UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DANIELE CRISTINA CHICONATO

DESPOLUIÇÃO DE UM LAGO - PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

SÃO CARLOS
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DANIELE CRISTINA CHICONATO

DESPOLUIÇÃO DE UM LAGO - PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação:
Prof. Dr. Ivo Machado da Costa

SÃO CARLOS
2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da

Biblioteca Comunitária da UFSCar

Chiconato, Daniele Cristina

Despoluição de um lago - progressão geométrica / Daniele Cristina Chiconato. – São Carlos: UFSCar, 2013.
149 p.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Sequências numéricas. 2. Progressão geométrica. 3. Simulação. 4. Sequência didática.

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE

DANIELE CRISTINA CHICONATO

APRESENTADA AO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL [PROFMAT], DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS, EM 17 DE AGOSTO DE 2013.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Ivo Machado da Costa
DM - UFSCar

Hermano de Souza Ribeiro

Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro
ICMC- USP

Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano
DM - UFSCar

“Em especial aos meus pais Cleso e Maria, que são a minha base, aos meus irmãos Denise e José, a todos os professores do PROFMAT e ao meu orientador Ivo.”

“É preciso exigir de cada um, o que cada um pode dar, replicou o rei. A autoridade repousa sobre a razão. Se ordenares a teu povo que ele se lance ao mar, farão uma revolução.”

(SAINT-EXUPÉRY, Antoine. O Pequeno Príncipe)

"Esta parte da minha vida, esta pequena parte, se chama Felicidade."

(CONRAD, Steve. À Procura da Felicidade)

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar aos meus pais Cleso e Maria, pelo apoio e incentivo, pelas muitas vezes que se sacrificaram para que eu pudesse me formar.

Agradeço à minha irmã Denise, por ser meu exemplo e por me auxiliar sempre que precisei, ao meu irmão José e à minha avó Anna, pelo apoio e carinho, sempre.

Agradeço a todos os meus colegas do PROFMAT, principalmente ao Gilmar, Esdras, Sérgio e Paulo César, pelas horas de estudo, pelas conversas, pela amizade e por tornarem esta caminhada mais leve e agradável.

Agradeço às minhas amigas Amélia, Alessandra e Maria Cecília por dividirem comigo esta fase da minha vida.

Agradeço aos meus amigos Tuane, Júlia, Rogério, Glaukos e Lorraine, pelo auxílio em tarefas concomitantes às do mestrado e pelo apoio durante esses dois anos.

Agradeço ao meu namorado Miguel, pelo companheirismo, carinho e incentivo e por ser um exemplo de determinação.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT, pelas excelentes aulas, que foram essenciais à minha formação e aprendizagem, e pelo auxílio e paciência em muitos momentos.

Agradeço à ETEC de Ibitinga e ao Professor Sérgio Roberto Deri, pelo empréstimo de uma de suas salas de informática, que foi de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Ivo Machado da Costa, pela atenção, paciência e incentivo e pelo tempo dedicado a este trabalho, e ao André, pela troca de experiências, que foi fundamental para a reta final deste estudo.

Agradeço à Escola Estadual Victor Maida, à direção, coordenação, corpo docente e a todos os meus alunos, em especial aos do 1º E de 2013 que participaram da realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de auxiliar a aprendizagem do conteúdo de progressão geométrica, desenvolvendo um material didático, embasado na metodologia de pesquisa chamada engenharia didática. Para tanto foi desenvolvida uma sequência didática baseada em uma situação-problema, em que os alunos deveriam, através da simulação de um rio poluído, prever o período necessário para que ocorresse a despoluição, criando, portanto, um modelo matemático que explicasse esse fenômeno.

O trabalho foi aplicado em uma sala de aula de 1ª série do ensino médio da Escola Estadual Victor Maida em Ibitinga, com 29 alunos divididos em trios e estes permaneceram juntos até o fim da aplicação da sequência didática, a qual durou cinco dias. A sequência continha cerca de 60 questões, que foram elaboradas de forma que o aluno pudesse agir de forma autônoma, isto é, com a mínima intervenção do professor.

E por fim, este trabalho fundamentou-se na coleta de resultados em análise a priori e a posteriori das respostas apresentadas pelas equipes, a fim de verificar os resultados obtidos.

Palavras-chave: Engenharia didática, progressão geométrica, simulação, sequência didática.

ABSTRACT

This work aims to assist the Geometric Progression Content Learning, developing educational material supported by research methodology called didactic engineering. We developed an instructional sequence based on a problem situation, in which students, by providing a simulation of a polluted river, should predict the time needed for the de-pollution to occur and develop a mathematical model in order to explain this phenomenon. The work was applied in a Ninth Grade classroom (Junior High School) in the State School called Victor Maida in Ibitinga with 29 students divided into trios. These trios remained together until the end of the application of the instructional sequence, which lasted five days. The sequence contained about 60 questions, which were formulated into a form with which the student could act autonomously, with minimal teacher intervention. Finally, this work was based on the collection of results in the analysis of priori and a posteriori of the responses provided by the teams, in order to check the results obtained.

Keywords: Didactic engineering, geometric progression, simulation, instructional sequence.

Lista de Figuras:

Figura 1: Parte do papiro Rhind.. 17
Figura 2: Frações dos olhos do deus Hórus 18
Figura 3: Currículo do Estado de São Paulo – Conteúdos e Habilidades da 8ªsérie/9ºano do Ensino Fundamental (2º bimestre) 26
Figura 4: Currículo do Estado de São Paulo – Conteúdos e Habilidades da 1ª série do Ensino Médio (1º bimestre) 27
Figura 5: Currículo do Estado de São Paulo – Conteúdos e Habilidades da 1ª série do Ensino Médio (2º bimestre) 28
Figura 6: Curva do floco de neve de Koch.. 30
Figura 7: Fases iniciais da construção da curva do floco de neve de Koch 30
Figura 8: Tapete de Sierpinski.. 31
Figura 9: Fases iniciais da construção do tapete de Sierpinski.. 31

Lista de Fotos:

Foto 1: Material necessário para a simulação.. 54
Foto 2: Construção parcial da simulação.. 55
Foto 3: Construção da simulação – Laboratório de ciências.. 60
Foto 4: Aplicação da folha de atividades 1 – Laboratório de ciências.............................. 69
Foto 5: Aplicação da folha de atividades 2 – Laboratório de informática 108
Foto 6: Desenvolvimento do material de apoio sobre o Excel – Sala de informática da ETEC 126

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **15**
CAPÍTULO 1 A PRESENÇA DA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA NA MATEMÁTICA 17
1.1. ALGUNS FATOS HISTÓRICOS SOBRE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA 17
1.2. SEQUÊNCIA COMO FUNÇÃO 19
1.3. SEQUÊNCIAS DEFINIDAS RECURSIVAMENTE 22
1.4. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA 23
CAPÍTULO 2 A PROGRESSÃO GEOMÉTRICA NO ENSINO MÉDIO 25
2.1. A PRESENÇA DA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA NO ENSINO MÉDIO ESTADUAL 25
2.2. ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS 29
2.3. ANÁLISE DOS DOCUMENTOS OFICIAIS 41
2.3.1. PROPOSTA PEDAGÓGICA CURRICULAR DO ESTADO 42
2.3.2. PARÂMETROS CURRICULARES DO ENSINO MÉDIO 44
2.3.3. ORIENTAÇÕES CURRICULARES SOBRE O ENSINO MÉDIO 44
CAPÍTULO 3 PRESSUPOSTOS EPISTEMOLÓGICOS E PEDAGÓGICOS 46
3.1. DIDÁTICA DA MATEMÁTICA 46
3.2. ENGENHARIA DIDÁTICA 47
CAPÍTULO 4 ELABORAÇÃO E APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 49
4.1. INTRODUÇÃO 49
4.2. CONSTRUÇÃO DA PROPOSTA 50
4.3. PROBLEMA ENVOLVIDO 51
4.4. ELABORAÇÃO E APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 52
4.5. SIMULAÇÃO DO PROBLEMA 53
4.6. SEQUÊNCIA DIDÁTICA 56
4.7. PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS COM A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA 57
4.8. CONSIDERAÇÕES FINAIS 57
CAPÍTULO 5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA FOLHA DE ATIVIDADES 1 58
5.1. INTRODUÇÃO 58
5.2. RESUMO DA FOLHA DE ATIVIDADES 1 59
5.3. ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS 59
5.4. ANÁLISE A PRIORI E A POSTERIORI DA FOLHA DE ATIVIDADES 1 59
CAPÍTULO 6 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA FOLHA DE ATIVIDADES 2 79

6.1. INTRODUÇÃO 79
6.2. RESUMO DA FOLHA DE ATIVIDADES 2 80
6.3. ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS 80
6.4. ANÁLISE A PRIORI E A POSTERIORI DA FOLHA DE ATIVIDADES 2 80
CAPÍTULO 7 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE DE APOIO SOBRE O EXCEL **..................** 125
7.1. INTRODUÇÃO 125
7.2. RESUMO DA ATIVIDADE DE APOIO DO EXCEL 126
CAPÍTULO 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS **.. 127**
REFERÊNCIAS 128
APÊNDICE 130
FOLHA DE ATIVIDADES 1 130
FOLHA DE ATIVIDADES 2 135
MATERIAL DE APOIO SOBRE O EXCEL 146

INTRODUÇÃO

Apresento minha dissertação de mestrado profissional realizada junto ao programa PROFMAT, em matemática, pelo polo da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Descrevo o trabalho realizado em uma sala de aula de 1ª série do ensino médio durante o primeiro bimestre letivo de 2013. O trabalho foi efetuado na Escola Estadual Victor Maida, situada no município de Ibitinga/SP e supervisionada pela Diretoria de Ensino de Taquaritinga. A referida escola é uma das maiores da cidade, motivo pelo qual recebe diversos alunos de várias outras instituições todos os anos. A escola foi criada em maio de 1953 e acaba de completar 60 anos de existência e tradição.

O trabalho em questão, refere-se ao estudo, de forma diferenciada do conteúdo matemático de progressões geométricas. Para a realização deste estudo, foi elaborada uma sequência didática, fundamentada em uma situação-problema. Os alunos simularam um lago poluído, onde ocorria o fenômeno de despoluição natural, e através dessa simulação, os alunos responderam a sequência didática, dando uma visão matemática ao problema. Para a concretização dessa atividade os alunos foram divididos em trios.

Durante a minha vida acadêmica como discente, sempre me deparei com um grande número de alunos desmotivados, que não demonstravam interesse na busca pelo conhecimento e também se mostravam cansados da escola. O que não é normal, já que a escola é um local de descobertas, onde o aluno é a peça principal e deve estar sempre envolvido. Muitos fatores podem ocasionar essa situação, até mesmo a forma em que o ensino é encaminhado. Por vezes, o ensino de certos conteúdos, especificamente os de matemática, é tratado de forma maçante, em que o aluno se torna um mero receptor de conceitos e tem o dever de resolver exercícios de forma mecânica. Tendo em vista essa circunstância, percebi que seria preciso buscar um novo jeito de ensinar.

Sendo assim, a sequência didática neste trabalho foi elaborada com o intuito de possibilitar aos alunos uma ação autônoma, em que eles assumissem o papel de construtores do seu conhecimento, com a mínima interferência do professor. Por solicitação do orientador, lemos um pouco sobre Educação Matemática, no que tange à didática da Matemática da Escola Francesa, particularmente, tivemos contato com metodologia de pesquisa conhecida como Engenharia Didática. Não estamos afirmando que nosso trabalho se pautou rigorosamente nessa metodologia, mas foi uma exigência dele que tivéssemos um primeiro contato.

A ideia de se fazer a simulação de um fenômeno natural veio da necessidade de mostrar aos alunos que o que eles aprendem na escola tem uma aplicação no mundo real, desse modo fazendo com que eles se sentissem mais motivados.

A simulação foi feita com garrafas pet, em que cada trio de alunos construiu um lago-modelo poluído, que foi se despoluindo aos poucos, o modelo matemático para esse problema se centra em progressão geométrica. O trabalho em trios, fez os alunos interagirem entre si, o que não ocorria normalmente, pois os alunos envolvidos nessa atividade são originários de diversas escolas do município que não oferecem ensino médio, de modo que, no primeiro bimestre, ainda não havia entrosamento, a realização deste trabalho ajudou para que isso ocorresse.

Capítulo 1

A PRESENÇA DA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA NA MATEMÁTICA

1.1. ALGUNS FATOS HISTÓRICOS SOBRE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

As progressões, tanto as geométricas, que é nosso foco de estudo, quanto às aritméticas, são estudadas e aplicadas há muito tempo, desde os povos babilônicos, pelo que se tem registro. Uma de suas primeiras aplicações foi há 5000 anos, pelos egípcios, que precisavam encontrar um meio de padronizar os períodos de enchente do Rio Nilo, para que pudessem plantar na época certa, garantindo que não haveria inundação e com isso a perda dos alimentos.

Na Mesopotâmia também há registros de progressões geométricas, em tabelas babilônicas, cerca de 1800 anos a. C. Em uma destas tabelas foi apresentada a soma $1+2+2^2+2^3+...+2^9$.

Os egípcios também tiveram papel essencial na descoberta das progressões geométrica. Em um papiro de 1950 a. C. encontra-se alguns problemas teóricos a respeito de progressões geométricas.

Em 1650 a. C., data-se o papiro Rhind, nele, além de um texto matemático, contém 85 problemas, nos quais aparecem algumas progressões. Tal papiro foi uma grande fonte da matemática egípcia antiga, em seu problema de número 79, traz a seguinte escrita: *"sete casa, 49 gatos, 343 ratos, 2041 espigas de trigo, 16 807 hectares"* a pergunta do problema em questão seria a soma da quantidade de casas, gatos, ratos, espigas e hectares. Sua solução é 19607.

Figura 1: Parte do papiro Rhind.

Ainda, no papiro de Rhind, aparece a seguinte progressão geométrica formada por frações: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, ligadas à unidade de volume usada para medir a quantidade de grãos, conhecida como Hekat. Esses termos ficaram conhecidos como frações dos olhos do deus Hórus.

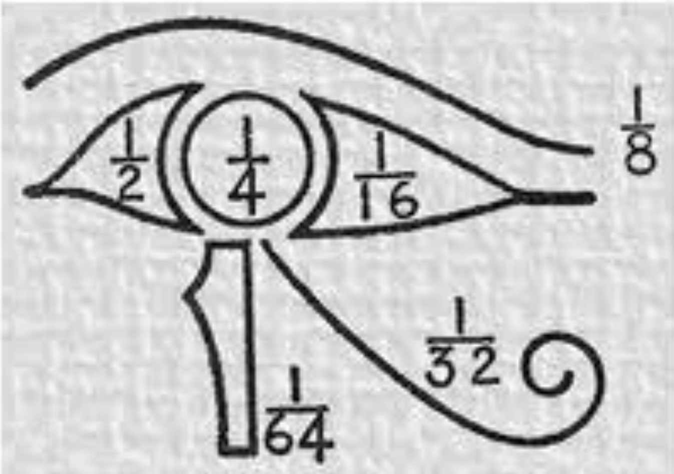


Figura 2: Frações dos olhos do deus Hórus.

Euclides de Alexandria (325 a.C. – 265 a.C.) também teve suma importância na descoberta e formalização das progressões geométricas, em sua obra "Os elementos" editada em 1482, onde impera o estudo da geometria, encontra-se progressões geométricas relacionadas a proporções contínuas, de modo que se há uma proporção contínua a : b = b : c = c : d, então a, b, c e d formam uma progressão geométrica. Há vários outros exemplos da presença das progressões em tal obra. Temos o seguinte exercício:

"Encontre três números em Progressão Geométrica de maneira que a diferença entre dois quaisquer deles é um quadrado". Em que, de acordo com o autor do problema, a resposta é 81/7, 144/7 e 256/7.

Os hindus também tiveram grande importância no trabalho com as progressões, pois eles foram hábeis, conseguiam somar rapidamente as progressões aritméticas e geométricas. Entre os matemáticos hindus, Bháskara teve grande destaque, em seus tratados nomeados como "lilavati" e "vija-ganita" aparecem diversos problemas relacionados à progressões aritméticas e geométricas. Um dos exercícios:

"Numa expedição para calcular os elefantes de seu inimigo, um rei marchou 2 yojanas no primeiro dia. Diga, calcular inteligentemente, a razão com que sua marcha diária aumentou, se ele alcançou a cidade do inimigo, a uma distância de 80 yojanas, em uma semana?".

Na Europa, o matemático Michael Stifel foi considerado o maior algebrista alemão do século XV. Ele possuía alto conhecimento algébrico, que ficou evidente em sua obra “Arithmética”, publicada em 1544, onde é exposta a vantagem da correspondência entre as progressões aritméticas e as geométricas.

Em torno de 1590 Napier possuía domínio dessa correspondência, e isso o levou à descoberta do logaritmo, gerando posteriormente as tabelas logarítmicas que só foram publicadas após cerca de 20 anos.

1.2. SEQUÊNCIA COMO FUNÇÃO

Podemos definir função, na matemática, como sendo uma relação binária entre dois conjuntos A e B, não vazios, satisfazendo a seguinte condição: que a cada elemento x do conjunto A exista um único elemento y do conjunto B, de forma que o par (x,y) esteja na relação. (Chamamos o conjunto A de domínio da função, e o conjunto B de contradomínio).

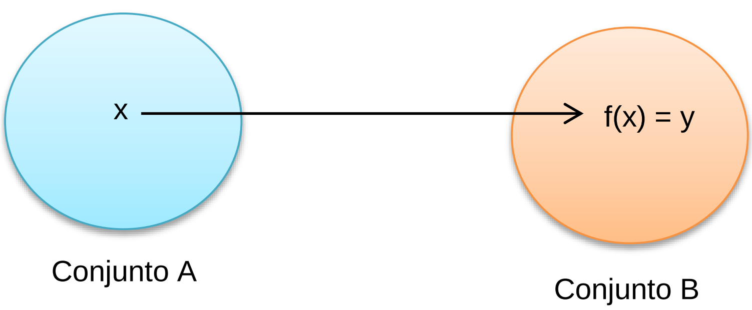
A relação, acima citada, é dada por uma lei de formação, uma regra geral, que associa cada elemento x a um único elemento y.

Notação:

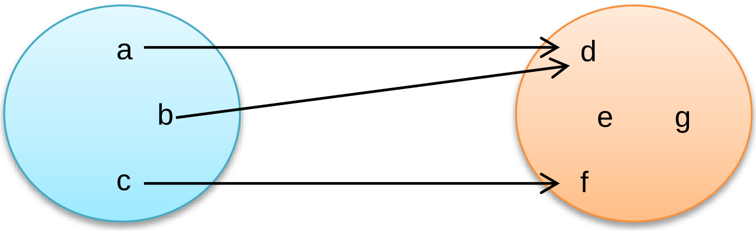
Denotamos uma função entre os conjuntos A e B por $f: A \rightarrow B$ (lê-se função de A em B). Os elementos do domínio são geralmente denotados pela letra “x”, e os elementos do contradomínio por “y”. Dessa forma uma função aplicada em um elemento x resulta em um único elemento y, e a denotamos por $f(x) = y$ (lê-se f de x é igual a y).

O domínio de uma função é dado por D(f) e o contradomínio por CD(f).

Podemos ilustrar uma função desta forma:



Observe a ilustração abaixo:



Conjunto A
(Domínio)

Conjunto B
(Contradomínio)

Nessa função temos que os elementos a, b e c pertencem ao seu domínio, e os elementos d, e, f e g pertencem ao seu contradomínio. Denotamos dessa forma:

D(f) = {a, b, c}   e   CD(f) = {d, e, f, g}

Repare que alguns elementos do contradomínio estão associados a elementos do domínio, a eles daremos o nome de conjunto imagem da função e denotamos por Im(f). No exemplo acima esses elementos são d e f. Portanto, Im(f) = {d, f}

Dizemos também que:

f(a) = d

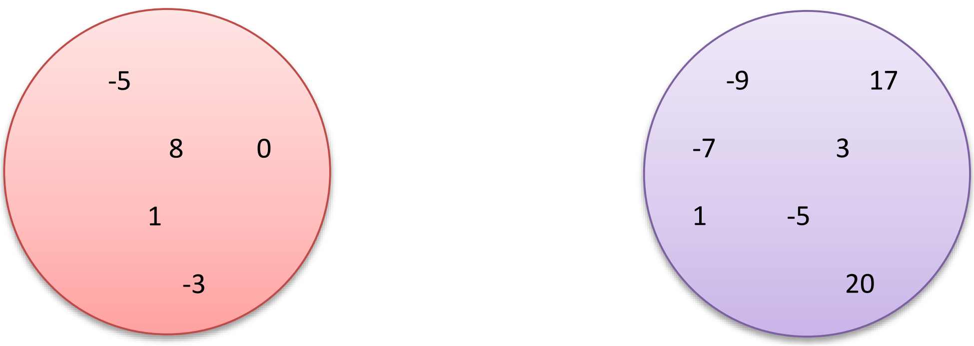
f(b) = d

f(c) = f

Uma função real é aquela que possui por domínio um subconjunto de |R (D(f) C |R) e por contradomínio o conjunto dos reais (CD(f) = |R).

Vejamos um exemplo:

Sejam os conjuntos A = {-5, -3, 0, 1, 8} e B = {-9, -7, -5, 1, 3, 17, 20}, domínio e contradomínio, respectivamente, da função f(x) = 2x +1. Temos, então:



Conjunto A

Conjunto B

Vamos fazer os cálculos aplicando a função f aos elementos “x” pertencentes a A.

Temos que f(x) = 2x +1, logo:

f(-5) = 2.(-5) +1 = -10 +1 = -9

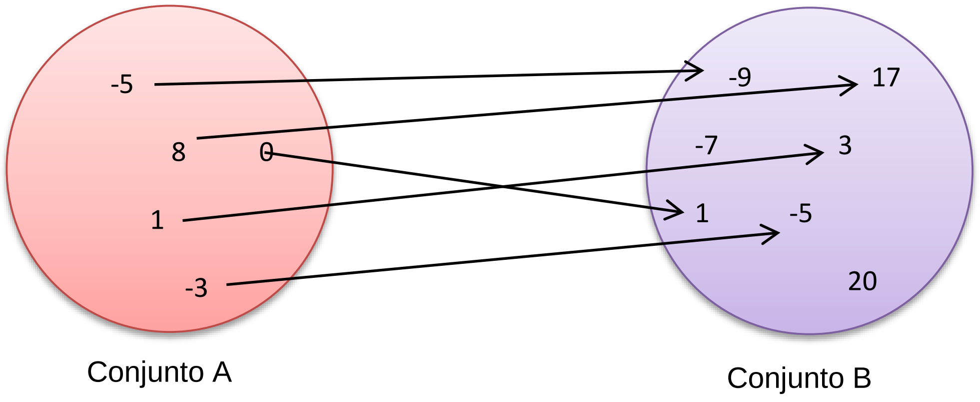
f(-3) = 2.(-3) +1 = -6 +1 = -5

f(0) = 2.0 + 1 = 0 +1 = 1

f(1) = 2.1 + 1 = 2 + 1 = 3

f(8) = 2.8 +1 = 16 +1 = 17

Vamos ilustrar as associações.



Portanto:

D(f) = {-5, -3, 0, 1, 8}

CD(f) = {-9, -7, -5, 1, 3, 17, 20}

Im(f) = {-9, -5, 1, 2, 17}

Portanto, sequência de números reais é toda função real em que seu domínio é o conjunto |N* dos números naturais, exceto o zero, e seu contradomínio é conjunto |R dos números reais, isto é f: |N* → |R, que a cada número natural n está associado a um único número real a(n).

Sendo assim, teremos que:

D(f) = |N*

CD(f) = |R

Im(f) = {a(1), a(2), a(3), ...}

Notação:

Uma sequência pode ser descrita como uma lista de números denotados desta forma:

$a(1), a(2), a(3), ..., a(n),...$

Onde a_1 representa o primeiro termo, a_2 representa o segundo, e assim sucessivamente. O e-nésimo termo é representado por a_n. Os índices numéricos apontam a posição do termo na sequência.

Seguem abaixo alguns exemplos de sequências.

- Sequência dos números pares (2, 4, 6, 8, 10,...)

Sabemos que os números pares são escritos da forma 2n, em que $n \in N$, portanto, a lei de formação que associa os valores dessa sequência é dada por $a(n) = 2n$. Então, quando n vale 1, temos que $a(1) = 2.1 = 2$, logo o termo que ocupa a primeira posição tem o valor 2.

- Sequência dos quadrados perfeitos (1, 4, 9, 16,...)

Para chegarmos aos quadrados perfeitos basta elevarmos os números naturais ao expoente 2, isto é, representamos esta sequência através da função $a(n) = n^2$. Para descobrirmos o elemento que ocupa a quarta posição dessa sequência basta calcularmos $a(4) = 4^2 = 16$.

1.3. SEQUÊNCIAS DEFINIDAS RECURSIVAMENTE

Uma sequência é dita recursiva, ou definida recursivamente, quando o termo a(n) é obtido através de seu(s) termo(s) anterior(es), isto é, o(s) primeiro(s) termo(s) é(são) estabelecido(s), e a partir de uma regra podemos calcular os termos posteriores.

Veja alguns exemplos de sequência recursiva:

- Uma sequência tal que $a(n+1) = 2.a(n)$ e que $a(1) = 3$, é uma sequência recursiva, em que para obter os próximos termos deveremos sempre multiplicar o seu antecessor por 2. Veja:

  $a(1+1) = 2.a(1)$

  $a(2) = 2.a(1)$

  $a(2) = 2.3 = 6$

  Portanto, $a(2) = 6$

Sendo assim, seus próximos termos sempre serão o dobro do termo anterior, partindo do número 3, ou seja, a sequência ficará desta forma: (3, 6, 12, 24, 48, ...)

(A esse tipo de sequência recursiva damos um nome especial: Progressão Geométrica).

- Sejam a(1) = 5 e a(2) = 2, e definimos a(n+2) = a(n) + a(n+1) recursivamente em função de a(n) e a(n+1) para n ≥ 1.
  De modo que, para calcularmos seus termos, devemos somar os seus dois antecessores.
  Podemos obter a(3) substituindo o n por 1. Veja:
  a(1+2) = a(1) + a(1+1)
  a(3) = a(1) + a(2)
  a(3) = 5 + 2 = 7
  Portanto a(3) = 7.

1.4. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Progressão geométrica, ou apenas P.G., é uma sequência numérica em que para a determinação de seus termos, a partir do segundo, basta multiplicar o anterior por uma constante. Essa constante é denotada por "q" e chamada de razão da P.G.

Notação:

A sequência (a(1), a(2), a(3), ..., a(n), ...) é uma P.G. se, e somente se, a(n) = a(n-1).q, tal que n ≥ 2.

Portanto, temos que pela definição uma progressão geométrica pode ser definida recursivamente. Pois basta sabermos um termo qualquer de um P.G. e sua razão, para determinarmos os próximos termos.

Veja o exemplo abaixo:

Seja o primeiro termo de uma progressão geométrica igual a 4, isto é, a(1) = 4 e sua razão q = 3.

Sendo assim, podemos defini-la recursivamente como a(n+1) = 3.a(n), ou seja, para obtermos qualquer termo dessa P.G. seria necessário conhecer o seu antecessor e multiplicá-lo por 3. Veja:

a(1) = 4

$a(2) = 3.a(1) = 3.4 = 12$

$a(3) = 3.a(2) = 3.12 = 36$

$a(4) = 3.a(3) = 3.36 = 108$

E assim por diante, temos então a sequência (4, 12, 36, 108, ...).

Porém, há outro caminho para obtermos o termo geral a(n) de uma P.G., observe:

O primeiro termo da P.G. é a(1). A partir dele, temos:

$a(2) = a(1).q$

$a(3) = a(2).q = (a(1).q).q = a(1).q^2$

$a(4) = a(3).q = (a(1).q^2).q = a(1).q^3$

$a(5) = a(4).q = (a(1).q^3).q = a(1).q^4$

E assim sucessivamente.

Podemos perceber que qualquer termo de posição "n" em uma progressão geométrica pode ser descoberto através da multiplicação de a(1) pela razão elevada a n-1.

Portanto, $\mathbf{a(n) = a(1).q^{n-1}}$

Veja:

Seja o primeiro termo de uma progressão geométrica igual a 4, isto é, a(1) = 4 e sua razão q = 3.

Sendo assim $a(n) = 4.3^{n-1}$.

Portanto, os seus quatro primeiros termos, são (4, 12, 36, 108, ...).

Capítulo 2

A PROGRESSÃO GEOMÉTRICA NO ENSINO MÉDIO

2.1. A PRESENÇA DA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA NO ENSINO MÉDIO ESTADUAL

Para darmos início à análise do estudo de progressão geométrica no ensino médio estadual, iremos, primeiramente, conhecer quais foram as habilidades e conteúdos desenvolvidos nas séries anteriores e que servirão agora de pré-requisitos para o tema em questão.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) frisam a importância de um ensino em que a contextualização e a interdisciplinaridade sejam pontos principais, de maneira que seus conteúdos estejam conectados entre si, de modo que permita uma aprendizagem mais ampla e universal. As sequências, por exemplo, estabelecem uma conexão com o conteúdo prévio de funções matemáticas, pois são um caso particular de função. Sendo assim, as progressões aritméticas e geométricas têm um papel fundamental, por serem casos específicos de sequências.

Os PCN dão enfoque ao ensino das funções, que, além de permitir as conexões citadas acima, dão espaço a um grande campo de contextualização, pois sua aplicabilidade em fenômenos reais é muito vasta.

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.
> Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.
> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e

> estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.
>
> PCNEM [43]

O ensino das funções, de acordo com Currículo do Estado de São Paulo, é iniciado no segundo bimestre da 8ª série/ 9º ano do Ensino Fundamental, com o intuito de promover as habilidades descritas na tabela abaixo.

8ª série/9º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
2º Bimestre	**Números/Relações** Álgebra • Equações de 2º grau: resolução e problemas Funções • Noções básicas sobre função • A ideia de variação • Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e de 2º graus	• Compreender a resolução de equações de 2º grau e saber utilizá-las em contextos práticos • Compreender a noção de função como relação de interdependência entre grandezas • Saber expressar e utilizar em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre duas grandezas por meio de funções de 1º grau • Saber expressar e utilizar em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado de outra por meio de uma função de 2º grau • Saber construir gráficos de funções de 1º e de 2º graus por meio de tabelas e da comparação com os gráficos das funções $y = x$ e $y = x^2$

Figura 3: Currículo do Estado de São Paulo – Conteúdos e Habilidades da 8ªsérie/9ºano do Ensino Fundamental (2º bimestre).

Portanto, é nesta série que o aluno tem seu primeiro contato com as funções matemáticas, estudando suas noções básicas, sendo capaz de resolver problemas práticos e de construir gráficos a partir de tabelas.

A partir de então, este conteúdo é retomado, implicitamente, no primeiro bimestre da 1ª série do Ensino Médio com o estudo das sequências, progressões aritméticas e geométricas. Assim, cabe ao professor estabelecer a conexão entre esses conteúdos com o conteúdo de funções matemáticas.

1ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º Bimestre	**Números** Números e sequências • Conjuntos numéricos • Regularidades numéricas: sequências • Progressões aritméticas e progressões geométricas	• Saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente, quando possível • Conhecer as características principais das progressões aritméticas – expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras –, sabendo aplicá-las em diferentes contextos • Conhecer as características principais das progressões geométricas – expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras –, sabendo aplicá-las em diferentes contextos • Compreender o significado da soma dos termos de uma PG infinita (razão de valor absoluto menor do que 1) e saber calcular tal soma em alguns contextos, físicos ou geométricos

Figura 4: Currículo do Estado de São Paulo – Conteúdos e Habilidades da 1ª série do Ensino Médio (1º bimestre).

Logo, no 2º bimestre da 1ª série do Ensino Médio, as funções voltam a ser estudadas, de maneira mais detalhada, diferente do que ocorreu na série anterior, o conteúdo é mais explorado e aplicado aqui.

1ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
2º Bimestre	**Relações** Funções • Relação entre duas grandezas • Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado • Função de 1º grau • Função de 2º grau	• Saber reconhecer relações de proporcionalidade direta, inversa, direta com o quadrado, entre outras, representando-as por meio de funções • Compreender a construção do gráfico de funções de 1º grau, sabendo caracterizar o crescimento, o decrescimento e a taxa de variação • Compreender a construção do gráfico de funções de 2º grau como expressões de proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado de outra, sabendo caracterizar os intervalos de crescimento e decrescimento, os sinais da função e os valores extremos (pontos de máximo ou de mínimo) • Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1º e de 2º graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos

Figura 5: Currículo do Estado de São Paulo – Conteúdos e Habilidades da 1ª série do Ensino Médio (2º bimestre).

A partir daqui o aluno será capaz de interpretar as funções e seus gráficos de maneira mais completa. Desse modo se a conexão entre as progressões e o conteúdo de funções tiver sido explorada no bimestre anterior o aluno consequentemente terá uma visão muito mais ampla da relação existente entre esses conteúdos.

As funções matemáticas também estão presentes no terceiro bimestre da 1ª série do Ensino Médio, com as funções exponenciais e logarítmicas, bem como nos dois anos finais do ensino médio, com o estudo das funções trigonométricas na 2ª série e um estudo mais aprofundado na 3ª série, envolvendo as funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e polinomiais.

2.2. ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Nesta seção foi feita a análise de livros didáticos a fim de verificar qual o encaminhamento dado pelos autores ao ensino de progressões geométricas.

Três livros didáticos foram analisados, sendo que um deles está sendo utilizado, durante este ano letivo, na escola em que leciono. A análise foi feita em cima dos seguintes fatores: Abordagem histórica do conteúdo, apresentação de definições e contextualização (se o livro apresenta situações-problema sobre o tema).

A análise foi feita com estes três livros:

Matemática – Ensino Médio – Volume 1, das autoras: Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz. Editora Saraiva, 2010.

Matemática – Volume Único, autor: Luiz Roberto Dante. Editora Ática 2005.

Conexões com a Matemática – Volume 1, Editora responsável: Juliana Matsubara Barroso. Obra coletiva concebida desenvolvida e produzida pela Editora Moderna, 2010.

O livro que utilizamos na escola, este ano, é o primeiro dos três: *Matemática – Ensino Médio.*

A análise foi feita segundo a ordem da apresentação dos livros:

- *Matemática – Ensino Médio – Volume 1*

Os conteúdos abordados antes das progressões geométricas, nesse livro, são: Conjuntos numéricos e intervalos na reta real, Análise de dados: estatística, Relações entre grandezas: funções, Funções afins e quadráticas. A unidade reservada para o conteúdo em questão é dividida nos cinco tópicos abaixo:

1. Sequências
2. Lei de formação ou expressão geral
3. Termos equidistantes dos extremos
4. Progressão Aritmética (P.A.)
5. **Progressão Geométrica (P.G)**

Ao iniciar o estudo de sequências o livro as associa às funções, fazendo a conexão comentada anteriormente.

O livro dá início ao ensino de sequências através de uma abordagem histórica muito interessante, falando sobre fractais, especificamente da curva do floco de neve de Koch e do tapete de Sierpinski, para que o aluno possa observar uma sequência de construções padronizadas.

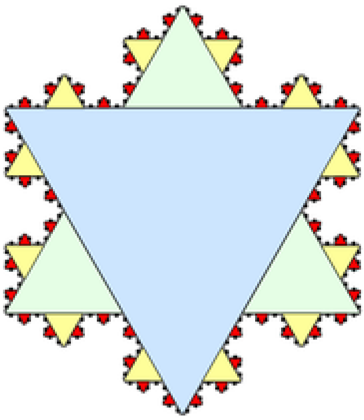
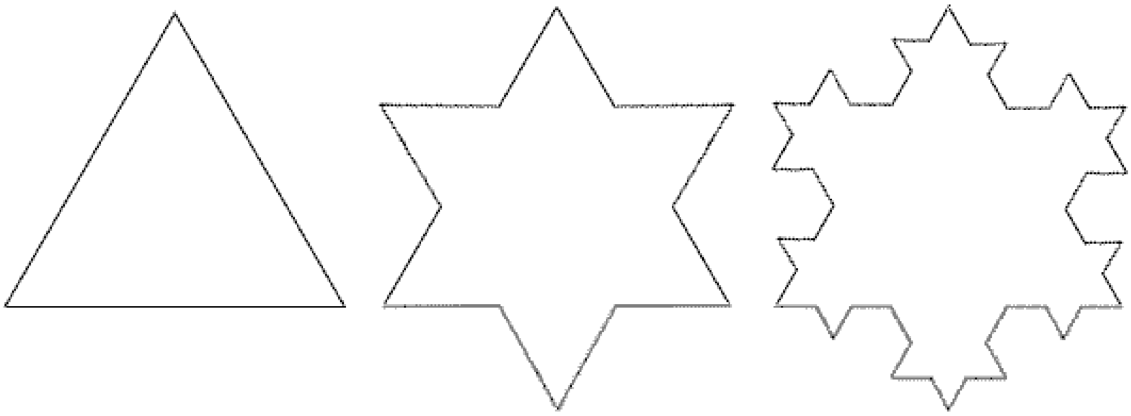


Figura 6: Curva do floco de neve de Koch.

A construção da curva do floco de neve é explorada no livro, passo a passo. Mostrando ao aluno as seguintes fases de sua montagem:

Figura 7: Fases iniciais da construção da curva do floco de neve de Koch.



1ª: Triângulo equilátero de lado 1;

2ª: Divisão dos lados do triângulo inicial em três partes iguais, para que na parte central de cada um de seus três lados sejam desenhados novos triângulos equiláteros, medindo agora a terça parte da medida inicial, obtendo uma linha fechada de 12 lados;

3ª: O mesmo processo é feito nos 12 lados do polígono obtido na segunda fase, gerando novos triângulos equiláteros, de lados iguais a 1/3 da medida que antecedeu essa fase.

Esse processo ocorre sucessivas vezes, e a figura se torna cada vez mais parecida a um floco de neve.

O livro finaliza essa exposição fazendo a seguinte indagação aos alunos:

"*A medida do lado dos triângulos construídos em cada etapa forma uma sequência de números. Como podemos escrever essa sequência?".*

O esperado é que os alunos considerem, a partir do triângulo de lado 1, sempre a terça parte de um termo da sequência para descobrir o próximo termo, formando assim, a sequência numérica: (1, 1/3, 1/9, 1/27, ...). De maneira natural os alunos terão (mesmo sem saber) seu primeiro contato com uma progressão geométrica.

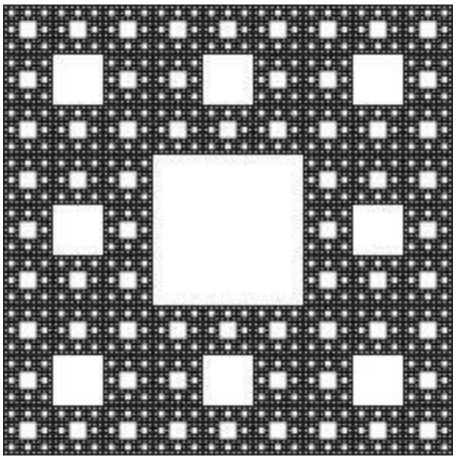


Figura 8: Tapete de Sierpinski.

A abordagem desse fractal é feito de maneira análoga ao anterior.

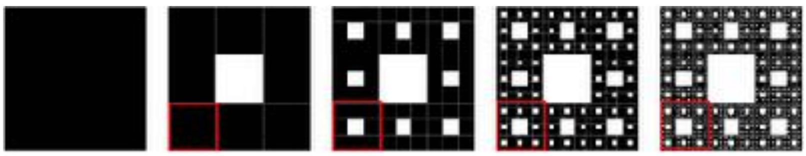


Figura 9: Fases iniciais da construção do tapete de Sierpinski.

Em que o quadrado inicial de lado 1 é dividido em nove quadrados iguais, tais que seus lados meçam um terço da medida inicial. Feita essa divisão, retirasse o quadrado central, obtendo a segunda figura. A cada um dos oito setores restantes realizasse o mesmo processo, dividindo o quadrado inicial em nove quadrados iguais, retirando sempre o quadrado central.

O livro finaliza essa explicação deixando ao aluno a seguinte questão:

"Qual é a sequência dos números com as medidas dos lados dos quadrados retirados em cada etapa?"

Novamente, espera-se que o aluno chegue à sequência (1, 1/3, 1/9, 1/27, ...). Empregando o mesmo raciocínio utilizado no floco de neve de Koch.

Nos dois casos apresentados, o livro faz referência a sequências numéricas infinitas.

Após a abordagem dos fractais, são destacados alguns exemplos de sequências (finitas, infinitas, e que possuem uma lei de formação ou não), para que, enfim, seja descrita a primeira definição:

Uma **sequência numérica infinita** é uma **função** cujo domínio é o conjunto dos números naturais não nulos.

A definição citada, em meu ponto de vista, deixa a desejar, não fala do contradomínio e não é simples para um aluno que terá seu primeiro contato com o assunto.

Após apresentar um exemplo associado à notação de funções utilizando f(n) para determinar os termos de uma sequência, o livro define a notação específica das sequências.

O índice *n* denota a posição do elemento ou termo a_n na sequência. a_n é chamado de **termo geral** da sequência.

Exposta essa função o livro reproduz o exemplo dado anteriormente, só que agora utilizando a notação específica.

Desse modo, é finalizado o primeiro tópico da unidade de progressão geométrica.

O segundo tópico, referente à "Lei de formação ou expressão geral" é iniciado com um exemplo em que a sequência (0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...) é analisada como na tabela abaixo:

1º termo	0 ou 3.0
2º termo	3 ou 3.1
3º termo	6 ou 3.2
...	
10º termo	27 ou 3.9
...	
20º termo	57 ou 3.19

Em seguida é enfatizado ao aluno que essa sequência é formada por múltiplos de 3, tal que, sendo n a posição de cada termo, o n-ésimo termo será representado por 3(n -1) ou 3n – 3.

Assim o aluno terá seu primeiro contato com a expressão de um termo geral $a_n = 3(n-1)$.

Após a apresentação de mais um exemplo de construção de um termo geral, o livro descreve três formas em que a lei de formação de uma sequência pode aparecer:

1 – Lei de formação pelo termo geral a_n;

2 – Fórmula de recorrência;

3 – Propriedade exclusiva dos termos.

O seguinte tópico desta unidade "Termos equidistantes dos extremos" faz referência à posição de termos em sequências finitas. Tal que dois termos a_p e a_q são equidistantes dos extremos a_1 e a_n, se o número de termos que antecede a_q for igual ao número de termos que precede a_q. É importante que os alunos já tenham uma noção da ideia de equidistância de termos em relação aos extremos, pois ela será utilizada na demonstração da fórmula da soma de termos de uma P.A.

Este tópico é finalizado pela apresentação da sequência de Fibonacci.

O tópico "Progressão aritmética (P.A.)" é iniciado com exemplos de P.A. mostrando ao aluno que um termo é obtido pela soma de seu termo anterior a uma constante.

São apresentados exemplos em que esta constante é um número inteiro positivo, um número inteiro negativo, e até mesmo um número decimal. E a seguir o livro traz a definição de P.A.

Progressão Aritmética (P.A.) é toda sequência de números na qual cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante. Essa constante, que indicamos por r, é denominada **razão da progressão aritmética**.

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...) \text{ é uma P.A. } \leftrightarrow a_n = a_{n-1} + r, n \geq 2$$

Após a definição é apresentada a classificação de uma P.A., em crescente, decrescente ou constante.

Para finalizar este tópico é apresentada e demonstrada a fórmula da expressão do termo geral de uma P.A., e a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A, demonstrada segundo Carl Friedrich Gauss, contando brevemente a história de sua descoberta.

Finalizando esta unidade vem o tópico de “Progressão geométrica (P.G.)” que é trabalhado de forma análoga ao tópico de P.A., em que são explorados alguns exemplos de P.G. de razão inteira, decimal e racional. E em seguida é apresentada a seguinte definição:

Toda sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante é chamada **progressão geométrica (P.G.)**. Essa constante, que indicamos por q, é denominada **razão da progressão geométrica**.

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...) \text{ é uma P.G. } \leftrightarrow a_n = a_{n-1} .q, n \geq 2$$

Esta definição é clara e objetiva, acredito que os alunos consigam compreendê-la de modo simples.

Depois é dada a classificação de uma P.G. em crescente, decrescente, alternante e constante.

Finalizando o tópico com a apresentação e demonstração da fórmula geral de uma P.G., a fórmula da soma de n primeiros termos de uma P.G. e a fórmula da soma de uma P.G. infinita.

Em meio às definições e exemplos são propostas listas de exercícios e problemas, de modo que sempre antes de propor uma lista, são dados alguns exercícios resolvidos como exemplos para os alunos. As listas propostas são formadas, em sua maioria, de exercícios, sendo que entre eles há poucas situações-problema.

Para finalizar esta unidade o livro traz uma seção chamada "PARA SABER MAIS", em que são apresentados fractais na era computacional e os padrões matemáticos no comportamento da bolsa de valores, contextualizando o conteúdo abordado.

Esse livro segue as Propostas Curriculares Nacionais, estabelecendo conexões entre os conceitos e buscando contextualizá-los. Ele tem uma abordagem histórica interessante, apesar de que, a meu ver, também poderia ter sido resgatada um pouca da história de P.A. e P.G.

No mais, o livro explora algumas situações-problemas, que aparecem sempre em meio a diversos exercícios. Acredito que poderia haver mais problemas.

No meu ponto de vista, esse livro apresenta os conteúdos simples e detalhadas, de modo que seu público alvo, que são os alunos, entenda e compreenda os assuntos abordados. A abordagem histórica é bem interessante, porém acredito que poderia ser mais estudada. O livro apresenta muitos exercícios, entre eles um número pequeno de situações-problema, poderia haver mais. Além do mais esse livro segue o currículo estadual.

- *Matemática – Volume Único*

Neste livro os assuntos abordados antes das progressões geométricas, são: Conjuntos e conjuntos numéricos, Funções afim, quadrática, modular, exponencial, Logaritmo e função logarítmica. Isso foge um pouco do currículo estadual, em que a função exponencial, logaritmo e função logarítmica são ensinados depois das sequências e progressões.

A unidade que aborda o conteúdo de progressão geométrica é dividida nestes cinco tópicos:

1. Introdução;
2. Sequências;
3. Progressão Aritmética (P.A.);

4. **Progressão Geométrica (P.G.);**
5. Problemas envolvendo P.A. e P.G.

O tópico "Introdução" é muito breve, nele são apresentadas ao aluno algumas situações-problema, não resolvidas, que podem ser solucionadas através de progressões aritméticas ou geométricas, como forma de motivar o estudo da unidade. Em minha opinião essa estratégia é muito conveniente, já que os estudantes sempre questionam se o conteúdo a ser ensinado pode ser aplicado em uma situação real.

No tópico "Sequências" são descritas situações cotidianas consideradas sequências, como os dias da semana, os meses do ano, os números naturais, etc. Em seguida esses exemplos são associados à notação (a_1, a_2, a_3, ...,a_n). Após isso é dada a seguinte definição de sequência:

> Uma sequência finita de **n** termos é uma função cujo domínio é o conjunto numérico {1, 2, 3, ..., n}. Os números do contradomínio são indicados por a_1, a_2, a_3, ...,a_n.
> Uma sequência infinita é uma função **f** cujo domínio é |N* = {1, 2, 3, ..., n, ...}, e o contradomínio é indicado por {a_1, a_2, a_3, ...,a_n, ...}. Assim, f(1) = a_1, f(2) = a_2, ..., f(n) = a_n, ...

No meu ponto de vista, essa definição está mal formulada, pois além de não deixar claro quem são os elementos pertencentes ao contradomínio, ela pode causar confusão para o aluno na distinção de uma sequência finita para uma sequência infinita, o que deveria ocorrer de forma natural.

Depois dessa definição foi apresentado um trecho muito breve de como se determina uma sequência, tal trecho possui apenas dois exemplos superficiais, sem qualquer explicação detalhada, ao menos foram classificados os meios de se determinar uma sequência (termo geral, recorrência ou propriedade exclusiva). Isso encerra este tópico. Acredito que esta parte deixou a desejar, já que os conceitos deixados de lado serão usados nas progressões aritméticas e geométricas.

O tópico de "Progressão Aritmética (P.A)" é iniciado com uma situação-problema clássica de P.A. em que o crescimento da produção de uma empresa aumenta anualmente e em progressão aritmética, na minha opinião, iniciar o tema com um exemplo contextualizado, incentiva e motiva os alunos a estudarem o conteúdo.

Após o exemplo é descrita a seguinte definição:

Progressão aritmética (P.A.) é toda sequência de números na qual a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e é representada pela letra **r**.

Acredito que essa definição não tenha sido muito clara para um contato inicial com P.A.

Alguns exemplos são apresentados (com $r > 0$, $r < 0$ e $r = 0$).

A fórmula do termo geral de uma P.A. é explicada de forma automática, como se o aluno já estivesse a par do conteúdo, porém há vários exemplos para que a aplicação da fórmula seja compreendida.

Um ponto positivo para esse livro é que ele apresenta a interpretação geométrica de uma progressão aritmética, o que não ocorre no livro anterior. A interpretação traz a seguinte ideia:

Uma P.A. tem por termo geral a expressão $a_n = a_1 + (n - 1).r$, que podemos compreender como uma função. Mas se começarmos a enumerar os termos por $\mathbf{a_0}$ a expressão do termo geral, será dada por $a_n = a_0 + n.r$, observe que temos agora uma função afim da forma $a(x) = a_0 + r.x$, com domínio |N. Portanto, sua interpretação geométrica será expressa por uma reta, em que os pares ordenados serão $(0, a_0)$, $(1, a_1)$, ..., $(2, a_2)$.

Para finalizar este tópico é apresentada e demonstrada a fórmula da soma dos termos de uma P.A. finita, de modo que o autor, antes de apresentá-la propõe um exemplo em forma de situação-problema em que sua resolução é feita através de uma soma normal, o que gera um trabalho maior, e depois de apresentada a fórmula é aplicada no mesmo exemplo. Antes da demonstração da fórmula foi feita a referência a Carl Friedrich Gauss, apresentando a história de como foi sua descoberta da fórmula da soma dos termos de uma P.A., e demonstrando-a em seguida.

O tópico “Progressão Geométrica (P.G.)” é iniciado de forma análoga ao de P.A. em que o autor oferece uma situação-problema ao aluno, e resolve-o obtendo uma P.G.

Após o exemplo segue a seguinte definição:

> Progressão geométrica (P.G.) é toda sequência de números não-nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado razão (**q**) da progressão. Ou seja, uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

Essa definição está errada. As progressões geométricas que têm o primeiro termo nulo geram uma sequência de números nulos, e também há progressões em que q = 0, podendo ainda gerar uma sequência em que apenas o primeiro termo é não-nulo. Além do que, essa definição é complicada para um aluno que terá seu primeiro contato com o assunto.

Em seguida são apresentados alguns exemplos de P.G. e feita sua classificação em Crescente, Decrescente, Constante e Alternante.

Depois são expostas as fórmulas do termo geral de uma P.G., de maneira análoga à da P.A., a interpretação geométrica de P.G. e a fórmula da soma de uma P.G. finita é demonstrada e descrita, o que ocorre também de forma semelhante à da P.A, é apresentada uma situação-problema, em que sua resolução é obtida inicialmente somando-se os termos um a um e posteriormente utilizando-se a fórmula.

Finalizando este tópico é exposto o “Limite da soma dos termos de uma P.G infinita”. Porém, isso não faz parte do currículo do Estado de São Paulo, e os alunos não têm contato com este assunto. São apresentadas as notações de limite, o que foge da proposta curricular. Esse fato é lamentável, pois, noções iniciais e básicas de limite poderiam ser ensinadas.

Concluindo esta unidade o tópico “Problemas envolvendo P.A. e P.G.” traz alguns exemplos detalhados seguidos de uma lista de exercícios, em sua maior parte situações-problema, e exercícios de vestibulares de universidades federais e estaduais, que servem de incentivo ao aluno, mostrando-lhe do que é capaz.

Finalizando esta unidade do livro há uma seção denominada por “Leitura” que traz um pouco da história de Fibonacci e sua sequência.

Particularmente eu gosto muito desse livro, mas não como professora. É um ótimo livro para quem já teve algum contato com os seus conteúdos, porém para os alunos, que estão tendo seu primeiro contato, pode haver uma grande dificuldade de compreensão. A abordagem histórica é bem breve e, no meu ponto de vista, insuficiente para envolver o aluno. Há muitos exercícios em meio aos conceitos, algumas situações-problemas, alguns desafios e até questões de vestibulares de universidades federais e estaduais, acredito que esse é um ponto positivo para o livro.

- *Conexões com a Matemática – Volume 1*

Antecedendo o conceito de sequências, são apresentados neste livro, os seguintes conteúdos: Trabalho com a informação: Organização e apresentação de dados, Introdução ao estudo das funções: Conjuntos e Funções, Funções Polinomiais: Função afim, quadrática e modular, Outras funções importantes: Função exponencial e logarítmica. Fugindo um pouco do currículo estadual, que propõe o ensino de exponencial e logaritmo após o de sequências.

A unidade que apresenta o conteúdo em questão é composta assim:

1. Sequências e padrões;
2. Progressões Aritméticas;
3. **Progressões Geométricas;**
4. Problemas que envolvam P.A. e P.G.

O primeiro tópico “Sequências e padrões” é iniciado com a exposição de um infográfico, onde mostra a quantidade de medalhas do Brasil nos jogos Pan-americanos, de 1987 a 2007, para abordar a ideia de sequência, transformado os anos em que ocorreram os jogos na sequência (1987, 1901, 1995, 1999, 2003, 2007). Bem como a quantidade total de medalhas que o Brasil ganhou a cada ano é apresentada nesta sequência (61, 79, 82, 101, 123, 157). Essa é só a introdução, porém as notações já estão expostas aqui, associadas às sequências acima citadas.

A abordagem do livro é interessante, pois envolve um tema atrativo para os alunos, os jogos Pan-americanos.

São enunciadas sequências finitas e infinitas e logo em seguida é apresentada a seguinte definição:

Uma **sequência numérica** é uma função f cujo domínio está contido em |N* e cujo contradomínio é |R.

Essa definição, no meu ponto de vista, é muito direta para alunos que estão tendo um primeiro contato com o tema. Acredito que não seja tão simples para eles entendê-la.

Em seguida é apresentada a determinação de uma sequência numérica através de sua lei de formação, seu termo geral. Esse livro também não classifica os meios de obtê-las.

Finalizando este tópico o autor sugere aos alunos que leiam o livro “O diabo dos números” de Hans Magnus Enzensberger, onde são exploradas algumas sequências instigantes, como a sequência de Fibonacci.

Ao iniciar o tópico “Progressões Aritméticas” o autor explora uma situação-problema em que sua solução gera uma P.A., e em seguida apresenta a definição:

Uma **progressão aritmética (P.A.)** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se ao anterior uma constante r, intitulada **razão da P.A.**

No meu ponto de vista essa definição é clara e objetiva, de fácil entendimento para o aluno.

Após alguns exemplos com P.A. utilizando sua notação, o autor apresenta sua classificação em crescente, decrescente ou constante, em uma tabela detalhada e bem elaborada.

Em seguida é descrito o termo geral de uma P.A., em que a fórmula é apresentada após uma breve descrição.

Para a apresentação da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A. foi feita uma breve referência a Carl Friedrich Gauss, contando a história de sua descoberta.

Vários exercícios resolvidos são apresentados para que os alunos compreendam como se utiliza a fórmula.

O tópico de “Progressões geométricas” é iniciado de forma semelhante ao de P.A., o autor apresenta uma situação-problema e resolve-a gerando uma P.G., para que depois seja apresentada a seguinte definição:

Uma **progressão geométrica (P.G.)** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o anterior por uma constante q chamada de **razão da P.G.**

Temos uma ótima definição, clara e objetiva, de fácil entendimento para o aluno.

Alguns exemplos são dados e a classificação de P.G. em crescente, decrescente, constante, estacionária e oscilante também, novamente em uma tabela, de forma bastante detalhada e compreensível para os alunos.

Em seguida, e de maneira muito breve, é apresentado o termo geral de uma P.G., acredito que essa parte poderia ser mais detalhada, pois para quem lê pela primeira vez, não é tão simples o entendimento.

O livro também traz a interpretação geométrica de P.G. de maneira bem explorada, criando uma forte conexão com o conteúdo de funções, cumprindo a proposta curricular.

Para finalizar este tópico são apresentadas e demonstradas as fórmulas da soma dos termos de uma P.G. finita e da soma dos termos de uma P.G. infinita, porém a última fórmula citada é descrita na forma de limite, o que foge ao currículo estadual.

O último tópico desta unidade “Problemas que envolvem P.A. e P.G.” é muito rico em exercícios e situações-problema, envolvendo o aluno para uma melhor aprendizagem do conteúdo.

O livro traz uma seção final a cada capítulo, chamada de “Compreensão de texto”, nessa parte há uma história de Malba Tahan, o problema dos mil dinares.

O livro possui uma linguagem simples, conceitos e explicações detalhadas, de fácil entendimento para o aluno, porém traz pouca abordagem histórica, acredito que deixa a desejar nesse aspecto. Dentre os três livros analisados, esse último é o que mais apresenta situações-problema, que motiva e incentiva a aprendizagem dos alunos.

2.3. ANÁLISE DOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Nesta seção será feita uma breve e superficial análise dos documentos oficiais do Estado de são Paulo.

2.3.1. PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO

A proposta curricular do estado de São Paulo está dividida em quatro áreas:

A área de Ciências Humanas e suas Tecnologias;

A área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias;

A área de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias;

A Matemática e as áreas do conhecimento.

Podemos observar que há uma área específica para a matemática.

Segundo a proposta, isso ocorre por três razões:

> Em primeiro lugar, destaca-se o fato de que uma parte da especificidade da Matemática resulta esmaecida quando ela é agregada seja ao grupo das linguagens em sentido amplo, ou seja, ao grupo das ciências. (...)
>
> Em segundo lugar, a incorporação da Matemática à área de Ciências pode distorcer o fato de que a Matemática, mesmo oferecendo uma linguagem especialmente importante e adequada para a expressão científica, constitui um conhecimento específico da educação básica. Tal conhecimento inclui um universo próprio muito rico de objetos, instrumentos e interesses, fundamentais tanto para as chamadas Ciências Naturais quanto para as Ciências Humanas, e ainda para as Linguagens em sentido amplo. (...)
>
> Em terceiro lugar, o tratamento da Matemática como área específica pode facilitar a incorporação crítica dos inúmeros recursos tecnológicos de que dispomos para a representação de dados e o tratamento das informações, na busca da transformação de informação em conhecimento.(...)
>
> Insistimos, no entanto, no fato de que a apresentação da Matemática como uma área específica não pretende amplificar suas supostas peculiaridades nem caracterizá-la como um tema excessivamente especializado ou relevante. Visa apenas a uma exploração mais adequada de suas possibilidades de servir às outras áreas, na ingente tarefa de transformar a informação em conhecimento em sentido amplo, em todas as suas formas de manifestação.

Portanto, a matemática aparece na proposta de forma própria, visando estabelecer sua linguagem específica e enfatizando seu próprio e vasto universo, tanto científico, quanto tecnológico.

Os conteúdos que compõem a proposta curricular do Estado são escolhidos com o intuito de formar os alunos como cidadãos e como pessoas, desenvolvendo suas competências pessoais. Essa ação possui três eixos norteadores:

- O eixo expressão/compreensão: a capacidade de expressão do eu, por meio das diversas linguagens, e a capacidade de compreensão do outro, do não-eu, do que me complementa, o que inclui desde a leitura de um texto até a compreensão de fenômenos históricos, sociais, econômicos, naturais etc.
- O eixo argumentação/decisão: a capacidade de argumentação, de análise e de articulação das informações e relações disponíveis, tendo em vista a construção de consensos e a viabilização da comunicação, da ação comum, além da capacidade de decisão, de elaboração de sínteses dos resultados, tendo em vista a proposição e a realização da ação efetiva.
- O eixo contextualização/abstração: a capacidade de contextualização, de enraizamento dos conteúdos estudados na realidade imediata, nos universos de significações – sobretudo no mundo do trabalho – e a capacidade de abstração, de imaginação, de consideração de novas perspectivas, de potencialidades no que ainda não existe.

A matemática é fundamental nos três eixos.

No primeiro eixo, a matemática é um complemento de expressão e compreensão da realidade, no segundo, a matemática tem o papel de desenvolver o raciocínio lógico e no terceiro, a matemática serve de base para se aprender a lidar com o meio concreto e abstrato.

A escolha dos temas da grade curricular apresentada pela proposta é orientada pelos quatro blocos: Números, Geometria, Medidas e Tratamento da informação.

Os conteúdos a serem ensinados são apresentados em tabelas, bem como as habilidades que cada um desses conteúdos tem o objetivo de desenvolver. Algumas dessas tabelas já foram apresentadas neste capítulo (seção 2.1. páginas 26, 27 e 28).

É importante ressaltar que a proposta não deve ser considerada como algo fechado ou inflexível, o professor, quando houver necessidade, pode fazer suas adaptações, explorar conteúdos por meios diferentes, adotar livros didáticos, entre outros.

No meu ponto de vista a Proposta Curricular do Estado de São Paulo é uma rica fonte de orientação/investigação para o professor, de modo que, utilizada em conjunto com livros didáticos tendem a estabelecer um trabalho de aprendizagem muito produtivo.

2.3.2. PARÂMETROS CURRICULARES DO ENSINO MÉDIO

Os parâmetros curriculares nacionais visam à importância da educação como base do desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. Seguindo a mesma ideia da proposta curricular.

O PCNEM evidencia que os conteúdos matemáticos do ensino médio devem proporcionar aos alunos uma ampliação do que eles aprenderam anteriormente, no ensino fundamental, para que esses conteúdos, vistos posteriormente, façam sentido em sua vida escolar. É papel da matemática do ensino médio apresentar aos alunos os instrumentos necessários para que eles tenham o conhecimento de novas informações e de instrumentos necessários para a sua aprendizagem contínua.

2.3.3. ORIENTAÇÕES CURRICULARES SOBRE O ENSINO MÉDIO

As orientações curriculares são divididas em três volumes:

Volume 1: Linguagem, Códigos e suas Tecnologias
Volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
Volume 3: Ciências Humanas e suas Tecnologias

Segundo as orientações:

> De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos.

Os conteúdos básicos apresentados pelas orientações são divididos nos seguintes blocos:

Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade.

Para o processo de ensino-aprendizagem, as orientações dão ênfase à importação das situações didáticas e a descreve da seguinte forma:

> Uma situação didática pode ser compreendida como o estabelecimento de relações entre um professor, alunos e um certo objeto de conhecimento, em que aparece, de forma explícita, a

> intenção desse professor em fazer com que os alunos se apropriem daquele objeto de conhecimento.

O professor deve assumir o papel de mediador de modo que caiba ao aluno ser o construtor de seu conhecimento.

Capítulo 3

PRESSUPOSTOS EPISTEMOLÓGICOS E PEDAGÓGICOS

3.1. DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

A teoria das situações didáticas foi desenvolvida na França em 1986, por Guy Brousseau. Essa teoria salienta os meios de apresentação de conteúdos matemáticos aos alunos.

De acordo com Machado et al (2012)

> Essa teoria representa uma referência para o processo de aprendizagem matemática em sala de aula envolvendo professor, aluno e conhecimento matemático. Trata-se de uma referencial para uma educação matemática que, por um lado, valoriza os conhecimentos mobilizados pelo aluno e seu envolvimento na construção do saber matemático, e por outro, valoriza o trabalho do professor, que consiste, fundamentalmente, em criar condições suficientes para que o aluno se aproprie de conteúdos matemáticos específicos. Dessa forma ao organizar o *meio*, o professor tem expectativas em relação à participação dos alunos e estes também observam o trabalho do professor e buscam entender quais são as regras do jogo para direcionarem suas ações.

O meio é onde acontecem as interações do sujeito, e o sistema contraditor em que ele deve agir. No meio deve haver contradições de situações didáticas, gerando conflitos que possibilitam a aprendizagem de um novo saber matemático. As situações didáticas são regidas por regras geralmente não explícitas e que o conjunto delas chamamos de contrato didático, mais especificamente, segundo Brousseau (1986) (apud MACHADO et al, 2012)

> Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor [...] esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas, sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro.

Uma situação didática ocorre toda vez que o professor tem a intenção de possibilitar ao aluno a aprendizagem de certo conteúdo, e o envolvimento do aluno dependerá da estrutura dessa situação didática.

Em uma situação didática o professor não deve apenas reproduzir um saber científico, mesmo que de forma simplificada, ao aluno. Uma situação didática vai muito além. O professor deve transferir a responsabilidade ao aluno, para que ele tome o problema apresentado como se fosse seu, de maneira que se sinta empenhado em resolvê-lo por vontade própria, e não apenas porque o professor lhe propôs.

3.2. ENGENHARIA DIDÁTICA

A noção de engenharia didática teve início no começo dos anos 1980 e surgiu a partir da didática matemática.

Segundo Almouloud (2007)

> A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental com base em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhes são associados: a comparação entre análise *a priori* e análise *a posteriori*. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

Resumidamente, a análise a priori se trata de uma hipótese, uma ideia prévia daquilo que o professor espera ao propor uma situação para os alunos. A análise a posteriori se resume na constatação, ou não, da análise a priori, ela revela o que ocorreu de fato, como os alunos agiram de acordo com a situação proposta.

De acordo com Almouloud (2007) a metodologia da engenharia didática é composta pelas seguintes fases:

- As análises prévias;
- Construção das situações e análise a priori;
- Experimentação, análise a posteriori e validação.

Brevemente falando, as análises prévias se tratam do estudo e análise das dificuldades do ensino e aprendizagem do tema de estudo em questão, para que seja possível oferecer uma intervenção que estabeleça uma melhoria desse ensino.

A construção das situações e análise a priori tem o objetivo de validar as hipóteses levantadas na fase anterior, sua função é a utilização implícita, e posteriormente explicita, de novos objetos matemáticos, por meio das questões colocadas pelos alunos ao resolverem o problema a eles proposto.

A experimentação é a fase em que tudo o que foi elaborado é posto em funcionamento, passível de correções quando há necessidade, retornando à análise a priori. A análise a posteriori e validação é a confrontação do que havia sido proposto previamente por hipóteses, e o que realmente ocorreu de fato, buscando um consenso, é nessa fase que o professor consegue observar se o que foi proposto ao aluno estava realmente de acordo com a sua ideia inicial, ou se o problema poderia ser caracterizado de outro meio, também pode ser observado se o que era esperado do aluno realmente aconteceu, ou se alguns aspectos devem ser revistos.

Capítulo 4

ELABORAÇÃO E APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

4.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta uma resenha do desenvolvimento do trabalho em geral. Será feito síntese da construção da simulação e do problema trabalhado, bem como da construção da sequência didática e sua aplicação, que é dividida em duas folhas de atividades, a folha de atividades 1 trabalha sutilmente o conceito de sequências recursivas e a folha de atividades 2 aprofunda e conceitualiza o conceito estudado na atividade anterior, abordando o conteúdo de progressão geométrica.

4.2. CONSTRUÇÃO DA PROPOSTA

Um dos maiores problemas com os quais me deparo em sala de aula é a falta de interesse dos alunos quando um conteúdo lhes é apresentado sem um objetivo real, isto é, sem uma aplicação pela qual eles sejam motivados e impulsionados a estudar tal conceito.

Comecei a lecionar no início de 2010, logo após o término da minha graduação em licenciatura plena em matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP de Bauru. Desde então, apenas lecionei em escolas estaduais.

No meu primeiro ano tive a oportunidade de ministrar aulas em dois projetos inéditos do governo, o reforço, fora do horário de aulas na Escola Estadual Prof. Dr. Ariovaldo da Fonseca em 3 salas de 7ª e 2 salas de 8ª séries do ensino fundamental, e a DAC – disciplina de apoio curricular na Escola Estadual Victor Maida em duas salas de 3º ano do ensino médio. O projeto do reforço funcionava da seguinte maneira: os alunos que apresentavam maiores dificuldades em matemática eram selecionados e apenas eles participariam, obrigatoriamente, do reforço, enquanto o resto da sala era dispensado. Isto gerou certo descontentamento aos que tinham que frequentar o reforço, pois se sentiam injustiçados e até discriminados e queriam ser liberados da escola junto aos demais. Essa situação tornava o trabalho muito árduo e desmotivador. Hoje em dia este projeto já foi abolido na maioria das escolas, senão em todas.

Já a DAC foi uma experiência muito boa, nessa disciplina estudava-se a matemática inserida nos temas da atualidade, era uma disciplina ministrada apenas para 3º ano de ensino médio e objetivava o estudo de temas que poderiam ser abordados no vestibular. Essa ideia era muito interessante, porque era possível fazer associações da disciplina de matemática com diversos assuntos. Os alunos eram participativos e mostravam-se entusiasmados em ver aplicações da matemática no “mundo real”. Porém, esse projeto já não existe mais, ele era composto por 6 aulas semanais divididas em 3 disciplinas diferentes, normalmente língua portuguesa, matemática e história ou geografia, o que acabou tomando o espaço de outras disciplinas bimestrais, que poderiam ser mais importantes para o currículo dos alunos.

Em 2011 tive o prazer de lecionar para uma sala de 7ª série do ensino fundamental e duas salas de 2ª série do ensino médio na Escola Estadual Prof. Dr. Ariovaldo da Fonseca. Foi a minha primeira experiência realmente como professora de matemática. Entretanto, não tive contato com o tema de sequências recursivas e progressão geométrica, pois esse conteúdo está inserido no currículo do 1º ano do ensino médio.

Em 2012 participei de outro projeto do governo, conhecido como PA – professor auxiliar na Escola Estadual Victor Maida em uma sala de 8ª série. Esse projeto funcionava do seguinte modo: o professor responsável pelas aulas de matemática lecionava normalmente, porém era assistido pelo professor auxiliar, o PA só intervinha na hora de responder as dúvidas dos alunos, sendo assim, ficavam os dois professores na sala. Esse projeto funciona até hoje.

E neste ano de 2013, estou lecionando para duas salas de 1ª série do ensino médio. Este é o meu primeiro contato com o ensino das sequências recursivas e progressões.

Neste período de 3 anos que leciono, vejo que muitas vezes falta motivação, os alunos parecem desinteressados, até mesmo cansados de estudarem conteúdos que não conseguem aplicar, eles precisam ter um problema maior que os incentivem à busca de soluções.

A ideia da elaboração e desenvolvimento da sequência didática surgiu da necessidade de se desenvolver algo novo, algo diferente, que fizesse o aluno, por si só, raciocinar e não apenas responder a exercícios que se tornam maçantes e mecânicos.

Houve certa dificuldade na escolha do conteúdo que seria trabalhado, pois ainda não sou efetiva na rede estadual, e, portanto, até o inicio de fevereiro deste ano, eu ainda não sabia quais salas seriam atribuídas a mim. Como foram atribuídas duas salas de 1º ano do ensino médio e o conteúdo de sequências recursivas e progressão geométrica é ensinado no primeiro bimestre, optei pela escolha deste tema.

Portanto, com o tema já escolhido, o seguinte trabalho foi criado a fim de estabelecer um jeito diferente de se ensinar sequências numéricas recursivas e, em especial, a progressão geométrica.

4.3. PROBLEMA ENVOLVIDO

Para o ensino de sequências recursivas e progressão geométrica foi abordado um fenômeno natural, que é a despoluição de um rio, que é um dos maiores problemas ambientais da atualidade.

Os rios, quando não poluídos em abundância, podem se despoluir naturalmente, sem a interação humana. Isso acontece graças à comunidade de seres vivos lá existentes (peixes, camarões, mexilhões, ostras, bactérias, fungos, leveduras e algas) estabelece o processo de despoluição natural das águas.

Esse processo ocorre da seguinte forma:

Os peixes, camarões, mexilhões e ostras, contribuem na despoluição, porque se alimentam de restos e detritos. Já as bactérias, fungos, leveduras e algas são os organismos decompositores, eles decompõem as moléculas maiores, transformando-as em nutrientes, que são capturados pelas algas e vegetais para, através da fotossíntese, entrar novamente na cadeia alimentar dos peixes, camarões, mexilhões e ostras, fechando assim o ciclo da matéria orgânica. É valido ressaltar que esse processo só ocorre quando a poluição não é abundante, de modo a comprometer a comunidade dos seres vivos do rio.

Porém, todo esse processo ocorre sequencialmente, mais especificamente, pode ser modelado matematicamente e o conceito de P.G. ocupa posição de destaque. Sendo assim, o problema em si, levou os alunos a descobrirem, através de uma PG, se um rio poderia se tornar limpo novamente com a despoluição natural. É válido ressaltar que este conteúdo dá margens há várias contextualizações, podemos generalizá-lo com vários outros problemas, como o cálculo do tempo necessário para que uma droga saia completamente do organismo, o crescimento de uma comunidade de bactérias em determinado tempo, o montante de uma poupança ao longo de alguns anos, entre outros.

4.4. ELABORAÇÃO E APLICAÇÃO DA ATIVIDADE

O problema, acima referido e superficialmente comentado, foi estudado por meio de uma simulação. Planejamos o desenvolvimento dessa simulação através de uma sequência didática. Porém, para atingirmos o objetivo proposto seria necessário que os alunos possuíssem conhecimento sobre logaritmo, assunto este que só é abordado no terceiro bimestre do 1º colegial. Para contornar esse conceito utilizamos planilhas eletrônicas, mais especificamente o programa Excel. Mas os alunos, em sua grande maioria, não sabiam utilizar as planilhas eletrônicas, o que gerou a necessidade da elaboração e aplicação de um material de apoio sobre o Excel, para que eles pudessem solucionar as questões sem muita intervenção.

Portanto, antes do início da aplicação da atividade, simulação e sequência didática, foi introduzido o material de apoio, com conceitos básicos e exercícios.

Segue abaixo o cronograma da aplicação da atividade em geral.

Data	07/05/2013	09/05/2013	10/05/2013	10/05/2013	14/05/2013

Hora	09h50min às 10h40min (1 aula)	10h40min às 12h20min (1 aula dupla)	09h50min às 10h40min (1 aula)	11h30min às 12h20min (1 aula)	07h00min às 07h50min (1 aula)
Local	Laboratório de informática de ETEC	Laboratório de ciências da escola	Sala de Aula	Laboratório de informática da escola	Sala de Aula
Atividade	Aplicação do material de apoio do Excel	Simulação e resolução da folha de atividades 1	Resolução da folha de atividades 2 (até a questão 53)	Resolução do final das questões, utilizando as planilhas eletrônicas.	Finalização com a validação dos resultados

4.5. SIMULAÇÃO DO PROBLEMA

Para a compreensão desse fenômeno, foi feita uma simulação do modelo de despoluição natural. Levou-se em conta os aspectos fundamentais desse problema ambiental, prevendo matematicamente, o que ocorreria em suas etapas. Criando, assim, uma aproximação do que acontece na realidade, pois se trata de uma simulação.

O experimento contou com os seguintes materiais:

- ✓ Três garrafas PET, de refrigerante, transparentes, com capacidade de 2,5 ou 3 litros, cortadas.
- ✓ Dois copos descartáveis com capacidade de 200 ml;
- ✓ 200 ml de café preparado;
- ✓ Um balde para descarte da água usada.

As garrafas foram numeradas de 1 a 3. A primeira garrafa simula o lago-modelo, a segunda um reservatório de água limpa e a terceira serviu para armazenar o poluente.

Foto 1: Material necessário para a simulação.

Iniciando o experimento:

- Preenchemos, completamente, a garrafa número 2 com água limpa. Teremos, então, nosso reservatório de água;
- Na garrafa 3, colocamos aproximadamente 1 litro de água e misturamos a ela um copo de 200 ml de café preparado. Essa mistura foi chamada de poluente;
- Na garrafa 1, que foi utilizada para a simulação do lago-modelo, colocamos 1800 ml, ou seja, 9 copos de 200 ml cada, de água limpa (usamos a água do reservatório), e em seguida, adicionamos 1 copo, de 200 ml, do poluente. Desse modo, temos um lago poluído, contendo 2 litros de líquido. A mistura é considerada homogênea.

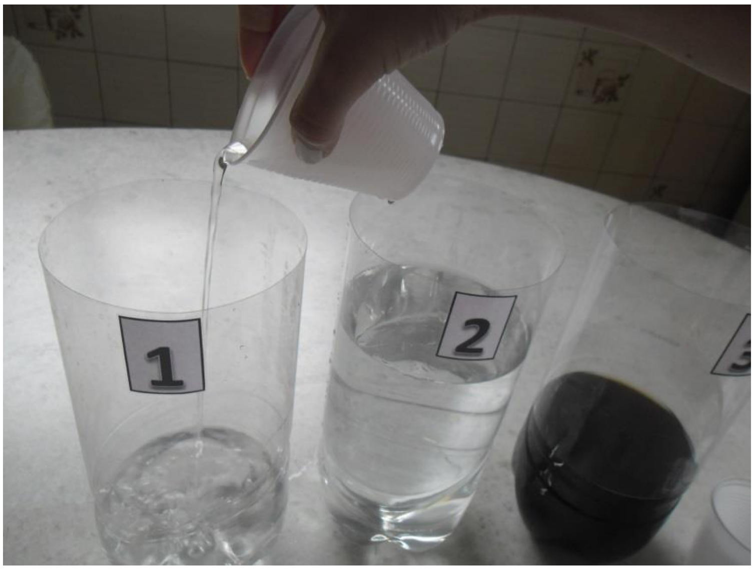


Foto 2: Construção parcial da simulação.

Depois de feita a representação do lago-modelo, demos inicio ao processo de despoluição natural. Para isto, seguimos a seguinte hipótese:

Os organismos vivos do lago purificam 1/5, ou seja, 20% da quantidade de poluente no lago, a cada período de 24 horas.

No nosso experimento, não esperamos 24 horas para a conclusão de cada etapa de despoluição do lago, aceleramos esse processo, do seguinte modo:

Na primeira etapa da nossa despoluição, removemos dois copos de água poluída do lago, descartando – os no balde. Em seguida, colocamos dois copos de água limpa, do reservatório já reabastecido, no lago. Com isso concluímos a nossa primeira etapa.

Esse processo foi feito de acordo com a nossa hipótese, em que a purificação consiste em remover 20% da quantidade total de poluente que existe no início de cada etapa. Sendo assim, precisamos calcular a quantidade (em ml) existente em 20% do lago, para descobrir o valor de 20% do poluente, pois temos uma mistura homogênea. Sabemos que 20% equivale a 1/5, como o lago possui um volume total de 2000 ml, temos que 20% desse volume é igual a 1/5.(2000 ml) = 400 ml. Sendo assim, ao retirarmos 2 copos, com a capacidade de 200 ml cada, de água poluída do lago, e repusermos 2 copos, com mesmo volume, de água limpa, estaremos purificando exatamente 20% da quantidade de poluente existente no lago no início de cada etapa.

Esse procedimento representou a simulação da despoluição natural do lago em 1 dia, ou seja, 24 horas. Ao longo do experimento ele foi repetido algumas vezes.

Para a compreensão desse experimento elaboramos uma sequência de questões, que os alunos responderam baseados nas etapas de despoluição realizadas.

4.6. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática foi dividida em duas partes, nomeadas de "Folha de Atividades 1 – Entendendo as Etapas da Despoluição" e "Folha de Atividades 2 – Análise dos Resultados". A folha de atividades 1 é composta por 26 questões, que objetivavam o entendimento da simulação, para que as etapas de despoluição ficassem mais claras aos alunos. A folha de atividades 2 foi composta por 35 questões, totalizando assim 62 questões a serem solucionadas. As perguntas da folha de atividades 2 referiam-se ao encaminhamento da descoberta de um modelo matemático, no caso, a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, que estabelecesse um padrão para a despoluição, de modo que os alunos, através desse modelo, pudessem prever se o lago voltaria novamente a ficar limpo, se não, quando chegaria muito próximo desse acontecimento.

4.7. PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS COM A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA

Após a aplicação, as folhas de atividades foram recolhidas para a análise dos resultados. Tal análise contou com duas etapas, quantitativa e qualitativa.

A análise quantitativa foi feita por meio da tabulação de resultados, objetivando a observação de quantos grupos acertaram as questões das folhas de atividade. A análise qualitativa foi feita através dos erros dos alunos, isto é, pelas suas respostas tentou-se entender o raciocínio ali utilizado.

4.8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A elaboração da sequência de atividades demorou cerca de 3 meses, a partir da ideia inicial de se trabalhar o tema escolhido – sequências recursivas e progressão geométrica, que surgiu em fevereiro deste ano.

Pude perceber que o envolvimento dos alunos com este tema foi extremamente superior ao envolvimento observado em outras turmas durante os três primeiros anos que lecionei. Ao finalizar o conteúdo em sala de aula, sempre que aparecia alguma dúvida na resolução de exercícios que envolviam sequências recursivas ou progressões geométricas, eles remetiam a ideia do que havia sido feito na simulação e nas respostas da folha de atividades, para chegar à novas respostas.

A atividade me ajudou a identificar dificuldades que antes passavam despercebidas por mim, a descobrir, em certos casos, o motivo dos erros cometidos pelos alunos e a praticar um modo diferente de agir em sala de aula, evidenciando a importância da elaboração e da aplicação de atividades desenvolvidas através de sequências didáticas, as quais o aluno pode (e deve) ter um raciocínio autônomo, chegando a conclusões com a mínima intervenção do professor.

Capítulo 5

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA FOLHA DE ATIVIDADES 1

5.1. INTRODUÇÃO

A folha de atividades 1 foi elaborada com o objetivo de promover o entendimento da simulação em si, as questões dessa primeira folha de atividades estão relacionadas aos acontecimentos que ocorrem na simulação, como: quantos mililitros de água poluída o lago-modelo possui e quantos serão retirados a cada etapa de despoluição, entre outras. Portanto, a folha de atividades 1 é formada por um questionário que estimula a reflexão dos alunos.

A atividade foi aplicada com 29 alunos da 1ª série do Ensino Médio, sendo estes divididos em 7 trios e 2 quartetos, que chamaremos de equipes, desse modo, temos ao todo, 9 equipes participantes. As equipes foram formadas pelos próprios alunos, de acordo com suas afinidades. A aplicação da folha de atividades 1 ocorreu no dia 09/05/2013, e teve a duração de 100 minutos (uma aula dupla).

5.2. RESUMO DA FOLHA DE ATIVIDADES 1

A folha de atividades 1 é composta por 26 questões, sendo algumas dissertativas e outras de múltipla escolha.

Para iniciar a atividade, foi exposto aos alunos um problema ambiental muito frequente, que é a poluição de rios e lagos. O tema foi abordado de forma leve, através da leitura de um texto, seguida por uma conversa informal com os alunos, em que foi expresso por eles grande interesse e curiosidade de como a matemática poderia intervir nessa questão.

Para responder à folha de atividades 1, as equipes fizeram a simulação de um lago, que passará por um processo de despoluição natural citado anteriormente. As questões dessa primeira folha serviram para nortear o experimento. De modo que a simulação dos processos de despoluição do lago-modelo e a resolução da primeira folha de atividades ocorreram simultaneamente.

As primeiras questões verificaram o entendimento dos alunos quanto à construção do lago e o processo de despoluição, com perguntas simples, questionando – os sobre como foi construído o lago-modelo, quantos mililitros de água limpa e quantos mililitros de poluente foram colocados nele, quantos mililitros de poluente eram retirados a cada etapa de despoluição, se a água estava limpa depois de alguns processos, entre outras.

5.3. ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS

Para a resolução da folha de atividades 1 é necessária uma boa leitura e interpretação, a ausência desses requisitos e o emprego do raciocínio mecânico pode ter ocasionado alguns erros. Outros erros podem ter sido gerados pela falta de familiarização que alguns alunos apresentam com as frações e números decimais.

5.4. ANÁLISE A PRIORI E A POSTERIORI DA FOLHA DE ATIVIDADES 1

A seguir serão apresentadas as questões contidas na folha de atividades1, juntamente com as respostas das 9 equipes. Para que seja feita uma análise a priori e a posteriori dos resultados obtidos.

Foto 3:Construção da Simulação – laboratório de Ciências.

QUESTÃO 1:

1) Qual é o volume, em ml, do lago antes do inicio do processo de despoluição?

	Quantidade de Equipes
Acertaram	5
Erraram	4

A questão inicial foi uma questão simples, pois foram os próprios alunos que construíram seus lagos, desse modo esperava-se um número de acertos maior. Alguns alunos poderiam pensar na divisão da água limpa e da água poluída e responder apenas uma das medidas, e foi o que ocorreu em alguns casos, temos como resultados que 5 equipes responderam corretamente, 2 litros, ou 2000 ml, 3 equipes responderam 1800 ml, esse era o volume, apenas, da água limpa, eles se esqueceram de somar o volume do poluente. E uma equipe respondeu 9 copos, seguindo, provavelmente, o mesmo raciocínio.

Nesta questão, alguns alunos me perguntaram o que significava a palavra “volume”.

QUESTÃO 2:

2) A água do nosso lago modelo antes da primeira etapa de despoluição é transparente e clarinha?

( ) Sim ( ) Não

	Quantidade de Equipes
Responderam “Não”	5
Responderam “Sim”	4

Esta questão tratava-se apenas de observação. Os alunos deveriam observar suas garrafas que representavam o lago e responder se a água estava limpa, ou seja, transparente e clarinha. Nesta pergunta era esperado um número de respostas negativas maior, isto é, esperava-se que mais alunos respondessem “não”, pois este é o estágio em que se encontra a água mais escura durante o experimento, porém houve falhas na hora da interpretação da pergunta.

As equipes que erraram esta questão, disseram que se confundiram ao ler a pergunta, onde está escrito “antes da primeira etapa de despoluição” eles leram “antes da poluição”, sendo assim imaginaram que fosse para analisar a cor da água antes da poluição, ou seja, antes de misturar o poluente.

Não houve perguntas aqui.

Esta questão aparece em todas as etapas de despoluição realizadas.

QUESTÃO 3:

3) Esse volume se mantém após o término da primeira etapa de despoluição, chamada de primeiro período?

( ) Sim ( ) Não

Comente:

	Quantidade de Equipes

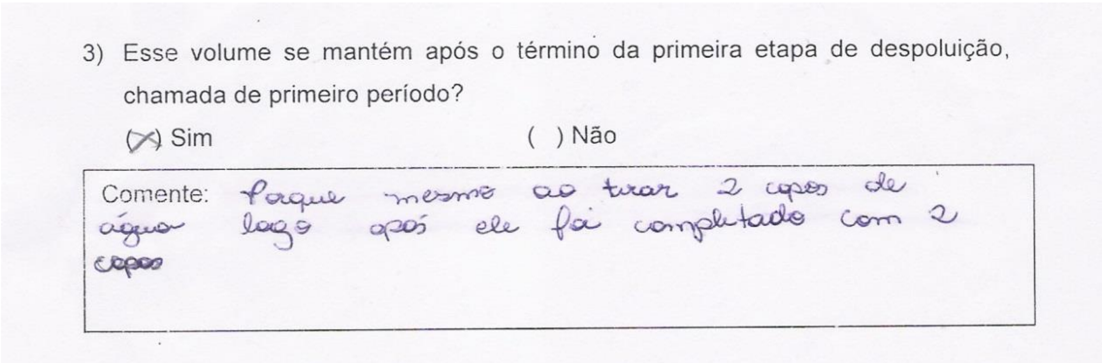
Acertaram	6
Erraram	3

Esta questão avaliava se depois da primeira etapa de despoluição o lago continuaria com 2000 ml de líquido. Apesar do grande número de acertos, esperava-se alguns deslizes, pois são retirados dois copos do líquido total do lago e em seguida são repostos dois copos de água limpa, desse modo, o único volume que diminuiria no lago, seria o volume do poluente. Vale lembrar que esta conclusão exige um bom raciocínio e interpretação do experimento, visto que ao mexer na quantidade de líquido existente inicialmente no lago, muitos alunos poderiam imaginar que o volume não voltaria a ser o mesmo. E foi o que ocorreu com três equipes, temos que 6 acertaram, isto é, responderam “Sim”, e 3 erraram, responderam “Não”.

As equipes errantes utilizaram a justificativa de que foram retirados dois copos, provavelmente se esqueceram de considerar que houve a reposição da mesma quantidade de líquido retirado.

Não houve perguntas nesta questão.

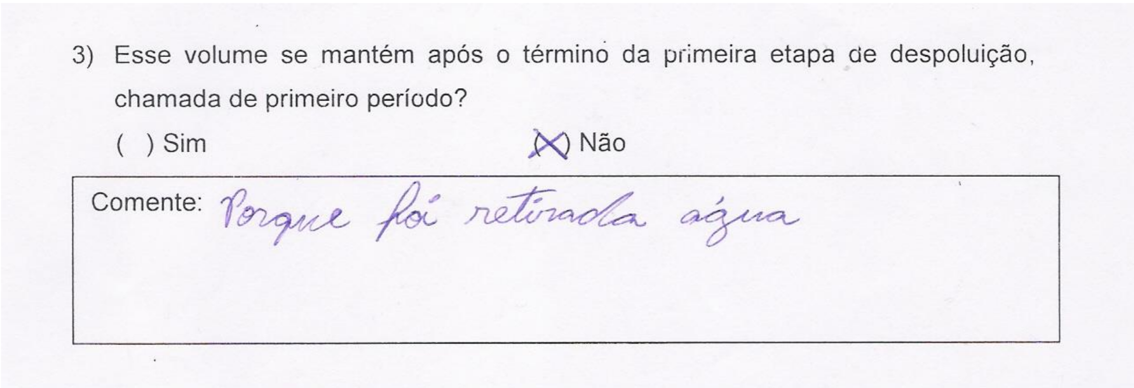
Segue a solução de uma das equipes que responderam corretamente a esta questão, e a solução de uma das equipes que erraram.



3) Esse volume se mantém após o término da primeira etapa de despoluição, chamada de primeiro período?

(X) Sim ( ) Não

Comente: Porque mesmo ao tirar 2 copos de água lago após ele foi completado com 2 copos



3) Esse volume se mantém após o término da primeira etapa de despoluição, chamada de primeiro período?

( ) Sim (X) Não

Comente: Porque foi retirada água

QUESTÃO 4:

4) Qual é a quantidade, em ml, de poluente que existe no nosso lago modelo inicialmente?

	Quantidade de Equipes
Acertaram	7
Erraram	2

Tivemos sete equipes que acertaram esta questão, responderam 200 ml, duas equipes erraram, responderam 1800 ml. O erro pode ser entendido como falta de interpretação das duas equipes, que eles se confundiram com o volume de água limpa na hora de responder.

Não houve perguntas nesta questão.

QUESTÃO 5:

5) Qual é a quantidade, expressa na forma de fração, de poluente que desaparece a cada período de 24 horas e que nós chamamos de etapa?

( ) $\frac{1}{2}$ ( ) $\frac{1}{3}$ ( ) $\frac{1}{5}$ ( ) $\frac{2}{3}$ ( ) $\frac{2}{5}$

	Quantidade de Equipes
Acertaram	9
Erraram	0

Esta questão poderia ocasionar dúvidas, mas houve 100% de acerto. Esperava-se que alguns alunos pudessem responder ½, visto que a purificação se dá em 20% do poluente inicial a cada etapa e, em algumas vezes, alguns alunos se confundem com o denominador, no caso o 2.

9 equipes responderam 1/5, ou seja, acertaram esta questão.

Nesta questão alguns alunos não sabiam o que fazer, como descobririam este valor, então enfatizei a relação existente entre o todo, que eram 10 copos, e a parte que eles “retiravam” do lago para purificar, isto é, 2 copos. Dessa forma os alunos chegaram à solução.

QUESTÃO 6:

6) Qual é a quantidade, expressa na forma de números decimais, de poluente que desaparece a cada período de 24 horas e que nós chamamos de etapa?

( ) 0.5 ( ) 0.33 ( ) 0.2 ( ) 0.66 ( ) 0.4

	Quantidade de Equipes
Acertaram	8
Erraram	1

Esperava-se que esta questão fosse reflexo da anterior, ou seja, que a mesma quantidade de alunos que respondessem corretamente a questão 5 também acertassem aqui. Porém não foi isso que ocorreu. Temos 8 equipes que acertaram, responderam 0,2. E uma equipe que respondeu corretamente à questão anterior, respondeu 0,5 a esta, provavelmente pelo denominador da fração ser 5.

Nesta questão os alunos me perguntaram o que era “número decimal”, e como eles deveriam fazer para descobrir esse valor.

QUESTÃO 7:

7) Qual é a quantidade, expressa na forma percentual, de poluente que desaparece a cada período de 24 horas e que nós chamamos de etapa?

( ) 50% ( ) 33% ( ) 20% ( ) 66% ( ) 40%

	Quantidade de Equipes
Acertaram	9
Erraram	0

Há uma ligação entre as questões 5, 6 e 7. E o que se esperava era que os erros e acertos ocorressem na mesma quantidade, o que não aconteceu, pois na questão anterior esse número variou, porém, aqui, as 9 equipes responderam 20%, ou seja, acertaram. A equipe que errou anteriormente, utilizou-se da questão 5, ou apenas de uma regra de três simples para resolvê-la.

Nesta questão alguns alunos me perguntaram como era feito o cálculo da porcentagem.

QUESTÃO 8:

8) Considerando que a mistura de água e café (chamada poluente) é homogênea, quantos ml de poluente foram retirados no primeiro dia, isto é, após a primeira etapa do processo de despoluição?

	Quantidade de Equipes
Acertaram	7
Erraram	2

Nesta questão 7 equipes acertaram, responderam 40 ml. Uma das equipes respondeu "20%", o que me faz acreditar que eles compreenderam o que estava ocorrendo, mas não conseguiram calcular a quantidade em ml. E uma equipe respondeu 2 copos, imagino que eles se esqueceram de considerar que nos dois copos de água poluída que se retirava a cada etapa, não havia só poluente.

Nesta questão, alguns alunos sabiam que deveriam retirar 1/5 do poluente, mas não sabiam como fazer, alguns tiveram dificuldades em multiplicar fração. A maioria dos alunos perguntou o que significa a palavra "homogênea".

QUESTÃO 9:

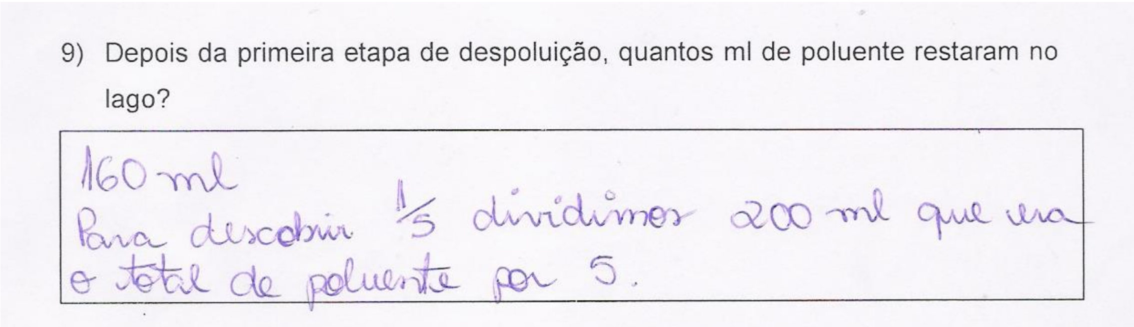
9) Depois da primeira etapa de despoluição, quantos ml de poluente restaram no lago?

	Quantidade de Equipes
Acertaram	8
Erraram	1

Esta questão está relacionada à anterior. Esperava-se, então, que apenas as equipes que acertaram a questão 8, acertassem esta também. Porém 8 equipes responderam corretamente, 160 ml, ou seja, uma equipe a mais do que na questão anterior. A equipe que respondeu “20%” anteriormente, acertou aqui, o que confirma que essa equipe entendeu o processo de despoluição, mas não interpretou corretamente a questão número 8. Uma equipe respondeu “2 copos de poluente”, provavelmente não entendeu a questão, ou não prestou atenção à pergunta.

Não houve perguntas nesta questão.

Segue a resolução de uma das equipes que acertaram.



9) Depois da primeira etapa de despoluição, quantos ml de poluente restaram no lago?

160 ml
Para descobrir 1/5 dividimos 200 ml que era o total de poluente por 5.

QUESTÃO 10:

10) A água do nosso lago modelo, após a primeira etapa de despoluição, está transparente e clarinha?

( ) Sim ( ) Não

	Quantidade de Equipes

Responderam “Não”	9
Responderam “Sim”	0

As 9 equipes responderam “Não”.

Não houve perguntas nesta questão.

QUESTÃO 11:

11) Com base no que fora feito na etapa 1 do processo de despoluição, você conseguiria estimar após quantos dias, ou seja, após quantas etapas de despoluição, o lago estará totalmente despoluído?

( ) 2 dias

( ) 3 dias

( ) 4 dias

( ) 5 dias

( ) Nunca estará completamente despoluído

	Quantidade de Equipes
Acertaram	5
Erraram	4

Cinco equipes acertaram, responderam que o lago nunca estará completamente despoluído, alguns deixaram sem justificar, a equipe que justificou escreveu: “Já testamos várias vezes e não conseguimos despoluir”, outra equipe escreveu: “Toda a vez que você acrescenta a água, a coloração não muda muito”.

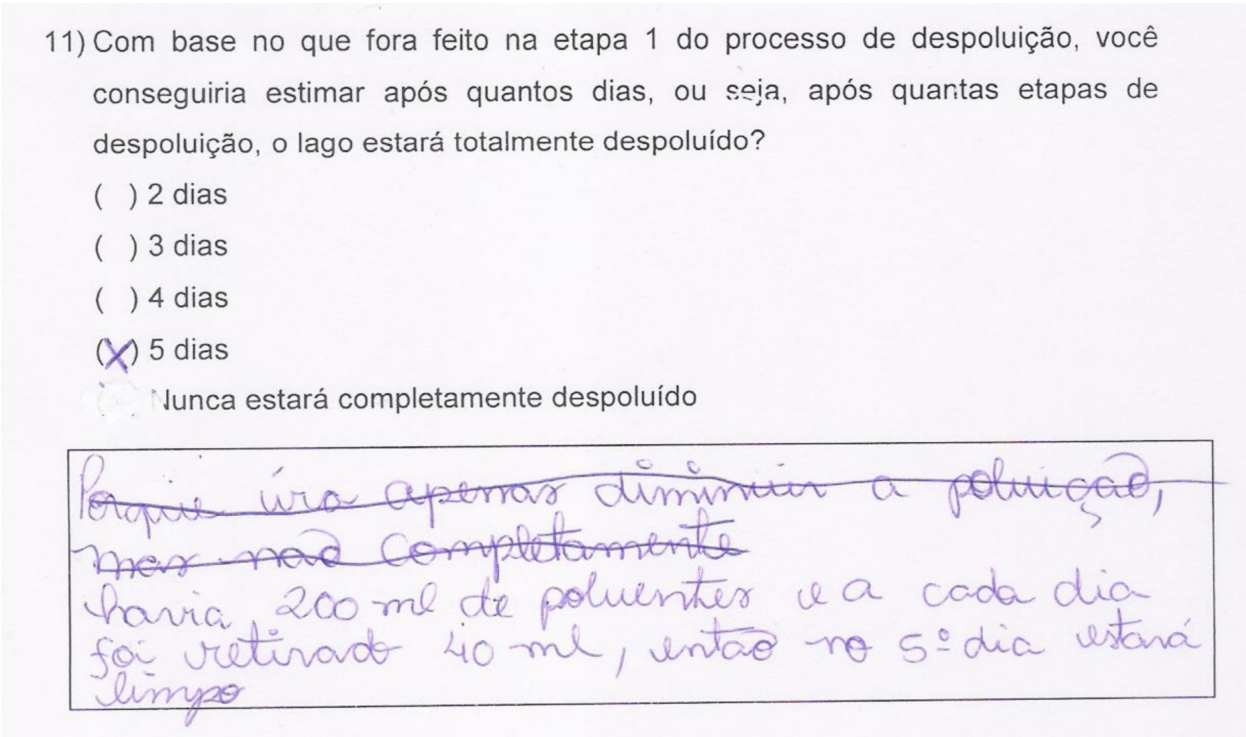
Quatro equipes responderam “5 dias”, apenas uma equipe justificou, escrevendo: “Havia 200 ml de poluente e a cada dia foi retirado 40 ml, então no 5º dia o lago estará limpo”.

Já esperávamos que alguns alunos tivessem esse raciocínio, pois, a cada dia (etapa), retiramos 20% do volume de poluente, restante na etapa anterior, eles assimilaram a ideia de que sempre retiramos 20% do total, sendo assim:

200 – 40 – 40 – 40 – 40 – 40 = 200 – 200 = 0.

Alguns alunos, que responderam 5 dias, acreditaram ter terminado a atividade, e perguntaram-me se precisavam continuar.

A resolução abaixo mostra o raciocínio de uma das equipes que havia acertado, mas mudou de alternativa, justificando.



11) Com base no que fora feito na etapa 1 do processo de despoluição, você conseguiria estimar após quantos dias, ou seja, após quantas etapas de despoluição, o lago estará totalmente despoluído?

( ) 2 dias

( ) 3 dias

( ) 4 dias

(X) 5 dias

( ) Nunca estará completamente despoluído

~~Porque irá apenas diminuir a poluição, mas não completamente~~
havia 200 ml de poluentes e a cada dia foi retirado 40 ml, então no 5º dia estará limpo

Foto 4: Aplicação da folha de atividades 1 – Laboratório de ciências.

QUESTÃO 12:

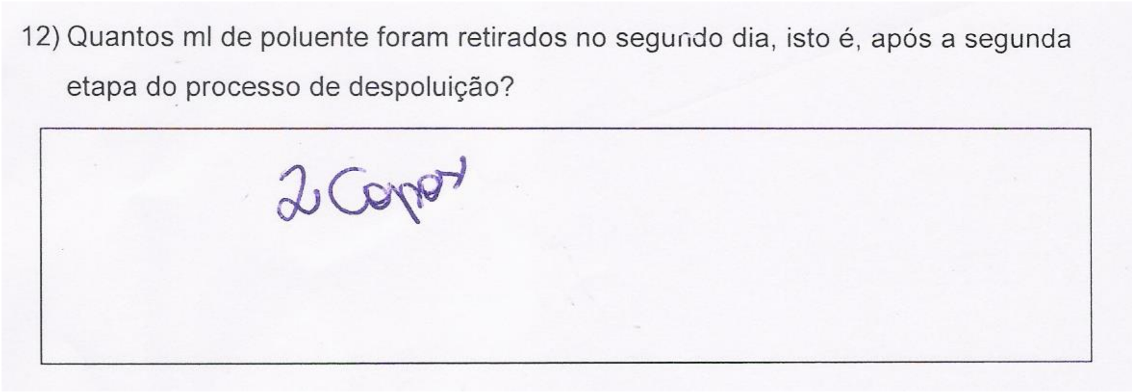
12) Quantos ml de poluente foram retirados no segundo dia, isto é, após a segunda etapa do processo de despoluição?

	Quantidade de Equipes
Acertaram	3
Erraram	6

Três equipes responderam corretamente, 32 ml. Quatro equipes responderam 40 ml, provavelmente eles calcularam 20% do total inicial de poluente. A equipe que respondeu 2 copos para a questão 8, teve a mesma resposta nesta questão, acredito que utilizou o mesmo raciocínio. E uma equipe respondeu 80 ml, provavelmente essa equipe somou os 40 ml retirados na primeira etapa e imaginou que seriam retirados mais 40 ml na segunda etapa.

Não houve perguntas nesta questão.

Segue a resposta de uma das equipes.


12) Quantos ml de poluente foram retirados no segundo dia, isto é, após a segunda etapa do processo de despoluição?

2 Copos

QUESTÃO 13:

13) Calcule quantos ml de poluente restará no lago após a segunda etapa de despoluição.

	Quantidade de Equipes
Acertaram	3
Erraram	6

As 3 equipes que acertaram a questão anterior, também acertaram esta, responderam 128 ml. As 4 equipes que responderam 40 ml à questão anterior, responderam 120 ml nesta questão, mantendo a linha de raciocínio. A equipe que respondeu 80 ml, anteriormente, teve a mesma resposta das outras 4 equipes, 120 ml, pois calcularam os 200 ml iniciais e subtraíram 80 ml. A equipe que respondeu 2 copos à questão anterior, também respondeu "2 copos" nesta questão, o que me leva a concluir que responderam aleatoriamente às questões.

Não houve perguntas nesta questão.

QUESTÃO 14:

14) A água do nosso lago modelo, após a segunda etapa de despoluição, está transparente e clarinha?

( ) Sim ( ) Não

	Quantidade de Equipes
Responderam “Não”	9
Responderam “Sim”	0

As 9 equipes responderam “Não”.

Não houve perguntas nesta questão.

QUESTÃO 15:

15) Quantos ml de poluente foram retirados no terceiro dia, isto é, após a terceira etapa do processo de despoluição?

	Quantidade de Equipes
Acertaram	3
Erraram	6

As 3 equipes que acertaram a questão 12, também acertaram a 15 respondendo 25,6 ml. As 4 equipes que responderam 40 ml à questão 12, responderam novamente 40 ml, o que mostra que os alunos dessas equipes calcularam mais uma vez 20% da quantidade inicial de poluente que havia no lago no início da simulação. A equipe que respondeu 80 ml na questão 12, respondeu nesta questão 120 ml, ou seja, eles fizeram a somatória do volume de poluente retirado nas 3 etapas, porém essa equipe cometeu o mesmo erro que a anterior, assumiu que em toda etapa de despoluição, deve-se retirar

20% da quantidade inicial de poluente que havia antes da primeira etapa de despoluição, isto é, eles imaginaram que em qualquer etapa o volume de poluente retirado do lago seria de 40 ml.

QUESTÃO 16:

16) Calcule quantos ml de poluente restará no lago após a terceira etapa de despoluição.

	Quantidade de Equipes
Acertaram	3
Erraram	6

As 3 equipes que responderam corretamente a questão anterior também acertaram esta, respondendo 102,4 ml. As 4 equipes que responderam 120 ml a questão 13 e 40 ml a questão anterior, mantiveram a mesma linha de raciocínio, fazendo a subtração 120 ml – 40 ml, responderam, então 80 ml. A equipe que respondeu 120 ml a questão anterior, respondeu 80 ml para esta. Essa equipe calculou em cada etapa, a soma do poluente, que ela acreditava que havia sido retirado em todas as etapas e subtraiu sempre do volume inicial de poluente, que era 200 ml, sendo assim, 200 ml – 120 ml = 80 ml. A equipe que estava respondendo “2 copos” às perguntas anteriores, deixou esta questão em branco.

QUESTÃO 17:

17) A água do nosso lago modelo, após a terceira etapa de despoluição, está transparente e clarinha?

( ) Sim ( ) Não

	Quantidade de Equipes
Responderam “Não”	9
Responderam “Sim”	0

As 9 equipes responderam “Não”.

Não houve perguntas nesta questão.

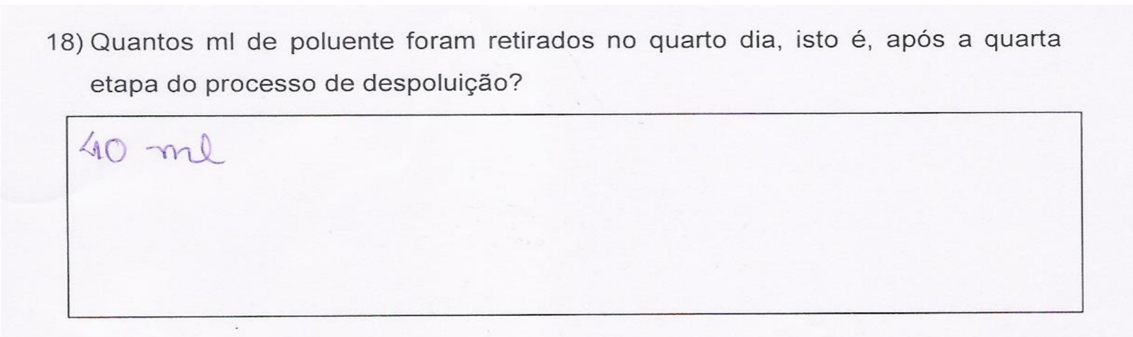
QUESTÃO 18:

18) Quantos ml de poluente foram retirados no quarto dia, isto é, após a quarta etapa do processo de despoluição?

	Quantidade de Equipes
Acertaram	3
Erraram	6

As 3 equipes que acertaram a questão 16, também acertaram esta, respondendo 20,48 ml. As 6 equipes que erraram a questão 16, mantiveram o mesmo raciocínio. As 4 equipes continuaram com a mesma opinião, de que seriam retirados 40 ml de poluente. Uma equipe colocou que a resposta seria 160 ml, pois somou o volume de poluente retirado em cada etapa, calculado de forma equivocada e somou os resultados obtidos nas quatro etapas. A equipe que esboçou o valor em “copos” continuou com a mesma resposta aqui, “2 copos”.

Segue a resposta de uma das 6 equipes que erraram.


18) Quantos ml de poluente foram retirados no quarto dia, isto é, após a quarta etapa do processo de despoluição?

40 ml

QUESTÃO 19:

19) Calcule quantos ml de poluente restará no lago após a quarta etapa de despoluição.

	Quantidade de Equipes
Acertaram	3
Erraram	6

As 3 equipes que acertaram as respostas anteriores, também acertaram esta, calculando 102,4 ml – 20,48 ml = 81,92 ml. Das 6 equipes que erraram as questões anteriores, 5 responderam nesta questão, como já era previsto, que o volume de poluente restante no lago após a quarta etapa seria de 40 ml. Dessas 5 equipes, 4 fizeram o cálculo 80 ml – 40 ml = 40 ml e, uma delas calculou 200 ml – 160 ml = 40 ml. Uma das equipes respondeu “4 copos”.

QUESTÃO 20:

20) A água do nosso lago modelo após a quarta etapa de despoluição é transparente e clarinha?

( ) Sim ( ) Não

	Quantidade de Equipes
Responderam “Não”	9
Responderam “Sim”	0

As 9 equipes responderam “Não”.

Não houve perguntas nesta questão.

QUESTÃO 21:

21) Quantos ml de poluente foram retirados no quinto dia, isto é, após a quinta etapa do processo de despoluição?

	Quantidade de Equipes
Acertaram	3
Erraram	6

As 3 equipes acertaram a questão, respondendo 16,38 ml. Quatro equipes continuaram com a resposta inicial de 40 ml, uma equipe respondeu 200 ml, somando 5 vezes o valor de 40 ml. E uma equipe respondeu “3 copos”.

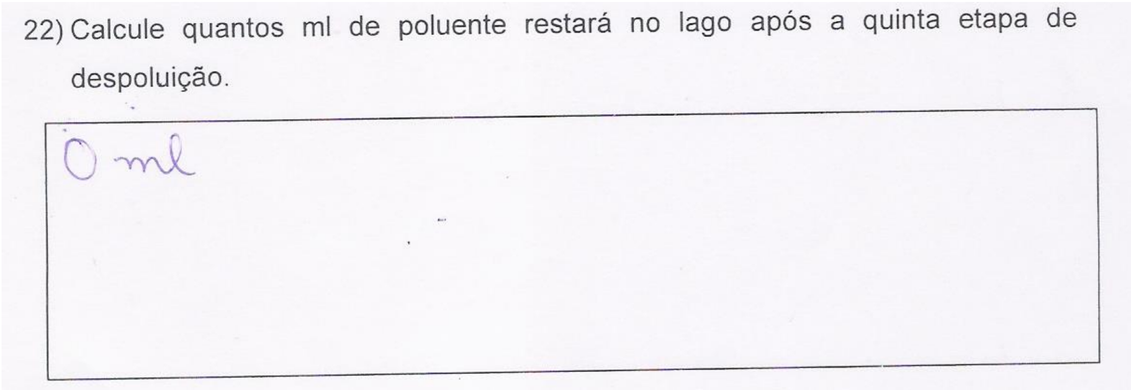
QUESTÃO 22:

22) Calcule quantos ml de poluente restará no lago após a quinta etapa de despoluição.

	Quantidade de Equipes
Acertaram	3
Erraram	6

As 3 equipes que vinham acertando as questões até aqui, também acertaram esta, respondendo 65,54 ml. Cinco equipes responderam que restaria “0 ml”, respeitando o raciocínio de que, a cada etapa, são retirados 40 ml, sendo assim, após cinco etapas 200 ml seriam retirados, o que equivale ao volume inicial de poluente no lago. Uma equipe respondeu “4 copos”.

Segue a resposta de uma das 6 equipes que erraram.



22) Calcule quantos ml de poluente restará no lago após a quinta etapa de despoluição.

0 ml

QUESTÃO 23:

23) A quantidade de poluente retirada em cada etapa:

( ) Aumenta

( ) É sempre a mesma

( ) Diminui

	Quantidade de Equipes
Aumenta	1
É sempre a mesma	5
Diminui	3

Como já era esperado, as 3 equipes que acertaram as questões anteriores já sabiam que a quantidade de poluente estava diminuindo. Das 6 equipes que erraram, 5, inclusive a que estava respondendo em função de “copos”, respondeu que o volume de poluente retirado, a cada etapa, mantinha-se, isto é, era sempre o mesmo. Uma equipe respondeu que o volume de poluente retirado aumentava a cada etapa, essa era a equipe que somava a quantidade de poluente retirada a cada etapa.

QUESTÃO 24:

24) A água do nosso lago modelo após a quinta etapa de despoluição está transparente e clarinha?

( ) Sim ( ) Não

	Quantidade de Equipes
Responderam “Não”	9
Responderam “Sim”	0

As 9 equipes responderam “Não”.

Não houve perguntas nesta questão.

QUESTÃO 25:

25) A sua resposta aqui tem alguma relação com o que você respondeu na questão 11?

( ) Sim ( ) Não

	Quantidade de Equipes
Responderam “Sim”	4
Responderam “Não”	5

A questão 11 perguntava às equipes, se elas achavam que, em algum momento, o lago estaria totalmente despoluído, 4 equipes responderam que sim e isto ocorreria após 5 etapas de despoluição. Porém, após terminadas as 5 etapas, eles puderam observar que o lago não possuía agua limpa e clara. Portanto, 6 equipes associaram a resposta da questão 11 a esta questão e puderam perceber que, em 5 etapas, o lago na estaria despoluído, mostrando que o raciocínio empregado nas questões anteriores estava incorreto. Uma das 4 equipes que responderam que o lago seria totalmente despoluído em 5 etapas, corrigiu o seu raciocínio durante a realização dos cálculos.

QUESTÃO 26:

26) Você ficou surpreso(a)?

( ) Sim ( ) Não

	Quantidade de Equipes
Responderam “Sim”	6
Responderam “Não”	3

As 6 equipes que cometeram erros durante as etapas de despoluição ficaram surpresas com a descoberta revelada ao final da atividade, de que, em 5 etapas, o lago não estaria totalmente despoluído, as 3 equipes que acertaram as atividades, já haviam concluído esse fato, portanto, não ficaram surpresas.

Capítulo 6

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA FOLHA DE ATIVIDADES 2

6.1. INTRODUÇÃO

A folha de atividades 2 foi elaborada com o intuito de conduzir os alunos à associação e conceitualização dos conteúdos abordados na folha de atividade 1, juntamente com a simulação. Nesta segunda folha de atividades o aluno foi encaminhado, através dos enunciados e de sua interpretação, à descoberta de uma fórmula que revelasse o termo geral de uma progressão geométrica. A finalização desta folha de atividades foi realizada com uma parte gráfica, em que as equipes construíram gráficos de variação discreta e contínua que ilustravam o fenômeno estudado e simulado por eles.

6.2. RESUMO DA FOLHA DE ATIVIDADES 2

A folha de atividades 2 foi composta de 35 questões, sendo as 25 primeiras desenvolvidas em sala de aula no dia 10/05/2013, em uma aula de 50 minutos. As 10 questões finais necessitavam do uso de computadores, portanto, foram resolvidas no laboratório de informática no dia 14/05/2013 em uma aula de 50 minutos. Os alunos utilizaram o programa Excel através de uma material de apoio e para fins que serão descritos posteriormente.

A aplicação da folha de atividades 2 contou com as mesmas equipes que participaram da folha 1.

6.3. ERROS E DIFICULDADES ESPERADAS

Durante o ensino da matemática a grande parte dos alunos demonstra dificuldades para trabalhar com a álgebra. Eles podem até se dar bem com a parte numérica, a aritmética das questões, porém, quando aparecem as variáveis e incógnitas vários alunos costumam “travar”, ficam receosos e inseguros. Sendo assim os erros e dificuldades esperados nesta etapa da atividade eram relativos ao uso correto das expressões matemáticas que envolviam a variável “n”, desse modo, elaboramos a folha de atividades de 2, encaminhando o aluno para que esses erros pudessem ser minimizados.

6.4. ANÁLISE A PRIORI E A POSTERIORI DA FOLHA DE ATIVIDADES 2

Nesta seção faremos uma análise a priori e a posteriori dos resultados obtidos na folha de atividades 2. As questões presentes nesta folha de atividades serão apresentadas a seguir.

Questão 27:

27) Considere que n represente o número de dias em que o lago vem passando pelo processo de despoluição, e que a(n) represente a quantidade restante de poluente no nosso lago modelo após n dias, isto é, após n etapas de despoluição. Veja o seguinte exemplo:

Sabemos que a(0) = 200 ml é a quantidade inicial de poluente. A quantidade de poluente retirada a cada processo de despoluição é igual a 1/5 do que havia anteriormente, sendo assim, para calcularmos a quantidade de poluente que resta no lago após o primeiro dia, ou seja, após a primeira etapa, precisamos retirar 1/5 do poluente inicial existente em a(0), o que ocorre desta forma:

$$a(1) = a(0) - \frac{1}{5} . a(0) = \frac{5a(0) - 1a(0)}{5} = \frac{4}{5} . a(0)$$

Deste modo, conseguimos expressar o valor de a(1) em função de a(0):

$$a(1) = \frac{4}{5} . a(0)$$

Agora, como já sabemos o valor de a(0), podemos calcular o valor de a(1) sem dificuldades. Veja:

$$a(1) = \frac{4}{5} . 200 = \frac{800}{5} = 160\,ml$$

A quantidade de poluente retirada do lago após o segundo dia de despoluição é igual a 1/5 da quantidade de poluente restante após o primeiro dia, isto é, de a(1). Dessa forma, preencha:

$$\boxed{a(2) = a(\quad) - \frac{1}{5} . a(\quad) = \frac{5a(\quad) - 1a(\quad)}{5} = \frac{4}{5} . a(\quad)}$$

	Quantidade de Equipes
Acertaram	9
Erraram	0

Com esta questão, deu-se início a conceitualização do problema. O aluno pode perceber que as etapas da despoluição estavam relacionadas com a quantidade de poluente que restava no lago a cada “dia” por uma função recursiva ($n \rightarrow a(n)$), mais especificamente por uma progressão geométrica.

A questão estava simples, o modelo em que ela foi apresentada já encaminhava o aluno à solução.

Todas as equipes acertaram.

Não houve perguntas nesta questão.

Questão 28:

28) Sabendo que a(1) = 160 ml, utilize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule o valor numérico de a(2).

a(2) =

	Quantidade de Equipes
Acertaram	6
Erraram	3

Das 6 equipes que acertaram, 5 utilizaram logo a expressão final, encontrada na questão anterior, em que diz que a(2) = 4/5. a(1), portanto a(2) = 4/5.160 = 640/5 = 128 ml. A 5ª equipe que acertou utilizou o raciocínio completo da questão anterior, desde o início, partindo de que a(2) = 160 – 1/5.160, chegando à solução correta.

Das três equipes que erraram, uma respondeu igualmente o que havia respondido na questão anterior, chegando que a(2) = 4/5.a(1), porém sem substituir o valor de a(1). As duas outras equipes que erraram responderam simplesmente com o número “1”, ou seja, a(2) = 1. Acredito que eles queriam dizer que a(2) está ligado com o a(1), respondendo somente “1”.

Nesta questão alguns alunos solicitaram a minha ajuda, na maioria das vezes para perguntar se ao final da conta, em que 4/5 multiplicava 160, qual operação eles deveriam fazer primeiro, multiplicar o 160 por 4, ou dividi-lo por 5.

28) Sabendo que a(1) = 160 ml, utilize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule o valor numérico de a(2).

$a(2) = ?$

Acima a resposta de uma das equipes que erraram.

28) Sabendo que a(1) = 160 ml, utilize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule o valor numérico de a(2).

$a(2) = 160 - \frac{1}{5} \cdot 160 = \frac{5 \cdot 160 - 1 \cdot 160}{5} = \frac{800 - 160}{5} = \frac{640}{5} = 128\,mL$

Acima a resposta de uma das equipes que acertaram.

Questão 29:

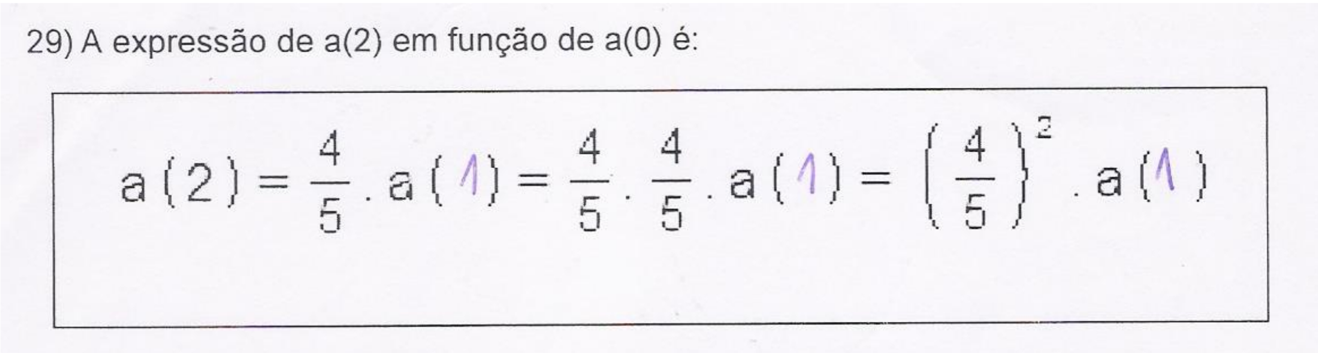
29) A expressão de a(2) em função de a(0) é:

$$a(2) = \frac{4}{5} \cdot a(\quad) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot a(\quad) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot a(\quad)$$

	Quantidade de Equipes
Acertaram	4
Erraram	5

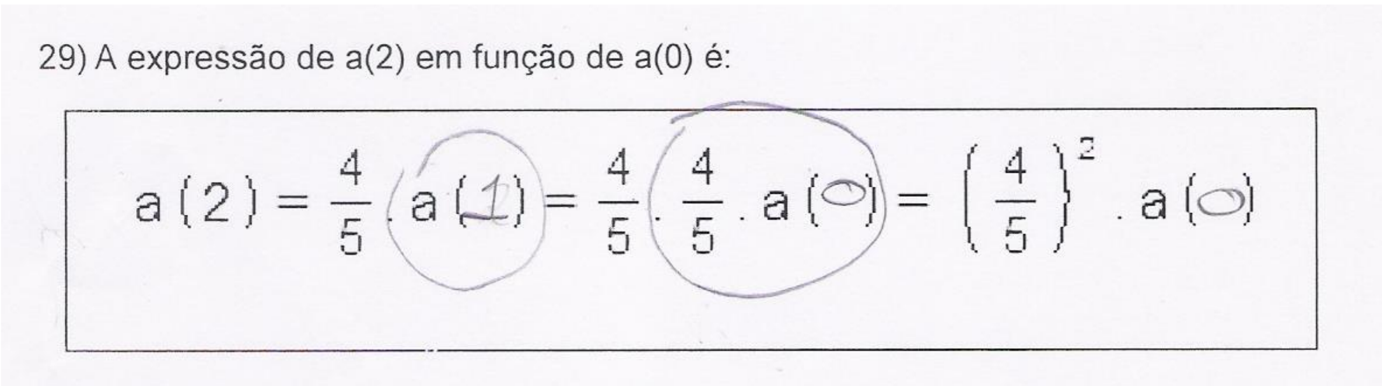
Quatro equipes conseguiram deduzir que se a(2) = 4/5.a(1) e se a(1) = 4/5. a(0), então a(2) = 4/5.4/5.a(0) = $(4/5)^2$. a(0), fazendo as substituições corretas nos espaços deixados. Das quatro equipes que erraram, duas preencheram os espaços somente com o número 0, acredito que eles compreenderam que deviam deixar o a(2) em função de a(0), porém, não souberam desenvolver esse raciocínio e acabaram se confundindo. Chegaram à solução correta, mas de modo inadequado. As outras três equipes que erraram completaram todos os parênteses com o número 1, chegando que a(2) = $(4/5)^2$.a(1), o que contradiz a resposta da questão anterior, e não satisfaz o que esta questão pedia, pois deveriam deixar a(2) em função de a(0), mas o a(0) não apareceu em nenhum momento em suas respostas. Eles começaram a responder corretamente, pois a(2) = 4/5.a(1), porém não finalizaram direito.

Não houve perguntas nesta questão.


29) A expressão de a(2) em função de a(0) é:

$$a(2) = \frac{4}{5} \cdot a(1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot a(1) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot a(1)$$

Acima a resposta de uma das equipes que erraram.


29) A expressão de a(2) em função de a(0) é:

$$a(2) = \frac{4}{5} \cdot a(1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot a(0) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot a(0)$$

Acima a resposta de uma das equipes que acertaram.

Questão 30:

30) Utilize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule novamente o valor numérico de a(2).

a(2) =

	Quantidade de Equipes
Acertaram	6
Erraram	3

As seis equipes que chegaram que a(2) = $(4/5)^2$.a(0) conseguiram chegar à resposta correta. Das três equipes que responderam anteriormente que a(2) = $(4/5)^2$.a(1), duas não fizeram as substituições necessárias, de acordo com o raciocínio que utilizaram anteriormente, eles responderam somente “0” à questão. Essas mesmas equipes haviam respondido “1” na questão 28. O que me leva a crer que eles queriam dizer que a(2) estava em função de a(0) respondendo apenas com o valor “0” e que houve troca de informações entre eles. A outra equipe que errou, chegou a fazer as substituições necessárias, obtendo que a(2) = $(4/5)^2$.160 = 102,4 ml.

Nesta questão alguns alunos me perguntaram como deveriam fazer a operação $(4/5)^2$, muitos acreditavam que $(4/5)^2$ era igual a 16/5, justificando que quando há uma soma de frações não se deve mexer no denominador.

Questão 31:

31) Os valores numéricos encontrados para a(2) foram iguais?
( ) Sim ( ) Não

	Quantidade de Equipes
Responderam “Sim”	6
Responderam “Não”	3

As 6 equipes que chegaram à resposta certa na questão anterior responderam "sim" a esta questão, as três outras equipes responderam "não".

Não houve perguntas nesta questão.

Questão 32:

32) A quantidade de poluente retirada do lago após o terceiro dia de despoluição é igual a 1/5 da quantidade de poluente restante após o segundo dia, isto é, de a(2). Dessa forma, preencha:

$$a(3) = a(\quad) - \frac{1}{5}.a(\quad) = \frac{5a(\quad) - 1a(\quad)}{5} = \frac{4}{5}.a(\quad)$$

	Quantidade de Equipes
Acertaram	9
Erraram	0

A questão 32 segue o mesmo modelo da 27. Todas as equipes acertaram.

Não houve perguntas nesta questão.

Questão 33:

33) Utlize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule o valor numérico de a(3).

$$a(3) =$$

	Quantidade de Equipes
Acertaram	6
Erraram	3

As 6 equipes que acertaram a esta questão chegaram à conclusão, através da questão anterior, que a(3) = (4/5).128 = 102,4 ml. Das três equipes que erraram, duas responderam “2”, elas já haviam respondido similarmente as questões anteriores E uma não substituiu o valor de a(1), obtendo que a(2) = 4/5.a(1), sem calcular o seu valor numérico.

Não houve perguntas nesta questão.

Acima a resposta de uma das equipes que acertaram.

33) Utlize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule o valor numérico de a(3).

$$a(3) = \frac{4}{5} \cdot 128 = \frac{512}{5} = 102,4$$

Questão 34:

34) A expressão de a(3) em função de a(0) é:

$$a(3) = \frac{4}{5} \cdot a(\quad) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot a(\quad) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot a(\quad)$$

	Quantidade de Equipes
Acertaram	3
Erraram	6

Esta questão segue a mesma linha da questão 29. Porém, uma das equipes que acertou a 29 errou esta.

Apenas três equipes conseguiram deduzir que se $a(3) = (4/5)^3 . a(0)$, fazendo as substituições corretas nos espaços deixados. Das seis equipes que erraram duas preencheram os espaços somente com o número 0, chegaram à solução correta, mas não conforme o esperado. Outras três equipes que erraram, completaram todos os parênteses com o número 2, chegando que $a(3) = (4/5)^2.a(2)$. E a última equipe que errou preencheu o primeiro espaço corretamente com o número, obtendo que $a(3) = 4/5.a(2)$, mas errou ao preencher os espaços posteriores utilizando o número 1, chegando que $a(3) = 4/5.a(2) = 4/5.4/5.4/5.a(1) = (4/5)^3.a(1)$.

Não houve perguntas nesta questão.

34) A expressão de a(3) em função de a(0) é:

$$a(3) = \frac{4}{5} . a(0) = \frac{4}{5} . \frac{4}{5} . \frac{4}{5} . a(0) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 . a(0)$$

Acima a resposta de uma das equipes que erraram.

Questão 35:

35) Utilize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule novamente o valor numérico de a(3).

$$a(3) =$$

	Quantidade de Equipes
Acertaram	5
Erraram	4

As três equipes que acertaram a questão anterior também acertaram esta, chegando que $a(3) = (64/125).200 = 102{,}4$ ml. As outras duas equipes que chegaram (mesmo que de maneira errada) à resposta certa, na questão anterior, acertaram esta. Das 4 equipes que erraram, 2 responderam esta questão com o valor “0”, mantendo a linha de raciocínio empregada anteriormente. Uma equipe chegou que a(3) = (4/5)³.a(2) = 64/125.128 = 65, 54 ml e a última equipe que errou chegou que a(3) = (4/5)³.a(1) = 64/125.160 = 81,92 ml.

Não houve perguntas nesta questão.

35) Utilize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule novamente o valor numérico de a(3).

$$a(3) = \frac{64}{125} \cdot \frac{200}{1} = \frac{12800}{125} = 102{,}4$$

Acima a respostas de uma das equipes que acertaram.

Questão 36:

36) Os valores numéricos encontrados para a(3) foram iguais?

( ) Sim ( ) Não

	Quantidade de Equipes
Responderam “Sim”	5
Responderam “Não”	4

As cinco equipes que responderam corretamente a questão anterior responderiam “sim” a esta questão, as demais equipes responderam “não”.

Não houve perguntas nesta questão.

Questão 37:

37) A quantidade de poluente retirada do lago após o quarto dia de despoluição é igual a 1/5 da quantidade de poluente restante após o terceiro dia, isto é, de a(3). Dessa forma, preencha:

$$a(4) = a(\ \ ) - \frac{1}{5}.a(\ \ ) = \frac{5a(\ \ ) - 1a(\ \ )}{5} = \frac{4}{5}.a(\ \ )$$

	Quantidade de Equipes
Acertaram	9
Erraram	0

Não houve perguntas nesta questão.

Questão 38:

38) Utlize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule o valor numérico de a(4).

$a(4) =$

	Quantidade de Equipes
Acertaram	5
Erraram	4

Das nove equipes que acertaram anteriormente, apenas cinco responderam corretamente a esta questão, calculando que a(4) = 4/5. 10,2,4 = 81,92 ml. Duas das equipes que erraram responderam “3” a esta questão. E as outras duas equipes que erraram, apesar de terem acertado a expressão, já não sabiam o valor que deviam substituir por a(3), pois erraram anteriormente. Uma dessas equipes deixou em sua resposta que a(4) = 4/5.a(3), sem substituir a(3) por valor algum. A outra equipe calculou que a(4) = 4/5.81,92 = 65,54 ml, devido a um equívoco cometido anteriormente.

Não houve perguntas nesta questão.

38) Utlize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule o valor numérico de a(4).

$$a(4) = \frac{4}{5} \cdot 102,4 = \frac{409,6}{5} = 81,92$$

Acima a resposta de uma das equipes que acertaram.

Questão 39:

39) A expressão de a(4) em função de a(0) é:

$$a(4) = \frac{4}{5} . a(\quad) = \frac{4}{5} . \frac{4}{5} . \frac{4}{5} . \frac{4}{5} . a(\quad) = \left(\frac{4}{5}\right)^4 . a(\quad)$$

	Quantidade de Equipes
Acertaram	3
Erraram	6

Apenas três equipes conseguiram observar que a(4) = $(4/5)^4$.a(0). Das seis equipes que erraram duas preencheram todos os espaços com o número zero, chegando (de forma errada) a solução correta, três preencheram todos os espaços com o valor 3, obtendo que a(4) = $(4/5)^4$.a(3). E a outra equipe que errou começou respondendo corretamente, que a(4) = 4/5.a(3), mas depois preencheu os dois outros espaços com o valor 2, de modo que sua resposta ficou a(4) = $(4/5)^4$.a(2).

Não houve perguntas nesta questão.

Questão 40:

40) Utilize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule novamente o valor numérico de a(4).

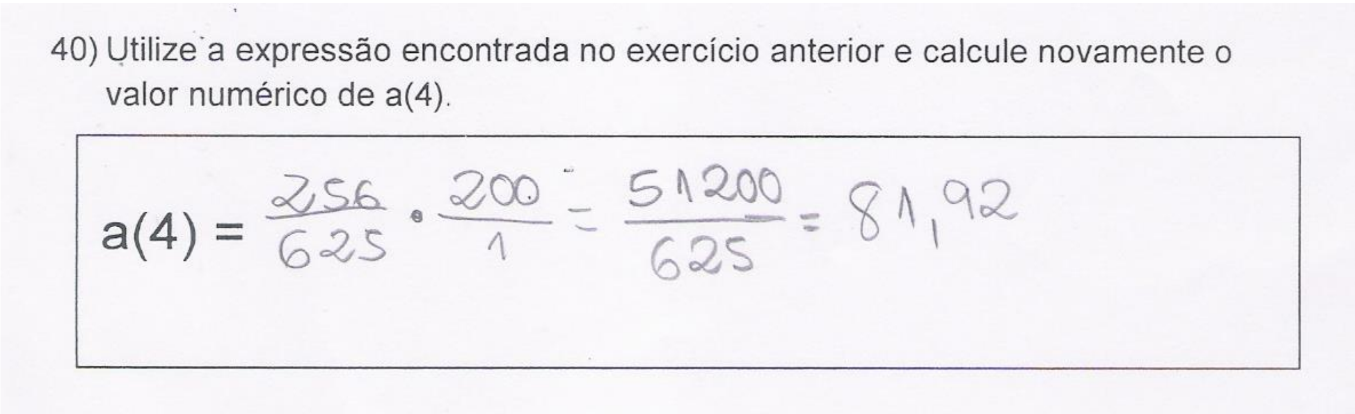
a(4) =

	Quantidade de Equipes
Acertaram	5
Erraram	4

As três equipes que acertaram a questão anterior, também acertaram esta questão, obtendo que a(4) = 256/625.200 = 81,92 ml. Outras duas equipes que chegaram à solução correta, mesmo de forma errada, anteriormente, também acertaram.

Duas das equipes que erraram, responderam “0” a esta questão. Das outras duas equipes que erraram, uma delas utilizou a expressão a(4) = $(4/5)^4$.a(3) e como já havia errado o valor de a(3) anteriormente, fez a(4) = $(4/5)^4$.81,92 = 33,55 ml. A outra equipe que errou escreveu apenas que a(4) = $(4/5)^4$.a(2).

Não houve perguntas nesta questão.



40) Utilize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule novamente o valor numérico de a(4).

$$a(4) = \frac{256}{625} \cdot \frac{200}{1} = \frac{51200}{625} = 81,92$$

Acima a resposta de uma das equipes que acertaram.

Questão 41:

41) Os valores numéricos encontrados para a(4) foram iguais?
( ) Sim ( ) Não

	Quantidade de Equipes
Responderam “Sim”	5
Responderam “Não”	4

As cinco equipes que acertaram a questão anterior responderam “sim” a esta questão, as demais equipes responderam “não”.

Não houve perguntas nesta questão.

Questão 42:

42) Observe as expressões encontradas nos exercícios 27, 32 e 37, e responda:
Para calcularmos a quantidade de poluente restante em cada etapa de despoluição sempre devemos multiplicar 4/5 pela:

( ) Quantidade de poluente inicial.

( ) Quantidade de poluente que havia uma etapa antes, ou seja, no dia anterior.

( ) Nenhuma das alternativas.

	Quantidade de Equipes
Acertaram	9
Erraram	0

As nove equipes acertaram.

Não houve perguntas nesta questão.

Questão 43:

43) Temos que no enésimo dia, a quantidade de poluente restante no lago é denotada por a(n). Como será denotada a quantidade de poluente existente no lago um dia anterior ao enésimo?

( ) a(1)

( ) a(n)

( ) a(n+1)

( ) a(n-1)

	Quantidade de Equipes
Acertaram	7
Erraram	2

Sete das nove equipes conseguiram conceitualizar o que responderam na questão anterior, respondendo que a(n-1), que simboliza uma etapa anterior a a(n). As duas equipes que erraram responderam a(1) a esta questão. Acredito que a falta de familiarização com esses termos tenham gerado o erro. Os alunos conseguem entender que a(1) significa a primeira etapa, mas não conseguem abstrair que a(n) se refere a uma enésima etapa, sendo assim não conseguem distinguir que a(n-1) antecede o enésimo termo.

Alguns alunos me perguntaram se deveriam substituir o “n” por algum valor para verificar a veracidade da expressão.

Questão 44:

44) Já sabemos como expressar o valor de a(2) em função de a(1), e também como expressar a(1) em função de a(0). Com estas informações é possível expressar a(2) em função de a(0). Veja:

No exercício 27, você descobriu, que $a(2) = \frac{4}{5} a(1)$

Mas, como já vimos anteriormente, $a(1) = \frac{4}{5} . a(0)$

Substituindo a segunda expressão na primeira, obteremos:

$$a(2) = \frac{4}{5} . a(1) = \frac{4}{5} . \left(\frac{4}{5} . a(0) \right) = \left(\frac{4}{5} \right)^2 . a(0)$$

Observe que expressamos a(2) em função de a(0).

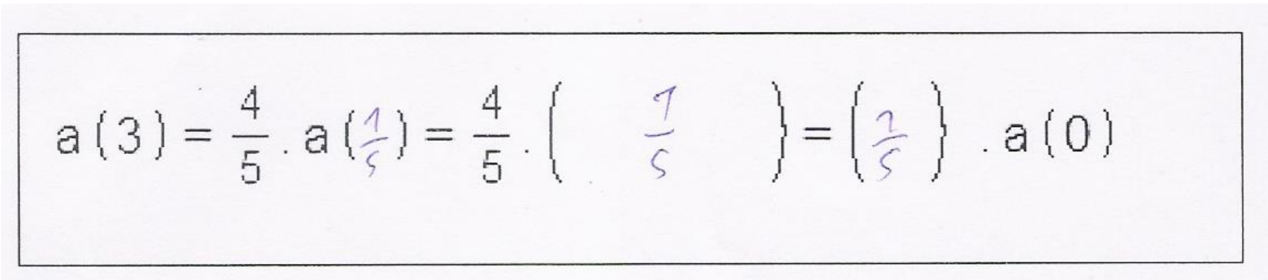
$$a(2) = \left(\frac{4}{5} \right)^2 . a(0)$$

Agora é a sua vez, complete o quadro, utilizando o valor encontrado acima.

$$a(3) = \frac{4}{5} . a(\quad) = \frac{4}{5} . \left(\qquad\qquad \right) = \left(\quad \right) . a(0)$$

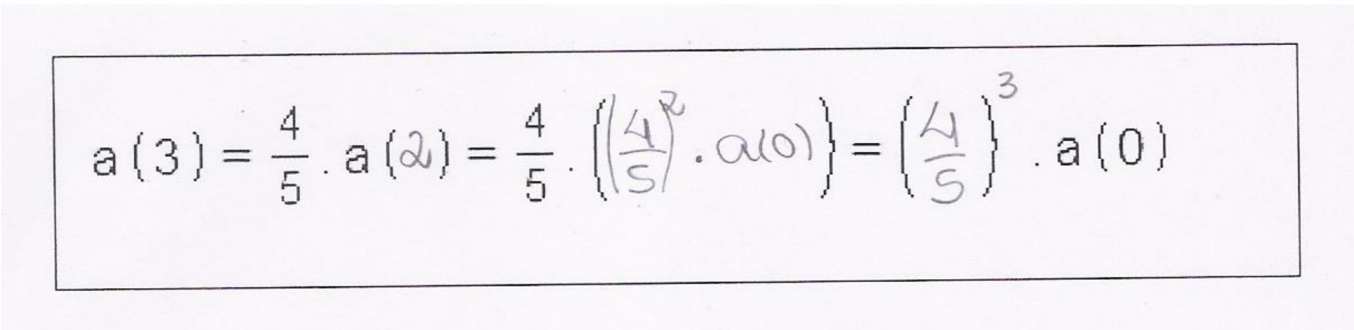
	Quantidade de Equipes
Acertaram	5
Erraram	4

Mesmo com o encaminhamento feito pelo enunciado, apenas 5 equipes chegaram à resposta correta, partindo de que a(3) = 4/5.a(2) = 4/5$(4/5)^2$.a(0) = $(4/5)^3$.a(0). Uma das quatro equipes que erraram respondeu esta questão da seguinte maneira: preencheu o primeiro espaço corretamente com o número 2 e o segundo espaço com 4/5.a(2), obtendo a(3) = 4/5.a(**2**) = 4/5(**(4/5).a(2)**) = **$(4/5)^2$**.a(0), acredito que para essa equipe tenha ficado claro que a(3) = 4/5.a(2), mas eles não conseguiram expressar o termo a(3) em função de a(0). Uma das equipes errantes deixou esta questão em branco, e as outras duas equipes preencheram os dois espaços com a fração 1/5, chegando que a(3) = 4/5.a(**1/5**) = 4/5(**1/5**) = (**1/5**).a(0). Essas duas equipes já estavam apresentando respostas iguais e aleatórias às perguntas anteriores. Veja:



Nesta questão alguns alunos me perguntaram se ao finalizar a expressão $(4/5)^3$.a(0) deveriam deixar o expoente 3 dentro ou fora dos parênteses.

Abaixo a resposta de uma das equipes que acertaram.



( ) 2

( ) 3

( ) 4

( ) 5

Questão 45:

	Quantidade de Equipes
Acertaram	6

Erraram	3

As cinco equipes que acertaram a questão anterior, mais a equipe que deixou a questão em branco, acertaram esta pergunta respondendo com o número “3”. As duas equipes que responderam a questão anterior aleatoriamente responderam esta do mesmo jeito, com o número “4”. A outra equipe que errou anteriormente respondendo que a(3) = $(4/5)^2$.a(0) respondeu com o número “2”, respeitando a sua resposta anterior.

Não houve perguntas nesta questão.

Questão 46:

46) Utilize a expressão encontrada no exercício 32 e complete:

$$a(4) = \frac{4}{5}\,.\,a(\quad) = \frac{4}{5}\,.\left(\qquad\qquad\qquad\right) = \left(\quad\right).\,a(0)$$

	Quantidade de Equipes
Acertaram	5
Erraram	4

Os erros nesta questão foram muito parecidos aos da questão 44. As cinco equipes que acertaram a 44, também acertaram esta, obtendo que a(4) = $(4/5)^4$.a(0). Das quatro equipes que erraram, uma equipe deixou novamente em branco, duas equipes responderam mais uma vez sem fundamento, preenchendo todos os espaços com o número “2”, chegando que a(3) = 4/5.a(**2**) = 4/5(**2**) = (**2**).a(0), e uma equipe começou respondendo corretamente, que a(4) = 4/5.a(3), mas não conseguiu concluir seu raciocínio, errando de modo semelhante a questão 44, a(4) = 4/5.a(**3**) = 4/5(**4/5.a(3)**) = **$(4/5)^2$**.a(0).

Não houve perguntas nesta questão.

46) Utilize a expressão encontrada no exercício 32 e complete:

$$a(4) = \frac{4}{5} \cdot a(2) = \frac{4}{5} \cdot \left(\quad 2 \quad \right) = \left(2 \right) \cdot a(0)$$

Acima a resposta de uma das equipes que erraram.

46) Utilize a expressão encontrada no exercício 32 e complete:

$$a(4) = \frac{4}{5} \cdot a(3) = \frac{4}{5} \cdot \left(\left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot a(0) \right) = \left(\frac{4}{5} \right)^4 \cdot a(0)$$

Acima a resposta de uma das equipes que acertaram.

Questão 47:

47) Quando expressamos a(4) em função de a(0), o fator 4/5 terá qual expoente?

( ) 1

( ) 2

( ) 3

( ) 4

( ) 5

	Quantidade de Equipes
Acertaram	6
Erraram	3

A equipe que deixou a questão anterior em branco, juntamente com as cinco que a acertaram, também acertaram esta questão, isso me leva a acreditar que a equipe que deixou as questões anteriores em branco, conseguiu entender ou pelo menos fazer as associações necessárias entre os termos em função de a(0) e os expoentes que apareceriam na fração 4/5, porém, não conseguiu expressar isto algebricamente. A equipe que respondeu que $a(4) = (4/5)^2.a(0)$ manteve sua resposta, o número "2". As outras duas equipes responderam com o número "3".

Não houve perguntas nesta questão.

Questão 48:

48) Utilize a expressão encontrada no exercício 34 e complete:

$$a(5) = \frac{4}{5}.a(\quad) = \frac{4}{5}.\left(\qquad\qquad\right) = \left(\quad\right).a(0)$$

	Quantidade de Equipes
Acertaram	5
Erraram	4

As mesmas cinco equipes continuaram a acertar, obtendo que $a(5) = (4/5)^5.a(0)$. Das quatro equipes que erraram duas continuaram a responder de modo impróprio, preenchendo, dessa vez, todos os espaços com o número 3. Duas equipes deixaram em branco, uma delas já havia deixado questões semelhantes, anteriormente, em branco, e a outra equipe que deixou em branco esta questão havia errado as outras questões similares.

Não houve perguntas nesta questão.

48) Utilize a expressão encontrada no exercício 34 e complete:

$$a(5) = \frac{4}{5} \cdot a(3) = \frac{4}{5} \cdot \left(\quad 3 \quad \right) = \left(3 \right) \cdot a(0)$$

Acima a resposta de uma das equipes que erraram.

48) Utilize a expressão encontrada no exercício 34 e complete:

$$a(5) = \frac{4}{5} \cdot a(4) = \frac{4}{5} \cdot \left(\left(\frac{4}{5}\right)^{4} \cdot a(0) \right) = \left(\frac{4}{5} \right)^{5} \cdot a(0)$$

Acima a resposta de uma das equipes que acertaram.

Questão 49:

49) Quando expressamos a(5) em função de a(0), o fator 4/5 terá qual expoente?

( ) 1

( ) 2

( ) 3

( ) 4

( ) 5

	Quantidade de Equipes
Acertaram	8

Erraram	1

As cinco equipes que acertaram questão anterior, mais uma das equipes que a deixou em branco, acertaram a esta questão respondendo com o número “5”. As duas equipes que responderam grande parte das questões inadequadamente também acertaram esta questão, acredito que escolheram a alternativa correta ao acaso. A outra equipe que deixou em branco a questão anterior respondeu “2” a esta questão, como já haviam respondido anteriormente, em questões semelhantes a esta.

Não houve perguntas nesta questão.

Questão 50:

50) Se quiséssemos expressar o termo a(30) em função de a(0), qual seria o expoente do fator 4/5?

( ) 27

( ) 28

( ) 29

( ) 30

( ) Nenhuma das alternativas anteriores.

Explique.

	Quantidade de Equipes
Acertaram	7
Erraram	2

Sete equipes conseguiram fazer as associações necessárias entre o que haviam descoberto anteriormente e o que aconteceria com os termos futuros, obtendo que a(30) = $(4/5)^{30}$.a(0). As duas equipes que responderam aleatoriamente as questões anteriores assinalaram “27” nesta questão. Segue a justificativa de uma destas equipes:

50) Se quiséssemos expressar o termo a(30) em função de a(0), qual seria o

50) Se quiséssemos expressar o termo a(30) em função de a(0), qual seria o expoente do fator 4/5?

( ) 27

( ) 28

( ) 29

(X) 30

( ) Nenhuma das alternativas anteriores.

Explique.

$$a(30) = \frac{4}{5} \cdot a(29) = \frac{4}{5} \cdot \left(\left(\frac{4}{5}\right)^{29} \cdot a(0) \right) = \left(\frac{4}{5}\right)^{30} \cdot a(0)$$

Veja a justificativa de uma das equipes que acertaram:

Questão 51:

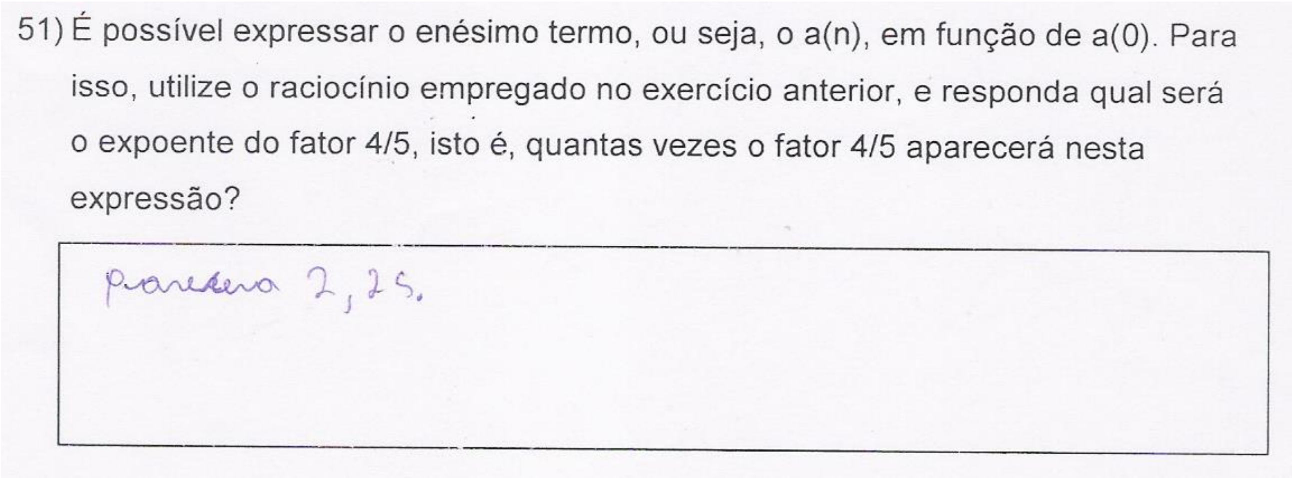
51) É possível expressar o enésimo termo, ou seja, o a(n), em função de a(0). Para isso, utilize o raciocínio empregado no exercício anterior, e responda qual será o expoente do fator 4/5, isto é, quantas vezes o fator 4/5 aparecerá nesta expressão?

	Quantidade de Equipes
Acertaram	6
Erraram	3

Seis equipes acertaram esta questão, respondendo que o expoente será “n”. Uma equipe respondeu somente “sim”, mas não colocou seria o expoente da fração 4/5.

As mesmas duas equipes que vêm respondendo de maneira inadequada responderam "2,25" a esta questão.

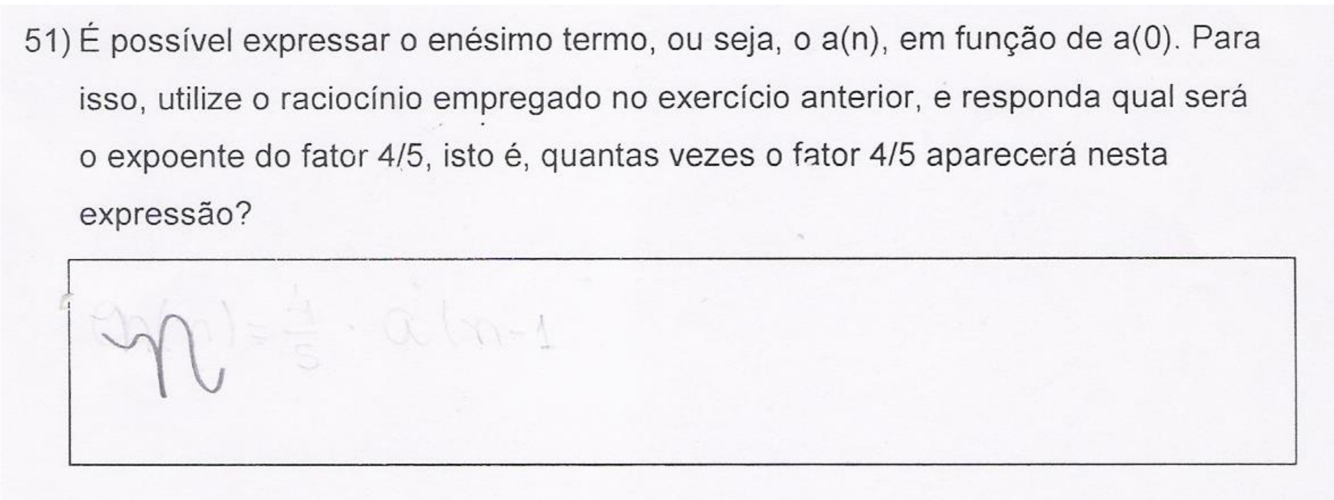
Nesta questão alguns alunos me perguntaram se poderiam colocar uma variável no lugar do expoente, pois ainda não viram equação exponencial, estão acostumados com equações de primeiro e segundo grau.



51) É possível expressar o enésimo termo, ou seja, o a(n), em função de a(0). Para isso, utilize o raciocínio empregado no exercício anterior, e responda qual será o expoente do fator 4/5, isto é, quantas vezes o fator 4/5 aparecerá nesta expressão?

parecera 2,25.

Acima a resposta de uma das equipes que erraram.



51) É possível expressar o enésimo termo, ou seja, o a(n), em função de a(0). Para isso, utilize o raciocínio empregado no exercício anterior, e responda qual será o expoente do fator 4/5, isto é, quantas vezes o fator 4/5 aparecerá nesta expressão?

n

Acima a resposta de um das equipes que acertaram.

Questão 52:

52) Expresse a(n) em função de a(0).

	Quantidade de Equipes
Acertaram	5
Erraram	4

Cinco das seis equipes que acertaram a questão anterior também acertaram esta e a sexta equipe, apesar de ter conseguido associar o expoente da fração 4/5 ao termo a(n), deixou esta questão em branco. Acredito que esta equipe ficou insegura em utilizar o “n” como expoente. A equipe que respondeu apenas “sim” na questão anterior também deixou esta em branco. E as duas equipes que responderam “2,25” anteriormente, deixaram a seguinte justificativa nesta questão:

52) Expresse a(n) em função de a(0).

Essa função começo com 0.

Veja a resposta de uma das equipes que acertaram:

52) Expresse a(n) em função de a(0).

$$a(n) = \frac{4}{5} \cdot a(n-1) = \frac{4}{5} \cdot \left(\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \cdot a(0) \right) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n} \cdot a(0)$$

É importante ressaltar que ao validar esta atividade em sala de aula, aos alunos, foi explicado que em uma o número “0” não faz parte do domínio de uma sequência, portanto, não pertence ao domínio de uma P.G., esse valor só foi utilizado nesta atividade a fim de evitar confusões, pois o índice “n” representa a quantidade de etapas de despoluição que o lago passou, e no início, quando havia 200 ml de poluente, o lago ainda não havia passado por nenhuma etapa, sendo assim a(0) = 200 ml. Porém, os alunos já possuíam o conhecimento de que a(0) = a(1)/q.

Substituindo na fórmula descoberta, teremos:

$a(n) = (4/5)^n.[a(1)/q]$ mas $q = 4/5$, então

$a(n) = (4/5)^n.[a(1)/(4/5)] = [(4/5)^n/(4/5)].a(1) = (4/5)^{n-1}.a(1)$

Portanto:

$$\boxed{\mathbf{a(n) = q^{n-1}.a(1)}}$$

A partir daqui foi necessário o uso de planilhas eletrônicas para a resolução das questões.

As planilhas eletrônicas foram usadas para a análise do volume de poluente restante no lago durante um grande período de tempo, isto é, após o lago ter passado por “n” etapas de despoluição. O uso dessas planilhas também foi necessário para que os alunos pudessem determinar em quantos dias (etapas) de despoluição seriam essenciais para que o lago se tornasse consideravelmente limpo, esse dado poderia ser descoberto com a utilização de logaritmo, porém este conteúdo só será estudado no terceiro bimestre deste ano.

Os alunos utilizaram o programa Excel com a ajuda de um material de apoio que será descrito no próximo capítulo.

Questão 53:

53) Utilizando a expressão encontrada no exercício anterior, e com a ajuda de uma calculadora ou de uma planilha eletrônica, termine de completar a tabela.

Período de 24 horas (n)		Quantidade de poluente restante no lago a(n)
Início	n = 0	a(0) = 200 ml
1º Período	n =1	a(1) = 160 ml
2º Período	n = 2	a(2) =
3º Período	n = 3	a(3) =
4º Período	n = 4	a(4) =
5º Período	n = 5	a(5) =
6º Período	n = 6	a(6) =
7º Período	n = 7	a(7) =

Espaço para os cálculos e/ou anotações.

	Quantidade de Equipes
Acertaram	7
Erraram	2

Os alunos utilizaram o Excel para a solução desta questão. Eles não apresentaram dificuldades, pois haviam trabalhado com um material de apoio que relacionava exercícios parecidos a este há 3 dias atrás. Para preencher esta tabela os alunos utilizaram a expressão a(n) = 4/5.a(n-1), completando a célula A1 da planilha com o valor de a(0), ou seja, do volume de poluente (em ml) existente no lago antes de se iniciar o processo de despoluição, portanto 200. Na célula A2 os alunos introduziram a fórmula “=4/5*A1” em que * tem a função de multiplicação, e arrastaram até a célula A8 para encontrarem todos os valores desejados (de a(0) até a(7)).

	A	B	C	D	E	F	G
1	200						
2	=4/5*A1						
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							

	A	B	C	D	E	F	G
1	200						
2	160						
3	128						
4	102,4						
5	81,92						
6	65,536						
7	52,4288						
8	41,94304						
9							

Deste modo, eles puderam confirmar os valores que já haviam obtido em questões anteriores.

Apenas duas apresentaram erros. Uma delas repetiu o valor de 160 ml em a(2), o que comprometeu a construção do final da tabela. Veja:

Período de 24 horas (n)		Quantidade de poluente restante no lago a(n)
Início	n = 0	a(0) = 200 ml
1º Período	n =1	a(1) = 160 ml
2º Período	n = 2	a(2) = 160
3º Período	n = 3	a(3) = 128
4º Período	n = 4	a(4) = 102,4
5º Período	n = 5	a(5) = 81,92
6º Período	n = 6	a(6) = 65,536
7º Período	n = 7	a(7) = 52,4288

A outra equipe que errou pulou o termo a(6), copiando o valor do termo a_7 em seu lugar, comprometendo, assim, as duas últimas linhas da tabela.

Período de 24 horas (n)		Quantidade de poluente restante no lago a(n)
Início	n = 0	a(0) = 200 ml
1º Período	n =1	a(1) = 160 ml
2º Período	n = 2	a(2) = 128
3º Período	n = 3	a(3) = 102,4
4º Período	n = 4	a(4) = 81,92
5º Período	n = 5	a(5) = 65,536
6º Período	n = 6	a(6) = 41,94304
7º Período	n = 7	a(7) = 33,35443

Período de 24 horas (n)		Quantidade de poluente restante no lago a(n)
Início	n = 0	a(0) = 200 ml
1º Período	n =1	a(1) = 160 ml
2º Período	n = 2	a(2) = 128 ml
3º Período	n = 3	a(3) = 102,4 ml
4º Período	n = 4	a(4) = 81,92 ml
5º Período	n = 5	a(5) = 65,536
6º Período	n = 6	a(6) = 52,4288
7º Período	n = 7	a(7) = 41,94304

Acima a tabela de uma das equipes que acertaram.

Não houve perguntas nesta questão.

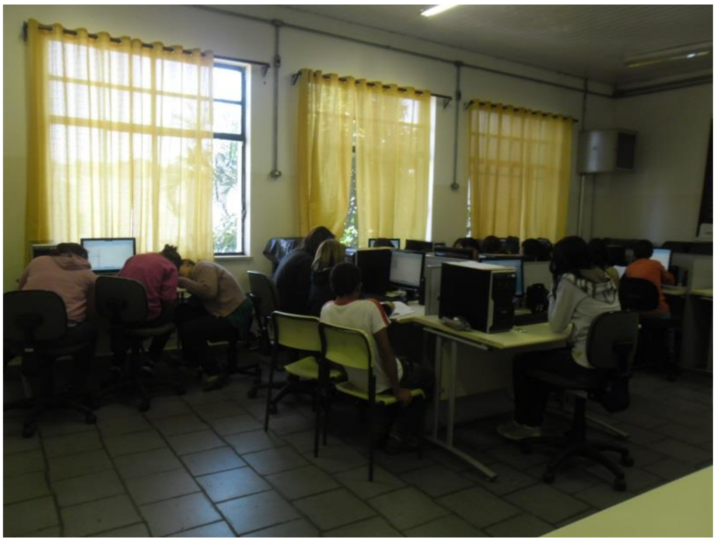


Foto 5: Aplicação da folha de atividades 2 – Laboratório de informática.

Questão 54:

54) Observe a tabela acima, em que o processo de despoluição ocorreu durante a primeira semana. O lago ficou totalmente despoluído durante este tempo?

( ) Sim ( ) Não

	Quantidade de Equipes
Acertaram	9
Erraram	0

Esta era uma questão simples, apenas de observação. As nove equipes acertaram.

Não houve perguntas nesta questão.

Questão 55:

55) Com a ajuda de uma planilha eletrônica, e das expressões encontradas anteriormente, responda qual será o volume de poluente no lago no 30º dia de despoluição.

	Quantidade de Equipes
Acertaram	5
Erraram	4

Para responder a esta questão os alunos utilizaram a mesma planilha eletrônica da questão 53, apenas movendo o cursor do quanto da célula A8 até a célula A31, já que iniciamos o processo em a(0), e queremos descobrir o valor de a(30). Apesar de todas as equipes terem realizado esse processo quatro equipes erraram por consideram que o termo a(30) estaria presente na célula A30.

Os alunos que tiveram a percepção de que a(30) estava representado na célula A31 me chamaram para confirmar se isso estava correto.

	A	B	C	D	E
1	200				
2	160				
3	128				
4	102,4				
5	81,92				
6	65,536				
7	52,4288				
8	41,94304				
9	33,554432				
10	26,8435456				
11	21,47483648				
12	17,17986918				
13	13,74389535				
14	10,99511628				
15	8,796093022				
16	7,036874418				
17	5,629499534				
18	4,503599627				
19	3,602879702				
20	2,882303762				
21	2,305843009				
22	1,844674407				
23	1,475739526				
24	1,180591621				
25	0,944473297				
26	0,755578637				
27	0,60446291				
28	0,483570328				
29	0,386856262				
30	0,30948501				
31	0,247588008				
32					

55) Com a ajuda de uma planilha eletrônica, e das expressões encontradas anteriormente, responda qual será o volume de poluente no lago no 30º dia de despoluição.

30º Período | n = 30 | a(30) = 0,247588008

Acima a resposta de uma das equipes que acertaram.

56) Ele estará totalmente limpo?

( ) Sim ( ) Não

Questão 56:

	Quantidade de Equipes
Responderam “Não”	9
Responderam “Sim”	0

As nove equipes acertaram.

Não houve perguntas nesta questão.

Questão 57:

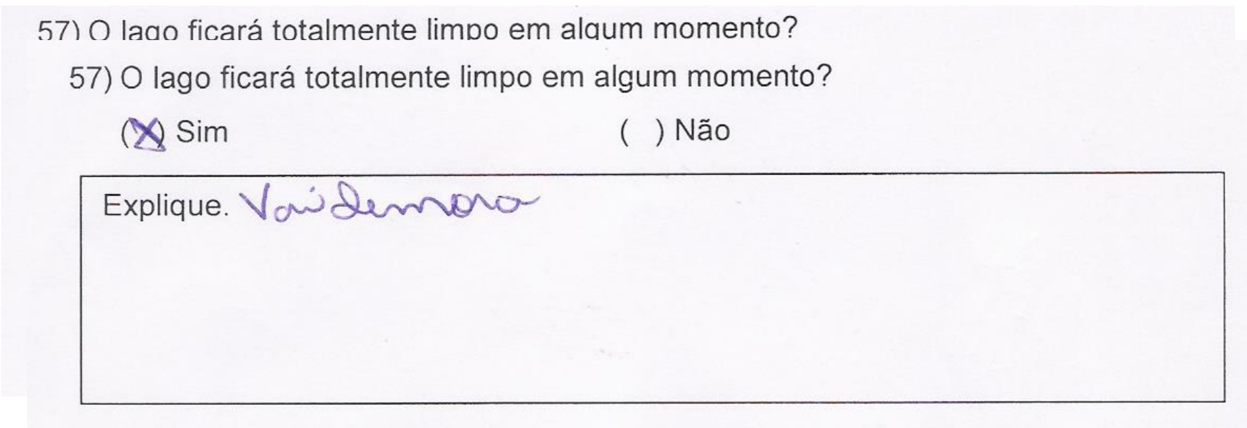
57) O lago ficará totalmente limpo em algum momento?

( ) Sim ( ) Não

Explique.

	Quantidade de Equipes
Responderam “Não”	7
Responderam “Sim”	2

Sete equipes acertaram esta questão. Veja uma das justificativas apresentadas. Apenas duas equipes erraram, e uma delas não deixou justificativa. Veja a


57) O lago ficará totalmente limpo em algum momento?

57) O lago ficará totalmente limpo em algum momento?

(X) Sim ( ) Não

Explique. Vai demorar

justificativa da outra equipe:

Não houve perguntas nesta questão.

Questão 58:

58) Vamos considerar uma quantidade mínima de poluente, em ml, para que o nosso lago seja considerado aceitavelmente limpo. Se esse volume for de aproximadamente 10^{-3} ml, como ficaria esse valor em números decimais?

( ) 1000 ml

( ) 10 ml

( ) 0,1 ml

( ) 0,01 ml

( ) 0,001 ml

( ) 0,0001 ml

	Quantidade de Equipes
Acertaram	6
Erraram	3

Esta questão me surpreendeu, pois quando a inseri nesta folha de atividades acreditava que os alunos saberiam a resposta, sem muitos esforços, porém não foi o que aconteceu. Todas as equipes me perguntaram o que ocorreria com uma potência negativa, muitas acreditavam que a resposta desta questão era -1000. Tive que explicar coletivamente e até expor na lousa que $10^{-3} = 1/10^3$, pedindo que eles finalizassem fazendo as operações necessárias. Mesmo assim, três equipes erraram nas contas, acredito que por falta de hábito em operar cálculos com este, ou até mesmo por não conseguirem fazê-las. Das três equipes que erraram, uma deixou em branco, uma respondeu 0,01 ml e a outra respondeu 0,0001 ml.

Questão 59:

59) Utilizando uma planilha eletrônica, descubra o número mínimo de dias para que a quantidade restante de poluente seja inferior a 10^{-3} ml, ou seja, para que o lago esteja aceitavelmente despoluído.

	Quantidade de Equipes
Acertaram	4
Erraram	5

Das seis equipes que acertaram anteriormente, apenas quatro responderam corretamente a esta questão. Para sua resolução bastava utilizar a mesma planilha eletrônica, movendo o cursor para baixo até encontro um valor menor que 10^{-3}. Veja:

	A	B	C	D	E	F	G	H
40	0,0332307							
41	0,02658456							
42	0,021267648							
43	0,017014118							
44	0,013611295							
45	0,010889036							
46	0,008711229							
47	0,006968983							
48	0,005575186							
49	0,004460149							
50	0,003568119							
51	0,002854495							
52	0,002283596							
53	0,001826877							
54	0,001461502							
55	0,001169201							
56	0,000935361							
57	0,000748289							
58	0,000598631							
59	0,000478905							

Isto irá ocorrer na célula A56, sendo assim, como sabemos que A1 = a(0), A2 = a(1) e assim por diante, teremos então que A56 = a(55). Portanto, o lago pode ser considerado aceitavelmente despoluído no 55º dia de despoluição, com um volume de aproximadamente 0,0009 ml = 9.10^{-4} ml de poluente.

Os outros dois alunos que erraram esta questão, mas acertaram anteriormente, responderam que o número mínimo de dias necessários para que o lago se tornasse aceitavelmente despoluído era de 56 dias, devido ao número da célula A56, esqueceram-se de considerar que começamos por a(0). Das outras três equipes que erraram, uma deixou em branco, como na questão anterior. A equipe que respondeu 0,01 à questão anterior, respondeu agora que o lago nunca será totalmente despoluído, ignorando a pergunta. A equipe que respondeu 0,0001 à questão anterior, respondeu aqui que seriam necessários 66 dias para que o lago se tornasse aceitavelmente despoluído, apesar de errados, eles mantiveram o raciocínio, pois a(66) = 0,00008, aproximadamente.

Não houve perguntas nesta questão.

Esta questão poderia ser resolvida apenas utilizando-se a expressão $a(n) = a(0).(4/5)^n$, encontrada nas questões anteriores e o conceito de logaritmo. Bastaria montarmos a inequação **$a(0).(4/5)^n < 10^{-3}$**, e aplicarmos as propriedades logarítmicas.

Veja:

$$a(0).(4/5)^n < 10^{-3}$$

Mas a(0) = 200 ml, logo:

$$200.(4/5)^n < 10^{-3}$$

Como $4/5 = 0,8 = 8.10^{-1}$ faremos esta substituição para facilitar os cálculos:

$$200.(8.10^{-1})^n < 10^{-3} = 200.8^n.10^{-n} < 10^{-3}$$

Mas $200 = 2.10^2$, então:

$$2.10^2.8^n.10^{-n} < 10^{-3}$$

Como $10^2.10^{-n} = 10^{2-n}$ e $8^n = (2^3)^n = 2^{3n}$

$$2.10^2.8^n.10^{-n} < 10^{-3} = 2.2^{3n}.10^{2-n} < 10^{-3}$$

Mas $2.2^{3n} = 2^{3n+1}$, então:

$$2^{3n+1}.10^{2-n} < 10^{-3}$$

Aplicando log na base 10 a ambos os lados:

$$\log (2^{3n+1}.10^{2-n}) < \log 10^{-3}$$

Pela propriedade do logaritmo do produto:

$$\log 2^{3n+1} + \log 10^{2-n} < \log 10^{-3}$$

Pela propriedade do logaritmo da potência:

$(3n + 1). \log 2 + (2 - n) \log 10 < (-3) \log 10$

Como $\log 10 = 1$ e o valor aproximado de $\log 2$ é 0,301

$(3n + 1). 0{,}301 + (2 - n).1 < (-3).1$

$0{,}903n + 0{,}301 + 2 - n < -3$

$- 0{,}097 n + 2{,}301 < - 3$

$-0{,}097n < -3 - 2{,}301$

$0{,}097n > 5{,}301$

$n > 54{,}649$

Portanto $n = 55$, pois $n \in \mathbb{N}$

Como os alunos ainda não aprenderam este conceito tivemos que contorná-lo utilizando a planilha eletrônica.

Questão 60:

60) Com a ajuda de uma planilha eletrônica, complete a tabela abaixo, até a 15ª etapa de despoluição.

Período de 24 horas (n)		Quantidade de poluente restante no lago a(n)
Início	n = 0	a(0) = 200 ml
1º Período	n =1	a(1) = 160 ml
2º Período	n = 2	a(2) =
3º Período	n = 3	a(3) =
4º Período	n = 4	a(4) =
5º Período	n = 5	a(5) =
6º Período	n = 6	a(6) =
7º Período	n = 7	a(7) =
8º Período	n = 8	a(8) =
9º Período	n = 9	a(9) =
10º Período	n = 10	a(10) =
11º Período	n = 11	a(11) =
12º Período	n = 12	a(12) =
13º Período	n = 13	a(13) =
14º Período	n = 14	a(14) =
15º Período	n = 15	a(15) =

	Quantidade de Equipes
Acertaram	7
Erraram	2

Sete equipes acertaram esta questão, uma das equipes preencheu a tabela somente até o termo a_7, e uma equipe a deixou em branco. Acredito que faltou tempo a esta equipe para finalizar a atividade, pois como sabemos, cada aluno trabalha em seu tempo. Na sala em que apliquei a atividade, há uma aluna com deficiência intelectual (DI), e ela fazia parte dessa equipe, talvez isso possa ter ocasionado o atraso. Esse é um ponto em que devo ficar atenta daqui em diante, pois temos vários alunos provindos de inclusão social, porém não recebemos formação adequada para atendê-los.

Não houve perguntas nesta questão.

Veja a tabela da equipe que preencheu até o termo a(7).

Período de 24 horas (n)		Quantidade de poluente restante no lago a(n)
Início	n = 0	a(0) = 200 ml
1º Período	n =1	a(1) = 160 ml
2º Período	n = 2	a(2) = 128
3º Período	n = 3	a(3) = 102,4
4º Período	n = 4	a(4) = 81,92
5º Período	n = 5	a(5) = 65,536
6º Período	n = 6	a(6) = 52,4288
7º Período	n = 7	a(7) = 41,94304
8º Período	n = 8	a(8) =
9º Período	n = 9	a(9) =
10º Período	n = 10	a(10) =
11º Período	n = 11	a(11) =
12º Período	n = 12	a(12) =
13º Período	n = 13	a(13) =
14º Período	n = 14	a(14) =
15º Período	n = 15	a(15) =

Veja a tabela de uma das equipes que acertaram:

Período de 24 horas (n)		Quantidade de poluente restante no lago a(n)
Início	n = 0	a(0) = 200 ml
1º Período	n =1	a(1) = 160 ml
2º Período	n = 2	a(2) = 128 ml
3º Período	n = 3	a(3) = 102,4 ml
4º Período	n = 4	a(4) = 81,92 ml
5º Período	n = 5	a(5) = 65,536 ml
6º Período	n = 6	a(6) = 52,4288
7º Período	n = 7	a(7) = 41,94304
8º Período	n = 8	a(8) = 33,554432
9º Período	n = 9	a(9) = 26,8435456
10º Período	n = 10	a(10) = 21,47483648
11º Período	n = 11	a(11) = 17,17986918
12º Período	n = 12	a(12) = 13,74389535
13º Período	n = 13	a(13) = 10,99511628
14º Período	n = 14	a(14) = 8,766093022
15º Período	n = 15	a(15) = 7,036874418

Questão 61:

61) No plano cartesiano abaixo temos que o eixo das abcissas (horizontal) representa cada etapa de despoluição, ou seja, n = 0, 1, 2,..., e o eixo das ordenadas (vertical) representa a quantidade, a(n), de poluente existente no lago após cada etapa. Nosso objetivo, aqui, é localizar, no plano, os pares ordenados, referentes às etapas de despoluição ocorridas em nosso lago. Temos, por exemplo, que no início das etapas, a quantidade de poluente no lago era 200 ml, sendo assim, a(0) = 200 ml, portanto quando n = 0, temos que a quantidade de poluente é 200 ml, logo o par ordenado fica (0, 200), agora é só representa-lo no eixo.

No exercício anterior você preencheu uma tabela até a 15ª etapa de despoluição, utilizando os valores encontrados represente os pares ordenados até o 15º dia de despoluição.

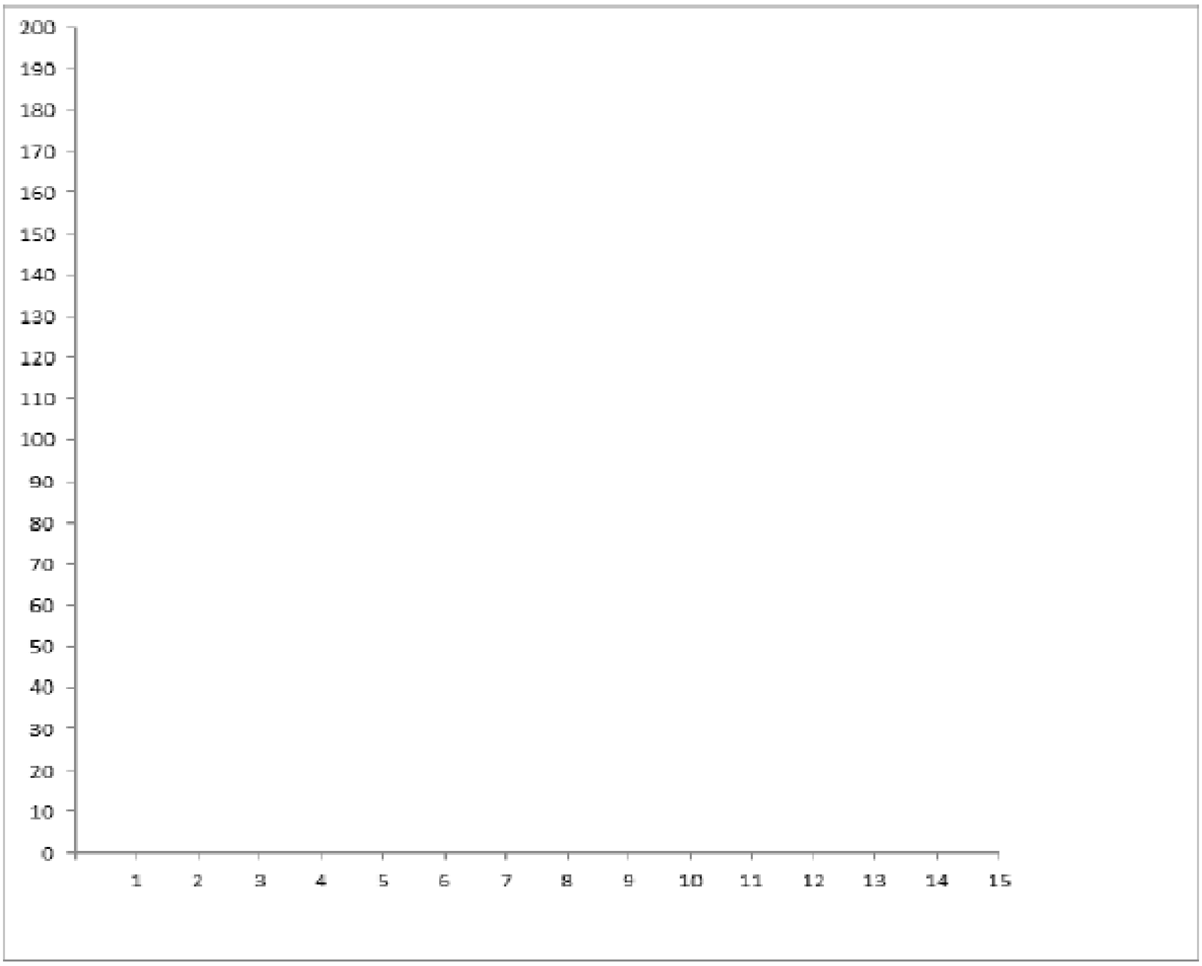


Gráfico 1 – Variação discreta do volume de poluente no lago em 15 etapas de despoluição.

	Quantidade de Equipes
Acertaram	7
Erraram	2

Uma equipe deixou novamente em branco. A outra equipe, que na questão anterior preencheu a tabela somente até o 7º termo representaram, no plano cartesiano apenas os 7 pares ordenados presentes em sua tabela. As demais equipes conseguiram representar os pares ordenados no plano cartesiano acima.

A única dificuldade que os alunos apresentaram nesta questão foi na representação de pontos que não tinham seus valores descritos nos eixos, sendo necessário fazer uma estimativa.

Veja o gráfico da equipe que deixou a tabela do exercício anterior incompleta:

Gráfico 1 – Variação discreta do volume de poluente no lago em 15 etapas de despoluição.

Veja o gráfico de uma das equipes que acertaram.

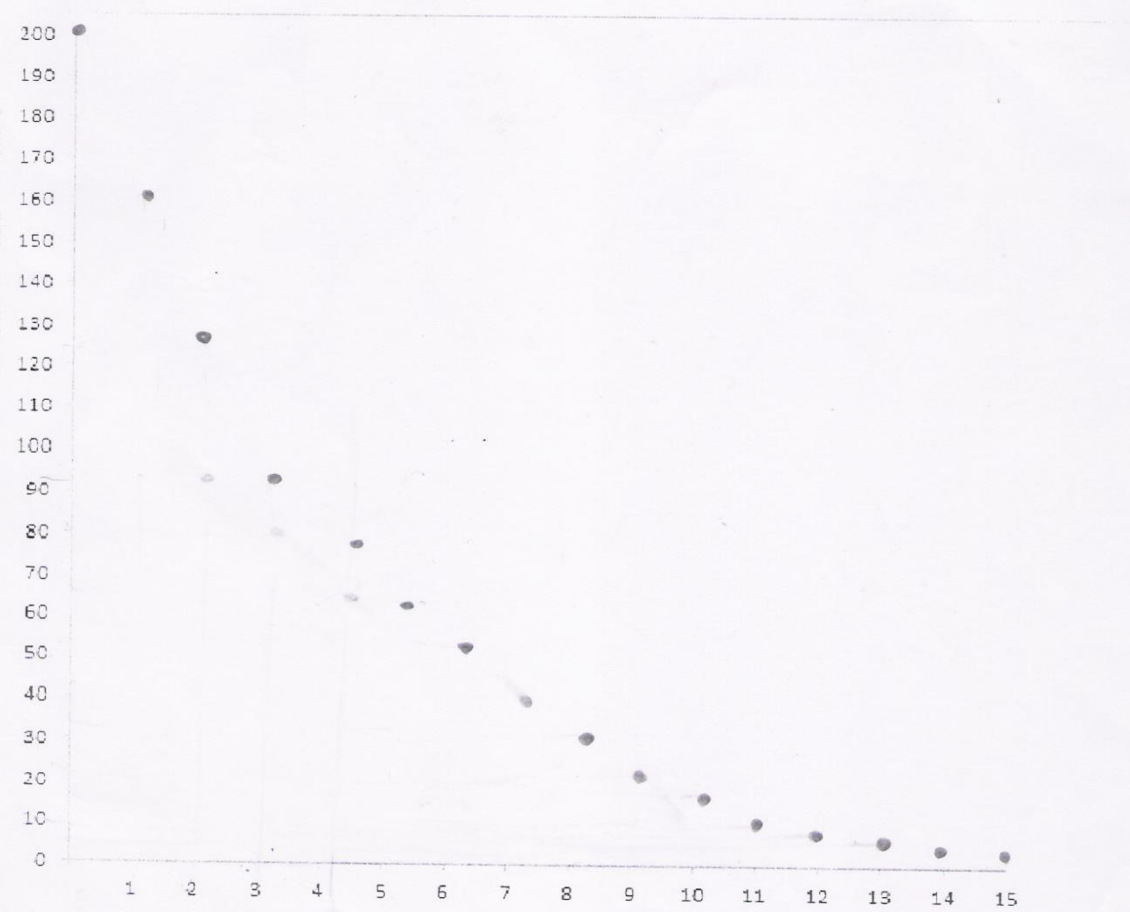


Gráfico 1 – Variação discreta do volume de poluente no lago em 15 etapas de despoluição.

Questão 62:

62) Observe o gráfico gerado na figura anterior. Ele é formado apenas por pontos não unidos, que representam a quantidade de poluente no lago em determinado momento, isto é, ao final de cada etapa, não tendo em conta a continuação do processo de despoluição entre as etapas, ou seja, o que acontece com a quantidade de poluente entre a primeira e a segunda etapa. Este tipo de gráfico, é chamado de gráfico discreto, é aquele feito por pontos isolados.

Nosso objetivo, aqui, é tentar simular o que ocorre entre as etapas de despoluição. Portanto, convidamos você a ligar os pontos encontrados por uma linha contínua inspirando-se na curvatura dos pontos já plotados, construindo assim, um gráfico contínuo o qual não possui interrupções.

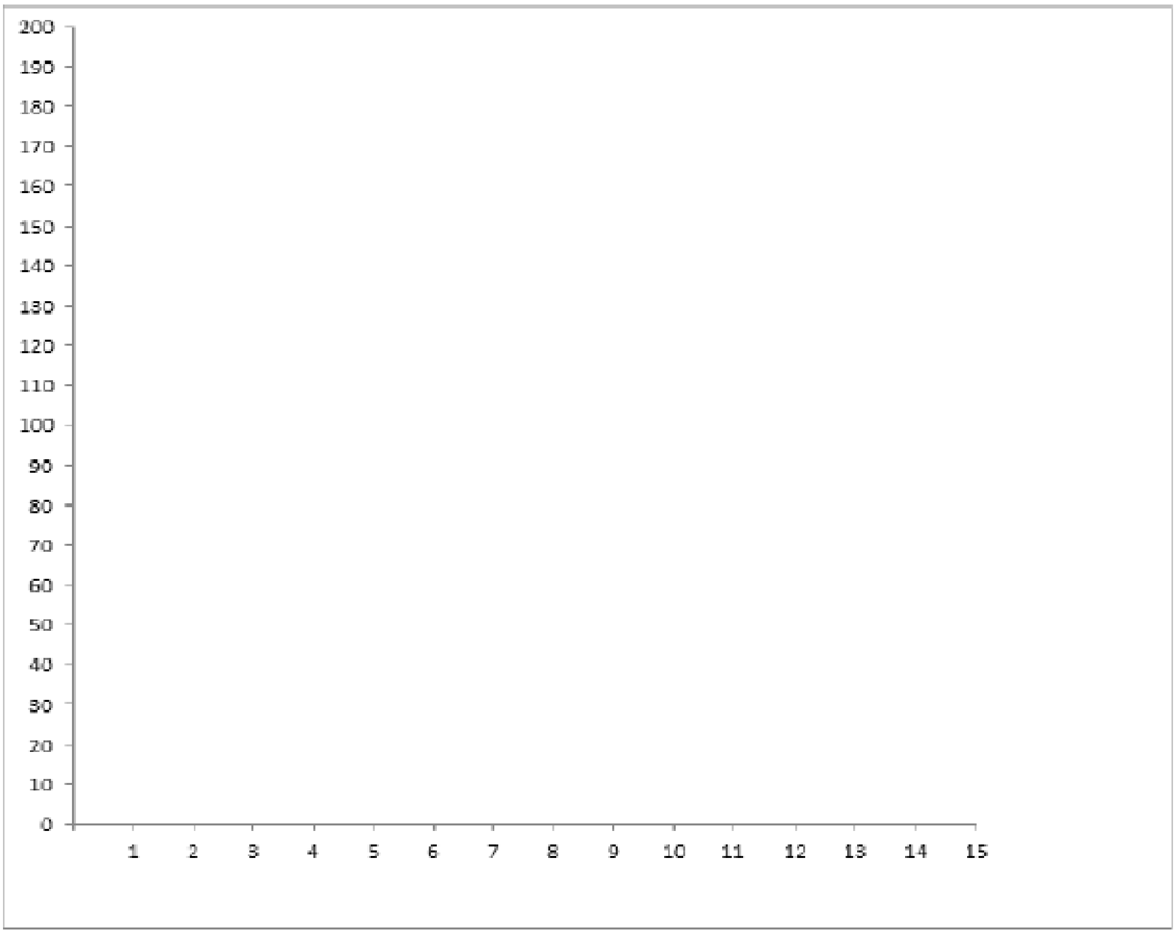


Gráfico 2 – Variação contínua do volume de poluente no lago em 15 etapas de despoluição.

	Quantidade de Equipes
Acertaram	7
Erraram	2

Esta questão ficou simples para os alunos que haviam encontrado, corretamente, os pares ordenados na questão anterior, bastava ligá-los. Portanto, as sete equipes que acertaram anteriormente, também acertaram aqui. As duas demais equipes deixaram esta questão em branco.

Veja o gráfico de uma das equipes que acertaram:

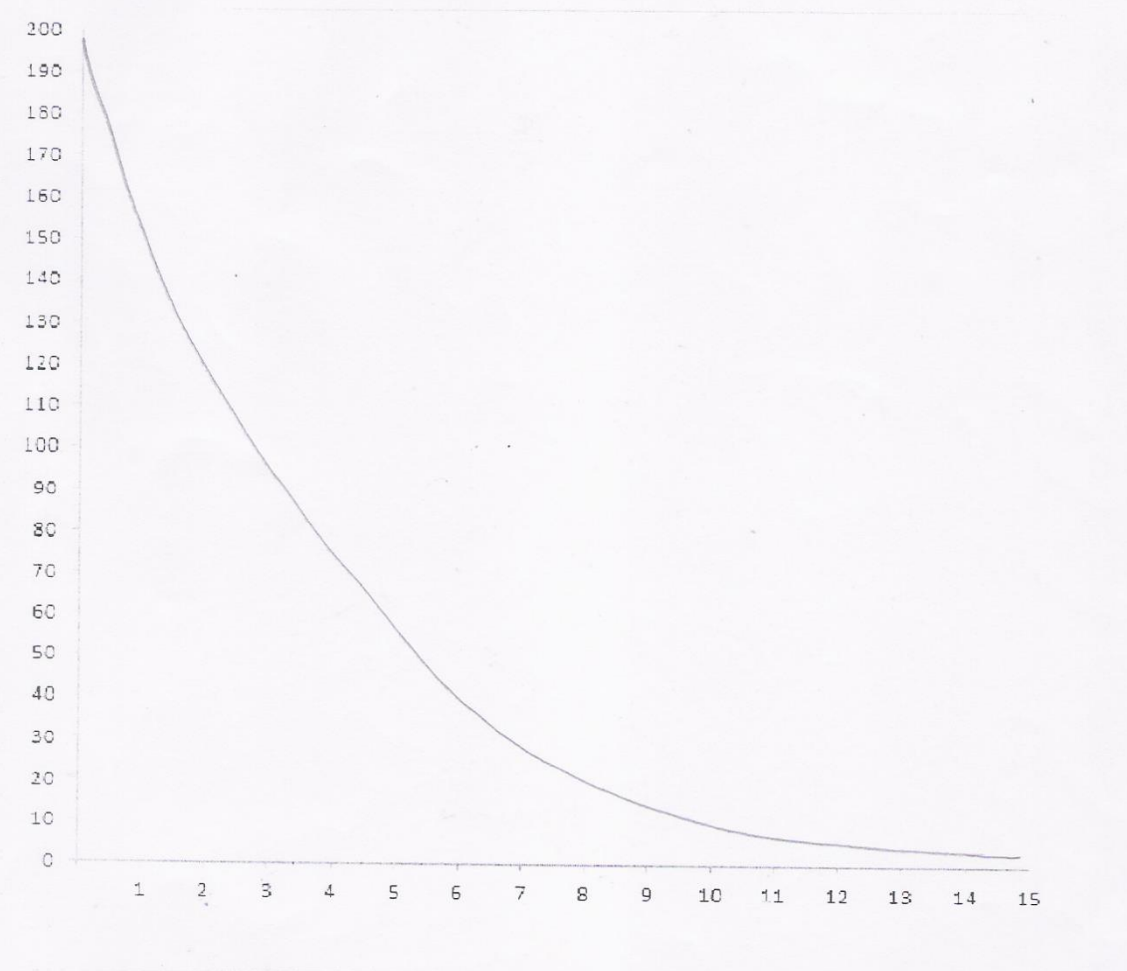


Gráfico 2 – Variação contínua do volume de poluente no lago em 15 etapas de despoluição.

Capítulo 7

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE DE APOIO SOBRE O EXCEL

7.1. INTRODUÇÃO

A elaboração e aplicação de um material de apoio para o programa Excel surgiu da necessidade de se contornar o conteúdo de logaritmos, que foi necessário para a solução de algumas questões da folha de atividades 2, porém, este conteúdo só será ensinado aos alunos no terceiro bimestre deste ano.

7.2. RESUMO DA ATIVIDADE DE APOIO DO EXCEL

A aplicação da atividade de apoio envolveu 29 alunos, os quais participaram do desenvolvimento das folhas de atividade.

Para a execução desta parte do trabalho, fez-se necessário o uso de computadores, porém, o laboratório de informática da escola possui apenas 7 computadores, dos quais, 2 estavam em manutenção, de modo que havia 5 computadores para 29 alunos. Como seria o primeiro contato de muitos dos estudantes com o Excel, levei-os a um laboratório de informática maior, o laboratório da ETEC - Escola Técnica Estadual Centro Paula Souza, que fica situada ao lado da escola, onde havia 15 computadores, e os alunos puderam ficar em duplas.

O material de apoio contou com uma parte teórica básica, que explicava como utilizar as funções necessárias para a aplicação das folhas de atividade e uma parte prática, em que os alunos resolveram algumas questões. Os alunos, em geral, mesmo não conhecendo o programa Excel, estavam familiarizados e possuíam certo domínio sobre os computadores e isso facilitou bastante o desenvolvimento da atividade.

Foto 6: Desenvolvimento do material de apoio sobre o Excel – Sala de informática da ETEC.

Capítulo 8

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta seção relatarei a experiência da aplicação deste trabalho, avaliando a metodologia de pesquisa utilizada, bem como a participação dos alunos envolvidos na atividade.

8.1. ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A mudança da aula expositiva para a aplicação desta atividade foi muito positiva. No início, os alunos sentiram-se inseguros, principalmente no momento em que eles souberam que cada uma das equipes seria responsável por uma simulação, na qual se basearia para responder uma sequência de questões. Acredito que esse foi o momento em que eles assumiram o problema como seus, de fato.

Avalio positivamente esta experiência, no início tive receio de que alguns alunos agissem da mesma maneira desinteressada como agem em aulas expositivas, porém houve a participação e empenho de grande maioria, sendo que pela análise das respostas, acredito que apenas duas equipes não se envolveram como deveriam. Apesar dos erros que algumas equipes cometeram, a realização da atividade foi muito interessante, porque os fez questionar, o que provavelmente não aconteceria em uma aula expositiva.

Durante o desenvolvimento da sequência didática, algumas equipes me chamavam para tirar dúvidas, como fazem de costume, porém a minha interferência foi a mínima possível, de modo que os alunos passaram a ter um comportamento autônomo, como era de se esperar.

Tive receio de que alguns alunos se comportassem de maneira semelhante a quando fazem trabalhos ou atividades em grupo em uma aula normal, deixando a responsabilidade apenas a uma pessoa da equipe, mas isso não aconteceu as equipes interagiram muito bem.

Portanto, considero que as sequências didáticas devam fazer parte do cotidiano escolar, é claro que não devemos deixar de lado as aulas expositivas, mas acredito que as situações didáticas podem ser utilizadas de forma conjunta, de modo a estabelecer uma aprendizagem completa.

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007. 218 p.

BARROSO, JULIANA MATSUBARA. **Conexões com a matemática – volume 1**. 1ª ed. São Paulo: Ed. Moderna, 2010. 408 p.

DANTE, L. R. **Matemática, volume único**. 1ª ed. São Paulo: Ed. Ática, 2005. 504 p.

MACHADO, S. D. A et al. **Educação matemática: uma (nova) introdução**. 3 ed. São Paulo: Ed. EDUC, 2012. 254 p. (série trilhas).

MALAGUTTI, PEDRO LUIZ APARECIDO. **Modelo de despoluição: módulo I**. - Cuiabá, MT: Central de Texto, 2010. - (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização para professores do ensino médio de matemática).

SMOLE, K. C. S; DINIZ, M. I. S. V. **Matemática: ensino médio – volume 1**. 6ª ed. São Paulo: Ed. Saraiva, 2010. 320 p.

_______. **Progressões aritméticas e geométricas: história, conceitos e aplicações**. 35 p. Disponível em <http://www.objetivomaringa.com.br/colegio_objetivo/site2008/_assets/materiais/94_historiadaspa.pdf>. Acesso em: 29/05/2013.

_______. **Parâmetros curriculares nacionais - ensino médio (PCNEM)**. 58 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 12/06/2013.

_______. **Proposta curricular do Estado de São Paulo - Matemática**. São Paulo, 2008. 64 p. Disponível em: <http://www.rededosaber.sp.gov.br/portais/Portals/18/arquivos/Prop_MAT_COMP_red_md_20_03.pdf>. Acesso em: 14/06/2013.

_______. **Orientações curriculares sobre o ensino médio – Ciência da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília, 2006. 135 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 14/06/2013.

Apêndice

Folha de Atividades - 1

Entendendo as etapas da despoluição.

1) Qual é o volume, em ml, do lago antes do inicio do processo de despoluição?

2) A água do nosso lago-modelo antes da primeira etapa de despoluição é transparente e clarinha?

( ) Sim ( ) Não

3) Esse volume se mantém após o término da primeira etapa de despoluição, chamada de primeiro período?

( ) Sim ( ) Não

Comente:

4) Qual é a quantidade, em ml, de poluente que existe no nosso lago-modelo inicialmente?

5) Qual é a quantidade, expressa na forma de fração, de poluente que desaparece a cada período de 24 horas e que nós chamamos de etapa?

( ) $\frac{1}{2}$ ( ) $\frac{1}{3}$ ( ) $\frac{1}{5}$ ( ) $\frac{2}{3}$ ( ) $\frac{2}{5}$

6) Qual é a quantidade, expressa na forma de números decimais, de poluente que desaparece a cada período de 24 horas e que nós chamamos de etapa?

( ) 0.5( ) 0.33 ( ) 0.2 ( ) 0.66 ( ) 0.4

7) Qual é a quantidade, expressa na forma percentual, de poluente que desaparece a cada período de 24 horas e que nós chamamos de etapa?

( ) 50% ( ) 33% ( ) 20% ( ) 66% ( ) 40%

8) Considerando que a mistura de água e café (chamada poluente) é homogênea, quantos ml de poluente foram retirados no primeiro dia, isto é, após a primeira etapa do processo de despoluição?

9) Depois da primeira etapa de despoluição, quantos ml de poluente restaram no lago?

10) A água do nosso lago-modelo, após a primeira etapa de despoluição, está transparente e clarinha?

( ) Sim ( ) Não

11) Com base no que fora feito na etapa 1 do processo de despoluição, você conseguiria estimar após quantos dias, ou seja, após quantas etapas de despoluição, o lago estará totalmente despoluído?

( ) 2 dias

( ) 3 dias

( ) 4 dias

( ) 5 dias

( ) Nunca estará completamente despoluído

12) Quantos ml de poluente foram retirados no segundo dia, isto é, após a segunda etapa do processo de despoluição?

13) Calcule quantos ml de poluente restará no lago após a segunda etapa de despoluição.

14) A água do nosso lago-modelo, após a segunda etapa de despoluição, está transparente e clarinha?

( ) Sim ( ) Não

15) Quantos ml de poluente foram retirados no terceiro dia, isto é, após a terceira etapa do processo de despoluição?

16) Calcule quantos ml de poluente restará no lago após a terceira etapa de despoluição.

17) A água do nosso lago-modelo, após a terceira etapa de despoluição, está transparente e clarinha?

( ) Sim ( ) Não

18) Quantos ml de poluente foram retirados no quarto dia, isto é, após a quarta etapa do processo de despoluição?

19) Calcule quantos ml de poluente restará no lago após a quarta etapa de despoluição.

20) A água do nosso lago-modelo após a quarta etapa de despoluição é transparente e clarinha?

( ) Sim ( ) Não

21) Quantos ml de poluente foram retirados no quinto dia, isto é, após a quinta etapa do processo de despoluição?

22) Calcule quantos ml de poluente restará no lago após a quinta etapa de despoluição.

23) A quantidade de poluente retirada em cada etapa:

( ) Aumenta

( ) É sempre a mesma

( ) Diminui

24) A água do nosso lago-modelo após a quinta etapa de despoluição está transparente e clarinha?

( ) Sim ( ) Não

25) A sua resposta aqui tem alguma relação com o que você respondeu na questão 11?

( ) Sim ( ) Não

26) Você ficou surpreso(a)?

( ) Sim ( ) Não

Folha de Atividades - 2

Análise dos resultados

27) Considere que n represente o número de dias em que o lago vem passando pelo processo de despoluição, e que a(n) represente a quantidade restante de poluente no nosso lago-modelo após n dias, isto é, após n etapas de despoluição. Veja o seguinte exemplo:

Sabemos que a(0) = 200 ml é a quantidade inicial de poluente. A quantidade de poluente retirada a cada processo de despoluição é igual a 1/5 do que havia anteriormente, sendo assim, para calcularmos a quantidade de poluente que resta no lago após o primeiro dia, ou seja, após a primeira etapa, precisamos retirar 1/5 do poluente inicial existente em a(0), o que ocorre desta forma:

$$a(1) = a(0) - \frac{1}{5} \cdot a(0) = \frac{5a(0) - 1a(0)}{5} = \frac{4}{5} \cdot a(0)$$

Deste modo, conseguimos expressar o valor de a(1) em função de a(0):

$$a(1) = \frac{4}{5} \cdot a(0)$$

Agora, como já sabemos o valor de a(0), podemos calcular o valor de a(1) sem dificuldades. Veja:

$$a(1) = \frac{4}{5} \cdot 200 = \frac{800}{5} = 160\,ml$$

A quantidade de poluente retirada do lago após o segundo dia de despoluição é igual a 1/5 da quantidade de poluente restante após o primeiro dia, isto é, de a(1). Dessa forma, preencha:

$$\boxed{a(2) = a(\quad) - \frac{1}{5} \cdot a(\quad) = \frac{5a(\quad) - 1a(\quad)}{5} = \frac{4}{5} \cdot a(\quad)}$$

28) Sabendo que a(1) = 160 ml, utilize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule o valor numérico de a(2).

$$\boxed{a(2) =}$$

29) A expressão de a(2) em função de a(0) é:

$$a(2) = \frac{4}{5} \,.\, a(\quad) = \frac{4}{5} \,.\, \frac{4}{5} \,.\, a(\quad) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \,.\, a(\quad)$$

30) Utilize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule novamente o valor numérico de a(2).

a(2) =

31) Os valores numéricos encontrados para a(2) foram iguais?

( ) Sim ( ) Não

32) A quantidade de poluente retirada do lago após o terceiro dia de despoluição é igual a 1/5 da quantidade de poluente restante após o segundo dia, isto é, de a(2). Dessa forma, preencha:

$$a(3) = a(\quad) - \frac{1}{5} \,.\, a(\quad) = \frac{5\,a(\quad) - 1\,a(\quad)}{5} = \frac{4}{5} \,.\, a(\quad)$$

33) Utlize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule o valor numérico de a(3).

a(3) =

34) A expressão de a(3) em função de a(0) é:

$$a(3) = \frac{4}{5} \,.\, a(\quad) = \frac{4}{5} \,.\, \frac{4}{5} \,.\, \frac{4}{5} \,.\, a(\quad) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \,.\, a(\quad)$$

35) Utilize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule novamente o valor numérico de a(3).

a(3) =

36) Os valores numéricos encontrados para a(3) foram iguais?

( ) Sim ( ) Não

37) A quantidade de poluente retirada do lago após o quarto dia de despoluição é igual a 1/5 da quantidade de poluente restante após o terceiro dia, isto é, de a(3). Dessa forma, preencha:

$$a(4) = a(\quad) - \frac{1}{5} \cdot a(\quad) = \frac{5a(\quad) - 1a(\quad)}{5} = \frac{4}{5} \cdot a(\quad)$$

38) Utlize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule o valor numérico de a(4).

a(4) =

39) A expressão de a(4) em função de a(0) é:

$$a(4) = \frac{4}{5} \cdot a(\quad) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot a(\quad) = \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot a(\quad)$$

40) Utilize a expressão encontrada no exercício anterior e calcule novamente o valor numérico de a(4).

a(4) =

41) Os valores numéricos encontrados para a(4) foram iguais?

( ) Sim ( ) Não

42) Observe as expressões encontradas nos exercícios 27, 32 e 37, e responda:

Para calcularmos a quantidade de poluente restante em cada etapa de despoluição sempre devemos multiplicar 4/5 pela:

( ) Quantidade de poluente inicial.

( ) Quantidade de poluente que havia uma etapa antes, ou seja, no dia anterior.

( ) Nenhuma das alternativas.

43) Temos que no enésimo dia, a quantidade de poluente restante no lago é denotada por a(n). Como será denotada a quantidade de poluente existente no lago um dia anterior ao enésimo?

( ) a(1)

( ) a(n)

( ) a(n+1)

( ) a(n-1)

44) Já sabemos como expressar o valor de a(2) em função de a(1), e também como expressar a(1) em função de a(0). Com estas informações é possível expressar a(2) em função de a(0). Veja:

No exercício 27, você descobriu, que $a(2)=\frac{4}{5}a(1)$

Mas, como já vimos anteriormente, $a(1)=\frac{4}{5}.a(0)$

Substituindo a segunda expressão na primeira, obteremos:

$$a(2)=\frac{4}{5}.a(1)=\frac{4}{5}.\left(\frac{4}{5}.a(0)\right)=\left(\frac{4}{5}\right)^2.a(0)$$

Observe que expressamos a(2) em função de a(0).

$$a(2)=\left(\frac{4}{5}\right)^2.a(0)$$

Agora é a sua vez, complete o quadro, utilizando o valor encontrado acima.

$$a(3)=\frac{4}{5}.a(\quad)=\frac{4}{5}.\left(\qquad\qquad\right)=\left(\quad\right).a(0)$$

45) Ao expressarmos a(2) em função de a(0), o fator 4/5 apareceu apenas duas vezes, ou seja, teve expoente 2. Quando expressamos a(3) em função de a(0), o fator 4/5 terá qual expoente?

( ) 1
( ) 2
( ) 3
( ) 4
( ) 5

46) Utilize a expressão encontrada no exercício 32 e complete:

$$a(4) = \frac{4}{5} \cdot a(\quad) = \frac{4}{5} \cdot \left(\qquad\qquad\qquad \right) = \left(\quad \right) \cdot a(0)$$

47) Quando expressamos a(4) em função de a(0), o fator 4/5 terá qual expoente?

( ) 1
( ) 2
( ) 3
( ) 4
( ) 5

48) Utilize a expressão encontrada no exercício 34 e complete:

$$a(5) = \frac{4}{5} \cdot a(\quad) = \frac{4}{5} \cdot \left(\qquad\qquad\qquad \right) = \left(\quad \right) \cdot a(0)$$

49) Quando expressamos a(5) em função de a(0), o fator 4/5 terá qual expoente?

( ) 1

( ) 2

( ) 3

( ) 4

( ) 5

50) Se quiséssemos expressar o termo a(30) em função de a(0), qual seria o expoente do fator 4/5?

( ) 27

( ) 28

( ) 29

( ) 30

( ) Nenhuma das alternativas anteriores.

Explique.

51) É possível expressar o enésimo termo, ou seja, o a(n), em função de a(0). Para isso, utilize o raciocínio empregado no exercício anterior, e responda qual será o expoente do fator 4/5, isto é, quantas vezes o fator 4/5 aparecerá nesta expressão?

52) Expresse a(n) em função de a(0).

53) Utilizando a expressão encontrada no exercício anterior, e com a ajuda de uma calculadora ou de uma planilha eletrônica, termine de completar a tabela.

Período de 24 horas (n)		Quantidade de poluente restante no lago a(n)
Início	n = 0	a(0) = 200 ml
1º Período	n =1	a(1) = 160 ml
2º Período	n = 2	a(2) =
3º Período	n = 3	a(3) =
4º Período	n = 4	a(4) =
5º Período	n = 5	a(5) =
6º Período	n = 6	a(6) =
7º Período	n = 7	a(7) =

Espaço para os cálculos e/ou anotações.

54) Observe a tabela acima, em que o processo de despoluição ocorreu durante a primeira semana. O lago ficou totalmente despoluído durante este tempo?

( ) Sim ( ) Não

55) Com a ajuda de uma planilha eletrônica, e das expressões encontradas anteriormente, responda qual será o volume de poluente no lago no 30º dia de despoluição.

56

( ) Sim ( ) Não

57) O lago ficará totalmente limpo em algum momento?

( ) Sim ( ) Não

Explique.

58) Vamos considerar uma quantidade mínima de poluente, em ml, para que o nosso lago seja considerado aceitavelmente limpo. Se esse volume for de aproximadamente 10^{-3} ml, como ficaria esse valor em números decimais?

( ) 1000 ml

( ) 10 ml

( ) 0,1 ml

( ) 0,01 ml

( ) 0,001 ml

( ) 0,0001 ml

59) Utilizando uma planilha eletrônica, descubra o número mínimo de dias para que a quantidade restante de poluente seja inferior a 10^{-3} ml, ou seja, para que o lago esteja aceitavelmente despoluído.

60) Com a ajuda de uma planilha eletrônica, complete a tabela abaixo, até a 15ª etapa de despoluição.

Período de 24 horas (n)		Quantidade de poluente restante no lago a(n)
Início	n = 0	a(0) = 200 ml
1º Período	n =1	a(1) = 160 ml
2º Período	n = 2	a(2) =
3º Período	n = 3	a(3) =
4º Período	n = 4	a(4) =
5º Período	n = 5	a(5) =
6º Período	n = 6	a(6) =
7º Período	n = 7	a(7) =
8º Período	n = 8	a(8) =
9º Período	n = 9	a(9) =
10º Período	n = 10	a(10) =
11º Período	n = 11	a(11) =
12º Período	n = 12	a(12) =
13º Período	n = 13	a(13) =
14º Período	n = 14	a(14) =
15º Período	n = 15	a(15) =

61) No plano cartesiano abaixo temos que o eixo das abcissas (horizontal) representa cada etapa de despoluição, ou seja, n = 0, 1, 2,..., e o eixo das

ordenadas (vertical) representa a quantidade, a(n), de poluente existente no lago após cada etapa. Nosso objetivo, aqui, é localizar, no plano, os pares ordenados, referentes às etapas de despoluição ocorridas em nosso lago. Temos, por exemplo, que no início das etapas, a quantidade de poluente no lago era 200 ml, sendo assim, a(0) = 200 ml, portanto quando n = 0, temos que a quantidade de poluente é 200 ml, logo o par ordenado fica (0, 200), agora é só representa-lo no eixo.

No exercício anterior você preencheu uma tabela até a 15ª etapa de despoluição, utilizando os valores encontrados represente os pares ordenados até o 15º dia de despoluição.

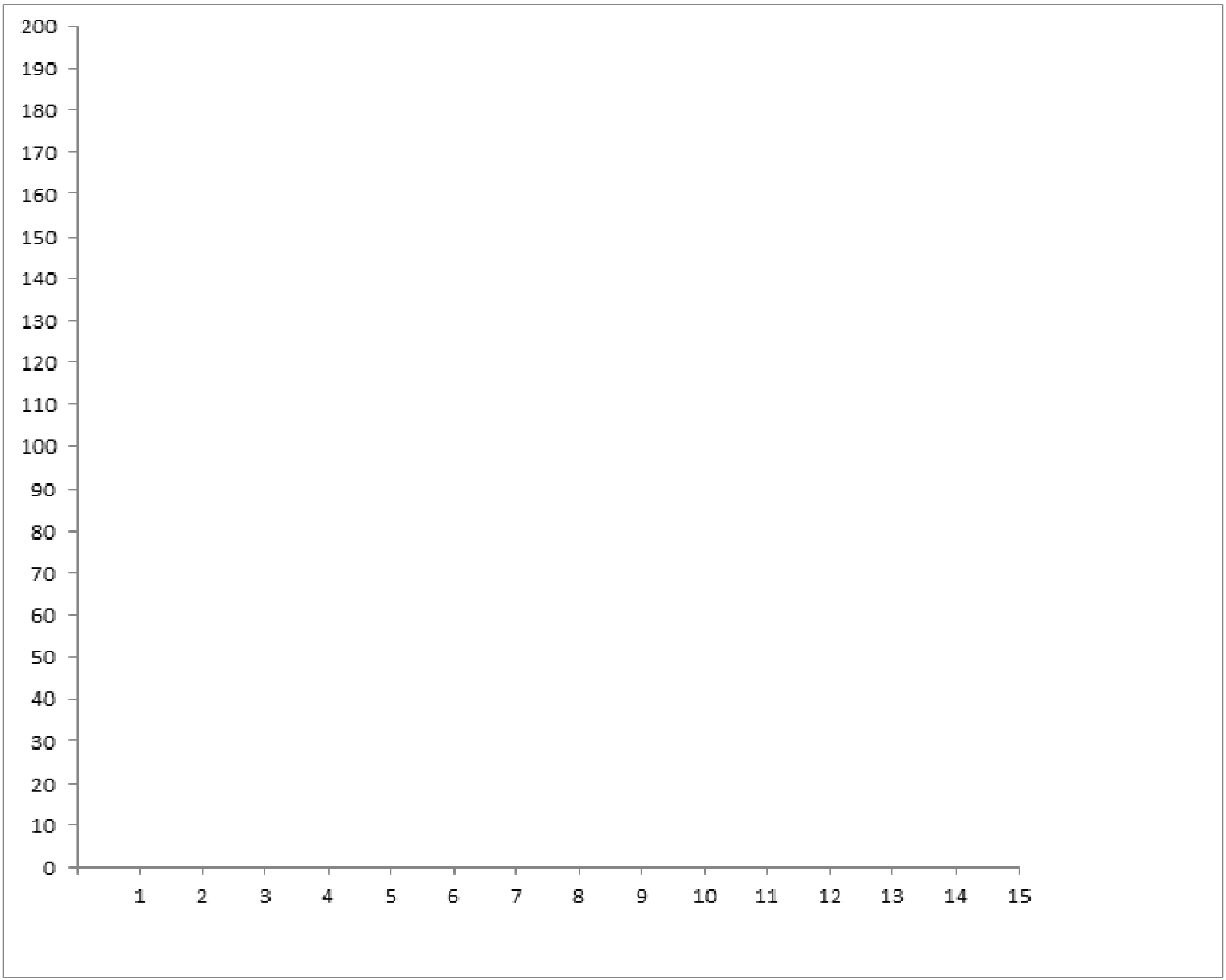


Gráfico 1 – Variação discreta do volume de poluente no lago em 15 etapas de despoluição.

62) Observe o gráfico gerado na figura anterior. Ele é formado apenas por pontos não unidos, que representam a quantidade de poluente no lago em determinado

momento, isto é, ao final de cada etapa, não tendo em conta a continuação do processo de despoluição entre as etapas, ou seja, o que acontece com a quantidade de poluente entre a primeira e a segunda etapa. Este tipo de gráfico, é chamado de gráfico discreto, é aquele feito por pontos isolados.

Nosso objetivo, aqui, é tentar simular o que ocorre entre as etapas de despoluição. Portanto, convidamos você a ligar os pontos encontrados por uma linha contínua inspirando-se na curvatura dos pontos já plotados, construindo assim, um gráfico contínuo o qual não possui interrupções.

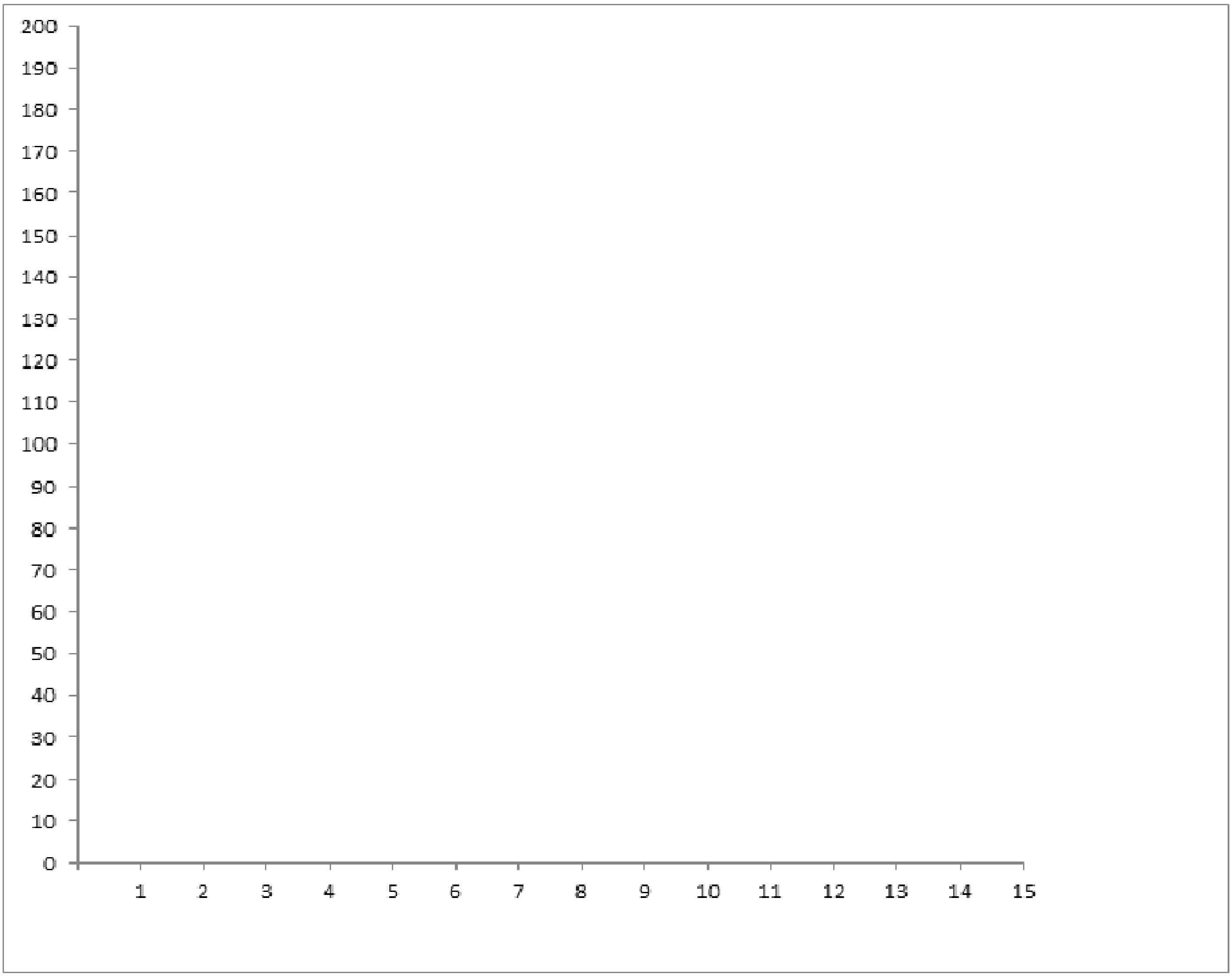


Gráfico 2 – Variação contínua do volume de poluente no lago em 15 etapas de despoluição.

MATERIAL DE APOIO PARA O USO DO EXCEL

Este material de apoio tem como objetivo ajudar os alunos a responderem uma das questões das atividades programadas, contornando o conceito de logaritmo, assunto este a ser ministrado no segundo semestre deste ano.

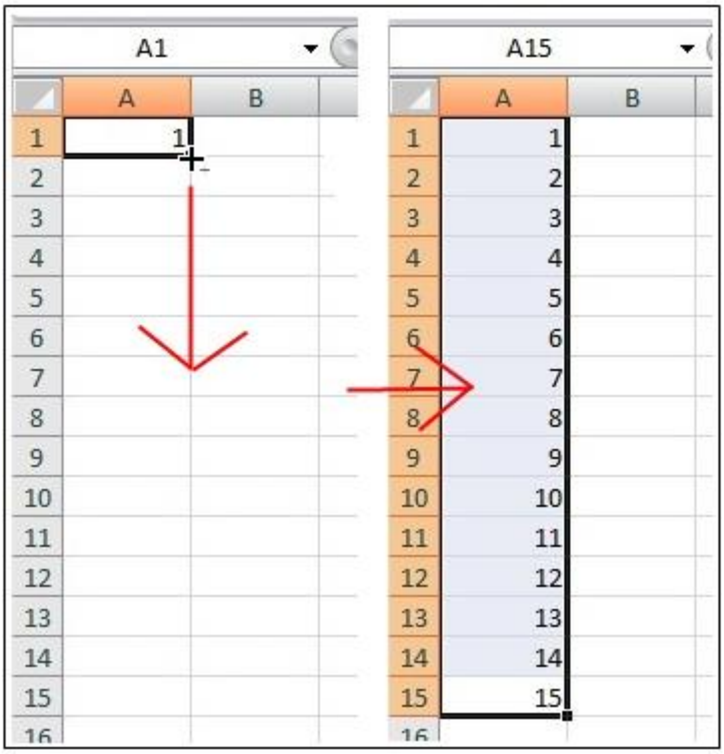
Conhecendo o Excel

O Excel é um programa de planilha eletrônica que possui a capacidade de construção de gráficos e diversos cálculos. Sua pagina inicial é uma malha quadriculada, dividida por colunas e linhas. As colunas são determinadas por letras, A, B, C, etc. E as linhas são determinadas por números, 1, 2, 3,...

Cada "quadrado" da malha é chamado de célula, e cada célula é determinada através de sua coluna e linha. Como, por exemplo, a primeira célula da malha é definida por A1.

Sequências de números

Para criar uma lista com números sequenciais não é necessário digitar todos os números, um a um. Simplesmente digite o primeiro número da sequência, segure a tecla CTRL, depois clique e arraste a "quina" da célula para baixo até chegar ao valor que deseja.



Criando uma Progressão Geométrica no Excel

Progressão Geométrica é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior com uma constante, que é a razão da progressão. Portanto, para descobrirmos os termos de uma PG, basta apenas utilizarmos uma simples operação, a multiplicação, de modo que a(n) = a(n-1).q (q é a razão).

Veja o exemplo:

Vamos criar uma PG de 15 termos em que o primeiro termo é igual a 2 e a razão, q, é 4.

Na coluna A criamos uma sequencia numérica que representa a posição dos termos da PG.

Na coluna B, iniciamos a progressão com o valor do primeiro termo, no caso, o 2. Isto é, na célula B1 escrevemos o número 2.

Para que seja construída a PG, devemos inserir uma formula. Sempre iniciamos a inserção de uma formula no Excel com o símbolo de igualdade "=", na célula B2 colocamos o símbolo "=", e em seguida selecionamos a célula B1, por final, vamos fazer a multiplicação pelo número 4, que é a razão da PG. (No Excel, o asterisco tem a função de multiplicar).

	A	B
1	1	2
2	2	=B1*4
3	3	
4	4	
5	5	
6	6	
7	7	
8	8	
9	9	
10	10	
11	11	
12	12	
13	13	
14	14	
15	15	

Ao clicarmos na tecla "Enter", o resultado aparecerá na célula em questão.

	A	B
1	1	2
2	2	8
3	3	
4	4	
5	5	
6	6	
7	7	
8	8	
9	9	
10	10	
11	11	
12	12	
13	13	
14	14	
15	15	

Arraste a “quina” da célula B2 até a célula B15, assim teremos os termos da PG até a décima quinta posição.

	A	B
1	1	2
2	2	8
3	3	32
4	4	128
5	5	512
6	6	2048
7	7	8192
8	8	32768
9	9	131072
10	10	524288
11	11	2097152
12	12	8388608
13	13	33554432
14	14	134217728
15	15	536870912
16		

Portanto a(15) = 536.870.912

Exercícios

1) Com a ajuda de uma planilha eletrônica, determine o 15º termo de uma PG em que o primeiro termo seja 3, e a razão seja 5.

a(15) =

2) Com a ajuda de uma planilha eletrônica, determine o 20º termo de uma PG em que o primeiro termo seja 4, e a razão seja – 3.

a(20) =

3) Com a ajuda de uma planilha eletrônica, determine o 25º termo de uma PG em que o primeiro termo seja 150, e a razão seja 1/5.

a(25) =

4) Com a ajuda de uma planilha eletrônica, determine a posição do termo 303014,0195 em uma PG em que o primeiro termo seja 12, e a razão seja 3/2.

5) Com a ajuda de uma planilha eletrônica, determine a posição do termo 0,00038147 em uma PG em que o primeiro termo seja 800, e a razão seja 1/2.