

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

YURI JIVAGO QUEIROZ LEITE

**MODELOS EM DINÂMICA POPULACIONAL E UMA PROPOSTA
PARA O ENSINO MÉDIO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2021

YURI JIVAGO QUEIROZ LEITE

**MODELOS EM DINÂMICA POPULACIONAL E UMA PROPOSTA PARA O
ENSINO MÉDIO**

**MODELS IN POPULATION DYNAMICS AND A PROPOSAL FOR A HIGH
SCHOOL**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) como requisito para obtenção do título de Mestre em 2021

Orientador: Débora Aparecida Francisco Albanez

CORNÉLIO PROCÓPIO

2021



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite o download e o compartilhamento da obra desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es), sem a possibilidade de alterá-la ou utilizá-la para fins comerciais.



YURI JIVAGO QUEIROZ LEITE

MODELOS EM DINÂMICA POPULACIONAL E UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO.

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Profissional Em Matemática Para A Escola Básica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 29 de Julho de 2021

Prof.a Debora Aparecida Francisco Albanez, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Anderson Paiao Dos Santos, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Lidiane Dos Santos Monteiro Lima, Doutorado - Universidade Federal de Goiás (Ufg)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 29/07/2021.

Dedico este trabalho aos alunos de ensino médio

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora Profa. Dra. Débora A. F. Albanez, pela paciência e pela atenção com que me guiou nesta trajetória.

Aos meus colegas de curso.

À Secretaria do Curso, pela cooperação.

Gostaria de deixar registrado também, o meu reconhecimento à minha família, pois acredito que sem o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação.”

Carl Friedrich Gauss

RESUMO

JIVAGO QUEIROZ LEITE, YURI. MODELOS EM DINÂMICA POPULACIONAL E UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO. 69 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

Este trabalho tem como objetivo o estudo de alguns modelos matemáticos em dinâmica populacional, envolvendo casos de crescimento populacional (modelos de Malthus e Verhulst) e de transmissão de doenças infecciosas (modelo epidemiológico Kermack-Mckendric – SIR). Além disso, uma proposta de atividade relacionada ao modelo de Malthus para ser realizada com estudantes do ensino médio é apresentada.

Palavras-chave: Crescimento populacional. Modelagem matemática. Epidemiologia

ABSTRACT

JIVAGO QUEIROZ LEITE, YURI. MODELS IN POPULATION DYNAMICS AND A PROPOSAL FOR HIGH SCHOOL. 69 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, . Cornélio Procópio, 2021.

The aim of this work is the study of some mathematical models in population dynamics, involving population growth (Malthus and Verhulst models) and infectious diseases transmission (Kermack-Mckendric – SIR epidemic model) cases. Moreover, a proposal of activity related to Malthus model to be applied in high school level students is presented.

Keywords: Population growth. Mathematical modeling. Epidemiology

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Gráfico $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ de uma progressão geométrica	16
FIGURA 2	– Dados sobre a população do Paraná	24
FIGURA 3	– Dados sobre a população do Brasil	25
FIGURA 4	– Curva Logística	32
FIGURA 5	– Variação de $P(t)$	33
FIGURA 6	– Esquema Compartimental de uma epidemia (Modelo SIR)	37
FIGURA 7	– Cidade de Siqueira Campos - PR	45
FIGURA 8	– Fábrica de moto peças - Pro Tork	46
FIGURA 9	– Variação da População dos 25 Municípios do Norte Pioneiro	47
FIGURA 10	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (1)	49
FIGURA 11	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (2)	50
FIGURA 12	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (3)	51
FIGURA 13	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (4)	52
FIGURA 14	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (5)	52
FIGURA 15	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (6)	53
FIGURA 16	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (7)	54
FIGURA 17	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (8)	54
FIGURA 18	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (9)	55
FIGURA 19	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (10)	55
FIGURA 20	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (11)	56
FIGURA 21	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (12)	56
FIGURA 22	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (13)	57
FIGURA 23	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (14)	57
FIGURA 24	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (15)	58
FIGURA 25	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (16)	59
FIGURA 26	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (17)	59
FIGURA 27	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (18)	60
FIGURA 28	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (19)	60
FIGURA 29	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (20)	61
FIGURA 30	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (21)	62
FIGURA 31	– Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (22)	62
FIGURA 32	– Material produzido pelos alunos - página 1	65
FIGURA 33	– Material produzido pelos alunos - página 2	66
FIGURA 34	– Material produzido pelos alunos - página 3	67

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
2.1	PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS (P.G.)	13
2.1.1	Fórmula do termo geral da P.G.	14
2.1.2	Gráfico de uma P.G.	15
2.2	RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM	16
2.2.1	Classificação de uma recorrência	17
2.3	EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA (EDO).	18
2.3.1	Classificação de uma EDO	18
2.3.2	Resolução de uma EDO	19
3	MODELOS MATEMÁTICOS EM DINÂMICA POPULACIONAL	22
3.1	MODELO DE MALTHUS	22
3.2	MODELO DE VERHULST	27
3.3	MODELO SIR DE EPIDEMIOLOGIA KERMACK-MCKENDRICK	36
4	PROPOSTA DE ATIVIDADE EM DINÂMICA POPULACIONAL PARA O ENSINO MÉDIO.	45
4.1	INTRODUÇÃO	45
4.2	DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE	48
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	64
	Apêndice A – MATERIAL DESENVOLVIDOS PELOS ALUNOS	65
	REFERÊNCIAS	68

1 INTRODUÇÃO

Desde a antiguidade, a matemática se configura como uma das mais importantes áreas do conhecimento humano, seja pelo rigor e veracidade dos seus conceitos, seja pela sua diversidade de aplicações na vida cotidiana, servindo de ferramenta para a resolução dos mais variados tipos de problemas, dos mais simples aos mais complexos; desde uma simples medição da área de uma casa, ao projeto de automóveis sofisticados. De acordo com os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais): terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental de Matemática (TECNOLOGICA, 1999) “A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural”.

Não obstante disso a modelagem matemática tem se configurado como uma de suas principais tendências metodológicas, pois procura relacionar conhecimentos matemáticos a uma problemática do dia-a-dia dos alunos, ajudando-os a enxergá-la como algo imprescindível na vida das pessoas. “De maneira simplista, a modelagem matemática consiste numa criação de modelos matemáticos (fórmulas e equações) para explicar um determinado fenômeno natural” (RIGONATTO, 2017).

Ainda mais, é uma das maneiras de tornar o ensino da matemática mais prazeroso e significativo para os estudantes, pois o conhecimento não fica restrito a sala de aula, mas está relacionado com uma situação problema que é do interesse de todos. Conforme o que está descrito na segunda competência da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (AUR, 2018):

“Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer a abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e inventar soluções com base nos conhecimentos das diferentes áreas”.

Dentro desta perspectiva da modelagem matemática, o objetivo deste trabalho é o estudo das Dinâmicas de Populações, modelos matemáticos que descrevem seu crescimento e fatores externos que podem afetá-lo, como é o caso do COVID-19. Segundo Bassanezi

(BASSANEZI, 1999), os biosistemas são quase sempre constituídos de um grande número de populações interrelacionadas. Explicitando, ainda diz que:

“[...]uma população raramente pode ser considerada isolada, a não ser em condições ideais de laboratório ou quando não é possível individualizar no biosistema outra população interagindo com a primeira. Mesmo na análise de populações isoladas, muitos fatores podem contribuir com sua dinâmica — fatores abióticos (temperatura, vento, humidade etc.) e fatores de auto-regulação (espaço, alimento, idade, guerra, etc)”.

Desta forma, serão contemplados alguns dos modelos matemáticos que buscam esclarecer como se dá o crescimento nessas populações, tais como: o Modelo de Malthus (1798), que assume que o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante; o modelo de Verhulst (1838) que supõe que toda população está predisposta a sofrer inibições naturais de crescimento, devendo tender a um valor limite. Em particular, faremos uma análise das equações SIR (suscetíveis-infectados-recuperados), sendo este um modelo relativamente simples e que pode representar as doenças de transmissão direta, como é o caso do Corona vírus.

De modo geral, as doenças que são ditas infecciosas podem ser transmitidas de forma direta, isto é, quando há o contato físico apropriado entre indivíduos considerados suscetíveis com indivíduos infectados, seja pelo contato ou ainda pelo ar que respiramos; e de forma indireta, ou seja, o agente que causa a enfermidade faz uma transição entre um indivíduo infectado e outro suscetível através de um agente intermediário, também conhecido como vetor; como é o caso do mosquito *Aedes Aegypti* (transmissor da dengue), ou do *Trypanosoma cruzi* (Transmissor da doença de chagas).

A dissertação está dividida em cinco capítulos, contando a partir deste. O Capítulo 2 apresenta alguns conceitos preliminares sobre conteúdos matemáticos que serão abordados ao longo deste trabalho, como a progressão geométrica, as relações de recorrência, as equações diferenciais ordinárias e a função exponencial. O Capítulo 3 apresenta o modelo de Malthus na subseção 3.1, suas principais características bem como sua aplicação para prever o número de habitantes do Brasil e do Estado do Paraná para os próximos anos. O modelo de Verhulst é tratado na seção 3.2, que é uma variação do modelo malthusiano, mas que leva em consideração fatores limitantes, ou seja, que impedem o crescimento irrestrito da população. Além disso, um exemplo prático que estipula um valor máximo para o número de habitantes da população no estado do Paraná, levando em conta a taxa média anual de crescimento e sua apresentação gráfica, denominada de “Curva Logística”, é apresentada na seção 3.3 deste trabalho que fala sobre o modelo SIR, que apresenta uma importância para descrever o comportamento de epidemias e

sua propagação em meio à população, em particular do COVID-19, através de equações diferenciais ordinárias (EDO). O Capítulo 4 apresenta uma atividade prática do modelo de Malthus aplicado ao crescimento populacional da cidade de Siqueira Campos - PR nos últimos 10 anos, levando em consideração a instalação de novas fábricas e indústrias que causaram um aumento considerável em sua população. Este trabalho foi desenvolvido pelos alunos do terceiro ano do ensino médio do Colégio Estadual Professora Maria Aparecida Chuery Salcedo, utilizando os dados coletados com o auxílio do laboratório de informática, referentes ao crescimento populacional da cidade de Siqueira Campos, bem como foi ensinado o uso de tabelas e de gráficos para representar os resultados obtidos. Foi escolhida esta turma devido ao fato de que muitos alunos são filhos de trabalhadores das fábricas da região, o que poderia servir de estímulo para que tenham interesse em ingressar no mercado de trabalho. Para tanto, convém trabalhar com o ajuste destes valores tabelados utilizando o modelo malthusiano e sua respectiva curva exponencial. Por fim, há o Capítulo 5 que contém as considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições acerca de conteúdos que serão utilizados ao longo deste trabalho, tais como: progressões geométricas e sua fórmula do termo geral, uma breve introdução à recorrência linear de primeira ordem homogênea e sua resolução, e principalmente um estudo sobre as equações diferenciais ordinárias e suas possíveis aplicações nas dinâmicas populacionais. Veremos que uma progressão geométrica é um caso particular de sequência numérica com uma certa particularidade e que uma progressão numérica é denominada de recorrência quando, a partir de um de seus elementos todos os outros que se seguem são dados em função dos anteriores, sendo também classificadas de acordo com sua ordem, homogeneidade e linearidade. Veremos também que as EDOs (Equações Diferenciais Ordinárias) de uma maneira simplista, são sentenças matemáticas que apresentam derivadas em sua composição e apenas uma variável, sendo classificadas segundo sua ordem, sua linearidade e sua homogeneidade. É importante observarmos que a solução de uma EDO é dada por uma função, sendo determinada através de algumas ferramentas do cálculo, mais especificamente, usando conceitos de limites, derivadas e integrais.

2.1 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS (P.G.)

Definição 2.1. (IEZZI; MURAKAMI, 2004) Chama-se progressão geométrica (P.G.) uma sequência numérica formada por números reais dada pela seguinte fórmula de recorrência :

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

onde $a, q \in \mathbb{R}$, ou seja, uma P.G. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante q dada.

De maneira geral, as progressões geométricas podem ser classificadas em cinco casos:

1. Crescentes - são as P.G. em que cada termo é maior que o anterior, isto é, $a_n < a_{n+1}$,

$\forall n \in \mathbb{N}$. Conforme os exemplos abaixo:

Exemplo 2.2. P.G com termos positivos $f_1 = (1, 2, 4, 8, 16, \dots)$, $q > 1$.

Exemplo 2.3. P.G com termos negativos $f_2 = (-4, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots)$, quando $0 < q < 1$.

2. Constantes - são as P.G. em que cada termo é igual ao anterior, isto é, $a_n = c \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Conforme os exemplos abaixo:

Exemplo 2.4. P.G com todos os termos nulos $f_3 = (0, 0, 0, 0, 0, \dots)$, quando $a_1 = 0$ e q qualquer.

Exemplo 2.5. P.G com termos iguais e não nulos. $f_4 = (7, 7, 7, 7, 7, \dots)$, quando $q = 1$.

3. Decrescentes - são as P.G. em que cada termo é menor ao anterior, isto é, $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Conforme os exemplos abaixo:

Exemplo 2.6. P.G com termos positivos $f_5 = (9, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots)$, quando $0 < q < 1$.

Exemplo 2.7. P.G com termos negativos $f_6 = (-2, -4, -8, -16, \dots)$, quando $q > 1$.

4. Alternantes - são as P.G. em que cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior.
Conforme o exemplo abaixo:

Exemplo 2.8. $f_7 = (1, -4, 16, -64, \dots)$, quando $q < 0$.

5. Estacionárias - são as P.G. em que $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = a_4 = \dots = 0$. Conforme o exemplo abaixo:

Exemplo 2.9. $f_8 = (1, 0, 0, 0, 0, \dots)$, quando $q = 0$.

2.1.1 FÓRMULA DO TERMO GERAL DA P.G.

Utilizando a fórmula de recorrência dada pela equação (1) na qual se define uma P.G. e admitindo dados o primeiro termo $a \neq 0$, a razão $q \neq 0$ e o índice n de um termo desejado, temos:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q$$

$$a_4 = a_3 \cdot q$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

Multiplicando essas $n - 1$ igualdades, temos:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot q^{n-1}. \quad (2)$$

Cancelando os fatores iguais em ambos os lados da igualdade de (2), obtemos $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, o que nos sugere o seguinte teorema:

Teorema 2.10. *Em uma P.G., de primeiro termo a_1 e de razão q , o n -ésimo termo é dado por*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 1.$$

Demonstração: Provemos por indução em n .

1. Para $n = 1$, a igualdade é válida, pois $a_1 = a_1 \cdot q^0 = a_1 \cdot q^{1-1}$.
2. Agora, suponhamos que o resultado seja válido para um certo $n = k \geq 1$, ou seja, $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$. Para $n = k + 1$ segue que

$$a_{k+1} = a_{k+1-1} \cdot q = a_k \cdot q = a_1 q^{k-1} \cdot q^1 = a_1 \cdot q^k.$$

Portanto, temos a validade do resultado.

Exemplo 2.11. *Se $n = 3$, então $k = 2$, onde $n = k + 1$, logo,*

$$a_3 = a_{2+1} = a_{2+1-1} \cdot q = a_2 \cdot q = a_1 q^{2-1} \cdot q^1 = a_1 \cdot q^2.$$

2.1.2 GRÁFICO DE UMA P.G.

Como visto anteriormente, em uma progressão geométrica temos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ou equivalentemente $a_n = a_0 \cdot q^n$, temos que a função que associa a cada natural n o valor de a_n é simplesmente a restrição aos naturais da função real definida por $a(x) = a(0)q^x$. Portanto, pensando em uma progressão geométrica como uma função que associa a cada número natural n o número real a_n , o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial conforme a Figura 1.

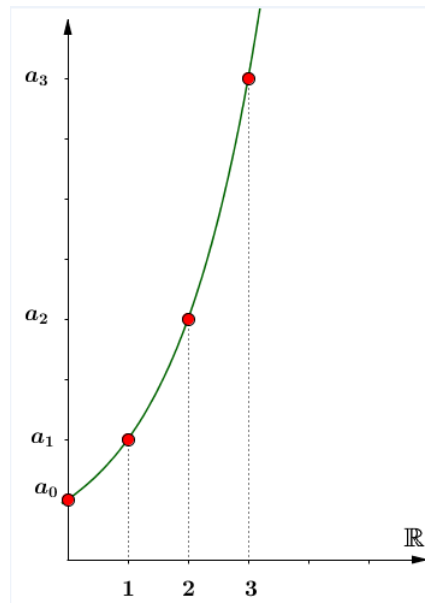


Figura 1: Gráfico $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ de uma progressão geométrica

Fonte: autoria própria.

2.2 RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Muitas das seqüências numéricas estudadas na matemática podem ser definidas recursivamente, ou seja, por intermédio de uma regra (ou lei de formação) que permite calcular qualquer um de seus termos em função do(s) antecessor(es) imediato(s). Podemos observar alguns desses exemplos a seguir:

Exemplo 2.12. A seqüência dos números naturais ímpares $1, 3, 5, 7, \dots$ pode ser definida por

$$x_{n+1} = x_n + 2,$$

onde tem-se que $n \geq 1$ e que $x_1 = 1$.

Exemplo 2.13. Os múltiplos naturais do número 2 formam uma seqüência que pode ser definida por

$$x_{n+1} = 2 \cdot x_n$$

onde tem-se que $n \geq 1$ e $x_1 = 2$.

Exemplo 2.14. Qualquer progressão geométrica (x_n) de razão q e primeiro termo a pode ser definida por

$$x_{n+1} = q \cdot x_n,$$

onde tem-se que $n \geq 1$ e $x_1 = a$.

Definição 2.15. *Uma recorrência é uma regra matemática que permite determinar um termo qualquer de uma sequência numérica em função de termos anteriores à ele.*

2.2.1 CLASSIFICAÇÃO DE UMA RECORRÊNCIA

De modo geral, uma recorrência pode ser classificada utilizando os seguintes critérios:

- *Sua ordem:* primeira, segunda, ...; determinada pela diferença entre o maior e o menor índice dos termos de sua equação;
- *Sua linearidade:* uma recorrência será linear quando os expoentes dos termos antecedentes ao termo geral são todos iguais a 1; caso contrário será classificada em não linear.
- *Sua homogeneidade:* homogênea ou não-homogênea, segundo a presença ou não de termos independentes de x_n .

Exemplo 2.16. *As recorrências $x_{n+1} = 2x_n - n^2$ e $x_{n+1} = nx_n$ são lineares e a recorrência $x_{n+1} = x_n^2$ não é linear. As duas últimas são ditas homogêneas, por não possuírem termos independentes de x_n .*

Vejamos o exemplo 2.17 que representa uma progressão geométrica definida recursivamente e sua respectiva resolução, ou seja, os cálculos que permitem determinar sua lei de formação.

Exemplo 2.17. *Encontre a recorrência definida por $x_{n+1} = 2x_n$ e $x_1 = 3$.*

Temos que

$$\begin{aligned}x_2 &= 2x_1 \\x_3 &= 2x_2 \\x_4 &= 2x_3 \\&\vdots \\x_n &= 2x_{n-1}.\end{aligned}$$

Daí, obtemos $x_n = 2^{n-1} \cdot x_1$. Como $x_1 = 3$, temos $x_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Poderíamos também resolver essa equação de recorrência da seguinte maneira: $x_{n+1} = 2x_n$, ou equivalentemente,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2, \tag{3}$$

temos que a equação de recorrência (3) é uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo $a_1 = 3$. Logo, utilizando a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, temos:

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

2.3 EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA (EDO).

Ao estudarmos fenômenos físicos, químicos ou biológicos, muitas vezes faz-se necessário o uso de equações matemáticas que modelam com eficiência tais eventos, como por exemplo, o crescimento de uma população (de pessoas, bactérias ou vírus) ao longo do tempo; a desintegração de uma determinada substância no corpo de uma pessoa medicada; a variação da quantidade de um determinado elemento químico em um certo local da natureza. De modo geral, “modelos matemáticos, em termos de equações diferenciais são adequados quando as situações modeladas envolvem variáveis contínuas evoluindo em relação a outras variáveis contínuas” (BASSANEZI, 1999). Ainda mais, relações entre variáveis são muitas vezes obtidas através de hipóteses formuladas a respeito das taxas de variações instantâneas.

Definição 2.18. *Uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função que aparece na equação sob a forma das respectivas derivadas.*

Nesta dissertação serão trabalhadas apenas as equações diferenciais ordinárias, ou seja, aquelas que dependem apenas de uma variável independente.

Exemplo 2.19. *São exemplos de EDOs as seguintes equações:*

$$y \frac{dy}{dx} - 7y = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = e^x \quad (5)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 7x + 6y \quad (6)$$

sendo que $y = y(x)$ é uma função de x .

2.3.1 CLASSIFICAÇÃO DE UMA EDO

Uma EDO pode ser classificada segundo os seguintes critérios:

- *Sua ordem:* é dada pela ordem da maior derivada presente na equação. No caso do Exemplo 2.19, podemos observar que as EDOs são de primeira, de segunda e de terceira ordem, respectivamente;

- *Sua linearidade*: uma EDO será dita linear se puder ser escrita na forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Portanto, para definir se a EDO é linear, é necessário que:

- a variável dependente de y e todas as suas derivadas sejam do primeiro grau, ou seja, $n = 1$;
- cada coeficiente dependa apenas da variável independente x .

No Exemplo 2.19, as EDOs (5) e (6) são não lineares e a EDO (4) é linear.

- *Sua homogeneidade*: será homogênea toda EDO que apresentar uma equação diferencial da forma:

$$M(x, y)dx - N(x, y)dy = 0$$

onde, $M(x, y)$ e $N(x, y)$ precisam ser funções homogêneas de mesmo grau para caracterizarem uma EDO homogênea. A equação (4) do Exemplo 2.19 representa um caso de homogeneidade, enquanto que as equações (5) e (6) do Exemplo 2.19 representam casos de não homogeneidade.

2.3.2 RESOLUÇÃO DE UMA EDO

Ao resolvermos uma EDO específica da forma

$$\frac{dy}{dx} = ay + b,$$

onde a e b são constantes, então podemos utilizar a integração direta. Veremos nesta seção a resolução desse tipo de equação, que será o principal método utilizado para resolver as EDOs que aparecerão nos problemas apresentados neste trabalho.

Ao tomarmos a equação geral de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = ay + x,$$

podemos escrevê-la da seguinte forma

$$A(x, y) + B(x, y) \frac{dy}{dx} = 0, \tag{7}$$

onde $A(x, y) = -ay - x$ e $B(x, y) = 1$. Caso tenhamos A dependente apenas da variável x , e B

dependente apenas de y , a equação (7) pode ser escrita como

$$A(x) + B(y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Esta equação é denominada **separável**, isto é, ela pode ser escrita como

$$A(x) dx = -B(y) dy.$$

Integrando membro a membro, temos

$$\int A(x) dx = - \int B(y) dy.$$

E assim obtemos a expressão

$$F(x) + c_1 = -G(y) + c_2.$$

O que implica em

$$F(x) + G(y) + C = 0,$$

onde $C = c_1 - c_2$ e $F(x)$ e $G(y)$ são as primitivas de $A(x)$ e $B(y)$, respectivamente.

Ao longo deste trabalho utilizaremos a resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem via separação de variáveis, em particular daquelas que envolvem uma informação inicial, ou seja, um *Problema de Valor Inicial* (PVI). Vejamos um exemplo dessas equações.

Exemplo 2.20. *Considere o seguinte problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = K \cdot M \\ M(0) = M_0 = 100 \text{ mols}, \end{cases}$$

que fornece a quantidade de uma determinada substância radioativa no meio ambiente. Sabemos que a taxa de variação da massa de uma substância se altera em relação ao tempo, isto é, $\frac{dM}{dt}$ é proporcional a quantidade dessa substância em cada instante, sendo K a constante de desintegração. Para resolver este problema, ou seja, determinar a função incógnita, procede pela separação das variáveis na EDO:

$$\frac{dM}{dt} = K \cdot M, \tag{8}$$

e reescrevemos (8) como

$$\frac{dM}{M} = K dt.$$

Integrando ambos os lados, temos

$$\int \frac{dM}{M} = \int K dt.$$

Daí, segue que

$$\ln |M| = K \cdot t + C,$$

sendo C uma constante, $C \in \mathbb{R}$.

Como M representa a quantidade de substância, então, $M > 0$, e assim

$$\ln M = K \cdot t + C.$$

Utilizando a função exponencial, temos

$$e^{\ln M} = e^{K \cdot t + C},$$

que é equivalente a

$$M = e^{K \cdot t} e^C.$$

Substituindo a condição inicial $M_0 = 100$ mols, na equação, obtemos

$$100 = e^{K \cdot 0} e^C.$$

Logo, $e^C = 100$ e portanto, a solução da EDO será

$$M(t) = 100e^{K \cdot t}.$$

3 MODELOS MATEMÁTICOS EM DINÂMICA POPULACIONAL

3.1 MODELO DE MALTHUS

A busca pela compreensão de determinados fenômenos naturais como por exemplo o crescimento de uma cultura de bactérias, a propagação de uma doença viral ou ainda o aumento demográfico em uma região, fazem parte da rotina de cientistas das mais diversas áreas do conhecimento, que procuram ferramentas e modelos matemáticos estatísticos para descrever tais acontecimentos. Como é do conhecimento de todos, a matemática é um poderoso instrumento intelectual que permite a abstração e a formalização sintética de ideias, que embora semelhantes, surgem em situações diversas e que por isso mesmo estão camufladas em sua essência (BARROS et al., 2008).

O estudo de como se dá o crescimento de uma determinada população, seja ela de microrganismos ou de organismos superiores (plantas, animais,...), em particular do ser humano, é de grande importância para todos, pois é necessário planejar corretamente o uso de recursos públicos para atender as suas necessidades, como por exemplo: programa de urbanização para as cidades em crescimento, construção de casas, escolas, hospitais e tudo aquilo que se faz necessário para viver numa sociedade organizada e com qualidade de vida.

A utilização de modelos matemáticos para descrever o crescimento de uma população de seres humanos iniciou-se com o economista e demógrafo inglês Thomas Robert Malthus, publicada em 1798. Ele estabelecia que o crescimento populacional se dá em termos de uma progressão geométrica (*P.G.*), caso não seja controlado, enquanto que os meios de sobrevivência, tais como comida, água potável, entre outros, cresceriam em progressão aritmética (*P.A.*). Tal estudo tinha como principal objetivo chocar a opinião pública da época (BASSANEZI, 1999).

Este modelo assume que o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante e desta forma a população humana deveria crescer indefinidamente, o que de fato não reflete a nossa realidade, devido à fatores limitantes, como por exemplo: fome, guerras, as más condições sanitárias em que grande parte das pessoas se encontram, epidemias, dentre outros fatores que inibem o crescimento excessivo dos habitantes de uma determinada região.

De fato, tudo o que foi citado anteriormente afeta de modo sistemático o crescimento populacional. Para Malthus, estas condições funcionariam como mecanismo ativado para manter a população em um nível aceitável.

Seja P o número de indivíduos de uma determinada população, animal ou vegetal. Considerando que este número pode se alterar durante o tempo, podemos escrever $P(t)$ - uma função em que a população depende do tempo. Temos então que $P(t)$ é uma função discreta de t , pois assume apenas valores inteiros. Porém, quando o número de indivíduos é grande o suficiente, $P(t)$ se aproxima de uma função contínua que varia no tempo.

Neste modelo, vamos admitir que a proporção de indivíduos reprodutores e que as taxa de natalidade n e de mortalidade m permaneçam constantes. Tais hipóteses são reais em uma população grande que varia em condições ideais com recursos ilimitados e não sofram com agentes competidores, isto é, quando os fatores que inibem o crescimento estão ausentes. Considerando

$$\alpha = n - m,$$

isto é, o coeficiente de natalidade menos o de mortalidade, temos que a taxa constante de crescimento específico da população $P(t)$, é dada por

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = n - m = \alpha,$$

onde o número 1 em $(t+1)$ refere-se a unidade de tempo considerada (anos, meses, por exemplo).

Esta relação indica que a variação relativa da população é constante, ou seja, que a variação é proporcional à própria população em cada período de tempo.

Assim, **o modelo discreto (tempo discreto)** de Malthus é dado por

$$P(t+1) - P(t) = \alpha P(t). \quad (9)$$

Considerando a população inicial $P(0) = P_0$ e denotando $P(t+1)$, a solução de (9) é obtida encontrando a solução da recorrência

$$\begin{cases} P(t+1) = (1 + \alpha)P(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

Como a equação $P(t+1) = (1 + \alpha)P(t)$ implica em

$$\frac{P(t+1)}{P(t)} = 1 + \alpha$$

temos então uma PG de razão $q = (1 + \alpha)$ e um primeiro termo igual a P_0 . Utilizando a fórmula do termo geral de uma PG , ou seja,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

onde a_n é o n -ésimo elemento, q é a razão e a_1 é o primeiro termo da PG , obtemos

$$P(t) = P_0(\alpha + 1)^t. \quad (10)$$

Desta forma, sendo dados as populações inicial e um certo tempo, a taxa de crescimento em t anos é obtida isolando α na relação (10), isto é,

$$\alpha = \sqrt[t]{\frac{P(t)}{P_0}} - 1.$$

Exemplo 3.1. Para melhor compreensão, ao tomarmos as populações aproximadas do Paraná e do Brasil ao longo dos anos de 2017 a 2019, podemos fazer uma comparação entre suas taxas de crescimento anuais:

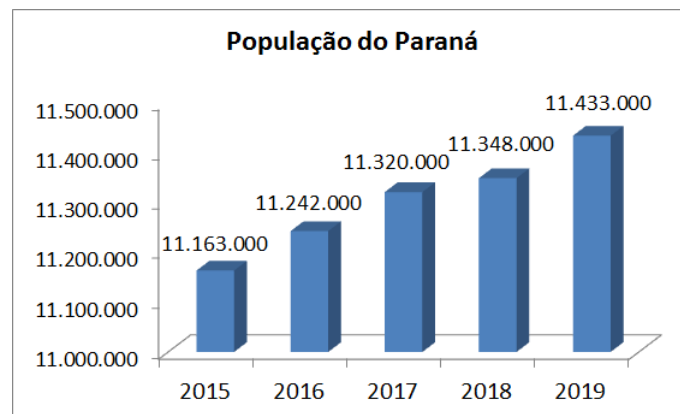


Figura 2: Dados sobre a população do Paraná

Fonte: IBGE

Em relação à população do Paraná, de acordo com o censo (IBGE, 2020b) apresentado pela Figura 2, entre os anos de 2017 e 2019, tivermos uma taxa de crescimento de, aproximadamente

$$\alpha = \sqrt{\frac{11433000}{11320000}} - 1 = 1,00498 - 1 = \alpha = 0,00498$$

Neste caso, foi considerado $P_0 = 11348000$, onde o tempo inicial é $t = 2017$ e o tempo final $t = 2019$, com $P(t) = 11433000$. A discretização do tempo na equação de recorrência é dada em anos. Assim, $\alpha = 0,00498$ ou ainda $0,498\%$ ao ano.

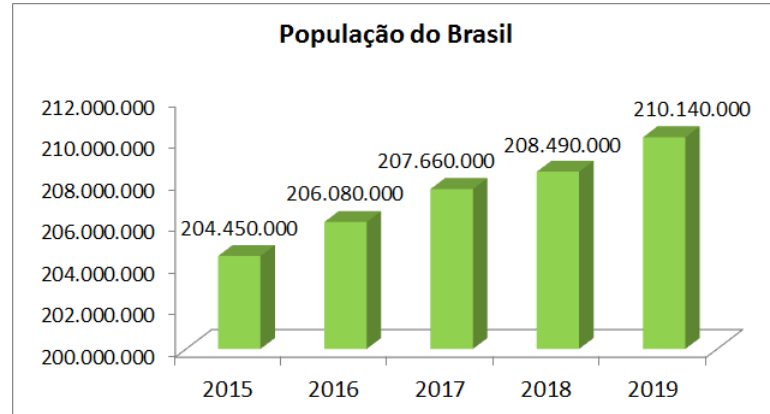


Figura 3: Dados sobre a população do Brasil

Fonte: IBGE

Já em relação à população do Brasil (IBGE, 2020a), ao considerarmos os dados da Figura 3, teremos a seguinte taxa de crescimento:

$$\alpha = \sqrt{\frac{210140000}{207660000}} - 1 = 1,00595 - 1 = 0,00595.$$

Neste caso, consideramos $P_0 = 207660000$, onde o tempo inicial é $t = 2017$ e o tempo final $t = 2019$, com $P(t) = 210140000$, sendo a discretização do tempo na equação de recorrência dada em anos novamente. Assim, $\alpha = 0,00595$ ou aproximadamente $0,595\%$ ao ano.

Podemos observar então que no mesmo intervalo de tempo, de 2017 a 2019, a taxa de crescimento no estado do Paraná foi menor do que a taxa de crescimento do Brasil.

Note que a relação $P(t) = (\alpha + 1)^t P_0$ pode ser escrita na forma exponencial

$$P(t) = P_0 \cdot e^{\ln(1+\alpha)t}.$$

Agora consideraremos o modelo contínuo correspondente de (9), isto é, o intervalo de tempo a ser considerado é Δt . Logo,

$$P(t + \Delta t) - P(t) = \beta P(t) \Delta t, \quad (11)$$

onde β representa a taxa de crescimento específico da população $P(t)$. Tomando o limite em

ambos os membros da equação (11), teremos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \beta P(t) = \beta P(t).$$

Como

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \frac{dP(t)}{dt},$$

podemos descrever o modelo contínuo através da seguinte EDO:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \beta P(t) \\ P(0) = P_0, \end{cases} \quad (12)$$

que pode ser solucionada via método de separação de variáveis. Reescrevendo (12) como

$$\frac{1}{P} dP = \beta dt,$$

podemos integrar ambos os lados da equação, e assim

$$\int_{t_0}^t \frac{dP}{P} = \int_{t_0}^t \beta dt,$$

isto é,

$$\ln P \Big|_{t_0}^t = \beta t \Big|_{t_0},$$

consequentemente teremos

$$\ln P(t) - \ln P(t_0) = \beta(t - t_0). \quad (13)$$

Agora, usando a propriedade dos logaritmos do lado esquerdo de (13), obtemos a expressão

$$\ln \left(\frac{P(t)}{P(t_0)} \right) = \beta(t - t_0),$$

e elevando ambos os lados ao termo exponencial, teremos

$$e^{\ln \left(\frac{P(t)}{P(t_0)} \right)} = e^{\beta(t - t_0)}.$$

Portanto,

$$P(t) = P e^{\beta(t - t_0)}.$$

Considerando que $t_0 = 0$, temos a solução final

$$P(t) = P_0 e^{\beta t}. \quad (14)$$

Dessa forma, comparando as equações (9) e (14), os modelos discreto e contínuo fornecem a mesma solução para

$$\beta = \ln(1 + \alpha).$$

Ao considerarmos o modelo de Malthus para projetar a população do Paraná, vimos que para o modelo discreto tivemos $\alpha = 0,00498$ entre os anos de 2017 e 2019, e portanto no modelo contínuo $\beta = \ln(1 + \alpha) = \ln(1 + 0,00498) = \ln(1,00498) = 0,00496$ para o modelo contínuo.

Já, para a população do Brasil, teremos $\alpha = 0,00595$ para o modelo discreto e $\beta = 0,00593$ para o modelo contínuo.

A equação

$$P(t) = 11320000e^{0,00496 \cdot t}$$

fornece uma aproximação da população do Paraná (IBGE, 2020b) para qualquer tempo t . Já a equação seguinte, permite calcular o possível número de habitantes para o Brasil, a partir do mesmo ano, num determinado momento (t), em anos:

$$P(t) = 204400000e^{0,00593 \cdot t}.$$

O modelo malthusiano discreto, pela sua simplicidade, é usado com frequência para fazer previsões a curto prazo, sendo corrigido depois de cada censo.

3.2 MODELO DE VERHULST

Outro modelo que também tem o objetivo de medir o crescimento populacional foi criado pelo matemático belga Pierre F. Verhulst em 1837, o qual difere do modelo Malthusiano pelo fato de supor que uma determinada população cresce até um limite sustentável, tendendo a se estabilizar, na medida em que há a concorrência pelos meios de subsistência: alimentos, espaço físico, dentre outros.

Desta maneira, a equação que expressa o crescimento populacional incorpora a sua queda, pois está sujeita a um fator inibidor de proporcionalidade (BASSANEZI, 1999).

Este modelo teve uma importância grande no século XX, sendo utilizado por dois pesquisadores americanos (R. Pearl e L. Reed) (PEARL; REED, 1920) para projetar a demografia norte-americana em 1920. Diferentemente do modelo de Malthus, o modelo de Verhulst leva em consideração a taxa de crescimento relativa, denotada por $\beta(P)$, que é decrescente em relação

à população P em cada instante.

Consideramos então a equação diferencial ordinária:

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P)P, \quad (15)$$

sendo $\beta(P) = r\left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty}\right)$, com $r > 0$ a taxa de crescimento e P_∞ o número máximo possível de indivíduos de uma determinada população, nomeada população limite.

Note que, ao compararmos os dois modelos propostos pelo inglês - representado pela equação (14) e pelo belga - representado pela equação (15), poderemos observar que são semelhantes em sua estrutura, porém com uma diferença: o fator $\left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty}\right) = \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)$ que limita o crescimento, aparece apenas no segundo. Isso se deve ao fato de que Verhulst, embora tenha se utilizado das mesmas ideias de Malthus, levou em consideração que, uma população ao crescer consideravelmente tendendo à P_∞ , tem sua taxa de variação tendendo a 0, para que se estabeleça em torno do número máximo de indivíduos, isto é, temos que $\beta(P)$ tenderá a zero quando $P \rightarrow P_\infty$.

Supondo que $P(0) = P_0$ seja a população inicial conhecida, temos o modelo clássico de Verhulst ou modelo logístico:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right), r > 0 \\ P(0) = P_0. \end{cases} \quad (16)$$

Note que $P(t) = 0$ e $P(t) = P_\infty$ são soluções triviais da equação diferencial (15). Podemos determinar a solução analítica de (16), integrando ambos os lados da equação, utilizando o método de separação de variáveis:

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/P_\infty)} dt = \int r dt. \quad (17)$$

Para resolver a equação (17), usaremos a técnica das frações parciais no primeiro membro da igualdade, uma vez que o lado direito é resolvido como

$$\int r dt = rt + c_1$$

sendo c_1 uma constante, $c_1 \in \mathbb{R}$.

De (17), podemos observar que

$$\frac{1}{P(1 - P/P_\infty)} = \frac{P_\infty}{P(P_\infty - P)}$$

Denotando por A e B os numeradores à serem determinados, teremos a seguinte igualdade:

$$\frac{P_\infty}{P(P_\infty - P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{P_\infty - P}$$

que implica em

$$\frac{P_\infty}{P(P_\infty - P)} = \frac{A(P_\infty - P) + BP}{P(P_\infty - P)}$$

e conseqüentemente,

$$P_\infty = AP_\infty - AP + BP.$$

Portanto,

$$P_\infty = AP_\infty - (A - B)P,$$

pela igualdade de polinômios, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} A = 1 \\ A - B = 0 \end{cases}$$

de onde segue que $A = B = 1$.

Logo,

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/P_\infty)} = \int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{P_\infty - P} \right) dP$$

que é equivalente a

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/P_\infty)} = \int \frac{1}{P} dP + \int \frac{1}{P_\infty - P} dP.$$

Lembrando que

$$\int \frac{1}{P} dP = \ln P + c_2$$

para $c_2 \in \mathbb{R}$, podemos utilizar o método da substituição para resolver a seguinte integral:

$$\int \frac{1}{P_\infty - P} dP.$$

Denotando $P_\infty - P$ por u , temos que

$$\frac{dP}{du} = -1.$$

Logo,

$$dP = -du,$$

e assim

$$\int \frac{1}{P_\infty - P} dP = \int \frac{1}{u} (-1) du = -\ln |u| + c_3$$

para $c_3 \in \mathbb{R}$.

Fazendo a substituição da variável u , temos que

$$\int \left(\frac{1}{P_\infty} - P \right) dP = -\ln |P_\infty - P| + c_3$$

para $c_3 \in \mathbb{R}$.

Portanto,

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/P_\infty)} = \ln |P| + c_2 - \ln |P_\infty - P| + c_3 = \ln |P| - \ln |P_\infty - P| + c_4$$

para $c_4 = c_2 + c_3$, $c_4 \in \mathbb{R}$.

Logo,

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/P_\infty)} = \ln \left| \frac{P}{P_\infty - P} \right| + c_4. \quad (18)$$

Consequentemente, (17) se torna

$$\ln \left| \frac{P}{P_\infty - P} \right| + c_4 = rt + c_1,$$

ou ainda,

$$\ln \left| \frac{P}{P_\infty - P} \right| = rt + C,$$

para $C = c_1 - c_4$, $C \in \mathbb{R}$.

Aplicando a função exponencial de ambos os lados e usando o fato que as funções exponencial e logarítmica são funções inversas, temos que

$$e^{\ln \left| \frac{P}{P_\infty - P} \right|} = e^{rt+C},$$

isto é,

$$\left| \frac{P}{P_\infty - P} \right| = e^{rt+C}.$$

Usando a condição inicial de que $P(0) = P_0$, podemos determinar o valor da constante C de integração. Note que

$$\frac{P}{P_\infty - P} = e^{r \cdot 0 + C} = e^C,$$

isto é,

$$\ln \left(\frac{P}{P_\infty - P} \right) = \ln(e^C). \quad (19)$$

Portanto,

$$C = \ln\left(\frac{P}{P_\infty - P}\right).$$

Substituindo o valor de C em (19), teremos que

$$\frac{P}{P_\infty - P} = e^{rt + \ln\left(\frac{P_0}{P_\infty - P_0}\right)}$$

que pela propriedade das potências, pode ser representado como

$$\frac{P}{P_\infty - P} = e^{rt} \cdot e^{\ln\left(\frac{P_0}{P_\infty - P_0}\right)} = e^{rt} \cdot \left(\frac{P_0}{P_\infty - P_0}\right).$$

Assim,

$$\frac{P_\infty - P}{P} = \frac{1}{e^{rt}} \cdot \frac{P_\infty - P}{P_0},$$

o que implica em

$$\frac{P_\infty}{P} = 1 + \left(\frac{P_\infty - P}{e^{rt} P_0}\right).$$

Isolando P , obtemos

$$P = \frac{P_\infty}{\frac{P_0 \cdot e^{rt} + (P_\infty - P_0)}{e^{rt} P_0}},$$

e assim, temos a solução explícita em função de t :

$$P(t) = \frac{P_\infty P_0}{P_0 + e^{-rt} \cdot (P_\infty - P_0)}. \quad (20)$$

Esta equação pode ser representada graficamente por uma curva chamada de logística (Figura 4) e dessa expressão podemos observar que:

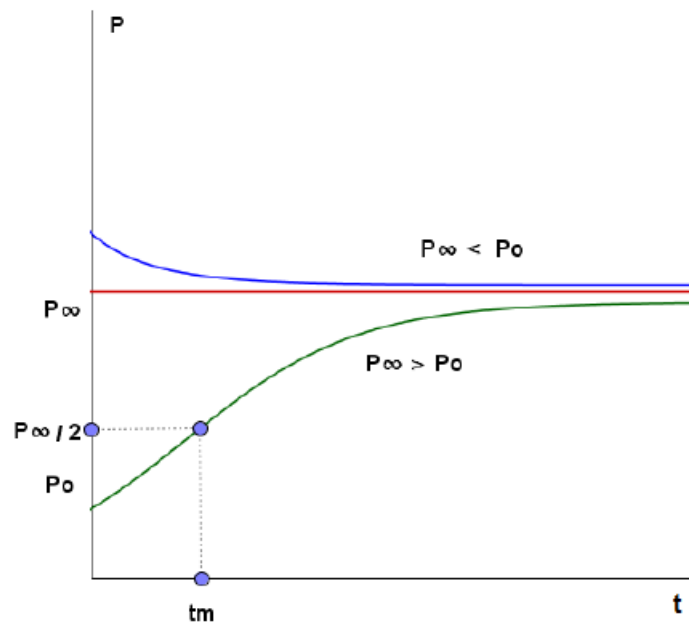


Figura 4: Curva Logística

Fonte: Autoria Própria.

1. Se $P_0 < P_\infty$ teremos que $P_0 < P(t) < P_\infty$ e $P(t)$ tenderá a P_∞ , pois se $t \rightarrow \infty$ a segunda parcela do denominador da fração tenderá a zero, podendo então simplificar P_0 . Neste caso, a equação (16) mostra que $\frac{dP}{dt} > 0$;
2. De maneira análoga, se $P_0 > P_\infty$ então $P(t)$ tende P_∞ decrescendo, quando $t \rightarrow \infty$. Neste caso, a equação mostra que $\frac{dP}{dt} < 0$;
3. Observando a EDO (16) como:

$$\frac{dP}{dt} = rP - r\frac{P^2}{P_\infty},$$

temos que $\frac{dP}{dt}$ é uma função quadrática de P cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo, (vide a Figura 5), pois seu coeficiente dominante é $-\frac{r}{P_\infty} < 0$. As raízes são $P = 0$ e $P = P_\infty$ as quais são pontos de equilíbrio ou soluções de equilíbrio da equação diferencial (16), pois $\frac{dP}{dt} = 0$.

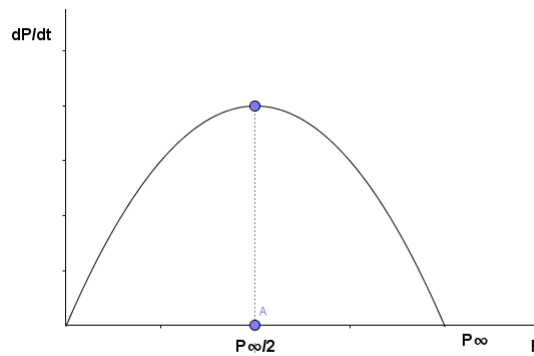


Figura 5: Variação de $P(t)$

Fonte: Autoria própria.

Seu valor de máximo é atingido no ponto

$$X_v = \frac{-r}{2 \cdot (-r/P_{\infty})} = \frac{P_{\infty}}{2}.$$

4. Dessa maneira, como $r > 0$, temos que a taxa $\frac{dP}{dt}$ será positiva se $0 < P(t) < \frac{P_{\infty}}{2}$ e negativa se $\frac{P_{\infty}}{2} < P(t) < P_{\infty}$. O valor máximo de $\frac{dP}{dt}$, relativa a P , é atingido quando $P = \frac{P_{\infty}}{2}$ ou seja, quando a população for igual a metade da população limite.
5. Considerando, $P(t) = \frac{P_{\infty}}{2}$ em (20), podemos determinar o instante t_m em que a população atinge a máxima variação:

$$\frac{P_{\infty}}{2} = \frac{P_0 \cdot P_{\infty}}{(P_{\infty} - P_0) \cdot e^{-rt} + P_0},$$

isto é,

$$2P_0 = (P_{\infty} - P_0) \cdot e^{-rt} + P_0,$$

o que implica em

$$P_0 = (P_{\infty} - P_0)e^{-rt}.$$

Equivalente,

$$\frac{1}{P_0} = \frac{1}{(P_{\infty} - P_0)e^{rt}}.$$

Portanto,

$$e^{rt} = \frac{(P_{\infty} - P_0)}{P_0}.$$

Aplicando ln em todos os membros e isolando o t , obtemos

$$t_m = \frac{1}{r} \ln \frac{P_\infty - P_0}{P_0},$$

considerando que $P_0 < \frac{P_\infty}{2}$.

Assim, para $t = t_m$ temos:

$$P(t_m) = \frac{P_\infty}{2}, \quad (21)$$

isto é, no instante de tempo t_m a população cresce com sua taxa máxima, conforme a relação abaixo:

$$\frac{dP(t_m)}{dt} = r \frac{P_\infty}{2} \left(1 - \frac{P_\infty/2}{P_\infty} \right) = \frac{r}{4} P_\infty \geq 0.$$

Além disso, foi visto que

$$\frac{d^2P}{dt^2} = r \frac{dP}{dt} - \frac{2r}{P_\infty} P \frac{dP}{dt},$$

então tomando para $t = t_m$, temos que:

$$\frac{d^2P(t_m)}{dt^2} = r \frac{dP(t_m)}{dt} - \frac{2r}{P_\infty} P(t_m) \frac{dP(t_m)}{dt} \quad (22)$$

desse modo, podemos desenvolver (22) usando a igualdade (21):

$$\frac{d^2P(t_m)}{dt^2} = r \cdot \frac{r}{4} \cdot P_\infty - \frac{2r}{P_\infty} \cdot \frac{P_\infty}{2} \cdot \frac{r}{4} \cdot P_\infty,$$

portanto, chegamos ao resultado:

$$\frac{d^2P(t_m)}{dt^2} = \frac{r^2}{4} P_\infty - \frac{r^2}{4} P_\infty = 0.$$

Logo, $t = t_m$ é um ponto de inflexão de $P(t)$.

Sabendo que $P(t_m) = \frac{P_\infty}{2}$, temos que:

- Se $P_0 = \frac{P_\infty}{2}$, então $t_m = 0$, pois é justamente quando a taxa de crescimento da população é máxima, ou seja, ponto de máximo da parábola;
- Se $\frac{P_\infty}{2} < P_0 \leq P_\infty$, a curva não apresentará ponto de inflexão, pois $P_0 > \frac{P_\infty}{2} = P(t_m)$.

Exemplo 3.2. Para utilizarmos a Curva Logística (Figura 4) como modelo de projeção da população paranaense, vamos considerar alguns dados do IBGE (IBGE, 2020b), que mostram que na década de 2000 – 2010 a taxa anual de crescimento populacional foi de aproximadamente, 0,890% e na década de 2010 – 2020 a taxa de crescimento populacional anual foi de, aproximadamente, 0,982%.

Utilizaremos a média geométrica desses valores pois queremos uma taxa média i , tal que se anualmente a taxa aumentasse i , o aumento nos últimos 20 anos seria o mesmo. Logo nos últimos 20 anos, a taxa média r de crescimento populacional foi de:

$$r = \sqrt{0,00890 \times 0,00982} = 0,00935$$

ou seja, aproximadamente 0,935%.

Podemos supor que a população limite, ou seja, a população máxima que o estado do Paraná comporta sem que haja prejuízos irreversíveis para o meio ambiente ou falta de recursos hídricos ou saneamento, é de 80.000.000 de habitantes.

Dessa forma, vamos calcular qual o tempo necessário para atingir por exemplo, a metade desta população, ou seja, $P(t) = 40.000.000$. Considerando $P_0 = 11.516.840$, o valor estimado para população paranaense para 2020, de acordo com o IBGE, segue da equação (20) que

$$4 \cdot 10^7 = \frac{(8 \cdot 10^7) \cdot (1,1516840 \cdot 10^7)}{1,1516840 \cdot 10^7 + e^{-0,00935 \cdot t} [8 \cdot 10^7 - 1,1516840 \cdot 10^7]}$$

isto é,

$$4,606736 \cdot 10^{14} + e^{-0,00935 \cdot t} (6,848316 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^7) = 9,213472 \cdot 10^{14}.$$

Logo,

$$e^{-0,00935 \cdot t} (2,7393264 \cdot 10^{15}) = 9,213472 \cdot 10^{14} - 4,606736 \cdot 10^{14},$$

donde segue que

$$e^{-0,00935 \cdot t} 2,7393264 \cdot 10^{15} = 4,606736 \cdot 10^{14},$$

e portanto

$$e^{-0,00935 \cdot t} = 0,168170394. \quad (23)$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da equação (23), obtemos

$$\ln e^{-0,00935 \cdot t} = \ln 0,168170394,$$

isto é

$$-0,00935t = -1,782777564 \Rightarrow \boxed{t = 190,637}.$$

Portanto para que a população do Paraná atinja a metade da população limite estipulada, levaria aproximadamente 190 anos.

3.3 MODELO SIR DE EPIDEMIOLOGIA KERMACK-MCKENDRIC

Ao longo da história, a humanidade passou por diversas ameaças que colocaram a sobrevivência da vida humana em risco. Catástrofes climáticas, guerras, doenças e outros fatores socioeconômicos provocaram inúmeras mortes, com desfechos preocupantes para a sociedade humana. Dentre os fatores citados, um dos mais temidos pela sociedade são as doenças infecciosas que provocam mortes em massa levando a uma epidemia e/ou uma pandemia.

O número de mortes provocado pelas maiores epidemias de todos os tempos é impreciso, mas é incomparavelmente maior do que o número de mortes provocado por todas as guerras (ANDERSON; MAY, 1992). Na Europa, doenças infecciosas trazidas por estrangeiros tais como sarampo, varíola, gripe e peste bubônica foram responsáveis pela exterminação de grupos étnicos (CASTILLA et al., 2006), os quais não haviam entrado em contato com estas doenças anteriormente, portanto não haviam adquirido imunidade.

Há uma preocupação mundial não só em cuidar das epidemias que porventura ocorram, mas também em estabelecer estratégias de prevenção e de controle de doenças de forma a aumentar sua eficácia e reduzir custos. Assim, a pesquisa relacionada ao desenvolvimento de modelos matemáticos que auxiliem em tal gerenciamento vem ocorrendo desde o século passado.

Muitos modelos matemáticos com o passar dos anos foram estudados e desenvolvidos para modelar casos de epidemiologia. Tais estudos foram sendo desenvolvidos de forma lenta e no fim do século XIX passaram a ser vistos como um ramo importante da ciência. A partir de 1927, surgiu o modelo SIR (susceptíveis, infectados e recuperados) formulados por Kermack-McKendric, matemáticos que consideraram que uma epidemia com microparasitas (vírus e bactérias) ocorre em uma determinada comunidade fechada através do contato entre pessoas infecciosas e pessoas sadias.

Dessa forma, a população de hospedeiros é subdividida em classes distintas de acordo com a infecciosidade de seus elementos, onde:

- $S = S(t)$: pessoas sadias mas susceptíveis à doença, podendo ser infectadas quando em contato com pessoas doentes;
- $I = I(t)$: pessoas portadoras da doença (infecciosos);
- $R = R(t)$: indivíduos imunes que já contraíram a doença e se recuperaram, ou estão isolados ou morreram.

Considerando por hipótese uma comunidade fechada, então a população total N constante (não varia com t), é dada por

$$N = S(t) + I(t) + R(t).$$

Doenças como a tratada aqui, tem período de incubação do parasita relativamente pequeno. Cada doença possui características diferentes, então para cada tipo de doença modela-se sua velocidade de propagação através das interações entre as variáveis S , I e R . Para esquematizar o processo epidemiológico o sistema comportamental esquematizado abaixo mostra as taxas de transições entre as três classes:

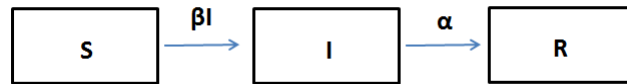


Figura 6: Esquema Compartimental de uma epidemia (Modelo SIR)

Fonte: Autoria própria.

onde βI é a taxa de transmissão da doença com ($\beta > 0$) como o coeficiente de infecciosidade; e α é taxa de remoção.

A taxa de transmissão, ou número de reprodução, é utilizada para medir o modo como uma determinada doença, causada por um agente transmissor como por exemplo: gripe *H1N1*, AIDS, ebola, dentre outras, se propaga numa população isto é, se a doença está se espalhando ou perdendo força. Em geral esse número é uma estimativa do número real de infectados, baseada em dados obtidos através de pesquisas feitas por órgãos responsáveis e que pode sofrer mudanças ao longo do período de duração da epidemia.

No caso da COVID-19, supondo uma taxa de transmissão igual a 2, poderíamos entender que um indivíduo infectado tende a transmitir a doença para duas outras pessoas susceptíveis. Caso βI seja igual a 0,5, teríamos que duas pessoas infectadas tendem a transmitir a doença para uma pessoa susceptível. No Brasil, por exemplo, no mês de setembro de 2020 essa taxa foi estimada em 0,998. Embora pareça uma taxa relativamente pequena, um número de reprodução igual a 1 significa um grande crescimento (MACHADO et al., 2020).

Considerando o esquema dado na Figura 6, vamos supor que:

- Cada compartimento é composto de indivíduos homogêneos (restrição forte do modelo);

- Cada indivíduo infeccioso tem a mesma probabilidade de se encontrar com um suscetível;
- Não ocorre nascimento na comunidade e a morte somente é causada pela doença.

Para atender todas às características descritas, o modelo matemático escolhido para descrever alguns tipos de epidemias acima, chamado SIR ou modelo sem dinâmica vital, é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I \end{cases} \quad (24)$$

Podemos observar, através do sistema de EDO's, que:

- os susceptíveis decrescem a uma taxa proporcional ao número de encontros com os infecciosos;
- os infectados aumentam do mesmo modo como os sadios diminuem e perdem os que são curados ou mortos;
- a variação dos recuperados é proporcional à quantidade dos infectados.

Admitamos para essa situação como fator fundamental valores iniciais $S_0 = S(0)$, $I(0) = I_0$, $R_0 = 0$ e os parâmetros β e α que descrevem a dinâmica da epidemia. Analisando a 2ª equação do sistema (24), no tempo $t = t_0 = 0$, temos que

$$\frac{dI}{dt}(0) = \beta S_0 I_0 - \alpha I_0,$$

isto é,

$$\frac{dI}{dt}(0) = I_0(\beta S_0 - \alpha),$$

e portanto, $\frac{dI(0)}{dt} > 0$ se, e somente se, $I_0(\beta S_0 - \alpha) > 0$. Considerando o fato do número de infectados no tempo inicial $t = 0$ ser maior que zero para que haja o início das infecções entre a população, então temos que

$$\beta S_0 - \alpha > 0,$$

o que é equivalente a

$$S_0 > \frac{\alpha}{\beta}.$$

Podemos concluir que o número de infectados terá taxa de crescimento positiva enquanto a população de suscetíveis S for maior que $\frac{\alpha}{\beta}$. O número $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$ é chamado de **limiar**

epidêmico. Se em uma dinâmica populacional SIR tivermos $I(t) > I_0$, para algum $t > 0$, dizemos que há uma epidemia.

Definindo

$$\lambda_0 = \frac{\beta S_0}{\alpha},$$

temos que λ_0 representa o número de infecções secundárias pois é a multiplicação do número de susceptíveis iniciais pela taxa de infecciosidade dividida pela taxa de remoção, ou seja, quanto maior for esta razão, maior será a severidade da doença.

Ainda, ao considerarmos as duas primeiras equações do sistema (24), ou seja

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \quad (25)$$

e

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I. \quad (26)$$

Ao dividirmos a relação (26) pela (25), temos que

$$\frac{dI}{dS} = -\frac{I(\beta S - \alpha)}{\beta SI}$$

e portanto,

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\alpha}{\beta S}. \quad (27)$$

Ao substituírmos $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$ em (27), teremos

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\rho}{S}. \quad (28)$$

Para $S_0 = S(0) > 0$ e $I_0 = I(0) > 0$, integrando (28), teremos

$$\int dI = \int \left(-1 + \frac{\rho}{S}\right) dS,$$

assim,

$$I + c_1 = -S + \rho \ln S + c_2.$$

Logo,

$$I = -S + \rho \ln S + C. \quad (29)$$

Usando das condições iniciais, isto é, tomando $t = 0$ em (29) obtemos a constante de integração:

$$C = I_0 + S_0 - \rho \ln S_0 = N - \rho \ln S_0,$$

pois $N = I_0 + S_0$, uma vez que $R_0 = 0$.

Portanto,

$$I(t) = -S(t) + \rho \ln S(t) + N - \rho \ln S_0. \quad (30)$$

Estamos interessados agora no valor máximo de $I(t)$, pois este indicará a severidade da doença. Para determinar I_{max} , é necessário que

$$\frac{dI}{dS} = 0.$$

Por (28), temos que

$$-S + \rho = 0,$$

isto é, $S = \rho$. Substituindo $S = \rho$ em (30), temos que

$$I_{max} = \rho \ln \rho - \rho \ln S_0 + N - \rho.$$

Evidenciando ρ ,

$$I_{max} = \rho (\ln \rho - \ln S_0) + N - \rho,$$

usando a propriedade dos logaritmos, segue que

$$I_{max} = \rho \left[\ln \left(\frac{\rho}{S_0} \right) \right] + N - \rho,$$

e portanto

$$I_{max} = \rho \left[-1 + \ln \left(\frac{\rho}{S_0} \right) \right] + N. \quad (31)$$

De modo análogo, se considerarmos a taxa de crescimento de infecção negativa, isto é,

$$\frac{dI}{dt} < 0,$$

chegaremos à seguinte desigualdade

$$S < \rho = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \lambda_0 < 1,$$

isto é, o número de infectados decrescerá quando a taxa de reprodução básica λ_0 for menor do que 1.

Algo importante quando se analisa as causas de uma epidemia é a quantidade de pessoas que ficarão doentes até que a doença seja erradicada. O Teorema do Limiar Epidemiológico a seguir estabelece que se $(S_0 - \rho)$ é relativamente pequeno comparado com ρ , então o número de indivíduos que contrairão a doença será, aproximadamente, igual a $I_{total} = 2(S_0 - \rho)$. Sendo

$S(\infty) = S_\infty$ o número de pessoas sadias que podem contrair a doença.

Teorema 3.3. (do Limiar Epidêmico): *Seja $v = S_0 - \rho$ e suponha que v/ρ é muito pequeno se comparado com 1. Se o número de infectados inicial I_0 é muito pequeno, então o número de indivíduos que finalmente contraem a doença $S_0 - S_\infty$ é próximo de $2v$.*

Demonstração: Da equação (31) temos:

$$I(S(t)) = I_0 + S_0 - S(t) + \rho \ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right).$$

Note que quando $t \rightarrow 0$, temos que

$$0 = I_0 + S_0 - S_\infty + \rho \ln \left(\frac{S_\infty}{S_0} \right).$$

Pelas condições iniciais anteriores I_0 é muito pequeno comparado a S_0 . Então consideraremos $I_0 = 0$. Assim, temos que

$$0 = 0 + S_0 - S_\infty + \rho \ln \left[\frac{S_0 - (S_0 - S_\infty)}{S_0} \right],$$

o que é equivalente a

$$0 = S_0 - S_\infty + \rho \ln \left[1 - \frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right]. \quad (32)$$

Se $S_0 - \rho$ é pequeno comparado a ρ , então $S_0 - \rho$ é pequeno se comparado a S_0 .

Usaremos a série de Taylor de ordem 2, para a função $f(t) = \ln(1-t)$ com $t = \frac{S_0 - S_\infty}{S_0}$ em torno do ponto $t = 0$. Derivando a função $f(t)$, obtemos

$$f'(t) = \frac{1}{1-t} (1-t)' = -\frac{1}{1-t} = -1(1-t)^{-1},$$

donde vem que

$$f'(0) = -\frac{1}{1-0} = -1.$$

Aplicando a derivada segunda, temos que

$$f''(t) = 1(1-t)^{-2} \cdot (-1) = -\frac{1}{(1-t)^2},$$

e, portanto, $f''(0) = -1$. Assim,

$$\ln(1-t) \cong f(0) + \frac{f'(0)(t-0)}{1!} + \frac{f''(0)(t-0)^2}{2!}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \ln \left[1 - \frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right] &\cong \ln 1 + \left[\frac{-1}{1!} \cdot \left(\left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right) - 0 \right) \right] \\ &+ \left[\frac{-1}{2!} \cdot \left(\left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right) - 0 \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Então,

$$\ln \left[1 - \frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right] = - \left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right)^2 \quad (33)$$

Logo, substituindo (33) em (32), temos

$$\begin{aligned} 0 &= S_0 - S_\infty + \rho \left[- \left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right)^2 \right] \\ &= S_0 - S_\infty - \rho \left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right) - \frac{\rho}{2} \left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right)^2 \\ &= (S_0 - S_\infty) \left(1 - \frac{\rho}{S_0} - \frac{\rho}{2S_0^2} (S_0 - S_\infty) \right) \\ &= (S_0 - S_\infty) \left(\frac{2S_0^2 - 2S_0\rho - \rho(S_0 - S_\infty)}{2S_0^2} \right). \end{aligned}$$

Como $S_0 - S_\infty \neq 0$, concluímos que

$$\frac{2S_0^2 - 2S_0\rho - \rho(S_0 - S_\infty)}{2S_0^2} = 0,$$

que é equivalente a

$$2S_0^2 - 2S_0\rho - \rho(S_0 - S_\infty) = 0$$

ou ainda,

$$\rho(S_0 - S_\infty) = 2S_0^2 - 2S_0\rho.$$

Segue que

$$S_0 - S_\infty = \frac{2S_0^2}{\rho} - 2S_0$$

e portanto,

$$S_0 - S_\infty = 2S_0 \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right).$$

Sendo $S_0 = \rho + v$, temos que

$$\begin{aligned} S_0 - S_\infty &= 2(\rho + v) \left(\frac{\rho + v}{\rho} - 1 \right) = (2\rho + 2v) \left(\frac{\rho + v}{\rho} - 1 \right) \\ &= 2\rho + 2v - 2\rho + \frac{2v}{\rho} + \frac{2v^2}{\rho} - 2v = 2v \left(\frac{1}{\rho} + \frac{v}{\rho} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_0 - S_\infty = 2v \left(\frac{1}{\rho} + \frac{v}{\rho} \right).$$

Uma estratégia para erradicação da doença ($I = 0$) é a imunização de um número suficiente de hospedeiros sadios. Seja p uma porcentagem da população imunizada (vacinada) e $(1 - p)$ a porcentagem não vacinada, então a população participante do processo epidemiológico, ou seja, a ser imunizada através da vacinação será $N(1 - p)$. Se λ_0 é o número médio de infecções secundárias, então

$$\lambda_0^* = (1 - p)\lambda_0 \tag{34}$$

será a taxa de reprodução básica depois da imunização de uma fração p de indivíduos susceptíveis.

Substituindo (34) em $\lambda_0^* < 1$, obtemos

$$(1 - p)\lambda_0 < 1,$$

isto é, temos

$$p\lambda_0 > \lambda_0 - 1,$$

e portanto

$$p > 1 - \frac{1}{\lambda_0}.$$

Como

$$\lambda_0 = \frac{\beta S_0}{\alpha},$$

segue que a população imunizada deve ser tal que

$$p > 1 - \frac{\alpha}{\beta S_0}.$$

Percebemos que o modelo SIR é tido como um método relativamente simples para descrever uma epidemia considerando que todos os indivíduos de uma população estejam em um dos três grupos: susceptíveis (ou saudáveis), infectados ou recuperados. A partir, dele o estudo teórico de modelos matemáticos em epidemiologia ganhou muito espaço e abriu as

portas para muitos outros modelos mais precisos.

Doenças infecciosas puderam ser melhor estudadas ao longo dos anos a partir do uso de modelos matemáticos. Por exemplo, grandes revistas como o *American Journal of Epidemiology*, passou a ter 24% dos artigos publicados em suas edições dos anos de 1981 e de 1985 sobre doenças infecciosas e deste montante, 11,4% utilizavam modelos matemáticos para descrever estes fenômenos (KING; SOSKOLNE, 1988). Uma outra revista como o *International Journal of Epidemiology* teve um aumento de 14,6% para 27,3% de publicações sobre epidemiologia que utilizavam modelos matemáticos para descrevê-los (BECHER, 2005).

Esse crescente aumento no uso de modelos matemáticos para descrever fenômenos epidemiológicos mostra a importância desta área, que pode contribuir para solucionar problemas no Brasil como a Dengue e no mundo como a COVID-19.

4 PROPOSTA DE ATIVIDADE EM DINÂMICA POPULACIONAL PARA O ENSINO MÉDIO.

4.1 INTRODUÇÃO

Ao longo das últimas décadas a cidade de Siqueira Campos - PR passou a ter um crescimento significativo em sua população devido a chegada de novas fábricas (MUSSALAM, 1974), o que contribuiu para a geração de novos empregos e oportunidades de trabalho, não somente para os habitantes que já residiam na cidade, mas também para os moradores de cidades vizinhas.

Segundo o jornal - Tribuna do Vale (VALE, 2020), este município teve um aumento de 15% (dados do IBGE) num período de 10 anos, sendo assim a cidade que mais cresceu na sua região, fato este que contribuiu para a redução habitacional nas cidades mais próximas.



Figura 7: Cidade de Siqueira Campos - PR

Fonte: (MUNICIPAL, 2020)

De acordo com este mesmo jornal (VALE, 2020), o município de Siqueira Campos, que em 2010 registrava 18.454 moradores passou a ter, segundo estimativas do IBGE, 21.249 no

ano de 2020. Este aumento populacional se tornou significativo para seus habitantes, deixando de ser conhecida apenas pela sua produção de café, para se consolidar como um polo industrial na região.

Essa mudança na economia do município, bem como o conseqüente aumento em sua população, se deve principalmente ao fato da instalação da “Pro Tork”, uma das maiores fábricas de peças de motocicletas do Mundo, a qual gera cerca de 3,5 mil empregos diretos, o que a torna uma das maiores empregadoras do Norte Pioneiro do Paraná, instalada em Siqueira Campos desde o início dos anos 90.



Figura 8: Fábrica de moto peças - Pro Tork

Fonte: <https://images.app.goo.gl/6VFGrve9wA8ZpoUL7>

Outros municípios da região que também apresentaram um importante aumento nas taxas de crescimento, no mesmo período, foram: Joaquim Távora (causado pela instalação de indústrias como “Frangos Pioneiro”) com elevação de 11% no número de habitantes, Ibaiti, com 10% de crescimento populacional e Santo Antônio da Platina, com 8% de aumento na última década.

De acordo com dados do IBGE, a microrregião composta pelos municípios da Amunorpi (Associação dos Municípios do Norte Pioneiro) (AMUNORPI, 2020) teve um aumento de quase 10 mil habitantes entre os anos de 2010 e 2020, passando de 320.009 para 329.869, sendo que dos 25 municípios pesquisados, 14 deles tiveram um aumento populacional neste período.

Fazem parte desta lista os municípios de: Barra do Jacaré, Cambará, Japira, Conseqüente Mairinck, Ibaiti, Jaboti, Jacarezinho, Carlópolis, Joaquim Távora, Pinhalão, Quatiguá,

Santo Antônio da Platina, Siqueira Campos, Wenceslau Braz.

Dentre os municípios que fazem parte da associação e que apresentaram decréscimo no número de habitantes estão: Abatiá, Andirá, Figueira, Guapirama, Jundiá do Sul, Ribeirão do Pinhal, Salto do Itararé, Santana do Itararé, São José da Boa Vista e Tomazina, de acordo com o Censo realizado no ano de 2010.

Na Figura 9 abaixo, podemos observar a variação no número de habitantes de cada um dos Municípios pesquisados:

Município	2010	2020
Abatiá	7764	7408
Andirá	20610	19926
Barra do Jacaré	2727	2781
Cambará	23886	25466
Carlópolis	13706	14356
Conselheiro Mairinck	3636	3876
Figueira	8293	7696
Guapirama	3891	3784
Ibaiti	28751	31644
Jaboti	4902	5303
Jacarezinho	39121	39322
Japira	4903	4930
Joaquim Távora	10736	12009
Jundiá do Sul	3433	3269
Pinhalão	6215	6324
Quatiguá	7045	7477
Ribeirão Claro	10678	10645
Ribeirão do Pinhal	13524	12948
Salto do Itararé	5178	4898
Santana do Itararé	5249	4954
Santo Antônio da Platina	42707	46251
São José da Boa Vista	6511	6160
Siqueira Campos	18454	21249
Tomazina	8791	7807
Wenceslau Braz	19298	19386

Figura 9: Variação da População dos 25 Municípios do Norte Pioneiro

Fonte: IBGE

Podemos notar pela tabela que Santo Antônio da Platina é cidade mais populosa, se-

guida por Jacarezinho, Ibaiti, Cambará, e Siqueira Campos - que superou Andirá no número de habitantes.

Por outro lado, o Município de Barra do Jacaré, segue como o menos populoso, seguido por Jundiá do Sul, Guapirama, Conselheiro Mairinck e Salto do Itararé.

4.2 DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE

Este foi o primeiro ano em que teve-se contato com os alunos do 3º ano do ensino médio do Colégio Estadual Maria Aparecida Chuery Salcedo, do curso de formação de docentes. Devido a situação gerada pela pandemia da COVID-19, os alunos ficaram cerca de 1 ano e meio sem aulas de matemática. Como o conteúdo deveria englobar os conceitos da grade curricular do terceiro ano do ensino médio, foi pensada uma maneira de se ensinar a dinâmica de crescimento populacional, que seria uma área aplicada da matemática que englobaria a matemática financeira, as progressões geométricas e a função exponencial, ou seja, assuntos que seriam tratados no 3º ano do ensino médio.

Para adequar este trabalho sobre dinâmicas populacionais para os alunos do ensino médio, foi pensado em utilizar o modelo de Malthus descrever quantitativamente o aumento de seus habitantes entre os anos de 2010 e 2020, por se tratar do modelo mais simples e do modelo que conseguiria utilizar os conceitos de função exponencial. Diante da realidade observada anteriormente, em particular à respeito do crescimento populacional da cidade de Siqueira Campos, a qual apresentou um aumento significativo de sua população, se comparado aos municípios vizinhos. Para tornar esta atividade mais atrativa para os alunos, foi concordado que o trabalho realizado por eles iria substituir a realização de uma prova e que seriam necessários conhecimentos de Excel e de Geogebra.

Os alunos se mostraram interessados pelo tema proposto, pois muitos deles são filhos de trabalhadores dessas fábricas, conhecem pessoas que dependem deste trabalho ou que ainda participam do programa “Jovem Aprendiz”, desenvolvido a partir de uma parceria da Prefeitura Municipal (MUNICIPAL, 2020) com a Empresa Pro Tork e com SENAI (Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial). Este programa visa a formação de pessoas (que tenham entre 14 e 24 anos) e que tenham interesse em ingressar no mercado de trabalho. Dessa maneira, jovens que ainda estejam em idade escolar tem a possibilidade de ter seu próprio salário e de aprender uma nova profissão, desde de que passem por um processo seletivo.

A atividade durou cerca de 1 mês, e no início teve a realização de uma apresentação mostrada nos slides ao longo desta subseção. Na apresentação foram revisados os conceitos

de função exponencial e ensinados conceitos novos como taxa de crescimento populacional, análise de tabelas e de gráficos. Para a realização do trabalho aplicado, foi sugerido que eles procurassem na internet dados numéricos que comprovassem o crescimento do número de habitantes da cidade de Siqueira Campos causado pelo desenvolvimento industrial ocorrido nas últimas décadas. Após o fim da apresentação do professor, os alunos teriam de fazer tabelas no excel e plotar os gráficos a partir dos dados das tabelas no Geogebra ao longo de um período de 6 aulas, em que o professor estaria disponível para tirar todas as dúvidas de uso do Excel e do Geogebra.

As dificuldades encontradas pelos alunos no uso do Excel foram desde usar comandos de inserção de dados, montagem de tabelas e associação de uma população para um determinado ano, até a realização dos cálculos das taxas de crescimento. Na parte de montagem do gráfico, as dificuldades eram em relação ao uso do software também, desde a inserção dos dados, até configurações do gráfico, como inserir o título do gráfico e realizar uma mudança de tamanho da fonte. Por fim, para os alunos que não tinham acesso a um computador, ficou definido que para estes alunos, teriam aceitas atividades em duplas nestes casos.

Abaixo constam os slides da apresentação realizada para os alunos e no 5 é mostrado um dos trabalhos entregue pelos alunos.

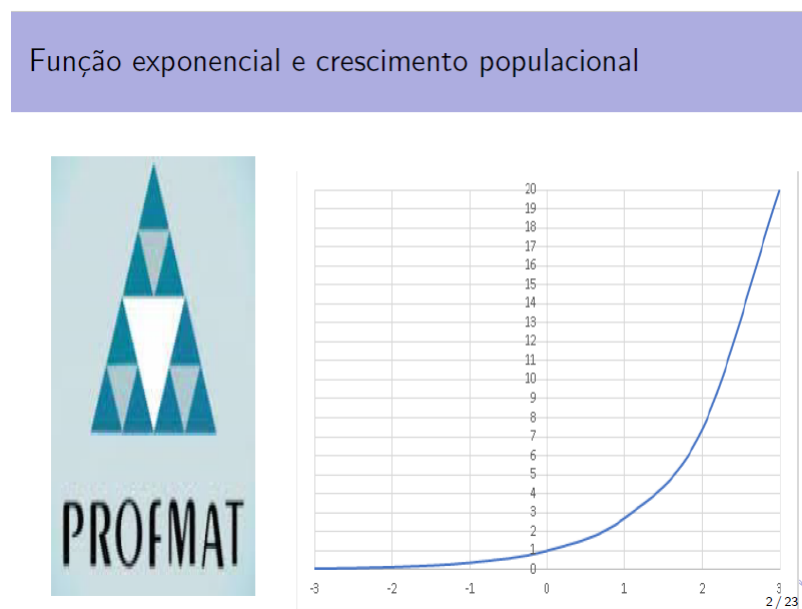


Figura 10: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (1)


Fonte: Autoria própria.

Foi apresentado o gráfico acima que indica um função exponencial. Assim, na Figura 11 foi apresentado o caso da cidade fictícia de Number City, onde apresentamos uma população

e uma taxa de crescimento em anos fictícias, e aos alunos foi feito o questionamento de como seria possível descrever o crescimento da população desta cidade em anos.

Função exponencial e crescimento populacional

Vamos considerar a seguinte situação:
A população de Number City é atualmente de **10000** habitantes e cresce a uma taxa de **10%** ao ano. Qual é a relação matemática que descreve seu crescimento após **t** anos?



3 / 23


Figura 11: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (2)

Fonte: Autoria própria.

A partir do slide 3, indicado na Figura 12, iniciou-se uma análise do crescimento da população utilizando a população inicial $P(0)$ e a taxa de crescimento com um fator de atualização t por meio de uma função denotada por $P(t)$.

Função exponencial e crescimento populacional

Analisemos esse fenômeno ano a ano!
Denotado por $P(t)$ sua população num momento t qualquer, $P(0)$ sua população inicial e $1,10$ como fator de atualização, temos na tabela a seguir sua variação ao longo dos anos:



4 / 23

Figura 12: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (3)

Fonte: Autoria própria.

Em seguida, no slide 4, foi feita uma elaboração passo a passo para os quatro primeiros anos, depois extrapolando para o caso geral, de modo a mostrar que a população cresce de maneira recursiva, ou seja, o ano seguinte utiliza o resultado do ano anterior vezes o fator de atualização t . Sendo assim, a construção foi semelhante a usada na relação (2) na qual a população aumenta seguindo uma progressão geométrica ($P.G.$). Ainda foi mencionado que o fator de atualização t seria a razão desta $P.G.$.

Função exponencial e crescimento populacional

t (ano)	População
0	$P(0) = 10000$
1	$P(1) = 10000 \cdot 1,10 = 11000$
2	$P(2) = 10000 \cdot 1,10 \cdot 1,10 = 10000 \cdot (1,10)^2 = 12100$
3	$P(3) = 10000 \cdot 1,10 \cdot 1,10 \cdot 1,10 = 10000(1,10)^3 \cong 13310$
4	$P(4) = 10000 \cdot 1,10 \cdot 1,10 \cdot 1,10 \cdot 1,10 = 10000(1,10)^4 \cong 14641$
.	.
.	.
.	.
t	$P(t) = 10000 \cdot \underbrace{1,10 \cdot 1,10 \dots 1,10}_{t \text{ anos}} = 10000 \cdot (1,10)^t$


5 / 23

Figura 13: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (4)

Fonte: Autoria própria.

No slide 5, indicado na Figura 14 foi evidenciado de maneira mais clara o resultado obtido na Figura 13 e assim, explicitada a relação entre o tempo t e a quantidade de habitantes $P(t)$.


Função exponencial e crescimento populacional



PROFMAT

Portanto, para um tempo t qualquer, a população dessa cidade será dada por:

$$P(t) = 10000 \cdot 1,10^t$$



6 / 23

Figura 14: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (5)


Fonte: Autoria própria.

No slide 6, indicado na Figura 15, foi iniciada a explicação do que seria efetivamente a função exponencial por meio do uso de exemplos e da sua forma geral, assim ficou mais evidente para os alunos que o resultado mostrado na Figura 14 representava uma função exponencial.

Função exponencial e crescimento populacional

De modo geral, uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e $a \neq 1$ é chamada de **função exponencial**

Exemplos:

$f(x) = 3^x$	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	
$f(x) = (\sqrt{2})^x$	$f(x) = 0,7^x$	

7 / 23


Figura 15: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (6)

Fonte: Autoria própria.

Já no slide da Figura 16 foi explicado que existe uma forma gráfica de representarmos o crescimento da população.

Função exponencial e crescimento populacional

Para visualizarmos melhor como se dá o crescimento dessa população, podemos representar graficamente essa função!



8 / 23

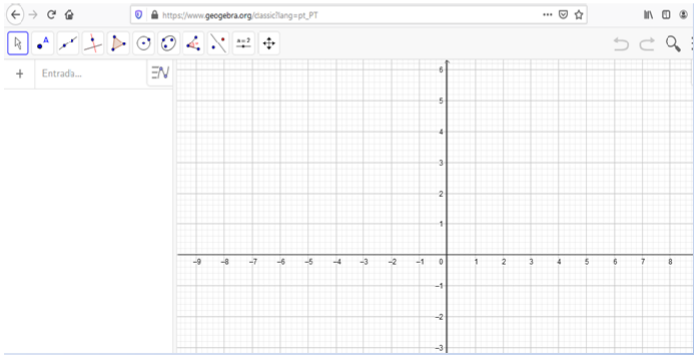
Figura 16: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (7)

Fonte: Autoria própria.

Em seguida, foi iniciada a parte das ferramentas computacionais, explicando sobre o Geogebra e sobre a importância de se representar uma função graficamente.

Função exponencial e crescimento populacional

Para tanto, iremos utilizar o **geogebra**, um aplicativo matemático que além de outras utilidades, é usado para representar o gráfico de diversas funções:



9 / 23

Figura 17: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (8)

Fonte: Autoria própria.

A partir deste momento, das Figuras 18 a 21, respectivamente, foi ensinado aos alunos a como inserir uma equação na caixa de entrada, ajustar a escala, inserir as coordenadas dos

dados e formatar o gráfico e assim puderam notar a importância de se fazer um gráfico com os dados explícitos, para uma análise do comportamento da população.

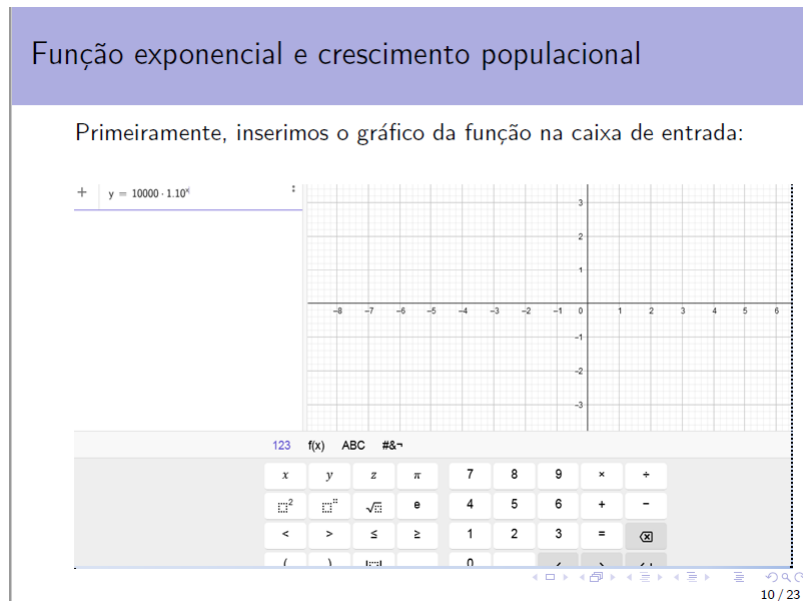


Figura 18: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (9)

Fonte: Autoria própria.

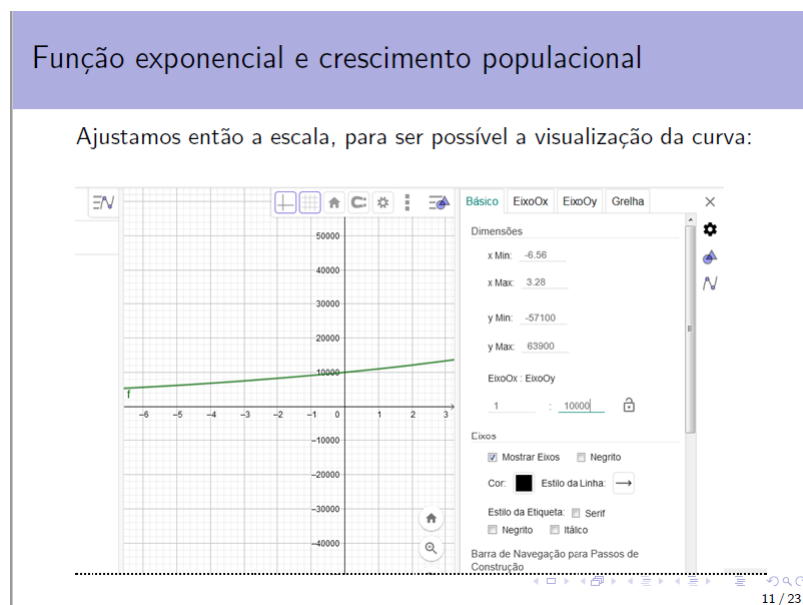


Figura 19: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (10)

Fonte: Autoria própria.

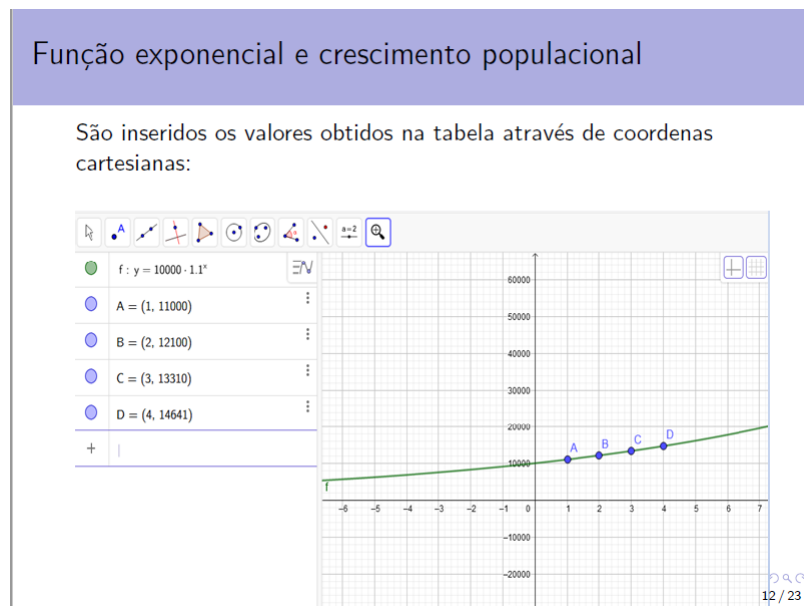


Figura 20: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (11)

Fonte: Autoria própria.




Figura 21: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (12)

Fonte: Autoria própria.

Com posse da equação que rege o crescimento populacional de Number City e do gráfico, os alunos tiveram contato, conforme mostrado na Figura 22, com o conceito de monotonicidade de uma função e conseqüentemente lhes foi explicado que neste caso o gráfico da função representava uma função crescente.

Função exponencial e crescimento populacional

Podemos observar que o gráfico da função é **crecente** à medida que os anos passam, ou seja, para todo t_1 e t_2 pertencentes ao domínio da função, com $t_1 < t_2$, temos que $P(t_1) < P(t_2)$. Isso se deve ao fato de que base da função $P(t) = 10000 \cdot (1,10)^t$, ou seja, $a = 1,10 > 0$.



14 / 23

Figura 22: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (13)

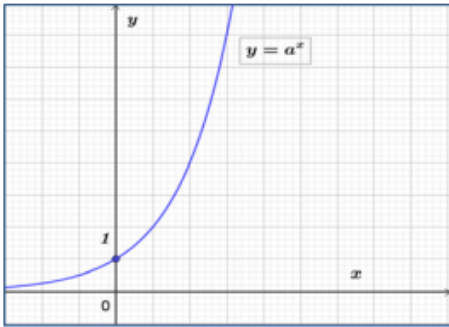
Fonte: Autoria própria.

Já para os slides 14 e 15, mostrados nas Figuras 23 e 24, respectivamente, foram explicados os casos de monotonicidade crescente e decrescente de acordo com a expressão geral de uma função exponencial $y = a^x$. Assim, se $a > 1$, então a função é crescente, e se $0 < a < 1$, então a função é decrescente.

Função exponencial e crescimento populacional

Essa característica observada no comportamento do gráfico da função exponencial, denominada de curva exponencial, apresenta os seguintes aspectos:

1°) Para $a > 1$, a função é **crecente:**



15 / 23

Figura 23: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (14)

Fonte: Autoria própria.

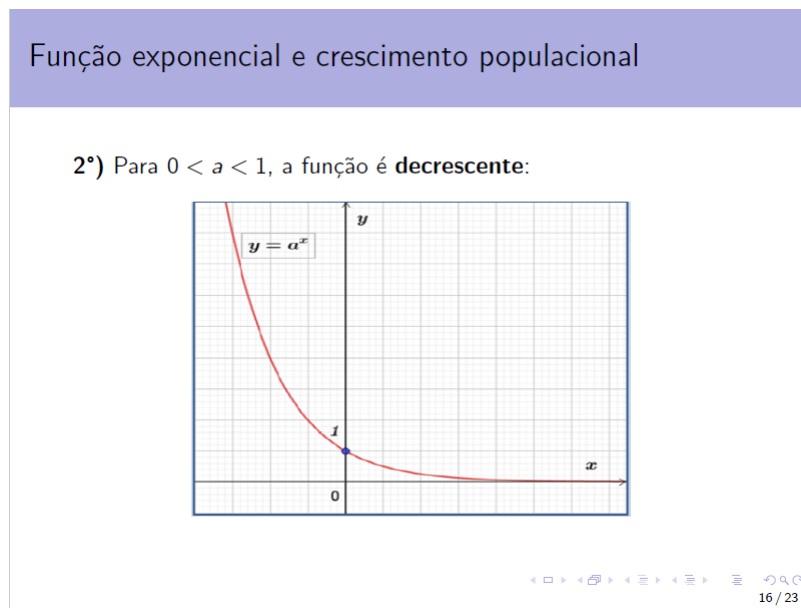


Figura 24: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (15)

Fonte: Autoria própria.

Tendo explicado o que são as funções exponenciais e tendo feito o exemplo utilizando Number City, foi explicado que o cálculo mostrado anteriormente utilizava um modelo matemático simples e, como uma forma de instigar os alunos, foi mostrada uma aplicação real de funções exponenciais com a população do estado do Paraná, em que os principais resultados trouxeram um panorama para o futuro. Primeiramente, na Figura 25, que representa o slide 16 da apresentação, foram expressos os dados da população do Paraná de 2015 até 2019 aos alunos.

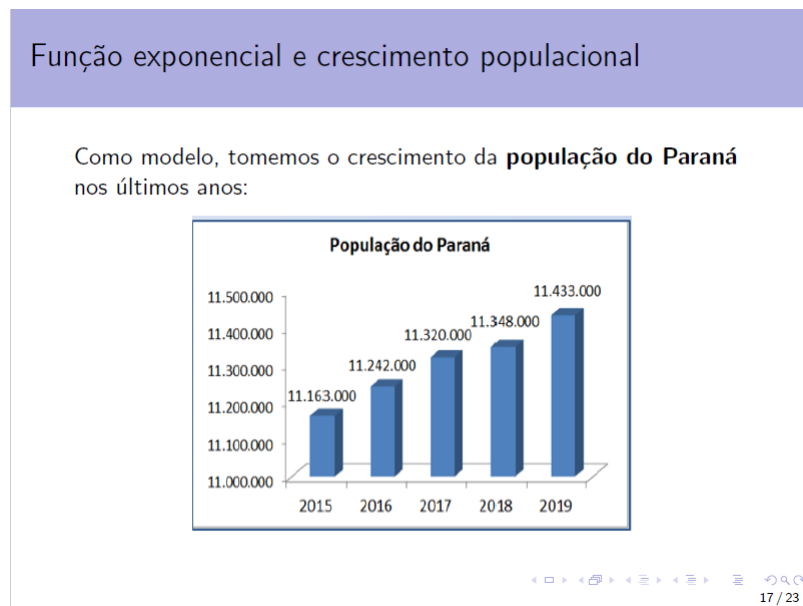


Figura 25: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (16)

Fonte: Autoria própria.

Em seguida, foram calculados com os alunos algumas taxas de crescimentos anuais.

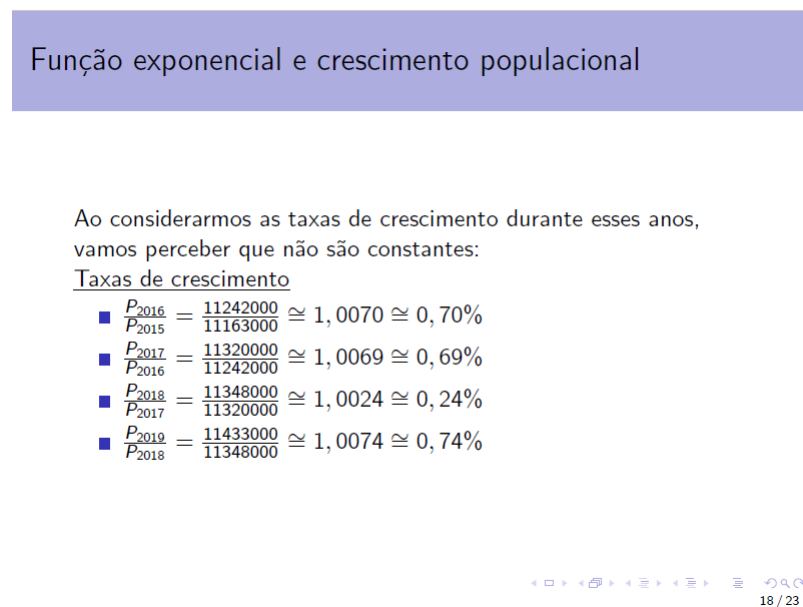


Figura 26: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (17)

Fonte: Autoria própria.

De modo mais simplificado, foi exposta a solução utilizada neste trabalho para calcular a taxa média anual, conforme ilustrada na Figura 27.

Função exponencial e crescimento populacional

Para obtermos uma função com taxa de crescimento constante e assim podermos modelar uma relação que permita estimar o número de habitantes de uma população, utilizamos a seguinte relação que permite calcular a **taxa média** anual:

onde

$$\alpha = \sqrt[t]{\frac{P_{t+1}}{P_t}} - 1$$

- α - taxa;
- t - tempo;
- P_t - população no tempo t .

19 / 23

Figura 27: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (18)

Fonte: Autoria própria.

Com os dados dos anos de 2017 e 2019, que foram retratados na Figura 25, foi mostrado aos alunos como que chegou-se a uma taxa média para a população do Paraná de 0,498%, conforme exposto na Figura 28.

Função exponencial e crescimento populacional

No caso da população do Paraná, caso queiramos calcular a taxa média de crescimento entre os anos de **2017** e **2019**, fazemos o seguinte cálculo:

$$\alpha = \sqrt{\frac{11433000}{11320000}} - 1 = 1,00498 - 1 \therefore \alpha = 0,00498$$

ou seja, uma taxa média de aproximadamente **0,498%** ao ano.

20 / 23

Figura 28: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (19)

Fonte: Autoria própria.

Por outro lado, na Figura 29, os alunos puderam perceber que caso fossem considerados anos diferentes para análise, obter-se-iam resultados diferentes, como no caso o qual ao invés de 2017, fossem utilizados os dados de 2015, chegaríamos a uma taxa de 0,559% ao ano.

Função exponencial e crescimento populacional

Ao considerarmos o crescimento da população do Paraná entre os anos de **2015** e **2019**, podemos calcular a taxa média anual de aumento fazendo o seguinte cálculo:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{11433000}{11163000}} - 1 = 1,00599 - 1 \therefore \alpha = 0,00599$$

Assim, $\alpha = 0,00599$ ou aproximadamente **0,599%** ao ano.

Figura 29: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (20)

Fonte: Autoria própria.

Então, após a explicação de qual taxa média seria mais condizente com a realidade, usou-se efetivamente a exponencial da forma $P(t) = P_0 e^{\alpha t}$.

Função exponencial e crescimento populacional

Dessa forma, ao tomarmos $P_0 = 11163000$, α e a relação de Malthus, temos a seguinte função que permite calcular a população do Paraná, com o passar dos anos:

$$P(t) = 11163000 \cdot e^{0,00599t}$$

22 / 23

Figura 30: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (21)

Fonte: Autoria própria.

E, por fim, foi mostrado, na Figura 31, como é a representação gráfica para este modelo de crescimento do número de habitantes do estado do Paraná.

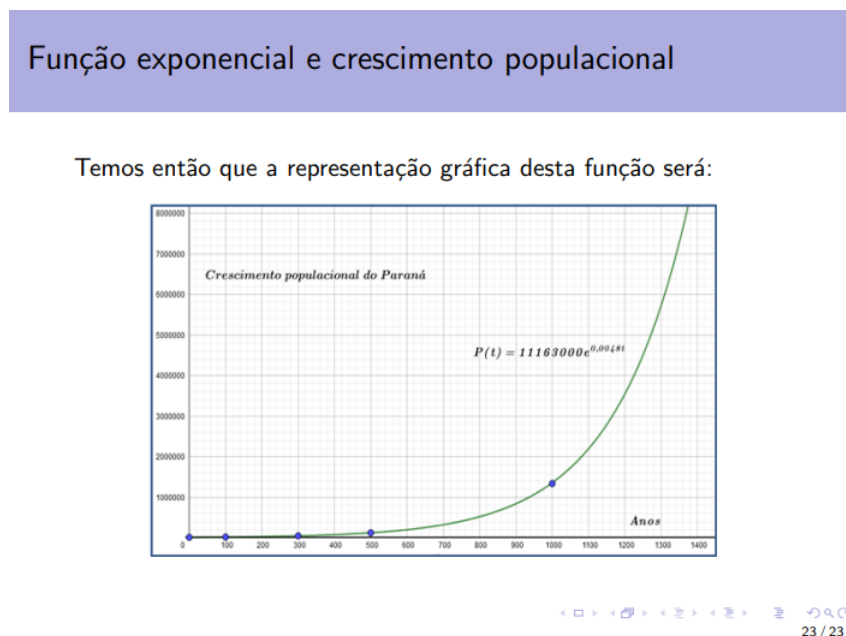


Figura 31: Apresentação do conteúdo do trabalho - slide (22)

Fonte: Autoria própria.

Dessa forma os alunos puderam observar que ao utilizar um modelo matemático, como

é o caso do Modelo Malthus que prevê um crescimento populacional ilimitado não levando em consideração os fatores limitantes próprios de nossa realidade, nem sempre reflete o que de fato acontece, pois são confiáveis até um determinado momento, ou seja, quando procura descrever o fenômeno natural por um curto espaço de tempo. Entretanto, pode ser melhorado e aperfeiçoado a uma determinada situação problema, ajudando a solucioná-la satisfatoriamente.


5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho mostrou modelos matemáticos capazes de fazer previsões sobre o crescimento de populações, em especial para a população do estado do Paraná, e a transmissão de doenças contagiosas a partir do uso ferramental de equações diferenciais. Assim, buscando tornar este conhecimento mais acessível a todos, foi realizada com sucesso uma atividade com alunos de ensino médio, com conceitos de função exponencial e com a interpretação de gráficos e de tabelas. Logo, foi visto que de maneira simplista, os modelos podem trazer noções do que pode acontecer no futuro e que quanto mais informações forem colocadas na análise, maiores as chances de acerto de previsões.

É esperado que este trabalho possa contribuir de modo significativo com a formação dos alunos no ensino de progressões geométricas e funções exponenciais, que sirva como exemplo de aplicação da matemática em seu cotidiano, de maneira que possam compreender sua real importância para descrever fenômenos naturais que ocorrem de tempos em tempos e que interferem na vida de todos. Há de se esperar também que eles possam entender que as ferramentas tecnológicas, como é o caso do Excel e do Geogebra, são de grande importância, não apenas para descrever tais acontecimentos, mas também para potencializar o seu aprendizado e torná-lo mais prazeroso.

Obviamente se faz necessário que o professor de matemática do ensino médio procure se aperfeiçoar em relação ao uso de ferramentas computacionais, para que dessa maneira possa utilizar estes recursos em sala de aula, estabelecendo assim uma relação de confiança entre os sujeitos da aprendizagem, tornando o ensino de Matemática mais dinâmico e contextualizado. Espera-se também que este material possa servir de incentivo às novas práticas pedagógicas em sala de aula, não somente para alunos do ensino médio, mas também do fundamental, dando ênfase à representação de pontos no plano cartesiano, relações entre grandezas diretas ou indiretamente proporcionais, elaboração de tabelas para organização de orçamentos domésticos, dentre outros conhecimentos básicos de matemática.

APÊNDICE A – MATERIAL DESENVOLVIDOS PELOS ALUNOS



COL. EST. "PROFª MARIA APARECIDA CHUERY SALCEDO" – EFP
www.sqcmaria.seed.pr.gov.br - sqcmaria@seed.pr.gov.br

Trabalho de Matemática – Crescimento Populacional de Siqueira Campos

1 Identificação
 Professor: Yuri Jivago Queiroz Leite
 Curso: Formação de Docente - Integrado
 Disciplina: Matemática
 Série/Ano: 3º Turma: A
 Período: Tarde
 Aluno (a): BIANCA CAROLINE SE SOUZA VIEIRA e LETÍCIA DA SILVA MIRANDA

Crescimento populacional Siqueira Campos	
População	Crescimento
2010	18454
2011	18962
2012	18933
2013	19177
2014	19424
2015	19675
2016	19929
2017	20186
2018	20446
2019	20710
2020	21249

Figura 32: Material produzido pelos alunos - página 1

Fonte: Autoria própria.



Taxa de crescimento médio da população:

$$P(2010)=18.454$$

$$P(2011)=(18.454 \times 0,0129)+18.454=18.692$$

$$P(2012)=(18.692 \times 0,0129)+18.692=18.933$$

$$P(2013)=(18.933 \times 0,0129)+18.933=19.177$$

$$P(2014)=(19.177 \times 0,0129)+19.177=19.424$$

$$P(2015)=(19.424 \times 0,0129)+19.424=19.675$$

$$P(2016)=(19.675 \times 0,0129)+19.675=19.929$$

$$P(2017)=(19.929 \times 0,0129)+19.929=20.186$$

$$P(2018)=(20.186 \times 0,0129)+20.186=20.446$$

$$P(2019)=(20.446 \times 0,0129)+20.446=20.710$$

$$P(2020)=21.249$$

$$\alpha = 11 \sqrt{\frac{21249}{18454}} - 1 = 1 - 1,0129 = 0,0129 = \alpha = 0,0129, \text{ ou}$$

aproximadamente $\alpha = 1,29\%$ ao ano.

Dessa forma, tomando $P(0)=18454$ e $\alpha = 0,0129$ como taxa de crescimento médio da população de Siqueira Campos, temos a seguinte função para estimar o número de habitantes para os próximos anos:



$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$$

$$P(t) = 18454 \cdot e^{0,0129t}$$

Figura 33: Material produzido pelos alunos - página 2

Fonte: Autoria própria.

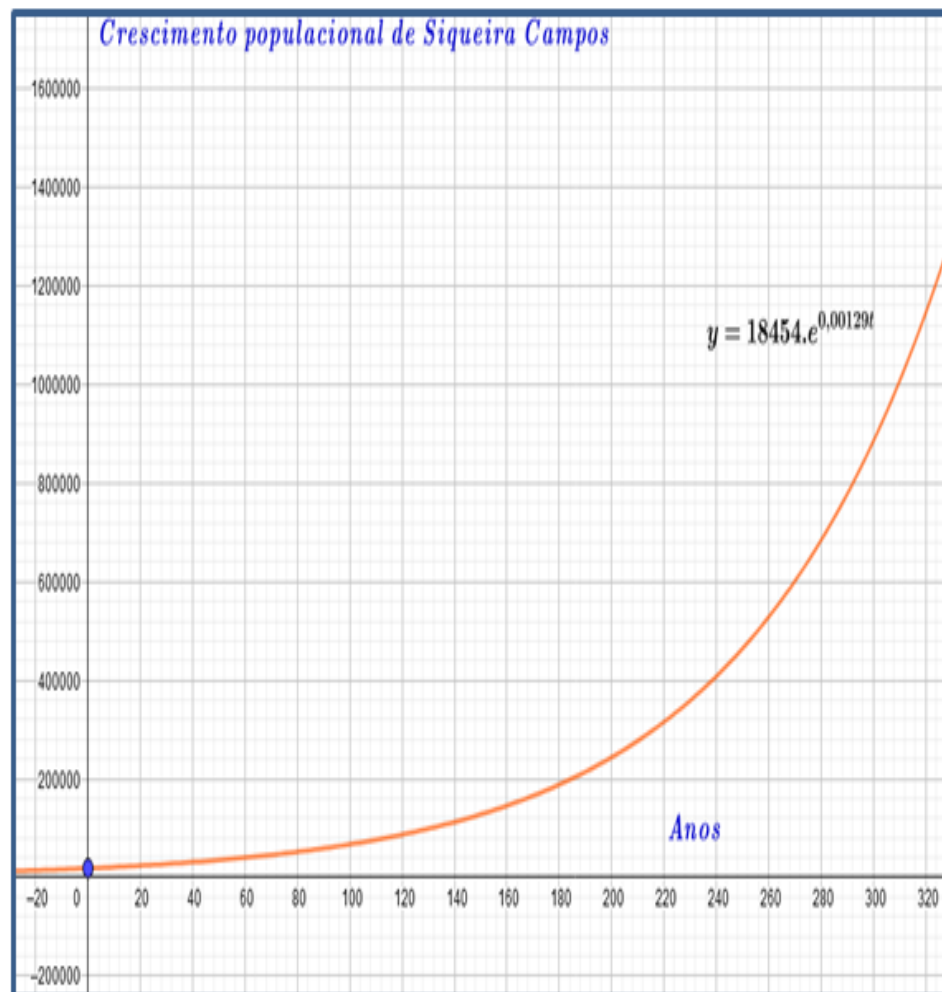


Figura 34: Material produzido pelos alunos - página 3

Fonte: Autoria própria.

REFERÊNCIAS

- AMUNORPI. **Dados relativos das cidades da região**. 2020. Disponível em: <<http://www.amunorpi.com.br/>>. Acesso em: 16 de Outubro de 2020.
- ANDERSON, R. M.; MAY, R. M. Understanding the aids pandemic. **Scientific American**, JSTOR, v. 266, n. 5, p. 58–67, 1992.
- AUR, B. A. Base nacional comum curricular. **Boletim Técnico do Senac**, v. 44, n. 1, 2018.
- BARROS, L. C. de et al. Modelo sis com dinâmica vital e população total nao constante baseado em regras fuzzy. **Biomatemática**, v. 18, p. 81–90, 2008.
- BASSANEZI, R. C. Modelagem matematica uma disciplina emergente nos programas de formaç ao de professores. 1999.
- BECHER, H. **Health research in developing countries: a collaboration between Burkina Faso and Germany**. Heidelberg, Alemanha; Nouna, Burkina Faso: Springer Science & Business Media, 2005.
- CASTILLA, J. et al. Incidencia de la gripe y efectividad de la vacuna antigripal en la temporada 2004-2005. In: SCIELO ESPANA. **Anales del Sistema Sanitario de Navarra**. Espanha, 2006. v. 29, n. 1, p. 97–106.
- IBGE. **Censo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - população do Brasil**. 2020. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/index.html>>. Acesso em: 25 de setembro de 2020.
- IBGE. **Censo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - população do Paraná**. 2020. Disponível em: <<https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pr/panorama>>. Acesso em: acesso em 16 de setembro de 2020.
- IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos da Matemática Elementar**. São Paulo, Brasil: Editora Atual, 2004.
- KING, M. E.; SOSKOLNE, C. L. Use of modeling in infectious disease epidemiology. **American journal of epidemiology**, Citeseer, v. 128, n. 5, p. 949–961, 1988.
- MACHADO, C. L. et al. **Taxa de transmissão da Covid-19**. 2020. Disponível em: <<https://coronavirus.saude.mg.gov.br/blog/164-taxa-de-transmissao-covid-19>>. Acesso em: 14 de Novembro de 2020.
- MUNICIPAL, P. **Informações do município**. 2020. Disponível em: <<https://www.siqueiracampos.pr.gov.br/pagina/4/dados-gerais>>. Acesso em: 17 de Outubro de 2020.
- MUSSALAM, R. Norte pioneiro do paraná-formação e crescimento através dos censos. 1974.

PEARL, R.; REED, L. J. On the rate of growth of the population of the united states since 1790 and its mathematical representation. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, National Academy of Sciences, v. 6, n. 6, p. 275, 1920.

RIGONATTO, M. Coeficiente de variação. **Brasil Escola**, 2017.

TECNOLÓGICA, B. S. de Educação Média e. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. Brasil: MEC, 1999.

VALE, J. T. do. **Crescimento populacional da cidade de Siquiera Campos**. 2020. Disponível em: <<https://portaljnn.com/noticia/2517//siqueira/campos/tem/maior/percentual/de/crescimento>>. Acesso em: 20 de Novembro de 2020.