada obra afim de atender com este serviço público as populações de João Pessoa, Campina Grande e Guarabira? Desta forma, estaremos em conformidade com as habilidades EM13MAT201 e EM13MAT308.

Atividade dinâmica 6: superfícies mínimas e poliedros/ propriedade isoperimétrica das bolhas de sabão

Faremos a construção de vários contornos poliédricos e usaremos os contornos poliédricos da Seção 4.2 (Figura 113), então faremos as imersões em solução de água e sabão no sentido de visualizarmos a superfície mínimas que se forma em cada um. Faremos os cálculos de seus volumes, das superfícies formadas pelas películas de sabão e também das áreas totais, a fim de compramos os resultados obtidos. Por fim, vamos calcular o volume da esfera, usando a mesma área superficial dos poliedros anteriores, para concluirmos experimentalmente que bolhas de sabão assumem este formato pois ele permite o maior volume para uma área superficial fixa. Esta atividade será realizada em paralelo com as aulas convencionais, onde trabalharemos as fórmulas e demonstrações necessárias. Desta forma, estaremos em conformidade com as habilidades EM13MAT309 e EM13MAT504, da BNCC.

Atividade dinâmica 7: experimentos de Frei Otto

Nesta atividade, faremos a construção de vários contornos, como aqueles mostrados no capítulo anterior, no intuito de reproduzirmos as experiências com películas de sabão realizadas pelo arquiteto Frei Otto. Cada grupo fará seus próprios contornos e estudos experimentais registrando os resultados afim de que os utilizem na próxima atividade.

Atividade dinâmica 8: projeto arquitetônico: estudo da forma e da estrutura

Nesta atividade, faremos um projeto arquitetônico de uma estrutura tensionada usando as superfícies mínimas. Para tanto, usaremos os resultados da atividade 7 e cada grupo deverá

estar com um esboço da superfície que será utilizada no projeto. E então, faremos os testes envolvendo tal superfície para que cada grupo defina a estruturas necessária para formá-la e os materiais necessários para a próxima atividade.

Atividade dinâmica 9: projeto arquitetônico: construção da maquete

Nesta atividade, cada grupo fará uma maquete, na escala 1:100, do projeto realizado na atividade anterior. O desafio é materializar a superfície mínima formada pela película de sabão. Assim, cada grupo traçará sua estratégia quanto ao material, podemos citar alguns exemplos, como tecidos, papelão, filmes plásticos, entre outros.

Conclusão e fechamento: para o fechamento de nosso projeto, faremos uma grande exposição onde serão mostradas as maquetes, bem como fotos e cartazes explicativos de todo o processo e das atividades realizadas. Neste momento, apresentaremos também uma palestra para todo o colégio, mostrando as aplicações das superfícies mínimas na arquitetura onde os próprios alunos farão as experiências com película de sabão.

Critérios de avaliação: por meio da análise individual e em grupo da participação das atividades e do resultado final na produção do material utilizado para o fechamento do projeto. Visando o atendimento dos objetivos mais gerais do ensino da matemática.

O quadro abaixo mostra uma ideia inicial de planejamento para as aulas, ou seja, um plano para o projeto.

Quadro 1 - Projeto: Superfícies mínimas no Ensino Médio

(contínuo)

COMPONENTE CURRICULAR:	Matemática		
ANO/SÉRIE:	2ª Série do Ensino Médio		
CARGA HORÁRIA ANUAL:	18 aulas		
DOCENTE:	Rodrigo Castilho de França		
EMENTA			
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Tensão superficial. ▪ Área de figuras planas. ▪ Contexto histórico e Superfícies Mínimas clássicas. ▪ Aplicações das Superfícies Mínimas na arquitetura. ▪ Transformações em superfícies. ▪ Superfícies Mínimas no cálculo de distâncias. ▪ Superfícies Mínimas e poliedros/ Propriedade isoperimétrica das bolhas de sabão. ▪ Projeto arquitetônico: Estudo da forma e da estrutura. ▪ Projeto arquitetônico: Construção da maquete. 			
OBJETIVO GERAL			
Contribuir para a integração do estudante na sociedade em que vive, proporcionando-lhe conhecimentos básicos de teoria e prática da geometria das Superfícies Mínimas. Desenvolver a capacidade de raciocínio lógico e organizado, relacionando a geometria das Superfícies Mínimas e suas aplicações na arquitetura, com problemas práticos e com outros conceitos matemáticos.			
METODOLOGIA DE ENSINO			
Os seguintes métodos de ensino serão utilizados para se chegar aos objetivos deste projeto: Aulas práticas, expositivas e dialogadas; Método de trabalho em grupos (estudo dirigido, solução de problemas de maneira: intuitiva, experimental e formal); Aulas práticas para confecção de peça, contornos com matérias diversos; Vídeos demonstrativos; Experimentos orientados com película de sabão, estudo de forma e estrutura de projetos arquitetônicos na construção de maquete.			
CRONOGRAMA			
	CONTEÚDO	OBJTIVOS (Específicos)	ATIVIDADES DINÂMICAS
Aula 1 e 2	Tensão superficial.	Compreender que a película de sabão assume a menor área para um contorno fixo. Entender as propriedades da tensão superficial.	1
Aula 3 e 4	Área de figuras planas.	Comprovar que o círculo é o contorno com a maior área para um comprimento fixo. Entender o método de aproximação para obter a área.	2
Aula 5 e 6	Contexto histórico e Superfícies Mínimas clássicas.	Compreender os principais contornos para gerar superfícies mínimas clássicas.	3

Quadro 1 - Projeto: Superfícies mínimas no Ensino Médio

(conclusão)

Aula 7 e 8	Aplicações das Superfícies Mínimas na arquitetura.	Entender as diferentes aplicações das superfícies mínimas na arquitetura.	4
Aula 9 e 10	Transformações em superfícies através de projetos arquitetônicos.	Estudar as aplicações das superfícies mínimas na arquitetura e os conceitos de translação, reflexão, rotação. Estudar as aplicações das superfícies mínimas e os conceitos de semelhança, ampliação e redução.	5
Aula 11 e 12	Superfícies Mínimas no cálculo de distâncias.	Entender a formação das menores distâncias entre pontos na prática experimental.	6
Aula 13 e 14	Superfícies Mínimas e poliedros/ Propriedade isoperimétrica das bolhas de sabão.	Estudar e compreender o cálculo de volumes em poliedros. Estudar e compreender o cálculo de áreas superficiais em poliedros. Estudar e compreender a propriedade isoperimétrica das bolhas de sabão.	7
Aula 15 e 16	Projeto arquitetônico: Estudo da forma e da estrutura.	Estudar e compreender, de maneira simplificada, os primeiros passos de um projeto arquitetônico: Estudo da forma e da estrutura.	8
Aula 17 e 18	Projeto arquitetônico: Construção da maquete.	Estudar e compreender, de maneira simplificada, os primeiros passos de um projeto arquitetônico: na construção de maquetes.	9

Fonte: Elaboração própria, 2021.

REFERÊNCIAS

ALLGAYER, Rodrigo. **Formas naturais e estruturação de superfícies mínimas em arquitetura**. 2009. 167f. Dissertação (Mestrado em Design) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

ALBERTINI, Verena; DURAN, Maria Renata da Cruz. Entrevista – Celso José da Costa. Transcrição de Maria Izabel Cruz Bitar. **Revista História Hoje**, São Paulo, v. 3, n. 5, p. 209-272, jun. 2014. Disponível em: <<https://rhhj.anpuh.org/RHHJ/article/download/127/101>>. Acesso em: 05 jul. 2021.

ANDRADE, Lucimara Aparecida Prestes. **Superfícies mínimas e bolhas de sabão no Ensino Médio**. 2016. 180f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Ceará, Fortaleza, 2016. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/22156> >. Acesso em: 15 jun. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, SEB, 2017.

BURRY, Jane; BURRY, Mark. **The New Mathematics of Architecture**. London: Ed. Thames & Hudson, 2010.

BERTOL, D. **Form geometry structure: from nature to design**. Exton, Pennsylvania: Bentley Institute Press, 2011.

CHAGAS, Thiago Salvador Pacheco. **Bolhas de sabão na educação matemática: explorando a dedução-lógica – PROFMAT 2012**. 214. 78f. Monografia (mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

COSTA, Celso J. **Imersões mínimas completas em R^3 de gênero um e curvatura total finita**. Rio de Janeiro: IMPA, 1982.

CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 2014.

EMMER, Michele. Minimal Surfaces and Architecture: New Forms. **Nexus Netw J**, Milan, v. 15, n. 2, apr. 2012. Disponível em: <<https://core.ac.uk/download/pdf/204352959.pdf> >. Acesso em: 16 jun. 2021.

FIRMO, Célio da Silveira. **Estruturas tubulares enrijecidas por superfícies de dupla curvaturas (hiperbólicas)**. 2003. 194 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2003.

FILM, Frei Otto. **FREI OTTO - MODELING WITH SOAP FILMS**. Youtube, 2015. (01m56s). Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=-IW7o25NmeA>>. Acesso em: 05 jul. 2021.

FRANCO, José Tomás. "Vídeo: Frei Otto, experimentando com bolhas de sabão" [Video: Frei Otto, experimentando con pompas de jabón]. Tradução de Victor Delaqua. **ArchDaily Brasil**, mar. 2015. Disponível em: <<https://www.archdaily.com.br/br/763720/video-frei-otto-experimentando-com-bolhas-de-sabao>>. Acesso em: 28 jun. 2021.

GRANJA, Carlos Eduardo; PASTORE, José Luiz. **Atividades Experimentais de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental**. São Paulo: Editora SM, 2012.

GLANCEY, Jonathan. **A história da arquitetura**. Tradução de Luís Carlos Borges e Marcos Marcionilo. São Paulo: Edições Loyola, 2001.

HERNÁNDEZ, Fernando; VENTURA, Montserrat. **Os projetos de trabalho: uma forma de organizar os conhecimentos escolares**. O conhecimento é um caleidoscópio. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

KAWANO, CARMEM. A Bolha de Sabão em Números. **Revista Galileu**, Rio de Janeiro, v. 187, fev. 2007. Disponível em: <<http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT656726-2680,00.html>>. Acesso em : 05 jul. 2021.

KOLAREVIC, B. **Architecture in the Digital Age: Design and Manufacturing**. New York: Spon Press, 2003.

LIMA, Ronaldo Freire de. **Introdução à Geometria Diferencial**. 1.ed. Macapá: Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 2016.

LOUREIRO, Rondineli Carneiro. **Experimentando a matemática através das bolhas de sabão**. 2014. Monografia (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém – PA, 2014.

MARTINS, Bianca Camargo. (Org.). **Arquitetura e Urbanismo: Planejando e Edificando Espaços**. Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. Disponível em: <<https://www.atenaeditora.com.br/wp-content/uploads/2019/07/E-book-Arquitetura-e-Urbanismo-Planejando-e-Edificando-Espacos-4.pdf>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

MELO, Marcos; ANDRADE, Lucimara. Superfícies mínimas e bolhas de sabão no Ensino Médio. **Revista THEMA**, Pelotas, RS, v. 15, n. 1, p. 51-62, 2018.

PIRES, Janice de Freitas. **A constituição de uma rede de conceitos da geometria complexa da arquitetura contemporânea: das teorias a modelagem paramétrica das superfícies**. 2018. 425f. Tese (Doutorado em Arquitetura e Urbanismo) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.

POTTMANN, Helmut. Architectural Geometry as Design Knowledge. **Architectural Design**, v. 80, n. 04, p. 72-77, ago. 2010. Disponível em: <<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/ad.1109/abstract>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

_____. ; et al. **Architectural Geometry**. 1. ed. Exton, Pennsylvania: Bentley Institute Press, 2007.

SILVA, Gilvaneide Nascimento. **A aplicação de Gauss de superfícies mínimas completas com curvatura total finita**. 2007. 71f. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2007.

SILVA, Juliano Crispim Rocha da. **Aproximação das equações e curvas utilizadas por Niemeyer em Brasília - estudos de casos**. 2018. 101f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília, 2018.

SILVA, Eliel Constantino da. (Org.). **Ensino Aprendizagem de Matemática**. Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. Disponível em: <<https://www.atenaeditora.com.br/wp-content/uploads/2019/08/E-book-Ensino-Aprendizagem-de-Matematica.pdf>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

SILVA, Larissa Nunes da; SILVA, Marlon Polaz da. Uma introdução ao estudo das superfícies mínimas utilizando o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v. 3, n. 2, p. 120-131, 2014.

SILVA, Gabriela C. da. et al. A superfície de Enneper, o catenóide e o helicóide: Superfícies mínimas mergulhadas no \mathbb{R}^3 . In: _____. 11ª Jornada Científica e Tecnológica e 8º Simpósio da Pós-Graduação do IFSULDEMINAS, 11., 8., 2019, Minas Gerais. **Anais Eletrônicos da 11ª Jornada Científica e Tecnológica e 8º Simpósio da Pós-Graduação do IFSULDEMINAS**. Disponível em: <<https://jornada.ifsuldeminas.edu.br/index.php/jcinc1/jcinc1/paper/viewFile/4747/3542>>. Acesso em: 16 jun. 2021.

SONGEL, Juan Maria. **Frei Otto**: conversación com Juan Maria Songel. Barcelona, Spain: Editorial Gustavo Gili, 2008.

_____. **A conversation with Frei Otto**. Tradução de Emily Tell. New York, EUA: Princeton Architectural Press, 2010. Disponível em: <<https://fdocuments.in/document/a-conversation-with-frei-otto.html>>. Acesso em: 05 jul. 2021.

TENENBLAT, Keti. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2.ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 2008.

VEIGA, Breno Tisi Mendes da. **Oscar Niemeyer**: modelagem paramétrica e fabricação digital de edifícios curvilíneos do Parque Ibirapuera e do Memorial da América Latina. 2016. 320 f. Dissertação (Mestrado em Arquitetura e Urbanismo) - Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2016.

VELIMIROVIĆ, Ljubica S. et al. Minimal surfaces for architectural constructions. **Architecture and Civil Engineering**, Sérvia, v. 6, n. 1, p. 89 – 96, nov. 2008. Disponível em: <<http://scindeks-clanci.ceon.rs/data/pdf/0354-4605/2008/0354-46050801089V.pdf>>. Acesso em: 16 jun. 2021.