UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

ANDRÉ THIAGO FUSEL

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA DENTRO DO CONTEXTO DE TELEFONIA

SÃO CARLOS

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

ANDRÉ THIAGO FUSEL

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA DENTRO DO CONTEXTO DE TELEFONIA

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Ivo Machado da Costa

SÃO CARLOS

2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

Fusel, André Thiago

O ensino e a aprendizagem da análise combinatória dentro do contexto de telefonia/ André Thiago Fusel. – São Carlos: UFSCar, 2013.

Páginas. 133 p.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, 2013.

Pista. (palavras chaves)

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE

ANDRÉ THIAGO FUSEL

APRESENTADA AO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS, EM 17 DE AGOSTO DE 2013.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Ivo Machado da Costa
DM - UFSCar

Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro
ICMC- USP

Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano
DM - UFSCar

Em especial à minha namorada Edméia, que foi o meu alicerce, a toda minha família, meu orientador professor Ivo e a todos os alunos e professores do curso do PROFMAT.

"Transforme as pedras que você tropeça nas pedras de sua escada."

Sócrates.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus pela vida, pelas maravilhosas pessoas que ele colocou no meu caminho e pela força para superar os obstáculos.

Dedico este trabalho à minha namorada Edméia que foi a pessoa que mais me incentivou a continuar na hora em que a minha vontade era desistir.

Agradeço aos meus pais, Osvaldo e Rosângela, meus maiores mestres, pela criação dada a mim e que sempre me apontaram qual caminho seguir.

Agradeço aos meus irmãos Bruna e Henrique, e ao meu sobrinho Giulianno pelo apoio.

Agradeço ao meu orientador professor Dr. Ivo Machado da Costa pela grande paciência, incentivo e dedicação.

Agradeço a todos os meus colegas do PROFMAT por darem grandes contribuições para meu desenvolvimento acadêmico e profissional e para a conclusão do curso em especial ao Fabrício, Bruno, Deivid e Daniele.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT, pela dedicação e pelos ensinamentos.

Agradeço a professora Rita Pancotto da EMEB Profº Benno Carlos Claus e a professora Simone Pereira do Centro Educacional SESI Bragança Paulista pelas contribuições dadas nesse momento final do curso.

Agradeço a equipe gestora da escola SESI Bragança Paulista pelo apoio e aos meus alunos que são a razão deste trabalho e fizeram valer a pena tanto esforço.

RESUMO

A presente dissertação, estruturada na metodologia de pesquisa conhecida como Engenharia Didática, apresenta o desenvolvimento de uma aula inédita para o professor sobre análise combinatória no Ensino Médio. O objetivo deste trabalho é elaborar um material didático, que auxilie os alunos no aprendizado de alguns conceitos de análise combinatória de forma significativa. A sequência didática elaborada está inserida no contexto de telefonia e aborda o assunto atual sobre o acréscimo do 9º dígito nos números de celulares da região do Estado de São Paulo com código de área 11. Toda a sequência foi pensada de forma que o aluno seja o protagonista de sua aprendizagem, fazendo observações, conjecturas, debatendo com os colegas, manipulando materiais e solucionando os problemas propostos nas folhas de atividades de maneira autônoma. A sequência didática foi aplicada para duas turmas de 2º ano do Ensino Médio na Escola Centro Educacional SESI Bragança Paulista. Para realizarem as atividades, os alunos foram divididos em grupos. Todas as folhas de atividades realizadas pelos alunos e os registros de observações feitos pelo professor durante a aplicação das atividades serviram como ferramentas para verificar se os objetivos traçados foram atingidos.

Palavra-chave: Análise Combinatória. Sequência Didática.

ABSTRACT

This present dissertation, structured in the methodology of well-known research as Didactic Engineering, it presents the development of an unpublished class for the teacher on combination analysis in the High School. The objective of this work is to elaborate a didactic material that aids the students in the learning of some concepts of combination analysis in a significant way. The elaborated didactic sequence is inserted in the telephony context and it approaches the current subject on the increment of the 9th digit in the numbers of cellular of the area of the State of São Paulo with code of area 11. The whole sequence was thought so that the student will be the protagonist of its learning, making observations, you conjecture, debating with the colleagues, manipulating materials and solving the problems proposed in the leaves of activities in an autonomous way. The didactic sequence was applied for two groups of 2nd year of the High School in the School Educational Center SESI Bragança Paulista. For they accomplish the activities, the students were divided in groups. All the sheets of activities accomplished by the students and the registrations of observations facts by the teacher during the application of the activities were good as tools to verify the objective plans were reached.

Word-Key: combination analysis, didactic sequence.

Lista de Ilustrações:

Lista de Fotos:

Lista de Quadros:

Sumário

Introdução

Durante o mês de julho do ano de 2012, os números de celulares da região do Estado de São Paulo, composta por 64 municípios incluindo a capital, sofreram alteração na quantidade de caracteres numéricos por decisão da Agência Nacional de Telecomunicações (ANATEL), através da Resolução nº 553/10, passando de 8 para 9 caracteres numéricos com a finalidade de ampliar a disponibilidade de números de telefones móveis (celulares) e atender à crescente demanda de novos usuários na região metropolitana de São Paulo, pertencentes a região cujo código de área é 11.

O fator motivador para a elaboração desta sequência didática, apresentada neste trabalho, foi o questionamento feito por alguns alunos sobre esse acréscimo de dígito nos telefones celulares da região.

Sou professor de uma das unidades educacionais do SESI conhecida como Centro Educacional SESI Bragança Paulista, localizada na referida cidade, desde janeiro de 2012. A rede seleciona os alunos para entrarem no Ensino Médio, classificando os 64 alunos que obtiveram melhor desempenho na 8ª série do Ensino Fundamental da própria escola.

Em 2012 ministrei aulas para os 1º anos A e B do Ensino Médio no período da tarde sendo em cada sala ministrada semanalmente 4 aulas .

Nos 1º anos do Ensino Médio, de acordo com o Currículo da Rede SESI, temos que trabalhar as expectativas relacionadas a traduzir e representar situações-problema por meio de esquemas, diagramas, árvores de possibilidades e tabelas para contar os casos possíveis em problemas que envolvam o princípio fundamental da contagem. Como não houve tempo durante o ano letivo de 2012 para trabalhar tais conteúdos os mesmos foram abordados no 2º ano do Ensino Médio no ano de 2013 durante os meses de março e abril junto com os conteúdos de análise combinatória.

O presente trabalho tem como objetivo, através do uso de folhas de atividades contendo situações-problema dentro do contexto de telefonia, fazer com que os alunos construam alguns conceitos de análise combinatória tais como: princípio fundamental da contagem, fatorial de um número inteiro positivo, permutação simples e arranjo simples. Esses conceitos auxiliarão esses alunos no que diz respeito à compreensão do acréscimo do nono dígito nas linhas de telefonia móvel na região com código de área 11, no qual se insere a escola em foco localizada na cidade de Bragança Paulista e fazer com que esses alunos desenvolvam as habilidades necessárias referentes aos conceitos de análise combinatória.

Para atingir o objetivo referente à compreensão da ampliação de quantidade de linhas telefônicas, foi trabalhado o texto "*Números de telefones móveis da área 11 terão nove dígitos a partir de domingo, 27 de Julho de 2012*." retirado do site da ANATEL. Informações sobre a quantidade de prefixos na região cujo código de área é 11 foram retiradas do site *www.teleco.com.br* para que os estudantes pudessem observar a quantidade de linhas telefônicas para celulares com 8 caracteres numéricos e confrontassem o resultado com o texto citado. Posteriormente, os alunos encontraram a quantidade de linhas de telefonia móvel na região de código de área 11 com 9 caracteres numéricos usando como ferramenta os conceitos desenvolvidos na aplicação da sequência didática.

Segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM plus), a contextualização sociocultural faz com que o aluno se aproxime da realidade fazendo-o vivenciar situações próximas que lhe permitam reconhecer a diversidade que o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nesta realidade.

Por solicitação do orientador lemos um pouco sobre Educação Matemática, no que tange à didática da Matemática da Escola Francesa, particularmente tivemos contato com a metodologia de pesquisa conhecida como Engenharia Didática. Não estamos afirmando que nosso trabalho se pautou rigorosamente nesta metodologia, mas foi uma exigência dele que tivéssemos um primeiro contato.

Neste momento será feita uma síntese desta dissertação.

O capítulo 1 aborda alguns aspectos históricos da análise combinatória, assim como definições de princípio fundamental da contagem, princípio aditivo, permutação simples, fatorial de um número inteiro positivo, arranjo simples e combinação simples.

No capítulo 2 é feito um modesto estudo sobre o ensino de análise combinatória no Ensino Médio, analisando os documentos oficiais, alguns livros didáticos para verificar a linha adotada pelos autores, incluindo o livro adotado pela rede, e a análise de dissertações correlatas.

No capítulo 3 é apresentado todo o aporte teórico que norteou o presente trabalho trazendo a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e alguns aspectos da Engenharia Didática que foram um dos pilares da elaboração da sequência didática.

No capítulo 4 é descrita a elaboração da sequência didática, bem como a inspiração para o tema relacionado à telefonia e a implantação do nono dígito nos números de telefones celulares da região. É apresentada também a aplicação da sequência didática nas duas classes de 2º ano da escola SESI e as metodologias adotadas para as análises dos erros.

Do capítulo 5 ao capítulo 9 é feita uma descrição detalhada de cada uma das atividades da sequência didática, as análises a *priori* e a *posteriori*. Cada um desses capítulos traz a descrição e a análise de uma atividade da sequência didática.

A conclusão do trabalho se encontra no capítulo 10.

As folhas de atividades aplicadas e o tabuleiro com as cartas numeradas utilizadas na atividade 3 estão disponíveis no Apêndice.

Espero com esse trabalho colocar à disposição dos colegas professores um material didático para o ensino de análise combinatória no qual eu acredito, juntamente com a explicação sobre a ampliação dos dígitos nos números de telefones celulares que ocorrerá gradativamente em todo o país. A experiência adquirida com a elaboração, aplicação e com as análises dos erros contribuiu para a reflexão e aperfeiçoamento do meu trabalho como profissional da educação.

Capítulo 1

A PRESENÇA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NA MATEMÁTICA.

1.1 A HISTÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

O que se sabe sobre Matemática egípcia está escrito em papiros dentre eles o papiro de Rhind que recebe este nome, pois foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês Henry Rhind. Segundo Eves (2011) o papiro também recebe o nome de papiro de Ahmes devido ao nome do escriba que copiou 85 problemas em escrita hierática por volta de 1650 a.C.

Um problema escrito no papiro de Rhind, mais precisamente o problema de número 79, segundo Eves (2011), não tem uma interpretação tão precisa e aparece um conjunto de dados curioso.

Bens	
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2401
Hecates de grãos	16807
	19607

Fica nítido que a sequência de números é formada pelas cinco primeiras potências de 7, seguida de sua soma. De acordo com Eves (2011) a primeira impressão que ficou quando o problema foi analisado era que o escriba talvez estivesse introduzindo a terminologia casa, gatos, etc. para representar primeira potência, segunda potência e assim por diante. Em 1907 o historiador Moritz Cantor deu uma interpretação ao problema, ele viu no problema 79 um precursor de um problema da idade média e que aparecia no livro Liber abaci (1202) de Leonardo de Fibonacci que era o seguinte: “Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre senhoras, mulos, sacos, pães facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma?”. Como versão posterior e mais familiar tem os versos infantis ingleses:

Inglês	Português
I was going to St. Ives	*Quando ia a Santo Ivo*
I met a man with seven wives;	*Encontrei um homem com sete mulheres;*
Every wife had seven sacks;	*Cada mulher tinha sete sacos;*
Every sack had seven cats;	*Cada saco tinha sete gatos;*
Every cat had seven kits.	*Cada gato tinha sete gatinhos.*
Kits, cats, sacks, and wives,	*Gatinhos, gatos, sacos e mulheres,*
How many were going to St. Ives?	*Quantos iam para Santo Ivo?*

De acordo com Eves (2011), se baseando na interpretação de Cantor, o problema 79 do papiro de Rhind pode receber a seguinte interpretação: “Uma relação de bens consistia em sete casas, onde cada casa tinha sete gatos; cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo e cada espiga de trigo produzia sete hecates de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hecates de grãos, quanto havia disso tudo?”. É interessante o fato do papiro de Rhind, escrito há aproximadamente 3600 anos, conter um problema de contagem.

Quando se analisa a matemática chinesa antiga, não pode deixar de citar o famoso quadrado mágico chamado *lo – shu*.

Segundo Eves (2011), no clássico da matemática chinesa antiga, o I-King ou livro das permutações aparece um diagrama numérico conhecido como *lo – shu*, posteriormente desenhado como mostra a ilustração a seguir.

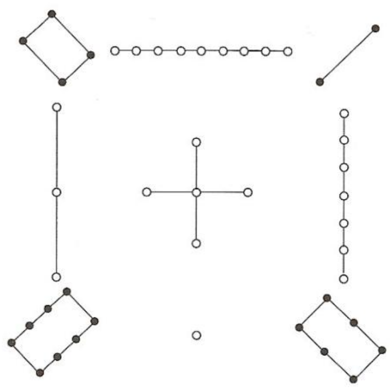


Ilustração 1: Quadrado mágico. Figura extraída do livro Introdução à história da matemática (EVES, 2011. p.269)

Conta a lenda que o primeiro a ver o diagrama foi o imperador Yu, por volta de 2200 a.C., decorando a carapaça de uma tartaruga que lhe apareceu as margens do rio Amarelo.

De acordo com Eves (2011), um quadrado mágico de ordem n é um arranjo quadrado de n² inteiros distintos dispostos de tal maneira que os números de uma linha qualquer, de uma coluna qualquer ou da diagonal principal têm a mesma soma chamada de constante mágica do quadrado. Nesse caso o quadrado se chama normal se os n² números são os n² primeiros números inteiros positivos.

Uma fórmula matemática que pode ser utilizada para encontrar a constante mágica de um quadrado mágico de ordem *n* é dada por $\frac{n \cdot (n^2+1)}{2}$. Essa fórmula pode ser demonstrada da seguinte maneira:

Por definição, um quadrado mágico de ordem *n* deve ser preenchido pelos n^2 primeiros inteiros positivos cuja soma de todos esses números é dada por:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ \dots + (n-1) + n + (n+1) + \ \dots + \ n^2 = \frac{n^2 \cdot (n^2+1)}{2}.$$

Como um quadrado de ordem *n* tem *n* colunas a soma dos elementos que preenchem cada coluna é dada por:

$$\frac{1 + 2 + \ \dots + (n-1) + n + (n+1) + \ \dots + \ n^2}{n} = \frac{n^2 \cdot (n^2+1)}{2n} = \frac{n \cdot (n^2+1)}{2}.$$

Como o *Lo – shu* é um quadrado mágico de ordem 3, sua constante mágica é

$$\frac{3 \cdot (3^2+1)}{2} = 15.$$

Agora para descobrir o número que ocupa o quadrado central, basta somar a coluna, a linha e as diagonais que contém o número central.

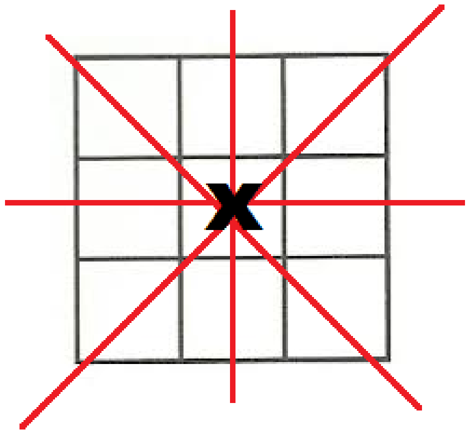


Ilustração 2: Soma dos elementos da Linha, coluna e diagonais que contém o número central .

Como a constante mágica é 15 essa soma resulta em 60 onde cada elemento do quadrado mágico é somado uma única vez, exceto o número central que é somado 4 vezes, logo a soma, onde x representa o número central, é dada por:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 3x \ = 60$$

Onde o número central é dado por $x = 5$.

A soma dos outros dois números que pertencem a mesma linha, a mesma coluna e as mesmas diagonais onde aparece o algarismo central 5 é igual a 10.

Os pares de números são 1 e 9, 2 e 8, 3 e 7, e 4 e 6.

Chamando de a_{ij} o elemento que está posicionado na linha i e coluna j, tem-se que $a_{22} \ = 5$.

Iniciando com $a_{11} = 1$ o preenchimento das lacunas restantes, tem-se que o elemento a_{33} é obrigatoriamente o 9. Dessa maneira, estudando os números que podem assumir a posição a_{12}, nota-se que esse elemento não pode ser o:

- 2, pois se $a_{12} = 2$, então a_{13} tem que ser o número 12;
- 3, pois se $a_{12} = 3$, então a_{13} tem que ser o número 11;
- 4, pois se $a_{12} = 4$, então a_{13} tem que ser o número 10;
- 6, pois se $a_{12} = 6$, então a_{13} = 8 e como esse elemento está na mesma coluna do número 9 a soma dos elementos dessa coluna ultrapassa 15;
- 7, pois se $a_{12} = 7$, então a_{13} também tem que ser o número 7;

- 8, pois se $a_{12} = 8$, então a_{13} = 6 e como esse elemento está na mesma coluna do número 9, tem-se que somente a soma desses dois elementos já resulta em 15.

Dessa maneira pode-se concluir que os números 1 e 9 não podem ser posicionados em uma diagonal do quadrado mágico de ordem 3.

Preenchendo a_{11} com o número 3, tem-se que a_{33} é obrigatoriamente o 7.

Estudando os números que podem ser preenchidos na posição a_{12}, nota-se que o elemento não pode ser o número:

- 1, pois se $a_{12} = 1$, então a_{13} tem que ser o número 11;
- 2, pois se $a_{12} = 2$, então a_{13} tem que ser o número 10;
- 4, pois se $a_{12} = 4$, então $a_{13} = 8$. Como o 8 está na mesma coluna que o 7, somente a soma desses dois elementos já resulta em 15;
- 6, pois se $a_{12} = 6$, então a_{13} também tem que ser o número 6;
- 8, pois se $a_{12} = 8$, então a_{13} tem que ser o número 4. Como o 4 está na mesma coluna que o 7, para que a soma dessa coluna resulte em 15, o elemento a_{23} também tem que ser 4, mas não pode haver repetição de números;
- 9, pois se $a_{12} = 9$, então a_{13} = 3, ou seja, um elemento repetido.

Dessa maneira pode-se concluir que os números 3 e 7, também não podem ser posicionados em uma diagonal do quadrado mágico de ordem 3.

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

1	a_{12}	a_{13}
a_{21}	5	a_{23}
a_{31}	a_{32}	9

3	a_{12}	a_{13}
a_{21}	5	a_{23}
a_{31}	a_{32}	7

Ilustração 3: Posicionando o número 1 e o número 3 no elemento a_{11}

Logo as posições a_{11}, a_{13}, a_{31} e a_{33} devem ser preenchidas somente pelos números pares (2, 4, 6 e 8).

Para cada número par posicionado em a_{11} há 2 possibilidades para preenchimento em a_{12}.

Se a_{11} for igual ao número:

- 2, então a_{12} pode ser 7 ou 9;
- 4, então a_{12} pode ser 3 ou 9;
- 6, então a_{12} pode ser 1 ou 7;
- 8, então a_{12} pode ser 1 ou 3;

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	1	8
7	5	3
2	9	4

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Ilustração 4: Soluções do quadrado mágico de ordem 3

Aparentemente há 8 maneiras para resolver o problema, mas cada uma delas pode ser encontrada a partir de uma única solução através das rotações de 90°, 180°, 270° e 360°, simetria em relação à 1ª bissetriz , 2ª bissetriz e simetria em relação à 2ª linha e à 2ª coluna.

Um dos primeiros registros sobre a análise combinatória foi encontrado através de fragmentos de manuscritos dos manuscritos de Arquimedes de Siracusa que datam do século II a.C que continha um problema geométrico chamado "*Stomachion*", nome derivado da palavra grega "*estômago"*.

O problema consiste em um quadrado formado por 14 figuras poligonais planas com áreas comensuráveis, ou seja, o quociente entre a área de cada figura e a área do quadrado é um número racional, e o objetivo é descobrir de quantas maneiras diferentes podem-se rearranjar essas 14 peças para formar um quadrado.

Os historiadores que analisaram esse tratado de Arquimedes acreditam que ele sabia o número de arranjos, caso contrário não teria apresentado, mas não sabem ao certo se Arquimedes chegou a um resultado correto.

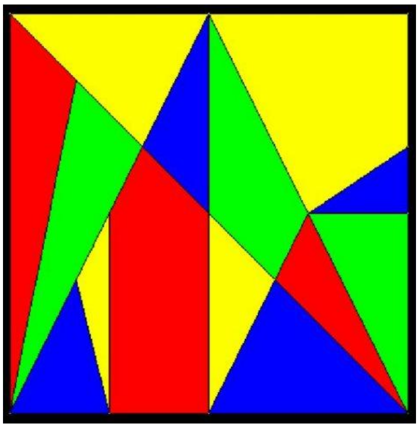


Ilustração 5: Figura do problema Stomachion retirado do site http://www.jornaldaciencia.org.br/Detalhe.jsp?id=15162 acessado em: 05/05/2013.

Os pesquisadores descobriram a quantidade de rearranjos para esse problema que é 17.152.

A análise combinatória começou a ter mais atenção no século XVII com os estudos sobre jogos de azar. O intuito era descobrir a quantidade de casos favoráveis e desfavoráveis que um jogador tem em um determinado jogo.

Segundo Rooney (2012) a dupla formada por Fermat e Pascal, em uma série de cartas trocadas entre eles, discutia um problema proposto por um jogador que se chamava Chevalier de Méré. O problema era o seguinte:

> Dois jogadores estão fazendo um jogo de azar perfeito no qual cada um apostou 32 moedas. O primeiro a vencer três vezes seguidas ganha tudo. No entanto, o jogo é interrompido após apenas três jogadas. O jogador A ganhou duas vezes e o jogador B ganhou uma vez. Como eles podem dividir o prêmio de forma justa?

Os dois chegaram ao mesmo resultado, sendo que Fermat respondeu o problema em termos de probabilidade. Para Fermat, o jogo teria, no máximo, mais duas partidas que poderiam ter como vencedor: AA, AB, BA e BB, ou seja, há quatro possíveis resultados para os vencedores das próximas duas partidas onde B só ganhará o jogo no último caso e A nas outras três. A divisão das moedas de forma justa deverá ser na razão de 3:1 sendo 48 moedas para o jogador A e 16 moedas para o jogador B. Pascal propôs uma solução baseada na expectativa. Se B ganhar a quarta jogada então deveria ser 32 moedas para cada jogador, mas como A e B são jogadores com a mesma habilidade no jogo, ambos têm 50 % de chance de ganhar a quarta jogada, então B teria o direito de apenas 16 moedas e o jogador A, além de possuir o direito as 32 moedas, teria o direito de receber outras 16 totalizando 48 moedas.

1.2 ALGUNS CONCEITOS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

1.2.1 FATORIAL DE UM NÚMERO.

Dado um número inteiro positivo n, o fatorial deste número é definido pelo produto $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ se $n \geq 1$ e $0! = 1$ por definição.

1.2.2 PRINCÍPIO ADITIVO DA CONTAGEM.

De acordo com Oliveira e Fernández (2010), aplicando o princípio aditivo para dois conjuntos finitos quaisquer A_1 e A_2, o número de elementos da união entre esses dois conjuntos é dada por:

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2).$$

No caso da união de dois conjuntos finitos quaisquer, é subtraído a quantidade de elementos comuns aos dois conjuntos para que os mesmos não sejam contados duas vezes.

O número de elementos da união de três conjuntos finitos quaisquer $A_1, A_2\ e\ A_3$ é determinado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) \\ - [n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + n(A_2 \cap A_3)] \\ + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

A demonstração é dada da seguinte maneira:

Pela união de dois conjuntos finitos quaisquer $n(A_1 \cup (A_2 \cup A_3)) = n(A_1) + n(A_2 \cup A_3) - n(A_1 \cap (A_2 \cup A_3))$.

Sabe-se que, pela união de dois conjuntos finitos quaisquer, $n(A_2 \cup A_3) = n(A_2) + n(A_3) - n(A_2 \cap A_3)$, onde se obtém:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_2 \cap A_3) - n((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)).$$

Aplicando novamente a união de dois conjuntos quaisquer

$$n\big((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)\big) = n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) - n((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)),$$

logo,

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_2 \cap A_3) - \\ & n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) + \\ & n((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)). \end{aligned}$$

Desta forma chega-se a

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) \\ & - [n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + n(A_2 \cap A_3)] \\ & + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

A versão geral do princípio aditivo é dada, segundo Oliveira e Fernández (2012), da seguinte maneira: Sejam os conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ e as somas $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$, tal que

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} n(A_i)$$

$$S_2 = \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} n\big(A_{i_1} \cap A_{i_2}\big)$$

$$\vdots$$

$$S_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} n\big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\big)$$

$$\vdots$$

$$S_n = n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Logo, o número de elementos da união dos conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ é dada por:

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot S_i \,.$$

1.2.3 PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO DA CONTAGEM

Segundo Lima et al (2006) o princípio fundamental da contagem diz que se há m modos de tomar uma decisão D_1, tomada a decisão D_1, há n modos de tomar a decisão D_2, então o número de maneiras que se pode tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é dada pelo produto $m \times n$.

Uma versão do princípio multiplicativo da contagem é dada pela linguagem de conjuntos. Dados dois conjuntos A_1 e A_2, não vazios, tal que $a_1 \in A_1$ e $b_1 \in A_2$ tem-se que (a_1, b_1) é um par ordenado determinado pelo produto cartesiano A_1 x A_2. Seja $A_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_m\}$ e $A_2 = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots, b_n\}$ tem-se que o conjunto A_1 x A_2 é constituído pelos seguintes pares ordenados:

$$\begin{array}{cccccc}
(a_1, b_1) & (a_1, b_2) & (a_1, b_3) & (a_1, b_4) & \ldots & (a_1, b_n) \\
(a_2, b_1) & (a_2, b_2) & (a_2, b_3) & (a_2, b_4) & \ldots & (a_2, b_n) \\
(a_3, b_1) & (a_3, b_2) & (a_3, b_3) & (a_3, b_4) & \ldots & (a_3, b_n) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
(a_m, b_1) & (a_m, b_2) & (a_m, b_3) & (a_m, b_4) & \ldots & (a_m, b_n)
\end{array}$$

A quantidade de pares ordenados do produto cartesiano A_1 x A_2 é dada por:

$$n(A_1 \text{ x } A_2) = n(A_1) \text{ x } n(A_2)$$

Uma extensão deste princípio para um número finito qualquer de conjuntos é:

$$n(A_1 \text{x } A_2 \text{x } A_3 \text{x} \ldots \text{x } A_n) = n(A_1) \text{ x } n(A_2) \text{ x } n(A_3) \text{ x} \ldots \text{x } n(A_n),$$

onde os conjuntos $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots, A_n$ são finitos e não vazios.

A quantidade de n-uplas ordenadas é dada pelo produto entre a quantidade de elementos em cada conjunto.

1.2.4 AGRUPAMENTOS SIMPLES

Os agrupamentos simples são divididos em permutações, arranjos e combinações.

1.2.4.1 PERMUTAÇÕES SIMPLES

Uma permutação simples de *n* objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses *n* objetos e a quantidade de permutações de *n* objetos distintos é representada por P_n.

De acordo com Oliveira e Fernández (2012), a quantidade de permutações simples dos *n* elementos do conjunto C = $\{c_{1,}\ c_{2,} c_{3,} c_{4,} \ldots, c_n\}$ é dado por $P_n = n!$. A fórmula é válida para *n* =1, pois a quantidade de permutações simples de 1 elemento é 1, ou seja, 1!. Verifiquemos a validade da relação entre P_n e P_{n-1}, para $n\ \geq 2$ que é dada por:

$$P_n = nP_{n-1}$$

Para que essa afirmação seja comprovada, será tomado o número inteiro *i*, tal que $1 \leq i\ \leq n$, onde para cada *i* será definido A_i como o conjunto de todas as permutações dos *n*-1 elementos $\{c_{1,}\ c_{2,} \ldots, c_{i-1,}\ c_{i+1}, \ldots, c_n\}$. Dessa forma o número de elementos de A_i é dado por P_{n-1}, e será representado nessa seção por $|A_i|$ para cada *i*. Assim para se obter uma permutação dos *n* objetos do conjunto C, basta fixar um objeto inicial c_i e tomar um elemento do conjunto A_i .

Logo, pelo princípio aditivo tem-se que:

$$P_n = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_n| = \underbrace{P_{n-1} + P_{n-1} + P_{n-1} + \cdots + P_{n-1}}_{n \text{ parcelas}} = nP_{n-1} \ .$$

Como a relação $P_n = nP_{n-1}$ é válida para todo $n \geq 2$, ela pode ser aplicada para *n*- 1, obtendo:

$$P_{n-1} = (n-1)P_{n-2},$$

de onde vem que $P_n = n(n-1)P_{n-2.}$

Repetindo esse argumento, fica:

$$P_n = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

1.2.4.2 ARRANJO SIMPLES

De acordo com Oliveira e Fernández (2012), dados os números n e p inteiros positivos, tal que $1 \leq p \leq n$. Um arranjo de *n* elementos tomados p a p é uma seleção de p elementos distintos onde cada arranjo difere do outro pela ordem dos elementos ou pela natureza de cada um, ou seja, dois arranjos simples diferem-se entre si pela ordem se todos os elementos que figuram em um figuram no outro, mas não nas mesmas posições. E dois arranjos simples são diferentes pela natureza se pelo menos um elemento de um deles é diferente do elemento do outro. A quantidade de arranjos simples de *n* elementos tomados p a p é denotada por A_p^n.

Um arranjo simples de *n* objetos tomados *n* a *n* é uma permutação simples de *n* objetos. Logo, $A_n^n = P_n = n!$.

A quantidade de arranjos simples de n elementos do conjunto C = $\{c_{1,}\ c_{2,} c_{3,} c_{4,} \ldots, c_n\}$ tomados p a p é dada por $A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$. Essa fórmula é válida para *n* = 1. Para *n* $\geq$ 2, é válida a igualdade $A_p^n = nA_{p-1}^{n-1}$ que é verificada da seguinte maneira.

Seja i um número inteiro positivo tal que $1 \leq i \leq n$. Para cada i será definido A_i como sendo o conjunto de todos os arranjos simples dos $n-1$ objetos $\{c_{1,} c_{2,} \ldots, c_{i-1,} c_{i+1,} \ldots, c_n\}$ tomados $p-1$ a $p-1$. O número de elementos de A_i será representado por $|A_i| = A_{p-1}^{n-1}$. Dessa forma, para se obter um arranjo simples de n elementos tomados p a p basta fixar o objeto inicial c_i e tomar um elemento de A_i, que é um arranjo simples de $n-1$ tomados $p-1$ a $p-1$ dos elementos restantes $\{c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n\}$.

Pelo princípio aditivo, a quantidade de arranjos simples de n elementos tomados p a p é dada por:

$$A_p^n = |A_1|+|A_2|+|A_3|+\ldots+|A_n| = \underbrace{A_{p-1}^{n-1} + A_{p-1}^{n-1} + A_{p-1}^{n-1} + \cdots + A_{p-1}^{n-1}}_{n \text{ parcelas}} = nA_{p-1}^{n-1}.$$

Logo, como a fórmula é válida para todo $n \geq 2$, ela pode ser aplicada a $n-1$, obtendo-se $A_{p-1}^{n-1} = (n-1)A_{p-2}^{n-2}$,
de onde vem que

$$A_p^n = n(n-1)A_{p-2}^{n-2}.$$

Repetindo este argumento sucessivamente, tem-se:

$$A_p^n = n(n-1)(n-2)\cdots\big(n-(p-2)\big)A_{p-(p-1)}^{n-(p-1)} =$$
$$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+2)A_1^{n-p+1}.$$

Pode-se observar que $A_1^{n-p+1} = n-p+1$. Logo, a igualdade anterior fica da seguinte maneira:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+2)(n-p+1) =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+2)(n-p+1)(n-p)\cdots 1}{(n-p)\cdots 1} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

1.2.4.3 COMBINAÇÃO SIMPLES

O último conceito de agrupamento simples é a combinação. Segundo Oliveira e Fernández (2012) dados n e p números inteiros positivos, tal que $1 \leq p \leq n$ é denominada uma combinação simples de n elementos tomados p a p uma seleção de p objetos distintos entre n, de modo que as combinações simples se diferenciam uma da outra apenas pela natureza dos objetos, ou seja, o que importa é quem participa no grupo selecionado. A quantidade de combinações simples de n objetos tomados p a p é denotada por C_p^n.

A combinação simples está estreitamente relacionada com o arranjo simples. Dada uma combinação simples de *n* elementos tomados p a p, pode-se encontrar todos os arranjos simples utilizando os p elementos tomados na combinação permutando-os. Dessa forma uma combinação simples de *n* elementos tomados p a p gera *p!* arranjos simples de *n* elementos tomados p a p. Então, tem-se que o produto entre *p!* e C_p^n é igual ao total de arranjos simples de *n* elementos tomados *p* a *p*. A relação fica da seguinte maneira:

$$p! \cdot C_p^n = A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!},$$

de onde segue que $C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Capítulo 2

A ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

2.1 A PRESENÇA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

No ensino médio, a Matemática é uma parcela do conhecimento importante para a formação dos jovens, contribuindo para a visão de mundo, para a leitura e interpretação da realidade e contribuindo também para o exercício da prática social e profissional.

Conforme as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM Plus, p. 111),

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais dizem que ao final dessa etapa da educação básica, espera-se que o aluno seja competente em resolução de problemas, se não em todos, pelo menos daqueles que permitam desenvolver forma de pensar matemática.

De acordo com o PCNEM Plus, um conjunto de temas que possibilitam o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos pode ser sistematizado nos três seguintes eixos ou temas estruturadores, desenvolvidos de forma concomitante nas três séries do ensino médio:

1. Álgebra: números e funções
2. Geometria e medidas
3. Análise de dados

O estudo sobre a análise combinatória está inserido no eixo, ou tema estruturador chamado Análise de dados. Esse eixo tem como objeto de estudo os conjuntos finitos de dados, que podem ser numéricos ou informações qualitativas, diferenciando dos demais temas pela maneira como são feitas as quantificações.

Esse eixo, ou tema estruturador se organiza em três unidades temáticas: Estatística, Contagem e Probabilidade.

A unidade temática em foco neste trabalho é a contagem, que foi desenvolvida dentro do contexto de telefonia, mais especificamente para contar a capacidade de linhas telefônicas em diversas situações.

Segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM Plus, p. 126):

> A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande.

Na unidade temática referente à contagem, os conteúdos e habilidades propostos a serem desenvolvidos são :

> Princípio multiplicativo; problemas de contagem.
>
> ✓ Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.
>
> ✓ Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.
>
> ✓ Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem.

A sequência didática desenvolvida nesse presente trabalho e que será apresentada mais adiante, segue essa linha, onde os alunos, de forma autônoma, devem criar estratégias de resolução, utilizando esquemas e posteriormente encontrem um padrão para situações deste tipo, obtendo as fórmulas como consequência das observações do raciocínio combinatório.

2.2 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

O objetivo da análise dos livros didáticos é verificar qual é a linha utilizada pelos autores no ensino da análise combinatória. Não temos como objetivo aqui fazer qualquer tipo de julgamento.

Foram analisados três livros didáticos, dentre eles o livro utilizado pela rede, tomando como critérios; a abordagem histórica do assunto, a forma como é apresentada as definições e se existem situações-problema que antecedem as definições estimulando dessa forma o pensamento combinatório e o trabalho independente.

Os livros analisados foram:

L1: *Matemática – Ciência e Aplicações – Volume 2*, dos autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida. Editora Atual, 2006.
L2: *Matemática – Contexto & Aplicações – Volume 2*, autor: Luiz Roberto Dante. Editora Ática, 2012.
L3: *Matemática: Ensino médio 2º ano/ SESI-SP*, Coordenação geral: Maria José Zanardi Dias Castaldi. Editora SESI-SP, 2012.

No livro *Matemática – Ciência e Aplicações* os autores iniciam o capítulo pedindo aos alunos para considerarem algumas situações envolvendo a contagem. Após essas situações iniciam o estudo do Princípio Fundamental da Contagem utilizando dois exemplos expondo assim algumas estratégias de resolução tais como árvore de possibilidades, pares ordenados e ternas ordenadas. Os autores definem o Princípio Fundamental da Contagem após os exemplos, apresentam mais três exemplos seguidos de uma lista composta por 33 exercícios inseridos em diversos contextos. Os autores também definem o que é fatorial de um número natural seguido de três exemplos não contextualizados e terminam com uma lista composta por 11 exercícios que priorizam os cálculos, o operacional e não as aplicações. O livro traz o estudo dos agrupamentos simples; arranjos, permutações e combinações. Os autores iniciam o estudo sobre arranjos e permutações apresentando as definições seguidas do raciocínio para obtenção das fórmulas. Em ambos os agrupamentos são seguidos de três exemplos, sendo no caso do arranjo, ensinando a calcular a quantidade de arranjos simples com e sem a utilização de fórmulas. Os dois casos de agrupamentos simples são seguidos de exercícios. No estudo das combinações simples os autores introduzem o assunto com um exemplo resolvido mostrando aos alunos que nesse tipo de agrupamento cada escolha é diferenciada pela natureza dos elementos e não pela ordem dos mesmos. Logo depois a combinação simples é definida. São apresentados três exemplos de combinações simples seguido da notação de combinação, o modo de obtenção da fórmula, mais dois exemplos que apresentam a resolução de problemas com a utilização da fórmula e finaliza com uma lista de exercícios.

O último conceito estudado na unidade referente à análise combinatória é a permutação com elementos repetidos. Os autores pedem para os alunos considerarem duas situações e falam que ambas são casos de permutação com repetição de elementos. Depois apresentam o caso onde apenas um elemento se repete seguidos de três exemplos, o caso onde dois elementos diferentes se repetem, e por fim, apresenta o caso geral seguido de um exemplo e uma lista de exercícios. A Unidade é finalizada com uma lista de testes de vestibulares e dois desafios.

No livro *Matemática – Contexto & Aplicações* o autor inicia o capítulo citando uma peça de teatro nacional chamada de "*O mistério de Irma Vap"* e comenta que "Irma Vap" é um anagrama da palavra vampira, já que o nome da peça é trocadilho proposital. Em relação à história da matemática o autor cita o problema geométrico chamado "*Stomachion*" proposto por Arquimedes de Siracusa, que consiste em determinar de quantas maneiras podem ser reunidas 14 figuras planas, de diferentes formatos e tamanhos, para formar um quadrado. O autor cita também o problema resolvido por Leonard Euler denominado "*As sete pontes de Königsberg*". Após a apresentação histórica o autor propõe duas atividades sendo uma delas relacionada à peça de teatro citada. Na introdução é dada uma situação problema para os alunos analisarem. O princípio fundamental da contagem é iniciado com dois problemas resolvidos seguido da sua definição, mais dois problemas resolvidos utilizando o princípio fundamental da contagem e uma lista de exercícios. O autor trabalha simultaneamente os conceitos de permutação simples e fatorial de um número. Ele começa encontrando sinônimos para a palavra permutar e resolve dois problemas relacionados à permutação simples seguidos da definição. Na definição de permutação simples o autor utiliza o produto dos n fatores e define fatorial de um número para simplificar a fórmula de permutação simples. Os conteúdos de permutação simples e fatorial de um número seguem com mais dois exemplos e uma lista de exercícios. O conteúdo de arranjo simples é introduzido com dois exemplos sobre esse tipo de agrupamento simples que são resolvidos utilizando a árvore de possibilidades, esquemas e o princípio multiplicativo para depois apresentar o raciocínio utilizado para a obtenção da fórmula de arranjo simples. Durante esse processo de obtenção da fórmula aparecem algumas observações para auxiliar os alunos na compreensão de alguns passos desse procedimento. Logo o autor traz vários exemplos resolvidos com e sem a utilização da fórmula e finaliza com uma lista de exercícios. No conteúdo de combinação simples o autor inicia comentando que a ideia de combinação está intuitivamente ligada à ideia de subconjuntos e apresenta dois exercícios resolvidos seguidos da fórmula de combinação simples e da definição. O autor apresenta também a propriedade de combinação simples referente a combinações complementares seguido de oito exercícios resolvidos, sendo que o segundo mostra aos alunos os passos de uma resolução de problemas, (ler o problema, planejar uma solução, executar o que foi planejado, emitir uma resposta e ampliar o problema) e uma lista de exercícios. Sobre agrupamentos com repetição, apenas a permutação é estudada iniciando com quatro exemplos, a fórmula e uma lista de exercício. Após isso o autor traz vários problemas resolvidos que envolvem os vários tipos de agrupamentos inclusive o problema citado na introdução deste livro e traz também uma lista de exercícios.

O livro traz neste capítulo estudos sobre os números binomiais iniciando com a definição, um exemplo e uma lista de exercícios. O binômio de Newton também é definido no início, apresentando alguns desenvolvimentos, a relação dos coeficientes com os números binomiais seguido da fórmula do desenvolvimento do binômio de Newton. Posteriormente, são apresentados alguns exemplos seguidos de uma lista de exercícios. No estudo do termo geral é apresentada a fórmula, alguns exemplos e uma lista de exercícios. No triângulo de Pascal o autor faz o desenvolvimento para o binômio de expoente zero até o expoente 5, evidenciando os coeficientes com uma coloração diferente para mostrar como surgem os elementos do triângulo e os relacionam aos números binomiais, em seguida é apresentada as propriedades de binomiais complementares, a relação de Stifel e a soma dos elementos de uma linha do triângulo de Pascal . Em todas as propriedades o caso geral vem imediatamente após o término do exemplo, terminando com uma lista de exercícios. A unidade termina trazendo uma lista de exercícios de vestibulares, chamada de atividades adicionais e um texto sobre o triângulo aritmético.

O livro Matemática: Ensino Médio 2º ano, da rede SESI-SP, inicia o capítulo de análise combinatória com informações sobre a copa do mundo no Brasil no ano de 1950. O livro traz ainda no início do capítulo um momento chamado de Diálogo e Reflexões. Nesse momento o autor fala sobre a copa do mundo no Brasil em 2014 e sobre a copa do mundo de

2010 na África do Sul que possuía 32 times subdivididos em grupos com 4 equipes e questiona os alunos sobre quantos jogos foram realizados em cada grupo, na primeira fase e finaliza com o seguinte questionamento: “Qual é a parte da Matemática que trata desses tipos de problemas de contagem?”. O livro apresenta um tópico chamado Em Foco onde fala sobre a seleção espanhola de futebol que ocupa a 1º colocação no ranking da FIFA seguida de outras 19 seleções.

No tópico chamado Conhecimento em Xeque o autor trás uma breve história da análise combinatória e uma breve noção de agrupamentos, descrevendo um pouco o arranjo, a permutação e a combinação. Após a apresentação da parte histórica o autor traz duas situações-problema sobre o princípio multiplicativo e duas situações sobre permutações simples. Após essas quatro atividades o livro traz a definição de permutação simples, um tópico chamado Desdobramento, explicando aos alunos o que é um anagrama e uma lista com cinco situações-problema sobre permutações sendo a última situação sobre permutação com repetição. As duas situações seguintes são relacionadas à arranjos simples e nelas os alunos encontram a quantidade de arranjos para alguns casos particulares e depois há um item que faz com que os alunos conjecturem uma regularidade para esses casos, esperando que eles cheguem a fórmula de permutação simples. O conceito desse tipo de agrupamento simples é definido, seguido de três situações-problema, sendo que a última situação apresenta duas perguntas: “De quantos modos diferentes pode-se formar um grupo de 4 alunos dispondo de 20 alunos?”. E a outra pergunta é: “Quantas comissões podem ser formadas contendo um presidente, um vice-presidente, um ajudante e um vice-ajudante dispondo de 20 alunos?”. O objetivo dessas duas questões é fazer com que os alunos percebam que na primeira a ordem dos alunos não formam grupos diferentes, pois se trata de um problema de combinação simples e na segunda a ordem e a natureza dos alunos formam comissões diferentes, pois se trata de um problema de arranjo simples. O autor traz mais uma situação-problema sobre combinação simples, logo a seguir define esse tipo de agrupamento acompanhado de mais quatro problemas de combinação simples e dois de permutação com repetição. O livro encerra a unidade com quatro tópicos: Ciência e Tecnologia, O Futuro em Jogo, Conecte-se e Xeque-Mate. O primeiro tópico apresenta uma reportagem, sobre a descoberta do manuscrito que revela que Arquimedes já fazia análise combinatória há 2200 anos, o segundo são duas questões de vestibulares, o terceiro traz uma dica de leitura e um site relacionado ao conteúdo estudado e o último tópico apresenta quatro situações-problema.

Através da análise dos livros vemos que ainda, em alguns casos, aparece a sequência formada por definições, exemplos seguidos das fórmulas dos agrupamentos e algumas estratégias de resolução para que os alunos façam as listas de exercícios, mas vemos também que existem preocupações e esforços em relação à exploração das estratégias pessoais, a busca, por parte dos alunos, de regularidades e expressões algébricas que representam tais padrões. A história da análise combinatória e as aplicações estão mais presentes fazendo que o estudo da análise combinatória não seja voltado apenas às técnicas operacionais. Esses esforços vêm de encontro com o que é citado nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais em relação ao desenvolvimento da competência na resolução de situações-problema.

2.3 ANÁLISE DE DISSERTAÇÕES CORRELATAS

Apresentamos uma breve análise de dissertações correlatas sobre o ensino de análise combinatória. Vale citar que não são muitos os trabalhos realizados sobre o tema, e dos poucos que existem foram analisados os de Almeida (2010), Vazquez (2011) e Pinheiro (2008).

Na dissertação de Almeida (UFOP - 2010) - *Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática: um estudo de caso com o 2º ano do ensino médio* – o objetivo desse trabalho é pautado na dinâmica da sala aula, mais precisamente na comunicação entre os alunos e entre aluno e professor abrindo espaço para os alunos argumentarem e discutirem soluções de situações-problema sobre análise combinatória, criando dessa maneira um ambiente favorável para uma aprendizagem significativa.

A pesquisa foi aplicada em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de período noturno de uma escola pública onde haviam 43 matriculados sendo que apenas 31 frequentavam as aulas. Os grupos eram constituídos por quatro alunos e foram criados pelos mesmos. Esses grupos precisavam solucionar situações-problema com crescente grau de dificuldade, sempre incentivado pela pesquisadora a criarem e utilizarem suas próprias estratégias de resolução e trocarem ideias entre eles discutindo essas estratégias, posteriormente, com a sala de aula, incluindo a pesquisadora.

Segundo a pesquisadora, de acordo com os registros dos alunos feitos durante a aplicação das atividades, há evidências de que as atividades contribuíram efetivamente para o desenvolvimento do pensamento combinatório da maioria dos alunos que participaram do estudo, ressaltando que antes da aplicação das situações-problema não foi desenvolvido nenhum conceito sobre análise combinatória.

Na dissertação de Vazquez (UFSCAR - 2011) – *O ensino de análise combinatória no Ensino Médio por meio de atividades orientadoras em uma escola estadual do interior paulista* – o objetivo do trabalho é fazer com que os alunos sejam os sujeitos de ação e de tomada de decisões sobre as atividades desenvolvidas. A autora cita que o estudo de análise combinatória nesse trabalho visa ser feito sem o uso abusivo de fórmulas, através de atividades estruturadas de modo que façam que os alunos interajam, mediados por um conteúdo, negociando significados, com o objetivo de solucionarem coletivamente situações-problemas, junto ao princípio multiplicativo da contagem, tornando o aprendizado mais significativo aos alunos melhorando a compreensão de tal conteúdo.

A sequência de atividades desse trabalho apresenta a estratégia de resolução de problemas de contagem utilizando a árvore de possibilidades que era desconhecida pelos alunos em estudo. Os agrupamentos ordenados e não ordenados também são desenvolvidos na sequência.

O trabalho foi desenvolvido com quatro turmas de 2º anos do Ensino Médio em período matutino da Escola Estadual José Ferreira da Silva que é a única escola pública da cidade de Descalvado localizada no Estado de São Paulo. Cada turma tem em média 40 alunos e tem como professora a própria pesquisadora desse trabalho.

A autora cita que a escola estadual utiliza os “caderninhos” distribuídos pelo Estado de São Paulo e que após a aplicação das atividades orientadoras os alunos apresentaram desenvolvimento no pensamento combinatório e mais confiança para resolver os exercícios sobre o tema que vem nos “caderninhos”, fato que não ocorria em anos anteriores com os mesmos exercícios quando resolvidos por turmas que não tiveram a oportunidade de participar da pesquisa.

Na dissertação de Pinheiro (UEPA - 2008) - *O Ensino de Análise Combinatória a partir de situações-problema* - O objetivo da pesquisa é investigar a viabilidade da sequência de ensino para introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória, por meio de Situações Didáticas, utilizando a resolução de problemas como ponto de partida. Na pesquisa o autor fez um breve estudo sobre a resolução de problemas e uso de jogos na matemática. Ele considera a utilização da resolução de problemas uma forma mais adequada para o desenvolvimento de uma sequência didática que possibilite encontrar respostas às questões da sua pesquisa e considera o estudo de jogos por facilitar a fixação dos conceitos desenvolvidos durante as aulas. Foram utilizados um pré-teste que consiste na aplicação de cinco problemas de combinatória para verificarem se os alunos conseguiriam resolvê-los utilizando habilidades básicas de análise combinatória, uma sequência didática que apresenta momentos para o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao princípio fundamental da contagem, permutação simples, arranjo simples, combinação simples, a diferença entre os agrupamentos de arranjo e combinação, aplicação de jogos relacionados à análise combinatória tais como: O PIF-PAF da combinatória e o dominó combinatório, aula de combinatória. O autor finaliza a sequência com um pós-teste que foi um instrumento diagnóstico para verificar se ocorreu aprendizado que, assim como o pré-teste, era composto por cinco questões. Os registros dos alunos e uma câmera de vídeo foram utilizados como instrumentos para a coleta de dados da pesquisa que foi realizada na Escola Estadual Deodoro de Mendonça localizada em Belém, capital do Pará, no mês de junho de 2008 para 15 alunos do 2º ano do Ensino Médio chamado de “Turma 202” onde o pesquisador não era o professor da turma.

Segundo o autor da pesquisa, a sequência didática apresentada proporciona condições favoráveis para o desenvolvimento das habilidades básicas de análise combinatória. O autor cita que no pós-teste pode-se verificar o desenvolvimento satisfatório dos alunos relativos à resolução de problemas com princípio fundamental da contagem, permutação, arranjos e combinações.

Capítulo 3

PRESSUPOSTOS EPISTEMOLÓGICOS E PEDAGÓGICOS

3.1 DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Nesta seção será abordada a teoria das situações didáticas que é um modelo teórico desenvolvido pelo francês Guy Brousseau que se refere as formas de apresentação dos conteúdos matemáticos aos alunos.

Segundo Machado et al (2012), a teoria das situações didáticas representou um marco importante na pesquisa de ensino e aprendizagem da matemática, pois até então a grande maioria das teorias pedagógicas abordavam aspectos excessivamente gerais, que não contemplavam a especificidade do saber matemático.

A situação didática de acordo com Brousseau (apud MACHADO et al, 2012)

> é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes.

O meio é onde ocorrem as interações do sujeito e é nele que surgem os conflitos, contradições, as possibilidades de aprender novos conhecimentos e provoca mudanças tendo como objetivo desestabilizar o sistema didático.

Para que essas situações didáticas existam é necessário um conjunto de obrigações recíprocas, implícitas ou explícitas, envolvendo os estudantes, o professor e o saber. Brousseau define esse conjunto de obrigações como contrato didático.

Contrato didático é segundo Brousseau (apud ALMOULOUD, 2007)

> uma relação que determina – explicitamente em pequena parte, mas sobretudo implicitamente – aquilo que cada parceiro, professor e aluno, tem a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma maneira ou de outro, responsável perante o outro.

A sequência didática aplicada sobre análise combinatória foi norteada por essa teoria e teve como objetivo o aprendizado dos alunos por adaptação ao meio, adquirindo dessa forma novos conhecimentos através de um tema significativo para eles.

Segundo Brousseau (apud ROSSI, 2009) é preciso criar situações didáticas em que o saber não seja dissociado de seu significado. O saber tem que ser contextualizado, para que os estudantes consigam aplicar o saber não só naquele momento.

Através desse estudo é perceptível que é necessário criar um ambiente de aprendizagem que possibilite ao aluno construir e adquirir o conhecimento de forma significativa e autônoma associando por sua vez esse novo conhecimento a diversas situações.

3.2 ENGENHARIA DIDÁTICA

O termo Engenharia Didática surgiu no início dos anos 80 na França. A engenharia didática é uma metodologia de pesquisa que tem por finalidade analisar as situações didáticas.

Segundo Artigue (apud MACHADO et al, 2012), este termo foi dado para o trabalho didático que é aquele que se assemelha ao trabalho do engenheiro, que para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados pela ciência e, portanto, a enfrentar praticamente, com todos os recursos que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta.

Segundo Artigue (apud ALMOULOUD, 2007), a engenharia didática é composta de quatro fases: a) análises prévias: b) Construção das situações e análise a priori: c) experimentação: d) análise a posteriori e validação. Cada uma dessas fases é, caso necessário, retomada ao longo do trabalho. Uma singularidade dessa metodologia é a validação que é interna, ou seja, fazendo a comparação entre a análise a priori e a análise a posteriori, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

Na análise prévia deve-se considerar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e propor uma intervenção que traga melhoria desse ensino. Segundo Almouloud (2007) nessa fase da engenharia didática, alguns aspectos que devem ser considerados são: os obstáculos epistemológicos relativos ao conceito, o ensino usual e seus efeitos, os objetivos específicos da pesquisa, etc.

A próxima fase é a construção e a análise a priori, onde é elaborada uma sequência didática, descrevendo todas as escolhas feitas e também cada atividade.

A experimentação é o momento da aplicação de todo o material elaborado. A correção de tal material pode ser feita desde que seja retomada a análise a priori para um processo de complementação.

E por fim, na última fase dessa metodologia de pesquisa, é feita a análise a posteriori e a validação. A análise a posteriori é feita utilizando todo o material usado na experimentação.

Nos capítulos seguintes serão apresentados com mais detalhes cada uma dessas fases.

Capítulo 4

CONSTRUÇÃO E APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo traz uma síntese da construção, da aplicação e da análise dos erros das atividades que compõem a sequência didática que aborda o tema sobre análise combinatória, mais precisamente, os conceitos referentes ao princípio fundamental da contagem, permutação simples e arranjo simples.

4.2 CONTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Leciono Matemática desde o ano de 2005 quando cursava o último ano da graduação em Matemática pela Universidade São Francisco localizada na cidade de Itatiba SP.

Minha primeira experiência como professor foi em um curso pré-vestibular chamado EDUCAFRO entre os meses de maio e dezembro de 2005 na cidade de Bragança Paulista.

A primeira oportunidade que tive de trabalhar com o Ensino Médio foi no ano de 2006 na Escola Estadual Francisco de Aguiar Peçanha, localizada na cidade de Atibaia SP, onde ministrava aulas para cinco salas de 2º anos. Nesses dois momentos, com o curso pré-vestibular e na escola de Atibaia, desenvolvi os conteúdos referentes à Análise Combinatória. Posso dizer que sempre consegui resolver problemas de análise combinatória com a utilização de fórmulas e no início de minha profissão como professor buscava resgatar na memória como aprendi tais conceitos quando cursava o 2º ano do Ensino Médio. Recordo-me que, quando aluno, tive nesse ano do Ensino Médio três professores de matemática e entre a troca de professores ficamos algumas semanas com professores substitutos, ou seja, nesse ano fomos prejudicados em relação ao aprendizado de diversos conteúdos de Matemática. A professora que nos ensinou análise combinatória dizia que existiam algumas palavras fundamentais para distinguir os agrupamentos de arranjo simples e combinação simples. Ela dizia que se aparecessem as palavras “algarismos distintos” era um problema de arranjo e caso não aparecessem essas palavras seria um problema de combinação.

Quando lecionei esse conteúdo pela primeira vez, nos anos de 2005 e 2006, essa regra das palavras vinha em minha mente, mas sempre me questionava se o ensino de análise combinatória, mais precisamente, em agrupamento simples ficava restrito a verificar a apresentação de palavras-chave em situações-problema e a partir daí saber qual fórmula utilizar. Hoje vejo que na época eu era muito imaturo matematicamente para identificar tais deficiências no ensino de análise combinatória, mas posso dizer que em nenhum momento apareciam situações que nos "provocassem" a realizar tais problemas utilizando as próprias estratégias de resolução.

Vejo hoje, como professor de matemática, que desenvolvi bem as habilidades relacionadas ao ensino de análise combinatória no curso de Mestrado Profissional na Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR) na cidade de São Carlos SP, pelo PROFMAT, curso muito bem ministrado pelos professores da instituição Márcio e Renato no primeiro semestre de 2011.

Após o curso me senti mais confiante para a resolução de problemas, comecei a ver os problemas de combinatória de outra maneira, mas até então não tive a oportunidade de trabalhar o conteúdo desde o ano de 2006, pois fiquei cinco anos afastado do Ensino Médio.

No ano de 2012 me efetivei na rede SESI-SP de ensino ministrando aulas para duas classes de 1º ano do Ensino Médio e continuei com a turma no presente ano de 2013, hoje são meus 2º anos. Na rede, segundo o currículo, devemos trabalhar o princípio fundamental da contagem e as estratégias desse conteúdo nos 1º anos do Ensino médio e a parte de Análise combinatória no 2º ano. Como, por questão de tempo, não consegui trabalhar o conceito de princípio fundamental da contagem com essas classes no 1º ano, resolvi desenvolvê-lo com a análise combinatória no 2º ano.

Minha preocupação era como desenvolver esse conteúdo, agora com uma visão diferente do ensino de análise combinatória, de uma forma diferente da qual aprendi e da que lecionei em meus primeiros anos como professor.

A ideia da sequência didática surgiu com uma pergunta feita por alguns alunos sobre o motivo da ampliação de um dígito nos telefones celulares de nossa região em meados de 2012. Tal questionamento me fez refletir sobre como poderia respondê-lo utilizando os recursos da análise combinatória e elaborando uma sequência didática.

Durante o mês de setembro de 2012, comecei a elaborar minha sequência didática sobre análise combinatória pensando em sua aplicação na sala de aula para o inicio de 2013. A sequência só foi finalizada na segunda quinzena do mês de março de 2013, com a orientação do professor Dr. Ivo Machado da Costa. O produto final ficou bem mais “encorpado” do que a ideia original, englobando o princípio fundamental da contagem e os agrupamentos simples de arranjo, permutação e a linguagem de conjuntos. As atividades não ficaram focadas apenas na implementação do nono dígito nos telefones celulares da região, embora todas estejam restritas ao contexto de telefonia.

As atividades foram pensadas e elaboradas para que os alunos fossem os mais autônomos possíveis. A ideia é que eles fossem “provocados” a realizarem tais atividades e de forma gradativa fossem conjecturando e construindo os conceitos esperados.

As atividades foram pensadas desde a maneira como seriam colocadas as situações, as questões até o layout da folha, buscando ser, de certa forma, mais instrutiva e atrativa possível, visualmente falando.

Foram cinco atividades elaboradas envolvendo os conceitos de princípio multiplicativo, princípio aditivo e agrupamentos simples (permutação e arranjo). Essas atividades serão apresentadas a seguir de forma resumida junto ao tempo programado para aplicação de cada uma delas.

Atividade 1 – Tempo de duração 2 - aulas de 50 minutos.

A atividade 1 apresenta alguns casos de trocas de número de telefones por amigos, mas na hora de ligarem um para o outro percebem que alguns algarismos estão borrados. Cada um dos amigos tem algumas pistas para descobrirem os algarismos que estão faltando. Através dessas pistas eles possuem um conjunto de algarismos que podem ser usados para preencher cada dígito desconhecido. Nesse momento espera-se que os alunos encontrem todas as possibilidades para o número de telefone utilizando as opções de algarismos para cada dígito borrado. Espera-se também que os alunos relacionem o total de possibilidades com a quantidade de opções para preencher cada dígito borrado, percebendo que esse total de possibilidades é o produto entre quantidade de opções para preencher cada dígito borrado. A atividade é finalizada com uma situação que tem como objetivo que os alunos generalizem esse caso, chegando assim ao conceito do Princípio fundamental da Contagem.

Atividade 2 – Tempo de duração – 1 aula de 50 minutos.

A atividade 2 é uma situação que reforça o que foi desenvolvido na atividade 1. A situação envolve todos os prefixos de telefones comerciais e residenciais da cidade de Bragança Paulista, com o intuito de saber quantas linhas de telefones é possível formar nessa cidade, lembrando que os quatro últimos algarismos do telefone não podem ser iguais à zero. Tal restrição foi imposta, pois há poucas possibilidades de linhas telefônicas para esse caso. Nessa atividade espera-se que os alunos descubram que para tal restrição há 9.999 linhas telefônicas para cada prefixo e através do princípio aditivo encontrem o total de linhas disponíveis para a cidade.

Atividade 3 – Tempo de duração – 2 aulas de 50 minutos.

A atividade 3 utiliza um telefone da atividade 1, agora com os algarismos completos, e através de materiais manipuláveis (cartão numerado e tabuleiro) faz com que os alunos encontrem todos os números de telefones que podem ser formados mantendo fixo o prefixo e trocando a ordem dos quatro últimos algarismos que são distintos, ou seja, diferentes um do outro. O conceito de permutação simples é desenvolvido nessa atividade sendo utilizado como recurso a linguagem de conjuntos. Também são definidos nessa atividade os conceitos de fatorial de um número inteiro positivo e de permutação simples de n elementos.

Atividade 4 – Tempo de duração – 2 aulas de 50 minutos.

A atividade 4 apresenta duas situações onde duas pessoas esqueceram, respectivamente, de dois e três dígitos de um telefone, mas sabem que existe uma quantidade de algarismos (maior do que a quantidade de dígitos a preencher) que podem ser utilizados para preencher tais dígitos. O conceito abordado é o de arranjo simples e busca apresentar aos alunos a diferença entre os arranjos pela natureza e pela ordem de seus elementos. Novamente utilizando a linguagem de conjuntos, o objetivo dessa atividade é fazer com que os alunos encontrem o maior número possível de ligações que deverá ser feita para acertar o número do telefone pretendido. Após essas situações espera-se que os alunos encontrem uma regularidade para a resolução de problemas de arranjos simples. A atividade 4 é finalizada com cinco situações-problema, sendo que na última os alunos devem analisar se a quantidade de arranjos de 4 elementos tomados 4 a 4 é a mesma que a quantidade de permutação simples de 4 elementos.

Atividade 5 – Tempo de duração – 1 aula de 50 minutos.

A atividade 5 apresenta a implementação do nono dígito nos telefones celulares da região com código de área 11. Nessa atividade são utilizados um texto informativo retirado do site da ANATEL, um mapa do Estado de São Paulo para que os alunos localizem tal região e a quantidade de linhas telefônicas ativas com 8 dígitos. A ideia central é que os alunos utilizem o conceito de Princípio Fundamental da Contagem para calcularem o total de linhas de telefones celulares com nove dígitos.

4.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.

A aplicação da sequência didática ocorreu alguns dias após o término da elaboração da mesma.

A aplicação ocorreu na escola SESI-Bragança Paulista, para o 2º ano A e B com, respectivamente, 30 e 29 alunos. As classes do Ensino Médio têm quatro aulas semanais de matemática. Os 2º anos A e B têm as quatro aulas nos seguintes horários:

2º ano/Aula	1ª aula	2ª aula	3ª aula	4ª aula
A	Segunda-feira: 16:20 as 17:10	Terça-feira: 15:10 as 16:00	Terça-feira: 16:20 as 17:10	Sexta-feira: 18:00 as 18:50
B	Quinta-feira: 13:30 as 14:20	Quinta-feira: 14:20 as 15:10	Sexta-feira: 15:10 as 16:00	Sexta-feira: 16:20 as 17:10

Quadro 1: Horário das aulas semanais dos 2º anos A e B

O recurso utilizado na aplicação foi a folha de atividade que foi resolvida em grupos de 2 e 3 alunos formados por eles, de modo que esses grupos continuassem juntos até o final da atividade 5.

Antes de iniciar a aplicação, os alunos foram avisados que não poderiam utilizar nenhum equipamento eletrônico (exceto na atividade 5) para a realização dos cálculos e que precisariam resolver as atividades de forma mais autônoma possível, mas caso houvesse alguma dúvida que estivesse atrapalhando o andamento da resolução o professor deveria ser chamado.

As aplicações das atividades tiveram duração de duas semanas, iniciada no dia 21 de março e finalizada no dia 05 de abril de 2013.

4.4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA ANÁLISE DOS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Após a aplicação das folhas de atividades nas duas classes, todo material foi recolhido e separado por sala. Foi feita uma análise quantitativa dos resultados, construindo uma tabela com a quantidade de acertos e erros por sala e por atividade e uma análise qualitativa dos resultados, já que diversos grupos responderam as questões de maneiras diferentes.

Nessa análise qualitativa busca-se compreender o raciocínio dos grupos, conhecer o motivo pelo qual erraram e quais foram os erros mais comuns.

4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em anos anteriores, quando lecionei Análise Combinatória, não houve um envolvimento por parte dos alunos como ocorreu com a aplicação dessa sequência.

A sequência didática demorou em torno de seis meses para ficar pronta para a aplicação, mas posso dizer que atingiu o resultado esperado. Foi muito gratificante ver os grupos analisando e discutindo sobre as situações apresentadas nas atividades dependendo muito pouco da minha intervenção.

As folhas de atividade auxiliam muito o trabalho do professor, pois no mesmo momento que apresentam os conceitos e as construções dos mesmos, o professor pode verificar imediatamente os erros cometidos pelos alunos e fazer as intervenções necessárias. Espero com esse curso de mestrado ter desenvolvido habilidades para identificar os obstáculos que dificultam o aprendizado de meus alunos e consiga buscar e construir situações que me possibilite auxiliá-los para superarem tais barreiras.

Capítulo 5

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE 1

5.1 INTRODUÇÃO

A folha de Atividade 1 traz situações de ausência de algarismos em números de telefones de forma que os alunos tenham que analisar todas as possibilidades que há para completá-los. O conceito central dessa atividade é o Princípio Fundamental da Contagem, sendo que a princípio, os alunos devem encontrar todas as possibilidades por substituição de algarismos e, posteriormente, contar todas essas possibilidades. Nessa atividade reaparece a linguagem de conjuntos, desenvolvida com os alunos no ano anterior, para que eles possam encontrar o conjunto formado pelos algarismos que podem ser utilizados para preencher cada casa vazia e sua quantidade de elementos.

A atividade chama a atenção dos alunos para saber se há alguma relação entre a quantidade de elementos de cada conjunto e o total de possibilidades encontradas.

A atividade 1 foi aplicada para dois 2º anos do Ensino Médio totalizando 59 alunos, sendo 30 deles do 2º ano A divididos em 13 duplas , 1 trio e uma aluna realizou a atividade sozinha, pois faltou no dia da aplicação dessa atividade. No 2º ano B a atividade foi aplicada para 29 alunos divididos em 13 duplas e 1 trio. As duplas, trios e individual serão, de agora em diante, chamados de grupos e esses foram formados pelos próprios alunos, sendo avisados pelo professor que deveriam trabalhar juntos até o final da atividade 5.

A aplicação ocorreu no dia 25/03/2013 no 2º ano A e no dia 21/03/2013 no 2º ano B e teve duração de 100 minutos (2 aulas) em ambas as salas. Nas análises de acertos e erros o 2º ano A será chamado de classe 1 e o 2º ano B de classe 2.

5.2 RESUMO DA ATIVIDADE 1

A atividade 1 é composta por cinco itens, que buscam conduzir o aluno à compreensão do Princípio Fundamental da Contagem.

Os itens *a, b, c* e *d* desta atividade estão relacionados a um problema contextualizado onde dois amigos trocam seus números de celulares, mas alguns algarismos estão borrados. A partir de então a folha de atividades traz várias vezes os números de telefones onde cada algarismo está dentro de um retângulo e o algarismo borrado é representado por uma lacuna a ser preenchida dentro das condições estabelecidas em cada item. Ao final desses preenchimentos, a atividade faz com que os alunos transformem esses algarismos utilizados no preenchimento em conjuntos de modo que eles possam relacionar o número de elementos de cada conjunto com o número de possibilidades para formar o número de telefone de cada amigo.

O item *e* segue o mesmo raciocínio dos itens anteriores, mas neste caso há três algarismos borrados e algumas restrições para o preenchimento de cada casa vazia do telefone.

A atividade é finalizada com uma situação onde há um número de telefone com n casas vazias e tem como objetivo fazer com que os alunos façam uma generalização das situações realizadas anteriormente.

5.3 ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS

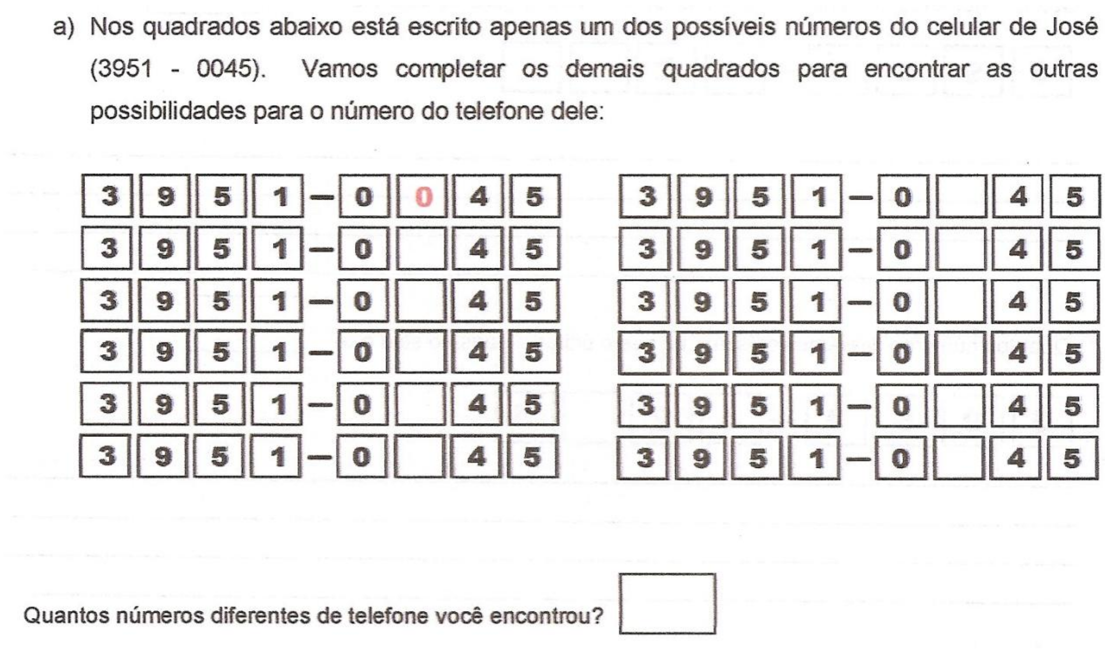
A folha de Atividade 1 é composta por problemas que necessitam de uma boa leitura e, consequentemente, compreensão. É esperado que alguns alunos façam uma leitura superficial dos problemas comprometendo assim chegar ao objetivo dos mesmos.

Outra dificuldade esperada é a generalização das situações no final dessa atividade, dificuldades essas relacionadas à linguagem de conjuntos.

5.4 ANÁLISE A PRIORI E ANÁLISE A POSTERIORI DA ATIVIDADE 1

Será descrita nessa seção a análise a priori e a análise a posteriori da atividade 1, ressaltando que a boa leitura dos enunciados é fundamental para a compreensão dos mesmos.

Nos itens *a* e *b*, espera-se que os alunos preencham as lacunas com os algarismos de 0 a 9, completando assim as possibilidades para os números de telefone. É esperado também que os alunos tenham confiança nas possibilidades encontradas, pois o número de possibilidades a serem encontradas é menor do que o número de telefones com lacunas a serem preenchidas.



a) Nos quadrados abaixo está escrito apenas um dos possíveis números do celular de José (3951 - 0045). Vamos completar os demais quadrados para encontrar as outras possibilidades para o número do telefone dele:

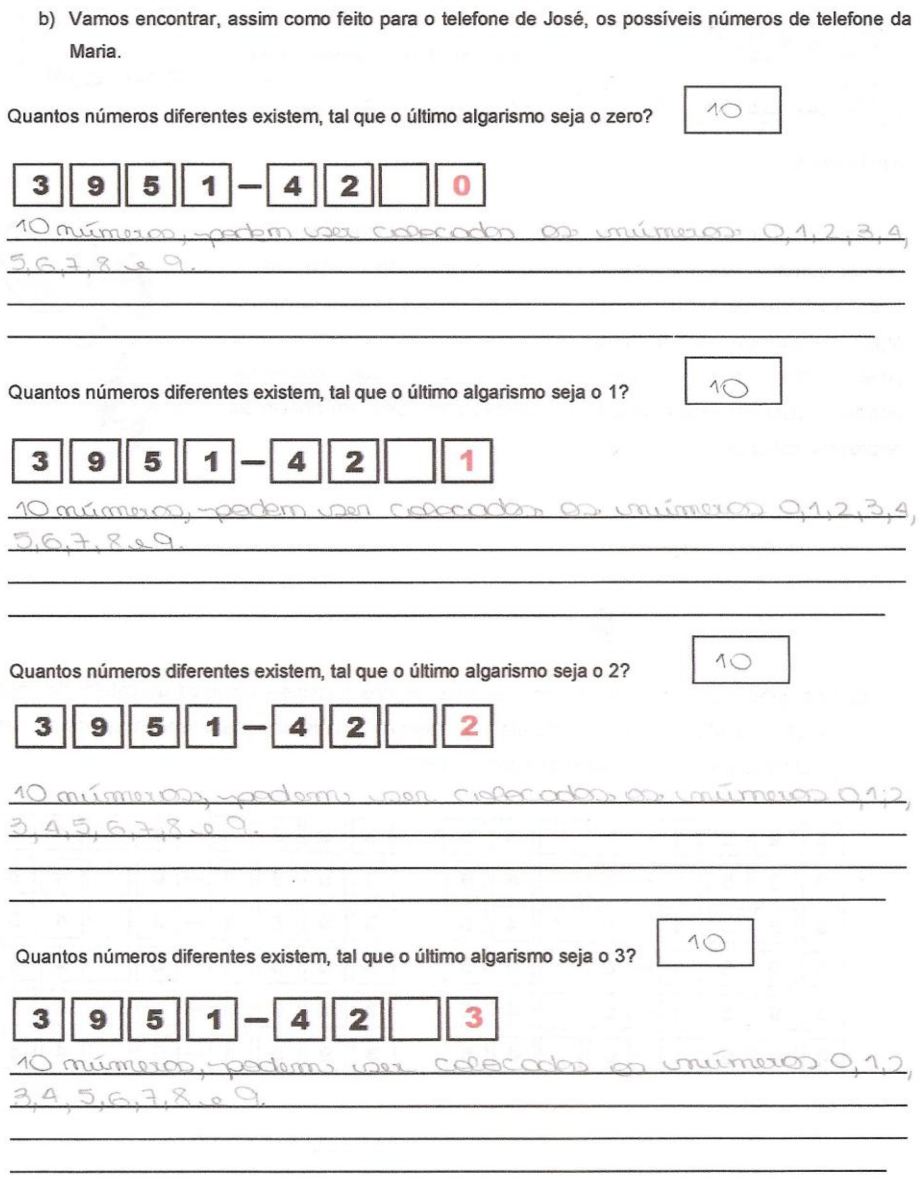
3 9 5 1 – 0 0 4 5	3 9 5 1 – 0 ☐ 4 5
3 9 5 1 – 0 ☐ 4 5	3 9 5 1 – 0 ☐ 4 5
3 9 5 1 – 0 ☐ 4 5	3 9 5 1 – 0 ☐ 4 5
3 9 5 1 – 0 ☐ 4 5	3 9 5 1 – 0 ☐ 4 5
3 9 5 1 – 0 ☐ 4 5	3 9 5 1 – 0 ☐ 4 5
3 9 5 1 – 0 ☐ 4 5	3 9 5 1 – 0 ☐ 4 5

Quantos números diferentes de telefone você encontrou? ☐

Ilustração 6: Item *a* da atividade 1

Item a)	Classe 1	Classe 2
Acertaram	14	14
Cometeram algum erro	0	0

Na classe 1, oito grupos não contaram o número de telefone que já vinha impresso na folha de atividades, mas isso não foi considerado um erro, pois tanto a resposta 9 ou 10 foram consideradas corretas. Na classe 2 um grupo reforçou por escrito que não havia mais possibilidades para formar o número borrado como forma de justificar as lacunas vazias que sobraram. Um grupo também complementou a resposta afirmando que havia apenas dez possibilidades a serem formadas, pois, caso contrário, era necessário começar a repetir as possibilidades. Alguns alunos ficaram preocupados em relação a sobrar quadrados para serem preenchidos, mas argumentavam que não havia mais possibilidades. Durante a aplicação da atividade os alunos comentavam estarem desconfiados com a atividade, pois estava muito "fácil" e não era possível o resultado estar certo.



b) Vamos encontrar, assim como feito para o telefone de José, os possíveis números de telefone da Maria.

Quantos números diferentes existem, tal que o último algarismo seja o zero? 10

3 9 5 1 – 4 2 _ 0

10 números, podem ser colocados os números 0,1,2,3,4, 5,6,7,8 e 9.

Quantos números diferentes existem, tal que o último algarismo seja o 1? 10

3 9 5 1 – 4 2 _ 1

10 números, podem ser colocados os números 0,1,2,3,4, 5,6,7,8 e 9.

Quantos números diferentes existem, tal que o último algarismo seja o 2? 10

3 9 5 1 – 4 2 _ 2

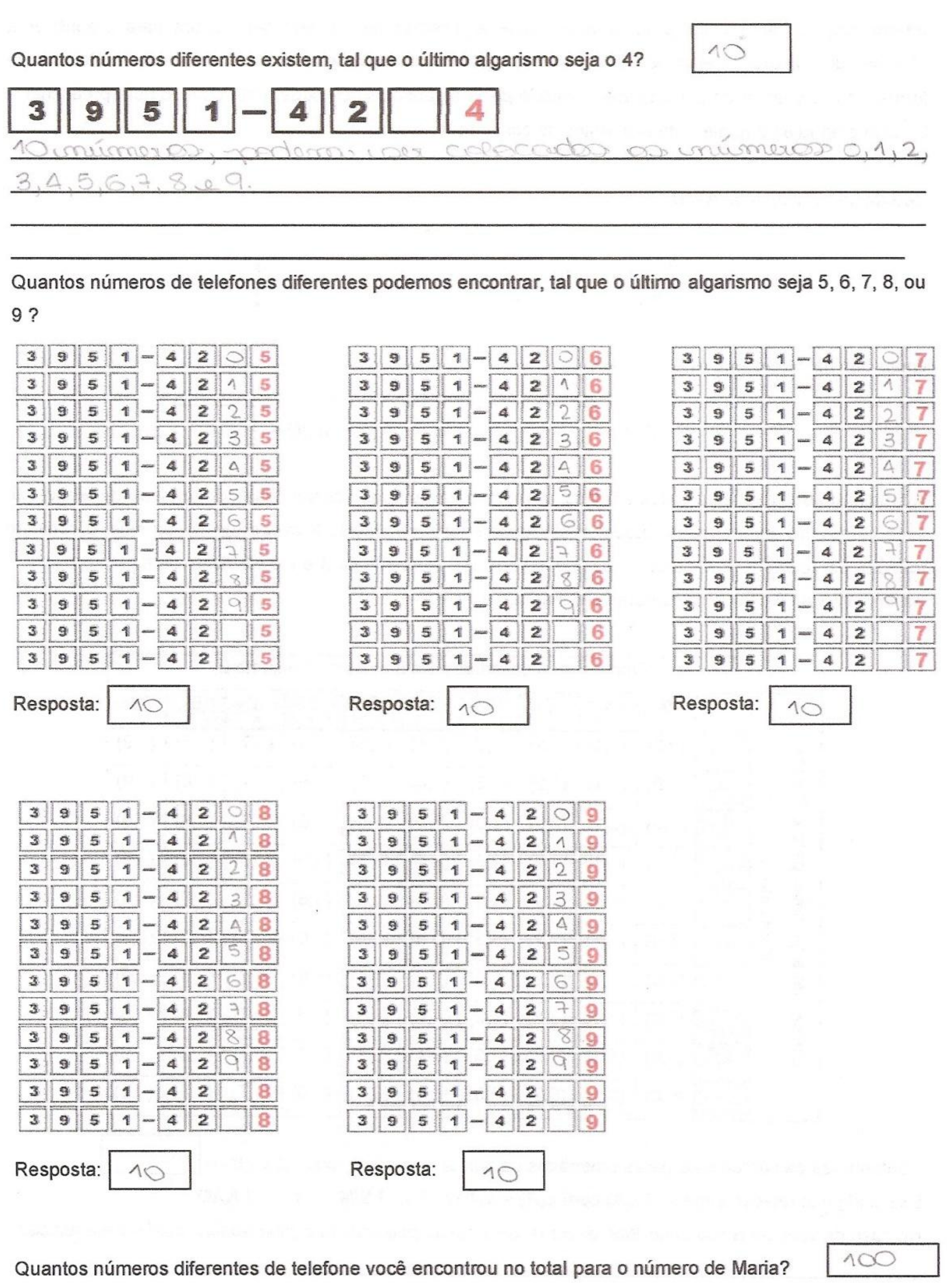
10 números, podem ser colocados os números 0,1,2, 3,4,5,6,7,8 e 9.

Quantos números diferentes existem, tal que o último algarismo seja o 3? 10

3 9 5 1 – 4 2 _ 3

10 números, podem ser colocados os números 0,1,2, 3,4,5,6,7,8 e 9.

Ilustração 7: Possibilidades para o número do telefone de Maria terminadas em 0, 1, 2 ou 3.



Quantos números diferentes existem, tal que o último algarismo seja o 4? 10

3 9 5 1 – 4 2 _ 4

10 números, podemos ser colocados os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Quantos números de telefones diferentes podemos encontrar, tal que o último algarismo seja 5, 6, 7, 8, ou 9 ?

3 9 5 1 – 4 2 0 5
3 9 5 1 – 4 2 1 5
3 9 5 1 – 4 2 2 5
3 9 5 1 – 4 2 3 5
3 9 5 1 – 4 2 4 5
3 9 5 1 – 4 2 5 5
3 9 5 1 – 4 2 6 5
3 9 5 1 – 4 2 7 5
3 9 5 1 – 4 2 8 5
3 9 5 1 – 4 2 9 5
3 9 5 1 – 4 2 _ 5
3 9 5 1 – 4 2 _ 5

Resposta: 10

3 9 5 1 – 4 2 0 6
3 9 5 1 – 4 2 1 6
3 9 5 1 – 4 2 2 6
3 9 5 1 – 4 2 3 6
3 9 5 1 – 4 2 4 6
3 9 5 1 – 4 2 5 6
3 9 5 1 – 4 2 6 6
3 9 5 1 – 4 2 7 6
3 9 5 1 – 4 2 8 6
3 9 5 1 – 4 2 9 6
3 9 5 1 – 4 2 _ 6
3 9 5 1 – 4 2 _ 6

Resposta: 10

3 9 5 1 – 4 2 0 7
3 9 5 1 – 4 2 1 7
3 9 5 1 – 4 2 2 7
3 9 5 1 – 4 2 3 7
3 9 5 1 – 4 2 4 7
3 9 5 1 – 4 2 5 7
3 9 5 1 – 4 2 6 7
3 9 5 1 – 4 2 7 7
3 9 5 1 – 4 2 8 7
3 9 5 1 – 4 2 9 7
3 9 5 1 – 4 2 _ 7
3 9 5 1 – 4 2 _ 7

Resposta: 10

3 9 5 1 – 4 2 0 8
3 9 5 1 – 4 2 1 8
3 9 5 1 – 4 2 2 8
3 9 5 1 – 4 2 3 8
3 9 5 1 – 4 2 4 8
3 9 5 1 – 4 2 5 8
3 9 5 1 – 4 2 6 8
3 9 5 1 – 4 2 7 8
3 9 5 1 – 4 2 8 8
3 9 5 1 – 4 2 9 8
3 9 5 1 – 4 2 _ 8
3 9 5 1 – 4 2 _ 8

Resposta: 10

3 9 5 1 – 4 2 0 9
3 9 5 1 – 4 2 1 9
3 9 5 1 – 4 2 2 9
3 9 5 1 – 4 2 3 9
3 9 5 1 – 4 2 4 9
3 9 5 1 – 4 2 5 9
3 9 5 1 – 4 2 6 9
3 9 5 1 – 4 2 7 9
3 9 5 1 – 4 2 8 9
3 9 5 1 – 4 2 9 9
3 9 5 1 – 4 2 _ 9
3 9 5 1 – 4 2 _ 9

Resposta: 10

Quantos números diferentes de telefone você encontrou no total para o número de Maria? 100

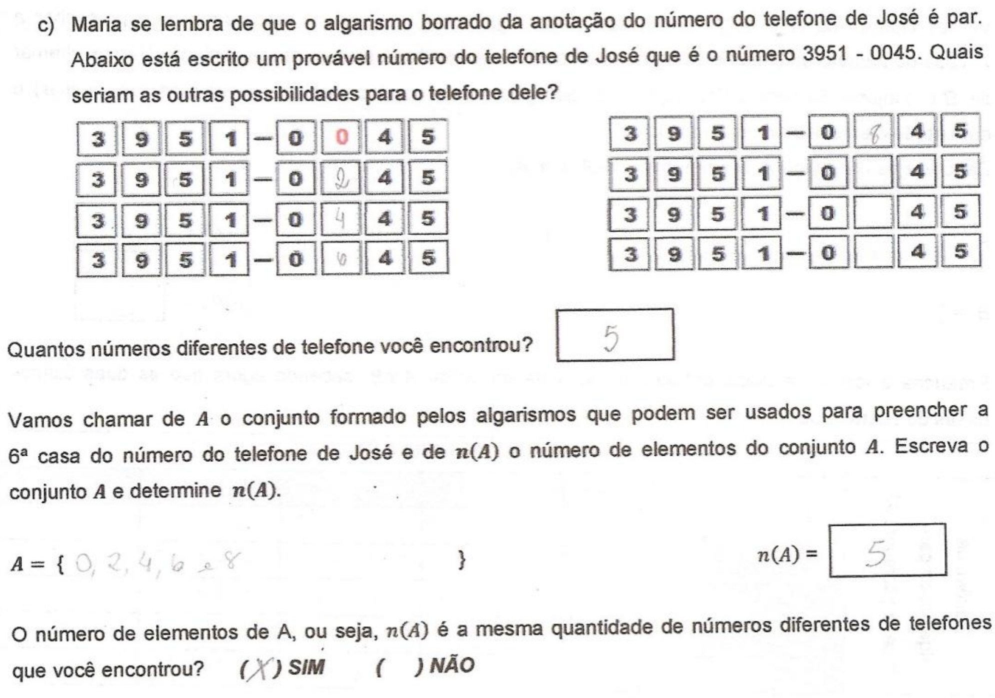
Ilustração 8: Possibilidades para o número do telefone de Maria terminadas em 4, 5, 6, 7, 8 ou 9.

Item b)	Classe 1	Classe 2
Acertaram	11	9
Cometeram algum erro	3	5

Na classe 1, um grupo chegou a conclusão de que há 45 possibilidades para o número de telefone de Maria e não relacionou o $n(A \times B)$ com $n(A)$ e $n(B)$. Um grupo somou apenas as possibilidades para o número do telefone de Maria que terminavam com os algarismos 5, 6, 7, 8, e 9 obtendo o resultado 50 e se esqueceu das demais possibilidades. Por fim, um grupo relacionou $n(A)$ com $n(B)$. Na classe 2, cinco grupos afirmaram que existem 50 possibilidades para formar o número do telefone de Maria, utilizando apenas as possibilidades terminadas em 5, 6, 7, 8 e 9. Um grupo contou 81 pares ordenados na tabela, pois contou nove elementos em cada conjunto e se esqueceu do algarismo zero respondendo que $n(A)$ = 9 e $n(B)$= 9 e que $n(A \times B) = 9 \times 9 = 81$. Três grupos não souberam se expressar corretamente sobre a relação do total de linhas de telefone de Maria e o número de elementos de cada conjunto.

Foto 1: Aplicação da atividade 1

No item *c* e *d* do exercício 1 são impostas algumas condições para os preenchimento dos números do telefone de José e Maria respectivamente. No caso do telefone de José a condição que surge é que o algarismo borrado seja par e no caso de Maria, os dois algarismos borrados sejam ímpares. Espera-se que os alunos utilizem o princípio multiplicativo da contagem assim como utilizado nos itens *a* e *b*.



c) Maria se lembra de que o algarismo borrado da anotação do número do telefone de José é par. Abaixo está escrito um provável número do telefone de José que é o número 3951 - 0045. Quais seriam as outras possibilidades para o telefone dele?

3951 – 0045
3951 – 0245
3951 – 0445
3951 – 0645
3951 – 0845
3951 – 0_45
3951 – 0_45
3951 – 0_45

Quantos números diferentes de telefone você encontrou? 5

Vamos chamar de A o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 6ª casa do número do telefone de José e de $n(A)$ o número de elementos do conjunto A. Escreva o conjunto A e determine $n(A)$.

A = { 0, 2, 4, 6 e 8 } $n(A)$ = 5

O número de elementos de A, ou seja, $n(A)$ é a mesma quantidade de números diferentes de telefones que você encontrou? (X) SIM ( ) NÃO

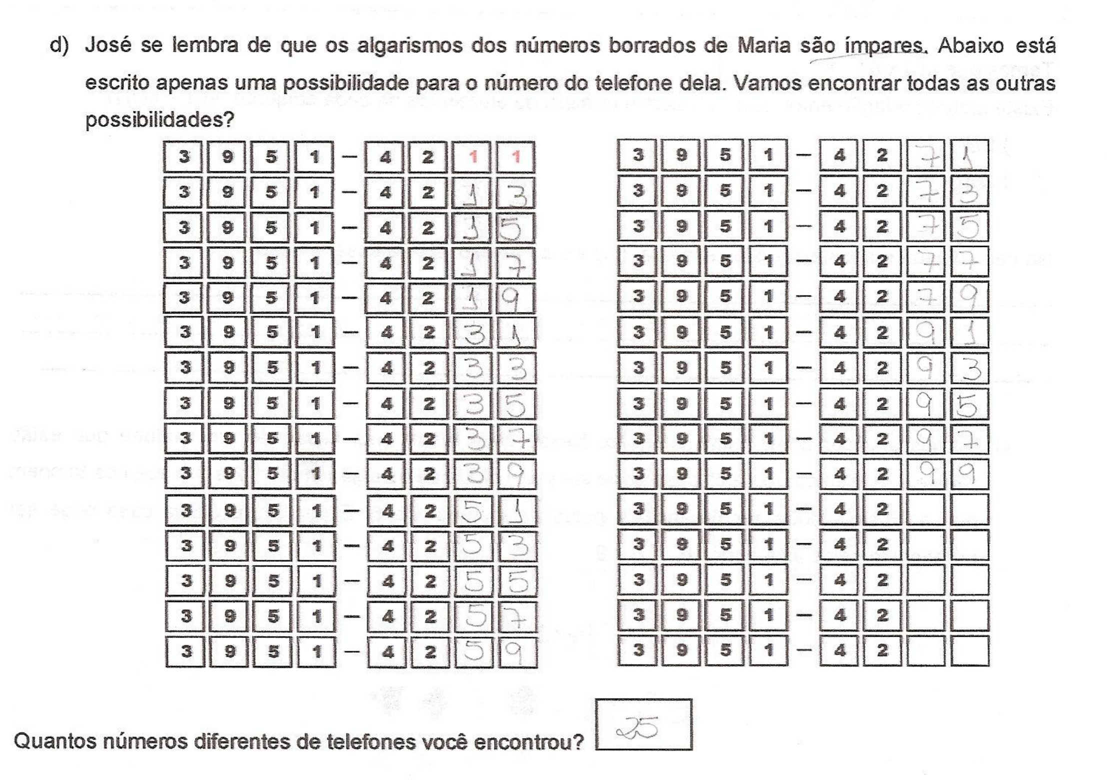
Ilustração 9: Item *c* da atividade 1 resolvido por um grupo da classe 2

Item c)	Classe 1	Classe 2
Acertaram	7	10
Cometeram algum erro	6	4

Na classe 1, dois grupos afirmaram que encontraram quatro possibilidades para o número do telefone de José e desconsideraram a possibilidade que já estava impressa, por essa razão responderam que o número de possibilidades encontradas não tem relação com o número de elementos de A. Três grupos chegaram que o número de possibilidades e o número de elementos de A são iguais a 5, afirmaram que não são iguais pois uma possibilidade já veio impressa e não a considerava como uma possibilidade encontrada. Um grupo afirmou que o conjunto A é dado por A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} e afirmou também que o número de possibilidades encontradas é igual ao número de elementos do conjunto A. Na classe 2, dois grupos, embora tenham respondido que o número de possibilidades para o telefone de José e o número de elementos de A são iguais a 5, afirmaram que não há relação entre eles, assinalando a opção NÃO. Dois grupos afirmaram que o número de elementos de A é igual a 10. Os grupos que escreveram que o número de possibilidades para a linha telefônica de José é igual a 10 podem não ter lido com atenção a restrição dada no enunciado, que era do algarismo borrado ser par.

Neste item alguns grupos perguntaram se o algarismo zero é neutro ou poderia ser considerado um número par.

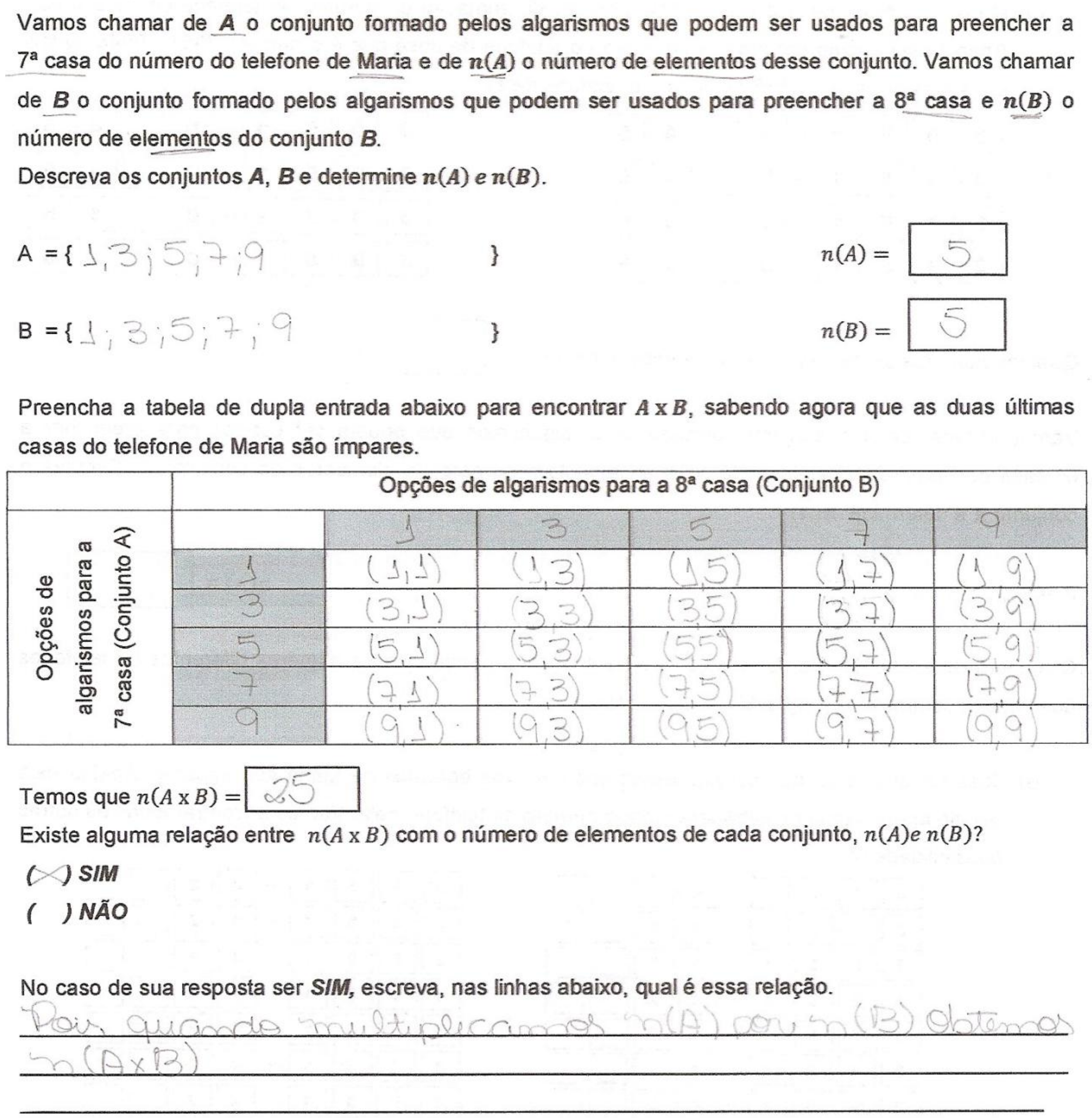
No item *d*, havia restrições para o número do celular de Maria. As restrições são que o 7º e o 8º algarismos sejam ímpares. Alguns grupos se manifestaram questionando que o número de lacunas a serem preenchidas não era suficiente, mas posteriormente observaram que estavam preenchendo os dois últimos quadrados com os algarismo 2 e 1 respectivamente, e após lerem novamente a questão perceberam que os dois algarismos a serem preenchidos devem ser ímpares e não apenas formarem um número ímpar, logo o algarismo 2, assim como outros algarismos pares, não pode figurar nas lacunas que representam os algarismos borrados no telefone de Maria.


d) José se lembra de que os algarismos dos números borrados de Maria são ímpares. Abaixo está escrito apenas uma possibilidade para o número do telefone dela. Vamos encontrar todas as outras possibilidades?

3951 – 4211	3951 – 4271
3951 – 4213	3951 – 4273
3951 – 4215	3951 – 4275
3951 – 4217	3951 – 4277
3951 – 4219	3951 – 4279
3951 – 4231	3951 – 4291
3951 – 4233	3951 – 4293
3951 – 4235	3951 – 4295
3951 – 4237	3951 – 4297
3951 – 4239	3951 – 4299
3951 – 4251	3951 – 42
3951 – 4253	3951 – 42
3951 – 4255	3951 – 42
3951 – 4257	3951 – 42
3951 – 4259	3951 – 42

Quantos números diferentes de telefones você encontrou? 25

Ilustração 10: Possibilidades para o número do telefone de Maria terminadas com os dois últimos algarismos ímpares.


Vamos chamar de **A** o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 7ª casa do número do telefone de Maria e de $n(A)$ o número de elementos desse conjunto. Vamos chamar de **B** o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 8ª casa e $n(B)$ o número de elementos do conjunto **B**.

Descreva os conjuntos **A**, **B** e determine $n(A)$ e $n(B)$.

A = { 1;3;5;7;9 } $n(A) =$ 5

B = { 1;3;5;7;9 } $n(B) =$ 5

Preencha a tabela de dupla entrada abaixo para encontrar $A \times B$, sabendo agora que as duas últimas casas do telefone de Maria são ímpares.

Opções de algarismos para a 7ª casa (Conjunto A)	Opções de algarismos para a 8ª casa (Conjunto B)					
		1	3	5	7	9
	1	(1,1)	(1,3)	(1,5)	(1,7)	(1 9)
	3	(3,1)	(3,3)	(35)	(3 7)	(3,9)
	5	(5,1)	(5,3)	(55)	(5,7)	(5,9)
	7	(7,1)	(7,3)	(7,5)	(7,7)	(7,9)
	9	(9,1)	(9,3)	(95)	(9,7)	(9,9)

Temos que $n(A \times B) =$ 25

Existe alguma relação entre $n(A \times B)$ com o número de elementos de cada conjunto, $n(A)$e $n(B)$?

(X) SIM

( ) NÃO

No caso de sua resposta ser ***SIM,*** escreva, nas linhas abaixo, qual é essa relação.

Pois quando multiplicamos n(A) por n(B) obtemos n(AxB)

Ilustração 11: Item *d* da atividade 1 resolvido por um grupo

Item d)	Classe 1	Classe 2
Acertaram	13	14
Cometeram algum erro	2	0

Na classe 1, cinco grupos responderam que encontraram 24 possibilidades para o número do telefone de Maria, pois uma possibilidade já estava impressa então não deveria ser contada e assim como nas situações anteriores não foi considerada uma resposta errada. Dois grupos interpretaram, de forma errada, a relação entre $n(A \times B)$ e os números de elementos $n(A)$ e $n(B)$ interpretando que estava sendo pedida a relação entre $n(A)$ e $n(B)$, e responderam que ambos os conjuntos possuem o mesmo número de elementos, um total de 5, e todos eles são ímpares e um grupo não se expressou corretamente dizendo: “Sim, pois multiplicando $n(A \text{ x } B)$ $temos\ o\ A\ cartesiano\ B$ ”.

Na classe 2, não houve erros neste item.

No item e da atividade 1, surge a primeira situação em que o número de algarismos em cada conjunto são diferentes. Nessa atividade espera-se que o aluno encontre todas as possibilidades para o número de telefone desconhecido, o número de elementos de cada conjunto e os relacionem ao número de possibilidades de linhas telefônicas.

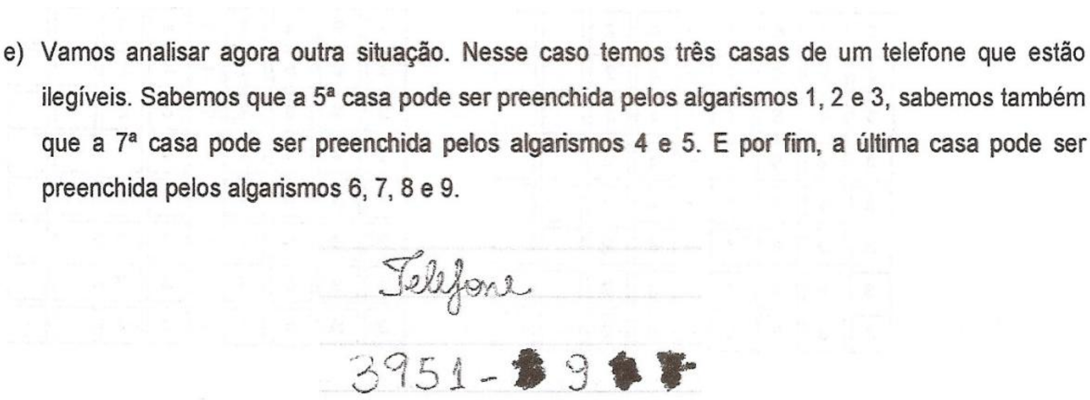

e) Vamos analisar agora outra situação. Nesse caso temos três casas de um telefone que estão ilegíveis. Sabemos que a 5ª casa pode ser preenchida pelos algarismos 1, 2 e 3, sabemos também que a 7ª casa pode ser preenchida pelos algarismos 4 e 5. E por fim, a última casa pode ser preenchida pelos algarismos 6, 7, 8 e 9.

Ilustração 12: Condições para o preenchimento dos dígitos no item *e*

Nos retângulos abaixo aparecem duas possibilidades para o número do telefone. Complete os demais retângulos com as possibilidades restantes dentro das condições estabelecidas para cada dígito borrado.

3951 - 1946	3951 - 1947	3951 -	3951 -	3951 -
3951 -	3951 -	3951 -	3951 -	3951 -
3951 -	3951 -	3951 -	3951 -	3951 -
3951 -	3951 -	3951 -	3951 -	3951 -
3951 -	3951 -	3951 -	3951 -	3951 -
3951 -	3951 -	3951 -	3951 -	3951 -

Quantos números diferentes de telefones você encontrou? $\boxed{}$

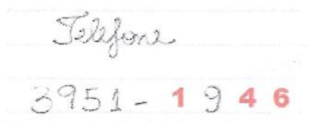
Dentro das condições estabelecidas, vamos chamar de ***A*** o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 5ª casa e de $n(A)$ o número de elementos desse conjunto. Vamos chamar de ***B*** o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 7ª casa e $n(B)$ o número de elementos do conjunto ***B***. E por fim, vamos chamar de ***C*** o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 8ª casa e $n(C)$ o número de elementos do conjunto ***C***. Determine os conjuntos ***A***, ***B***, ***C*** e o número de elementos de cada um deles.

$A = \{ \qquad\qquad \}$ e $n(A) =$ $\boxed{}$

$B = \{ \qquad\qquad \}$ e $n(B) =$ $\boxed{}$

$C = \{ \qquad\qquad \}$ e $n(C) =$ $\boxed{}$

$A \times B \times C$ é o conjunto formado por todas as ternas ordenadas (x, y, z), tal que x é elemento de A, y é elemento de B e z é elemento de C. Por exemplo, a terna ordenada $(1, 4, 6)$ é uma solução para o telefone que fica da seguinte maneira:



Encontre todas as ternas ordenadas de $A \times B \times C$.

(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)
(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)
(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)
(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)
(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)

$n(A \times B \times C) =$ $\boxed{}$

Existe alguma relação entre o número de elementos de cada conjunto, ou seja, $n(A), n(B)$ e $n(C)$, e o número de linhas de telefones que você encontrou que é representado por $n(A \times B \times C)$? ***( ) SIM*** ***( ) NÃO***

No caso de sua resposta ter sido ***SIM***, escreva, nas linhas abaixo, qual é essa relação.

____

____

____.

Ilustração 13: Item *e* da atividade 1

Item e)	Classe 1	Classe 2
Acertaram	14	14
Cometeram algum erro	1	0

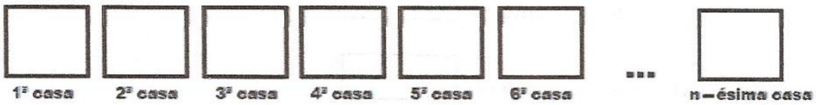
Os grupos das duas classes comentaram que o item e ficou “mais fácil”, pois bastava seguir os exemplos das atividades anteriores. Na classe 1, apenas um grupo apresentou erros nesse item. Esse grupo encontrou todas as possíveis linhas de telefone do item e preenchendo os retângulos totalizando 24 linhas, respondeu também que os números de elementos de A, B e C são $n(A)$= 3, $n(B)$= 2 e $n(C)$= 5 , e encontrou apenas 20 ternas ordenadas. O grupo respondeu que $n(A \times B \times C)$ é igual ao número de ternas ordenadas encontradas, consequentemente, assinalaram a opção NÃO quando perguntado se há alguma relação entre $n(A \times B \times C)$ e o número de linhas telefônicas encontradas, pois segundo o grupo, há 24 linhas telefônicas e 20 ternas ordenadas. Na classe 2 não houve erros nesse item.

Nesse item, na hora de encontrar todas as possíveis linhas telefônicas preenchendo os retângulos, era feita a seguinte pergunta: “Quantos números diferentes de telefones você encontrou?”. Como já havia duas possibilidades impressas os grupos precisariam preencher apenas 22 possibilidades e alguns grupos responderam que encontraram apenas 22, não colocando na contagem as possibilidades já impressas. Esse fato não foi considerado um erro do aluno, pois a pergunta pode ter como resposta tanto o número 22 como o 24.

No final da atividade 1, após o item *e*, aparece uma situação que espera que os alunos generalizem as situações anteriores utilizando o número de elementos de cada conjunto, que representa os possíveis algarismos que podem ser utilizados em cada casa, com o total de possibilidades para um número de telefone com *n* casas.

Vamos então pensar no seguinte caso:

Imagine um número de telefone com n casas, como mostra a figura abaixo, tal que os algarismos que podem ser usados para preencher a 1ª casa pertencem ao conjunto A_1 $(\textit{não vazio})$ e que tem a_1 elementos, os algarismos que podem ser usados para preencher a 2ª casa pertencem ao conjunto A_2 $(\textit{não vazio})$ e que tem a_2 elementos, os algarismos que podem ser usados para preencher a 3ª casa pertencem ao conjunto A_3 $(\textit{não vazio})$ e que tem a_3 elementos, e assim por diante até os algarismos que podem ser usados para preencher a n-ésima casa que pertencem ao conjunto A_n $(\textit{não vazio})$ e que tem a_n elementos.



Sabemos que

$n(A_1) = a_1$ (número de elementos de A_1)
$n(A_2) = a_2$ (número de elementos de A_2)
$n(A_3) = a_3$ (número de elementos de A_3)
.
.
.
$n(A_n) = a_n$ (número de elementos de A_n)

O número total de telefones diferentes que podemos formar nessa situação é dado por:

$$n(A_1 \text{x } A_2 \text{x } A_3 \text{x} \ldots \text{x } A_n).$$

Existe alguma relação entre $n(A_1 \text{x } A_2 \text{x } A_3 \text{x} \ldots \text{x } A_n)$ com $n(A_1), n(A_2), \ldots, n(A_n)$? (x) SIM ( ) NÃO

No caso de sua resposta ser ***SIM***, escreva, nas linhas abaixo, qual é essa realação.

$n(A_1 \text{X} A_2 \text{X} A_3 \ldots \text{X} A_n)$ equivale a $n(A_1) \cdot n(A_2) \ldots \cdot n(A_n)$. Ambos produtos resultam na quantidade de possibilidades de números telefônicos.

Ilustração 14: Generalização do princípio multiplicativo feita por um grupo

Generalização	Classe 1	Classe 2
Acertaram	12	7
Cometeram algum erro	3	7

Na classe 1, dois grupos responderam que não há relação entre o número de elementos de cada conjunto e o número de linhas que podem ser formadas. Um grupo respondeu: “Das possibilidades que podem ser formadas um algarismo está contido em $n(A_1)$, outro em $n(A_2)$, e assim por diante.”, mas não relacionou a quantidade de linhas telefônicas que podem ser formadas com o produto dos números de elementos de cada conjunto. Na classe 2, três grupos não responderam a questão, um grupo respondeu que o número de elementos de cada conjunto é igual a 10 e afirmou que o número de telefones que podem ser formados é a soma de $n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_{n-1}) + n(A_n)$ totalizando 10 possibilidades, um grupo respondeu que se ele soubesse os valores de A_1 e A_n poderia encontrar os outros números de elementos. Acredito que esse último grupo relacionou A_1 e A_n com progressões aritméticas e progressões geométricas, conteúdos esses que estavam sendo revistos alguns dias antes da aplicação dessa atividade. Um grupo respondeu: “O número de casas vazias corresponde ao número de algarismos que podem estar presentes nos números de telefones.”, interpretando que já que todos os conjuntos são no mínimo unitários, nunca ficarão casas sem preenchimento. Por fim, um grupo afirmou, de forma confusa, que “cada casa possui o número de casa igual a quantidade de números que ficam em cada casa.”.

5.5 CONCLUSÃO DA ANÁLISE DA ATIVIDADE 1

Os grupos gostaram da atividade 1 e comentaram ser uma atividade simples de ser realizada comparada aos exercícios e problemas desenvolvidos diariamente na sala. Uma aluna, durante a realização da atividade, me contou uma cena do filme de comédia “As férias do Mr. Bean” que aparece o protagonista do filme ajudando um garoto perdido a ligar para a sua casa onde alguns algarismos do telefone desse garoto também estão borrados. Gostei da associação feita pela aluna, pois ali percebi que ela tinha compreendido o que era necessário realizar. A grande maioria dos grupos realizou a atividade sem dificuldades, mas sempre insistiam em saber se estava respondido da maneira certa.

Foi muito bom ver que os alunos associavam corretamente o total de linhas telefônicas com os números de elementos de cada conjunto. Ao final da aplicação da atividade 1 na classe 2, um aluno veio conversar, em particular, e comentou: “dessa Matemática que eu gosto de realizar, pois assim posso responder utilizando meu próprio raciocínio sem a necessidade de usar fórmulas” .

Baseando-me nos resultados e na observação das discussões geradas entre os alunos durante a aplicação da atividade 1 vejo que os objetivos da atividade 1 foram atingidos.

Capítulo 6

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE 2

6.1 INTRODUÇÃO

A atividade 2 está dentro de um contexto de telefonia fixa da cidade de Bragança Paulista. Nela os alunos devem encontrar a capacidade de linhas para a cidade sem a necessidade de encontrar todas as linhas possíveis, ou seja, apenas utilizando o Princípio Fundamental da Contagem desenvolvido na Atividade 1. A aula foi aplicada no 2º ano A no dia 01/04/2013 e no 2º ano B no dia 22/03/2013. Os alunos do 2º ano A foram divididos em 13 duplas, 1 trio e uma aluna realizou sozinha. No 2º ano B os alunos foram divididos em 13 duplas e 1 trio.

Em cada sala a duração da aplicação foi de 1 aula de 50 minutos.

6.2 RESUMO DA ATIVIDADE 2

A atividade 2 é uma continuação da atividade 1, pois nela o aluno tem que aplicar os conhecimentos adquiridos na primeira atividade. A atividade 2 tem como objetivo encontrar a quantidade de linhas telefônicas que a cidade de Bragança Paulista comporta. Inicialmente são apresentados todos os prefixos de telefones residenciais e comerciais que há na cidade.

No item *a* os alunos devem encontrar as possibilidades de linhas telefônicas para um grupo de prefixos, excluir as possibilidades terminadas com quatro zeros e descobrir também quantas linhas podem ser formadas para cada prefixo desde que não existam linhas com os quatro últimos algarismos iguais a zero.

Por fim, no item *b*, pede-se aos alunos para encontrarem a quantidade de linhas de telefones fixos que podem ser formadas na cidade de Bragança Paulista.

6.3 ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS

Como citado na atividade 1, a atividade 2 requer uma boa leitura para a compreensão da questão. Esse é um fator que poderá comprometer os resultados esperados. Muitos alunos fazem leituras superficiais e não releem a questão. Para chamar a atenção dos alunos, algumas palavras foram grifadas com o intuito de auxiliar os mesmos na compreensão do enunciado.

6.4 ANÁLISE A PRIORI E ANÁLISE A POSTERIORI DA ATIVIDADE 2

A atividade 2 é composta apenas pelos itens *a* e *b*. No item *a* os alunos devem determinar a quantidade de linhas telefônicas que existem para um grupo de cinco prefixos que se diferenciam a partir do quarto dígito. Após determinarem a quantidade de linhas formadas, os alunos precisam subtrair as linhas telefônicas que possuem os quatro últimos algarismos iguais à zero. Essa subtração foi solicitada, pois foi considerado na atividade que não há linhas de telefones com os quatro últimos algarismos iguais a zero. Nesse item os alunos devem determinar também, o número de linhas telefônicas para cada prefixo sem contar a linha que possui os quatro últimos algarismos simultaneamente iguais a zero. Espera-se no item *a* que os alunos determinem os algarismos que podem ser utilizados para preencher cada lacuna vazia do telefone indicado na folha de atividade, determinando assim os conjuntos A, B, C, D e E e seus respectivos números de elementos. Depois de encontrarem as informações acima, espera-se que os alunos utilizem o princípio fundamental da contagem, construído na atividade 1, para encontrar o total de linhas telefônicas, a quantidade de linhas telefônicas com os quatro últimos algarismos simultaneamente diferentes de zero e o total de linhas telefônicas por prefixo, sendo a última adquirida através de uma simples divisão por 5.

Atividade 2

Na cidade de Bragança Paulista, interior de São Paulo, situada a 88 km da capital, os prefixos de telefones residenciais e comerciais são: 2247, 2473, 3404, 4031, 4032, 4033, 4034, 4035, 4481, 4603 e 4892.

a) Nesse item vamos analisar quantos números de telefones podemos formar utilizando apenas os prefixos 4031, 4032, 4033, 4034 e 4035.

4	0	3		–				

Vamos chamar de **A** o conjunto dos algarismos que podem ser usados para preencher a 4ª casa, de **B** o conjunto de algarismos que podem ser usados para preencher a 5ª casa, de **C** o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 6ª casa, de **D** o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher 7ª casa e por fim, de **E** o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 8ª casa.

$A = \{$ 1, 2, 3, 4, 5 $\}$ e $n(A) =$ 5

$B = \{$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 $\}$ e $n(B) =$ 10

$C = \{$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 $\}$ e $n(C) =$ 10

$D = \{$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 $\}$ e $n(D) =$ 10

$E = \{$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 $\}$ e $n(E) =$ 10

A quantidade de linhas telefônicas é representada por $n(A \times B \times C \times D \times E)$. Então,

$n(A \times B \times C \times D \times E) =$ 50.000

Quantas linhas telefônicas diferentes podem ser formadas? 50.000

Das linhas telefônicas que você encontrou acima, exclua as que têm os quatro últimos algarismos iguais à zero. Quantos números de telefones há nesse caso?

Resposta: 32.805

81 × 9 = 729 729 × 9 = 6561 6561 × 5 = 32805

(descreva nas linhas abaixo como você pensou!)

Retirando o 0 do n(B), n(C), n(d) e n(e), sobram 9 de cada n.
Então fazemos a multiplicação de todos eles.
n(A) = 5 · n(B) = 9 · n(C) = 9 · n(d) = 9 · n(e) = 9 =

Quantos números de telefones diferentes podemos formar **para cada** prefixo, excluindo a possibilidade dos quatro últimos dígitos serem zero?

Resposta: 6561

(descreva nas linhas abaixo como você pensou!)

32805 | 5 = 6561

Dividimos 32 805 pelo quantidade de prefixos (5)

Ilustração 15: Item *a* da atividade 2 resolvida por um grupo

A atividade acima foi realizada por um grupo da classe 1. As alunas deste grupo argumentavam que para não figurar o algarismo zero nas quatro últimas casas bastava retirar o algarismo zero de cada conjunto e então o número de linhas disponíveis era dado por 5 x 9 x 9 x 9 x 9 totalizando 32.805 linhas. E para encontrar o número de linhas disponíveis para cada prefixo, de forma que os quatro últimos algarismos não fossem iguais a zero teria que realizar a divisão de 32.805 por 5 que resulta em 6.561 linhas telefônicas.

Item a)	Classe 1	Classe 2
Acertaram	4	8
Cometeram algum erro	11	6

Na classe 1, um grupo encontrou corretamente os elementos de cada conjunto, mas para determinar $n(A\text{x}B\text{x}C\text{x}D\text{x}E)$, realizou a soma $n(A) + n(B) + n(C) + n(D) + n(E)$ totalizando 45. Um fato interessante que aconteceu foi que essa dupla registrou que o número de linhas possível é 50.000, mas não percebeu que $n\,(A \text{ x } B \text{ x } C \text{ x } D \text{ x } E)$ representava também o número de linhas possíveis. Dois grupos responderam que o número de linhas telefônicas possível é 500.000, demonstrando falta de atenção na multiplicação com vários fatores iguais a 10. Quatro grupos registraram que havia 5 linhas telefônicas com os quatro últimos algarismos iguais a zero, porém, não subtraíram das 50.000 linhas telefônicas encontradas anteriormente. Isso mostra que esses grupos fizeram uma interpretação errada da questão proposta. Cinco grupos escreveram que retirando o algarismo zero dos conjuntos B, C, D e E cada conjunto teria 9 elementos e então o número de possibilidades para formar linhas telefônicas é dado por: 5 x 9 x 9 x 9 x 9 = 32.805. O grupo que respondeu que havia 500.000 linhas telefônicas encontrou as 5 linhas que terminam com os quatro algarismos iguais a zero, mas subtraiu 5 de 500.000 chegando ao resultado de 499.995 linhas telefônicas e não em 49.995 como era esperado. Quatro grupos responderam que para encontrar o número de linhas para cada prefixo, excluindo a possibilidade dos quatro últimos algarismos serem iguais a zero, bastava dividir 32.805 por 5 chegando ao resultado de 6561 linhas, ou seja, interpretaram corretamente a questão, mas utilizaram o número 32.805 ao invés de 49.995. Um grupo chegou à resposta de 6.481 linhas. Um grupo repetiu o resultado 32.805 e não compreendeu que era necessário dividir esse resultado por 5. Um grupo respondeu que para cada prefixo há 40 linhas telefônicas, provavelmente, como esse grupo respondeu que $n(A \text{ x } B \text{ x } C \text{ x } D \text{ x } E)$= 45 no inicio da atividade e respondeu que há 5 linhas telefônicas que terminam com quatro zeros, subtraiu 5 de 45 resultando nas 40 linhas. Um grupo respondeu que para cada prefixo há 49.999 linhas, subtraindo 1 de 50.000 ao invés de 5.

Na classe 2, três grupos responderam no item a que $n(A \text{ x } B \text{ x } C \text{ x } D \text{ x } E)$ é 45, pois somaram os número de elementos de cada conjunto, mas responderam que o número de linhas telefônicas possível é 50.000. Três grupos afirmaram que o total de linhas telefônicas, excluindo as linhas que possuem os quatro últimos algarismos iguais a zero, é 5. No item referente ao número de linhas para cada prefixo, excluindo a possibilidade dos quatro últimos algarismos serem iguais a zero, um grupo respondeu que há apenas 9 linhas, pois se retirar o zero dos conjuntos restam 9 elementos. Um grupo respondeu que há 10.000 linhas telefônicas para cada prefixo, mas se esqueceu de retirar uma linha que termina com os quatro zeros. Um grupo não respondeu essa questão. Um grupo respondeu que para encontrar o número de linhas para cada prefixo bastava retirar o algarismo zero dos conjuntos B, C, D e E e encontrar o produto de 9 x 9 x 9 x 9 = 6561. Por fim, uma dupla respondeu que há 5 x 9 x 9 x 9 x 9 = 32.805 linhas disponíveis para cada prefixo.

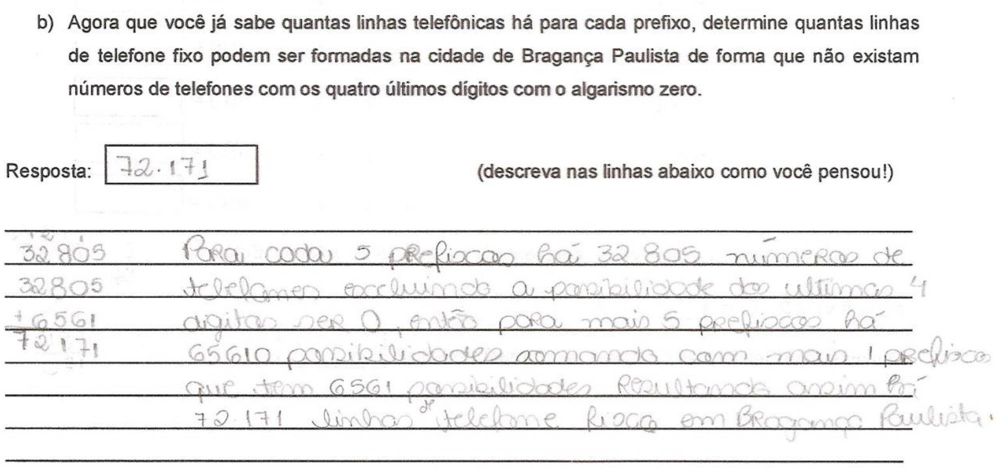
Foto 2: Aplicação da atividade 2

No item b os alunos deverão encontrar a quantidade de linhas telefônicas que podem ser formadas na cidade de Bragança Paulista. Para chegarem ao resultado, os grupos deverão utilizar os 11 prefixos apresentados no início da atividade 2, a resposta encontrada para a quantidade de linhas telefônicas para cada prefixo e fazer uma simples multiplicação de 11 prefixos por 9 999 linhas telefônicas totalizando 109.989 linhas residenciais e comerciais.

Item b)	Classe 1	Classe 2
Acertaram	7	3
Cometeram algum erro	8	11

Na classe 1, quatro grupos que encontraram 6561 linha telefônicas para cada prefixo multiplicaram esse valor por 11 e chegaram ao resultado de 72.171 linhas telefônicas. Dois grupos pensaram que o número de linhas telefônicas para a cidade de Bragança Paulista era o mesmo que o número de linhas para os prefixos 4031, 4032, 4033, 4034 e 4035 e repetiram o resultado que é 32.805. Um grupo que respondeu que há 6.481 linhas para cada prefixo multiplicou esse resultado por 5 e obteve o resultado 32.405 linhas. Os grupos que multiplicaram o número de linhas para cada prefixo por 5 não perceberam, na leitura do item b, que desejava-se saber o total de linhas para a cidade, lembrando que há 11 prefixos em Bragança Paulista. E por fim, um grupo retirou 11 linhas telefônicas que terminam com os quatro últimos algarismos iguais à zero do total de 50.000 linhas e não de 110.000.

Na classe 2, dois grupos não responderam o item. Um grupo respondeu, sem justificar, 45 mil possibilidades. Um grupo chegou aos 110 mil linhas telefônicas, mas na hora de excluir as possibilidades com os quatro últimos algarismos zeros, subtraiu 11 mil possibilidades chegando ao resultado de 99 mil linhas telefônicas. Um grupo repetiu o total de possibilidades do item *a* que são 49.995 linhas. Dois grupos encontraram 11 possibilidades de linhas que terminam com os quatro últimos algarismos iguais a zero, mas cada uma encontrou um total diferente. Um deles chegou ao total de 1.099.999.999.989 linhas telefônicas e a outro grupo subtraiu as 11 linhas telefônicas de 50 mil chegando ao valor de 49.989 linhas telefônicas. Um grupo retirou o zero de cada conjunto encontrado e realizou o produto cartesiano 9 x 9 x 9 x 9 = 6561 e multiplicou por 11 chegando ao valor de 72.171 linhas. Dois grupos também retiraram o algarismo zero de cada conjunto e realizam o produto 6561 x 5 que resulta em 32.805 linhas telefônicas. E por fim, um grupo multiplicou 11 por 9.999, mas teve erros de cálculo, chegando ao resultado de 209.989 linhas para a cidade de Bragança Paulista.



b) Agora que você já sabe quantas linhas telefônicas há para cada prefixo, determine quantas linhas de telefone fixo podem ser formadas na cidade de Bragança Paulista de forma que não existam números de telefones com os quatro últimos dígitos com o algarismo zero.

Resposta: 72.171 (descreva nas linhas abaixo como você pensou!)

32 805
32805
+6561
72 171

Para cada 5 prefixos há 32 805 números de telefones excluindo a possibilidade dos últimos 4 digitos ser 0, então para mais 5 prefixos há 65610 possibilidades somando com mais 1 prefixo que tem 6561 possibilidades Resultando assim foi 72.171 linhas de telefone fixo em Bragança Paulista.

Ilustração 16: Item *b* da atividade 2 resolvida por um grupo da classe 1

6.5 CONCLUSÃO DA ANÁLISE DA ATIVIDADE 2.

A atividade 2 foi elaborada pensando no cotidiano do aluno. Acredita- se que todos eles possuem em suas residências, uma linha telefônica com um daqueles prefixos. Alguns alunos me falaram que não sabiam que existiam na cidade alguns dos prefixos citado na atividade 2. A ideia foi partir do cotidiano do aluno e das ferramentas adquiridas durante a atividade 1 para descobrir quantas linhas telefônicas a cidade de Bragança Paulista comporta. Para que isso fosse possível, os alunos iniciaram encontrando os elementos que podem preencher cada lacuna vazia, ressaltando que todos os grupos obtiveram êxito nessa parte da atividade. Durante minhas observações na hora da aplicação, alguns grupos não se lembravam de como encontrar o produto cartesiano entre os conjuntos A, B, C, D e E, mas sabiam, através da atividade1, que para encontrar o total de linhas bastava multiplicar o número de elementos de cada conjunto. A leitura superficial foi um dos grandes fatores para alguns erros nessa atividade, tem-se como exemplo, grupos que ao invés de responderem que haviam 49.995 linhas disponíveis para os 5 prefixos com a condição que não haviam linhas com os quatro últimos algarismos iguais a zero, acabaram respondendo que haviam 5 linhas. O que se pode perceber nessa atividade é que a resposta de cada item era usada no item seguinte e isso fez com que houvesse uma sucessão de erros e não que, em algumas situações, os grupos tivessem interpretado de forma errada as questões.

Diversas vezes os grupos chamavam-me e perguntavam se o zero não poderia aparecer em nenhuma das quatro últimas casas, por exemplo, no número 0234 aparece um zero entre os quatro últimos algarismos e se números como esse deveriam ser descartados. Todo momento que isso acontecia eu questionava-os sobre a leitura, se era o que estava sendo pedido, se era o que o grupo tinha interpretado.

A questão referente ao número de linhas telefônicas com os prefixos 4031, 4032, 4033, 4034 e 4035 onde os quatro últimos algarismos devem ser diferentes de zero foi determinante para os erros dos itens seguintes. Essa questão foi a que iniciou, na maioria dos casos, os erros das quantidades de linhas para cada prefixo e, posteriormente, no item b, o total de linhas telefônicas para a cidade de Bragança Paulista.

Capítulo 7

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE 3

7.1 INTRODUÇÃO

A atividade 3 retorna ao número do telefone de Maria que foi estudado na atividade 1. Nessa atividade o objetivo é fazer com que os alunos construam o conceito de permutação simples utilizando os quatro últimos números do celular de Maria para formar linhas telefônicas diferentes sem a repetição de algarismos.

Essa atividade foi aplicada no dia 02/04/2013 para o 2º ano A e 28/03/2013 para o 2º ano B e teve duração de 1 aula (50 minutos). A aluna do 2º ano A que fez individualmente as atividades 1 e 2 faltou em todas as outras atividades e não as realizou. A atividade foi aplicada para 26 duplas e 2 trios totalizando 28 grupos.

7.2 RESUMO DA ATIVIDADE 3

Na atividade 3 os alunos devem trabalhar com os quatro últimos algarismos do telefone de Maria (4213). Em um primeiro momento os alunos precisam fixar os algarismos 4, 2 e 1, respectivamente, na primeira, segunda e terceira casa e encontrar todas as possibilidades de linhas telefônicas completando a quarta casa vazia com o algarismo 3. Em um segundo momento, os alunos precisam fixar os algarismos 4 e 2, respectivamente, na primeira e segunda casa , precisam completar as duas últimas lacunas com os algarismos 1 e 3 e assim por diante até que permutem os quatro algarismos. Todas essas permutações devem ser feitas com o auxílio de um tabuleiro com cartas numeradas de 1 até 4 nas cores vermelha e azul, frente e verso para que não haja repetições de algarismos e os grupos visualizem melhor essas possibilidades.

7.3 ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS

De acordo com o que os alunos produziram durante as atividades 1 e 2 não são esperadas dificuldades que interfiram na construção do conceito de permutação simples.

7.4 ANÁLISE A PRIORI E ANÁLISE A POSTERIORI DA ATIVIDADE 3

A atividade 3 busca ser, assim como as atividades 1 e 2, autoexplicativa. No início dessa atividade são definidos os termos: código de acesso de usuário, prefixo e linha telefônica para auxiliar na compreensão das situações a serem realizadas.

Com o auxílio de um tabuleiro e cartas numeradas com os últimos algarismos do telefone de Maria (frente em vermelho e verso em azul) 4213, os alunos precisam encontrar todas as linhas telefônicas possíveis de serem formadas. Os cartões azuis são fixos, ou seja, a partir do momento em que foram posicionados não podem mais ser movimentados e os cartões vermelhos são móveis. Os posicionamentos dos cartões azuis e as movimentações dos cartões vermelhos são dadas em quatro situações, sendo a última, chamada de problema proposto. No problema proposto, os alunos devem encontrar todas as linhas telefônicas possíveis movimentando-se apenas os quatro últimos dígitos.

Ilustração 17: Tabuleiro e cartas para a atividade 3

Na primeira situação os grupos devem encontrar todas as possibilidades de linhas telefônicas utilizando os algarismos do número 4213 de forma que o algarismo 4 fique fixo na primeira casa, o algarismo 2 fique fixo na segunda casa e o algarismo 1 fique fixo na terceira casa podendo assim apenas movimentar o algarismo 3.

Primeira Situação	Classe 1	Classe 2
Acertaram	14	14
Cometeram algum erro	0	0

Todos os grupos da classe 1 e 2 encontraram corretamente o número de linhas telefônicas que podem ser formadas utilizando apenas a carta com o algarismo 3 para a movimentação e as demais fixas. Nesse momento houve minha intervenção, pois alguns grupos estavam movimentando as cartas azuis. A intervenção consistia em chamar a atenção dos alunos para a legenda do tabuleiro, que diz que as cartas azuis são fixas e as cartas vermelhas são as cartas móveis.

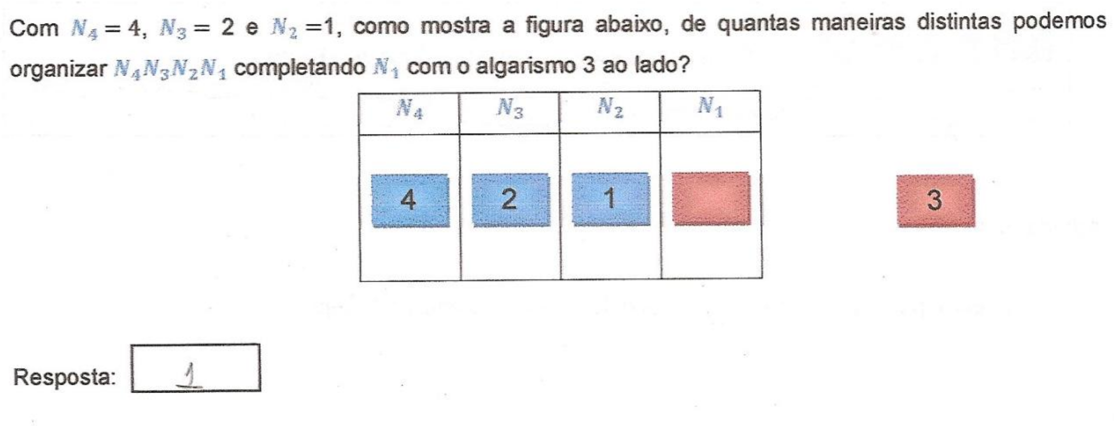


Ilustração 18: Permutação de 1 elemento feita por um grupo da classe 1

Na segunda situação os alunos devem formar linhas telefônicas distintas mantendo o algarismo 4 fixo na primeira casa e o algarismo 2 fixo na segunda casa e movimentando os algarismos 1 e 3 nas duas últimas casas do telefone de Maria.

Segunda Situação	Classe 1	Classe 2
Acertaram	14	14
Cometeram algum erro	0	0

Todos os grupos das classes 1 e 2 encontraram todas as possibilidades de linhas telefônicas permutando os algarismos 1 e 3.

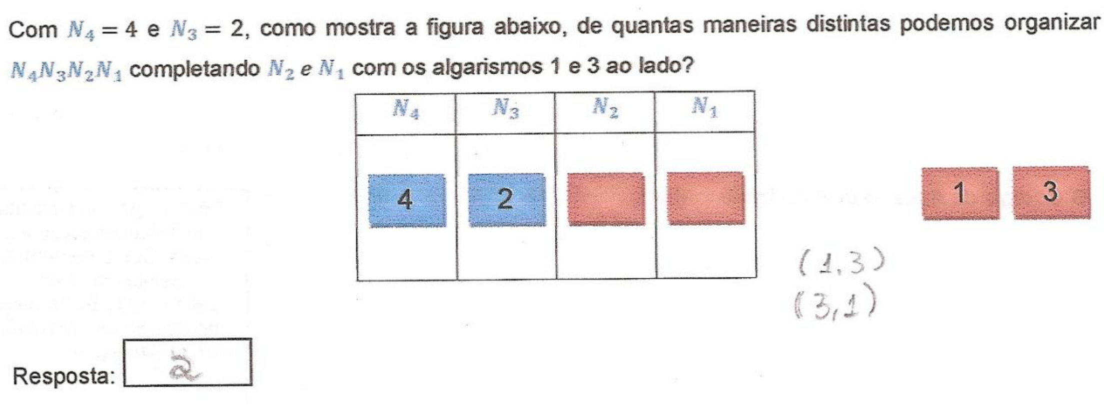


Ilustração 19: Permutação de dois elementos feita por um grupo da classe 1

Na terceira situação, os grupos devem fixar o algarismo 4 na primeira casa, permutar os algarismos 1, 2 e 3 nas três últimas casas e encontrar todas as possibilidades de linhas telefônicas.

Terceira Situação	Classe 1	Classe 2
Acertaram	13	13
Cometeram algum erro	1	1

Os dois erros, um na classe 1 e um na classe 2, foram devido a conjectura feita pelos grupos. Esses grupos chegaram a conclusão de que se a quantidade de permutações de 1 elemento é 1, a quantidade de permutações de 2 elementos é 2, então, não havia a necessidade de encontrar todas as linhas, pois a quantidade de permutações de 3 algarismos distintos resulta em 3 linhas telefônicas diferentes. Tal conjectura levou os alunos ao erro da questão. O que se pode observar é que os alunos buscaram um padrão para evitar encontrar as linhas telefônicas uma a uma.

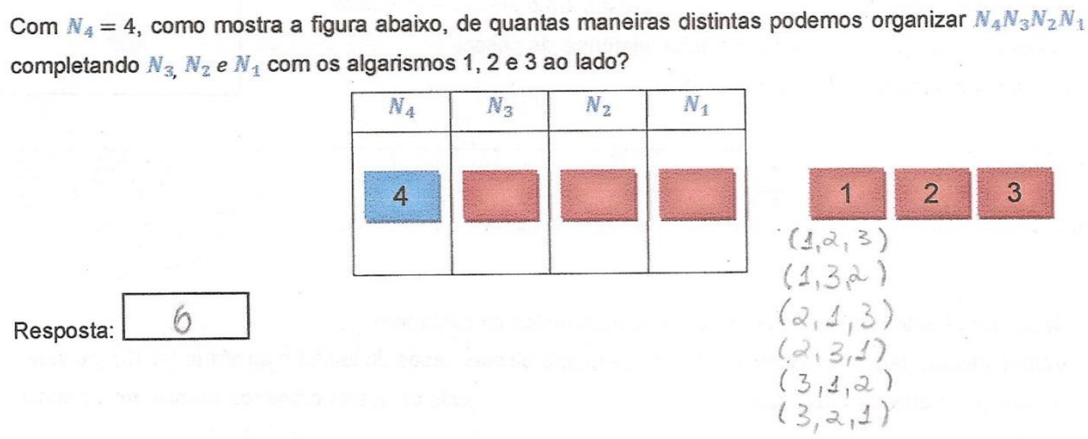
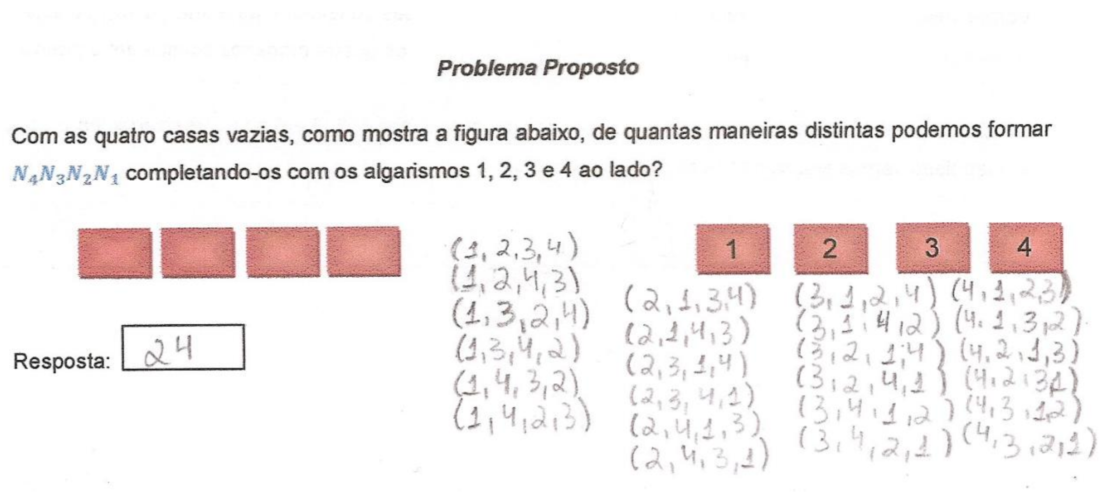


Ilustração 20: Permutação de três elementos feita por um grupo da classe 1

Na última situação, chamado de Problema Proposto, os grupos devem permutar os algarismos 1, 2, 3 e 4 e encontrar todas as possibilidades de linhas.

Problema Proposto	Classe 1	Classe 2
Acertaram	13	9
Cometeram algum erro	1	5

Na classe 1, o mesmo grupo que conjecturou de forma errada que a quantidade de permutações de 3 elementos distintos é 3, chegou a conclusão que a quantidade de permutações de 4 elementos distintos é 4. Esse grupo não tentou encontrar todas as possibilidades nessa situação. Na classe 2, um grupo respondeu que há 4 possibilidades de linhas permutando os quatro algarismos, lembrando que esse grupo é o mesmo que respondeu que a quantidade de permutações de 3 elementos distintos é 3. Quatro grupos responderam que a quantidade de permutações de 4 elementos distintos é 16.


Problema Proposto

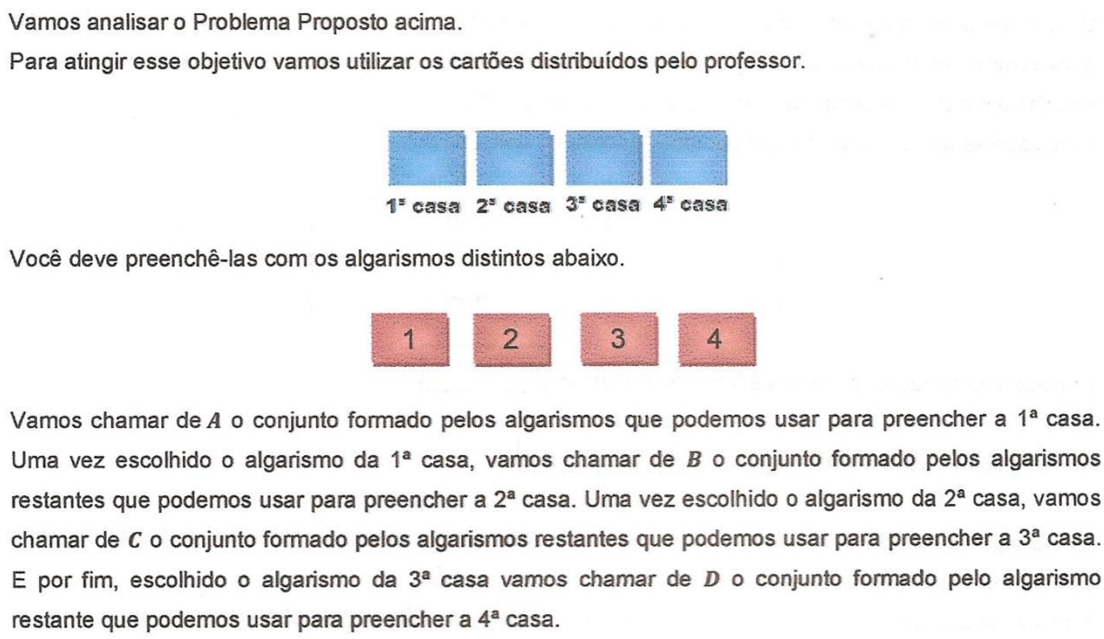
Com as quatro casas vazias, como mostra a figura abaixo, de quantas maneiras distintas podemos formar $N_4N_3N_2N_1$ completando-os com os algarismos 1, 2, 3 e 4 ao lado?

1 2 3 4

Resposta: 24

(1,2,3,4) (1,2,4,3) (1,3,2,4) (1,3,4,2) (1,4,3,2) (1,4,2,3)
(2,1,3,4) (2,1,4,3) (2,3,1,4) (2,3,4,1) (2,4,1,3) (2,4,3,1)
(3,1,2,4) (3,1,4,2) (3,2,1,4) (3,2,4,1) (3,4,1,2) (3,4,2,1)
(4,1,2,3) (4,1,3,2) (4,2,1,3) (4,2,3,1) (4,3,1,2) (4,3,2,1)

Ilustração 21: Resolução do problema proposto (permutação de quatro elementos)


Vamos analisar o Problema Proposto acima.
Para atingir esse objetivo vamos utilizar os cartões distribuídos pelo professor.

1ª casa 2ª casa 3ª casa 4ª casa

Você deve preenchê-las com os algarismos distintos abaixo.

1 2 3 4

Vamos chamar de $\boldsymbol{A}$ o conjunto formado pelos algarismos que podemos usar para preencher a 1ª casa. Uma vez escolhido o algarismo da 1ª casa, vamos chamar de $\boldsymbol{B}$ o conjunto formado pelos algarismos restantes que podemos usar para preencher a 2ª casa. Uma vez escolhido o algarismo da 2ª casa, vamos chamar de $\boldsymbol{C}$ o conjunto formado pelos algarismos restantes que podemos usar para preencher a 3ª casa. E por fim, escolhido o algarismo da 3ª casa vamos chamar de $\boldsymbol{D}$ o conjunto formado pelo algarismo restante que podemos usar para preencher a 4ª casa.

Ilustração 22: Utilização da linguagem de conjuntos para solucionar o problema proposto

Nessa análise os grupos devem escrever os conjuntos *A, B, C* e *D,* seus respectivos números de elementos e, posteriormente, encontrar alguma relação entre o número de elementos de cada conjunto com o total de linhas telefônicas possíveis encontradas no problema proposto que é 24.

Resolução do Problema proposto com a linguagem de conjuntos	Classe 1	Classe 2
Acertaram	12	9
Cometeram algum erro	2	5

Na classe 1, um grupo relacionou os números de termos entre si, respondendo que esses números de elementos iam diminuindo de um em um e não os relacionou com o total de permutações com 4 algarismos. Outro grupo dessa classe respondeu que o resultado do número dos conjuntos é o total de algarismos estabelecidos no conjunto *A*. Na classe 2, um grupo respondeu que não há relação entre o número de elementos de cada conjunto com o número de linhas possíveis, embora tenha encontrado n(A x B x C x D) = 4 x 3 x 2 x 1 = 24, esse grupo encontrou, no problema proposto, onde havia a necessidade de permutar os 4 algarismos, 16 possibilidades de linhas telefônicas. Devido a isso, esse grupo respondeu que não havia relação. Dois grupos encontraram valores errados para alguns conjuntos. Um desses dois grupos encontrou de forma correta todas as possibilidades de formar o conjunto *B*, mas na hora de determinar *n(B)*, somou todos os elementos dos seis conjuntos encontrados, respondendo que *n(B)* = 18 e encontrou duas possibilidades de formar o conjunto *C*, cada um com dois elementos, e respondeu que *n(C)* = 4, pois somou dois elementos de um conjunto com dois elementos do outro conjunto. O outro grupo errou o número de elementos de *C* e o número de elementos de *D*, fazendo a repetição de elementos dentro de cada conjunto dizendo que C={1,3,3,1} ou que C = {3,1,1,3} e que *n(C)* = 4. Por fim, dois grupos relacionaram os números de elementos de cada conjunto dizendo que esses números são diferentes entre si. Esses dois últimos grupos provavelmente não encontraram a relação pedida, pois no problema proposto encontraram 16 possibilidades de linhas telefônicas permutando os 4 algarismos.

De acordo com as informações acima, determine o conjunto A e $n(A)$.

A = { 1, 2, 3, 4 } $n(A) = \boxed{4}$

O conjunto B depende do algarismo que escolhemos para a 1ª casa, por exemplo, se escolhermos o algarismo 3 para a primeira casa, o conjunto B será $B = \{1, 2, 4\}$. Quais são as outras maneiras que podemos escrever o conjunto B?

$B = \{ 2, 3, 4 \}$ $B = \{ \quad \}$
$B = \{ 1, 3, 4 \}$ $B = \{ \quad \}$
$B = \{ 1, 2, 3 \}$ $B = \{ \quad \}$

Em qualquer situação, podemos afirmar que $n(B) = \boxed{3}$

O conjunto C depende dos algarismos que escolhemos para a 1ª casa e para a 2ª casa, por exemplo, se escolhermos o algarismo 2 para a primeira casa e o algarismo 4 para a segunda casa temos que o conjunto $C = \{1, 3\}$

Quais são as outras maneiras que podemos escolher o conjunto C?

$C = \{ 3, 4 \}$ $C = \{ 1, 4 \}$
$C = \{ 2, 4 \}$ $C = \{ 1, 3 \}$
$C = \{ 2, 3 \}$ $C = \{ 1, 2 \}$

Em qualquer situação, podemos afirmar que $n(C) = \boxed{2}$

O conjunto D depende dos algarismos que escolhemos para a 1ª casa, para a 2ª casa e para a 3ª casa, por exemplo, se escolhermos o algarismo 4 para a primeira casa, o algarismo 1 para a segunda casa e o algarismo 3 para a terceira casa temos que o conjunto $D = \{2\}$.

Quais são as outras maneiras que podemos escolher o conjunto D?

$D = \{ 4 \}$ $D = \{ 2 \}$
$D = \{ 3 \}$ $D = \{ \quad \}$
$D = \{ 1 \}$ $D = \{ \quad \}$

Em qualquer situação, podemos afirmar que $n(D) = \boxed{1}$

Temos que $n(A \times B \times C \times D) = \boxed{24}$

Existe alguma relação entre o número de maneiras distintas que você encontrou no Problema Proposto acima e os $n(A), n(B), n(C)$ e $n(D)$? (+) *SIM* ( ) *NÃO*

No caso de sua resposta ser sim, escreva, nas linhas abaixo, qual é essa relação.

$n(A \times B \times C \times D) = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C) \cdot n(D)$

Ilustração 23: Resolução do problema proposto realizada por um grupo da classe 2

Foto 3: Alunos utilizando o tabuleiro e as cartas para solucionarem a atividade 3

7.5 CONCLUSÃO DA ANÁLISE DA ATIVIDADE 3

Após as atividades 1 e 2 os grupos começam a ter mais confiança nas respostas da atividade 3, pois eles passaram a perceber que era fundamental fazer uma boa leitura e que alguma palavra poderia fazer diferença na resolução. Mesmo com essa atenção voltada à leitura foi preciso ler junto com os alunos as legendas dos tabuleiros, ressaltando que as cartas azuis são fixas e as cartas vermelhas são as únicas que podem ser movimentadas. No começo muitos grupos começaram a movimentar as cartas azuis também e isso influenciava nos resultados. Houve por parte de alguns grupos algumas conjecturas erradas, mais precisamente, na quantidade de permutações com um, dois, três e quatro algarismos distintos. Esses grupos perceberam que a quantidade de permutação de um elemento é 1, de dois elementos é 2, e concluíram que a quantidade de permutações de três elementos é 3 e a quantidade de permutações de quatro elementos é 4, sem mesmo tentarem encontrar as possibilidades de linhas telefônicas escrevendo ou utilizando o tabuleiro com as cartas. Nota-se que em diversas situações semelhantes a essa, os alunos buscam, de forma antecipada, um padrão de comportamento para evitar encontrar todas as situações, muitas vezes essa busca por uma regra não é bem sucedida. Um ponto onde muitos grupos tiveram dificuldades de interpretação foi no momento em que precisavam encontrar o número de elementos de cada conjunto. Nesse item aparecia o exemplo que o conjunto B, formado pelos algarismos que podem preencher a segunda casa, poderia ser $B = \{1, 2, 4\}$ caso o algarismo 3 fosse utilizado para preencher a primeira casa. Esses grupos começaram a permutar os elementos 1, 2 e 4 dentro das chaves ficando $B = \{2, 1, 4\}$, $B = \{4, 1, 2\}$, enfim, não perceberam que na realidade estavam encontrando uma forma diferente de escrever o mesmo conjunto e, consequentemente, não encontraram todos os possíveis conjuntos B. O mesmo vale para os conjuntos *C* e *D*. Mas na grande maioria dos grupos, essa compreensão não influenciou o número de elementos de cada conjunto. De acordo com os resultados analisados pode-se concluir que o objetivo da atividade 3 foi atingido.

Capítulo 8

ANÁLISE E DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 4

8.1 INTRODUÇÃO

A atividade 4 apresenta dois casos, chamados de situação 1 e situação 2. A situação 1 é sobre uma pessoa que tentou memorizar um número de telefone, mas esqueceu dos dois últimos dígitos podendo preenchê-los com os algarismos 3, 4, 6 e 8 de forma que sejam diferente um do outro. A folha de atividade traz esse número de telefone com o 7º dígito para ser preenchido e o 8º dígito, em alguns momentos, terminados em 3, 4, 6 ou 8 para que os alunos encontrem todas as possíveis linhas que terminam em 3, em 4, em 6 ou em 8. Espera- se que os alunos encontrem três linhas telefônicas para cada terminação resultando em 12 possibilidades. Dentro da situação 1 há um momento que pede para os alunos completarem o conjunto A (conjunto formado pelos elementos que podem ser usados para preencher a 7ª casa) e determinarem seu número de elementos. Pede-se também para que os alunos completem o conjunto B (conjunto formado pelos elementos que restaram após completarem a 7ª casa) e seu número de elementos. Os objetivos de trabalhar com conjuntos se deve a facilidade de encontrar o número de linhas telefônicas possíveis apenas multiplicando o número de elementos de cada conjunto e que os alunos percebam a relação de dependência entre os dois conjuntos, ou seja, os elementos que pertencem a B dependem do algarismo que foi escolhido para preencher a 7º casa. A situação 2 segue a mesma ideia da situação anterior sendo que nesse caso há três dígitos para preencher e cinco algarismos que podem ser utilizados para preencher esses dígitos vazios sem repeti-los. Após essas duas situações há um momento que auxilia os grupos a escreverem os produtos encontrados, em cada situação, na forma de fração de modo que o numerador e o denominador sejam números fatoriais. O intuito é fazer com que os grupos estabeleçam uma relação entre a quantidade de elementos que podem ser utilizados para preencherem as casas vazias (n) e a quantidade de casas vazias (p) chegando à expressão $\frac{n!}{(n-p)!}$ que é utilizada para determinar a quantidade de arranjos simples de n elementos tomados p a p. Por fim a atividade apresenta quatro casos onde faltam os quatro últimos algarismos de telefone cujo o prefixo é 4035, onde em cada um dos casos os alunos devem encontrar a quantidade de linhas telefônicas que podem ser formadas , sem que haja repetição de algarismos nessas casas vazias. No último caso, chamado de caso D, há apenas 4 algarismos para preencher as 4 casas de modo que os algarismos dessas quatro últimas casas sejam distintos. A atividade 4 termina perguntando aos alunos se a quantidade de arranjos de 4 elementos tomados 4 a 4 é a mesma quantidade de permutações simples de 4 elementos, fazendo com que os alunos percebam que o total de permutações simples de n elementos é o mesmo que o total de arranjos simples de n elementos tomados n a n.

Essa atividade foi aplicada no dia 02/04/2013 no 2º ano A e no dia 04/04/2013 no 2º ano B para 28 grupos no total, e teve duração de 2 aulas de 50 minutos em cada classe.

8.2 RESUMO DA ATIVIDADE 4

Na atividade 4 aparecem situações onde duas pessoas esqueceram de alguns algarismos de telefones. Na situação 1 uma pessoa se lembra apenas dos seis primeiros algarismos do número do telefone (9456 – 75XX) , sabe também que os algarismos que preenchem as duas últimas casas são distintos, ou seja diferente um do outro e essas casas podem ser preenchidas pelos algarismos 3, 4, 6 ou 8. Na situação 2 uma pessoa se lembra apenas dos cinco primeiros algarismos de um número de telefone impresso em um outdoor (9567 – 1XXX) e não se lembra dos algarismos que aparecem nas três últimas casas desse telefone (cada uma das casas esquecidas é representada por um X), mas se lembra que os algarismos 4, 6, 7, 8 e 9 podem ser usados para preencher as três últimas casas de forma que esses três últimos algarismos sejam distintos, ou seja diferentes um do outro. Após essas duas situações, a atividade 4 faz com que os alunos escrevam o número de linhas telefônicas que podem ser formadas como um produto, onde cada fator é representado pela quantidade de elementos que podem ser utilizados para preencher cada dígito e transformem esse produto em uma frações cujo numerador e o denominador sejam números fatoriais. No final da atividade os alunos retornam ao prefixo 4035 da cidade de Bragança Paulista para encontrar o total de linhas telefônicas com os quatro últimos algarismos distintos para 4 casos, onde cada caso, os alunos dispõem de uma determinada quantidade de algarismos para preencher as quatro últimas casas de modo que os algarismos dessas casas sejam distintos um do outro.

8.3 ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS

É esperado que os alunos apresentem dificuldades para encontrar a relação entre as quantidades de elementos que podem ser utilizados para o preenchimento das casas vazias e a quantidade de casas vazias, pois os alunos têm pouco conhecimento sobre representação de números fatoriais.

8.4 ANÁLISE A PRIORI E ANÁLISE A POSTERIORI DA ATIVIDADE 4

Na situação 1 da atividade 4, espera-se que os alunos preencham as lacunas vazias com os possíveis algarismos sempre se preocupando com o fato de que os algarismos da 7ª e da 8ª casa devam ser distintos, ou seja diferentes um do outro. Os alunos precisam encontrar, completando a lacuna da 7ª casa, todas as possibilidades de linhas telefônicas terminadas em 3, depois todas as possibilidades terminadas em 4, terminadas em 6 e por fim todas as possibilidades terminadas em 8. O objetivo dessa situação 1 é fazer com que os alunos percebam que para cada terminação eles conseguem encontrar 3 linhas telefônicas e como pode haver 4 terminações há então 12 possibilidades de linhas telefônicas para o número esquecido. Os alunos devem perceber que começando a preencher as duas casas vazias a partir da 7ª casa eles dispõem dos algarismos 3, 4, 6 e 8, ou seja, quatro elementos e que após escolhido o algarismo dessa casa, lhes restam apenas três algarismos para preencher a 8ª casa, notando que para obterem 12 possibilidades de linhas telefônicas não é necessário encontrá-las uma a uma, mas sim realizar o produto 4 x 3 =12. Espera-se também com essa atividade que os alunos percebam a relação de "dependência" entre a quantidade de algarismos que podem ser usados para preencher cada casa em uma situação em que o algarismo utilizado para preencher uma determinada casa não pode ser utilizado para preencher outra.

Situação 1	Classe 1	Classe 2
Acertaram	11	9
Cometeram algum erro	3	5

Na classe 1, um grupo respondeu que o número de elementos de B é $n(B) = 6$ sendo que encontrou corretamente os possíveis conjuntos B e escreveu que o produto

$n(A)$ x $n(B)$ = 12. Dois grupos relacionaram $n(A)$ com $n(B)$ e responderam que os mesmos elementos que pertencem a B também pertencem ao conjunto A, ou seja, dizendo que o conjunto B está contido no conjunto A. Na classe 2, um grupo não concluiu a relação entre o número de linhas telefônicas com os valores de $n(A)$ e $n(B)$. Quatro grupos encontraram a relação de $n(A)$ com $n(B)$, sendo que dois deles responderam que esses valores são iguais e dois grupos responderam que o valor de $n(B)$ depende de $n(A)$.

Atividade 4

O que acontece, com muita frequência, entre as pessoas que tentam guardar o número de telefone de cabeça é esquecerem-se da ordem dos algarismos ou mesmo ficar na dúvida se um determinado algarismo aparece no número do telefone ou não.

Na correria do nosso dia-a-dia, quem nunca tentou registrar um número de telefone de cabeça, mas depois, na hora de passar para a agenda do celular ou mesmo em um papel, se pergunta: "*qual era mesmo a ordem dos números?*", "*o último algarismo era 3 ou 5?*".

São nessas horas que acontecem as "*ligações por engano*" que, dependendo do humor de quem está do outro lado da linha, não são nada boas.

Iremos analisar agora duas situações.

Situação 1

Uma pessoa tentou memorizar um número de celular, como mostra a figura abaixo, mas está com dúvidas quanto aos dois últimos algarismos. Ele está em dúvida se eram os algarismos 3, 4, 6 ou 8 que apareciam nas duas últimas casas, mas se lembra que os dois últimos algarismos eram distintos, ou seja, na sétima e na oitava casa os algarismos não eram iguais.

9	4	5	6	–	7	5	?	?

Nossa intenção não é descobrir o número esquecido, mas sim verificar quantas linhas telefônicas podem ser formadas com os algarismos 3, 4, 6 e 8 preenchendo, sem repetição, apenas as duas últimas casas.

Quantas linhas telefônicas podem ser formadas tal que o último algarismo seja o 3?

9	4	5	6	–	7	5	4	3
9	4	5	6	–	7	5	6	3
9	4	5	6	–	7	5	8	3
9	4	5	6	–	7	5		3
9	4	5	6	–	7	5		3

Resposta: 3

Quantas linhas telefônicas podem ser formadas tal que o último algarismo seja o 4?

9	4	5	6	–	7	5	3	4
9	4	5	6	–	7	5	6	4
9	4	5	6	–	7	5	8	4
9	4	5	6	–	7	5		4
9	4	5	6	–	7	5		4

Resposta: 3

Ilustração 24: Possibilidades do número de telefone da situação 1 terminados em 3 ou 4 encontradas por um grupo da classe 2.

Quantas linhas telefônicas podem ser formadas tal que o último algarismo seja o 6?

9	4	5	6	–	7	5	3	6
9	4	5	6	–	7	5	4	6
9	4	5	6	–	7	5	8	6
9	4	5	6	–	7	5		6
9	4	5	6	–	7	5		6

Resposta: 3

Quantas linhas telefônicas podem ser formadas tal que o último algarismo seja o 8?

9	4	5	6	–	7	5	3	8
9	4	5	6	–	7	5	4	8
9	4	5	6	–	7	5	6	8
9	4	5	6	–	7	5		8
9	4	5	6	–	7	5		8

Resposta: 3

Quantas linhas telefônicas diferentes você encontrou no total? Resposta: 12

Analisando a mesma situação, vamos chamar de A o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a sétima casa e de $n(A)$ o número de elementos desse conjunto. Uma vez escolhido um algarismo para a sétima casa, vamos chamar de B o conjunto formado pelos algarismos RESTANTES que podem ser usados para preencher a oitava casa e de $n(B)$ o número de elementos desse conjunto.

Determine o conjunto A e $n(A)$.

$A = \{ 3, 4, 6, 8 \}$ e $n(A) = 4$

O conjunto B depende do algarismo que você escolheu na sétima casa, por exemplo, caso você tenha escolhido para a sétima casa o algarismo 8, então o conjunto $B = \{3, 4, 6\}$

Quais são as outras possibilidades para o conjunto B?

$B = \{ 3, 4, 8 \}$
$B = \{ 3, 6, 8 \}$
$B = \{ 4, 6, 8 \}$
$B = \{ 3, 4, 6 \}$
$B = \{ \quad \}$

Em qualquer situação, podemos dizer que $n(B) =$ 3

Existe alguma relação entre o número de linhas telefônicas diferentes que você encontrou (que será chamado de $n(A \times B)$) com os valores de $n(A)$ e $n(B)$? (X) ***SIM*** ( ) ***NÃO***

No caso de sua resposta ser ***SIM***, escreva, nas linhas abaixo, qual é essa relação.

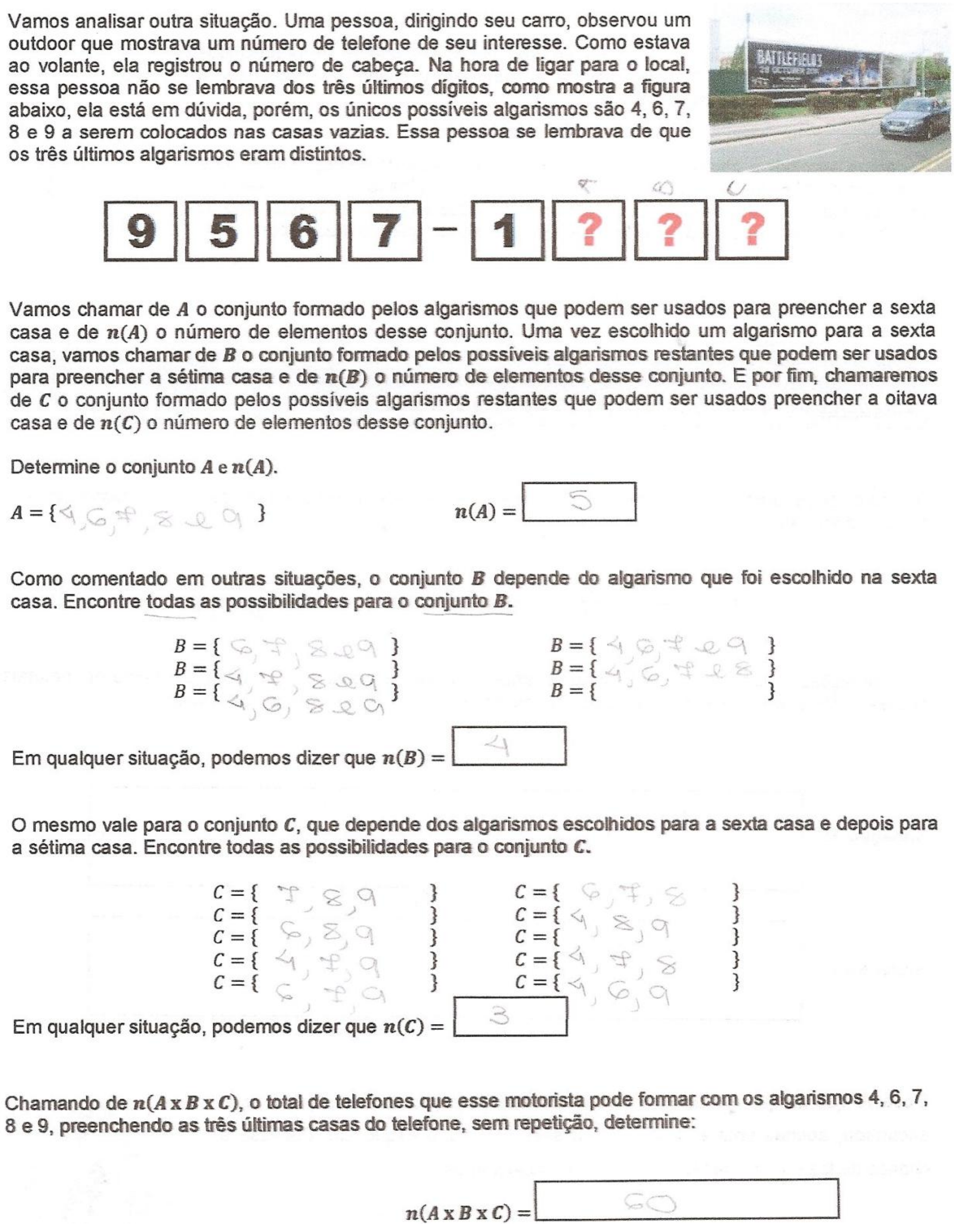
Pois se multiplicarmos o N(A) e N(B) / N(A) = 4 e N(B) = 3, teremos o n(A x B) que é 12.

Ilustração 25: Todas as possibilidades do número de telefone da situação 1 terminados em 6 ou 8 e o total de possibilidades encontradas utilizando o produto cartesiano resolvida por um grupo da classe 2.

A situação 2 também é sobre uma pessoa que tentou memorizar um número de telefone impresso em um outdoor, só que nessa situação essa pessoa não conseguiu memorizar as três últimas casas do telefones. Essas três casas devem ser preenchidas com os algarismos 4, 6, 7, 8 e 9 de modo que os algarismos dessas casas sejam distintos entre si. Nessa situação espera-se que os alunos já utilizem a ideia de multiplicar os números de elementos de cada conjunto para obter o total de linhas telefônicas que podem ser formadas, pois não há nessa situação lacunas para serem preenchidas como aparece na situação 1. O objetivo é que os alunos utilizem o princípio fundamental da contagem sem que haja a necessidade de encontrar as possibilidades uma a uma. Espera-se que os alunos percebam que nesse caso eles dispõem de 5 maneiras para preencher a 6ª casa, após escolhido o algarismo da 6ª casa, restam 4 maneiras para preencher a 7ª casa e escolhido o algarismos para 7ª casa, restam 3 maneiras para preencher a 8ª casa chegando ao produto 5 x 4 x 3 totalizando 60 possibilidades de linhas telefônicas para o número impresso no outdoor.

Situação 2	Classe 1	Classe 2
Acertaram	10	11
Cometeram algum erro	4	3

Na classe 1, dois grupos encontraram os valores corretos de $n(A)$, $n(B)$ e $n(C)$, mas ao invés de encontrar todos os possíveis conjuntos B e C inverteram as ordens dos elementos dos conjuntos dados nos exemplos da folhas de atividade, ou seja, acabaram encontrando os mesmos conjuntos B e C dos exemplos, modificando apenas as posições dos elementos. Um grupo encontrou as seguintes possibilidades para o conjunto B: B = {6, 4, 7}, B = {4, 6, 8}, B = {8, 7, 6}, B = {7, 8, 4} e B = {8, 9, 6}. Pode-se perceber que os possíveis conjuntos B encontrados por esse grupo possuem apenas três elementos ao invés de quatro. Se fosse para encontrar o total de subconjuntos com três elementos que podem ser formados com os elementos do conjunto A= {4, 6, 7, 8, 9} a resposta deveria ser 10 subconjuntos e não 5 como encontrado pelo grupo. Esse grupo cometeu dois erros de naturezas diferentes, sendo um deles a quantidade de elementos no conjunto B e o outro, seguindo o raciocínio de três elementos por conjunto, haverá 10 subconjuntos possíveis e não cinco como foram encontrados pelo grupo. Por fim, um grupo encontrou os valores de $n(A) = 5$, $n(B) = 2$, $n(C) = 3$ e respondeu que $n(A \text{ x } B \text{ x } C) = 60$. Este último grupo copiou a resposta de outro grupo, pois havia escrito que $n(A \text{ x } B \text{ x } C) = 30$, mas apagou esse resultado e colocou 60 sem justificar.


Vamos analisar outra situação. Uma pessoa, dirigindo seu carro, observou um outdoor que mostrava um número de telefone de seu interesse. Como estava ao volante, ela registrou o número de cabeça. Na hora de ligar para o local, essa pessoa não se lembrava dos três últimos dígitos, como mostra a figura abaixo, ela está em dúvida, porém, os únicos possíveis algarismos são 4, 6, 7, 8 e 9 a serem colocados nas casas vazias. Essa pessoa se lembrava de que os três últimos algarismos eram distintos.

9 5 6 7 – 1 ? ? ?

Vamos chamar de A o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a sexta casa e de $n(A)$ o número de elementos desse conjunto. Uma vez escolhido um algarismo para a sexta casa, vamos chamar de B o conjunto formado pelos possíveis algarismos restantes que podem ser usados para preencher a sétima casa e de $n(B)$ o número de elementos desse conjunto. E por fim, chamaremos de C o conjunto formado pelos possíveis algarismos restantes que podem ser usados preencher a oitava casa e de $n(C)$ o número de elementos desse conjunto.

Determine o conjunto A e $n(A)$.

$A = \{4, 6, 7, 8 \text{ e } 9\}$ $n(A) = \boxed{5}$

Como comentado em outras situações, o conjunto B depende do algarismo que foi escolhido na sexta casa. Encontre todas as possibilidades para o conjunto B.

$B = \{6, 7, 8 \text{ e } 9\}$ $B = \{4, 6, 7 \text{ e } 9\}$
$B = \{4, 7, 8 \text{ e } 9\}$ $B = \{4, 6, 7 \text{ e } 8\}$
$B = \{4, 6, 8 \text{ e } 9\}$ $B = \{\ \}$

Em qualquer situação, podemos dizer que $n(B) = \boxed{4}$

O mesmo vale para o conjunto C, que depende dos algarismos escolhidos para a sexta casa e depois para a sétima casa. Encontre todas as possibilidades para o conjunto C.

$C = \{7, 8, 9\}$ $C = \{6, 7, 8\}$
$C = \{\ \}$ $C = \{4, 8, 9\}$
$C = \{6, 8, 9\}$ $C = \{\ \}$
$C = \{4, 7, 9\}$ $C = \{4, 7, 8\}$
$C = \{6, 7, 9\}$ $C = \{4, 6, 9\}$

Em qualquer situação, podemos dizer que $n(C) = \boxed{3}$

Chamando de $n(A \text{ x } B \text{ x } C)$, o total de telefones que esse motorista pode formar com os algarismos 4, 6, 7, 8 e 9, preenchendo as três últimas casas do telefone, sem repetição, determine:

$n(A \text{ x } B \text{ x } C) = \boxed{60}$

Ilustração 26: Resolução da situação 2 realizada por um dos grupos

Nessa atividade, após os alunos encontrarem a quantidade de linhas telefônicas que podem ser formadas dentro das restrições estabelecidas, há uma situação resolvida em que mostra como encontrar a quantidade de possibilidades de senhas que existem em um cadeado segredo com três dígitos chamando cada uma dessas possibilidades de um arranjo de 10 elementos tomados 3 a 3. O objetivo desse momento da atividade 4 é fazer com que os alunos transformem os produtos de números decrescentes e “antecessivos” das situações 1 e 2 em uma fração cujo numerador e denominador sejam números fatoriais e, posteriormente, encontrem a expressão algébrica $\frac{n!}{(n-p)!}$ para generalizar as situações chegando a conclusão de que essa expressão representa a quantidade de arranjos de *n* elementos tomados *p* a *p*, onde *n* representa a quantidade de elementos que podem ser utilizados para o preencher as casas vazias e *p* representa a quantidade de casas vazias a serem preenchidas.

Fração cujo numerador e denominador são números fatoriais	Classe 1	Classe 2
Acertaram	8	6
Cometeram algum erro	6	8

Na classe 1, três grupos erraram apenas a notação do arranjo simples da situação 2 colocando A_2^5 . Esses grupos não perceberam que havia três casas a serem preenchidas nessa situação e provavelmente colocaram o 2, pois estavam se orientando pela notação da situação 1 que é A_2^4. Um grupo, na hora de encontrar a fração formada pelo numerador e pelo denominador com números fatoriais da situação 2, escreveu $5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 = \frac{5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1}{2 \text{ x } 1} = \frac{5!}{2!} = A_1^5 = \frac{5!}{(5-1)!}$. Um grupo respondeu que a fração para a situação 1 é $\frac{4!}{4 \text{ x } 2!}$ e na situação 2 chegou a fração $\frac{5!}{(5-2)!}$. Por fim, um grupo respondeu de forma confusa, mostrando que não compreendeu o que era necessário realizar. Esse último grupo respondeu as situações 1 e 2 da seguinte maneira:

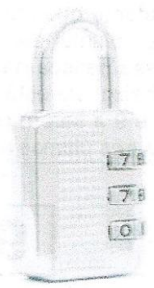
Situação 1: $8 \text{ x } 6 \text{ x } 4 \text{ x } 3 = \frac{8 \text{ x } 6 \text{ x } 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1}{2 \text{ x } 1} = \frac{6!}{2!} = A_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!}$.

Situação 2 : $9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } 6 \text{ x } 4 = \frac{9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } 6 \text{ x } 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1}{3 \text{ x } 2 \text{ x } 1} = \frac{8!}{3!} = A_5^8 = \frac{8!}{(8-5)!}$.

O grupo desapareceu com os fatores 7 e 5 na situação 1, com o fator 5 na situação 2 e fez a notação de arranjo de 6 elementos tomados 4 a 4 utilizando uma fração. O mesmo ocorre na situação 2. Na classe 2, dois grupos erraram apenas a notação de arranjo. Em ambas as situações esses grupos repetiram a notação do exemplo do cadeado colocando A_3^{10}, mas encontraram as frações de números fatoriais esperadas. Três grupos erraram a fração da situação 2. Esses três grupos chegaram à fração $\frac{5!}{2!}$ e interpretaram o algarismo 5 como sendo o número de algarismos que podem preencher as casas vazias e o algarismo 2 como sendo o número de casas a serem preenchidas, sendo que o correto são 3 casas. Os grupos chegaram à conclusão que $A_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!}$ e não perceberam que (5 - 2)! = 3! e não 2! como encontrado no denominador da fração $\frac{5!}{2!}$.

Um produto de números naturais decrescentes e "antecessivos" nem sempre é um número fatorial, mas pode ser representado por uma fração cujo numerador e o denominador são números fatoriais.

Por exemplo, um cadeado com segredo tem três dígitos que podem ser preenchidos pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Sabe que a senha desse cadeado é formada por três algarismos distintos.



Podemos escolher o algarismo da 1ª casa de 10 maneiras diferentes. Escolhido o algarismo da 1ª casa, temos 9 maneiras para escolher o algarismo da 2ª casa. Por fim, escolhido o algarismo da 2ª casa, temos 8 maneiras de escolher o algarismo da 3ª casa. O número de possibilidades para a senha desse cadeado é dado por:

$$10 . 9 . 8 = 720 \; possibilidades$$

Você pode observar que tanto a ordem dos algarismos (257 ≠ 572) quanto a natureza dos algarismos (257 ≠ 258) constituem possibilidades diferentes. Por essa razão, cada uma dessas possibilidades é um **arranjo** de **10** elementos tomados **3 a 3** e é representado por A_3^{10}.

O produto 10 . 9 . 8 não é um número fatorial mas pode ser escrito como uma fração cujo o numerador e o denominador são números fatoriais. Veja!

$$10 . 9 . 8 = \frac{10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1}{7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1} = \frac{10!}{7!} = A_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!}$$

Nas situações 1 e 2, que você realizou anteriormente, escreva os produtos de números naturais decrescentes e "antecessivos" que você chegou na forma de fração de números fatoriais.

Situação 1: $4 \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{4!}{2!} = A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!}$

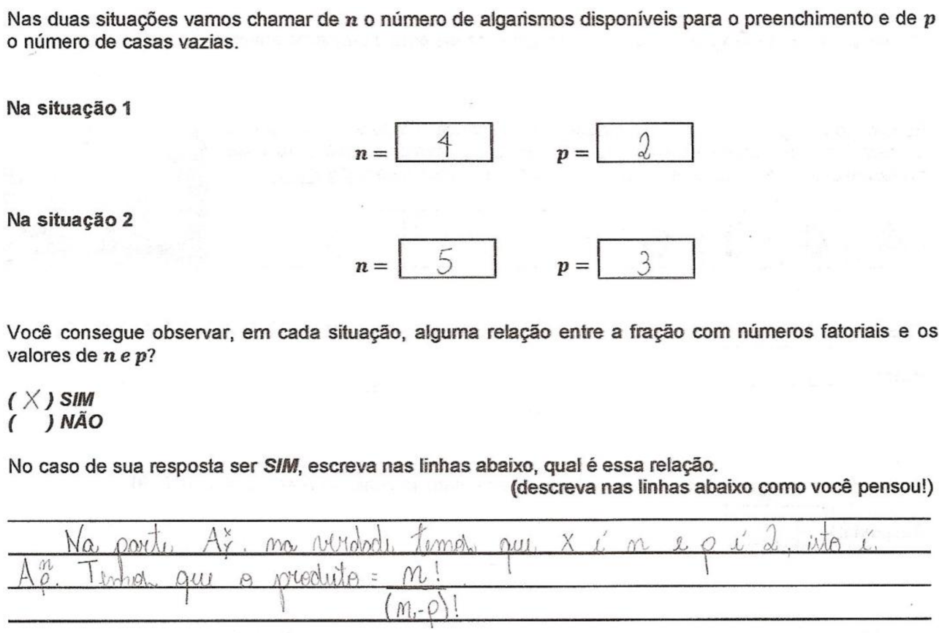
Situação 2: $5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!} = A_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!}$

Ilustração 27: Obtenção da fração com numerador e denominador formados por números fatoriais através das informações das situações 1 e 2

No momento seguinte da atividade 4 os alunos devem encontrar a quantidade de algarismos que podem ser utilizados para preencher as casas vazias, representada pela letra *n*, e a quantidade de casas vazias, representada pela letra *p*, nas situações 1 e 2. O objetivo desse momento é que os alunos encontrem uma relação entre os valores de *n* e de *p* com a fração cujo numerador e o denominador sejam números fatoriais.

Relação entre *n* e *p*	Classe 1	Classe 2
Encontraram alguma relação	8	12
Não encontraram relação	6	2

Na classe 1, três grupos responderam que a quantidade de algarismos disponíveis para preencher as duas últimas casas do telefone da situação 1 é $n = 2$, ao invés de $n = 4$. Nessa classe os seis grupos citados na tabela acima responderam que há alguma relação entre *n* e *p* com a fração cujo numerador e denominador são números fatoriais, mas escreveram conclusões confusas e algumas incompreensíveis. Na classe 2, um grupo respondeu que não há relação entre *n* e *p* com a fração embora esse grupo tenha encontrado corretamente a fração de números fatoriais e os valores de *n* e *p* das situações 1 e 2. Um grupo respondeu que "O número de possibilidades varia de acordo com o número de casas.".



Nas duas situações vamos chamar de n o número de algarismos disponíveis para o preenchimento e de p o número de casas vazias.

Na situação 1

$n =$ 4 $p =$ 2

Na situação 2

$n =$ 5 $p =$ 3

Você consegue observar, em cada situação, alguma relação entre a fração com números fatoriais e os valores de n e p?

(X) ***SIM***
( ) ***NÃO***

No caso de sua resposta ser ***SIM***, escreva nas linhas abaixo, qual é essa relação.
(descreva nas linhas abaixo como você pensou!)

Na parte A_p^x, na verdade temos que x é n e p é 2, isto é A_p^n. Temos que o produto = $\frac{n!}{(n-p)!}$

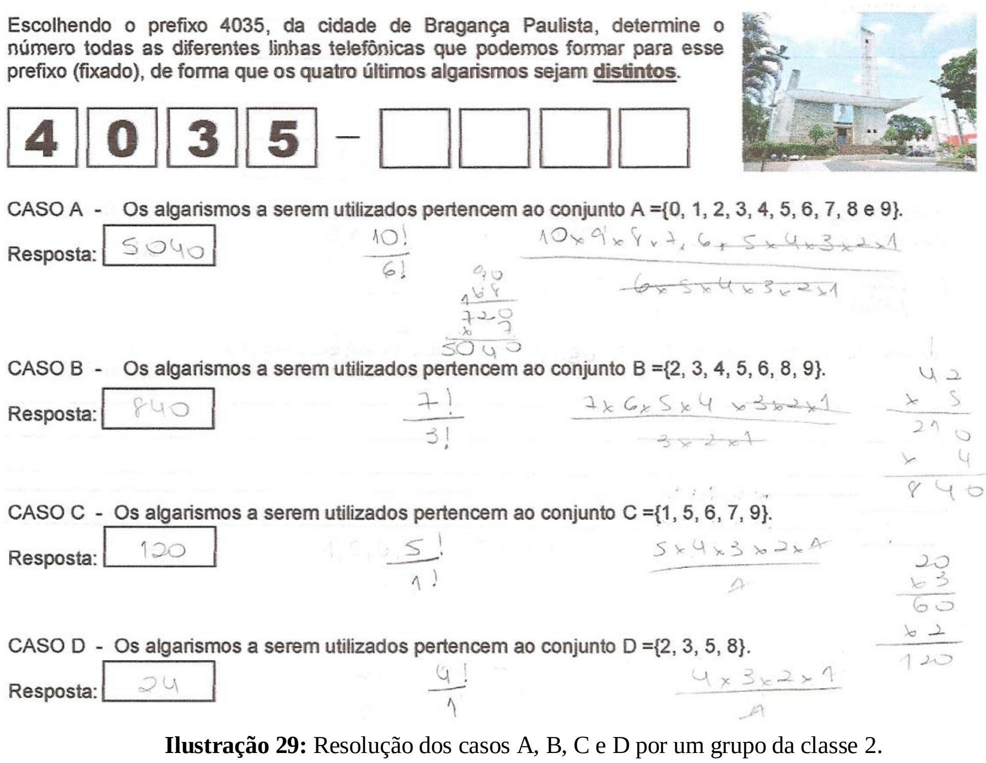
Ilustração 28: Conjectura feita por um grupo da classe 1 das situações 1 e 2

Após encontrarem a relação entre a quantidade de elementos disponíveis para o preenchimento das casas vazias e a quantidade de casas a serem preenchidas, há quatro casos, onde em cada caso os alunos possuem uma determinada quantidade de algarismos para preencher, sem repetição, as quatro últimas casas dos telefones cujo prefixo é 4035.

No primeiro caso os alunos têm o conjunto A= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} para preencherem as quatro últimas casas, no segundo caso o conjunto B = {2, 3, 4, 5, 6, 8, 9}, no terceiro caso o conjunto C = {1, 5, 6, 7, 9} e no quarto caso o conjunto D = {2, 3, 5, 8}. Para finalizar a atividade 4, pergunta-se aos alunos se eles encontraram alguma relação entre o quarto caso que é uma questão de arranjo de 4 elementos tomados 4 a 4 com a permutação de 4 elementos. Espera-se que os grupos utilizem a relação encontrada anteriormente ou utilizem o produto onde cada fator é a possibilidade de preenchimento em cada casa e por fim percebam que o arranjo simples de 4 elementos tomados 4 a 4 é o mesmo que a permutação simples de 4 elementos.

Casos A, B, C e D	Classe 1	Classe 2
Acertaram	8	6
Cometeram algum erro	6	8

Na classe 1, três grupos responderam que no caso A existem 10 possibilidades de linhas, no caso B há 7, no caso C há 5 e no caso D há 4 possibilidades. Esses grupos pensaram que devido os conjuntos serem nomeados por A, B, C e D os elementos do conjunto A poderiam preencher apenas a primeira casa vazia, os elementos do conjunto B poderiam preencher apenas a segunda casa vazia e assim por diante, pois algumas atividades anteriores sugerem isso. Um grupo respondeu que no caso A existem 5.670 possibilidades de linhas telefônicas. Três grupos responderam que não há relação entre o arranjo simples de 4 elementos tomados 4 a 4 e a permutação simples de 4 elementos. Três grupos responderam que há relação, mas dois deles responderam que o arranjo simples de 4 elementos tomados de 4 a 4 e a permutação simples de 4 elementos são iguais a 16 e um grupo respondeu que há 8 permutações entre os algarismos 2, 3, 5 e 8. Na classe 2, dois grupos responderam, assim como os grupos da classe 1, que no caso A existem 10 possibilidades, no caso B há 7, no caso C existem 5 e no caso D há 4. Um grupo respondeu que no caso A existem 518.400 possibilidades de linhas telefônicas, encontrou 5.040 possibilidades no caso B, fazendo 7 !, no caso C existem 120 possibilidades e acertou o caso D respondendo 24 possibilidades. Esse grupo não percebeu, por exemplo, no caso B, que havia 7 maneiras para preencher a primeira casa vazia, após escolhido o algarismo para essa casa, restavam 6 algarismos para preencher a segunda casa vazia, e assim por diante até a quarta casa formando o produto 7 x 6 x 5 x 4 = 840. Um grupo cometeu o mesmo erro do grupo citado anteriormente, mas no caso A respondeu que a quantidade de linhas telefônicas possíveis é dado por 10!. Um grupo escreveu, nos casos B e C, o produto preenchendo apenas três casas vazias, fazendo 7 x 6 x 5 = 210 no caso B e 5 x 4 x 3 = 60 no caso C. Um grupo encontrou na atividade passada que uma das relações entre *n* e *p* com a fração cujo numerador e denominador formados por números fatoriais é que o denominador é formado pela expressão (*n* – *p*) e para encontrar o total de possibilidade em cada caso subtraiu quatro do número de elementos de cada conjunto respondendo que no caso A existem 6 possibilidades, no caso B existem 3 possibilidades, no caso C existe 1 e no caso D não existe nenhuma possibilidade de linha telefônica que pode ser formada. Dois grupos responderam que não há nenhuma relação entre o arranjo simples de 4 elementos tomados de 4 a 4 e a permutação de 4 elementos. Quatro grupos assinalaram que há relação entre eles, mas dois deles não justificaram, um grupo respondeu "as possibilidades vão aumentando" e um grupo respondeu "Sim, a relação é que a soma de todos os casos dá o resultado de 0 a 10".


Escolhendo o prefixo 4035, da cidade de Bragança Paulista, determine o número todas as diferentes linhas telefônicas que podemos formar para esse prefixo (fixado), de forma que os quatro últimos algarismos sejam **distintos**.

4 0 3 5 – ☐ ☐ ☐ ☐

CASO A - Os algarismos a serem utilizados pertencem ao conjunto A ={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9}.

Resposta: 5040

CASO B - Os algarismos a serem utilizados pertencem ao conjunto B ={2, 3, 4, 5, 6, 8, 9}.

Resposta: 840

CASO C - Os algarismos a serem utilizados pertencem ao conjunto C ={1, 5, 6, 7, 9}.

Resposta: 120

CASO D - Os algarismos a serem utilizados pertencem ao conjunto D ={2, 3, 5, 8}.

Resposta: 24

Ilustração 29: Resolução dos casos A, B, C e D por um grupo da classe 2.

No CASO D acima, temos arranjos de 4 elementos tomados 4 a 4, pois as linhas telefônicas diferem uma da outra somente pela ordem dos algarismos. Existe alguma relação entre a quantidade total desses arranjos e a quantidade de permutações de quatro algarismos?

(✓) ***SIM***

(   ) ***NÃO***

No caso de sua resposta ser ***SIM***, escreva, nas linhas abaixo, qual é essa relação.

$n(A) = 4$.
$n(B) = 3$.
$n(C) = 2$
$n(D) = 1$

Pois tinhamos 4 nº para colocar na 5ª casa, e quando escolhiamos 1 sobrava 3 para a 6ª casa, depois 2 para a 3ª casa e 1 para a 8ª casa, multiplicando o nº de elementos que podem ficar em cada casa o total é 24 (4x3x2x1=24)

Ilustração 30: Conclusão de um grupo da classe 2 sobre a relação entre a permutação simples de 4 elementos e o arranjo simples de 4 elementos tomados 4 a 4.

8.5 CONCLUSÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE 4

Observando as resoluções e as discussões geradas durante a aplicação da atividade pude perceber que os alunos compreenderam o conceito de arranjo simples. Embora apenas 2 grupos chegaram a conclusão que a relação entre a quantidade de elementos que podem ser utilizados para preencher as casas vazias (n) e a quantidade de casas a serem preenchidas (p) é dada pela fração $\frac{n!}{(n-p)!}$, porém quando a situação era resolvida analisando a quantidade de elementos que eles poderiam utilizar para preencher cada casa, a grande maioria dos alunos compreendeu o conceito de arranjo simples.

Capítulo 9

ANÁLISE E DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 5

9.1 INTRODUÇÃO

A atividade 5 tem como objetivo responder aos alunos sobre a necessidade da implementação do nono dígito nos números de telefones celulares da região com código de área 11 de uma maneira simples. A ideia é que os alunos utilizem o conhecimento sobre princípio fundamental da contagem adquirido durante as atividades 1 e 2 para verificarem se a quantidade de linhas de telefones móveis passará de 44 milhões para 90 milhões. Esses resultados são apresentados no texto inicial da atividade 5 e foi retirado do site da Agência Nacional de Telecomunicações (ANATEL). A atividade 5 traz também o mapa do Estado de São Paulo com as distribuições dos códigos de área que variam de 11 a 19 e apresenta o nome dos 64 municípios (incluindo a capital), onde os números de telefones celulares sofreram o acréscimo do nono dígito. Um relatório consolidado de tecnologia também é mostrado aos alunos indicando os números de linhas de telefones celulares ativas nessa região nos meses de agosto e setembro de 2012 e o número de linhas ativas por operadora.

É apresentada uma tabela com todos os prefixos para a região e o número de linhas disponíveis para telefones celulares com oito dígitos, que através de cálculos já impressos chega a 42.060.000 de linhas.

Os itens I e II pedem para que os alunos verifiquem se 42.060.000 representam, aproximadamente, 95% de 44.000.000 de linhas e observando o número de linhas ativas na região no mês de setembro de 2012 que é 34.340.813, verifiquem se restam, aproximadamente, 8 milhões de linhas em estoque. Por fim, os alunos devem calcular o total de linhas de telefones celular após a implementação do nono dígito cujo código de acesso de usuário tem o formato 9 – XXXX – XXXX.

A atividade foi aplicada para 13 duplas e 1 trio em cada sala, totalizando 28 grupos, no dia 5/04/2013 para o 2º ano A e 2º ano B. A atividade teve duração de 1 aula de 50 minutos. Nessa atividade foi utilizada a calculadora para realizar os cálculos de porcentagem.

9.2 RESUMO DA ATIVIDADE 5

A atividade 5 começa convidando os alunos a compreenderem a alteração ocorrida com os números de celulares da região 11. Um texto retirado do site da ANATEL, explica quando e onde essa mudança ocorreu. Nessa atividade são apresentados, através de dados retirados do site *www.teleco.com.br*, os cálculos para se aproximar do número de linhas disponíveis com 8 algarismos e a necessidade da expansão do número de linhas de telefonia móvel na região.

O objetivo da atividade 5 é fazer com que os alunos confrontem os cálculos realizados por eles com as informações fornecidas pelo site da ANATEL. O mais importante deles é o cálculo referente à ampliação para 90 milhões de linhas telefônicas, resultado esse que é encontrado utilizando o Princípio Fundamental da Contagem.

9.3 ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS

Nessa atividade, para o cálculo de porcentagem, os alunos utilizarão a calculadora e não são esperados erros.

9.4 ANÁLISE A PRIORI E ANÁLISE A POSTERIORI DA ATIVIDADE 5

Na atividade 5 espera-se que os alunos, após observarem os cálculos apresentados na atividade referente a quantidade de linhas de telefones celulares com 8 dígitos, confrontem os resultados desses cálculos com os números apresentados no texto no início da atividade 5. A primeira questão é sobre porcentagem, onde os alunos devem calcular 95% de 44.000.000 para encontrar o total de linhas de celulares disponíveis para a região com código de área 11 e na segunda questão devem subtrair o total de linhas ativas apresentada na tabela de relatório consolidado de tecnologia no mês de setembro de 2012, do total que é 42.060.000 linha telefônicas, para descobrirem o total de linhas em estoques. Por fim, utilizando o conceito de princípio fundamental da contagem, os alunos precisam calcular o número de linhas telefônicas que haverá com o acréscimo do nono dígito.

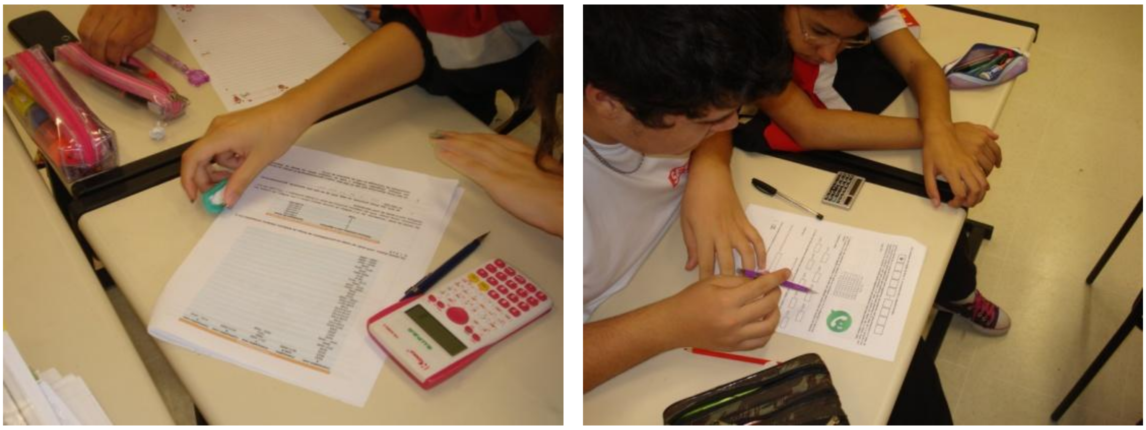


Foto 4: Aplicação da atividade 5

Itens I e II	Classe 1	Classe 2
Acertaram	9	9
Cometeram algum erro	5	5

Nas classes 1 e 2 todos os erros que constam na tabela acima aconteceram no item II. Nesse item pede-se aos alunos que verifiquem, com o uso da calculadora, se das linhas disponíveis (42.060.000) restam aproximadamente 8 milhões de linhas em estoque. O item sugere que os alunos utilizem como número de linhas ativas o valor 34.340.813 que é apresentado na tabela de relatório consolidado de tecnologia. Os alunos devem encontrar o número de linhas em estoque subtraindo o número de linhas ativas (34.340.813) do número de linhas disponíveis (42.060.000), ou seja, 42.060.000 – 34.340.813 = 7.719.187. Dos 10 grupos que erraram esse item 9 deles subtraíram 34.340.813 de 41.800.000 (valor que representa 95% de 44.000.000) chegando ao valor de 7.459.187 e 1 grupo subtraiu 34.340.813 de 44.000.000 chegando ao resultado de 9.659.187 linhas telefônicas em estoque. Pode-se verificar que houve uma dificuldade de interpretação ou foi feita uma leitura superficial do item, pois o enunciado diz que o total de linhas disponíveis é 42.060.000.

Atividade 5

Você deve se lembrar de que no ano de 2012 seu número de celular ganhou um algarismo a mais. Desde então você coloca o algarismo 9 na frente do número do seu celular.

Será que essa mudança foi em todo o país? Por que ocorreu essa mudança? Essas e outras perguntas ficaram na cabeça de muitas pessoas que tiveram, em seus números de celulares, o acréscimo do algarismo 9.

Vamos entender melhor como e porque isso aconteceu.

O texto abaixo, retirado do site da ANATEL, nos ajudará a compreender melhor essa mudança.

Números de telefones móveis da área 11 terão nove dígitos a partir de domingo 27 de Julho de 2012

Os números dos telefones móveis dos 64 municípios da área 11 receberão um dígito a mais a partir de 29 de julho de 2012. Será acrescentado o dígito "9" à esquerda de todos os números atuais, que passarão a contar com o formato 9XXXX-XXXX. A área 11 abrange grande parte do Estado de São Paulo, como a capital e os municípios integrantes de sua região metropolitana. Com a medida, a capacidade de numeração da área 11 aumentará de 44 milhões para 90 milhões de números. Atualmente, há 34,2 milhões de acessos móveis ativos e oito milhões em estoque nas prestadoras. Desta forma, 95% dos números possíveis na área 11 foram atribuídos e 77% estão em uso. O nono dígito não será adicionado aos números utilizados em serviços que utilizam operações tipo despacho, ou seja, conexão direta via rádio. Por um tempo determinado as ligações com 8 dígitos ainda serão completadas, para adaptação das redes e usuários. Gradualmente, haverá interceptações e os usuários receberão mensagens com orientações sobre a nova forma de discagem. Após esse período, as chamadas com 8 dígitos não serão completadas. O nono dígito deve ser acrescentado, no momento da discagem, por todos os usuários de telefone fixo e móvel que ligam para telefones móveis da área 11, independentemente da sua área de origem. Ou seja, quem ligar de outros Estados para celulares da área 11 também deverá marcar os nove dígitos para que a chamada seja completada. O assunto foi tema de entrevista coletiva do gerente de Acompanhamento e Controle das Obrigações de Interconexão da Anatel, Adeilson Evangelista Nascimento, no Escritório Regional da Agência em São Paulo.

Fonte:
http://www.anatel.gov.br/Portal/exibirPortalPaginaEspecialPesquisa.do?acao=&tipoConteudoHtml=1&codNoticia=26182 acessado em :20 de outubro de 2012

Ilustração 31: Texto informativo retirado do site da ANATEL sobre a implementação do 9º dígito nos números de telefones celulares da região com código de área 11

Prefixos organizados				
Começados com 5	Começados com 6	Começados com 7	Começados com 8	Começados com 9
5020	6011-6999	7011-7699	8010-8999	9100 – 9999
5023		7909		
5028		7922		
5030		7950 - 7999		
5037-5040				
5043				
5047 – 5048				
5050				
5057				
5059				
5064				
5075-5076				
5100-5101				
5104				
5106-5109				
5113-5114				
5116-5170				
5172-5179				
5190				
5192-5211				
5214-5324				
5329 – 5500				
5520				
5530				
5540				
5550 – 5552				
5554 – 5559				
5569				
5700 – 5810				
5813				
5815				
5900-5903				
5905				
5910 – 5919				
5930				
5935 – 5937				
5940 – 5969				
5980 – 5999				

Na tabela abaixo, você pode ver todas as possibilidades de linhas de telefones celulares começados em 5, 6, 7, 8 e 9.

Número de possibilidades de linhas de telefones celular na região com DDD 11	
Números iniciados com o algarismo	Quantidade de linhas
5	5 860 000
6	9 890 000
7	7 410 000
8	9 900 000
9	9 000 000
Total	42 060 000

No trecho do texto "*Atualmente, há 34,2 milhões de acessos móveis ativos e oito milhões em estoque nas prestadoras. Desta forma, 95% dos números possíveis na área 11 foram atribuídos e 77% estão em uso.*" Verifique, com a ajuda de uma calculadora:

I. se 95% das linhas possíveis, ou seja, 95% de 44 000 000 representa, aproximadamente, 42 060 000.

44.000.000 x 95 = 4.180.000.000 ÷ 100 = 41.800.000

representa sim, aproximadamente 42.060.000

II. se das linhas disponíveis que são 42 060 000, restam aproximadamente 8 milhões de linhas em estoque. (Sugestão: Verifique o total de celulares ativos na tabela de Relatório consolidado de Tecnologia no mês de setembro de 2012).

42 060 000 − 34.340.813 = 7.719.187

aproximadamente 8 milhões

Ilustração 32: Confrontando informações do texto com os cálculos.

Nos celulares da região de área 11, os números têm o seguinte formato:

A	B	C	D	E	-	F	G	H	I
9					-				

Vamos chamar de A o conjunto formado pelos algarismos que podemos usar para preencher a 1ª casa, de B o conjunto formado pelos algarismos que podemos usar para preencher a 2ª casa, de C o conjunto dos algarismos que podemos usar para preencher a 3ª casa, e assim por diante até a última casa que chamaremos de conjunto I formado pelos algarismos que podemos usar para preencher a última casa.

Logo fica:

$$A = \{9\}$$
$$B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$
$$C = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$
$$D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$
$$E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$
$$F = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$
$$G = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$
$$H = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$
$$I = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

O algarismo zero não pertence ao conjunto B, pois se a primeira casa é o 9 e a segunda é o zero fica **90** e esse é um código de ligação à cobrar e não pode ser utilizado como início de número de telefone celular.

Determine então:

$n(A) = \boxed{1}$ $n(B) = \boxed{9}$ $n(C) = \boxed{10}$ $n(D) = \boxed{10}$

$n(E) = \boxed{10}$ $n(F) = \boxed{10}$ $n(G) = \boxed{10}$ $n(H) = \boxed{10}$ $n(I) = \boxed{10}$

O número de linhas de telefones celulares que podemos formar com nove dígitos, é dado por:

$$n(A \times B \times C \times D \times E \times F \times G \times H \times I).$$

Determine

$n(A \times B \times C \times D \times E \times F \times G \times H \times I) = \boxed{9 \times 10^7 = 90.000.000}$

Esse resultado encontrado é o mesmo que o citado no texto (90 milhões de linhas)?

(X) SIM
( ) NÃO

Ilustração 33: Cálculo para encontrar a capacidade de linhas telefônicas na região após a implementação do 9º dígito realizado por um grupo da classe 1

Verificando a ampliação para 90 milhões de linhas	Classe 1	Classe 2
Acertaram	14	14
Cometeram algum erro	0	0

9.5 CONCLUSÃO DA ANÁLISE DA ATIVIDADE 5

O objetivo dessa atividade é que os alunos utilizem o princípio fundamental da contagem para compreenderem o motivo de adicionar um algarismo nas linhas telefônicas da região de código de área 11. De acordo com as análises da atividade 5 pode-se concluir que o objetivo da mesma foi atingido, pois os alunos já haviam percebido, nas atividades anteriores, que o produto entre a quantidade de algarismos que podem ser usados para preencher cada casa vazia resulta no total de linhas telefônicas que podem ser formadas. Embora o resultado do produto 9 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 seja simples de ser resolvido, o uso da calculadora fez com que não houvessem erros de cálculos.

Capítulo 10

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa seção gostaria de fazer uma avaliação da metodologia utilizada para desenvolver os conteúdos de análise combinatória e apresentar algumas opiniões dos alunos submetidos à aplicação da sequência didática com o intuito de observar quais foram os pontos mais relevantes para eles, o que ficou dessa atividade. A intenção é saber se nossos objetivos traçados no início foram alcançados.

10.1 AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PELOS ALUNOS

Foi solicitado aos alunos que ao final da atividade 5 escrevessem de modo informal sobre o que eles aprenderam com a sequência didática aplicada. Não foi seguido nenhum roteiro de perguntas para que os alunos fossem respondendo, ficando em aberto para responderem com maior liberdade.

Muitos alunos julgaram as atividades fáceis de serem realizadas, mas relataram que ficaram muito preocupados, pois as respostas eram muito óbvias e que poderiam ser "pegadinhas". Outros escreveram em seus relatos que perceberam que a sequência didática apresentava crescente grau de dificuldade, e que para superarem tais dificuldades utilizaram os conceitos matemáticos que aprenderam nas primeiras atividades dessa sequência.

Alguns alunos relataram que descobriram um modo mais eficiente de encontrar o total de possibilidades, onde bastava multiplicar a quantidade de opções de escolha em cada situação. Falando em possibilidades, vários alunos, durante o relato, escreveram no lugar de possibilidades a palavra probabilidade. Como tal conteúdo ainda não foi desenvolvido com eles no Ensino Médio, os mesmos imaginam que probabilidade e possibilidades sejam sinônimos.

Em diversos relatos os alunos citam a frase "tivemos que utilizar nosso próprio raciocínio para realizar as atividades...". Eles perceberam que a atividade buscava a autonomia deles para a resolução das situações-problemas. O recurso mais eficiente para eles disponível no momento era a discussão com os integrantes do grupo, ficando nítida durante a aplicação a preocupação de cada um na argumentação, de modo que o outro entendesse seu raciocínio e fosse convencido de que seu pensamento era mais coerente. Alguns alunos escreveram sobre as discussões geradas e que elas contribuíram para o aprendizado deles.

A grande maioria dos alunos citou que foi interessante saber o motivo que levou a implementação do nono dígito nos números de telefones celulares, pois simplesmente tinham percebido a mudança, mas não sabiam que era para ampliar o número de linhas de celulares. Escreveram também que a matemática envolvida para descobrir a quantidade de linhas de telefonia móvel após a implementação do nono dígito era muito simples.

Alguns alunos escreveram que embora as atividades fossem interessantes, eram muito cansativas e em determinados momentos apareciam questões repetitivas e confusas.

10.2 AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PELO PROFESSOR

Os alunos quando submetidos a uma metodologia de ensino diferente da convencional ficam inseguros necessitando perguntar ao professor se seus raciocínios estão corretos.

Quando estudamos as teorias das situações didática de Brousseau, mais precisamente sobre situações adidáticas, vemos que os alunos se sentiram “provocados” com as situações-problema presentes na sequência didática e isso fez com que eles ficassem mais motivados para realizarem as atividades. Era nítida a concentração dos alunos e o envolvimento que eles tiveram com as atividades. Os alunos, durante as atividades, começaram a se preocupar mais com a leitura das situações para que não houvesse interpretações equivocadas. Esses pontos citados foram determinantes para o bom desenvolvimento da aplicação das atividades.

No inicio da aplicação os alunos estavam inseguros para realizarem esse tipo de atividade, pois suas resoluções não tinham a aprovação ou reprovação do professor. Com o decorrer da aplicação eles foram percebendo que o professor iria intervir o mínimo possível e que a dinâmica da aula estava focada na autonomia deles. Gradativamente as perguntas feitas ao professor iam diminuindo e as discussões entre os integrantes dos grupos iam aumentado.

É claro que, embora os alunos começassem a ser mais autônomos, as dúvidas ainda persistiam o que mostra outro ponto positivo da metodologia utilizada, pois eu conseguia realizar uma avaliação contínua identificando com maior precisão as dificuldades dos grupos, que eram desde a interpretação da questão até conjecturas erradas. Essas dificuldades foram percebidas também quando fiz a análise qualitativa dos erros.

Os pontos positivos que posso destacar da metodologia incluem o envolvimento da sala de aula com as atividades, as discussões e o aperfeiçoamento das argumentações dos alunos, a autonomia criadas por eles, é criado um espaço que facilita detectar as dificuldades dos alunos e fazer as intervenções imediatamente.

Espero com esse trabalho deixar aos colegas professores um material sobre análise combinatória que me auxiliou muito no desenvolvimento desse conteúdo. Posso concluir que, embora existissem alguns alunos que não conseguiram realizar com sucesso todas as atividades da sequência didática, os objetivos traçados no início deste trabalho relacionados à construção dos conceitos de princípio fundamental da contagem, permutação simples, arranjo simples e número fatorial foram atingidos.

Referências

ALMEIDA, A. L. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática: um estudo com 2º ano do Ensino Médio**. 23 de agosto de 2010. 2010. 166 f. Dissertação (Mestrado). Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, 2010.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007. 218 p.

CASTALDI, M. J. Z. D. **Matemática: Ensino Médio 2º ano/ SESI-SP**. 1ª ed. São Paulo: Ed. SESI-SP, 2012. 208 p. (Movimento do aprender).

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e aplicações. volume 2**. 1ª ed. São Paulo: Ed. Ática, 2010. 384 p.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5ª Ed. Campinas: Ed. Unicamp, 2011. 848 p.

IEZZI, G. et al. **Matemática: Ciência e aplicações**, 2. 4ª ed. São Paulo: Ed. Atual, 2006. 464 p.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio – volume 2**. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Ed. SBM, 2006. 308 p. (Coleção do Professor de Matemática; 14).

MACHADO, S. D. A et al. **Educação matemática: uma (nova) introdução**. 3 ed. São Paulo: Ed. EDUC, 2012. 254 p. (série trilhas).

OLIVEIRA, K. I. M; FERNÁNDEZ, A. J. C. **Iniciação à Matemática: Um curso com problemas e soluções**. Rio de Janeiro: Ed. SBM, 2010. 283 p. (Coleção Olimpíadas de Matemática; 4).

PINHEIRO, C. A. M. **O ensino de análise combinatória a partir de situações-problema**. 2008. 164 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação). Universidade Federal do Pará, Belém, PA, 2008.

ROONEY, Anne. **A História da matemática – Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito.** São Paulo: Ed. M. Books do Brasil Editora Ltda., 2012. 216 p.

ROSSI, P. R. S. **Logaritmos no ensino médio: Construindo uma aprendizagem significativa através de uma sequência didática**. 2010. 219 f. Dissertação (Mestrado). Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2010.

VAZQUEZ, C. M. R. **O ensino de análise combinatória no Ensino Médio por meio de atividades orientadoras em uma escola estadual do interior paulista**. 2011. 88 f. Dissertação (Mestrado). Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2011.

_______. Orientações educacionais complementares aos p**arâmetros curriculares nacionais do ensino médio (PCN+)**. Brasília, 2007. 144 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 01 abr.2013.

_______. Eureka nas entrelinhas: Manuscrito milenar revela que Arquimedes fazia análise combinatória há 2.200 anos. Disponível em: < http://www.jornaldaciencia.org.br/Detalhe.jsp?id=15162>. Acesso em: 05/05/2013.

APÊNDICE

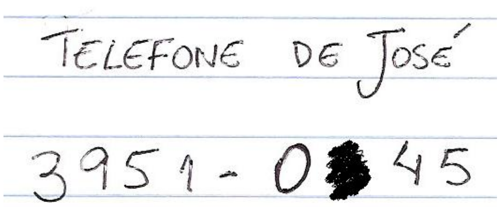
Centro Educacional SESI 012 – Bragança Paulista

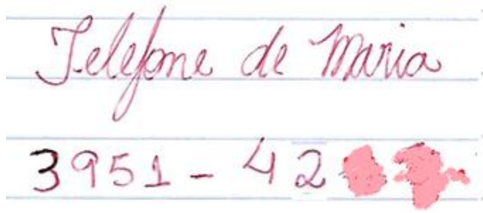
Nomes:____Nº___, ___ 2º Ano - ___EM

Data: ____/____/____ Nome do Professor:____

Atividade 1

Maria e José são amigos que não se viam há muitos anos. Para manter contato, Maria e José anotaram o número de celular um do outro. Na hora de Maria ligar para José ela percebeu que havia um algarismo borrado, sem a menor chance de identificar o algarismo. E José percebeu que no número de Maria haviam dois algarismos borrados, também sem a chance de identificá-los. Seguem abaixo as anotações feitas por Maria e José:





a) Nos quadrados abaixo está escrito apenas um dos possíveis números do celular de José (3951 - 0045). Vamos completar os demais quadrados para encontrar as outras possibilidades para o número do telefone dele:

3	9	5	1	—	0	0	4	5
3	9	5	1	—	0		4	5
3	9	5	1	—	0		4	5
3	9	5	1	—	0		4	5
3	9	5	1	—	0		4	5
3	9	5	1	—	0		4	5

3	9	5	1	—	0		4	5
3	9	5	1	—	0		4	5
3	9	5	1	—	0		4	5
3	9	5	1	—	0		4	5
3	9	5	1	—	0		4	5
3	9	5	1	—	0		4	5

Quantos números diferentes de telefone você encontrou?

b) Vamos encontrar, assim como feito para o telefone de José, os possíveis números de telefone da Maria.

Quantos números diferentes existem, tal que o último algarismo seja o zero? [ ]

| 3 | 9 | 5 | 1 | – | 4 | 2 | | 0 |

____

____

____

____

Quantos números diferentes existem, tal que o último algarismo seja o 1? [ ]

| 3 | 9 | 5 | 1 | – | 4 | 2 | | 1 |

____

____

____

____

Quantos números diferentes existem, tal que o último algarismo seja o 2? [ ]

| 3 | 9 | 5 | 1 | – | 4 | 2 | | 2 |

____

____

____

____

Quantos números diferentes existem, tal que o último algarismo seja o 3? [ ]

| 3 | 9 | 5 | 1 | – | 4 | 2 | | 3 |

____

____

____

____

Quantos números diferentes existem, tal que o último algarismo seja o 4? $\boxed{}$

3	9	5	1	–	4	2		4

____

____

____

____

Quantos números de telefones diferentes podemos encontrar, tal que o último algarismo seja 5, 6, 7, 8, ou 9 ?

3	9	5	1	–	4	2		5
3	9	5	1	–	4	2		5
3	9	5	1	–	4	2		5
3	9	5	1	–	4	2		5
3	9	5	1	–	4	2		5
3	9	5	1	–	4	2		5
3	9	5	1	–	4	2		5
3	9	5	1	–	4	2		5
3	9	5	1	–	4	2		5
3	9	5	1	–	4	2		5
3	9	5	1	–	4	2		5
3	9	5	1	–	4	2		5

Resposta: $\boxed{}$

3	9	5	1	–	4	2		6
3	9	5	1	–	4	2		6
3	9	5	1	–	4	2		6
3	9	5	1	–	4	2		6
3	9	5	1	–	4	2		6
3	9	5	1	–	4	2		6
3	9	5	1	–	4	2		6
3	9	5	1	–	4	2		6
3	9	5	1	–	4	2		6
3	9	5	1	–	4	2		6
3	9	5	1	–	4	2		6
3	9	5	1	–	4	2		6

Resposta: $\boxed{}$

3	9	5	1	–	4	2		7
3	9	5	1	–	4	2		7
3	9	5	1	–	4	2		7
3	9	5	1	–	4	2		7
3	9	5	1	–	4	2		7
3	9	5	1	–	4	2		7
3	9	5	1	–	4	2		7
3	9	5	1	–	4	2		7
3	9	5	1	–	4	2		7
3	9	5	1	–	4	2		7
3	9	5	1	–	4	2		7
3	9	5	1	–	4	2		7

Resposta: $\boxed{}$

3	9	5	1	–	4	2		8
3	9	5	1	–	4	2		8
3	9	5	1	–	4	2		8
3	9	5	1	–	4	2		8
3	9	5	1	–	4	2		8
3	9	5	1	–	4	2		8
3	9	5	1	–	4	2		8
3	9	5	1	–	4	2		8
3	9	5	1	–	4	2		8
3	9	5	1	–	4	2		8
3	9	5	1	–	4	2		8
3	9	5	1	–	4	2		8

Resposta: $\boxed{}$

3	9	5	1	–	4	2		9
3	9	5	1	–	4	2		9
3	9	5	1	–	4	2		9
3	9	5	1	–	4	2		9
3	9	5	1	–	4	2		9
3	9	5	1	–	4	2		9
3	9	5	1	–	4	2		9
3	9	5	1	–	4	2		9
3	9	5	1	–	4	2		9
3	9	5	1	–	4	2		9
3	9	5	1	–	4	2		9
3	9	5	1	–	4	2		9

Resposta: $\boxed{}$

Quantos números diferentes de telefone você encontrou no total para o número de Maria? $\boxed{}$

Vamos chamar de $\boldsymbol{A}$ o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 7ª casa do número do telefone de Maria e de $\boldsymbol{n(A)}$ o número de elementos do conjunto $\boldsymbol{A}$. Da mesma forma, vamos chamar de $\boldsymbol{B}$ o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 8ª casa e de $\boldsymbol{n(B)}$ o número de elementos do conjunto $\boldsymbol{B}$.

Determine os conjuntos A e B.

A = { }

B = { }

Quais são os valores de $\boldsymbol{n(A)}$ **e** $\boldsymbol{n(B)}$?

$\boldsymbol{n(A)} =$ $\boxed{}$ $\boldsymbol{n(B)} =$ $\boxed{}$

A tabela abaixo apresenta todas as possibilidades para as duas últimas casas do telefone de Maria que você completou anteriormente. Essa tabela representa $A \text{ x } B$ (lê-se: A cartesiano B), ou seja, o conjunto formado por todos os pares ordenados (x,y) tal que x é elemento de A e y é elemento de B.

Assim, $n(A \text{ x } B)$ é o número de pares ordenados de $A \text{ x } B$.

		Opções de algarismos para a 8ª casa (Conjunto B)									
Opções de algarismos para a 7ª casa (Conjunto A)		**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,6)	(0,7)	(0,8)	(0,9)
	1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)	(1,8)	(1,9)
	2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)	(2,8)	(2,9)
	3	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,7)	(3,8)	(3,9)
	4	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(4,7)	(4,8)	(4,9)
	5	(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	(5,7)	(5,8)	(5,9)
	6	(6,0)	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	(6,7)	(6,8)	(6,9)
	7	(7,0)	(7,1)	(7,2)	(7,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	(7,7)	(7,8)	(7,9)
	8	(8,0)	(8,1)	(8,2)	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,6)	(8,7)	(8,8)	(8,9)
	9	(9,0)	(9,1)	(9,2)	(9,3)	(9,4)	(9,5)	(9,6)	(9,7)	(9,8)	(9,9)

Contando-se os números de pares ordenados da tabela acima obtemos $n(A \text{ x } B) =$ $\boxed{}$

Existe alguma relação entre $n(A \text{ x } B)$ com $n(A)$ e $n(B)$? ***(   ) SIM   (   ) NÃO***

No caso de você ter respondido ***SIM***, escreva, em poucas palavras, nas linha abaixo, qual é essa relação.

____

____

____

c) Maria se lembra de que o algarismo borrado da anotação do número do telefone de José é par. Abaixo está escrito um provável número do telefone de José que é o número 3951 - 0045. Quais seriam as outras possibilidades para o telefone dele?

3	9	5	1	–	0	0	4	5
3	9	5	1	–	0		4	5
3	9	5	1	–	0		4	5
3	9	5	1	–	0		4	5

3	9	5	1	–	0		4	5
3	9	5	1	–	0		4	5
3	9	5	1	–	0		4	5
3	9	5	1	–	0		4	5

Quantos números diferentes de telefone você encontrou? $\boxed{}$

Vamos chamar de $\boldsymbol{A}$ o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 6ª casa do número do telefone de José e de $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A})$ o número de elementos do conjunto $\boldsymbol{A}$. Escreva o conjunto $\boldsymbol{A}$ e determine $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A})$.

$\boldsymbol{A} = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$ $\qquad n(A) = \boxed{}$

O número de elementos de A, ou seja, $n(A)$ é a mesma quantidade de números diferentes de telefones que você encontrou? ***( ) SIM*** ***( ) NÃO***

d) José se lembra de que os algarismos dos números borrados de Maria são ímpares. Abaixo está escrito apenas uma possibilidade para o número do telefone dela. Vamos encontrar todas as outras possibilidades?

3	9	5	1	–	4	2	1	1
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		

3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		
3	9	5	1	–	4	2		

Quantos números diferentes de telefones você encontrou? $\boxed{}$

Vamos chamar de ***A*** o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 7ª casa do número do telefone de Maria e de $\boldsymbol{n(A)}$ o número de elementos desse conjunto. Vamos chamar de ***B*** o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 8ª casa e $\boldsymbol{n(B)}$ o número de elementos do conjunto ***B***.
Descreva os conjuntos ***A***, ***B*** e determine $\boldsymbol{n(A)\ e\ n(B)}$.

A = { } $n(A) =$ $\boxed{}$

B = { } $n(B) =$ $\boxed{}$

Preencha a tabela de dupla entrada abaixo para encontrar $\boldsymbol{A \times B}$, sabendo agora que as duas últimas casas do telefone de Maria são ímpares.

	Opções de algarismos para a 8ª casa (Conjunto B)					
Opções de algarismos para a 7ª casa (Conjunto A)						

Temos que $n(A \times B) =$ $\boxed{}$

Existe alguma relação entre $n(A \times B)$ com o número de elementos de cada conjunto, $n(A) e\ n(B)$?

( ) SIM   ( ) NÃO

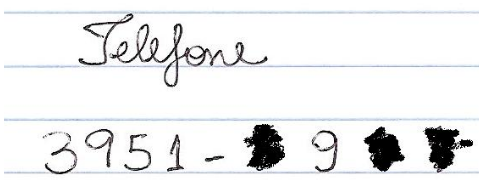
No caso de sua resposta ser ***SIM,*** escreva, nas linhas abaixo, qual é essa relação.

____

____

____

e) Vamos analisar agora outra situação. Nesse caso temos três casas de um telefone que estão ilegíveis. Sabemos que a 5ª casa pode ser preenchida pelos algarismos 1, 2 e 3, sabemos também que a 7ª casa pode ser preenchida pelos algarismos 4 e 5. E por fim, a última casa pode ser preenchida pelos algarismos 6, 7, 8 e 9.



Nos retângulos abaixo aparecem duas possibilidades para o número do telefone. Complete os demais retângulos com as possibilidades restantes dentro das condições estabelecidas para cada dígito borrado.

3951 - 1946	3951 - 1947	3951 -	3951 -	3951 -
3951 -	3951 -	3951 -	3951 -	3951 -
3951 -	3951 -	3951 -	3951 -	3951 -
3951 -	3951 -	3951 -	3951 -	3951 -
3951 -	3951 -	3951 -	3951 -	3951 -
3951 -	3951 -	3951 -	3951 -	3951 -

Quantos números diferentes de telefones você encontrou? $\boxed{}$

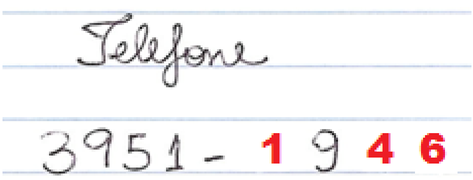
Dentro das condições estabelecidas, vamos chamar de ***A*** o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 5ª casa e de $\boldsymbol{n(A)}$ o número de elementos desse conjunto. Vamos chamar de ***B*** o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 7ª casa e $\boldsymbol{n(B)}$ o número de elementos do conjunto ***B***. E por fim, vamos chamar de ***C*** o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 8ª casa e $\boldsymbol{n(C)}$ o número de elementos do conjunto ***C.*** Determine os conjuntos ***A***, ***B***, ***C*** e o número de elementos de cada um deles.

$\boldsymbol{A} = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ **e** $\boldsymbol{n(A)} = \boxed{}$

$\boldsymbol{B} = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ **e** $\boldsymbol{n(B)} = \boxed{}$

$\boldsymbol{C} = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ **e** $\boldsymbol{n(C)} = \boxed{}$

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ é o conjunto formado por todas as ternas ordenadas $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, tal que $\boldsymbol{x}$ é elemento de $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{y}$ é elemento de $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{z}$ é elemento de $\boldsymbol{C}$. Por exemplo, a terna ordenada $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{6})$ é uma solução para o telefone que fica da seguinte maneira:



Encontre todas as ternas ordenadas de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$.

(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)
(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)
(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)
(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)
(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)	(, ,)

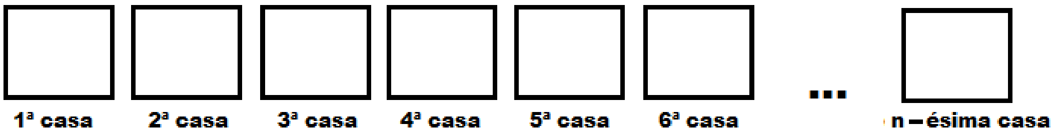
$\boldsymbol{n(A \times B \times C)} = \boxed{}$

Existe alguma relação entre o número de elementos de cada conjunto, ou seja, $\boldsymbol{n(A), n(B)}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{n(C)}$, e o número de linhas de telefones que você encontrou que é representado por $n(A \text{ x } B \text{ x } C)$? ***(   ) SIM*** ***(   ) NÃO***

No caso de sua resposta ter sido ***SIM***, escreva, nas linhas abaixo, qual é essa relação.

Vamos então pensar no seguinte caso:

Imagine um número de telefone com ***n*** casas, como mostra a figura abaixo, tal que os algarismos que podem ser usados para preencher a 1ª casa pertencem ao conjunto $\boldsymbol{A_1}$ $(\boldsymbol{n}\text{ã}\boldsymbol{o}\ \boldsymbol{vazio})$ e que tem $\boldsymbol{a_1}$ elementos, os algarismos que podem ser usados para preencher a 2ª casa pertencem ao conjunto $\boldsymbol{A_2}$ $(\boldsymbol{n}\text{ã}\boldsymbol{o}\ \boldsymbol{vazio})$ e que tem $\boldsymbol{a_2}$ elementos, os algarismos que podem ser usados para preencher a 3ª casa pertencem ao conjunto $\boldsymbol{A_3}$ $(\boldsymbol{n}\text{ã}\boldsymbol{o}\ \boldsymbol{vazio})$ e que tem $\boldsymbol{a_3}$ elementos, e assim por diante até os algarismos que podem ser usados para preencher a n-ésima casa que pertencem ao conjunto $\boldsymbol{A_n}$ $(\boldsymbol{n}\text{ã}\boldsymbol{o}\ \boldsymbol{vazio})$ e que tem $\boldsymbol{a_n}$ elementos.



Sabemos que

$n(\boldsymbol{A_1}) = \boldsymbol{a_1}$ (número de elementos de $\boldsymbol{A_1}$)
$n(\boldsymbol{A_2}) = \boldsymbol{a_2}$ (número de elementos de $\boldsymbol{A_2}$)
$n(\boldsymbol{A_3}) = \boldsymbol{a_3}$ (número de elementos de $\boldsymbol{A_3}$)
.
.
.
$n(\boldsymbol{A_n}) = \boldsymbol{a_n}$ (número de elementos de $\boldsymbol{A_n}$)

O número total de telefones diferentes que podemos formar nessa situação é dado por:

$$n(A_1 \text{x } A_2 \text{x } A_3 \text{x } \dots \text{x } A_n).$$

Existe alguma relação entre $n(A_1 \text{x } A_2 \text{x } A_3 \text{x } \dots \text{x } A_n)$ com $n(A_1), n(A_2), \dots, n(A_n)$? ***(   ) SIM*** ***(   ) NÃO***

No caso de sua resposta ser ***SIM,*** escreva, nas linhas abaixo, qual é essa relação.

Atividade 2

Na cidade de Bragança Paulista, interior de São Paulo, situada a 88 km da capital, os prefixos de telefones residenciais e comerciais são: 2247, 2473, 3404, 4031, 4032, 4033, 4034, 4035, 4481, 4603 e 4892.

a) Nesse item vamos analisar quantos números de telefones podemos formar utilizando apenas os prefixos 4031, 4032, 4033, 4034 e 4035.

4	0	3		–				

Vamos chamar de **A** o conjunto dos algarismos que podem ser usados para preencher a 4ª casa, de **B** o conjunto de algarismos que podem ser usados para preencher a 5ª casa, de **C** o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 6ª casa, de **D** o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher 7ª casa e por fim, de **E** o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a 8ª casa.

$A = \{ \qquad \}$ e $n(A) = \boxed{}$

$B = \{ \qquad \}$ e $n(B) = \boxed{}$

$C = \{ \qquad \}$ e $n(C) = \boxed{}$

$D = \{ \qquad \}$ e $n(D) = \boxed{}$

$E = \{ \qquad \}$ e $n(E) = \boxed{}$

A quantidade de linhas telefônicas é representada por $n(A \text{ x } B \text{ x } C \text{ x } D \text{ x } E)$. Então,

$$n(A \text{ x } B \text{ x } C \text{ x } D \text{ x } E) = \boxed{}$$

Quantas linhas telefônicas diferentes podem ser formadas? $\boxed{}$

Das linhas telefônicas que você encontrou acima, exclua as que têm os quatro últimos algarismos iguais à zero. Quantos números de telefones há nesse caso?

Resposta:

(descreva nas linhas abaixo como você pensou!)

Quantos números de telefones diferentes podemos formar **para cada** prefixo, excluindo a possibilidade dos quatro últimos dígitos serem zero?

Resposta: (descreva nas linhas abaixo como você pensou!)

b) Agora que você já sabe quantas linhas telefônicas há para cada prefixo, determine quantas linhas de telefone fixo podem ser formadas na cidade de Bragança Paulista de forma que não existam números de telefones com os quatro últimos dígitos com o algarismo zero.

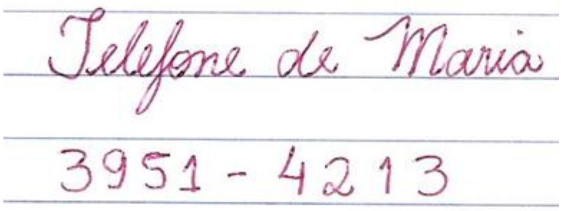
Resposta: (descreva nas linhas abaixo como você pensou!)

Nomes:____Nº___, ___ 2º Ano - ___EM

Data: ____/____/____ Nome do Professor:____

Atividade 3

Vamos supor que o número do telefone de Maria, do exercício 1, seja:



O Código de Acesso de Usuário é formado por

$$[N_8N_7N_6N_5 + N_4N_3N_2N_1].$$

As quatro primeiras casas, $N_8N_7N_6N_5$, representam o prefixo e as quatro últimas, $N_4N_3N_2N_1$, representam a linha telefônica da pessoa.

No caso do número de Maria, temos:

N_8	N_7	N_6	N_5		N_4	N_3	N_2	N_1
3	9	5	1		4	2	1	3

Daqui para frente pretendemos estudar um outro tópico de contagem.

Vamos utilizar, para nosso estudo, apenas as quatro últimas casas do telefone de Maria (4213), ou seja, $N_4N_3N_2N_1$, números esses que definem a linha telefônica, pois os quatro primeiros constituem o prefixo.

Utilizando os cartões distribuidos pelo professor com os algarismos 1, 2, 3 e 4 nas cores vermelha e azul, e o tabuleiro vamos solucionar os seguintes problemas:

Com $N_4 = 4$, $N_3 = 2$ e $N_2 = 1$, como mostra a figura abaixo, de quantas maneiras distintas podemos organizar $N_4N_3N_2N_1$ completando N_1 com o algarismo 3 ao lado?

N_4	N_3	N_2	N_1
4	2	1	

3

Resposta:

Com $N_4 = 4$ e $N_3 = 2$, como mostra a figura abaixo, de quantas maneiras distintas podemos organizar $N_4N_3N_2N_1$ completando N_2 e N_1 com os algarismos 1 e 3 ao lado?

N_4	N_3	N_2	N_1
4	2		

1 3

Resposta:

Com $N_4 = 4$, como mostra a figura abaixo, de quantas maneiras distintas podemos organizar $N_4N_3N_2N_1$ completando N_3, N_2 e N_1 com os algarismos 1, 2 e 3 ao lado?

N_4	N_3	N_2	N_1
4			

1 2 3

Resposta:

Problema Proposto

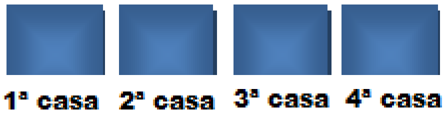
Com as quatro casas vazias, como mostra a figura abaixo, de quantas maneiras distintas podemos formar $N_4N_3N_2N_1$ completando-os com os algarismos 1, 2, 3 e 4 ao lado?

1 2 3 4

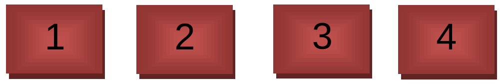
Resposta:

Vamos analisar o Problema Proposto acima.

Para atingir esse objetivo vamos utilizar os cartões distribuídos pelo professor.



Você deve preenchê-las com os algarismos distintos abaixo.



Vamos chamar de $\boldsymbol{A}$ o conjunto formado pelos algarismos que podemos usar para preencher a 1ª casa. Uma vez escolhido o algarismo da 1ª casa, vamos chamar de $\boldsymbol{B}$ o conjunto formado pelos algarismos restantes que podemos usar para preencher a 2ª casa. Uma vez escolhido o algarismo da 2ª casa, vamos chamar de $\boldsymbol{C}$ o conjunto formado pelos algarismos restantes que podemos usar para preencher a 3ª casa. E por fim, escolhido o algarismo da 3ª casa vamos chamar de $\boldsymbol{D}$ o conjunto formado pelo algarismo restante que podemos usar para preencher a 4ª casa.

De acordo com as informações acima, determine o conjunto A e $n(A)$.

A = {   } $n(A) = \boxed{}$

O conjunto B depende do algarismo que escolhemos para a 1ª casa, por exemplo, se escolhermos o algarismo 3 para a primeira casa, o conjunto B será B = {1, 2, 4}. Quais são as outras maneiras que podemos escrever o conjunto B?

$B = \{ \qquad\qquad \}$ $B = \{ \qquad\qquad \}$

$B = \{ \qquad\qquad \}$ $B = \{ \qquad\qquad \}$

$B = \{ \qquad\qquad \}$ $B = \{ \qquad\qquad \}$

Em qualquer situação, podemos afirmar que $n(B) = \boxed{}$

O conjunto C depende dos algarismos que escolhemos para a 1ª casa e para a 2ª casa, por exemplo, se escolhermos o algarismo 2 para a primeira casa e o algarismo 4 para a segunda casa temos que o conjunto C = {1, 3}

Quais são as outras maneiras que podemos escolher o conjunto C?

$C = \{ \qquad\qquad \}$ $C = \{ \qquad\qquad \}$

$C = \{ \qquad\qquad \}$ $C = \{ \qquad\qquad \}$

$C = \{ \qquad\qquad \}$ $C = \{ \qquad\qquad \}$

Em qualquer situação, podemos afirmar que $n(C) = \boxed{}$

O conjunto D depende dos algarismos que escolhemos para a 1ª casa, para a 2ª casa e para a 3ª casa, por exemplo, se escolhermos o algarismo 4 para a primeira casa, o algarismo 1 para a segunda casa e o algarismo 3 para a terceira casa temos que o conjunto $D = \{2\}$.

Quais são as outras maneiras que podemos escolher o conjunto D?

$D = \{ \qquad\qquad \}$ $\qquad D = \{ \qquad\qquad \}$

$D = \{ \qquad\qquad \}$ $\qquad D = \{ \qquad\qquad \}$

$D = \{ \qquad\qquad \}$ $\qquad D = \{ \qquad\qquad \}$

Em qualquer situação, podemos afirmar que $n(D) = \boxed{\qquad}$

Temos que $n(A \text{ x } B \text{ x } C \text{ x } D) = \boxed{\qquad\qquad}$

Existe alguma relação entre o número de maneiras distintas que você encontrou no Problema Proposto acima e os $n(A), n(B), n(C)$ e $n(D)$? ***( ) SIM*** ***( )NÃO***

No caso de sua resposta ser sim, escreva, nas linhas abaixo, qual é essa relação.

____

____

____

Para simplificar a resposta você poderia ter escrito o algarismo 4 seguido do ponto de exclamação,

$\mathbf{4}\,!$ (lê-se: “quatro fatorial”).

Fatorial de um número inteiro positivo ***n*** (notação: ***n!***) representa um produto definido da seguinte maneira:

$$n! = n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2).\ \ldots\ .3\,.2\,.1$$

Por exemplo:

5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120

8! = 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 40 320

Cada uma dessas linhas telefônicas encontradas no ***Problema Proposto*** é uma forma de ordenarmos os algarismos 1, 2, 3 e 4, sem repetições, nas posições $\boldsymbol{N_4N_3N_2N_1}$. Observe que a ordem como colocamos os algarismos forma uma linha telefônica diferente, por exemplo, as linhas **4231** e **1324** são diferentes. No caso em estudo, chamamos cada uma dessas ordenações de uma **<u>permutação</u>** de **4** elementos. A quantidade total de todas as permutações de 4 elementos é representada por $\boldsymbol{P_4 = 4}!$.

Seja $\boldsymbol{A}$ um conjunto constituído de $\boldsymbol{n}$ elementos distintos e não nulos. Qualquer número natural constituído de exatamente $\boldsymbol{n}$ algarismos retirados do conjunto $\boldsymbol{A}$ é chamado de permutação de $\boldsymbol{A}$.

A quantidade de números distintos que podemos formar com esses $\boldsymbol{n}$ algarismos e sem repetição é igual a $\boldsymbol{P_n} \coloneqq \boldsymbol{n}!$.

Centro Educacional SESI 012 – Bragança Paulista

Nomes:____Nº___, ___ 2º Ano - ___EM

Data: ____/____/____ Nome do Professor:____

Atividade 4

O que acontece, com muita frequência, entre as pessoas que tentam guardar o número de telefone de cabeça é esquecerem-se da ordem dos algarismos ou mesmo ficar na dúvida se um determinado algarismo aparece no número do telefone ou não.

Na correria do nosso dia-a-dia, quem nunca tentou registrar um número de telefone de cabeça, mas depois, na hora de passar para a agenda do celular ou mesmo em um papel, se pergunta: "*qual era mesmo a ordem dos números?*", "*o último algarismo era 3 ou 5?*".

São nessas horas que acontecem as "*ligações por engano*" que, dependendo do humor de quem está do outro lado da linha, não são nada boas.

Iremos analisar agora duas situações.

Situação 1

Uma pessoa tentou memorizar um número de celular, como mostra a figura abaixo, mas está com dúvidas quanto aos dois últimos algarismos. Ele está em dúvida se eram os algarismos 3, 4, 6 ou 8 que apareciam nas duas últimas casas, mas se lembra que os dois últimos algarismos eram distintos, ou seja, na sétima e na oitava casa os algarismos não eram iguais.

9	4	5	6	–	7	5	?	?

Nossa intenção não é descobrir o número esquecido, mas sim verificar quantas linhas telefônicas podem ser formadas com os algarismos 3, 4, 6 e 8 preenchendo, sem repetição, apenas as duas últimas casas.

Quantas linhas telefônicas podem ser formadas tal que o último algarismo seja o 3?

9	4	5	6	–	7	5		3
9	4	5	6	–	7	5		3
9	4	5	6	–	7	5		3
9	4	5	6	–	7	5		3
9	4	5	6	–	7	5		3

Resposta: ________

Quantas linhas telefônicas podem ser formadas tal que o último algarismo seja o 4?

9	4	5	6	–	7	5		4
9	4	5	6	–	7	5		4
9	4	5	6	–	7	5		4
9	4	5	6	–	7	5		4
9	4	5	6	–	7	5		4

Resposta:

Quantas linhas telefônicas podem ser formadas tal que o último algarismo seja o 6?

9	4	5	6	–	7	5		6
9	4	5	6	–	7	5		6
9	4	5	6	–	7	5		6
9	4	5	6	–	7	5		6
9	4	5	6	–	7	5		6

Resposta:

Quantas linhas telefônicas podem ser formadas tal que o último algarismo seja o 8?

9	4	5	6	–	7	5		8
9	4	5	6	–	7	5		8
9	4	5	6	–	7	5		8
9	4	5	6	–	7	5		8
9	4	5	6	–	7	5		8

Resposta:

Quantas linhas telefônicas diferentes você encontrou no total? Resposta:

Analisando a mesma situação, vamos chamar de $\boldsymbol{A}$ o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a sétima casa e de $\boldsymbol{n(A)}$ o número de elementos desse conjunto. Uma vez escolhido um algarismo para a sétima casa, vamos chamar de $\boldsymbol{B}$ o conjunto formado pelos algarismos RESTANTES que podem ser usados para preencher a oitava casa e de $\boldsymbol{n(B)}$ o número de elementos desse conjunto.

Determine o conjunto $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{n(A)}$.

$A = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ e $n(A) =$

O conjunto $\boldsymbol{B}$ depende do algarismo que você escolheu na sétima casa, por exemplo, caso você tenha escolhido para a sétima casa o algarismo 8, então o conjunto $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{3}, \boldsymbol{4}, \boldsymbol{6}\}$

Quais são as outras possibilidades para o conjunto $\boldsymbol{B}$?

$B = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ $\qquad\qquad$ $B = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

$B = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ $\qquad\qquad$ $B = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

$B = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

Em qualquer situação, podemos dizer que $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{B}) = \boxed{\qquad}$

Existe alguma relação entre o número de linhas telefônicas diferentes que você encontrou (que será chamado de $n(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$) com os valores de $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A})$ ***e*** $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{B})$? ***(   )SIM*** ***(   ) NÃO***

No caso de sua resposta ser ***SIM***, escreva, nas linhas abaixo, qual é essa relação.

____

____

____

Observe que da quantidade de linhas telefônicas (cujo prefixo é 9456) que você encontrou apenas uma é a correta, ou seja, o número esquecido. Por isso a chance de fazer uma ligação por engano é muito grande.

Situação 2

Vamos analisar outra situação. Uma pessoa, dirigindo seu carro, observou um outdoor que mostrava um número de telefone de seu interesse. Como estava ao volante, ela registrou o número de cabeça. Na hora de ligar para o local, essa pessoa não se lembrava dos três últimos dígitos, como mostra a figura abaixo, ela está em dúvida, porém, os únicos possíveis algarismos são 4, 6, 7, 8 e 9 a serem colocados nas casas vazias. Essa pessoa se lembrava de que os três últimos algarismos eram distintos.

$\boxed{9}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7} - \boxed{1}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}$

Vamos chamar de $\boldsymbol{A}$ o conjunto formado pelos algarismos que podem ser usados para preencher a sexta casa e de $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A})$ o número de elementos desse conjunto. Uma vez escolhido um algarismo para a sexta casa, vamos chamar de $\boldsymbol{B}$ o conjunto formado pelos possíveis algarismos restantes que podem ser usados para preencher a sétima casa e de $\boldsymbol{n(B)}$ o número de elementos desse conjunto. E por fim, chamaremos de $\boldsymbol{C}$ o conjunto formado pelos possíveis algarismos restantes que podem ser usados preencher a oitava casa e de $\boldsymbol{n(C)}$ o número de elementos desse conjunto.

Determine o conjunto $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{n(A)}$.

$\boldsymbol{A} = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{n(A)} = \boxed{\qquad}$

Como comentado em outras situações, o conjunto $\boldsymbol{B}$ depende do algarismo que foi escolhido na sexta casa. Encontre todas as possibilidades para o conjunto $\boldsymbol{B}$.

$B = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ $\qquad$ $B = \{ \qquad\qquad\qquad \}$
$B = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ $\qquad$ $B = \{ \qquad\qquad\qquad \}$
$B = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ $\qquad$ $B = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

Em qualquer situação, podemos dizer que $\boldsymbol{n(B)} = \boxed{\qquad}$

O mesmo vale para o conjunto $\boldsymbol{C}$, que depende dos algarismos escolhidos para a sexta casa e depois para a sétima casa. Encontre todas as possibilidades para o conjunto $\boldsymbol{C}$.

$C = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ $\qquad$ $C = \{ \qquad\qquad\qquad \}$
$C = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ $\qquad$ $C = \{ \qquad\qquad\qquad \}$
$C = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ $\qquad$ $C = \{ \qquad\qquad\qquad \}$
$C = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ $\qquad$ $C = \{ \qquad\qquad\qquad \}$
$C = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ $\qquad$ $C = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

Em qualquer situação, podemos dizer que $\boldsymbol{n(C)} = \boxed{\qquad}$

Chamando de $\boldsymbol{n(A \text{ x } B \text{ x } C)}$, o total de telefones que esse motorista pode formar com os algarismos 4, 6, 7, 8 e 9, preenchendo as três últimas casas do telefone, sem repetição, determine:

$$\boldsymbol{n(A \text{ x } B \text{ x } C)} = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

Um produto de números naturais decrescentes e "antecessivos" nem sempre é um número fatorial, mas pode ser representado por uma fração cujo numerador e o denominador são números fatoriais.

Por exemplo, um cadeado com segredo tem três dígitos que podem ser preenchidos pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Sabe que a senha desse cadeado é formada por três algarismos distintos. Podemos escolher o algarismo da 1ª casa de 10 maneiras diferentes. Escolhido o algarismo da 1ª casa, temos 9 maneiras para escolher o algarismo da 2ª casa. Por fim, escolhido o algarismo da 2ª casa, temos 8 maneiras de escolher o algarismo da 3ª casa. O número de possibilidades para a senha desse cadeado é dado por:

$$10 \,.\, 9 \,.\, 8 = 720 \; possibilidades$$

Você pode observar que tanto a ordem dos algarismos (257 ≠ 572) quanto a natureza dos algarismos (257 ≠ 258) constituem possibilidades diferentes. Por essa razão, cada uma dessas possibilidades é um **arranjo** de **10** elementos tomados **3** a **3** e a quantidade de arranjos simples de **10** elementos tomados **3** a **3** é representado por $\boldsymbol{A_3^{10}}$.

O produto $10 \,.\, 9 \,.\, 8$ não é um número fatorial mas pode ser escrito como uma fração cujo o numerador e o denominador são números fatoriais. Veja!

$$10 \,.\, 9 \,.\, 8 = \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, \mathbf{7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1}}{\mathbf{7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1}} = \frac{10!}{7!} = A_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!}$$

Nas situações 1 e 2, que você realizou anteriormente, escreva os produtos de números naturais decrescentes e "antecessivos" que você chegou na forma de fração de números fatoriais.

Situação 1: $\boxed{}$

Situação 2: $\boxed{}$

Nas duas situações vamos chamar de $\boldsymbol{n}$ o número de algarismos disponíveis para o preenchimento e de $\boldsymbol{p}$ o número de casas vazias.

Na situação 1

$\boldsymbol{n} = \boxed{}$ $\boldsymbol{p} = \boxed{}$

Na situação 2

$\boldsymbol{n} = \boxed{}$ $\boldsymbol{p} = \boxed{}$

Você consegue observar, em cada situação, alguma relação entre a fração com números fatoriais e os valores de $\boldsymbol{n}$ ***e*** $\boldsymbol{p}$?

( ) SIM ( ) NÃO

No caso de sua resposta ser ***SIM***, escreva nas linhas abaixo, qual é essa relação.

(descreva nas linhas abaixo como você pensou!)

____

____

____

Como exercício de fixação, vamos analisar vários casos para o problema abaixo:

Escolhendo o prefixo 4035, da cidade de Bragança Paulista, determine o número todas as diferentes linhas telefônicas que podemos formar para esse prefixo (fixado), de forma que os quatro últimos algarismos sejam **distintos**.

4 0 3 5 –

CASO A - Os algarismos a serem utilizados pertencem ao conjunto A ={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Resposta:

CASO B - Os algarismos a serem utilizados pertencem ao conjunto B ={2, 3, 4, 5, 6, 8, 9}.

Resposta:

CASO C - Os algarismos a serem utilizados pertencem ao conjunto C ={1, 5, 6, 7, 9}.

Resposta:

CASO D - Os algarismos a serem utilizados pertencem ao conjunto D ={2, 3, 5, 8}.

Resposta:

No CASO D acima, temos arranjos de 4 elementos tomados 4 a 4, pois as linhas telefônicas diferem uma da outra somente pela ordem dos algarismos. Existe alguma relação entre a quantidade total desses arranjos e a quantidade de permutações de quatro algarismos?

( ) SIM

( ) NÃO

No caso de sua resposta ser ***SIM***, escreva, nas linhas abaixo, qual é essa relação.

Centro Educacional SESI 012 – Bragança Paulista

Nomes:____Nº___, ___ 2º Ano - ___EM

Data: ____/____/____ Nome do Professor:____

Atividade 5

Você deve se lembrar de que no ano de 2012 seu número de celular ganhou um algarismo a mais. Desde então você coloca o algarismo 9 na frente do número do seu celular.

Será que essa mudança foi em todo o país? Por que ocorreu essa mudança? Essas e outras perguntas ficaram na cabeça de muitas pessoas que tiveram, em seus números de celulares, o acréscimo do algarismo 9.

Vamos entender melhor como e porque isso aconteceu.

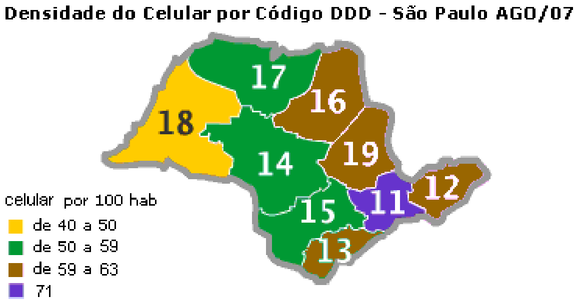
O texto abaixo, retirado do site da ANATEL, nos ajudará a compreender melhor essa mudança.

Números de telefones móveis da área 11 terão nove dígitos a partir de domingo 27 de Julho de 2012

Os números dos telefones móveis dos 64 municípios da área 11 receberão um dígito a mais a partir de 29 de julho de 2012. Será acrescentado o dígito "9" à esquerda de todos os números atuais, que passarão a contar com o formato 9XXXX-XXXX. A área 11 abrange grande parte do Estado de São Paulo, como a capital e os municípios integrantes de sua região metropolitana. Com a medida, a capacidade de numeração da área 11 aumentará de 44 milhões para 90 milhões de números. Atualmente, há 34,2 milhões de acessos móveis ativos e oito milhões em estoque nas prestadoras. Desta forma, 95% dos números possíveis na área 11 foram atribuídos e 77% estão em uso. O nono dígito não será adicionado aos números utilizados em serviços que utilizam operações tipo despacho, ou seja, conexão direta via rádio. Por um tempo determinado as ligações com 8 dígitos ainda serão completadas, para adaptação das redes e usuários. Gradualmente, haverá interceptações e os usuários receberão mensagens com orientações sobre a nova forma de discagem. Após esse período, as chamadas com 8 dígitos não serão completadas. O nono dígito deve ser acrescentado, no momento da discagem, por todos os usuários de telefone fixo e móvel que ligam para telefones móveis da área 11, independentemente da sua área de origem. Ou seja, quem ligar de outros Estados para celulares da área 11 também deverá marcar os nove dígitos para que a chamada seja completada. O assunto foi tema de entrevista coletiva do gerente de Acompanhamento e Controle das Obrigações de Interconexão da Anatel, Adeilson Evangelista Nascimento, no Escritório Regional da Agência em São Paulo.

Fonte: http://www.anatel.gov.br/Portal/exibirPortalPaginaEspecialPesquisa.do?acao=&tipoConteudoHtml=1&codNoticia=26182 acessado em :20 de outubro de 2012

Como citado no texto, a mudança ocorreu, por enquanto, apenas na região com DDD 11. Observando a figura abaixo, podemos perceber que a densidade de celulares para cada 100 habitantes em agosto de 2007 já era maior nessa área chegando à marca de 71 aparelhos de celulares para cada 100 habitantes.



Densidade do celular por código DDD
Fonte: http://www.teleco.com.br/comentario/com229.asp acessado em: 20 de outubro de 2012

A região onde a área 11 abrange é composta pela capital, São Paulo, e por mais 63 municípios, como mostra a tabela abaixo:

Cidades com DDD 11			
ALUMINIO	EMBU-GUACU	JUNDIAI	SALESOPOLIS
ARACARIGUAMA	FERRAZ DE VASCONCELOS	JUQUITIBA	SALTO
ARUJA	FRANCISCO MORATO	MAIRINQUE	SANTA ISABEL
ATIBAIA	FRANCO DA ROCHA	MAIRIPORA	SANTANA DE PARNAIBA
BARUERI	GUARAREMA	MAUA	SANTO ANDRE
BIRITIBA-MIRIM	GUARULHOS	MOJI DAS CRUZES	SAO BERNARDO DO CAMPO
BOM JESUS DOS PERDOES	IGARATA	MORUNGABA	SAO CAETANO DO SUL
BRAGANCA PAULISTA	ITAPECERICA DA SERRA	NAZARE PAULISTA	SAO LOURENCO DA SERRA
CABREUVA	ITAPEVI	OSASCO	SAO PAULO
CAIEIRAS	ITAQUAQUECETUBA	PEDRA BELA	SAO ROQUE
CAJAMAR	ITATIBA	PINHALZINHO	SUZANO
CAMPO LIMPO PAULISTA	ITU	PIRACAIA	TABOAO DA SERRA
CARAPICUIBA	ITUPEVA	PIRAPORA DO BOM JESUS	TUIUTI
COTIA	JANDIRA	POA	VARGEM
DIADEMA	JARINU	RIBEIRAO PIRES	VARGEM GRANDE PAULISTA
EMBU	JOANOPOLIS	RIO GRANDE DA SERRA	VARZEA PAULISTA

Municípios com DDD 11
Fonte: http://ddd.megasorte.net/ddd11/

Veja na tabela abaixo dados da Agência Nacional de Telecomunicações (ANATEL) em relação ao número de linhas de telefonias móveis ativas nessa área:

Relatório Consolidado de Tecnologia

Consolidado Mensal da Tecnologia

AMPS, CDMA, TDMA, GSM, WCDMA, CDMA 2000, LTE, Dados M2M, Dados Banda Larga

UF	AR	Empresa	Agosto/2012	Setembro/2012
SP	11	CLARO	6.587.468	6.453.356
SP	11	CLARO (NÃO UNIFICADA)	0	0
SP	11	OI	5.874.782	5.958.769
SP	11	PORTO SEGURO S.A. (AUTORIZADA DE REDE VIRTUAL)	8.000	8.300
SP	11	TIM	11.161.568	11.172.435
SP	11	UNICEL	0	0
SP	11	VIVO	10.694.274	10.747.953
SP	11	VIVO (NÃO UNIFICADA)	0	0
TOTAL			**34.326.092**	**34.340.813**

Número de linhas de telefones celulares ativas na região com DDD 11

Fonte:http://sistemas.anatel.gov.br/SMP/Administracao/Consulta/ConsolidadoDadosMesaMes/tela.asp Acessado em: 22 de outubro de 2012.

A tabela abaixo, retirada do site http://www.teleco.com.br/num_cel.asp, apresenta os prefixos referentes às linhas de telefone moveis ativas e linhas em potenciais.

Percebe-se que nos prefixos já foram feitos o acréscimo do dígito 9.

Consulte as faixas das operadoras por DDD:

Selecione o DDD e veja quais faixas pertencem a cada operadora

DDD: 11

Números :

vivo	Claro	TIM	oi	aeiou	Sercomtel	ctbc	nextel	Options
95550-95552		95905						
95554-95559		95910-95919						
95569		95930						
95769-95786		95935-95937						
96057-96060		95940-95969						
96182-96199		95980-95999						
96370-96419		96061-96085						
96470-96499		96340-96369						
96840-96866		96420-96469						
95020	96168-96181	95100-95101	95252-95267	97909			95399	
95023-95028	96300-6339	95104	95400-95419	97922				
96900-96913		96827-96839						
97087-97599		97011-97051						
99500-99999		97950-97967						
		98100-98799						
95030	96570-96650	95106-95109	95700-95768					
95037-95040	96914-96931	95113-95114	96011-96056					
95043	97052-97086	95116-95170	96086-96167					
95047-95048	97600-97699	95172-95179	96200-96299					
95050	97968-97970	95190	96500-96569					
95057	98800-98999	95192-95211	96651-96826					
95059	99100-99499	95214-95251	96867-96899					
95064		95268-95299	96932-96999					
95075-95076		95329-95398	97971-97999					
95300-95324		95420-95471	98010-98099					
95472-95474		95475-95499						
95500		95787-95810						
95520		95813						
95530		95815						
95540		95900-95903						

Prefixos disponíveis para telefonia móvel na região de código de área 11

Fonte: http://www.teleco.com.br/num_cel.asp **Acessado em: 21 de outubro de 2012**

Para analisarmos as quantidades de linhas de telefones celulares disponíveis com oito dígitos, vamos desconsiderar o primeiro algarismo 9 nos prefixos da tabela anterior.

Prefixos organizados				
Começados com 5	**Começados com 6**	**Começados com 7**	**Começados com 8**	**Começados com 9**
5020	6011-6999	7011-7699	8010-8999	9100 – 9999
5023		7909		
5028		7922		
5030		7950 - 7999		
5037-5040				
5043				
5047 – 5048				
5050				
5057				
5059				
5064				
5075-5076				
5100-5101				
5104				
5106-5109				
5113-5114				
5116-5170				
5172-5179				
5190				
5192-5211				
5214-5324				
5329 – 5500				
5520				
5530				
5540				
5550 – 5552				
5554 – 5559				
5569				
5700 – 5810				
5813				
5815				
5900-5903				
5905				
5910 – 5919				
5930				
5935 – 5937				
5940 – 5969				
5980 – 5999				

Na tabela abaixo, você pode ver todas as possibilidades de linhas de telefones celulares começados em 5, 6, 7, 8 e 9.

Número de possibilidades de linhas de telefones celular na região com DDD 11	
Números iniciados com o algarismo	**Quantidade de linhas**
5	5 860 000
6	9 890 000
7	7 410 000
8	9 900 000
9	9 000 000
Total	42 060 000

No trecho do texto "*Atualmente, há 34,2 milhões de acessos móveis ativos e oito milhões em estoque nas prestadoras. Desta forma, 95% dos números possíveis na área 11 foram atribuídos e 77% estão em uso*." Verifique, com a ajuda de uma calculadora:

I. se 95% das linhas possíveis, ou seja, 95% de 44 000 000 representa, aproximadamente, 42 060 000.

II. se das linhas disponíveis que são 42 060 000, restam aproximadamente 8 milhões de linhas em estoque. (Sugestão: Verifique o total de celulares ativos na tabela de Relatório consolidado de Tecnologia no mês de setembro de 2012).

Nos celulares da região de área 11, os números têm o seguinte formato:

9					–				

Vamos chamar de $\boldsymbol{A}$ o conjunto formado pelos algarismos que podemos usar para preencher a 1ª casa, de $\boldsymbol{B}$ o conjunto formado pelos algarismos que podemos usar para preencher a 2ª casa, de $\boldsymbol{C}$ o conjunto dos algarismos que podemos usar para preencher a 3ª casa, e assim por diante até a última casa que chamaremos de conjunto $\boldsymbol{I}$ formado pelos algarismos que podemos usar para preencher a última casa. Logo fica:

$$A = \{ 9 \}$$
$$B = \{ 1,2,3,4,5,6,7,8,9 \}$$
$$C = \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \}$$
$$D = \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \}$$
$$E = \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \}$$
$$F = \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \}$$
$$G = \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \}$$
$$H = \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \}$$
$$I = \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \}$$

O algarismo zero não pertence ao conjunto $\boldsymbol{B}$, pois se a primeira casa é o 9 e a segunda é o zero fica $\mathbf{90}$ e esse é um código de ligação à cobrar e não pode ser utilizado como início de número de telefone celular.

Determine então:

$n(A) =$ $\qquad$ $n(B) =$ $\qquad$ $n(C) =$ $\qquad$ $n(D) =$

$n(E) =$ $\qquad$ $n(F) =$ $\qquad$ $n(G) =$ $\qquad$ $n(H) =$ $\qquad$ $n(I) =$

O número de linhas de telefones celulares que podemos formar com nove dígitos, é dado por:

$$n(A \text{ x } B \text{ x } C \text{ x } D \text{ x } E \text{ x } F \text{ x } G \text{ x } H \text{ x } I).$$

Determine

$n(A \text{ x } B \text{ x } C \text{ x } D \text{ x } E \text{ x } F \text{ x } G \text{ x } H \text{ x } I) =$

Esse resultado encontrado é o mesmo que o citado no texto (90 milhões de linhas)?

(   ) SIM

(   ) NÃO

Tabuleiro para a Atividade 3

Cartões Móveis

Cartões Fixos

N_4	N_3	N_2	N_1

4 4

3 3

2 2

1 1