UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET

COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Jairo de Almeida Santos

OFICINA "SALVANDO O PLANETA PENTÁGONO": UMA ABORDAGEM LÚDICA E CONTEXTUALIZADA SOBRE O TEOREMA DE PICK

Ilhéus-BA
2021

Jairo de Almeida Santos

OFICINA "SALVANDO O PLANETA PENTÁGONO": UMA ABORDAGEM LÚDICA E CONTEXTUALIZADA SOBRE O TEOREMA DE PICK

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), para obtenção do título de Mestre em Matemática, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión

Ilhéus-BA
2021

S237 Santos, Jairo de Almeida.

Oficina “salvando o planeta pentágono": uma abordagem lúdica e contextualizada sobre o Teorema de Pick / Jairo de Almeida Santos. – Ilhéus, BA: UESC, 2021.

61 f. : il.

Orientador: Nestor Felipe Castañeda Centurión.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Inclui referências e apêndices.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Jogos no ensino de matemática.3. Método de projeto no ensino. 4. Geometria. 5. Pick, Teorema de. I. Título.

CDD 510.7

Jairo de Almeida Santos

OFICINA "SALVANDO O PLANETA PENTÁGONO": UMA ABORDAGEM LÚDICA E CONTEXTUALIZADA SOBRE O TEOREMA DE PICK

Ilhéus-BA, 10/09/2021

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión
UESC
(Orientador)

Prof. Dr. Vinicius Augusto Takahashi Arakawa
UESC

Prof.ª Dr.ª Zulma Elizabete de Freitas Madruga
UFRB

À minha mãe, aos meus irmãos e ao meu pai que infelizmente partiu antes de ver o filho se tornar mestre.

Agradecimentos

A Deus, que é digno de toda glória e que até aqui me ajudou e sempre cuidou de todos os detalhes.

À minha família, que sempre esteve ao meu lado e sempre apoiou todas as minhas decisões.

Aos meus colegas de curso, em especial a Altamiro, Danilo, Genilson, Jair, Jéssica, João, Jonatas, Luciano, os Marcos, Regileno e Tamires onde formamos um grupo unido que se ajudou durante todo o curso e pelos momentos de descontração que fizeram com que a caminhada fosse mais alegre.

Ao programa PROFMAT, à UESC e a todos os professores que me acompanharam durante todo o curso e sempre estiveram à disposição para ajudar.

Ao professor Nestor Castañeda Centurión, que foi meu orientador neste trabalho e também no projeto de pesquisa que participei durante o curso por seu incentivo, apoiou e em especial por manter uma relação de trabalho onde possibilitou que eu construísse meu próprio conhecimento de forma autônoma.

Ao meu amigo Moisés, que me ajudou no amadurecimento da história da oficina.

Aos membros da banca examinadora pela participação e contribuição na avaliação deste trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação.

À FASPESB, pelo apoio financeiro sem o qual seria difícil concluir o curso.

Resumo

Na literatura podem ser encontradas diversas referências apontando a Matemática como uma das disciplinas com maior aversão, o que se reflete na dificuldade do trabalho com os conteúdos e, consequentemente, no desempenho dos alunos. Nesse contexto apostamos no desenvolvimento de atividades lúdicas e contextualizadas que possam combater essa rejeição em contrapartida ou complementação ao ensino tradicional predominante nas escolas. Assim, este trabalho tem por objetivo geral apresentar uma proposta de oficina de matemática com elementos lúdicos e contextualizada para o ensino de tópicos de geometria envolvidos no Teorema de Pick. A oficina foi intitulada "Salvando o planeta Pentágono" e ela poderá ser trabalhada a partir do 9º ano do Ensino Fundamental. O Teorema de Pick mostra uma fórmula aritmética elementar para calcular a área de polígonos simples com vértices em pontos de uma malha quadriculada, sendo que os dados necessários para o cálculo são obtidos através da contagem de pontos. O trabalho com esse teorema permite abordar conteúdos como ângulos, polígonos simples, malhas quadriculadas do plano, decomposição de polígonos em triângulos fundamentais, áreas de polígonos, maximização, contagem etc., além disso, a fórmula oportuniza a abordagem lúdica da sua demonstração. A metodologia para a aplicação da oficina consiste em uma sequência de três encontros (ou partes), cada um dos quais possui atividades, com material de apoio específico, e discussões que devem ser mediadas pelo professor com base nas recomendações dadas. A proposta traz a semi-realidade como elemento contextualizador ao apresentar durante as atividades uma história fictícia, com iconografia própria, que mostra a saga de um herói na tentativa de salvar o planeta Pentágono. Na primeira parte, todos os obstáculos e desafios visam a introdução de conceitos básicos envolvidos no teorema de Pick e seu uso; na segunda parte, o objetivo é a dedução da fórmula do teorema; e na terceira, os desafios foram concebidos para trabalhar uma demonstração do mesmo. Dessa forma, acreditamos que a proposta é uma alternativa para o ensino dos temas matemáticos propostos tendo ao professor como mediador do conhecimento e ao aluno como centro do processo de aprendizagem.

Palavras-chave: Oficinas pedagógicas. Oficina matemática. Ludicidade. Contextualização. Teorema de Pick.

Abstract

In the literature, several references can be found pointing to Mathematics as one of the subjects with the greatest dislike, which is reflected in the difficulty of working with the contents and, consequently, in the performance of students. In this context, we bet on the development of playful and contextualized activities that can combat this rejection as a counterpart or complement to the traditional teaching predominant in schools. Thus, this work aims to present a proposal for a mathematics workshop with playful and contextualized elements for the teaching of geometry topics involved in Pick's Theorem. The workshop was entitled "Saving the Pentagon Planet" and it can be worked from the 9º year of Elementary School. Pick's Theorem shows an elementary arithmetic formula to calculate the area of simple polygons with vertices at points of a gridded mesh, and the necessary data for the calculation are obtained by counting points. Working with this theorem allows us to address contents such as angles, simple polygons, gridded plane meshes, decomposition of polygons into fundamental triangles, polygon areas, maximization, counting, etc. In addition, the formula provides a playful approach to its demonstration. The methodology for implementing the workshop consists of a sequence of three meetings (or parts), each of which has activities, with specific support material, and discussions that must be mediated by the teacher based on the recommendations given. The proposal brings semi-reality as a contextualizing element by presenting a fictional story during the activities, with its own iconography, which shows the saga of a hero in an attempt to save the Pentagon planet. In the first part, all obstacles and challenges aim at introducing the basic concepts involved in Pick's theorem and its use; in the second part, the aim is the deduction of the theorem formula; and in the third, the challenges were designed to work a demonstration of the same. Thus, we believe that the proposal is an alternative for teaching the proposed mathematical themes, having the teacher as a mediator of knowledge and the student as the center of the learning process.

Keywords: Pedagogical workshops. Math workshop. Playfulness. Contextualization. Pick's Theorem.

Lista de figuras

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (2018) que é um documento norteador da Educação Básica traz competências gerais que devem ser desenvolvidas ao longos dos anos, dentre elas destacamos a segunda,

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2018, p. 10)

Apesar de ser função de todas as áreas do conhecimento o desenvolvimento dessas competências, acreditamos que a matemática pode ter contribuição importante para este desenvolvimento, e isto fica claro nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998),

> [...] o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. (BRASIL, 1998, p. 26)

Portanto, é preciso que o professor de matemática utilize metodologias e propostas de ensino que favoreçam o desenvolvimento dessas competências supracitadas. Assim, trazemos neste trabalho uma proposta de oficina matemática que acreditamos que pode ajudar nesse desenvolvimento.

Uma oficina de matemática é antes de tudo uma oficina pedagógica, ou seja, é um espaço privilegiado de criação e descoberta de conhecimento, com ênfase na ação, sem perder de vista, porém, a base teórica. Onde o professor assume o papel de mediador do conhecimento, propiciando o que o aluno precisa saber, possibilitando que o mesmo construa seu conhecimento de forma autônoma, dessa forma, a construção de saberes ocorre principalmente a partir dos conhecimentos prévios do aluno. Assim, uma oficina pedagógica foge do método tradicional de ensino, e se encaixa no que Rêgo e Rêgo (2003) propõe quando diz:

> Com o reconhecimento dos problemas gerados pelos métodos tradicionais de ensino para promoverem o desenvolvimento da autonomia intelectual, da criatividade e capacidade de ação, reflexão e de crítica de seu alunado, torna-se necessário investir na introdução de metodologias de ensino que, baseados na concepção de que o aluno deve ser o centro do processo de ensino/aprendizagem, respeitando-se seus conhecimentos

> anteriores e preparando-os para realizarem-se como cidadãos em uma sociedade submetida a permanentes e cada vez mais amplas modificações das estruturas sociais, políticas e econômicas. (RÊGO; RÊGO, 2003, p. 3).

A proposta de oficina matemática aqui desenvolvida tem duas características centrais, ludicidade e contextualização. Entendemos a atividade lúdica como qualquer atividade onde o prazer e satisfação está no simples fato de realizá-la. O que está de acordo com Gomero e Castañeda-Centurión (2019, p. 11) que afirmam que a atividade lúdica é "qualquer atividade cuja principal motivação para realizá-la é realizá-la, pois este ato causa prazer e dá satisfação ao indivíduo". Por outro lado, acreditamos que a contextualização do conteúdo faz com que ele ganhe um significado para o aluno, o que está em harmonia com Brasil (2013, p. 119) ao pontuar que "[...] um ambiente propício a aprendizagem na escola terá como base a contextualização dos conteúdos, assegurando que a aprendizagem seja relevante e socialmente significativa".

A oficina desenvolvida neste trabalho foi intitulada "Salvando o planeta Pentágono". Nela, o recurso de contextualização faz referência à *semi-realidade* dentro dos *cenários para investigação* nos termos colocados por Skovsmose (2000) como apresentado na Secção 1.3 do Capítulo 1. Na *semi-realidade*, as atividades são contextualizadas, mas não são usados dados reais, contudo dentro dos *cenários para investigação*, embora com situações hipotéticas, há reflexão, questionamento e os alunos discutem sobre o que está sendo proposto. Esse contexto de semi-realidade é colocado através de uma história em que o aluno será levado a ajudar um herói em sua saga na tentativa de salvar o planeta Pentágono.

A oficina tem como pano de fundo o Teorema de Pick, que pertence ao campo da geometria, um campo relevante dentro da matemática, muito presente no dia a dia e que ao longo da história tem despertado grande interesse. O teorema mostra uma fórmula aritmética elementar, porém interessante de calcular a área de polígonos simples, cujos vértices são pontos de uma rede (ou malha quadriculada), através da contagem de pontos. O caráter lúdico da oficina é potencializado pelo uso de material manipulável, em específico, usamos o geoplano como uma ferramenta para simular a rede e elásticos para a construção dos polígonos.

A oficina apresenta uma história fictícia que mostra a saga de um herói na tentativa de salvar o planeta Pentágono. Ela está dividida em três partes. Na primeira, todos os obstáculos e desafios visam a introdução de conceitos básicos envolvidos no Teorema de Pick e seu uso, que é o foco central da oficina. Na segunda, de posse dos conceitos básicos, os alunos serão instigados com elementos para a dedução da fórmula de Pick. Na terceira, os desafios foram concebidos para trabalhar uma demonstração do Teorema de Pick.

Nos meus 10 anos de experiência docente tenho visto a necessidade de levar para a sala de aula propostas diferentes para o ensino de conteúdos matemáticos que fujam do método tradicional. Ao entrar no Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual Santa Cruz (UESC) e ter contato com os trabalhos de Araujo (2017), Pereira (2017), Souza (2017), Silva (2017), França (2018) que discorrem sobre Oficinas de Matemática Experimental (OME), vi no trabalho de conclusão de curso do PROFMAT uma oportunidade de desenvolver uma proposta de oficina com componentes de ludicidade e contextualização dentro do campo da geometria. Foi nesse contexto que interagi com o Teorema de Pick e surgiu a proposta de oficina Salvando o planeta Pentágono.

Portanto, o trabalho tem o objetivo geral de apresentar uma proposta de oficina de matemática com elementos lúdicos e contextualizado para o ensino de tópicos de geometria envolvidos no Teorema de Pick. Os objetivos específicos são: consolidar alguns conceitos elementares associados a polígonos; introduzir a noção de polígono fundamental, chave para a demonstração do Teorema de Pick; expor os alunos ao desafio de enfrentarem problemas difíceis de ser resolvidos, como podem ser encontrados ao longo das atividades; apresentar aos alunos um método investigativo e experimental, estimulando-os a formularem e testarem hipóteses; e estimular os alunos a trabalharem em equipe, pois eles trabalham em grupos.

Por fim, o trabalho está dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1 fazemos a fundamentação teórica, que serve de embasamento à oficina criada, onde discorremos sobre oficinas pedagógicas, ludicidade e contextualização. No Capítulo 2 mostramos os fundamentos matemáticos envolvidos na proposta. No Capítulo 3 apresentamos a proposta da oficina Salvando o planeta Pentágono. No Capítulo 4 tratamos das considerações finais e, nos Apêndices A, B e C é apresentado o material de apoio para as atividades da oficina.

1 Fundamentação teórica

Neste capítulo apresentamos o conceito de oficina pedagógica e discutimos sobre duas características da oficina proposta neste trabalho, a saber: ludicidade e contextualização.

1.1 Oficinas pedagógicas

Oficina pedagógica é um espaço privilegiado de criação e descoberta de conhecimento, com ênfase na ação, sem perder de vista, porém, a base teórica. Segundo Paviane e Fontana (2009):

> Uma oficina é, pois, uma oportunidade de vivenciar situações concretas e significativas, baseadas do tripé: sentir-pensar-agir, com objetivos pedagógicos. Nesse sentido, a metodologia da oficina muda o foco tradicional da aprendizagem (cognição), passando a incorporar a ação e reflexão. Em outras palavras, numa oficina ocorrem apropriação, construção e produção de conhecimento teóricos e práticos de forma ativa e reflexiva (PAVIANE; FONTANA, 2009, p. 78).

Numa oficina o professor assume o papel de mediador do conhecimento, pois o professor não ensina o que sabe, mas vai propiciar o que os alunos precisam saber, sendo, dessa forma uma abordagem centrada no aprendiz e na aprendizagem e não no professor, possibilitando que o aluno construa seu conhecimento de forma autônoma. De forma que a construção de saberes e ações relacionadas transcorrem, principalmente, do conhecimento prévio, das habilidades, dos interesses, das necessidades, dos valores e julgamento de cada um dos participantes. O que está de acordo com Freire (1996) quando ele diz:

> Saber ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para sua própria produção ou a sua construção. Quando entro em uma sala de aula devo estar sendo um ser aberto a indagações, à curiosidade, às perguntas dos alunos, a suas inibições; um ser crítico e inquiridor, inquieto em face da tarefa que tenho — a de ensinar e não a de transferir conhecimento (FREIRE, 1996, p. 47).

Segundo Candau (1995), no espaço de construção de conhecimento de uma oficina há construção coletiva de um saber, de análise da realidade, de confrontação e intercâmbio de experiências, portanto, há um processo de interação e de construção coletiva do saber, de forma que um participante ajuda o outro nesse processo.

De acordo com Lorenzato (2006, p. 4), "o 'Aproveitar a vivência do aluno' não deve ser restrito ao início do aprendizado escolar, pois ele é válido por todo o processo de ensino". Como uma das características marcantes de uma oficina pedagógica é aproveitar a vivência do aluno, ou seja, aproveitar o conhecimento e habilidades prévias, ela pode ser aplicada durante qualquer etapa do processo de ensino.

Destacamos ainda que existem alguns fatores importantes quando se trabalha com uma oficina pedagógica. Um deles é que ela requer planejamento, pois ela tem finalidades, um significado e um fim, ela não é simplesmente uma atividade para passar o tempo, e de acordo com Paviane e Fontana (2009) essas finalidades são:

> a) articulação de conceitos, pressupostos e noções com ações concretas, vivenciadas pelo participante ou aprendiz; e b) vivência e execução de tarefas em equipe, isto é, apropriação ou construção coletiva de saberes (PAVIANE; FONTANA, 2009, p. 78).

Outro fator importante é o público alvo da oficina. Cada oficina é planejada para atingir objetivos em um determinado público. Em algumas oficinas é necessário que os participantes tenham o conhecimento de determinados conteúdos, já em outras não é preciso de nenhum pré-requisito. Portanto, é de extrema importância ter isto em mente no momento de criação da oficina.

A carga horária é outro aspecto ser considerado. A oficina deve ser programada para ocorrer dentro do tempo previsto. As atividades devem ser escolhidas levando esse fator em consideração. Se a programação não for bem feita e não for concluir as atividades, o professor pode sair da oficina com mais dúvidas do que respostas.

O momento de finalização é outro momento fundamental. O término de uma oficina deve levar o participante a refletir sobre o antes e o depois desse momento de aprendizagem. Assim comparar seus conceitos anteriores e atuais, sua prática prévia e a que pretende adotar.

Por fim, ressaltamos que a oficina pedagógica desenvolvida neste trabalho é uma oficina pedagógica de matemática, ou seja, uma oficina desenhada com assuntos matemáticos. Para aplicação da mesma, fazemos algumas recomendações que são fundamentais para que se cumpram os objetivos estabelecidos. Tais recomendações são as mesmas feitas para a aplicação de certas oficinas de matemática chamadas Oficinas de Matemática Experimental (OME) e que podem ser encontradas nos trabalhos de Araujo (2017) ou Pereira (2017). Acreditamos que toda oficina de matemática deve segui-las, a saber:

1. Evite explicações longas e definitivas à turma, a pequenos grupos ou a alunos individualmente e os objetivos da oficina não devem ser explicitados no início nem durante a execução das atividades. A ideia é que os próprios alunos cheguem a conclusões e que os objetivos sejam atingidos como resultado das discussões no interior e entre os grupos.

2. O professor deve manter uma "bagunça produtiva", pois é bem provável que devido à participação e interação dos alunos, a sala de aula ficará parecendo uma bagunça. A recomendação é que o professor mantenha um nível de desordem bom, produtivo, onde a desorganização não atrapalhe a criatividade e o desenvolvimento da oficina. O professor tem que se atentar para que os alunos não confundam a oficina com o intervalo do recreio, uma vez que é preciso que os alunos levem a oficina a sério para que os objetivos sejam atingidos.

3. A sala deve ser preparada para o oficina de forma antecipada. Para um bom desempenho durante a oficina, é importante que a turma tenha no máximo 25 alunos, podendo ser dividida em grupos de 3 a 5 alunos. Recomenda-se ter sempre material excedente para todas as tarefas a serem realizadas.

4. Respeite o tempo de cada grupo. É importante que o professor só passe para a próxima atividade somente quando todos os grupos tiverem terminado a atividade em andamento. Quando os alunos de um grupo tiverem terminado com alguma atividade, pode estimulá-los a ajudar aqueles que ainda não a fizeram, mas deve recomendar que não é para dizer como se faz, nem para fazer a atividade por eles.

1.2 Ludicidade

A palavra ludicidade vem do latim ludus e é a característica ou propriedade do que é lúdico, do que é feito por meio de jogos. Segundo Costa (2005 apud RAU 2012, p.31), "a palavra lúdico vem do latim ludus e significa brincar. Nesse brincar estão incluídos os jogos, brinquedos e brincadeiras e a palavra é relativa também à conduta daquele que joga, que brinca e se diverte".

Neste trabalho tomamos a atividade lúdica como uma atividade qualquer onde o prazer e satisfação está no simples fato de realiza-la. O que está de acordo com Caillois (1994), que entende atividade lúdica como:

> o prazer que se sente com a resolução de uma dificuldade tão propriamente criada e tão arbitrariamente definida, que o fato de solucioná-la tem apenas a vantagem da satisfação íntima de tê-lo conseguido (CAILLOIS, 1994, p.50).

E a ludicidade pode ser vista como experiência plena do ser humano, sobre isto Luckesi (2000) diz:

> [...] o que a ludicidade traz de novo é o fato de que o ser humano, quando age ludicamente, vivencia uma experiência plena. (...) Enquanto estamos participando verdadeiramente de uma atividade lúdica, não há lugar, na nossa experiência, para qualquer outra coisa além desta atividade.

> Não há divisão. Estamos inteiros, plenos, flexíveis, alegres, saudáveis. (LUCKESI, 2000, p. 21).

Gostariamos de colocar também a ludicidade sobre o ponto de vista da Psicologia Evolucionária abordada no trabalho de Gomero e Castañeda-Centurión (2019). A psicologia evolucionária é um ramo da psicologia que busca entender o comportamento e a mente humana à luz da teoria da evolução, e segundo os autores pode-se usar a ideia básica da Psicologia Evolucionária para defender que a ludicidade é produto da curiosidade inata em certas espécies, pois a curiosidade nos impele a explorar o mundo ao nosso redor, investigando os objetos que nos rodeiam, tentando descobrir como funcionam e para que servem, tudo isto é feito de forma natural, e estas explorações são realizadas apenas porque nos causam prazer e satisfação. Esta é forma que a evolução criou para nos sentirmos impulsionados a conhecer o mundo.

E o "jogo" que é intrínseco a ludicidade, ganha uma definição diferente da usual (p. ex. jogos de tabuleiros ou brincadeiras com números ou palavras) na visão dos autores quando dizem:

> Usamos a palavra "jogo" para descrever o tipo de atividade que crianças pequenas realizam quando estão exercendo sua curiosidade para explorar o mundo. Esta é uma primeira aproximação para atribuir um significado ao termo "jogo". Na fase adulta o ser humano estende seus "jogos" (atividades de lazer), não mais para aprender sobre o mundo, mas para sentir prazer. Assim a principal motivação que costuma levar um indivíduo a jogar um jogo é apenas jogá-lo, daí, definimos atividade lúdica como qualquer atividade cuja principal motivação para realizá-la é realizá-la, pois este ato causa prazer e dá satisfação ao indivíduo. (GOMERO; CASTAÑEDA-CENTURIÓN, 2019, p.11).

Para eles, todo "jogo" está ligado a um processo de aprendizagem, pois o indivíduo tem que aprender a jogá-lo, e ele tem objetivos intrínseco que determinam as ações durante sua realização, então é possível conceber "jogos" desenhados para induzir a aprendizagem de conteúdos escolares. O desafio passa a ser o de aprender a desenhar tais atividades lúdicas.

Esclarecem que não existe atividade inerentemente lúdica de acordo com a definição que adotam, que é semelhante a que usamos no início dessa seção, mas, em princípio, qualquer uma pode se tornar lúdica. Para isto, é suficiente que ela capture a atenção do indivíduo, acenda a sua curiosidade de modo que ele aceite o desafio de executá-la e que faça com prazer. A natureza faz o resto, o indivíduo se sente impelido a "jogar bem", acendendo assim o motor da aprendizagem. Isto os levam a sugerirem que a ludicidade seja um componente das atividades pedagógicas na escola. Como exemplo, um problema matemático muito difícil, mas que por causa do contexto se torne atraente e seduza o aluno, será uma atividade lúdica. Dessa forma, a proposta de oficina que desenvolvemos trás desafios que podem ser consideradas atividades lúdicas.

Portanto, acreditamos que seja necessário a introdução da ludicidade como recurso pedagógico no cotidiano escolar, pois ela abre uma gama de possibilidades de estratégias e métodos, proporcionando uma aprendizagem prazerosa e com significado. Mais do que isso, trazendo vida às aulas que às vezes são monótonas, fragmentadas, repetitivas e descontextualizadas, o que não desperta a curiosidade e o prazer no "fazer".

1.3 Contextualização

Ao longo dos meus 10 anos de docência, o modelo de ensino que tenho visto nas escolas é um modelo onde grande parte dos conteúdos são trabalhados de forma fragmentada, descontextualizada, que prioriza a mecanização, a memorização e a abstração, de forma que o professor detém o monopólio do saber na sala de aula e há apenas uma transferência de conhecimento sem significado excluindo a possibilidade para que o aluno construa seu próprio conhecimento. Segundo Savianni (1991), esse modelo pode ser classificado como tradicional, pois

> [...] o ensino tradicional pretende transmitir os conhecimentos, isto é, os conteúdos a serem ensinados por este paradigma seriam previamente compreendidos, sistematizados e incorporados ao acervo cultural da humanidade. Dessa forma, é o professor que domina os conteúdos logicamente organizados e estruturados para serem transmitidos aos alunos. A ênfase do ensino tradicional, portanto, está na transmissão dos conhecimentos. (SAVIANNI, 1991, p. 85).

Tal modelo vai no sentido oposto que Freire (1996) pregava.

> [...] saber que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar a possibilidade para a sua própria produção ou a sua construção. Quando entro em uma sala de aula devo estar sendo um ser aberto a indagações; um ser crítico e inquiridor, inquieto em face da tarefa que tenho – a de ensinar e não a de transferir conhecimentos. (FREIRE, 1996, p. 47).

Dentro desta perspectiva tradicional, a aula de matemática segue um determinado padrão, ela é dividida em dois momentos:

> [...] primeiro, o professor apresenta algumas ideias e técnicas matemáticas e, depois, os alunos trabalham com exercícios selecionados. Ele [Cotton, 1998] também observou que existem variações nesse mesmo padrão: há desde o tipo de aula em que o professor ocupa a maior parte do tempo com exposição até aquela em que o aluno fica – a maior parte do tempo envolvido com resolução de exercícios (SKOVSMOSE, 2000, p. 1).

Essa maneira de trabalhar se encaixa também no *paradigma do exercício*, que tem por premissa que o exercício tenha uma, e somente uma resposta (SKOVSMOSE, 2008).

Nesse contexto, o aluno precisa se contentar com as informações dadas pelo problema e tomá-lo como verdade absoluta, buscando apenas manobrar os dados para chegar a resposta correta.

Uma alternativa para esse modelo é um ambiente de aprendizagem onde o ensino seja contextualizado e o aprendizado seja de forma significativa, e é isso que os Parâmetros Curriculares Nacionais (2013, p. 119) diz "[...] contextualização dos conteúdos, assegurando que a aprendizagem seja relevante e socialmente significativa".

Vale ressaltar que a contextualização visa dar sentido ao conhecimento e não uma mera ilustração de determinado problema, pois mesmo de forma contextualizada podemos cair no paradigma do exercício.

> [...] Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de "ilustrar" o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento (BRASIL, 2006, p. 83).

Acreditamos que o ensino tem que ser contextualizado, mas dentro de um cenário investigativo e que possibilita o aluno a construir seu próprio conhecimento. Dessa forma, Skovsmose (2007) elabora o conceito de *cenários para investigação*, que são ambientes de aprendizagem que favorecem e potencializam a investigação, onde os alunos são convidados a formularem questões e procurarem explicações.

> Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formular questões e a procurar explicações. O convite é simbolizado por seus "Sim, o que acontece se...?". Dessa forma os alunos se envolvem no processo de exploração e explicação. O "Por que isto?" do professor representa um desafio, e os "Sim, por que isto...? dos alunos indicam que eles estão encarando o desafio e estão em busca de explicações, o cenário de investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário de investigação os alunos são responsáveis pelo processo. (SKOVSMOSE, 2007, p. 21).

Nos *cenários para investigação*, o professor é um mediador durante a atividade, seu objetivo é despertar os alunos para que estes investiguem e reflitam sobre suas decisões e ações matemáticas. A expectativa é que o aluno passe a ter uma postura investigativa utilizando de seus conhecimentos prévios em matemática, e descobrindo novos contextos de utilização da matemática aprendida sempre que estiver diante de situações novas e desafiadoras.

Skovsmose (2000) apresenta na Tabela 1 abaixo três tipos de referências (*a matemática pura*, a *realidade* e a *semi-realidade*) que podem existir em uma sala de aula quando uma atividade ou um exercício é apresentado, e o mesmo discute essas perspectivas sob a luz do paradigma do exercício e cenários para investigação.

	Paradigma do exercício	Cenários para investigação
Referências à matemática pura	Ambiente 1	Ambiente 2
Referências à semi-realidade	Ambiente 3	Ambiente 4
Referências à realidade	Ambiente 5	Ambiente 6

Tabela 1 – Ambientes de aprendizagem.
Adaptado de Skovsmose (2000).

A *matemática pura* se apresenta nas atividades onde o único objetivo é a resolução do cálculo e apresentação da resposta (Ambiente 1) ou em atividades que mesmo sem uma contextualização, leva os alunos a questionamentos e reflexões (Ambiente 2).

Na *semi-realidade*, as atividades são contextualizadas, mas não são usados dados reais e não há discussão dos mesmos (Ambiente 3). Na semi-realidade, dentro dos cenários para investigação (Ambiente 4), embora com situações hipotéticas, há reflexão, questionamento e os alunos discutem sobre o que está sendo proposto.

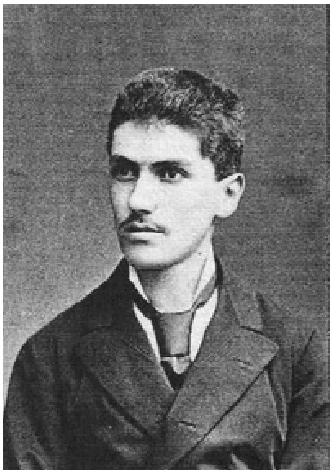
Por último, na *realidade* as atividades trazem dados reais, mas o objetivo pode ser mais uma vez apenas a resolução do problema e as operações envolvidas no mesmo (Ambiente 5) ou em atividades com dados reais onde os alunos onde leva os alunos a discutirem e refletirem ou até mesmo discordar do que está sendo proposto (Ambiente 6).

A proposta de oficina pedagógica apresentada neste trabalho, traz contextualização com referência à *semi-realidade* no contexto dos *cenários para investigação*. Um ambiente de aprendizagem que está de acordo com Brasil (2013, p. 136) quando destaca que o ambiente de aprendizagens deve basear-se "[...] na contextualização dos conteúdos, assegurando que a aprendizagem seja relevante e socialmente significativa".

2 Matemática por trás da oficina

Neste capítulo vamos apresentar um pouco da vida de Georg Alexander Pick (1850 - 1942), alguns conceitos básicos para o entendimento do seu teorema e a demonstração do mesmo.

2.1 Georg Alexander Pick



Fonte: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre.
Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Georg_Alexander_Pick>
Acesso em: 10 set. 2021.

Figura 1 – Georg Alexander Pick.

Georg Alexander Pick nasceu em uma família judia no ano de 1859 em Viena na Áustria. Sua mãe era Josefa Schleisinger e seu pai era Adolf Josef Pick, este, diretor de um instituto privado. Pick foi educado em casa por seu pai até os onze anos de idade, quando entrou na quarta turma do *Leopoldstaedter Communal Gymnasium.* Em 1875 ele fez os exames de conclusão da escola, que o qualificaram para o ingresso na universidade.

Pick entrou na Universidade de Viena em 1875, e no ano seguinte, em 1876, com apenas dezessete anos de idade, publicou seu primeiro artigo na área de matemática. Ele estudou matemática e física graduando-se em 1879 com uma qualificação que lhe permitia lecionar nessas áreas de conhecimento. Após concluir seu doutorado com a tese *Uber eine Klasse abelscher Integrale* (Sobre uma classe de integrais Abelianas), iniciou como assistente do cientista Ernst Mach na Universidade Karl-ferdinand em Praga e, em seguida, tornou-se professor após defender sua tese de habilitação *Uber die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen* (Sobre a integração de diferenciais hiperelípticas por logaritmos) em Praga em 1881.

O trabalho de Pick no campo da matemática foi extremamente amplo. Nos seus 67 artigos abrangem muitos tópicos, como Álgebra Linear, Teoria Invariante, Cálculo Integral, Teoria do Potencial, Análise Funcional e Geometria. Entretanto, mais da metade de seus artigos eram sobre Funções de uma Variável Complexa, Equações Diferenciais e Geometria Diferencial. Termos como "Matrizes de escolha", "interpolação Pick-Nevalinna" e o "lema de Schwarz-Pick" são usados até hoje. No entanto, ele é mais lembrado pelo *Pick's Theorem* (Teorema de Pick) que apareceu em seu artigo de oito páginas de 1899 *Geometrisches zur Zahlenlehre* (Geometria sobre a Teoria dos Números) em Praga na República Tcheca. Mas o Teorema de Pick só recebeu atenção em 1969 após Wladyslaw Steinhaus o incluir em seu famoso livro *Mathematical Snapshots*. Desde então, o Teorema de Pick atrai atenção e admiração por sua simplicidade e elegância.

Após os nazistas invadirem vários países europeus, Pick foi enviado para o campo de concentração Theresienstadt, localizado na atual República Tcheca, onde morreu duas semanas após chegar, em 13 de julho de 1942, aos 82 anos.

2.2 Conceitos básicos

Apresentamos quatro conceitos para o entendimento do Teorema de Pick, outros conceitos clássicos podem ser consultados em livros de geometria básica como Barbosa (2005) e Neto (2013).

Definição 1. *Uma rede no plano ou malha quadriculada é um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos adjacentes na horizontal ou na vertical é igual a* 1*.Tomando um sistema de coordenadas cartesianas, com origem num ponto da rede, um eixo na direção horizontal e outro na vertical, uma rede pode ser descrita como o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas* (m, n) *são números inteiros.*

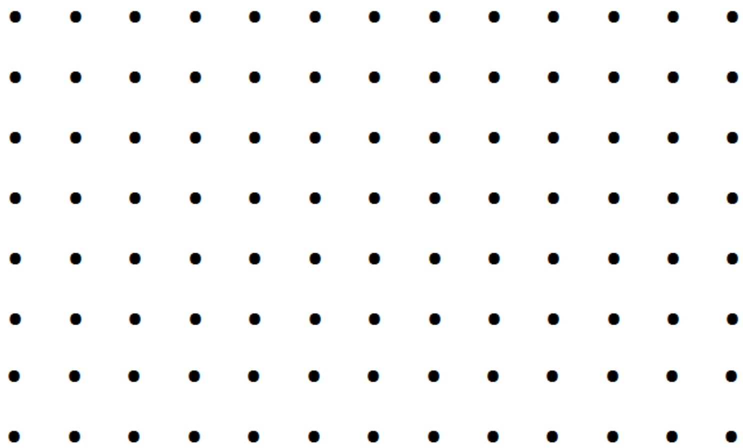


Figura 2 – Rede ou malha quadriculada

No que segue, consideraremos apenas polígonos cujos vértices se encontram em pontos de uma rede.

Definição 2. *Um polígono simples é um polígono cujos lados não adjacentes não se interceptam. Um polígono que não é simples é denominado polígono complexo.*

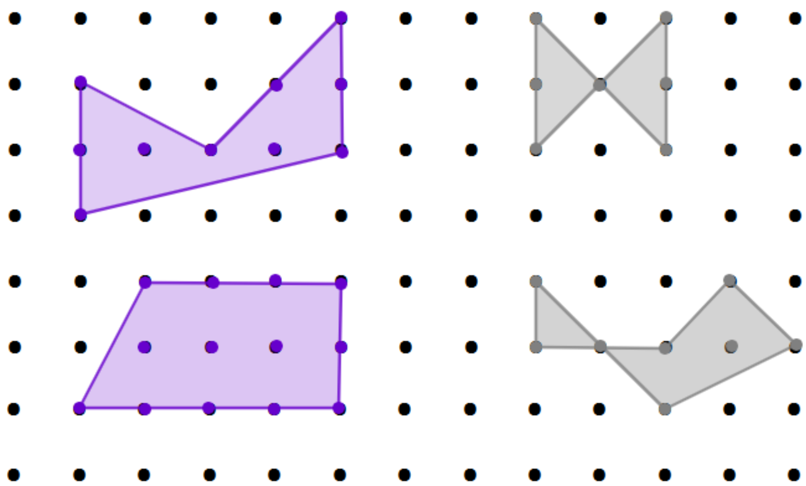


Figura 3 – Polígonos simples (roxos) e polígonos complexos (cinzas)

Definição 3. *Um triângulo é dito fundamental quando tem os três vértices e mais nenhum outro ponto (do bordo ou do interior) sobre a rede.*

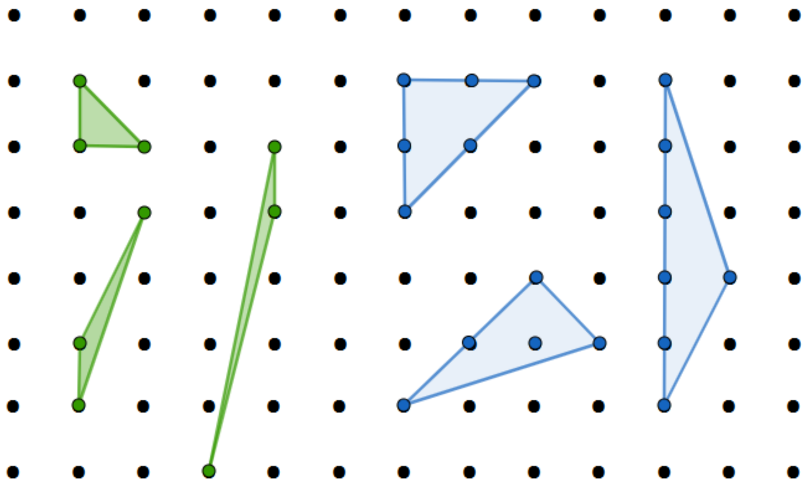


Figura 4 – Triângulos fundamentais (verdes) e não fundamentais (azuis)

Definição 4. *Um paralelogramo é dito fundamental quando tem os quatro vértices e mais nenhum outro ponto (do bordo ou do interior) sobre a rede.*

Observação. *Qualquer uma das duas diagonais de um paralelogramo fundamental o decompõe em dois triângulos fundamentais com um lado comum.*

Teorema 1. *Se ABC é um triângulo fundamental e $ABCD$ o paralelogramo obtido traçando pelo ponto C uma paralela ao lado AB e pelo ponto B uma paralela ao lado AC, as quais se encontram no ponto D, então $ABCD$ é um paralelogramo fundamental.*

Demonstração. Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas no plano, tendo como origem o ponto $A(0,0)$, em relação ao qual os pontos da rede têm coordenadas inteiras. Sejam $B(m,n)$ e $C(s,t)$ as coordenadas dos outros dois vértices do triângulo ABC. Assim, o quarto vértice do paralelogramo terá coordenadas $D(m+s,n+t)$.

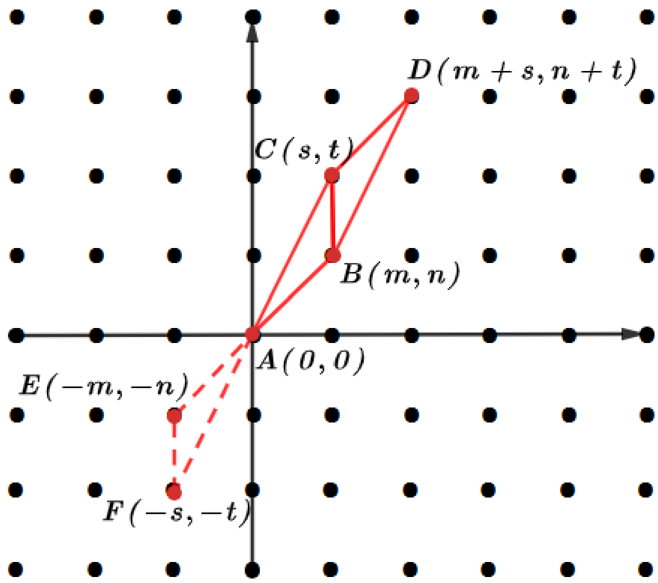


Figura 5 – Paralelogramo $ABCD$

O triângulo AEF, cujos vértices são

A(0,0), E(-m,-n) e F(-s,-t)

é obtido trocando-se os sinais de ambas as coordenadas de cada ponto do triângulo ABC. Logo, AEF não contém outro ponto com coordenadas interias, além de seus vértices, ou seja, o triângulo AEF é fundamental. O triângulo BCD é formado pelo ponto $P'(x+m+s, y+n+t)$, obtido somando-se m+n à abcissa e n+t à ordenada de um ponto arbitrário $P(x,y)$ do triângulo AEF. Se P' tem coordenadas inteiras, P também tem. Como o triângulo AEF é fundamental, o mesmo se dá com BCD. Portanto, os únicos pontos com coordenadas inteiras no paralelogramo $ABCD$ são os vértices, isto é, ele é fundamental. □

Observação. *Se o paralelogramo $ABCD$ é fundamental, então não há pontos da rede entre as retas AB e CD.*

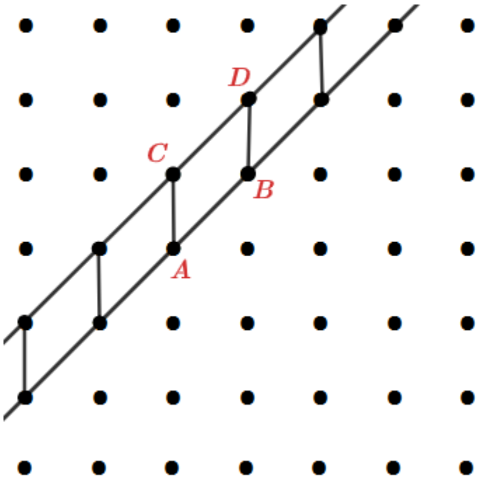


Figura 6 – Retas paralelas AB e CD e o paralelogramo ABCD

2.3 Teorema de Pick

Teorema 2 (de Pick)**.** *A área de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela expressão*

$$\frac{B}{2} + I - 1,$$

onde B é o número de pontos da rede situados sobre o bordo do polígono e I é o número de pontos da rede existentes no interior do polígono.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1. *No quadrilátero $FGHI$ abaixo, tem-se que $B = 18$ e $I = 10$.*

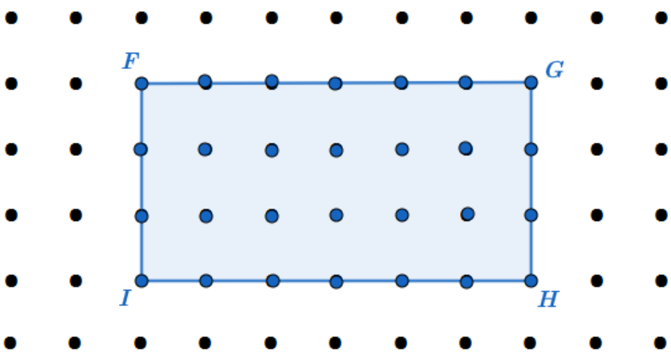


Figura 7 – Quadrilátero $FGHI$

Assim, pelo Teorema de Pick, a área será:

$$\frac{B}{2} + I - 1 = \frac{18}{2} + 10 - 1 = 18.$$

Exemplo 2. *No triângulo JKL abaixo, tem-se que $B = 3$ e $I = 0$.*

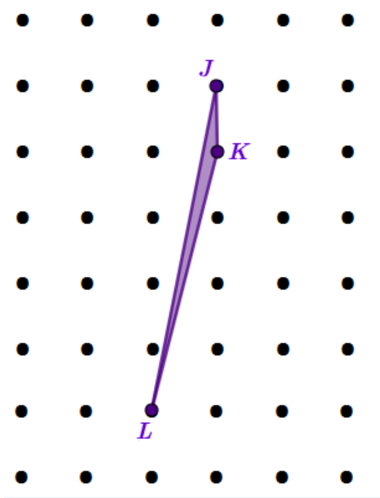


Figura 8 – Triângulo JKL

Assim, pelo Teorema de Pick, a área será:

$$\frac{B}{2} + I - 1 = \frac{3}{2} + 0 - 1 = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 3. *No polígono $OPQRST$ abaixo, tem-se que $B = 17$ e $I = 16$.*

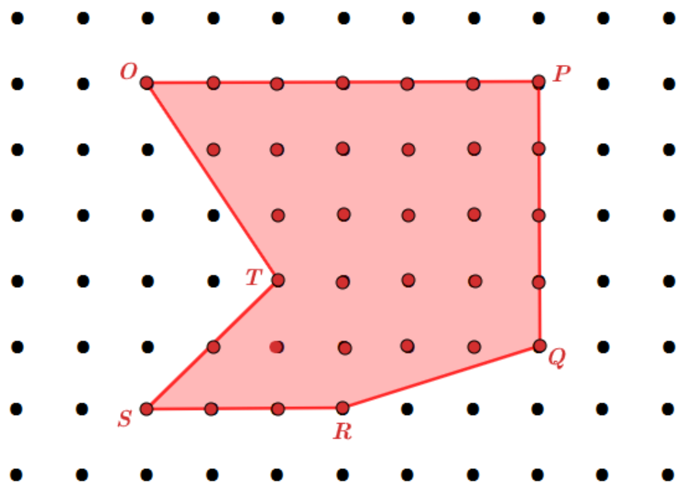


Figura 9 – Polígono $OPQRST$

Assim, pelo Teorema de Pick, a área será:

$$\frac{B}{2} + I - 1 = \frac{17}{2} + 16 - 1 = \frac{47}{2}.$$

Para demonstrarmos o Teorema de Pick, vamos precisar de alguns resultados que anunciaremos a seguir.

Lema 1. *Se os inteiros m, n são primos entre si então existem inteiros s, t tais que $tm - sn = 1$.*

Demonstração. Tomemos s, t inteiros tais que $p = tm - sn$ seja positivo. Mostraremos que se p for maior do que 1 então podemos modificar os inteiros s, t de modo que a expressão $tm - sn$ assuma um valor positvo menor do que p. De fato, como m, n são primos entre si, pelo menos um deles, digamos m, não é divisível por p, isto é, $m = pq + r$, com $0 < r < p$. O inteiro $r' = p - r$ também cumpre a condição $0 < r' < p$. Além disso, $r = p - r'$, logo

$$m = pq + r = pq + p - r' = p(q + 1) - r'.$$

Daí, multiplicando por $(q + 1)$ os dois membros da equação $p = tm - sn$ segue que

$$t(q + 1)m - s(q + 1)n = p(q + 1) = m + r',$$

isto é,

$$(tq + t - 1)m - (sq + s)n = r',$$

com $0 < r' < p$.
Repetindo o processo tantas vezes quantas sejam necessárias, chegaremos a inteiros s, t tais que $tm - sn = 1$. □

Lema 2. *A área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$.*

Demonstração. Dado um triângulo fundamental ABC, com vértices numa rede, consideremos um sistema de coordenadas com origem em A tal que o vértice B tenha coordenadas inteiras (m, n). Por simplicidade escreveremos, $A(0, 0)$ e $B(m, n)$. Inicialmente, mostraremos que m e n são primos entre si. Por absurdo, se $d > 1$ fosse um divisor comum de m e n, o ponto $P(\frac{m}{d}, \frac{n}{d})$ estaria na malha e pertenceria ao segmento AB, logo o triângulo ABC não seria fundamental.

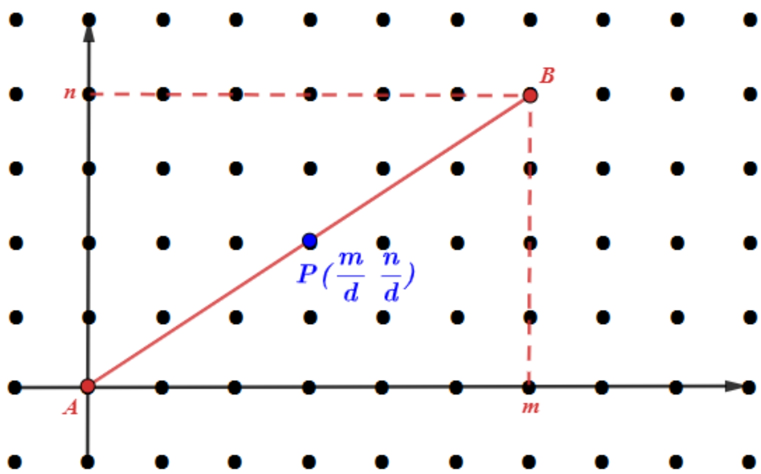


Figura 10 – Sistema de coordenadas com origem em A

Agora, suponhamos $m \neq 0$. A equação da reta que passa pelo ponto C e é paralela a AB é $y = \frac{n}{m}x + b$, onde b é a ordenada do pondo $D(0, b)$ no qual a reta corta o eixo vertical. Veja que todos os triângulos de lado AB e cujo terceiro vértice está sobre essa reta têm a mesma área que ABC. Em particular, a área do triângulo ABC é igual a área do triângulo ABD que por sua vez é igual a $\frac{|bm|}{2}$, pois $|b|$ é a medida do lado AD e $|m|$ da altura de ABD relativa a AD. Resta-nos então provar que $|b| = \frac{1}{|m|}$.
Para isto consideremos, de forma mais geral, a equação $y = \frac{n}{m}x + \beta$ de qualquer reta paralela a AB. Sabemos que β é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo vertical. Se a reta passa por algum ponto da malha com coordenadas (s, t) então $t = \frac{n}{m}s + \beta$, donde

$$\beta = t - \frac{n}{m}s = \frac{tm - sn}{m}.$$

Dentre essas retas, nenhuma está mais próxima da reta AB do que a que passa pelo ponto C (veja a Observação do Teorema 1), para o qual temos $\beta = b$. Assim, $|b|$ é o menor valor positivo que $|\beta|$ pode assumir. Por outro lado, como m e n são primos entre si, o Lema 1 nos garante que existem s, t tais que $tm - sn = 1$. Portanto, $\frac{1}{|m|}$ é o menor valor positivo de $|\beta|$, donde $|b| = \frac{1}{|m|}$.
Para completar a demonstração, falta considerar o caso $m = 0$. Como m e n são primos entre si, então se $m = 0$ obriga $n = \pm 1$ e o vértice C pertencer à reta $x = \pm 1$. Logo, ABC tem área igual a $\frac{1}{2}$, pois as medidas da base AB e altura de ABC são iguais a 1.

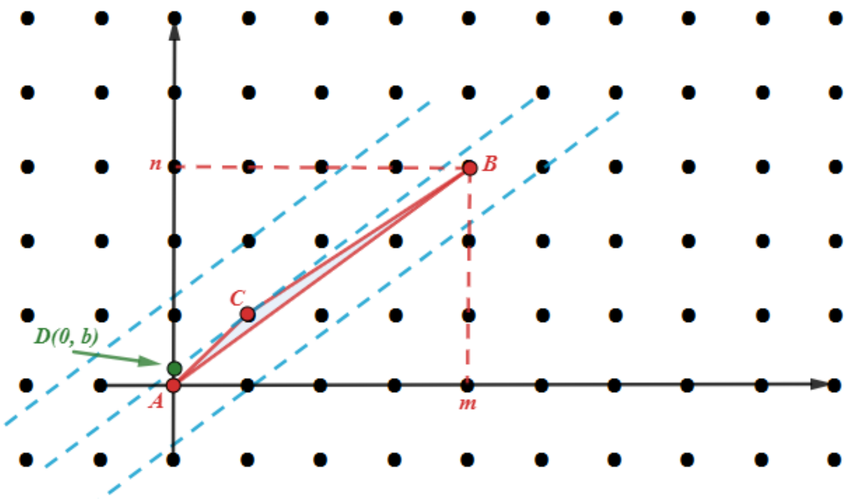


Figura 11 – Eixo de coordenadas

□

Teorema 3. *Todo polígono de n lados pode ser decomposto como reunião de $n-2$ triângulos justapostos, cujos vértices são vertices do polígono dado.*

Demonstração. Supondo, por absurdo, que existam polígonos para os quais o teorema não é verdadeiro, seja n o menor número natural tal que existe um polígono P, com n

lados, o qual não pode ser decomposto conforme estipula o enunciado acima. Tomemos no plano um sistema de coordenadas cartesianas de modo que nenhum lado do polígono seja paralelo ao eixo das ordenadas. Seja A o ponto de maior abcissa no bordo do polígono P. Como nenhum lado de P é vertical, então A deve ser um vértice. Sejam B e C os vértices adjacentes a A. Há duas possibilidades.

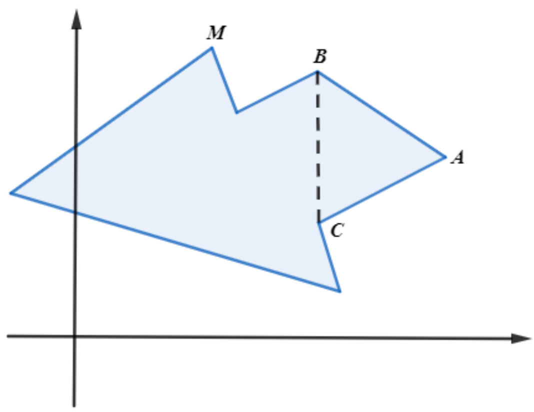


Figura 12 – Primeira possibilidade

Primeira possibilidade: o triângulo ABC não contém outros vértices de P, além de A, B e C.Neste caso, o polígono P', obtido de P quando se substituem os lados AB e AC por BC, tem $n-1$ lados. Como n é o menor número de lados para o qual o teorema é falso, P' pode ser decomposto em $n-3$ triângulos na forma do enunciado. Juntando o triângulo ABC a essa decomposição, vemos que o teorema é verdadeiro para P, o que é uma contradição.

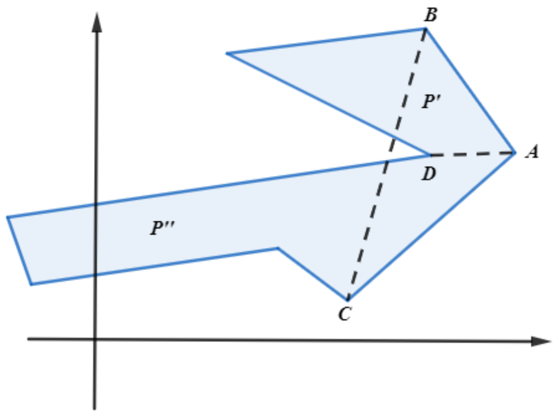


Figura 13 – Segunda possibilidade

Segunda possibilidade: o triângulo ABC contém, além de A, B e C, algum outro vértice de P. Dentre esses, seja D o mais distante do lado BC. Então, o segmento

AD decompõem P em dois polígonos P' e P, o primeiro com n' e o segundo com n'' lados, sendo $n' + n'' = n + 2$. Como $n' \geq 3$ e $n'' \geq 3$, vemos que n' e n'' são ambos menores do que n. O teorema então vale para P' e P'', que podem ser decompostos, respectivamente em $n' - 2$ e $n'' - 2$ triângulos, na forma do enunciado. Justapondo essas decomposições ao longo de AD, obtemos uma decomposição de P em $(n' - 2) + (n'' - 2) = n - 2$ triângulos, o que é uma contradição. Isto completa a demonstração do teorema. □

Corolário 1. *A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a $(n - 2) \cdot 180°$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3, um polígono de n lados pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono. Como cada triângulo tem 180º como soma dos ângulos internos, então a soma dos ângulos internos do polígono será igual a $(n - 2) \cdot 180°$. □

Teorema 4. *Todo polígono cujos vértices pertencem a uma malha pode ser decompostos numa reunião de triângulos fundamentais.*

Demonstração. Pelo Teorema 3, todo polígono, neste caso específico o polígono tem vértices pertencente a uma rede, pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos cujos vértices também pertencem a rede. Isto posto, basta mostrar que cada um desses triângulos, digamos o triângulo ABC que contém n pontos da rede (no interior ou no bordo), pode ser decomposto em triângulos fundamentais. Para isso, devemos adotar dois procedimentos em relação a algum ponto da rede ou no bordo do triângulo. Se existir realmente algum ponto P da rede no interiror do triângulo, traçamos segmentos de reta ligando esse ponto aos vérices A, B e C e deste modo, decompos ABC em triângulos, cada um contendo um número $< n$ de pontos da rede. Se houver pontos da rede sobre os lados de ABC, escolhemos um deles, digamos sobre AB, e o ligamos ao vértice C. Assim, decompomos ABC em 2 triângulos, cada um contendo um número $< n$ de pontos da rede. Prosseguindo dessa maneira, com um número finito de etapas, chegaremos a uma decomposição de ABC em triângulos fundamentais.

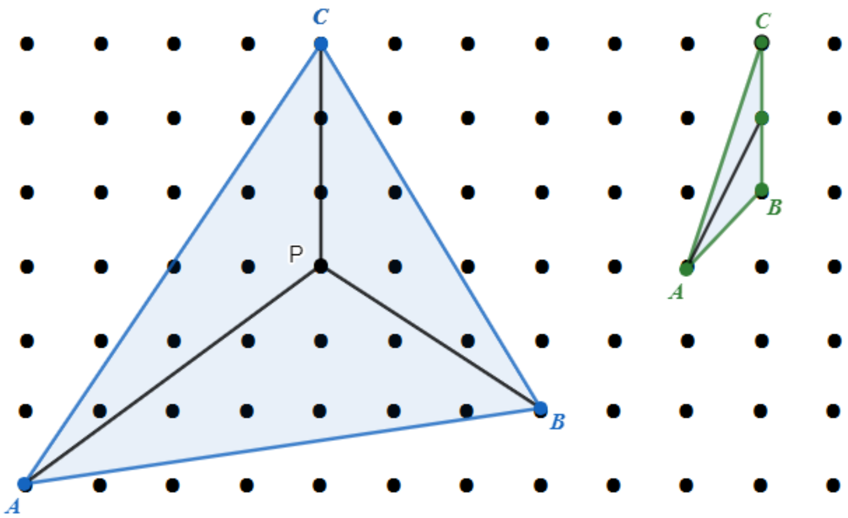


Figura 14 – Triângulos ABC

$\square$

Observação. *Decorre da demonstração acima que a divisão de um polígono cujos vértices pertencem a uma malha em triângulos fundamentais é máxima, pois se o polígono está dividido em n triângulos fundamentais e a área de todo triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$, então a área do polígono é $\frac{1}{2} \cdot n$. Se for possível dividir o polígono de uma outra forma em r triângulos fundamentais com $n < r$, então a área do polígono seria $\frac{1}{2} \cdot r$, mas isso é um absurdo.*

Agora, demonstraremos o **Teorema de Pick (Teorema 2)**, a partir dos resultados anteriores.

Demonstração. Para provar que $\frac{B}{2} + I - 1$ é a área do Polígono P, basta mostrar que o número T de triângulos fundamentais da decomposição de P, conforme o Teorema 3 é igual a $B + 2I - 2$, pois a área de P é igual a $\frac{T}{2}$, já que a área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$ (Lema 2.3).
Para isso, note que dividindo o polígono P em T triângulos fundamentais teremos que a soma dos ângulos de todos esses triângulos será dada por $T \cdot 180°$. Mas, se observarmos a figura 15 veremos que a justaposição dos triângulos formarão, em cada um dos I pontos internos, ângulos de $360°$, nos dando um valor de $I \cdot 360°$. Os outros B pontos coincidem com os vértices dos ângulos internos do polígono, cuja soma será $(n - 2) \cdot 180°$. Assim,

$$T \cdot 180° = (B - 2) \cdot 180° + I \cdot 360° = 180° \cdot (2 \cdot I + B - 2).$$

Logo,

$$T = 2 \cdot I + B - 2.$$

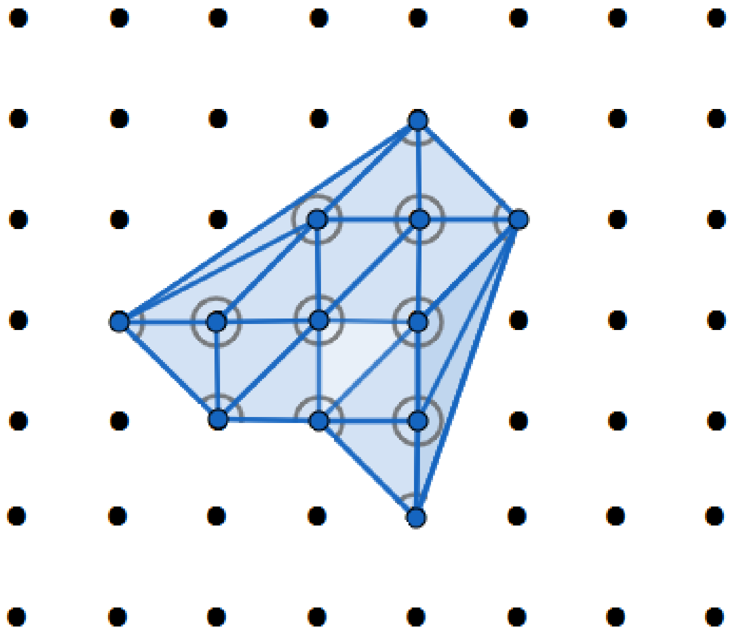


Figura 15 – Polígono decomposto em triângulos fundamentais

□

3 Oficina: Salvando o planeta Pentágono

3.1 Descrição da oficina

A oficina "Salvando o planeta Pentágono" mostra uma história fictícia que se passa em um universo constituído de formas geométricas composto por segmentos de reta, semirretas, retas e planos. Ela está dividida em três partes.

A primeira, mostra este universo em perigo, pois em um de seus planetas, Pentágono, um mago vem sugando a energia do planeta através de um item mágico. Mas surge um herói para deter o mago. Assim, começa uma saga repleta de obstáculos e desafios, onde o herói busca encontrar um determinado item mágico capaz de ajudar a derrotar o mago. Todos obstáculos e desafios dessa primeira parte são problemas matemáticos que os alunos precisam resolverem para ajudar o herói a continuar rumo ao objetivo de salvar o planeta. Os mesmos visam a introdução conceitos básicos envolvidos no teorema de Pick e seu uso, que é o foco central da oficina.

A segunda, de posse dos conceitos básicos, os alunos vão fazer a dedução do Teorema de Pick através de uma atividade.

A terceira, mostra o herói em busca de vitalidade, pois acabou ferido na batalha com o mago, e mais uma vez ele terá que enfrentar alguns desafios que foram concebidos para trabalhar uma demonstração do Teorema de Pick.

Como exposto no Capitulo 2, o Teorema de Pick mostra uma fórmula elementar, porém interessante de calcular a área de polígonos simples, cujos vértices são pontos de uma rede (ou malha quadriculada) através da contagem de pontos.

A oficina foi pensada para ser realizada com certa duração, a saber: Parte 1 com duração de 1h 30min; Parte 2 com 50min; Parte 3 com 1h 40min. O material de apoio para aplicação da mesma se encontra nos apêndices, onde no Apêndice A consta a história para ser entregue aos alunos e no B e C o material de apoio para as atividades da oficina. Por fim, durante a aplicação da oficina as recomendações contidas na seção 1.1 do Capítulo 1 devem ser seguidas.

3.2 Objetivos

1. Consolidar alguns conceitos elementares associados a polígonos.
2. Consolidar alguns conceitos elementares associados a sólidos.
3. Introduzir a noção de polígono fundamental.

4. Introduzir o Teorema de Pick.
5. Expor o aluno ao desafio de enfrentar problemas difíceis de ser resolvidos.
6. Apresentar ao aluno um método investigativo e experimental, estimulando-o a formular e testar hipóteses.
7. Induzir o aluno a formular perguntas e discutir possíveis respostas.
8. Estimular o aluno a formular e seguir instruções de ações.
9. Estimular o aluno a trabalhar em equipe.

3.3 Lista de equipamentos e materiais

1. Texto impresso com a história.
2. Geoplano; mínimo de um por grupo.
3. Elásticos coloridos.
4. Material de apoio impresso para as atividades propostas.

3.4 Oficina "Salvando o planeta Pentágono"

3.4.1 Parte 1

Em um universo onde tudo e todos são construídos por um elaborado e curioso sistema de formas geométricas composto por segmentos de reta, semirretas, retas e planos, um belo e brilhante sol cúbico nasce no horizonte iluminando florestas, mares, animais e todos os demais seres.

Contudo, a cada dia esse distinto universo perde seu vigor, pois no planeta Pentágono o fortíssimo mago Savir, em sua sede de poder, encontrou um poderoso Cetro de Prata, um item mágico que vem sugando toda a energia do planeta. Se não for detido, Savir e seu cetro reduzirão todo esse planeta à inexistência, e este é apenas o primeiro. Mas ainda há uma esperança para o planeta Pentágono. Uma antiga profecia diz que surgirá um herói capaz de vencer qualquer mal que o ameaçasse. (A partir daqui chamaremos o personagem principal de Querite)

Figura 16 – Querite

De forma misteriosa, Querite surge no planeta Pentágono. Ele surge dentro do Cubo Mágico. Um sólido com 5 faces brancas e 1 vermelha com pequenas estacas de 50 cm por toda parte igualmente espaçadas, formando um geoplano.

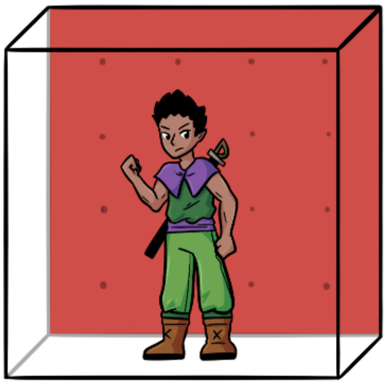


Figura 17 – Querite no cubo

Depois de um tempo, Querite percebe que ao tocar em quaisquer duas estacas, uma luz neon forma-se entre elas. Em seguida, ele ouve uma voz dizendo que é preciso formar polígonos para surgir uma porta em uma das paredes. Assim, o primeiro desafio de Querite é sair do cubo.

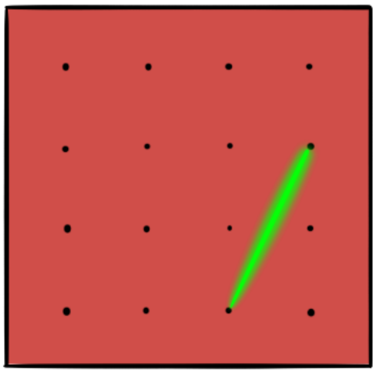


Figura 18 – Parede com as estacas

Atividade 1: Construindo polígonos

Duração: 15min

a) Neste momento o professor deve entregar aos grupos os geoplanos junto com elásticos e pedir que criem polígonos.

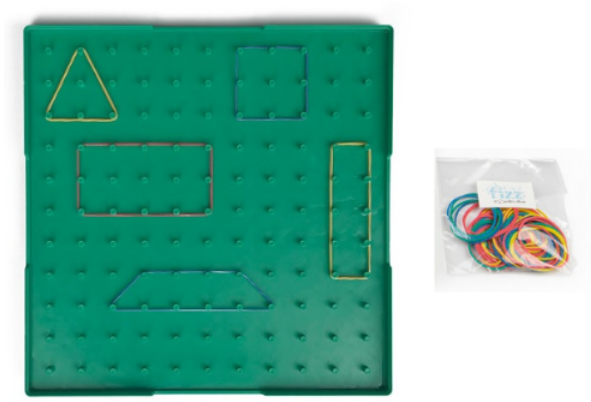


Figura 19 – Geoplano e elásticos

Discussão 1:

a) Qual é o nome de cada um dos polígonos construídos?
b) Verifique se algum grupo construiu algum polígono que "não tem pino no meio ou sobre a borda com exceção dos vértices" (polígono fundamental). Se algum grupo construiu, compartilhar isso com todos e "desafie" os demais grupos a construírem também. Se nenhum grupo construiu, então levante discussão se seria possível a criação de tais polígonos (a resposta para a possibilidade tem que ser de forma prática).

Recomendações:

(i) Durante a Atividade 1, algum grupo pode criar polígonos sobrepostos ou que tenham lados comuns, se isso não acontecer na Atividade 1, é bem provável que aconteça na Atividade 2, então, faz-se necessário que o professor discuta com os grupos essa questão no momento que ela surgir. Ele pode fazer um acordo com os alunos que no decorrer da oficina não poderá haver sobreposições de polígonos, mas eles podem ter lados comuns ou parcialmente coincidentes.

(ii) Durante a discussão do item b), recomenda-se que o professor peça aos alunos que batizem esses polígonos que "não tem pino no meio ou sobre a borda com exceção dos vértices" (polígono fundamental) com um nome especial (não é preciso que tais polígonos sejam chamados de fundamentais), ou seja, nesse momento está acontecendo a definição de polígono fundamental. No decorrer da oficina sempre vamos nos referir aos polígonos fundamentais com o nome de batismo dado pelos alunos (até a Atividade 3, a partir dela vamos usar o nome formal "polígono fundamental").

(iii) Na discussão do item b) fala-se em "interior" e "borda" de polígono, apesar de algo intuitivo, recomenda-se que o professor questione aos grupo o que seria tais coisas na visão deles. De maneira informal podemos dizer que "borda" de um polígono são todos os pontos que pertencem aos segmentos de retas que unidos formam o polígono e toda a parte de dentro do polígono pode ser chamada de "interior".

Após criar vários polígonos, uma porta surge e Querite sai do cubo. Nesse momento, ele se vê em um mundo diferente. Nesse momento, Jaruel, o velho sábio samurai, chega até ele, informa sobre a profecia e o porquê de ele ter vindo ao planeta Pentágono.

Querite é a única esperança de sobrevivência desse planeta, uma vez que ninguém foi capaz de derrotar o mago. Cabe a ele agora decidir, se aceita iniciar essa jornada e derrotar o mago ou se permite que todos e tudo nesse planeta, inclusive ele que aqui se encontra, pereçam.

—Aceita o desafio, Querite? — pergunta o mago.

— Aceito.

— Fico aliviado de você aceitar essa empreitada, Querite. Agora serás submetido a um treinamento.

Eles seguem pela cidade até uma arena, onde Jaruel troca de roupa e retorna em seus trajes de samurai portando sua catana.

— Vamos, Querite! Se você não for capaz nem mesmo de me vencer então a profecia é falsa.

Batalha 1:

Figura 20 – Batalha entre Querite e o sábio

— Você me venceu, parabéns! Você está pronto para o próximo desafio. Precisamos ir até a velha mina. Eles deixam a cidade para trás e seguem ao sul em direção a velha mina. Lá munidos de tochas e lanternas, exploram o espaço e encontram bem ao fundo uma porta de formato hexagonal. Jaruel explica a Querite que a senha para abrí-la é o "número máximo de polígonos em que ela pode ser dividida". Portanto, o desafio de Querite agora é inserir a senha para que a porta seja aberta.

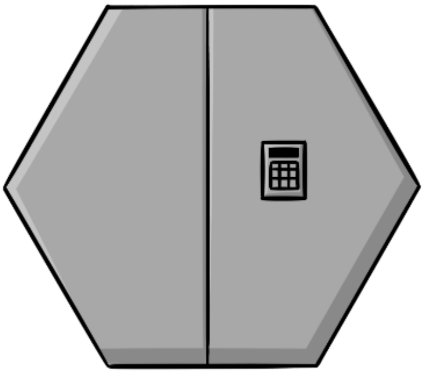


Figura 21 – Porta

Atividade 2: Decompondo polígonos

Duração: 20min

a) O professor pedirá aos grupos que formem um hexágono semelhante no geoplano e, em seguida, que usem o material de apoio (Veja Apêndice B) para dividir o hexágono na maior quantidade de polígonos para encontrar a senha.

Discussão 2:

a) Qual é a quantidade mínima de partes em que o hexágono pode ser dividido?
b) Qual é sua proposta de senha, ou seja, em quantos polígonos foi dividido o hexágono?
c) É possível encontrar outro número aspirante a senha, isto é, é possível dividir o hexágono em mais partes?
d) A utilização de algum polígono maximiza a divisão do hexágono? Se sim, qual polígono?

Recomendações:

(i) A quantidade mínima de partes que o hexágono pode ser dividido é 1.

(ii) A maior quantidade de polígonos que o hexágono pode ser dividido é 24 (triângulos fundamentais). Assim, a senha é 24. Veja abaixo uma possível divisão:

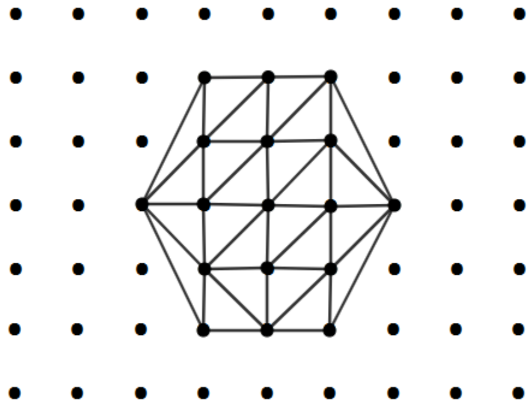


Figura 22 – Hexágono dividido em triângulos fundamentais

(iii) A discussão no item c) está relacionada ao que é uma prova, pois para ter a certeza que temos uma senha tem que ser fornecido um argumento que prove que não é possível dividir o hexágono em mais partes. É bom deixar claro aos alunos que um contra exemplo invalida uma afirmação, mas que exemplos particulares não demonstram a validade de uma afirmação. Eles vivenciarão a parte de que contra exemplo invalida uma afirmação quando analisar a divisão do hexágono feito por determinado grupo e outro propor uma melhor divisão, invalidando a primeira proposta como senha. Portanto, se algum grupo afirmar que é possível dividir o hexágono em mais partes, o professor tem que solicitar um argumento que corrobore essa afirmação.

(iv) No final da discussão do item d), solicita-se que o professor mencione que é possível obter divisão máxima com configurações diferentes.

(v) Depois da discussão de todos os itens, recomenda-se que o professor enfatize a ideia principal dessa atividade que é a de que "todo polígono cujos vértices são pontos de um geoplano pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais".

Querite consegue encontrar a senha e após passarem pela porta, ela se fecha atrás deles apagando tochas e lanternas. Agora, eles precisam atravessar um longo corredor repleto de armadilhas.

Após atravessarem, eles saem no jardim de um castelo de gelo, nesta hora o sábio Jaruel explica ao nosso herói que o hexágono que eles tiveram que dividir na maior quantidade de partes e assim encontrar a senha que abriu a porta, é na verdade o formato de uma das faces do Cristal Negro Hexagonal, que pertence à família dos Cristais Negros, pequenos itens mágicos que segundo a lenda ajudam a derrotar o mago Savir, e que eles devem procurar esse artefato a todo custo, pois é uma das chances que eles têm contra o mago.

No meio do jardim encontram a Arca Numérica, uma arca em forma de prisma retangular com vários números escritos.

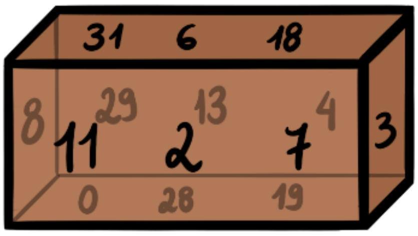


Figura 23 – Arca Numérica

No momento que Jaruel e Querite estão se aproximando da arca, o mago Savir aparece, aponta seu cetro mágico para o chão e faz surgir um imenso urso, com dentes em formato de pirâmide, afiados como navalha e olhos assustadores com aparência de dodecaedros vermelhos. O urso parte em direção a Querite, só restando ao nosso herói o ataque.

<u>Batalha 2</u>:

Figura 24 – Batalha entre Querite e o urso

> Após a batalha, ao retornar para a arca, Querite observa que dentro dela tem dois objetos, um geoplano com quatro triângulos desenhados e uma caneta dourada. Jaruel explica a Querite que para formar o Cristal Negro Hexagonal é necessário usar a caneta dourada para circular um dos números que se encontra na arca, e que esse número é igual à soma das áreas desses triângulos, após isso, os triângulos se fundirão e formarão o cristal.
>
> — Forme esse Cristal Negro, Querite!

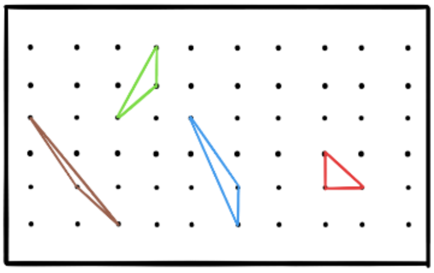


Figura 25 – Geoplano com triângulos

Atividade 3: Calculando a área de triângulos fundamentais

Duração: 20min

a) Neste momento o professor deverá pedir aos alunos que usem o material de apoio (Veja Apêndice B) para calcular a área de cada triângulo.

Discussão 3:

a) Esses triângulos são polígonos fundamentais (usar o nome de batismo que os alunos escolheram durante a Atividade 1?

b) Qual o valor da área de cada triângulo?

c) Pode-se afirmar que todo triângulo fundamental tem a mesma área?

Recomendações:

(i) Recomenda-se que o professor peça que os grupos calculem primeiro a área do triângulo vermelho, depois do verde, em seguida do azul e por último do marrom.

(ii) Na discussão do item b), ver a forma como os grupos calcularam a área de cada triângulo. Para isso, escolha um dos grupos e discuta com a turma a forma como eles calcularam a área do triângulo vermelho, dessa forma verificará se o valor da área está correto ou não, se não, durante o processo se chegará ao valor correto. Repita isso para todos os triângulos. No final chegaremos a que a área de cada triângulo é $1/2$.

(iii) Durante a discussão do item c), recomenda-se que o professor fale um pouco sobre o processo de demonstração matemática. Mesmo que a área dos quatro triângulos fundamentais apresentados seja igual a $1/2$, não é possível afirmar que todo tiângulo fundamental tem mesma área sem antes demonstrar tal afirmação. Mas, nesse caso existe uma demonstração que prova que a afirmação é verdadeira.

(iv) Mais uma vez é bom deixar claro aos alunos que um contraexemplo invalida uma afirmação, mas que exemplos particulares não demonstram sua validade.

(v) Após as discussões, o aplicador fará a transição para "polígonos fundamentais" do nome que os alunos deram a eles.

> Querite consegue calcular as áreas e usa a caneta dourada para circular o número correto na arca, isto é, o número 2, em seguida, o cristal foi formado.
>
> — Finalmente o Cristal Negro Hexagonal foi formado, e ele é a arma que você usará contra o mago, Querite!

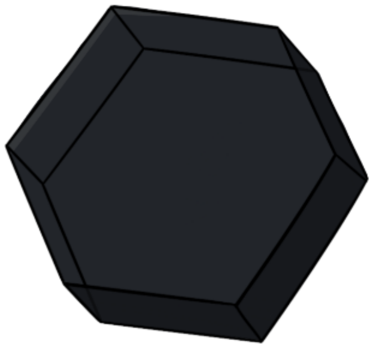


Figura 26 – Cristal Hexagonal

> Uma das faces do cristal quando apontada para uma superfície de gelo fica brilhando e emite uma luz que forma um hexágono semelhante ao da porta hexagonal.
>
> — O brilho emitido pelo cristal está muito fraco, ele não está ativado!
>
> — Você precisa ativa-lo, Querite! Para ativar o cristal é necessário escrever nele com a caneta dourada o valor da área do hexágono emitido pela luz.

Atividade 4: Calculando a área de polígonos através da área de triângulos fundamentais.

Duração: 15min

a) Qual o valor da área do hexágono emitido pela luz do Cristal Negro?

Discussão 4:

a) Seria possível calcular a área desse hexágono através da área dos triângulos fundamentais que a compõem?
b) Verifique se algum grupo calculou a área do hexágono utilizando triângulos fundamentais que o compõem. Se algum grupo assim fez, compartilhar com todos e "desafiar" os demais grupos a calcularem também. Se nenhum grupo calculou dessa forma, então levantar discussão se seria possível o cálculo da área dessa maneira (a resposta para a possibilidade tem que ser de forma prática).

Recomendações:

(i) Como o hexágono foi dividido em 24 triângulos fundamentais e a área de cada triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$, então a área dele é $24 \cdot \frac{1}{2} = 12$.

Querite ativa o cristal e eles partem ao encontro do mago Savir. Ao adentrarem por uma das portas do castelo, se deparam com um grande salão de gelo. Nesse salão, Savir encontra-se com o seu Cetro de Prata ativado, sugando a energia do universo. Ele está em transe, concentrado neste encantamento de ordem cósmica. Ele sai do transe e furioso diz:

— Vou destruir vocês e esse cristal!

Começa a batalha entre Querite e mago Savir.

Batalha 3:

Figura 27 – Batalha entre Querite e o mago

A batalha foi intensa, Querite chegou a ser ferido, mas destruiu o mago Savir com seu Cetro de Prata. Após isso o planeta voltou a sua normalidade.

3.4.2 Parte 2

No deccorer da história, vimos que para derrotar o mago, Querite usou um dos Cristais Negros cujo tinha uma das faces o formato de um hexágono. Agora, cada grupo irá pensar em um Cristal Negro com o formato de livre escolha e construir uma de suas faces no geoplano. Após a criação, cada grupo irá dividí-lo em triângulos fundamentais e em seguida preencher o campo da tabela referente a si.

Atividade:

Duração: 50min

O professor pedirá que os alunos usem o geoplano fisíco ou o do material de apoio (Veja Apêndice C) para criar a face do cristal.

Discussão:

a) Será que existe alguma relação entre o número de triângulos fundamentais, quantidade de pontos que estão na borda e no interior dos cristais?

b) Será que existe alguma relação entre a área dos cristais, o número de triângulos fundamentais, quantidade de pontos que estão na borda e no interior dos cristais?

Recomendação:

(i) Sejam A, i e b a área, a quantidade de pontos do interior e do borda do Cristal, respectivamente. Então, $A = \frac{b}{2} + i - 1$ ou $A = \frac{1}{2} \cdot (b + 2 \cdot i - 2)$ onde $b + 2 \cdot i - 2$ é a quantidade de triângulos fundamentais.

3.4.3 Parte 3

Durante a batalha com o mago Savir, Querite sofreu alguns ferimentos. A medida que os dias passavam, sua vitalidade ia esvaindo. Então, o sábio Jaruel lhe disse que seria possível restaurá-la. Que na Floresta Mosaica existe um livro mágico chamado de Livro da Vida e, ele tem o poder de restaurar sua vitalidade.

A figura 28, a seguir, é uma vista aérea da região da floresta. Nos vértices dos triângulos ficam Árvores Azuis e Vermelhas.

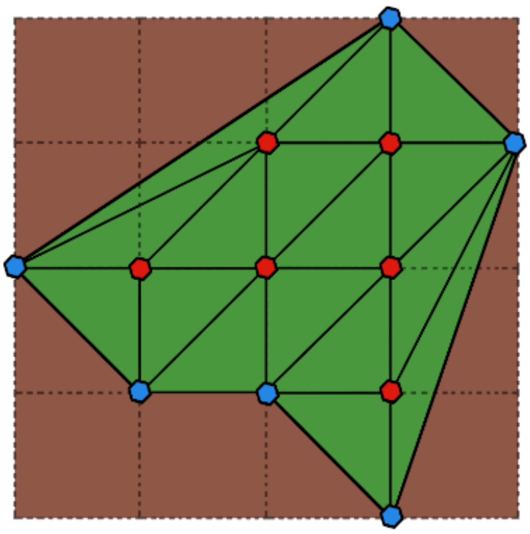


Figura 28 – Floresta Mosaíca em verde com divisão máxima em triângulos fundamentais como no hexágono da Atividade 2 da primeira parte da oficina

Jaruel continuou dizendo que o Livro da Vida fica aberto com alguns desafios relacionados à floresta, e a pessoa que resolvê-los tem sua vitalidade restaurada. Mas existe uma condição: as respostas dos desafios ímpares devem ser escritas com o pecíolo de uma das árvores azuis e dos pares com o pecíolo de uma das árvores vermelhas.

Assim, eles partem para a floresta. Ao chegarem, foram à procura das árvores para retirarem os pecíolos. Eles notaram que após retirarem uma folha das árvores vermelhas, elas giram uma volta completa, já as azuis giram um pouco menos.

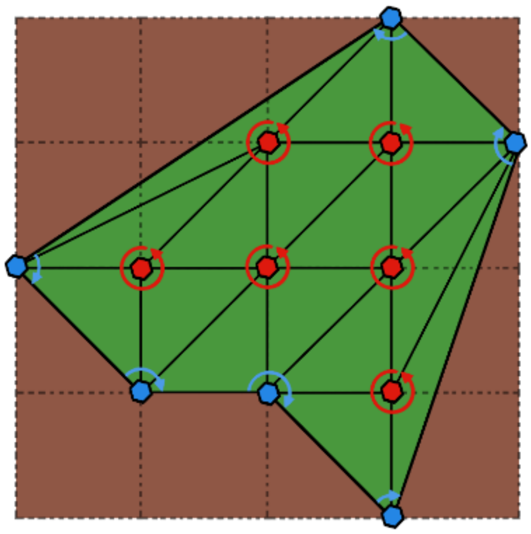


Figura 29 – Giro das árvores vermelhas e azuis

Jaruel retirou e entregou a Querite os pecíolos e começaram a procura pelo livro. Após um longa caminhada, eles localizaram uma caverna e ao adentrarem viram o Livro da Vida.

Figura 30 – Livro da Vida

O livro estava aberto nas páginas que continham os desafios, então Jaruel disse:

— Querite, toda a jornada que você trilhou até agora o ajudará na resolução dos desafios. Resolva o primeiro.

Desafio 1:

Duração: 10min

a) Qual é a soma dos ângulos internos dos triângulos fundamentais que dividem a floresta?

   Observação. *Veja Figura 28.*

Discussão 1:

a) Qual é o valor da soma?
b) Como foi calculado esse valor?

Recomendação:

(i) O natural é que os alunos cheguem à soma multiplicando a quantidade de triângulos por 180° (soma dos ângulos internos de um triângulo), ou seja, $16 \cdot 180°$ mas possa ser que surjam outras maneiras de realizar esse cálculo, assim recomenda-se que o professor levante o questionamento de como cada grupo chegou nesse valor e debata com a turma.

— Muito bem, Querite! Agora, você tem que resolver o segundo desafio. Vamos lá!

Desafio 2:

Duração: 5min

a) Numa floresta hipotética dividida em T triângulos fundamentais, qual será o valor da soma dos ângulos internos desses triângulos?

Discussão 2:

a) Qual é o valor da soma?

Recomendações:

(i) Nesse desafio será feita a transição do concreto para o abstrato. No Desafio 1 os alunos calcularam a soma dos ângulos internos dos triângulos fundamentais que dividem a floresta, agora simulamos um situação hipotética onde uma floresta está dividida em T triângulos fundamentais.

(ii) Como a soma dos ângulos interno de um triângulo é $180°$ e tem T triângulos fundamentais, então a soma será $T \cdot 180°$.

— Excelente! Agora, vá para o terceiro desafio. Vamos lá, Querite!

Discussão 3.1:

Certo trecho da história diz: "Eles notaram que após retirarem uma folha das árvores vermelhas, elas giram uma volta completa, já as azuis giram um pouco menos". (Veja Figura 28)

a) Tendo em vista que cada árvore da floresta gira determinados graus, então qual é o ângulo que cada árvore pode girar?

Observação. *Diferente dos outros desafios, esse começa com uma discussão.*

Recomendação:

(i) Recomenda-se que o professor fomente essa discussão inicial para que os alunos cheguem a conclusão de que os giros das árvores azuis são na verdade os ângulos internos do polígono formado pela floresta. Para isso, perguntas feitas aos grupos como: Qual é o formato da floresta? Nesse formato, o que representa cada árvore azul? Se o giro de cada árvore azul for o ângulo interno de um polígono, como podemos chegar a soma de todos os giros? serão essências para chegar na conlusão.

Desafio 3:

Duração: 20min

a) Qual é a soma dos ângulos que as árvores vermelhas podem girar?
b) Qual é a soma dos ângulos que as árvores azuis podem girar?
c) Qual é a soma de todos os ângulos que as árvores podem girar?

Discussão 3.2:

a) Qual foi o valor que das somas que cada grupo encontrou?
b) Os grupos chegaram as somas da mesma maneira?

Recomendações:

(i) No item a) do desafio, como tem 6 árvores vermelhas e cada uma gira $360°$, então a soma será $6 \cdot 360° = 2160°$

(ii) No item b), como o polígono da floresta tem 6 lados e a soma dos ângulos internos de um polígono é $(n-2) \cdot 180°$, então a soma será $(6-2) \cdot 180° = 720°$.

(iii) No item c), basta somar o resultado do item a) com o item b), ou seja, $2160° + 720° = 2880°$.

— Querite, você conseguiu resolver mais um desafio. Siga em frente!

Desafio 4:

Duração: 15min

Numa floresta hipotética (com formato de polígono simples) Com V árvores vermelhas e Z árvores azuis:

a) Qual é a soma dos ângulos que as árvores vermelhas podem girar?
b) Qual é soma dos ângulos que as árvores azuis podem girar?
c) Qual é a soma de todos os ângulos que todas as árvores podem girar?

Recomendações:

(i) Nesse desafio, mais uma vez será feita a transição do concreto para o abstrato. No Desafio 3, os alunos calcularam a soma dos ângulos que as árvores vermelhas, azuis e as duas juntas podem girar, desta vez eles farão os mesmos cálculos para uma floresta hipotética com Várvores vermelhas (pontos internos) e Z árvores azuis (pontos do bordo).

(ii) No item a), como tem V árvores vermelhas e cada uma gira $360°$, então a soma será $V \cdot 360°$.

(iii) No item b), como o polígono tem Z vértices (árvores azuis), então ele tem Z lados, logo a soma dos ângulos internos desse polígono é $(Z-2) \cdot 180°$.

(iv) No item c), basta somar o resultado do item a) com o item b), ou seja, $V \cdot 360° + (Z-2) \cdot 180°$

> — Isso! Você conseguiu resolver mais um desafio. Vá para o próximo, Querite!

Desafio 5:

Duração: 7min

a) Os valores encontrados nos Desafios 1 e 3 são iguais?

Discussão 5:

a) Em caso de afirmação ou negação, por quê?

Recomendação:

(i) Se algum grupo não chegar à conclusão de que os valores obtidos desafios são iguais, recomenda-se que o aplicador abra discussão com a turma dos valores encontrados e encontre o erro para chegarem a conclusão de que os valores são iguais.

> — Ótimo, Querite! Você está muito próximo de ter sua vitalidade restaurada. Continue!

Desafio 6:

Duração: 8min

a) Considerando uma mesma floresta hipotética, as expressões obtidas nos Desafios 2 e 4.c) são iguais?

Discussão 6:

a) As expressões são iguais? Por quê?

Recomendação:

(i) Se algum grupo não chegar à conclusão de que as expressões obtidas nos desafios são iguais, recomenda-se que o professor abra discussão com a turma dos valores encontrados e encontre o erro para chegarem a conclusão de que as expressões são iguais.

— Resolveu mais um desafio, agora resta apenas dois, Querite! Você consegue!

Desafio 7:

Duração: 15min

a) Sabendo que as expressões obtidas nos Desafios 2 e 4 são iguais, qual é o valor da quantidade de triângulos fundamentais T em função dos números V e Z de árvores vermelhas e azuis, respectivamente?

Discussão 7:

a) Qual foi a expressão que cada grupo encontrou para T?

b) A forma que cada grupou na expressão para T foi a mesma?

Recomendação:

(i) No Desafio 2 os alunos deduziram que o valor da soma dos ângulos internos de uma floresta hipotética dividida em T triângulos fundamentais é $T \cdot 180°$. No Desafio 4 eles deduziram que o mesmo valor da soma dos angulos internos será $(A-2) \cdot 180° + V \cdot 360°$, onde V é a quantidade de árvores vermelhas (pontos internos) e A é a quantidade de árvores azuis (pontos do bordo). Assim, igualando as duas expressões, obtemos $T = 2 \cdot Z + V - 2$. Essa é a formula para a quantidade de triângulos fundamentais que um polígono pode ser dividido, e sua obtenção é um dos pontos altos da oficina. É de fundamental importância que todos consigam compreender a expressão para T, portanto, recomenda-se que o aplicador tenha uma atenção especial no desafio.

— Agora só falta o último desafio, Querite! Você consegue! Vá!

Desafio 8:

Duração: 15min

a) Qual é a área da Floresta Mosaíca?

b) Sendo A a área de uma floresta hipotética (com formato de polígono simples) e T a quantidade de triângulos fundamentais que o particiona, qual é o valor de A?

Discussão 8:

a) Quais foram os valores encontrados para as áreas?

b) A maneira que cada grupo chegou nos valores são iguais?

Recomendações:

(i) No item a) do desafio, como a Floresta Mosaíca está dividida em 16 triângulos fundamentais e a área de cada triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$, então basta multiplicar $\frac{1}{2}$ por 16 que encontra a área, isto é, $\frac{1}{2} \cdot 16 = 8\ cm^2$.

(ii) No item b), como o polígomo está dividido em T triângulos fundamentais e a área de cada triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$, então basta multiplicar $\frac{1}{2}$ por T ($T = 2 \cdot A + V - 2$), ou seja, $A = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot A + V - 2) = A + \frac{V}{2} - 2$, que é a formula do Teorema de Pick.

— Encontrou a área!!!

Depois que Querite determinou a área da floresta, ele foi envolvido por um brilho amarelo durante alguns segundos e a sua vitalidade foi restaurada.

Desde esse dia Querite passou a ser o guardião do planeta Pentágono.

4 Considerações finais

O trabalho feito nessa dissertação foi uma proposta de oficina matemática com componentes lúdicos e de forma contextualizada para o ensino de alguns tópicos de geometria tendo como pano de fundo o Teorema de Pick. Acreditamos que atividades com esses componentes podem contribuir ao engajamento dos alunos na disciplina de matemática.

Existem na literatura propostas de trabalhos que abordam a utilização do Teorema de Pick no Ensino Básico, mas parece ser que este é o primeiro trabalho que o faz explorando seu potencial lúdico e utilizando contextualização por semi-realidade ao trazer uma história fictícia com componentes iconográficos próprios visando o engajamento dos participantes nas atividades. Damos destaque à parte da nossa proposta que aborda uma demonstração do teorema, tal como expomos na Parte 3 do capítulo da proposta. Isto é interessante porque, em geral, é um desafio abordar demonstrações de teoremas sem uma abordagem abstrata, assim, na oficina apresentada fazemos isto de forma lúdica esperando que o processo seja mais prazeroso para os alunos.

Ressaltamos que a proposta destaca o papel do professor como mediador do conhecimento e não como detentor dele. Isto fica claro quando nos esforçamos em colocar recomendações que orientam a forma de execução dessa mediação em cada atividade da oficina. Dessa forma, a proposta foge do método tradicional de ensino e acreditamos que pode contribuir para uma aprendizagem com significado e que desenvolva algumas das habilidades e competências que se esperam do ensino da matemática.

Lembramos que em momento posterior de retomada das aulas presenciais, faz-se necessário a aplicação da oficina e a coleta de dados decorrentes da mesma, pois sua análise será fundamental para o melhoramento da proposta.

Por fim, e não menos importante, destaco a influência do trabalho realizado nesta dissertação na minha prática docente. Tenho me convencido que o desenvolvimento de atividades que usem ludicidade e contextualização de forma mediada podem fazer com que o aprendizado dos alunos seja mais prazeroso e tenha significado. Neste sentido, o trabalho foi relevante na minha formação, posso dizer que houve uma dilatação da minha mente incorporando um nova visão e, como já dizia Albert Einstein: “A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original”.

Referências

ARAUJO, Luciene I. N. **Oficinas de Matemática Experimental**: Uma História da TV. Minimizando Custos, Dissertação de mestrado do PROFMAT, UESC, 2017.

BARBOSA, João L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 8ª ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC/SEB, DICEI, 2013.

CAILLOSIS, Roger. **Os jogos e os homens**: a máscara e a vertigem. Tradução José Garcez Palha. Lisboa, Portugal: Cotovia, 1994.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: Saberes necessários à prática educativa. São Paulo-SP: Paz e Terra, 1996.

CANDAU, Vera M. et al. **Oficinas pedagógicas de direitos humanos**. 2ª ed. Petrópolis-RJ: Vozes, 1995.

FRANÇA, Lucas S. **Oficinas de Matemática Experimental**: Teoria dos Jogos e a Batalha dos trezentos, Dissertação de mestrado do PROFMAT, UESC, 2018.

GEORG ALEXANDER PICK. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2020. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Georg_Alexander_Pickoldid=59554864>. Acesso em: 10 set. 2021.

GOMERO, Germán I.; CENTURIÓN, Nestor F. C. **Aprendizagem Lúdico-Experimental de Matemática do Ensino Básico ao Superior**. 2019. In: Anais do XVIII Baiano de Educação Matemática.

LIMA, Elon L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 1991.

LUCKESI, Cipriano C. **Educação, Ludicidade e Prevenção das Neuroses Futuras**: uma Proposta Pedagógica a partir da Biossíntese. Ludopedagogia, Salvador - BA: UFBA/ FACED/PPGE, v. 1, p. 9-42, 2000.

NETO, Antonio C. M. **GEOMETRIA**. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2013.

PAVIANE, Neires M. S.; Fontana, Niura M. **Oficinas pedagógicas**: relato de experiência. Caxias do Sul - RG: Conjectura, 2009, v. 14, n. 2, p. 77-88, 2009.

PEREIRA, Katiane. **Oficinas de Matemática Experimental**: Entrando numa Fria, Dissertação de mestrado do PROFMAT, UESC, 2017.

RAU, Maria C. T. D. **A ludicidade na educação**: : uma atitude pedagógica. 1ª ed. Curitiba - PR: IBPEX, 2012.

SKOVSMOSE, Ole. **Cenários para investigação**. Bolema, Rio Claro – SP, v. 13, n. 14, 2000

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica**: A questão da Democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação crítica**: incerteza, matemática e responsabilidade. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007.

SILVA, Dickson M. **Oficinas de Matemática Experimental**: Um Inglês em Salvador, Dissertação de mestrado do PROFMAT, UESC, 2017.

SOUZA, Vinícius M. S. **Oficinas de Matemática Experimental**: do Princípio Multiplicativo ao Fatorial, Dissertação de mestrado do PROFMAT, UESC, 2017.

APÊNDICE A – Salvando o planeta Pentágono

A.1 Parte 1 da oficina

Em um universo onde tudo e todos são construídos por um elaborado e curioso sistema de formas geométricas composto por segmentos de reta, semirretas, retas e planos, um belo e brilhante sol cúbico nasce no horizonte iluminando florestas, mares, animais e todos os demais seres.

Contudo, a cada dia esse distinto universo perde seu vigor, pois no planeta Pentágono o fortíssimo mago Savir, em sua sede de poder, encontrou um poderoso Cetro de Prata, um item mágico que vem sugando toda a energia do planeta. Se não for detido, Savir e seu Cetro reduzirão todo esse planeta à inexistência, e este é apenas o primeiro. Mas ainda há uma esperança para o planeta Pentágono. Uma antiga profecia diz que surgirá um herói capaz de vencer qualquer mal que o ameaçasse. (A partir daqui chamaremos o personagem principal de Querite)

Figura 31 – Querite

De forma misteriosa, Querite surge no planeta Pentágono.

Ele surge dentro do Cubo Mágico. Um sólido com 5 faces brancas e 1 vermelha com pequenas estacas de 50 cm por toda parte igualmente espaçadas formando um geoplano.

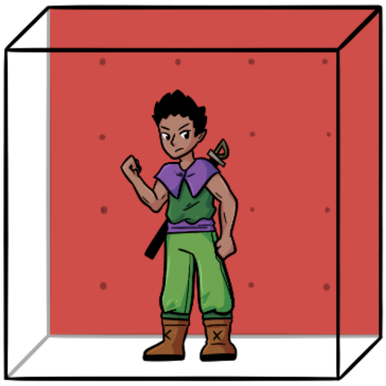


Figura 32 – Querite no cubo

Depois de um tempo, Querite percebe que ao tocar em quaisquer duas estacas, uma luz neon forma-se entre elas. Em seguida, ele ouve uma voz dizendo que é preciso formar polígonos para surgir uma porta em uma das paredes. Assim, o primeiro desafio de Querite é sair do cubo.

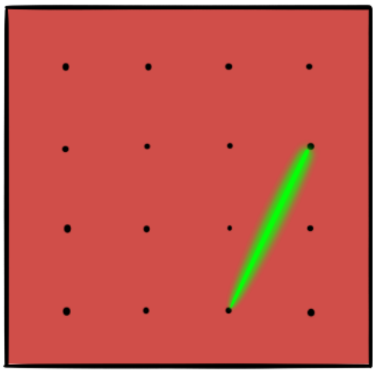


Figura 33 – Parede com as estacas

Atividade 1: Construindo polígonos

a) Usem o geoplano e os elásticos e criem polígonos.

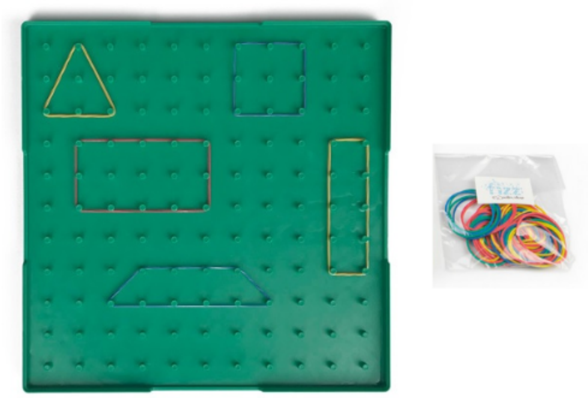


Figura 34 – Geoplano e elásticos

Após criar vários polígonos, uma porta surge e Querite sai do cubo. Nesse momento, ele se vê em um mundo diferente. Nesse momento, Jaruel, o velho sábio samurai, chega até ele, informa sobre a profecia e o porquê de ele ter vindo ao planeta Pentágono.

Querite é a única esperança de sobrevivência desse planeta, uma vez que ninguém foi capaz de derrotar o mago. Cabe a ele agora decidir, se aceita iniciar essa jornada e derrotar o mago ou se permite que todos e tudo nesse planeta, inclusive ele que aqui se encontra, pereçam.

—Aceita o desafio, Querite? — pergunta o mago.

— Aceito.

— Fico aliviado de você aceitar essa empreitada, Querite. Agora serás submetido a um treinamento.

Eles seguem pela cidade até uma arena, onde Jaruel troca de roupa e retorna em seus trajes de samurai portando sua catana.

— Vamos, Querite! Se você não for capaz nem mesmo de me vencer então a profecia é falsa.

Batalha 1:

Figura 35 – Batalha entre Querite e o sábio

— Você me venceu, parabéns! Você está pronto para o próximo desafio. Precisamos ir até a velha mina. Eles deixam a cidade para trás e seguem ao sul em direção a velha mina. Lá munidos de tochas e lanternas, exploram o espaço e encontram bem ao fundo uma porta de formato hexagonal. Jaruel explica a Querite que a senha para abrí-la é o "número máximo de polígonos em que ela pode ser dividida". Portanto, o desafio de Querite agora é inserir a senha para que a porta seja aberta.

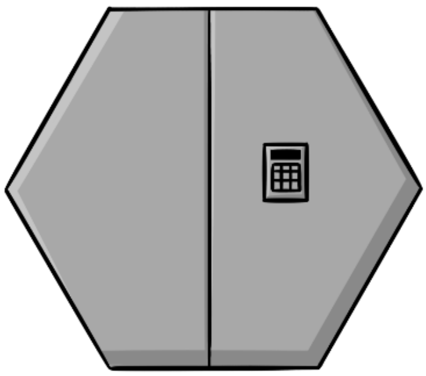


Figura 36 – Porta

Atividade 2: Decompondo polígonos

a) Formem um hexágono semelhante a porta no geoplano e, em seguida, usem o material de apoio (Veja Apêndice B) para dividir o hexágono na maior quantidade de polígonos para encontrar a senha.

Querite consegue encontrar a senha e após passarem pela porta, ela se fecha atrás deles apagando tochas e lanternas. Agora, eles precisam atravessar um longo corredor repleto de armadilhas.

Após atravessarem, eles saem no jardim de um castelo de gelo, nesta hora o sábio Jaruel explica ao nosso herói que o hexágono que eles tiveram que dividir na maior quantidade de partes e assim encontrar a senha que abriu a porta, é na verdade o formato de uma das faces do Cristal Negro Hexagonal, que pertence à família dos Cristais Negros, pequenos itens mágicos que segundo a lenda ajudam a derrotar o mago Savir, e que eles devem procurar esse artefato a todo custo, pois é uma das chances que eles têm contra o mago.

No meio do jardim encontram a Arca Numérica, uma arca em forma de prisma retangular com vários números escritos.

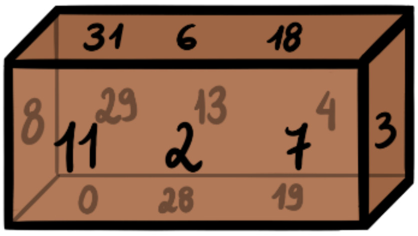


Figura 37 – Arca Numérica

No momento que Jaruel e Querite estão se aproximando da arca, o mago Savir aparece, aponta seu cetro mágico para o chão e faz surgir um imenso urso, com dentes em formato de pirâmide, afiados como navalha e olhos assustadores com aparência de dodecaedros vermelhos. O urso parte em direção a Querite, só restando ao nosso herói o ataque.

Batalha 2:

Figura 38 – Batalha entre Querite e o urso

> Após a batalha, ao retornar para a arca, Querite observa que dentro dela tem dois objetos, um geoplano com quatro triângulos desenhados e uma caneta dourada. Jaruel explica a Querite que para formar o Cristal Negro Hexagonal é necessário usar a caneta dourada para circular um dos números que se encontra na arca, e que esse número é igual à soma das áreas desses triângulos, após isso, os triângulos se fundirão e formarão o cristal.
>
> — Forme esse Cristal Negro, Querite!

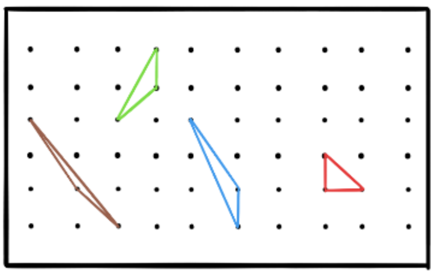


Figura 39 – Geoplano com triângulos

Atividade 3: Calculando a área de triângulos fundamentais

a) Usem o material de apoio (Veja Apêndice B) para calcularem a área de cada triângulo.

Querite consegue calcular as áreas e usa a caneta dourada para circular o número correto na arca, isto e´, o número 2, em seguida, o cristal foi formado.

— Finalmente o Cristal Negro Hexagonal foi formado, e ele é a arma que você usará contra o mago, Querite!

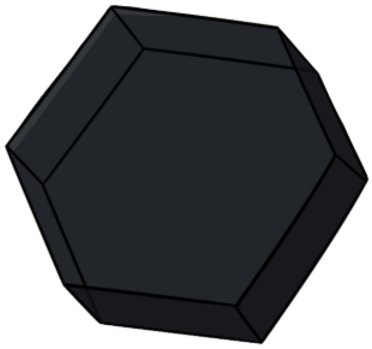


Figura 40 – Cristal Hexagonal

Uma das faces do cristal quando apontada para uma superfície de gelo fica brilhando e emite uma luz que forma um hexágono semelhante ao da porta hexagonal.

— O brilho emitido pelo cristal está muito fraco, ele não está ativado!

— Você precisa ativa-lo, Querite! Para ativar o cristal é necessário escrever nele com a caneta dourada o valor da área do hexágono emitido pela luz.

Atividade 4: Calculando a área de polígonos através da área de triângulos fundamentais.

a) Qual o valor da área do hexágono emitido pela luz do Cristal Negro?

Querite ativa o cristal e eles partem ao encontro do mago Savir. Ao adentrarem por uma das portas do castelo, se deparam com um grande salão de gelo. Nesse salão, Savir encontra-se com o seu Cetro de Prata ativado, sugando a energia do universo. Ele está em transe, concentrado neste encantamento de ordem cósmica. Ele sai do transe e furioso diz:

— Vou destruir vocês e esse cristal!

Começa a batalha entre Querite e mago Savir.

Batalha 3:

Figura 41 – Batalha entre Querite e o mago

> A batalha foi intensa, Querite chegou a ser ferido, mas destruiu o mago Savir com seu Cetro de Prata. Após isso o planeta voltou a sua normalidade.

A.2 Parte 2 da oficina

No deccorer da história, vimos que para derrotar o mago, Querite usou um dos Cristais Negros cujo tinha uma das faces o formato de um hexágono. Agora, cada grupo irá pensar em um Cristal Negro com o formato de livre escolha e construir uma de suas faces no geoplano. Após a criação, cada grupo irá dividí-lo em triângulos fundamentais e em seguida preencher o campo da tabela referente a si.

Atividade:

O professor pedirá que os alunos usem o geoplano fisíco ou o do material de apoio (Veja Apêndice C) para criar a face do cristal.

A.3 Parte 3 da oficina

> Durante a batalha com o mago Savir, Querite sofreu alguns ferimentos. A medida que os dias passavam, sua vitalidade ia esvaindo. Então, o sábio Jaruel lhe disse que seria possível restaurá-la. Que na Floresta Mosaica existe um livro mágico chamado de Livro da Vida e, ele tem o poder de restaurar sua vitalidade.
>
> A figura abaixo é uma vista aérea da região da floresta. Nos vértices dos triângulos ficam Árvores Azuis e Vermelhas.

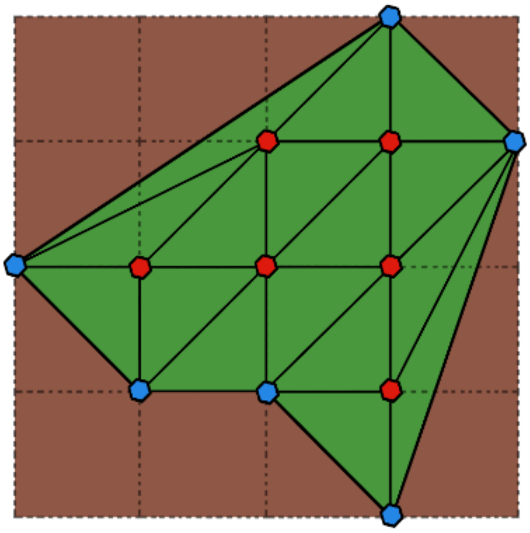


Figura 42 – Floresta Mosaíca em verde com divisão máxima em triângulos fundamentais como no hexágono da Atividade 2 da primeira parte da oficina

Jaruel continuou dizendo que o Livro da Vida fica aberto com alguns desafios relacionados à floresta, e a pessoa que resolvê-los tem sua vitalidade restaurada. Mas existe uma condição: as respostas dos desafios ímpares devem ser escritas com o pecíolo de uma das árvores azuis e dos pares com o pecíolo de uma das árvores vermelhas.

Assim, eles partem para a floresta. Ao chegarem, foram à procura das árvores para retirarem os pecíolos. Eles notaram que após retirarem uma folha das árvores vermelhas, elas giram uma volta completa, já as azuis giram um pouco menos.

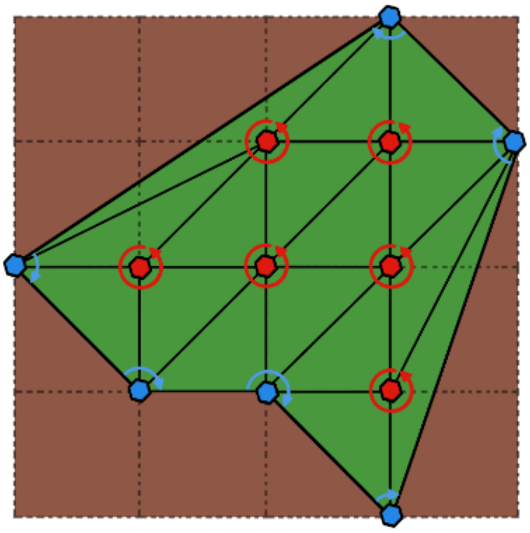


Figura 43 – Giro das árvores vermelhas e azuis

Jaruel retirou e entregou a Querite os pecíolos e começaram a procura pelo livro. Após um longa caminhada, eles localizaram uma caverna e ao adentrarem viram o Livro da Vida.

Figura 44 – Livro da Vida

O livro estava aberto nas páginas que continham os desafios, então Jaruel disse:

— Querite, toda a jornada que você trilhou até agora o ajudará na resolução dos desafios. Resolva o primeiro.

Desafio 1:

a) Qual é a soma dos ângulos internos dos triângulos fundamentais que dividem a floresta?

Observação. *Veja Figura 27.*

> — Muito bem, Querite! Agora, você tem que resolver o segundo desafio. Vamos lá!

Desafio 2:

a) Numa floresta hipotética dividida em T triângulos fundamentais, qual será o valor da soma dos ângulos internos desses triângulos?

> — Excelente! Agora, vá para o terceiro desafio. Vamos lá, Querite!

a) Tendo em vista que cada árvore da floresta gira determinados graus, então qual é o ângulo que cada árvore pode girar?

Observação. *Diferente dos outros desafios, esse começa com uma discussão.*

Desafio 3:

a) Qual é a soma dos ângulos que as árvores vermelhas podem girar?
b) Qual é a soma dos ângulos que as árvores azuis podem girar?
c) Qual é a soma de todos os ângulos que as árvores podem girar?

> — Querite, você conseguiu resolver mais um desafio. Siga em frente!

Desafio 4:

Numa floresta hipotética (com formato de polígono simples) Com V árvores vermelhas e Z árvores azúis:

a) Qual é a soma dos ângulos que as árvores vermelhas podem girar?
b) Qual é soma dos ângulos que as árvores azuis podem girar?
c) Qual é a soma de todos os ângulos que todas as árvores podem girar?

> — Isso! Você conseguiu resolver mais um desafio. Vá para o próximo, Querite!

Desafio 5:

a) Os valores encontrados nos Desafios 1 e 3 são iguais?

> — Ótimo, Querite! Você está muito próximo de ter sua vitalidade restaurada. Continue!

Desafio 6:

a) Considerando uma mesma floresta hipotética, as expressões obtidas nos Desafios 2 e 4.c) são iguais?

> — Resolveu mais um desafio, agora resta apenas dois, Querite! Você consegue!

Desafio 7:

a) Sabendo que as expressões obtidas nos Desafios 2 e 4 são iguais, qual é o valor da quantidade de triângulos fundamentais T em função dos números V e Z de árvores vermelhas e azuis, respectivamente?

> — Agora só falta o último desafio, Querite! Você consegue! Vá!

Desafio 8:

a) Qual é a área da Floresta Mosaíca?

b) Sendo A a área de uma floresta hipotética (com formato de polígono simples) e T a quantidade de triângulos fundamentais que o particiona, qual é o valor de A?

> — Encontrou a área!!!
>
> Depois que Querite determinou a área da floresta, ele foi envolvido por um brilho amarelo durante alguns segundos e a sua vitalidade foi restaurada.
>
> Desde esse dia Querite passou a ser o guardião do planeta Pentágono.

APÊNDICE B – Material de apoio para as Atividades 2, 3 e 4

O hexágono abaixo é para as Atividades 2 e 4.

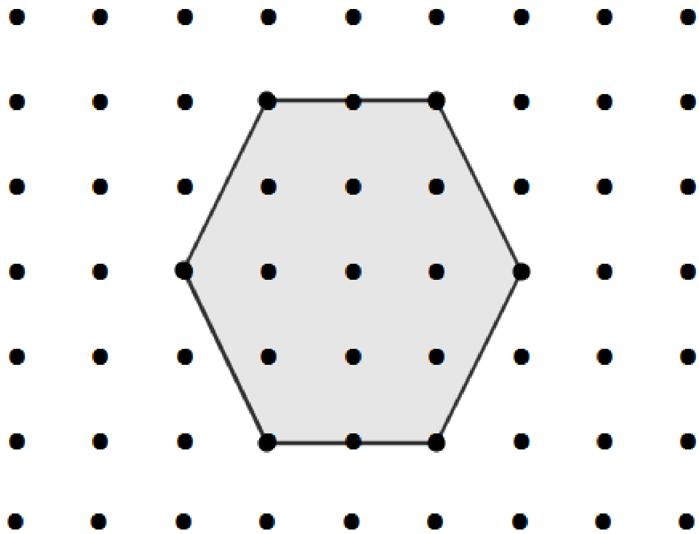


Figura 45 – Geoplano com hexágono no formato da porta

Os triângulos abaixo são para a Atividade 3.

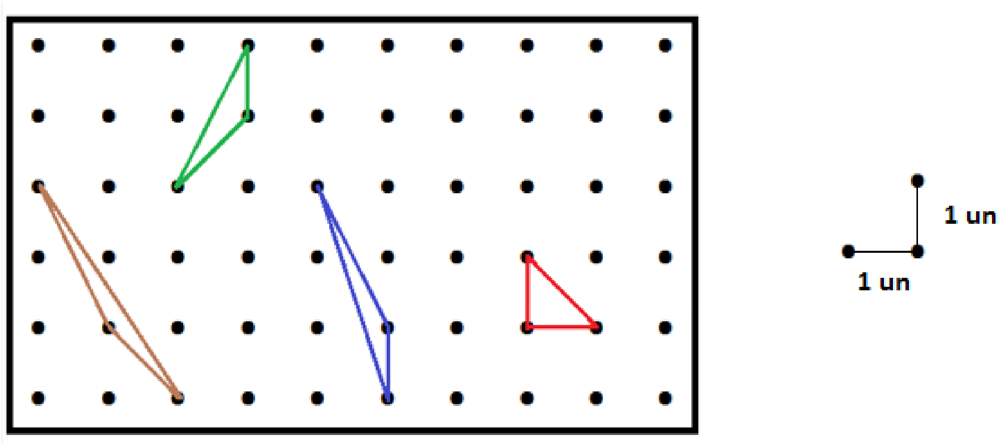


Figura 46 – Geoplano com triângulos

APÊNDICE C – Material de apoio para a Parte 2 da oficina

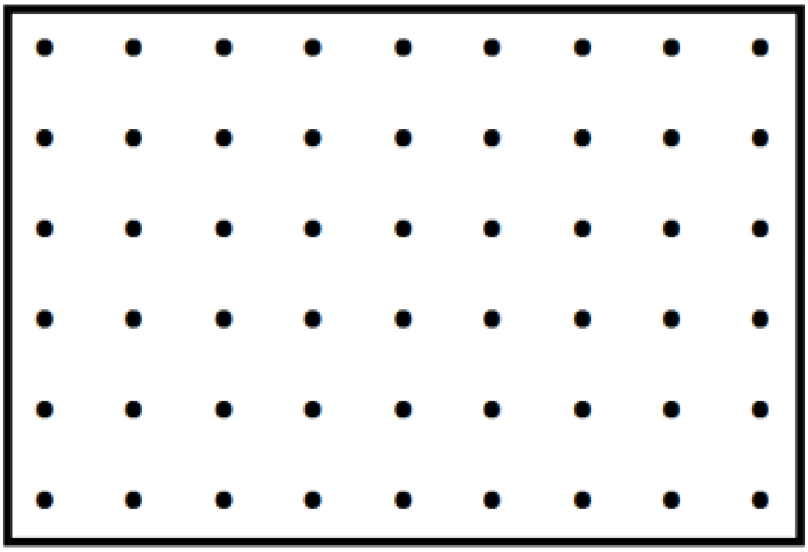


Figura 47 – Geoplano

	Número de triângulos fundamentais	Número de pontos da borda	Número de pontos do interior	Área do Cristal
Cristal 1				
Cristal 2				
Cristal 3				
Cristal 4				
Cristal 5				

Figura 48 – Tabela