UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

JÔNATAS DA SILVA LÔBO

ESTUDO DIAGNÓSTICO E PROPOSTAS PARA UTILIZAÇÃO DE DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NO ENSINO BÁSICO

ILHÉUS-BAHIA
2021

JÔNATAS DA SILVA LÔBO

ESTUDO DIAGNÓSTICO E PROPOSTAS PARA UTILIZAÇÃO DE DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NO ENSINO BÁSICO

Dissertação de Mestrado apresentado à Banca Examinadora do Curso de Pós-Graduação (*Stricto Sensu*) como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Profº Dr.Vinícius Augusto Takahashi Arakawa
Coorientadora: Profª Drª. Mirela Vanina de Mello

Área de Concentração: Matemática

ILHÉUS-BAHIA

2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Jônatas da Silva Lôbo

ESTUDO DIAGNÓSTICO E PROPOSTAS PARA UTILIZAÇÃO DE DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado, Ilhéus, 14 de outubro de 2021.

Prof. Dr. Vinicius Augusto Takahashi Arakawa, UESC
Orientador

Geizane Lima da Silva

Profa. Dra. Geizane Lima da Silva, UESC

Ligia Laís Fêmina

Profa. Dra. Ligia Laís Fêmina, UFU - Uberlândia

L799 Lôbo, Jônatas da Silva.

Estudo diagnóstico e respostas para utilização de demonstrações matemáticas no ensino básico / Jônatas da Silva Lôbo. – Ilhéus, BA: UESC, 2021.

105 f. : il.

Orientador: Vinícius Augusto Takahashi Arakawa.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Inclui referências e apêndices.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Aprendizagem ativa. 3. Ensino – Metodologia. I. Título.

CDD 510.7

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais Arnou Lôbo e Marilene Lôbo, a minha esposa Josélaine Lôbo e filhos Jônatas Lôbo, Mell Lôbo e Joaquim Lôbo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus primeiramente por me proporcionar sustento, força e livramento durante toda jornada de curso e construção desse trabalho.

A conclusão foi uma realização profissional, depois de quase 15 anos lecionando, vi a necessidade de voltar a estudar e evoluir como docente.

Meus agradecimentos a todos que fizeram parte dessa conquista.

A minha amada esposa e parceira Josélaine Lôbo, sem a sua ajuda jamais conseguiria chegar ao final desse curso. Diga-se de passagem, esta me deu o apoio, força e amor para que eu não desistisse do curso em momentos de dificuldade.

Aos meus 3 amados filhos Jônatas Lôbo, Mell Lôbo e Joaquim Lôbo. Filhos amáveis que sempre apoiaram e acreditaram no papai.

Aos meus pais, Arnou Lôbo e Marilene Lôbo sempre colocaram a educação como prioridade e fizeram o que era possível para que eu tivesse a uma boa educação, além de me criarem com muito amor e carinho.

Aos meus orientadores Professores Dr. Vinícius Augusto Takahashi Arakawa e Drª. Mirela Vanina de Mello, sem a qual eu jamais teria conseguido realizar esse trabalho. Muito pacientes e prestativos, nunca deixando que qualquer dúvida atrapalhasse o andamento do trabalho. Foi muito aprendizado durante a construção do trabalho, conhecimento que compartilharei com os meus colegas de trabalho e alunos.

Ao meu amigo e Professor Dr. André Ricardo Vieira de Carvalho, sempre compartilhando de sua vasta experiência e conhecimento.

A coordenação do PROFMAT sempre prestativa as nossas solicitações.

Aos meus colegas de turma do PROFMAT 2019: Altamiro dos Santos, Danilo Rodrigues, Jairo Santos, João Matheus, Marcos Modesto e todos os demais colegas, uma turma muito unida e foi imprescindível para minha maturação como mestrando e assim perseverar no curso.

A todos os meus Professores do PROFMAT - UESC, professores de excelência. Uma seleção de professores com currículos invejáveis e sempre desempenhando seu papel com amor e dedicação.

A todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da realização desse sonho, o meu muito obrigado.

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura.”

(Bertrand Russell)

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

[...]	Supressão Textual
Apud	Citado por. Utilizado nas citações das citações.
BNCC	Banco Nacional de Conteúdos Curriculares
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
et al.	Quando se tem 4 ou mais autores na mesma obra.
EUA	Estados Unidos da América
ICM	Internetional Mathemathic Olympiad
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Brasileira
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
n.	Abreviatura de número
p.	Página
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Rev.	Abreviatura de Revista (Periódico científico)
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SOE	Serviço de Orientação Educacional
v.	Abreviatura de volume.

LISTA DE TERMOS TÉCNICOS UTILIZADOS NO TEXTO

Axioma A palavra axioma deriva da grega axios, cujo significado é digno ou válido. Em muitos contextos, axioma é sinônimo de postulado, lei ou princípio. Relativo aos axiomas. Uma determinada teoria e que constituem as verdades mais simples a partir das quais se demonstram os novos resultados dessa teoria.

Geogebra É um software de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo. É desenvolvido para aprendizagem e ensino da matemática nas escolas por Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de programadores.

Injetividade Em uma aplicação f: A → B é injetora (pode ser chamada de injetava, biunívoca ou uma injeção) quando elementos distintos de A possuem imagens distintas em B, satisfazendo a condição: Lê-se: Para quaisquer x_1, x_2 pertencentes ao conjunto A onde $f(x_1)$ é diferente de $f(x_2)$, então x_1 é diferente de x_2.

Teorema de D'Alembert O Teorema de D'Alembert facilita o cálculo da divisão de um polinômio por um binômio. ... O matemático francês D'Alembert provou, levando em consideração o teorema citado acima, que um polinômio qualquer Q(x) será divisível por x – a, ou seja, o resto da divisão será igual à zero (R = 0) se
P(a) = 0.

Teorema do Resto O teorema do resto define que a divisão de um polinômio P x pelo binômio do tipo a x + b tem como resto R = P - b a. Uma das interações do teorema do resto é o teorema de D'Alembert que define que para um polinômio P x ser divisível por um binômio do tipo a x + b se e somente se P - b a = 0.

Teorema de Tales Se duas retas são transversais a um conjunto de três ou mais retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer determinados sobre uma delas é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes determinados sobre a outra.

Pesquisa Bibliográfica Utilizam fontes constituídas por material já elaborado, constituído basicamente por livros e artigos científicos localizados em bibliotecas. Enquanto a pesquisa documental utiliza fontes primárias, ou seja, dados e informações que ainda não foram tratados científica ou analiticamente.

Conjectura Ato ou efeito de inferir ou deduzir que algo é provável, com base em presunções, evidências incompletas, pressentimentos; conjetura, hipótese, presunção e suposição.

Enunciados Em linguística enunciado é a menor unidade do discurso. Pode-se dizer, de modo geral, que o enunciado é o dito concreto, falado, lido ou ouvido, em determinada interação linguística.

LISTA DE TERMOS TÉCNICOS UTILIZADOS NO TEXTO

(Continuação...)

Premissas	Premissa significa à proposição, o conteúdo, as informações essenciais que servem de base para um raciocínio, para um estudo que levará a uma conclusão. Em lógica a premissa significa cada uma das proposições de um silogismo.
Corolário	É um teorema que pode ser estabelecido diretamente do teorema que foi provado. Quando um teorema ou uma prova nos ajudam a concluir facilmente que outras afirmações são verdadeiras chamamos estas últimas de corolários do teorema. Uma conjectura é uma proposição que ainda não foi provada e nem refutada.
Fruição	É a ação de fruir, ou seja, de aproveitar ou usufruir de alguma coisa, situação, oportunidade, dentre outros.
Silogística	É um modelo de raciocínio baseado na idéia da dedução, composto por duas premissas que geram uma conclusão. ... O chamado silogismo aristotélico é formado por três principais características: mediado, dedutivo e necessário.
Incompletude	Incompletude é a possibilidade de produção dos sentidos, pois sem ela a língua/linguagem torna-se inconcebível.

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo efetuar um estudo diagnóstico sobre a eficácia do uso das demonstrações matemáticas dentro do processo de ensino e aprendizagem. A matemática, dentre as disciplinas contidas na grade escolar é onde se demanda mais cuidado, bem como a necessidade de efetuar a experimentação de metodologias no seu cotidiano em sala de aula. Percebe-se que, mesmo com o advento dos computadores e da internet, o uso das demonstrações matemáticas continuam sendo um meio acessível a todos para o convencimento da veracidade de um resultado. Diante desta narrativa, questionou-se: "Será que é possível à existência de uma resposta eficiente e positiva por parte do docente, quando o mesmo utiliza de estratégias envolvendo as demonstrações matemáticas dentro do processo de ensino e aprendizagem?" O presente trabalho também se justificou por gerar um diagnóstico acerca de como os docentes operacionalizam e interrelacionam com esta ferramenta na sua rotina com seus discentes. Para estruturar esta dissertação foi realizada uma revisão bibliográfica de abordagem qualitativa com o objetivo de elucidar e investigar a respeito das provas e demonstrações matemáticas. Também se utilizou como instrumento de coleta de dados um questionário com perguntas elaboradas com base na elucidação do problema de pesquisa. A inserção e a eficiência das demonstrações matemáticas na prática docente não dependem por si só de um excelente docente, em termos de nível de escolaridade, faixa etária jovem, com experiência e uma boa qualificação para o ensino da matemática. Verificou-se que existem outras inúmeras variáveis apontadas neste trabalho que permitiu entender que para uma resposta eficiente e positiva no uso das demonstrações matemáticas, depende muito de correções de estratégias e de planejamento, pensando principalmente na realidade do discente.

Palavras-chave: Demonstrações Matemáticas. Ensino-aprendizagem, Propostas didáticas.

ABSTRACT

This work aimed to carry out a diagnostic study on the effectiveness of the use of mathematical demonstrations within the teaching and learning process. Mathematics, among the subjects contained in the school grid, is where more care is required, as well as the need to experiment with methodologies in their daily lives in the classroom. It is noticed that, even with the advent of computers and the internet, the use of mathematical demonstrations continues to be a means accessible to everyone for convincing the veracity of a result. Faced with this narrative, the question was: "Is it possible for the existence of an efficient and positive response from the teacher, when he/she uses strategies involving mathematical demonstrations within the teaching and learning process?" The present work was also justified by generating a diagnosis about how teachers operationalize and interrelate with this tool in their routine with their students. In order to structure this dissertation, a bibliographical review with a qualitative approach was carried out in order to elucidate and investigate the mathematical proofs and demonstrations. A questionnaire with questions based on the elucidation of the research problem was also used as a data collection instrument. The insertion and efficiency of mathematical demonstrations in teaching practice does not depend by itself on an excellent teacher, in terms of education level, young age group, with experience and a good qualification for teaching mathematics. It was found that there are numerous other variables pointed out in this work that allowed us to understand that for an efficient and positive response in the use of mathematical demonstrations, it depends a lot on strategy and planning corrections, thinking mainly about the student's reality.

Keywords: Mathematical Demonstrations. Teaching-learning, Didactic proposals.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Um dos maiores fatores que interferem de forma significativa na educação de qualidade encontra-se atrelado justamente ao processo de ensino e aprendizagem. Não é tão fácil conseguir um IDEB - Índice de Desenvolvimento da Educação Brasileira satisfatório da noite para o dia.

A matemática dentre as disciplinas contidas na grade curricular é onde o processo de ensino e aprendizagem demanda de uma aplicabilidade de diferentes metodologias no cotidiano do docente, principalmente por envolver um raciocínio lógico, por ser uma ciência exata. A matemática não pode passar uma percepção ao discente, de que é uma mera “Fórmula Pronta”. Onde diante das fórmulas matemáticas se faz uma mera substituição destas fórmulas por números, e assim geram-se os resultados finais requeridos. Dentre as diferentes metodologias encontra-se o uso das demonstrações matemáticas. Pietropaolo (2005) relata que em países desenvolvidos como França, Portugal, Inglaterra e Alemanha, as demonstrações matemáticas são operacionalizadas desde as séries iniciais. Fato este que não acontece com o Brasil, pois estas ficam quase que restritas a cursos superiores de Matemática.

É notório que o processo de ensino-aprendizagem na Educação, tanto na disciplina de Matemática, bem como de outras disciplinas, perpasse por fatores importantes que não devem ser subestimados. Dentre os quais pode-se mencionar: a) nível baixo de cognição do discente, b) participação efetiva de professores em capacitações pedagógicas; c) discentes não possuírem uma base sólida nas séries básicas e d) infraestrutura física ineficiente das escolas e inexistência de interação entre família do discente – escola – professor. O processo de ensino-aprendizagem perpassa também pela melhoria do conhecimento do docente, principalmente na escolha de metodologias pedagógicas com mais eficácia, como já foi mencionado anteriormente.

A aplicação das técnicas e das demonstrações matemáticas nas aulas desta disciplina desperta nos alunos o interesse e a curiosidade, sendo assim uma poderosa ferramenta na ampliação dos conhecimentos matemáticos dos alunos.

Diante deste contexto acima, pretende-se com este trabalho, provocar reflexões, discussões e investigação da utilização de demonstração nas aulas de matemática no Ensino Fundamental e Médio.

Almouloud; Fusco e Silva, (2012) reportam que: "Uma Demonstração Matemática tem grande relevância, não só porque comprova um resultado, mas também porque pode apresentar novos métodos, ferramentas, estratégias, e conceitos que têm uma aplicabilidade mais ampla nesta disciplina e apontam novas direções matemáticas”.

Ainda segundo os autores mencionados no parágrafo anterior: as demonstrações matemáticas são indispensáveis para ampliação do conhecimento matemático, o simples ato de planejar uma prova contribui para o desenvolvimento da matemática. As demonstrações matemáticas produzem novas visões matemáticas, novas ligações contextualizadas e novos métodos para resolver problemas, dando a elas um valor muito além de comprovar a veracidade de proposições.

A educação busca sempre metodologias novas e um ensino de qualidade para os estudantes.

Os PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio obedecem aos princípios básicos da Lei número 9.394/96 (BRASIL, 1996), em seu artigo 4º IX, reporta que padrões mínimos de qualidade de ensino definido como a variedade e quantidade mínimas, por discente, de insumos imprescindíveis no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem. Assim os conhecimentos precisam ser repensados e organizados para atender as necessidades dos alunos e também sua realidade na educação.

Em virtude de seu caráter lógico, as técnicas de demonstrações matemáticas podem ser utilizadas como mais uma contribuição prática para exemplificar e proporcionar um contexto, bem como simplificar a origem e importância do raciocínio lógico matemático para os alunos.

Assim, corroborando com esta reflexão, Redlings (2011) afirma que a matemática vai muito além do pensamento racional-dedutivo e a percepção e intuição infundadas são cruciais para a criatividade matemática, e o desejo de descobrir novas verdades, de ampliar o aprendizado é o que motiva o empenho matemático. Segundo o mesmo autor, o principal fundamento é que nossa intuição não é confiável. Diversos exemplos na história da matemática demonstraram aos matemáticos que a intuição somente a intuição é insuficiente para compreensão dos fatos matemáticos.

PROBLEMA DE PESQUISA

O produto final do processo de ensino e aprendizagem, que envolve uma eficiente comunicação por parte do docente, nada mais é do que a compreensão efetiva dos alunos dos conhecimentos adquiridos. No entanto, para se chegar à detenção deste aprendizado do aluno, inúmeras variáveis acabam por interferir negativamente neste processo. Desta forma torna-se necessário que o docente procure sobrepor todas as variáveis que interfiram nesta aprendizagem. Diante disto, é importante que o discente lance mão de estratégias diferenciadas, bem como de diferentes metodologias. Diante desta narrativa, questiona-se:

"Será que é possível à existência de uma resposta eficiente e positiva por parte do docente, quando o mesmo utiliza de estratégias envolvendo as demonstrações matemáticas dentro do processo de ensino e aprendizagem?"

Com base neste contexto foram desenvolvidas as hipóteses desta Dissertação.

HIPÓTESES

Dentre as linhas hipotéticas desta dissertação, pode-se citar:

- é possível que a demonstração matemática apresente uma resposta satisfatória para a melhoria do ensino nesta disciplina.

- possivelmente a demonstração matemática encontre dificuldades na sua aplicação devido à falta de conhecimentos elementares em matemática dos discentes.

- provavelmente os discentes não se sintam motivados e interessados devido a diferentes fatores contribuintes que atrapalham o uso de novas metodologias de ensino na Matemática, o que dificulta a aplicabilidade da Demonstração Matemática.

Abaixo se encontra a narrativa do autor acerca dos esclarecimentos que justificou a elaboração deste trabalho.

JUSTIFICATIVA

A educação, segundo Ferreira (1996), pode ser definida como sendo o processo de desenvolvimento da capacidade física, intelectual e moral da criança e do ser humano em geral, visando a sua melhor integração e desenvolvimento, seja no campo do indivíduo pensante, questionador e argumentador dos fatos ou no campo do desenvolvimento da interação social.

A percepção que fica com relação à Educação Matemática é que ela demanda planejamento minucioso e tempo para a construção dos conceitos e metodologias com eficácia no aprendizado. Trata-se de uma ciência exata e que exige um pensamento lógico indispensável.

Na grade curricular percebe-se pouca ênfase na carga horária desta disciplina, interferindo assim no desenvolvimento pleno no processo de ensino-aprendizagem da matemática. A carga horária da mesma não é suficiente para suprir o tempo necessário de análise e compreensão dos seus conteúdos. No mínimo quatro aulas por semana, acredita-se que seria importante, pois é uma disciplina que normalmente os discentes possuem dificuldades neste processo. Ficando evidente que a existência de metodologias diversificadas na prática do docente para contribuir na melhoria e na eficácia do processo de ensino e aprendizagem é uma demanda muito plausível.

Diante deste contexto, nota-se que a demonstração matemática é um importante mecanismo disponível aos docentes para aplicabilidade no processo de ensino e aprendizagem. Mas, no entanto, percebe-se, no geral, pouco uso desta ferramenta tão importante. O que justifica o desenvolvimento deste trabalho é permitir ao docente uma visão mais ampla de como aplicar esta ferramenta de uma maneira mais eficiente e consistente.

O presente trabalho também se justifica por gerar um diagnóstico acerca de como os docentes operacionalizam e se interagem com esta ferramenta na sua rotina com seus discentes.

Com base neste contexto foi desenvolvido o objetivo geral, bem como os objetivos específicos contidos nesta Dissertação.

OBJETIVOS

Objetivo Geral

Efetuar um Estudo Diagnóstico sobre a eficácia do uso das Demonstrações matemáticas dentro do processo de Ensino e Aprendizagem, Ensino Fundamental - EF e Ensino Médio - EM.

Objetivos Específicos

- verificar se os docentes utilizam das demonstrações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem.
- identificar os principais fatores contribuintes que os docentes se deparam, quando utilizam as demonstrações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem.
- conhecer a importância dada pelos docentes, com relação à utilização das demonstrações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem.
- apontar o nível de segurança do docente acerca da utilização das demonstrações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem.

- elaborar um plano de ensino que contenha algumas das demonstrações matemáticas mais mencionadas no questionário de pesquisa, com o intuito de proporcionar ao professor um material de fácil utilização e acesso para desta maneira facilitar e incentivar o docente no uso das demonstrações matemáticas em sua prática docente.

1. REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo trazemos uma explanação consistente acerca das principais fontes bibliográficas utilizadas, com o intuito de proporcionar ao leitor maior aprofundamento acerca das palavras-chave que norteiam este trabalho.

1.1. EDUCAÇÃO

Quanto a Educação de Crianças e Adolescentes, a Constituição Federal do Brasil no seu artigo, 227 (BRASIL, 1988), é bem evidente no seu texto. Assim disposto:

> É dever da Família, da Sociedade e do Estado assegurar à criança e ao adolescente, com absoluta prioridade, o direito à vida, à saúde, à alimentação, à educação, ao lazer, à profissionalização, à cultura, à dignidade, ao respeito, à liberdade, à convivência familiar e comunitária, além de colocá-los a salvo de toda forma de negligência, discriminação, exploração, violência, crueldade e opressão.

Conforme Mello (1991), nos países industrializados mais adiantados já se tornou evidente que o conhecimento, a capacidade de processar e selecionar informações, a criatividade e a iniciativa constituem matérias-primas vitais para as economias modernas. Deslocam-se, assim, as prioridades de investimento em infraestrutura e equipamentos para a formação de competências cognitivas e sociais da população. Esse deslocamento leva a que a educação adquira centralidade nas pautas governamentais e na agenda dos debates que buscam caminhos para uma reestruturação competitiva da economia, com equidade social.

Quando a temática é Educação, o trabalho de Barreto (2004) reporta que esta é como um alimento que nutre um indivíduo dentro da sua demanda, em se tratando da fisiologia humana. Segundo o autor, o ser humano quando se encontra com fome de alimento, o mesmo não mede esforços para conseguir saciar do alimento. Um estudante curioso e interessado também tem fome, mas a fome do mesmo é o de conhecimento e dentro deste interesse se encontra permeado o empreendedorismo e o seu futuro profissional.

Estes estudantes querem explorar, investigar, sentir, analisar, questionar e também argumentar e o mais importante querem pensar no futuro. Diante do contexto acima Libâneo (2001 apud MELO, 2014) afirma que:

> [...] para oferecer uma educação de qualidade é preciso existir um ensino voltado para o desenvolvimento cognitivo, social e operacional. Desse modo, a qualidade da educação não estaria voltada para metas ou avaliação de larga escala. Há um leque de componentes importantes para promover a qualidade da educação a exemplo da formação de professor, melhores condições de trabalho e ensino, materiais didáticos, aspectos relacionados com o próprio discente, dentre outros.

Baseado na narrativa de Libâneo (2003) ficou evidenciado que uma base sólida no ensino primário é importante para o discente lograr sucesso. A escola é um espaço democrático que abriga todos os segmentos da Sociedade. Sendo uma Instituição fundamental no processo de socialização do indivíduo, a Escola também é um instrumento de intermediação do cidadão com o meio social. Na verdade, a escola nem sempre existiu como espaço físico. A educação, em tempos remotos, era transmitida no convívio social, principalmente entre os mais velhos aos mais novos, através de ensinamentos daquilo que sabiam fazer, é o espaço de formação cultural e científica que para alcançar os seus objetivos precisa de procedimentos e ações organizacionais. Em síntese, a escola é uma instituição programada para viabilizar a socialização do saber sistematizado, criando um veículo de transmissão de saberes às novas gerações.

Dias e Pinto (2019) relatam que a educação é, desde a sua gênese, objetivos e funções, um fenômeno social, estando relacionada ao contexto político, econômico, científico e cultural de uma determinada sociedade. O ato de educar é um processo constante na história de todas as sociedades, não é o mesmo em todos os tempos e lugares, e é, em sua essência, um processo social. Além disso, educação e sociedade se correlacionam porque a primeira exerce forte influência nas transformações ocorridas no âmago da segunda.

Ainda, os autores reportam que a partir dessa concepção, pode-se deduzir que, embora a educação seja um processo constante na história de todas as sociedades, o processo educativo não é o mesmo em todos os tempos e em todos os lugares, e se encontra vinculado ao projeto de cidadania e de sociedade que se quer ver emergir por meio desse mesmo processo. Finalmente a educação é, portanto, um processo social que se enquadra numa certa concepção de mundo, concepção esta que estabelece os fins a serem atingidos pelo processo educativo em concordância com as ideias dominantes numa dada sociedade. A educação não pode ser entendida de maneira fragmentada, ou como uma abstração válida para qualquer tempo e lugar, mas, sim, como uma prática social, situada historicamente, numa determinada realidade.

Libâneo, (2003, p, 301) questiona da seguinte forma:

> [...] o que as famílias, a comunidade e os próprios alunos esperam de uma escola? Que características dela fazem diferença no que diz respeito ao nível da qualidade de ensino e de reputação na comunidade? Muito provavelmente, os pais desejam que seus filhos aprendam bem, que não aprendam coisas erradas, que os conhecimentos, as habilidades, os valores tenham serventia para a vida, ou seja, desejam uma escola em que os alunos estejam motivados para estar nas aulas e se envolvam com afinco nas atividades da classe.

Uma escola que obedece aos fundamentos básicos de boas práticas pedagógicas e organizacionais, certamente obterá as condições adequadas para o bom desempenho de alunos e professores na aprendizagem e na formação da personalidade e contribuindo decisivamente para o desenvolvimento pleno do homem, preparando-o para o exercício da cidadania e para a qualificação do seu trabalho (LIBÂNEO, 2003).

Ferreira (1996, p. 193) sintetiza muito bem esse ambiente: "Não restam dúvidas de que os sistemas educacionais em todas as sociedades industriais da atualidade são formados por diversas instancias administrativas que se organizam de maneira burocrática”. É importante ressaltar que as escolas se organizam, cada vez mais, segundo os princípios típicos da administração burocrática. Em resumo, a escola é regida por normas legais, por leis, portarias, decretos e o regimento escolar. Estes são gerais, universais e impessoais. Na escola há uma hierarquia de posições, onde cada funcionário tem atribuição específica: professor, o secretario escolar, merendeira, vigilante, diretor, coordenador pedagógico, dentre outros.

Libâneo, (2003, p, 109) reporta que a gestão da sala de aula tradicional cria um ambiente de ganhar e de perder. A lei e a ordem são baseadas no poder da posição, em oposição às expectativas e valores compartilhados. Quando não existem valores para serem compartilhados ou uma visão comum de comportamentos desejados, a confiança não pode existir. É possível que não haja segurança no processo de ensino e aprendizagem. Tanto o discente como o docente percebem a necessidade de estar no controle. O professor deve constantemente monitorar, dirigir e criar metodologias de ensino diferenciadas que agradem os alunos. Os alunos aprendem a ser cautelosos e prudentes, bem como com um ar visionário para aprender algo mais.

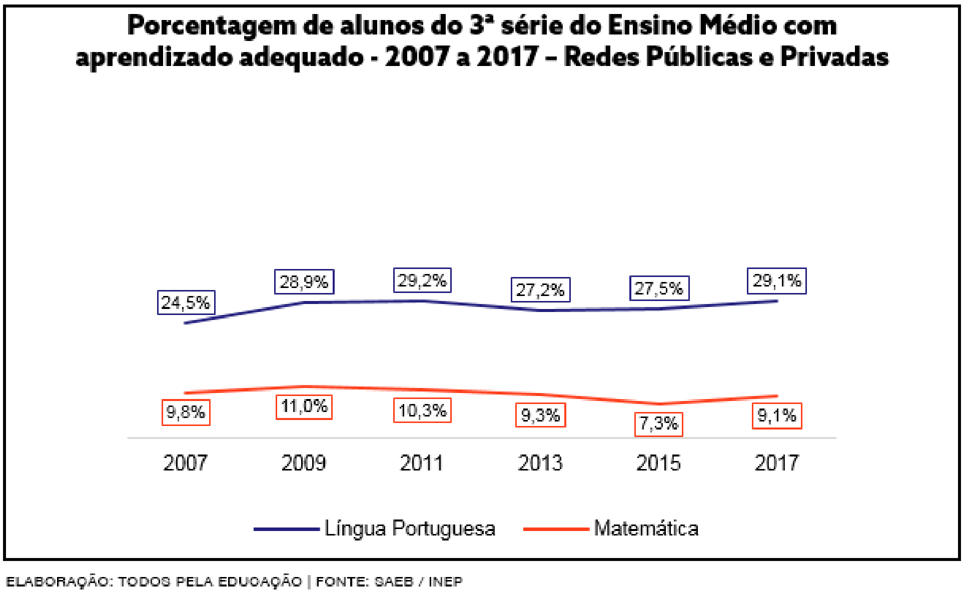
No entanto um ambiente aberto, participativo, não sugere uma desordem, onde cada um faz o que quer. Não há incentivos acerca dos discentes serem não receptivos com novas metodologias de ensino. O que se sugere, são que os professores, os pais e os discentes desenvolvam um conjunto de regras básicas juntas que satisfaçam e respeitem as necessidades de cada um, incluindo uma prática docente diversificada (LIBÂNEO, 2003, p, 111).

Conforme Ecco e Nogaro (2014), o sentido da educação decorre da incompletude dos seres humanos. Em vista disso, modificar-se é uma necessidade da natureza dos seres humanos, na busca de complementarem-se como pessoas. A riqueza da concepção de educação se encontra contida na afirmação de que os humanos educam-se em comunhão mediados por determinado objeto de conhecimento, particularmente, a realidade vivida. Refletir a respeito da educação consiste em pensar, refletir o ser humano, pois nele reside o fundamento do processo educativo.

1.2. DESEMPENHO DOS DISCENTES EM AVALIAÇÕES DE MATEMÁTICA NO BRASIL

Os resultados da figura 1 a seguir mostram a porcentagem de alunos do terceiro ano do ensino médio com aprendizado adequado de 2007 a 2017 nas redes Pública e Privada. Apesar do pequeno avanço de 2015 para 2017, os dados mostram um cenário crítico da etapa. O nível de aprendizagem segue em patamares muito baixos e estagnados na última década. Em matemática, caiu de 9,8% para 9,1%.

Figura 1. Porcentagem de alunos do terceiro ano do ensino médio com aprendizado adequado.



Fonte: INEP- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, (2018).

Tavares et al. (2018) mostram sobre a percepção do aluno acerca do mesmo já ter tido alguma dúvida (principalmente nas Disciplinas de Matemática e Português) a qual não expressou em sala de aula com o professor que ministra as disciplinas, ficando com esta dúvida por um tempo indeterminado e trazendo consequências graves para o mesmo como a reprovação ou a evasão escolar do mesmo. Uma das principais hipóteses geradas neste trabalho foi que o baixo rendimento escolar estaria atribuído ao fato do aluno ter dúvidas em matemática e estas não serem expostas para o professor e este permanece com a dúvida ao longo do tempo.

Conforme Palermo, Silva e Novellino (2014), com relação ao desempenho dos discentes em avaliações de matemática no Brasil, ficou evidenciado que os fatores que mais incidem no desempenho escolar são provenientes do *background* (conjunto das condições, circunstâncias ou antecedentes de uma situação, acontecimento ou fenômeno). do aluno, sejam relativos a características intrínsecas ou provindos de condições familiares. Porém, é possível afirmar que a escola, mesmo que possua um poder explicativo limitado em relação ao aluno, apresenta processos característicos que influenciam o desempenho e os demais resultados escolares, direta ou indiretamente.

Ainda segundo Palermo, Silva e Novellino (2014), uma das dimensões teoricamente relevantes para explicar esse desempenho diz respeito às dinâmicas que ocorrem cotidianamente nas salas de aula, na gestão da classe e do conteúdo e cobertura das disciplinas, assim como nas diferenças das características dos alunos dentro das turmas e do ambiente da classe. Todos esses elementos fazem com que diferentes resultados educacionais possam ser encontrados para alunos com o mesmo *background* (conjunto das condições, circunstâncias ou antecedentes de uma situação, acontecimento ou fenômeno), mas sujeitos a diferentes contextos escolares e das turmas. Dentro deste contexto é que surgem as importantes metodologias de ensino que contribuem de forma positiva no processo de ensino e aprendizagem.

Tokarnia (2021) reporta que os estudantes brasileiros melhoraram o desempenho em matemática em todas as etapas de ensino, de acordo com os resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica de 2019. Esta foi a maior avaliação educacional do país divulgada até hoje, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Os resultados, no entanto, não foram tão bons em língua portuguesa. Após avanços desde 2003, o 5º ano do ensino fundamental ficou estagnado entre 2017 e 2019 nesta disciplina.

Laros, Marciano e Andrade (2010) relatam sobre os fatores que afetam o desempenho na avaliação de matemática, quando se trata do SAEB (Sistema de Avaliação Básica): um estudo com diferentes níveis. Este trabalho identificou algumas das características de alunos e escolas que são associadas ao desempenho em Matemática. Foram analisados os dados de 35.929 alunos da 3ª série do Ensino Médio, distribuídos em 1.661 escolas brasileiras que fizeram o teste de Matemática do SAEB em 2001. Inicialmente, o estudo mostra que mesmo após o controle dos efeitos das variáveis relacionadas com a composição e seletividade da escola, ainda resta variância a ser explicada tanto no nível do aluno quanto no nível da escola.

Ainda segundo Laros, Marciano e Andrade (2010), os mesmos sugeriram algumas intervenções que a família pode realizar para aumentar o desempenho em matemática dos seus filhos, podem-se citar as seguintes: incentivar desde a primeira infância, através de jogos e atividades lúdicas, a afinidade e o prazer pelos conceitos matemáticos; evitar que seus filhos ingressem e permaneçam na escola com distorção idade-série; oferecer para seus filhos brinquedos que incentivam o interesse por Matemática; estimular a auto-estima dos filhos com relação à aprendizagem escolar, dentre outras.

Os mesmos autores reportaram também, que os estudos permitem apontar algumas intervenções que podem ser desenvolvidas pelas escolas: aumentar o controle sobre a incidência de faltas na sala de aula; sanar as causas da repetência do ano letivo; estimular o trabalho colaborativo entre os professores; melhorar o clima disciplinar na escola prevenindo roubos, depredações e outros atos violentos. Ressalta-se, todavia, que ações isoladas tendem a não surtir efeito. Se forem adotadas isoladamente, é possível que cada uma das intervenções antes descritas não seja suficiente para melhorar consideravelmente o desempenho dos alunos em Matemática. Recomenda-se a implementação do conjunto de ações sugeridas, com a devida participação dos agentes governamentais.

1.3. FATORES CONTRIBUINTES QUE INTERFEREM NO DESEMPENHO DOS DISCENTES EM AVALIAÇÕES DE MATEMÁTICA NO BRASIL

Percebe-se que existem diferentes fatores contribuintes que interferem no desempenho dos discentes em avaliações de matemática no Brasil. Dentre os quais pode citar (I) baixo nível de escolaridade dos pais; (II) evasão escolar elevada, (III) pouca participação dos familiares no processo de ensino-aprendizagem, (IV) deficiência na infra-estrutura e logística das unidades escolares; (V) pouco conhecimento dos discentes em séries básicas e iniciais; (VI) dispersão e pouca motivação para estudar; (VIII) inexistência do serviço de orientação escolar (SOE-Serviço de Orientação Educacional) com equipes multiprofissionais como a participação de pedagogos, psicólogos, visitas freqüentes de oftalmologistas e fonoaudiólogos, assistentes sociais dentre outros, (VIX) gravidez na adolescência, e a necessidade de discentes irem para o mercado do trabalho de forma precoce no caso dos meninos, para contribuir com a renda familiar; (X) baixa capacitação dos docentes, ou formação continuada insatisfatória e (XI) poucos projetos relacionados ao nivelamento dos alunos em termos do conhecimento básico em matemática.

A questão familiar conta consideravelmente no processo de ensino e de aprendizagem. Tiba (2002, p.27) relata a importância e o papel da família neste processo. Ele cita a importância da figura materna na família. Segundo o autor, não é justo se referir ao casal como "pais", porque a figura materna fica subestimada. Quando a escola convoca pais, quem mais atende a solicitação são as mães, e quando mães são chamadas, nenhum pai comparece as reuniões. O pai sempre mencionado e referenciado recebendo as glórias da família. Mas, na maioria das vezes, os filhos ainda são responsabilidade da figura feminina, mesmo que a mulher trabalhe fora de casa e ainda ajude no orçamento familiar.

Tiba (2002, p.27) reporta que a figura feminina saiu para o mercado de trabalho sem deixar, contudo, de ser mãe. E nem por isso os homens se tornaram mais pais. Na educação dos filhos, esta ideia errônea também é bem significativa, mesmo existindo dados que boa parte das famílias é sustentada pela figura feminina, com ausência completa ou parcial da figura paterna. Pode-se notar que a presença dos pais são maiores, quando as crianças estão entre 0 e 8 anos. Ou observa-se também que a figura masculina possui um cuidado relevante, quando a educação dos seus descendentes está próximo ao período do vestibular. Quando a família fiscaliza o desempenho dos seus filhos. Acompanha a agenda escolar. Verifica se este possui dificuldade em alguma disciplina. Se este está faltando as aulas, a família passa a contribuir para o desenvolvimento educacional dos seus filhos. A participação efetiva de reuniões entre escola e a família dos alunos, é algo crucial.

Faria (2002), reporta que os alunos na aula de matemática possuem dificuldades de se habituar a uma matemática diferenciada daqueles que estão acostumados de ver no cotidiano. Durante o ensino fundamental e médio, o aluno pensa que a matemática se resume a resolução de exercícios. Esta ciência não se resume a trabalhar apenas com números. Os resultados apenas eram apresentados e, consequentemente, aplicados aos números.

1.4. DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS (UTILIZAÇÃO, IMPORTÂNCIA E DESCRIÇÃO)

Como foi mencionada anteriormente, a matemática dentre as disciplinas contidas na grade curricular é onde o processo de ensino e aprendizagem demanda de uma aplicabilidade de diferentes metodologias no cotidiano do docente. A matemática não pode passar uma percepção ao discente, de que é um conjunto de “Fórmulas Prontas”, onde diante delas se faz uma mera substituição destas fórmulas por números, e assim geram-se os resultados finais requeridos. Diante deste contexto é que se encontra o uso de metodologias adequadas, no sentido de proporcionar um pleno aprendizado do discente. Dentre estas metodologias se encontra o uso das demonstrações matemáticas

Conforme Faria (2002), este reporta que as demonstrações, por seu modelo de desenvolvimento lógico-formal, através do manejo de hipóteses e resultados prévios para se alcançar novos resultados, são muito importantes para o desenvolvimento do raciocínio. Atualmente, o ensino de matemática se resume praticamente à resolução de sentenças e problemas matemáticos, o que pouco ajuda no desenvolvimento do raciocínio. Trabalhando com as demonstrações matemáticas, em sala de aula, é possível ajudar a desenvolver no aluno seu espírito contestador, fazendo com que ele questione os resultados apresentados em sala e ajudando a construí-los. Desenvolvido o espírito argumentador, espera-se que o aluno não questione apenas os resultados matemáticos ou de qualquer outra matéria que esteja aprendendo, mas que questione problemas que ocorram no meio onde está inserido.

De acordo com a leitura de Andrade; Santos e Moura (2017), um dos maiores problemas na educação decorrem do fato que muitos professores consideram os conceitos matemáticos como objetos prontos (esses conceitos foram construídos pela humanidade, em diferentes épocas históricas, como uma reação à necessidade da evolução e explicação dos fenômenos), não percebendo que estes devem ser construídos pelos alunos. De alguma maneira, os alunos devem vivenciar as mesmas dificuldades conceituais e superar os mesmos obstáculos encontrados pelos matemáticos, ou seja, solucionando problemas, discutindo resultados e métodos, tornando-se conscientes de suas concepções e dificuldades.

Conforme Bicudo (2004) a demonstração matemática tem por objetivo provar fatos proporcionando desta maneira a construção de novos conceitos. Aliadas, resolução de problemas e demonstração pode ser uma alternativa para mostrar ao aluno a aplicabilidade e a importância dos conteúdos matemáticos nos diversos campos do conhecimento. A demonstração matemática é a que satisfaz a comunidade dos especialistas, não interessando o quão distante possa estar do ideal lógico.

Ainda segundo Bicudo (2004, p. 01) a demonstração matemática relativamente simples mostra que os matemáticos não escrevem demonstrações, precisamente, do modo descrito pela lógica. Passos são omitidos, tanto quanto hipóteses são introduzidas quando deduções são feitas; novas definições são produzidas, em total contraste com uma sequência formal de proposições. Por que é assim? Em primeiro lugar, os matemáticos escreviam demonstrações muito antes que elas fossem logicamente analisadas, de modo que o estilo em prosa veio primeiro e continua a ser usado.

Conforme Andrade (2011, p.23) a demonstração meramente formalizada é uma das chaves mais elementares da matemática acadêmica e possui grande relevância na construção do imaginário do discente com relação a esta disciplina. A demonstração matemática só é verdadeira se tiver a demonstração formal para ela, sendo esta compreendida como sendo uma sucessão de relatos de lógicas a partir de axiomas ou proposições aceitas. Não pode ser fundamentada na intuição, experiência e em figuras, Assim os testes de casos particulares, explicações, figuras e justificativas, não se constituem em questionamentos ou argumentos aceitos como demonstração para a matemática.

O autor relata também que em um sentido muito geral, definir um conceito significa explicá-lo em termos de outros conceitos, anteriormente definidos. Similarmente, demonstrar uma proposição significa argumentar pela aceitação de sua validade, a partir da validade de outras proposições já demonstradas. Sem recorrer, como fazem os dicionários, ao círculo vicioso, sabe-se que é impossível definir todas as noções matemáticas. Do mesmo modo, não é fácil alcançar a demonstração de todas as proposições necessárias, na caminhada um tanto retrocessiva, exigida por uma demonstração. Assim lança-se mão de alguns conceitos, tomados sem definição, e de algumas preposições, aceitas sem demonstração, estabelecesse-se, por assim dizer, a arquitetura das teorias matemáticas: conceitos primitivos e conceitos derivados, axiomas e teoremas.

Lindauriane, Santos e Sousa (2002) reportam que a outra contribuição das demonstrações matemáticas é de desenvolver o raciocínio que decorre de uma apreensão da lógica matemática por parte dos alunos, uma vez formado e trabalhado este raciocínio, o mesmo será capaz de aplicá-lo não só no estudo da matemática, bem como de outras disciplinas, mas também de apresentar ou formular concepções acerca das problemáticas sociais, políticas, entre outras demais relacionadas ao contexto onde o aluno se insere. Outra vantagem que destaca a relevância do contato efetivo com a prática demonstrativa é a que tange as habilidades referentes à argumentação matemática, visto que esta é uma das competências indicadas nos PCNs. Conclui-se que a demonstração matemática necessita ser enxergada tanto por alunos quanto por professores como parte inerente da matemática, isto é, não podem ser dissociadas. Portanto, o uso de demonstrações é importante para o ensino aprendizagem dos conteúdos dessa disciplina.

Almouloud, Fusco e Silva (2012) reportam que os PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999) para o ensino fundamental (PCNEF- Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental) enfatizam a importância da demonstração em matemática, procurando proporcionar orientações para o estudo de teoremas pelos alunos, com posterior demonstração formal, privilegiando as conjecturas e as relações que as vinculam com o discurso teórico, bem como, no que diz respeito aos sistemas de representação plana das figuras espaciais e as principais funções do desenho. A demonstração em matemática é uma das competências indicadas nos PCNs para o ensino fundamental e para o ensino médio como parte integrante do currículo da escola básica, mas que ainda não possui, no Brasil, um número de pesquisas suficientes para a compreensão de seus mecanismos utilizados na formação dos conceitos matemáticos.

A seguir encontram-se as principais aplicabilidades das demonstrações matemáticas.

APLICABILIDADE DAS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Importante mencionar, que demonstrar ou fazer uma demonstração em matemática significa utilizar-se de uma: "Sequência de argumentos lógicos que partem de fatos conhecidos e provam que o fato é verdadeiro".

As demonstrações matemáticas se originam por conta da necessidade dos matemáticos tornarem os enunciados matemáticos verdadeiros e convincentes. É notável que o estudo das demonstrações em matemática demanda de um domínio pleno do raciocínio – lógico, ou seja, um conhecimento aprimorado das premissas da lógica que são usados para demonstrar e/ou validar um conceito matemático.

Bicudo (2004) reporta que a aplicabilidade das demonstrações matemáticas, de uma maneira geral, tem o papel de desenvolver um conceito. Similarmente, demonstrar uma proposição (exprimindo uma propriedade de um conceito) significa argumentar pela aceitação de sua validade, a partir da validade de outras proposições já demonstradas. Sem fazer recorrências, como fazem a maioria dos teóricos, ao círculo pouco conceitual, percebe-se que não é possível definir todas as noções matemáticas.

Andrade (2011) relata que demonstrar uma propriedade matemática não é o mesmo que enunciar tal propriedade, pois nas demonstrações matemáticas é necessário apresentar argumentos matemáticos que comprovam que a propriedade matemática é verdadeira. É importante também identificar a conclusão aonde se quer chegar e quais são as propriedades.

Bicudo (2002) reporta também que existe uma necessidade de se criarem condições que promovam mudanças nas concepções e nos saberes dos professores de matemática a respeito de prova e demonstração, bem como nas linguagens utilizadas para criar condições que permitam aos seus alunos raciocinar, argumentar, provar e demonstrar.

Lindauriane, Santos e Sousa (2002) relatam que as demonstrações matemáticas nos conteúdos estudados desta disciplina relacionam-se ao ato de provar uma verdade absoluta expressa, seja por uma proposição, definição, corolário e/ou teorema. Analisando o contexto do ensino dos anos finais do ensino fundamental, observa que o uso de demonstrações matemáticas não é recorrente, onde se ver que a restrição à prática escolar voltada para somente resolução de problemas, sem suas devidas justificativas, é o mais adotado, o que pode levar à falta de reflexão por parte do educando, no que concerne ao raciocínio matemático.

Conforme BRASIL (2018), quanto a BNCC - Base Nacional Comum Curricular o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. A matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A matemática cria um sistema abstrato, que se organiza entre si e se inter-relacionam em fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esse sistema contém ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos.

Apesar da Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotética-dedutiva, porque suas demonstrações se apóiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da matemática. No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental.

Ainda BRASIL, (2018), com relação a BNCC - Base Nacional Comum Curricular, Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). O desenvolvimento dessas habilidades encontra-se intrinsecamente relacionado a algumas formas de organização da aprendizagem matemática, com base na análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e da própria matemática.

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. Considerando esses pressupostos, e em articulação com as competências gerais da educação básica, a área de matemática e, por consequência, o componente curricular de matemática deve garantir aos alunos o desenvolvimento de competências específicas.

2. METODOLOGIA

Nesse capítulo, apresentamos a metodologia utilizada no trabalho.

2.1. PLANO DE COLETA E TABULAÇÃO DE DADOS

Aplicou-se um questionário *online* enviado eletronicamente a 63 professores da rede pública e particular de diferentes regiões do Brasil (ver ANEXO A), nos ensinos médio e fundamental, através do *Google Forms* com o intuito de compreender os mecanismos do uso das demonstrações matemáticas pelos professores em sua prática docente. Neste questionário continham perguntas objetivas, subjetivas e mistas. O questionário foi aplicado de setembro a outubro de 2020. Continham 17 perguntas objetivas e 7 subjetivas, totalizando 22 questões (*online)*. A tabulação de dados numéricos foi efetuada no *Microsoft Excel, no* Geogebra e no próprio *Google Forms*. Geraram-se gráficos (Figuras), Tabelas e Quadros.

2.2. PLANO DE ANÁLISE E EXPOSIÇÃO DE DADOS

Individualmente cada pergunta subjetiva foi analisada e as respostas similares foram agrupadas. Cada grupo de respostas similar foi transformado em Tabelas, Figuras ou Quadros. Todos os dados numéricos foram expostos em valores absolutos e valores percentuais. Para cada resultado efetuou-se a descrição dos dados. Em seguida efetuou-se o questionamento e os argumentos, bem como o contraponto, utilizando de diferentes fontes bibliográficas para análise.

2.3. VARIÁVEIS MENSURADAS

A seguir encontram-se todas as variáveis mensuradas no trabalho:

- verificação se na prática docente, utiliza-se de demonstrações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem.
- percepção se a utilização das demonstrações matemáticas é uma ferramenta importante a ser aplicada no processo de ensino e aprendizagem.
- verificação se o docente está preparado (a) para a utilização das demonstrações matemáticas, durante o seu cotidiano em sala de aula.

- enumeração de sugestões acerca de contribuições para que o uso das demonstrações matemáticas apresente melhor eficácia na sua aplicabilidade.
- percepção acerca do uso das demonstrações matemáticas em sua prática docente, na sua percepção, encontra algum tipo de entrave que diminua a eficiência da sua aplicabilidade.
- enumeração de fatores contribuintes encontrados acerca de trabalhar com as demonstrações matemáticas na sua prática docente.
- identificação de como foi à receptividade dos discentes, quanto a aplicabilidade das demonstrações matemáticas.
- percepção do docente acerca das demonstrações matemáticas.
- de que maneira faz uso das demonstrações matemáticas.
- determinação de quais tipos de recursos que se utiliza para operacionalizar as demonstrações matemáticas.
- verificação de quais demonstrações matemáticas são utilizadas no processo de ensino e aprendizagem.
- determinação, acerca de não consegui operacionalizar de forma satisfatória as demonstrações matemáticas. Na sua percepção, este fato se encontra associado a que fatores.

2.4. INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

A pesquisa bibliográfica conforme Manzo (1971, p.32 apud MARKONI; LAKATOS, 1999, p.73), reporta que esta disponibiliza de meios bibliográficos com o intuito de definir, resolver, não somente problemas já conhecidos, como também de explorar novas áreas, onde os problemas não se formaram suficientemente (ou seja, ainda são incipientes), e tem por objetivo permitir ao cientista “o reforço paralelo na análise de suas pesquisas ou de manipulação de suas informações”. Assim a pesquisa bibliográfica não é mera repetição do que foi dito ou do que foi escrito sobre um determinado assunto, mas propicia o exame de um tema sob um novo enfoque ou uma nova abordagem, chegando a conclusões inovadoras.

Desta forma, foram dois instrumentos de coleta de dados. Uma fonte bibliográfica física e eletrônica, bem como a aplicação de um questionário a professores, via plataforma *Google Forms.*

2.5. AMOSTRA E POPULAÇÃO

Foram 63 professores amostrados. Sugeriu-se o preenchimento do questionário para mais professores, mas, no entanto, a devolução não ocorreu. É importante lembrar que o Brasil passa por um período pandêmico grave desde março de 2020, onde existe um isolamento social que faz parte de medidas preventivas e dos protocolos de segurança de combate ao Covid-19. Assim optou-se por uma ferramenta *online*, já mencionada anteriormente, buscando obter tendências acerca do que estes 63 professores reportaram sobre a temática: "Estudo diagnóstico sobre a eficácia do uso das demonstrações matemáticas dentro do processo de Ensino e Aprendizagem."

2.6. TIPO DE PESQUISA

Este trabalho foi pautado em função de uma pesquisa descritiva. Segundo Markoni e Lakatos, (1999, p.22) estes delineiam o que é – aborda também quatro aspectos: descrição, registro, análise e interpretação dos fenômenos atuais objetivando o seu funcionamento no presente. Os autores abordam ainda que a pesquisa descritiva é uma simples descrição de fenômenos. Os autores descrevem um fenômeno ou uma situação, mediante um estudo realizado em um determinado espaço e em um determinado tempo.

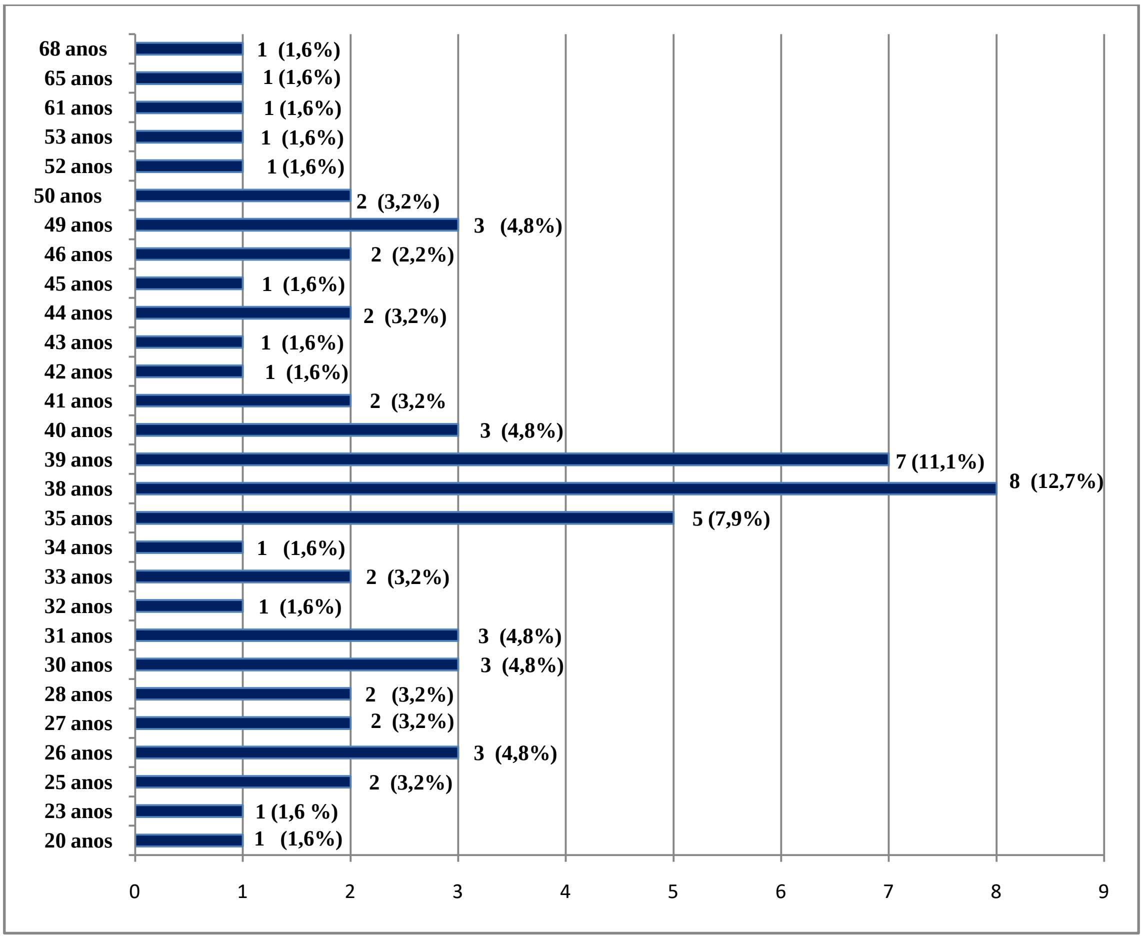
3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste Capítulo, discutiu-se os resultados derivados das respostas de perguntas objetivas, subjetivas e mistas contidas no questionário e compartilhadas para 63 professores de matemática (Ensino público e privado). Este questionário foi enviado por *e-mail* e foi mantido o anonimato do docente. Também se encontram todos os questionamentos e argumentações realizadas pelo autor deste trabalho, com relação a cada resultado obtido. De modo que, ao final deste capítulo, tem-se uma base consistente acerca de como responder aos objetivos específicos propostos, responder as hipóteses e compreender quais foram os fatores que interferiram no problema de pesquisa.

Antes de apresentarmos a análise e discussão dos resultados, expressados a seguir, é importante mencionar que o autor deste trabalho, bem como a Coordenação do PROFMAT da UESC - Universidade Estadual de Santa Cruz compartilharam o questionário de pesquisa pelo *e-mail* com alunos egressos do próprio PROFMAT, bem como alunos que ainda cursam este programa. Também foi compartilhado para docentes de matemática da escola pública e privada, que não fizeram o PROFMAT.

Os dados da Figura 2 reportam sobre a faixa de idade dos pesquisados. Observou-se que esta se concentra entre 35 e 40 anos de idade. Percebe-se que é uma faixa etária jovem, onde todos eles já concluíram o ensino superior (Figura 04). Observou-se também que 33,3 % dos pesquisados possuem até 10 anos de experiência em sala de aula (Figura 08). Conforme Barbosa e Barboza (2020), nesse período de início de carreira, o docente enfrenta os desafios concretos da sala de aula. Tal período é marcado por momentos decisivos e críticos que podem repercutir em toda a vida profissional do professor, inclusive de modo insatisfatório para o processo de ensino e aprendizagem.

Figura 2. Faixa de idade do docentes.



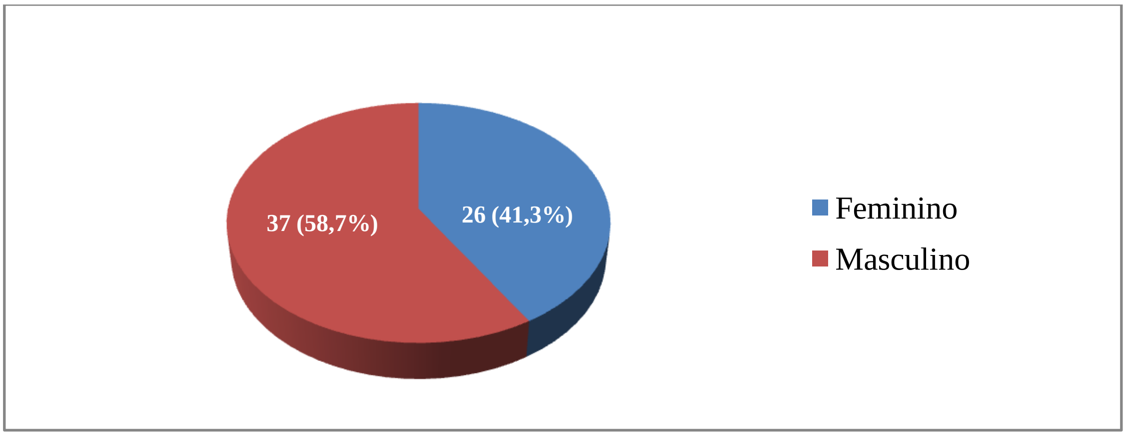
Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados da Figura 3 reportam sobre o sexo biológico dos pesquisados. Observou-se que a maioria é do sexo biológico masculino (com 58,7%), porém a diferença é pouco expressiva.

De acordo com o IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada (2018) a participação das mulheres na matemática e em outras ciências vem crescendo aos poucos nas últimas décadas, mas a diferença de oportunidades em comparação com os homens ainda é grande. Uma das provas dessa lacuna é o fato de que, de oito prêmios anunciados no Congresso Internacional de Matemáticos (IMPA - INSTITUO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA, 2018), nenhuma mulher estava entre as vencedoras dentre os oradores do encontro, somente 15% são do sexo biológico feminino. Apesar de baixa, a proporção vem crescendo de participação delas, na edição do ICM - *International Congress of Mathematics.*

A grande maioria das mulheres se encontra no mercado de trabalho. Muitas sustentam toda a família. O número de mulheres estudando no nível superior é maior que os homens (SILVEIRA, 2021). Não é a mesma mulher da década de 1970-1990. As mulheres nos dias de hoje buscam cada vez mais a independência financeira (IDOETA, 2019 e INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA, 2018).

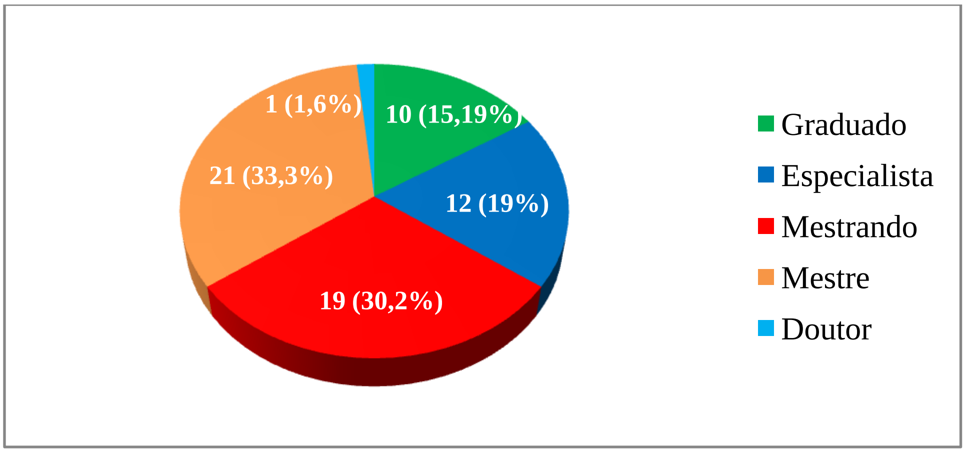
Figura 3. Sexo biológico.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

A Figura 4 mostra dados referentes à atual formação acadêmica dos pesquisados. Observou-se que 33,3% são Mestres e 30,2% são Mestrandos. São os níveis que mais se sobressaíram. Também foi observado que existiam 19% de Especialistas, 15,9% Graduados e um Doutor (1,6%).

Figura 4. Atual formação acadêmica dos pesquisados.

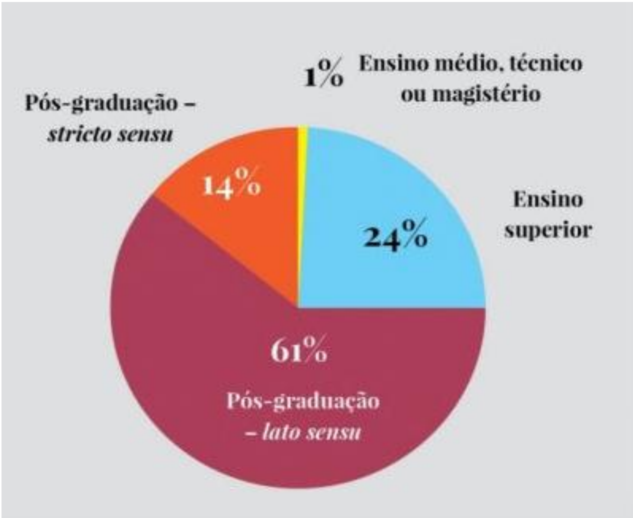


Fonte: Dados da pesquisa (2021).

A Figura 5 exibe dados oriundos do Instituto *Mathema e* do Instituto *Paulo Montenegro* no ano de 2018 (REVISTA EDUCAÇÃO, 2018). Os dados destas instituições, com uma amostragem de 1838 professores de todas as regiões do Brasil, mostram que 61% dos pesquisados são especialistas. Sendo 24% apenas com ensino superior; 14% pós-graduação *stricto sensu* e 1% ensino médio, técnico ou magistério.

Ao efetuar a checagem dos resultados obtidos nesta *D*issertação em comparação com o que observado por esta pesquisa com professores de matemática (em nível nacional) oriundos *dos Institutos Mathema e Paulo Montenegro* no ano de 2018, percebe-se certa similaridade nos valores correspondentes para o grau de instrução. Contudo verifica-se que nesta pesquisa realizada no Brasil, que houve uma pequena diferença (11,8% para mais) no tocante aos docentes com Pós-graduação *lato sensu* em relação a esta dissertação de mestrado.

Figura 5. Formação dos docentes de matemática no Brasil, dados de 2018.

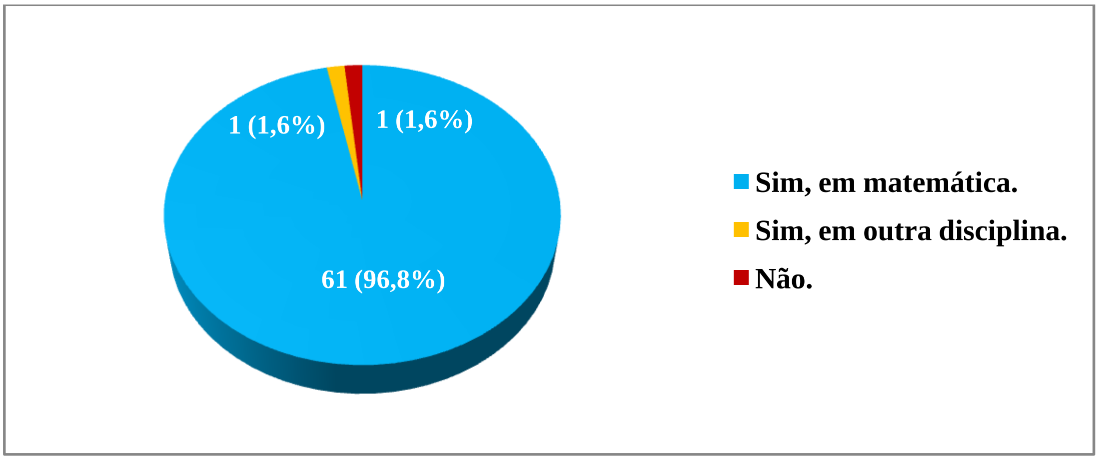


Fonte: Adaptado *do* Instituto *Mathema e Instituto Paulo Montnegro* em REVISTA EDUCAÇÃO, (2018).

Os dados gerados na Figura 6 reportam sobre a verificação se os pesquisados possuem diploma de licenciatura de matemática. Ficou evidenciado que 96,8% possuem o diploma de licenciatura em matemática. Conforme o INEP – Instituto Nacional de Ensino e Pesquisa Educacional Anísio Teixeira (2019) a escolaridade do professor é predominantemente de nível superior em todas as etapas de ensino – sendo que a maior parte é em licenciatura. Quanto à licenciatura, nota-se que apesar de, em sua maioria serem professores licenciados existem ainda, docentes de outras áreas ou com apenas formação de nível médio.

Conforme Tenente (2020), o INEP - Instituto Nacional de Ensino e Pesquisa educacional Anísio Teixeira reportou que 40% dos professores de ensino médio não são formados na disciplina que ensinam aos alunos, no sul chega a 67,6%, no sudeste 68,9% e no nordeste 36%.

Figura 6. Verificação se os docentes possuem diploma de licenciatura em matemática.

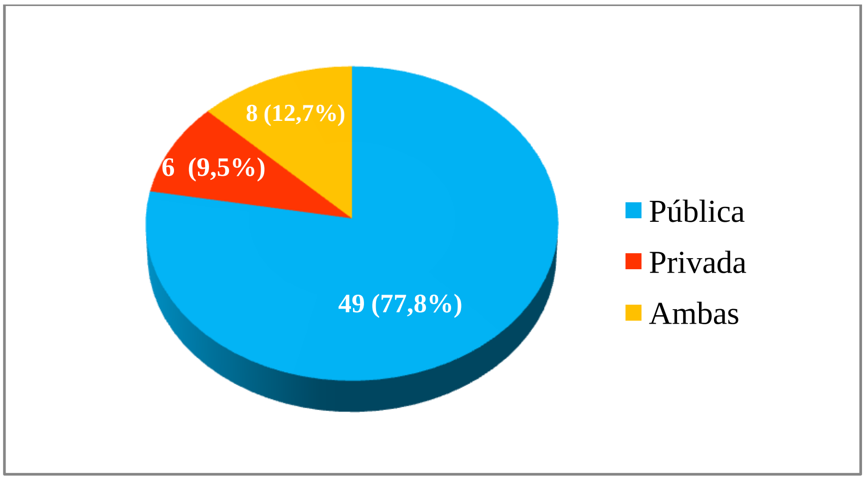


Dados da pesquisa (2021).

A Figura 7 mostra acerca de qual tipo de rede de ensino leciona. Verificou-se que boa parte dos pesquisados (77,8%) ensinam no setor público. Dados do INEP - Instituto Nacional de Educação e Pesquisa Educacionais Anísio Teixeira (2010) mostraram que cerca de 80% dos docentes de ensino infantil, fundamental e médio atuam em escolas públicas e 15% deste total em escolas rurais. Este fato se encontra associado às questões relacionadas à estabilidade por concurso público, além de possuir um plano de carreira e estabilidade.

Certamente, o fato de estes possuírem uma carga horária de 40 horas, na sua grande maioria (como mostrado na Figura 11). Sendo também que existem docentes que além das 40 horas na rede pública, possuem carga horária extra na Rede Privada de Ensino.

Figura 7. Identificação em rede de ensino leciona.

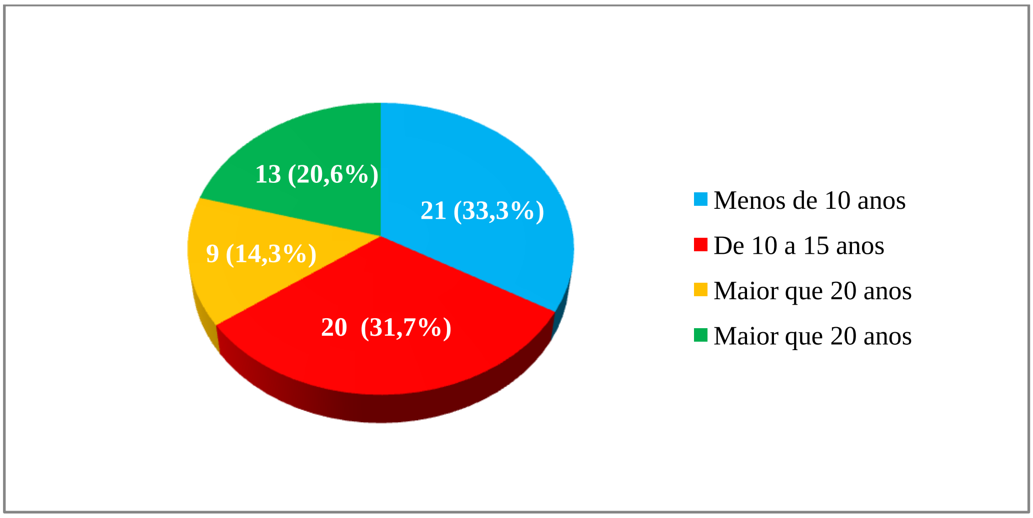


Fonte: Dados gerados pela própria pesquisa (2021).

Os dados da Figura 8 retratam o tempo que os pesquisados lecionam Matemática. Verificou-se que a maior parte dos docentes possui até 15 anos de experiência em sala de aula (percebe-se que a somatória das fatias azul e vermelha na Figura 08 gera um valor de 65%).

Percebe-se também, que mais da metade dos pesquisados possui mais de 10 anos de docência. Souza e Gouveia (2011), no tocante a este assunto, especulam que a faixa etária dos professores pode estar associada à maior experiência profissional, se considerar que permanecem mais tempo na carreira, tem maior amadurecimento em suas ações pedagógicas e no enfrentamento de desafios.

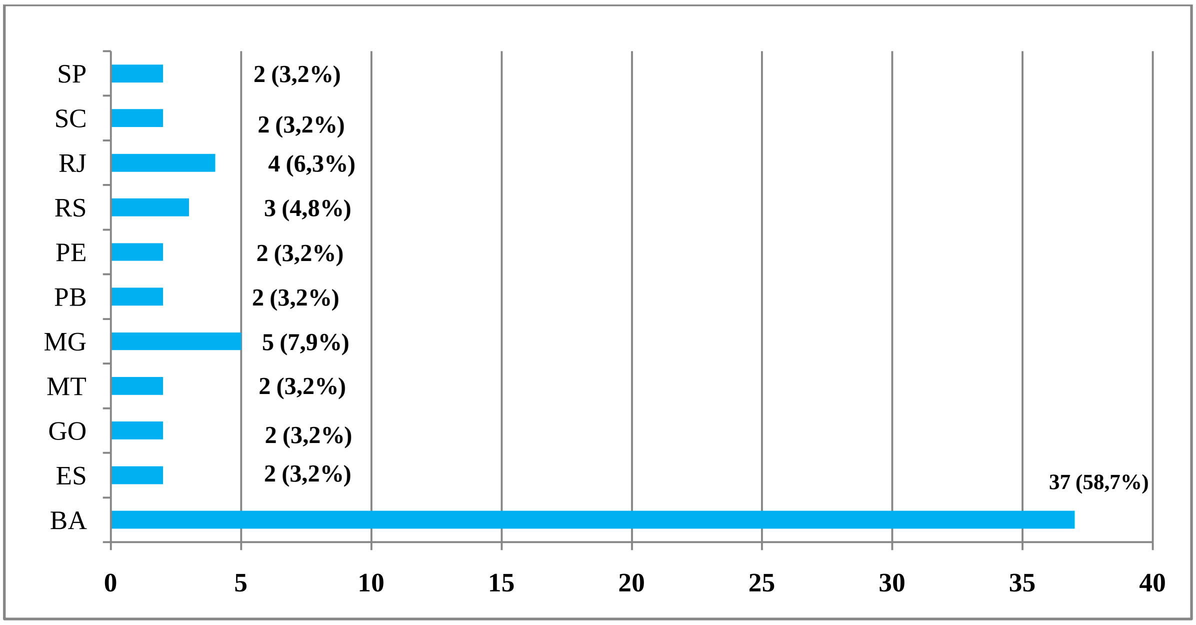
Figura 8. Tempo de docência em Matemática.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Os dados da Figura 9 demonstraram que a maioria dos entrevistados era do Estado da Bahia (58,7%). Este resultado se encontra associado ao fato do autor desta pesquisa ser deste Estado, mas há outros Estados também que se fizeram presentes.

Figura 9. Estado da Federação aonde os Professores Lecionam.



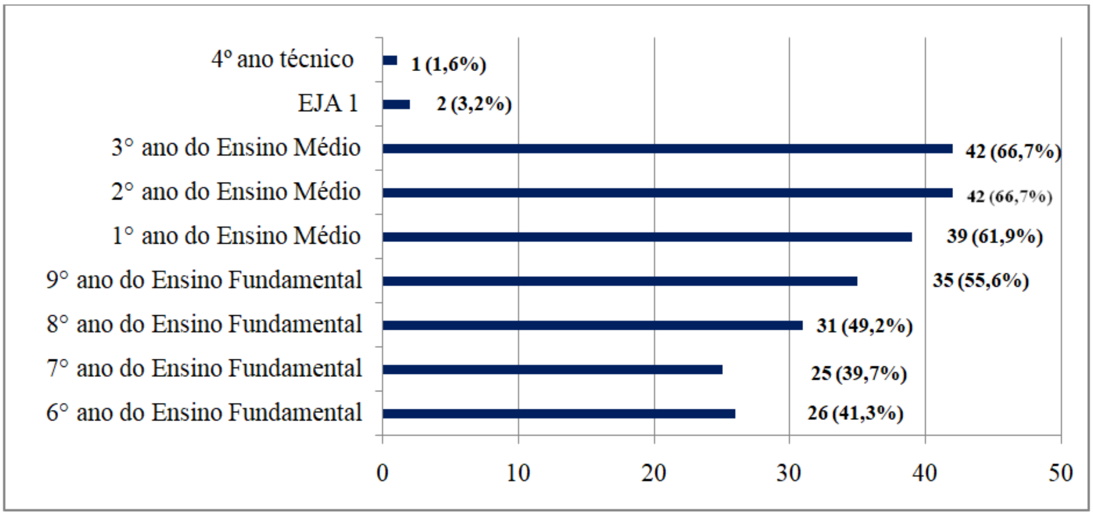
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Os dados da Figura 10 correspondem à discriminação da fase educacional relacionada à atuação dos docentes. Salientamos que nessa questão, poder-se-ia selecionar todos os anos em que leciona. Observou-se que 66,7% dos docentes ministram aulas no segundo e terceiro anos do ensino médio. E 61,9% dos docentes ensinam no primeiro ano do ensino médio.

Nota-se que estes docentes pesquisados permeiam todas as fases relacionadas ao Ensino Fundamental - II e Médio que é um dado importante para o tema do nosso trabalho: demonstrações matemáticas. Percebe-se que o quantitativo de horas do docente em sala de aula (Figura 11) e em diferentes fases relacionadas aos anos é de fundamental importância para gerar bons dados de análise para compreender os fatores que interferem no uso das demonstrações matemáticas.

Conforme Santos (2007, p.84), o valor e a eficácia de um método didático dependem principalmente da personalidade do docente e do quantitativo de horas em sala de aula. Daí a necessidade do método se ajustar, não só à natureza do educando e, aos fins da educação, como também as características individuais do educador. Sem esta adaptação do método à personalidade do mestre, o trabalho educativo não produzirá resultados positivos.

Figura 10. Em quais anos do Ensino Fundamental e Médio costuma-se lecionar.



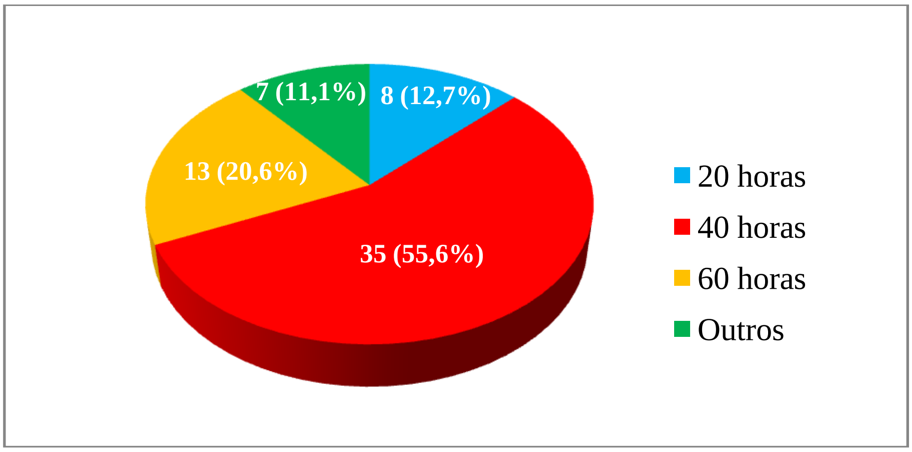
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Observação: a pergunta realizada ao docente proporcionou ao mesmo a possibilidade de assinalar mais de uma resposta.

Os resultados da Figura 11 reportam acerca da identificação do quantitativo de horas por semana dos docentes pesquisados. Observou-se que 55,6% dos entrevistados trabalham por 40 horas semanais.

A percepção que fica é a possível a existência de uma demanda significativa no setor público por profissionais de matemática, sendo que a grande maioria dos concursos tanto na esfera municipal, bem como na esfera estadual, são de 40 horas para professores de matemática. Assim, o mesmo com esta carga horária, possui maior possibilidade de se efetivar dentro do ensino público, o que agrega valor a educação da matemática no Brasil. Outra questão encontra-se relacionada com Plano de Cargos e Salários. A definição deste consiste nas atribuições, deveres e responsabilidades de cada cargo e, consequentemente, os seus respectivos níveis salariais. Ele fortalece o clima organizacional das escolas públicas, bem como a efetividade dos docentes no cenário da educação brasileira, no tocante ao ensino de matemática. Também pode estar relacionado com as características peculiares em relação a esta disciplina. Ela exige uma carga horária maior, pois o processo de ensino e aprendizado é mais complexo.

Figura 11. Carga horária Semanal.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

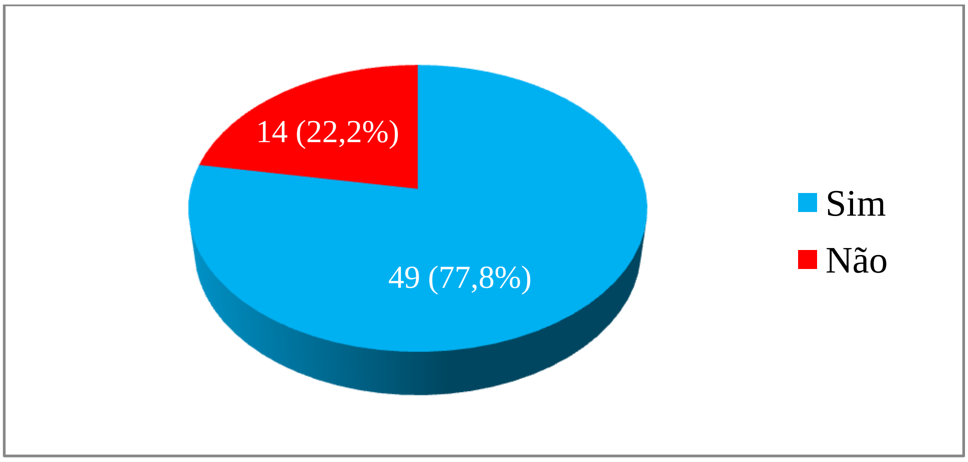
Os dados da Figura 12 correspondem à identificação, se em sua prática docente, utilizam-se demonstrações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Os resultados evidenciaram que a resposta é sim (77,8%). Observou-se que apenas 22,2% dos pesquisados não utilizam.

Segundo Pietropaolo (2005), em países como França, Portugal, Inglaterra e Alemanha, o sistema de ensino no nível comparável ao que entende-se por ensino fundamental no Brasil, já coloca em sua estrutura curricular que as demonstrações matemáticas devem ser exploradas pelos professores durante as aulas de matemática. Diferentemente disto, no Brasil, o processo de demonstrações e provas no ensino de matemática fica restrito em sua maioria aos cursos superiores de matemática – os cursos de Licenciatura e de Bacharelado.

Moreira (2006) reporta que para fazer algumas demonstrações matemáticas é importante utilizar novas metodologias com ferramentas concretas e aceitas. Para isso acontecer e servir como um novo método de aprendizagem para os alunos ou até mesmo um meio de levar o aluno a fazer novas reflexões a cerca do assunto, é necessário o professor saber utilizar bem a didática na aplicação das demonstrações matemáticas e com certeza isso só vem a contribuir no processo de ensino e aprendizagem.

Os resultados revelaram que o uso das demonstrações matemáticas é significativo: mais da metade utiliza. Existem fatores importantes a serem ressaltados entre estes docentes que usam as demonstrações matemáticas, dentre as quais a sua formação acadêmica, assim acredita-se que o mesmo tenha maior domínio e segurança para a aplicabilidade das demonstrações matemáticas. É possível que os professores de matemática estejam mudando suas práticas convencionais (tipo uma fórmula pronta) e passam a resgatar metodologias utilizadas na matemática que tem o seu reconhecido valor em países desenvolvidos, como foi anteriormente mencionado por Pietropaolo (2005), sendo assim uma ferramenta a mais a se lançar mão, no sentido do aluno entender que uma metodologia nova no processo de ensino e aprendizagem é crucial no entendimento da matemática.

Figura 12. Respostas da pergunta: Em sua prática docente, utiliza de demonstrações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem?



Fonte: Dados gerados pela própria pesquisa (2021).

No quadro 1, notou-se que a grande maioria dos docentes expressa de forma correta, o que vem a ser demonstrações matemáticas. Dentre estas se tem (I) Uso de uma verdade para provar outra e a (II) Argumentação válida para que um teorema, conjectura, corolário, dentre outros, é válido para todos os casos possíveis e não apenas para um caso específico.

Observou-se também algumas respostas equivocadas, quanto ao conceito das demonstrações matemáticas. Dentre as quais podem citar (I) Situações práticas vivenciadas no cotidiano dos estudantes e (II) Construção de esquemas, maquetes, desenhos, com o objetivo de explicar conteúdos matemáticos. A percepção que fica neste último parágrafo é que os docentes confundiram o conceito de demonstração matemática com contextualização matemática.

Conforme Lima (2013, p.18) as demonstrações matemáticas podem ser definidas como uma prova aceita pela comunidade (neste caso, matemática), fundamentada em procedimentos, métodos ou explicações apresentadas numa sequência de enunciados, organizados conforme regras determinadas. Ou seja, a demonstração não é um processo intuitivo procurando uma "*imediatice*" cognitiva.

Quadro 1. Resposta da pergunta: O que você entende sobre Demonstrações Matemáticas?

Respostas dos docentes entrevistados
São indispensáveis e necessárias para se provar afirmações e fórmulas que facilitam o desenvolvimento de uma teoria dentro da matemática.
Levar o aluno a compreender a matemática além de resoluções de exercício e fixação de fórmulas.
De forma simplista, mostrar como se chegou à determinada fórmula ou inferência a partir de conhecimentos já demonstrados anteriormente.
Estratégia para deduzir fórmulas e entender de onde elas surgiram.
Demonstrar o motivo, o caminho das provas e hipóteses de fórmulas matemáticas e afins.
Partindo de axiomas ou alguma verdade matemática, provar certo teorema ou similares.
O necessário para ensinar.
Provar de onde surgiram as fórmulas.
O processo de demonstrar como as fórmulas matemáticas foram desenvolvidas e estudos correlacionados.
Provar a existência de um teorema que possa facilitar o cálculo.
Mostrar a origem de determinados conceitos matemáticos desde o princípio até chegar nos dias de hoje.
É a prova de que certo enunciado ou axioma é verdadeiro. Usa o simbolismo matemático e diversas manipulações para se chegar ao resultado.
Prova dos teoremas e definições matemáticas.
São ferramentas para comprovar fórmulas e teoremas matemáticos.
São explicações para as fórmulas que utilizamos na matemática.
Fundamentação teórica.
Demonstrar significa mostrar o processo dedutivo lógico matemático que valida o teorema por meio de uma demonstração.
Não entendo.
Forma que de chegar a uma fórmula.
Demonstração são a comprovação de um teorema ou sentença.
Para mim, demonstração é comprovar uma fórmula, um axioma ou teorema, que em sua maioria os livros trazem pronto para o aluno e obrigando-o a decorar aquilo sem saber de onde veio como se chegou aquele resultado.
Argumentação válida para provar que um teorema, conjectura, corolário, dentre outros, é válido para todos os casos possíveis e não apenas para um caso específico.
Conjunto de argumentos matemáticos que comprovam resultados, fórmulas, teoremas...
Mostrar de onde vêm as fórmulas utilizadas.
Aplicação de propriedades aritméticas para demonstrar a validade de um teorema.
São as teorias que embasam o que utilizamos nos conteúdos matemáticos.
É muito bom ensinar demonstrações.
Construção de esquemas, maquetes, desenhos, com o objetivo de explicar conteúdos matemáticos
Não.
Mostrar ao aluno o porquê de determinadas fórmulas.
Cálculos.
Construções lógicas para chegar aos resultados desejados.
Apresentar o antes do processo, fórmula, dentre outros.
Não dar o resultado final pronto para ser memorizado (e não aprendido), mostrar ao aluno o desenvolvimento para obter o que se pretende.
Justificar por meio de argumentação matemática o porquê de determinada afirmação de resultado matemático explorado na resolução de problemas.
Justificar o desenvolvimento da fórmula ou teorema a ser estudado.
Construção do raciocínio para chegar a uma fórmula específica e provar que algo é verdade (ou mostrar o porquê algo não é verdade).
Situações práticas vivenciadas no cotidiano dos estudantes.
Um processo de modelagem matemática onde podemos concluir algo a partir de uma generalização.
Cotidiano.
Manipulações algébricas que mostram a validade de fórmulas matemáticas.
Justificativas bem estruturadas de uma afirmação.

Respostas dos docentes entrevistados (Continuação).
Às vezes necessária para melhor aprendizado.
Utilizar algumas premissas e por meio de algumas operações provar um enunciado ou fórmula.
Demonstrações dos teoremas, o porquê dos porquês.
Demonstrações matemáticas. Passo importante para o entendimento do aluno ao conteúdo matemático que se pretende ensinar.
Uso de uma verdade para provar outra.
Demonstrações dos algoritmos, proposições e teoremas, de modo formal, prático ou visual/geométrico.
Seqüência de passos para construção de um conceito.
Nesse contexto da educação básica, demonstrar baseia-se em não dar uma fórmula pronta e sim em mostrar ao aluno o desenvolvimento algébrico ou geométrico até aquele produto final que por ele será usado.
Demonstração matemática é o processo que valida um objeto matemático, elucidando a idéia que o valida.
É o ato de demonstrar o recurso capaz de atestar a autenticidade de alguma coisa.
De uma maneira geral temos uma hipótese e queremos chegar a tese (resultado), é claro que além de uma construção matemática lógica (conjectura), devemos paralelamente, desenvolver argumentos de validação.
Explicações sobre a origem de fórmulas e conceitos matemáticos.
Demonstrações são a prova da validade daquelas afirmações.

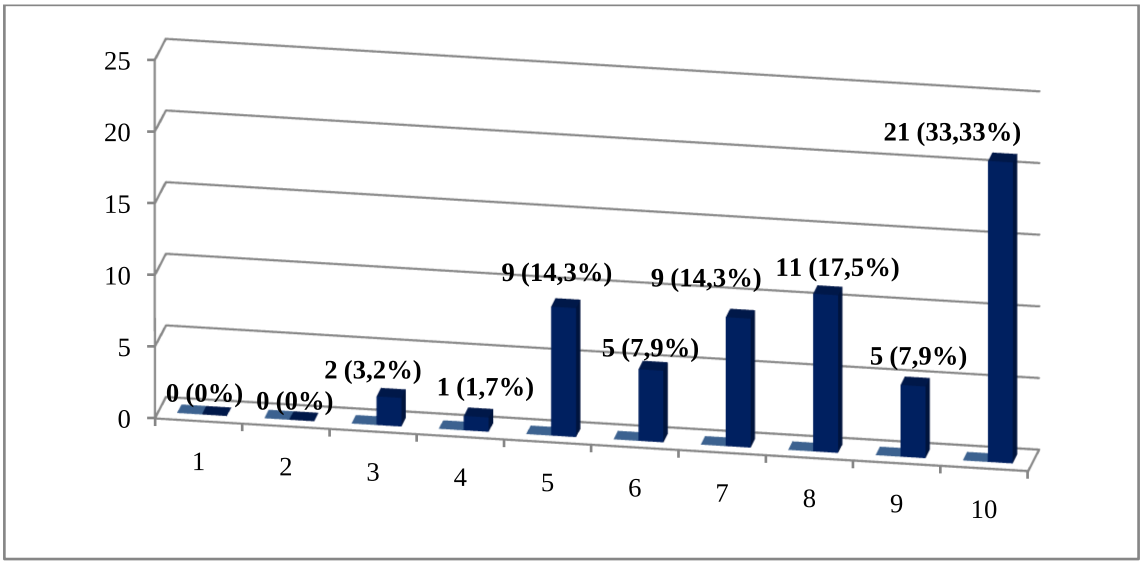
Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados organizados na Figura 13 mostram acerca da identificação da escala de importância que o pesquisado considera para se utilizar as demonstrações matemáticas como ferramenta a ser aplicada no processo de ensino e aprendizagem. Observou-se que um terço de todos pesquisados conferiu nota dez (10), ficou reportado também que os pesquisados que conferiram nota oito (8) foram 17,5% e a nota cinco (5) foi escolhida por 14,3%.

É importante destacar que o uso das demonstrações matemáticas é relevante para prática docente em sala de aula sobre o processo de ensino e aprendizagem. As demonstrações matemáticas contribuem no desenvolvimento do raciocínio que decorrer de uma apreensão da lógica matemática dos alunos, uma vez formado e trabalhado este raciocínio, o mesmo será capaz de aplicá-lo não só em matemática, mas também no estudo de outras disciplinas, além disso, o discente será capaz de apresentar ou formular concepções acerca das problemáticas sociais, políticas, entre demais relacionadas ao contexto onde o aluno se insere. Outra vantagem que destaca a relevância do contato efetivo com a prática demonstrativa é a que tange as habilidades referentes à argumentação matemática.

Conforme Lima (2013), usar a demonstração ajuda a construir o conhecimento e a evitar o uso excessivo de repetições de fórmulas e teoremas, dando um sentido concreto ao que está sendo estudado e proporcionando o uso de conhecimentos adquiridos anteriormente. O uso das demonstrações matemáticas é de extrema importância para a capacitação do professor, para que este possa trabalhar essa ferramenta com seus alunos de maneira eficaz, clara e objetiva, proporcionando assim uma aprendizagem concreta.

Figura 13. Identificação da escala de importância na utilização das demonstrações matemáticas como ferramenta pedagógica em uma escala de 0 a 10.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

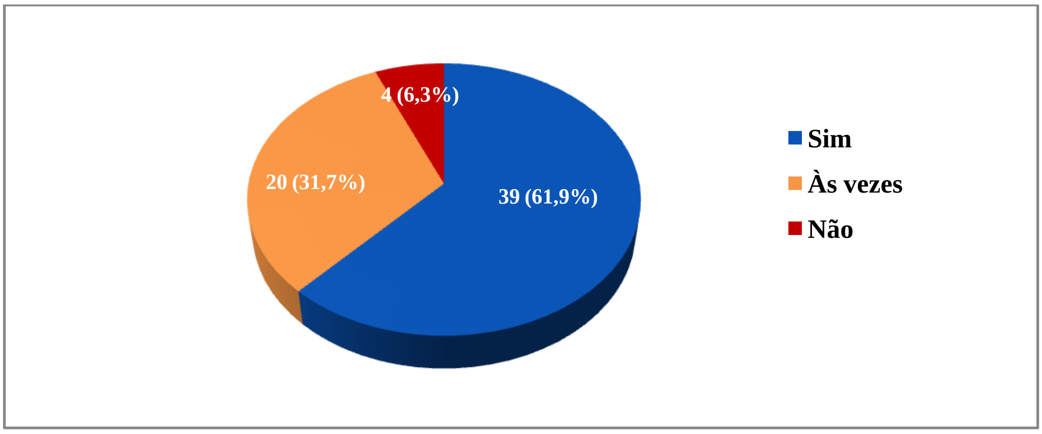
Os dados da Figura 14 reportam sobre a identificação acerca do docente se sentir preparado para a utilização das demonstrações matemáticas durante o seu cotidiano em sala de aula. Os dados mostraram que 61,9 % dos respondentes mencionaram que "sim", para 31,7% às vezes e 6,4% não se sentem preparados para utilizar as demonstrações. BRASIL (1998) reporta que, em matemática, exercer a docência com propriedades e com abordagens, bem direcionadas a compreensão do significado de demonstrações matemáticas é imprescindível.

Segundo Baldi (2009), ressalta que a preparação para executar uma nova metodologia é importante que esta alcance sucesso.

Observou-se que 61,9% dos docentes (a sua maioria) dos pesquisados se sentem preparados para a utilização das demonstrações matemáticas durante o seu cotidiano em sala de aula. A explicação desta narrativa se deu pelo fato de se perceber que o nível de escolaridade dos respondentes é de mestrado e mestrandos em matemática (ver Figura 4). Espera-se que, quanto maior for o nível de escolaridade de matemática mais preparação, os mesmos possuam para se sentirem aptos para operacionalizar as demonstrações matemáticas.

Acredita-se que os professores não se sentem aptos está relacionado aos seguintes fatores: (I) a ausência de tempo suficiente para o planejamento e execução das demonstrações matemáticas para prática docente, (II) ausência de uma formação continuada em matemática, muitas vezes devido à grande carga horária exercida pelo docente, (III) falta de motivação do docente, por conta do pouco interesse dos discentes devido à ausência de conhecimentos que são pré-requisitos de séries anteriores, que seria fundamental neste processo de ensino e aprendizagem.

Figura 14. Resposta a pergunta: Se sente preparado para utilização das Demonstrações Matemáticas em sala de aula?



Dados da pesquisa (2021).

O Quadro 2 do entrevistado traz sugestões para que o uso das demonstrações matemáticas apresente melhor eficácia no ensino de matemática. Foram evidenciadas 22 respostas pelos respondentes. Dentre as respostas, destacamos a que menciona que para alunos da educação básica deve-se adequar a linguagem, respeitando a maturidade dos mesmos sem perder de vista o rigor matemático para que facilite a compreensão do discente. As demonstrações matemáticas nos conteúdos estudados desta disciplina relacionam-se ao ato de provar uma verdade absoluta expressa seja por uma proposição, definição, corolário e/ou teorema.

Quando a principal resposta se trata de: "É que o respondente menciona que para alunos da educação básica deve-se adequar a linguagem". (No que concerne a este fato, é necessário que o docente detalhe, narrando de uma forma simples e adequada linguagem para que as demonstrações matemáticas se tornem mais próximas da realidade dos discentes), respeitando a maturidade dos mesmos sem perder de vista o rigor matemático para que facilite a compreensão destes.

Diante do que foi exposto no Quadro 2, percebe-se que três respostas foram consideradas bem sugestivas para uma melhor eficácia no uso das demonstrações. Por exemplo, verifica-se que existe uma real necessidade de uma carga horária mais adequada para que o professor planeje de forma efetiva esta metodologia. Além disso, com certeza a introdução das demonstrações matemáticas nas séries iniciais tornaria o seu ensino mais eficiente e assim diminuiria a resistência do discente em sua aprendizagem. A seguir destacamos algumas respostas obtidas do Quadro 2 que consideramos positivas e negativas.

<u>Respostas Positivas</u>

- conseguir resolver questões mesmo sem decorar as fórmulas prontas.
- ser apresentado e ensinado nas séries iniciais.
- maior tempo na carga horária da disciplina matemática.

<u>Respostas Negativas</u>

- infelizmente o nível dos alunos que se tem hoje, torna-se inúteis as demonstrações em sala de aula, uma vez que só faria sentido para o professor um ou dois alunos, logo sendo não viável o seu uso no ensino fundamental ou médio, exceto em pouquíssimos casos.
- buscar fazer as demonstrações, sempre que possível, a partir de situações concretas.

No Quadro 2 também foram evidenciadas duas respostas com problemas conceituais. Nota-se diante de algumas respostas como: "*Infelizmente o nível dos alunos que temos hoje, torna inútil as demonstrações em sala de aula, uma vez que só faria sentido para o professor um ou dois alunos, logo sendo não viável seu uso no ensino fundamental ou médio, exceto em pouquíssimos casos*", que faz com que o docente estigmatize seus discentes. Com um bom planejamento, fazendo o uso de projetos extraclasse pode-se suprir as deficiências em assuntos pré-requisitos para se fazer uso das demonstrações. Não ficando assim restrito a poucos alunos, tornando assim o ensino das demonstrações uma realidade para todos.

Diante das dificuldades já mencionadas no trabalho, como alta carga horária de aula dos docentes, dificuldades de infraestrutura e logística, dentre outras, faz com que os docentes possam subestimar o potencial dos seus discentes criando entraves para o funcionamento e dinamismo do processo de ensino e aprendizagem. É necessário que o docente tenha uma constante reflexão e atualização com cursos de formação continuada para uma melhoria de estratégias para uma boa educação matemática, isso perpassa em não estigmatizar e em não subestimar o potencial dos alunos, quando o assunto é o uso das demonstrações matemáticas.

Analisando a resposta "*Buscar fazer as demonstrações, sempre que possível, a partir de situações concretas*" observamos que o docente possui um conceito equivocado das demonstrações matemáticas.

Uma reflexão que deve ser levada em consideração é que na maioria das vezes o docente, reporta acerca da capacidade diferenciada de compreensão dos discentes, que há uma disparidade no aprender. Existe uma parcela de alunos em uma sala de aula que exibe um fácil entendimento dos assuntos de matemática, e outros que exibem média compreensão e os de baixa compreensão. Fatores estes que podem estar relacionados com pouca base de conhecimento nas séries iniciais, questões de cunho familiar, questões alimentares, baixa renda familiar, bem como ao baixo grau de escolaridade dos pais, dentre outros fatores.

A maioria dos docentes pesquisados de matemática tem a percepção de que as demonstrações matemáticas são cruciais no processo de ensino-aprendizagem, mas, apresentam um senso de cautela no momento de aplicar esta metodologia, com receio de gerar conflitos dentro da sala de aula, ineficiência e baixa resposta da aplicação das demonstrações matemáticas, problemas de baixa motivação e evasão escolar, bem como uma diferença marcante no grau de resposta da aplicabilidade das demonstrações matemáticas.

Quadro 2. Sugestões a fim de que o uso das demonstrações matemáticas apresente melhor eficácia no ensino de matemática.

Respostas dos Docentes.
Conseguir resolver questões mesmo sem decorar as fórmulas prontas.
Para critérios de comparações em novas soluções e também para justificar as soluções de problemas do cotidiano.
Hoje em dia no ensino público básico, fazer demonstração é muito complicado. Os alunos não têm interesse. Só querem decorar a fórmula, substituir as incógnitas pelos valores e achar o resultado do que falta. E isso só os melhores alunos da sala conseguem.
É interessante demonstrar sempre que for da percepção do professor de que a turma conseguirá absorver, ou seja, nem sempre é viável.
Usar demonstrações em disciplinas ditas eletivas, no ensino integral. Bem como, de algumas fórmulas mais conhecidas.
Na introdução dos conteúdos matemáticos.
Torná-las comum. Devem ser ensinadas desde os anos de base de ensino.
Infelizmente o nível dos alunos que temos hoje, torna inúteis as demonstrações em sala de aula, uma vez que só faria sentido para o professor um ou dois alunos, logo sendo não viável seu uso no ensino fundamental ou médio, exceto em pouquíssimos casos.
As demonstrações das relações métricas por exemplo. Muitos só começam a perceber o que estão fazendo quando a demonstração por semelhança de triângulo mostra as fórmulas que eles usam.
O conteúdo matemático deverá ser introduzido a partir de suas propriedades e demonstrações
Explorar o raciocínio lógico matemático que favorece outras habilidades.
Demonstração da fórmula geral da PA a partir de exemplo.
Usar as demonstrações matemáticas como processo de ensino e aprendizado, mostrando ao aluno de que maneira tudo na matemática pode ser provado.
As demonstrações devem respeitar a proficiência e os conhecimentos algébricos dos alunos. Para alunos da Educação Básica deve-se às vezes fugir do rigor matemático para não ficar enfadonho e exaustivo para o aluno, exportando sempre que possível artifícios visuais.
Ser apresentado e ensinado nas series iniciais.
Maior tempo na carga horária da disciplina matemática.
Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales, Semelhanças de triângulo, dentre outros.
No aprendizado do teorema de Pitágoras e muito importante.
Buscar fazer as demonstrações, sempre que possível, a partir de situações concretas.
A meu ver o uso de demonstrações no ensino básico é um tanto complexo, pois as salas possuem alunos de diferentes níveis de abstração. Desse modo, só vejo possibilidade do uso recorrente de demonstrações com uma turma selecionada, ou, pequenas demonstrações que não exijam tanto do grupo de alunos.
Através da demonstração matemática os resultados permitem provar que os mecanismos utilizados revelam ao direcionamento dos resultados.

Respostas dos Docentes (continuação).
A metodologia das demonstrações deve estar adequada ao público alvo de sua sala de aula. Nem sempre você pode, dependendo do público, desenvolver argumentos estruturalmente complexos e não estabelecer contradições e obstáculos epistemológicos para o aluno.
Para o ensino básico, as demonstrações são interessantes quando, por meio dela, sua utilização permite compreender e trazer aspectos chaves do próprio tópico matemático. Demonstrações mais trabalhosas e complexas acabam gerando desinteresse por parte dos estudantes.
Gosto muito da demonstração sobre potências. Os alunos demoram em entender algumas vezes os valores e o motivo de qualquer número elevado a zero ser um.

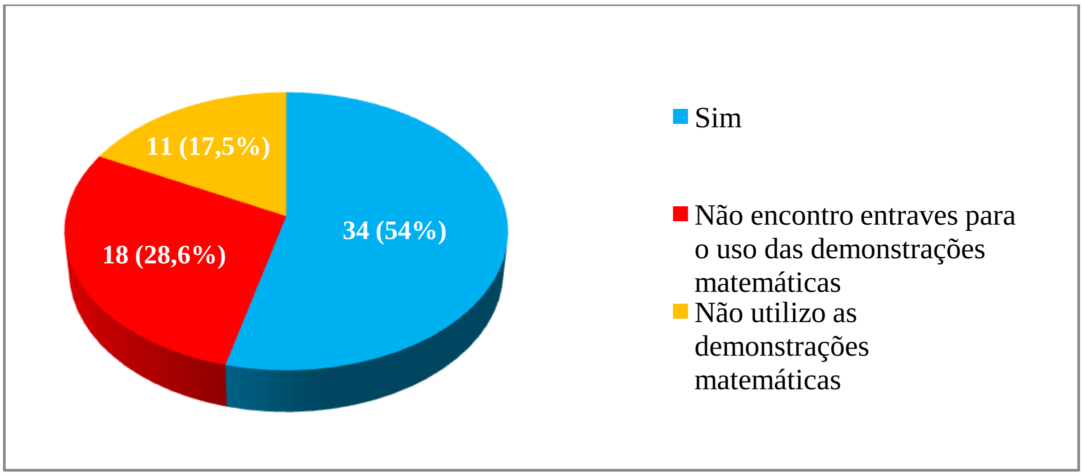
Fonte: Dados gerados pela pesquisa (2021).

Os dados da Figura 15 mostram identificação do professor, caso o mesmo utilize em sua prática docente algumas demonstrações matemáticas simples.

Também se questionou qual a percepção dos respondentes, se estes encontram algum tipo de entrave que diminua a eficiência da sua aplicabilidade. Os resultados demonstraram que 54% responderam sim, enquanto 28,6% não reportaram nenhum tipo de entraves, e 17,5% mencionaram que não utilizam demonstrações matemáticas.

Dentre os 88,2% que responderam reportam dificuldade associada ao pouco conhecimento de matemático dos alunos trazido nas séries básicas. As dificuldades, quando se trata de diferentes ferramentas pedagógicas com sua metodologia aplicada no processo de ensino e aprendizagem é muitas vezes compreensível. Outro fator mencionado por parte dos respondentes foi o fato dos alunos estarem desmotivados para o processo de ensino e aprendizagem. É neste ponto que faz falta à presença de projetos como o SOE - Serviço de Orientação Educacional com pedagogos e psicólogos no apoio ao professor e trazendo novas metodologias como dinâmicas de grupo com o intuito de melhoria da motivação do corpo discente.

Figura 15. Resposta a pergunta: Na sua percepção, encontra algum tipo de entrave que diminua a eficiência da sua aplicabilidade?



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Os dados do Quadro 3 reportam acerca da identificação das situações encontradas pelos docentes que possa exemplificar sobre os principais entraves, quando se utiliza das demonstrações matemáticas em sala de aula. Os resultados foram os mais diversificados. Dentre os mais citados (I) inexistência de conhecimentos em assuntos básicos de matemática em séries anteriores, (II) desinteresse do discente; (III) dispersão do discente em sala de aula, (IV) logística das unidades escolares, e a (V) carga horária insuficiente de matemática, dentre outros.

Quatro respostas dos docentes chamam atenção (parágrafos escritos em itálico transcritos na integra, abaixo) e ficam evidenciadas como os reportes mais observados pelos docentes e considera-se como não satisfatória. Percebe-se certa dispersão em sala de aula, além de impaciências por parte dos discentes quando o docente começa a explicar a origem de uma determinada fórmula. A seguir encontra-se a transcrição da narrativa dos discentes.

"(I) Os alunos não percebem a importância do raciocínio, do aprendizado sobre *como raciocinar para chegar nas fórmulas. Eles se questionam logo se irá ser cobrado na prova, e isso dificulta seu interesse com as demonstrações.*

(II) Em geral, os discentes não se interessam em saber o porquê que as coisas acontecem, eles simplesmente querem uma receita de bolo que resolva tudo evitando assim, um pensamento mais elaborado por parte deles.

(III) No início das demonstrações os alunos ficam impacientes, querem algo que resolva tudo e de forma instantânea. Como frases desestimulantes do tipo : no YouTube o cara faz isso bem rápido e não precisa fazer isso tudo.

(IV) Hoje os nossos alunos gostam de facilidades no que diz respeito ao conhecimento, gostam de macetes que facilitam o trabalho, diga-se de passagem, os cursinhos e as aulas online tem muita culpa no que concerne a isso. "A sociedade atual gosta do produto final, o desenvolvimento do conceito e do conhecimento só é atrativo para um pequeno grupo."

Com relação à seguinte resposta dada pelo docente: "(I) *Os alunos não percebem a importância do raciocínio, do aprendizado sobre como se originam das fórmulas. Eles se questionam logo se irá ser cobrado na prova, e isso dificulta seu interesse com as demonstrações"*. A percepção que fica é que o foco do discente encontra-se atrelado a questão relacionada à sua aprovação ou não. Talvez o receio de que as demonstrações matemáticas tornem as avaliações mais difíceis para os mesmos e estes não conseguem focar no verdadeiro conhecimento acerca da compreensão de que o aprendizado da matemática. Este conhecimento não é construído apenas em uma fórmula pronta e sim em uma construção lógica e sistemática demandando o "saber pensar matemático".

Diante da seguinte resposta do docente: *"(II) Em geral, os discentes não se interessam em saber o porquê que as coisas acontecem, eles simplesmente querem uma receita de bolo que resolva tudo evitando assim, um pensamento mais elaborado por parte deles* *(discentes)".* A questão da receita de bolo é algo muito automatizado e utilizado de forma involuntária desde as séries iniciais. Sendo que esta receita traz consequências para o discente, pois ela não ensina ao aluno a utilizar o pensamento questionador e argumentador. Quando o discente encontra algo pronto, a consequência disto é a limitação do pensamento do mesmo. Questionar e argumentar faz parte do contexto do processo de ensino-aprendizagem.

Com relação a seguinte resposta: *"(III) No início das demonstrações os alunos ficam impacientes, querem algo que resolva tudo e de forma instantânea. Como frases desestimulantes do tipo: no YouTube o cara faz isso bem rápido e não precisa fazer isso tudo".* É possível que algumas plataformas digitais como o *YouTube*, dentre outras mídias sociais contribuam para que o discente continue a utilizar a "fórmula pronta". Os meios midiáticos (incluindo o You Tube) são importantes ferramentas para o processo de ensino e aprendizagem, quando são utilizados de forma adequada e seletiva para atual geração. As informações se encontram na palma da mão a qualquer instante. Porém quando estes meios midiáticos são utilizados para encontrar macetes e fórmulas prontas com rápidos resultados sem a contextualização do assunto, o estudante passa a não saber questionar e não saber argumentar. Assim o pensamento crítico, questionador e argumentador ficam de lado. As consequências de querer que tudo seja de fácil acesso torna o ensino da matemática mecânico, deixando de lado a verdadeira essência.

Conforme Veloso (1998, apud LIMA, 2013) há duas razões para sugerir a importância das demonstrações matemáticas em sala de aula. Dentre as quais se podem citar: (I) Aprender a raciocinar (o fazer matemática da intuição) e (II) Compreender a natureza da Matemática (a introspecção sobre como funciona aquilo que foi feito).

Se o discente não questiona e não argumenta, torna-se muito difícil ter um ensino e aprendizagem com um grau de eficácia bom.

Com relação à seguinte resposta: *Hoje os nossos alunos gostam de facilidades no que diz respeito ao conhecimento, gostam de macetes que facilitam o trabalho, diga-se de passagem, os cursinhos e as aulas online tem muita culpa no que concerne a isso. "A sociedade atual gosta do produto final, o desenvolvimento do conceito e do conhecimento só é atrativo para um pequeno grupo."*

Percebe-se uma similaridade de narrativas entre o IV e o III, que parece estar caracterizando os alunos e de que forma atuam em sala aula.

Quadro 3. Identificação acerca das situações encontradas pelos docentes que possa exemplificar os principais entraves, quando se utiliza as demonstrações em sala de aula.

Respostas dos Docentes.
Um embasamento melhor por parte dos alunos, desde educação infantil. Maior tempo de aula. E uma luta constante contra o preconceito criado pela própria sociedade para o seguinte refrão "não sou de exatas", uma desculpa para criar um bloqueio mental onde o discente, simplesmente se abstém de aprender.
Em turmas com baixo desempenho, utilizar de demonstrações só para minoria da turma talvez não seja viável.
Os alunos não percebem a importância do raciocínio do aprendizado sobre como chegar nas fórmulas. Eles se questionam logo se irá ser cobrado na prova, e isso dificulta seu interesse com as demonstrações.
Falta de atenção.
Em geral, os discentes não se interessam em saber o porquê que as coisas acontecem, eles simplesmente querem uma receita de bolo que resolva tudo evitando assim, um pensamento mais elaborado por parte deles (discentes).
Os alunos não se interessam.
Exemplo1 .Na demonstração da área lateral do cone se faz necessário domínio de proporcionalidade e conceitos da geometria plana. Exemplo 2: A demonstração da área e volume da esfera não é acessível ao aluno do ensino médio sem o uso de um modelo concreto.
Falta de apoio da gestão escolar. Proponho vários projetos (escola pública). Quando o projeto foi executado com sucesso a direção escolar sempre solicita o projeto por escrito para apresentá-lo como se o projeto fosse realizado pela “escola”. Quando introduzo novos conteúdos trago situações do dia-a-dia e onde aplicá-lo.
No início das demonstrações os alunos ficam impacientes, querem algo que resolva tudo e de forma instantânea. Como frases desestimulantes do tipo : no YouTube o cara faz isso bem rápido e não precisa fazer isso tudo.
A maior dificuldade encontrada nas Demonstrações matemáticas é a falta de base matemática básica por parte dos discentes.
O grande entrave na utilização de demonstrações é falto de domínio, por um percentual considerável de alunos, em aritmética e álgebra básicas.
3 aulas/semana (A carga horária insuficiente para contemplar o ensino pleno).
Ao demonstrar em geometria analítica a condição de alinhamento de três pontos no plano cartesiano, ou estudantes apresentaram dificuldade por desconhecerem o teorema de Tales e também em compreender o fato do resultado ser o mesmo do determinante que dá o algoritmo.
Hoje os nossos alunos gostam de facilidades no que diz respeito ao conhecimento, gostam de macetes que facilitam o trabalho, diga-se de passagem, os cursinhos e as aulas online tem muita culpa no que concerne a isso. A sociedade atual gosta do produto final, o desenvolvimento do conceito e do conhecimento só é atrativo para um pequeno grupo.
Alunos que possuem dificuldades em entender a demonstração dos resultados são na sua maioria decorrentes de históricos de aprendizagens que não foram sanados em realidades anteriores e com surgimento de novos saberes eles terminam não obtendo correlações com os conteúdos propostos criando um desafio maior no campo do aprendizado.
Como exemplo a utilização de materiais didáticos para trabalhar demonstrações geométricas usando instrumentos euclidianos (físicos) ou em plataformas de geometria dinâmica.

Fonte: Dados gerados pela própria pesquisa.

Os dados contidos no Quadro 4 mencionam uma diversidade de demonstrações matemáticas utilizadas na sala de aula. Fica evidente que a maioria dos docentes pesquisados demonstraram um correto conhecimento acerca das demonstrações matemáticas. Dentre as mais respondidas, pode-se mencionar Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales, relações métricas em um triângulo retângulo, Fórmula de Bhaskara, além de progressões aritméticas e geométricas, bem como soma de ângulos internos de um triângulo no plano e outras fórmulas de geometria plana e espacial, porém sem muita diferença significativa entre as mesmas. A percepção é que a demonstração matemática é uma metodologia que demanda um bom conhecimento desta disciplina nas séries mais básicas do ensino. É uma metodologia adequada, mas demanda que o discente necessite de uma maior carga horária da disciplina durante sua vida escolar, bem como um planejamento adequado levando em conta todas as especificidades encontradas durante o seu "ensinar matemática".

A diversidade de aplicabilidade das demonstrações matemáticas por parte dos docentes mostra que o mesmo vai gradativamente inserindo e selecionando estas dentro do seu cotidiano em sala de aula o que é melhor para o aluno entender. É possível que esta diversidade do uso das demonstrações matemáticas é derivada da preocupação do docente em lançar mão gradativamente de diferentes metodologias (das que possuem maior grau de compreensão para as que têm menor grau de compreensão dos mesmos), com intuito de afastar gradativamente o aluno da mera utilização de fórmulas prontas, fazendo com que o discente tenha maior contato com o "pensar matemática", questionando e argumentando acerca daquilo que está sendo exposto pelo docente. Isto gera qualidade no processo de ensino e aprendizagem, levando os alunos a aprender de forma eficiente.

Lima (2013) define que a demonstração matemática é a prova aceita pela comunidade, fundamentada em procedimentos, métodos ou explicações apresentadas numa sequência de enunciados, organizados conforme regras determinadas. Ou seja, a demonstração não é um processo intuitivo procurando uma "*imediatice*" cognitiva.

Ainda conforme Lima (2013) demonstrar a matemática não se trata apenas de fazer relações a afirmações ou teoremas, é preciso que inclua o trabalho dedutivo do pensamento durante o processo de demonstração. Nem sempre o objetivo é atingido, pois a maioria dos alunos, principalmente na educação básica, ainda não tem o letramento matemático necessário para compreender o método axiomático geralmente usado nas demonstrações.

Como foi mencionado anteriormente um número relevante de docentes (92,7% dos respondentes) respondeu de forma correta o questionamento feito no enunciado da questão. Apenas 7,3% dos docentes apontaram para respostas equivocadas, no que concerne o significado correto das demonstrações matemáticas. Este fato pode estar associado a uma interpretação equivocada do conceito de demonstrações matemáticas, como as respostas a seguir (I) "*Frações: os estudantes vão para a cozinha da unidade escolar fazer pizzas (sexto ano*)"; (II) *"Número inteiros, montamos um banco na sala de aula, durante duas aulas, os alunos gostam, ficam com saldo positivo ou negativo (sétimo ano)" e* (III) *"A soma dos ângulos internos de um triângulo, utilizando recortes de figura citada".*

Apesar de algumas respostas não evidenciarem o conhecimento correto sobre a definição de demonstração matemática, fica evidente que em sua grande maioria os docentes compreendem o correto significado do que vem a ser demonstrações matemáticas.

Quadro 4. Resposta dos Professores acerca de quais demonstrações matemáticas utilizam em usa prática docente.

Respostas dos Docentes
A soma dos ângulos internos de um triângulo utilizando recorte da figura citada.
Dedução de fórmulas, como cálculo de área de figuras planas, fórmula de Bhaskara, entre várias outras.
Teorema de Pitágoras, Fórmula de Bhaskara e todas as fórmulas de geometria plana, bem como espaciais.
Teorema de Pitágoras e áreas de figuras.
Planas e figuras espaciais.
Fórmula da resolução da equação do segundo grau, fórmulas das progressões aritméticas, geométricas e de financiamentos, fórmulas em geometria, teorema de Tales e casos de semelhança de triângulos, dentre outros.
Teorema de Pitágoras e de Tales, fórmulas das progressões aritméticas e geométricas, equação do segundo grau e semelhança de triângulos.
Demonstrações do teorema de Pitágoras.
Quase toda geometria.
Fórmula de Bhaskara, soma de termos de progressões e matemática financeira.
Razões trigonométricas e Teorema de Pitágoras.
Fórmula de Bhaskara.
Teorema de Pitágoras, área de triangulo equilátero e fórmulas em análise combinatória.
Teorema de Pitágoras, teorema de Tales e relações métricas no triângulo retângulo e em figuras planas.
Dedução de formulas em física.
Demonstração do teorema de Pitágoras, relações métricas no triângulo retângulo, mostrar que as raízes não exatas são números irracionais, dentre outros. Demonstrações corriqueiras nas minhas aulas, geralmente são as que envolvem geometria plana no ensino fundamental.
Resolução de equação do segundo grau, propriedades logarítmicas, propriedades trigonométricas e gráficas.
Uso de demonstrações na potenciação, radiciação, redução, ampliação de figuras unidimensionais, bidimensionais, tridimensionais, volume, capacidade, superfície e outros conteúdos da série em que trabalho.
Teorema de Pitágoras, número Pi e produtos notáveis.
Fórmula de Bhaskara, teorema de Tales, teorema de Pitágoras e Fórmulas das áreas, dentre outros.
Superfície total e volume dos sólidos geométricos, exceto esfera.
Fórmula de Bhaskara, de Progressões Geométricas e Aritiméticas e algumas de Geometria.
Ângulos de triângulo; Fórmula de Bhaskara; teorema de Tales; teorema de Pitágoras; razões e relações trigonométricas; dentre outros.
Relações trigonométricas, relação entre circunferências e cordas, retas secantes e tangentes, bem como potenciação.
Frações: os estudantes vão para a cozinha da escola fazer pizzas...(6° ano).
Termo geral da progressão aritmética.
Demonstração da equação da Hipérbole, Elipse e Circunferência.
As fórmulas de Geométrica Plana e Especial são práticas e de fácies manipulação, assim como as de razões trigonométricas. Porém êxito as relações trigonométricas mais complexas, pois exige um grau de abstração maior.
Teorema Fundamental da Aritmética.
Teorema de Pitágoras, propriedades de potências, fórmulas de áreas e volumes.
Equação do 2° grau e trigonometria.
Nas razões trigonométricas de sempre, cosseno e tangente. No Teorema de Tales através dos feixes de paralelas. Casos de semelhanças de triângulo. Nas aplicações do Teorema de Pitágoras. Nas relações métricas de um triângulo retângulo.
Soma de ângulos internos do triângulo, teorema de Pitágoras, retas paralelas cortadas por transversal.

Respostas dos Docentes (Continuação)
Teorema de Pitágoras, condições de existência de triângulos e teorema de Tales.
Geometria elementar envolvendo objetos geométricos, posições relativas de retas no plano, ângulo, triângulo, quadriláteros, dentre outras.
Teorema do Resto; Teorema de D'Alembert; Teoria geral de funções: injetividade, subjetividade, definições de tópicos sobre Progressões, dentre outros.
Demonstrações sobre regularidades e propriedades aritméticas.
Teorema de Pitágoras, fórmulas de progressões aritméticas, geométricas, dentre outras.
Axiomas de Euclides, Teoremas de Pitágoras, de Tales e do fundamental da Álgebra.

Dados da pesquisa (2021).

Os dados do Quadro 5 relatam que inicialmente há certa resistência dos alunos, mas observa-se que não em sua totalidade. Poucos apresentam receptividade e interesse nas discussões lógico-indutivas, outros têm a percepção de que o conteúdo ficou mais complexo e extenso, pois para estes importam apenas o resultado final, isso é fruto de uma cultura educacional reducional. Inicialmente vem a resistência ao novo, na sequência passam a verificar a importância de se conhecer a origem dos conceitos.

Ainda no Quadro 5, os dados demonstraram que para o discente responder positivamente ao uso das demonstrações matemáticas depende de fatores como: (I) ter uma boa base em séries iniciais, como foi mencionado na resposta a seguir de um docente: "*Um pouco complexa, não compreendem muito bem, por falta de algumas estruturas que são essenciais para conseguir entender plenamente*"; (II) os discentes estão acostumados com o caminho mais fácil da fórmula pronta, onde basta substituir esta por números e o resultado final é alcançado. Ou seja, estão involuntariamente no caminho do imediatismo, sem se preocupar ou entender as minúcias destas estruturas, o que leva a perda de construção do raciocínio lógico matemático dedutivo e concomitantemente o aluno possui pouca base na matemática elementar, isto é, não aprenderam assuntos ensinados em séries anteriores, o que dificulta o processo de ensino e aprendizagem. Assim, consequetemente gera-se desinteresse e dispersão. Pode-se notar estes fatos nas seguintes respostas: *"Não teve boa aceitação, pois apresentam dificuldades no entendimento de cálculos simples e entendimento na sua aplicabilidade"; "Alguns alunos não possuem paciência, pois querem respostas imediatas e acham que não irão usar, outros demonstram interesse".* Diante dos resultados nota-se a necessidade de um planejamento prévio do docente, no que se refere a questão de nivelamento de conteúdos básicos de matemática por parte do discente, para que possa obter êxito no uso desta ferramenta de ensino.

Fica evidente que a consequência da fórmula pronta e do imediatismo, leva ao discente a não saber questionar ou argumentar acerca de como aquela fórmula foi originada.

Os resultados do Quadro 5 reportam também acerca da receptividade do discente, com relação às demonstrações matemáticas. Observou-se também respostas bem diferenciadas, fato este que se encontra associado à subjetividade da pergunta. Este resultado mostra muita similaridade e compatibilidade com o que foi mencionado nas questões anteriores. Era de se esperar que as respostas fossem direcionadas mais para o "Normal", mas fica evidente que os discentes demandam entender melhor o significado e importância desta ferramenta matemática que é imprescindível para sua aprendizagem plena e efetiva. Daí se constrói um pensamento que direciona para o fato de que é muito compreensível e importante que a utilização das demonstrações matemáticas seja usada desde o início das séries primárias.

Houve respostas acerca de que o discente questiona sobre a finalidade do uso das demonstrações matemáticas. É possível que isto ocorra devido à falta de conhecimentos de assuntos que são pré-requisitos para a operacionalidade das demonstrações matemáticas e mera preocupação do discente em ser aprovado na disciplina. Teve resposta que o discente diz "não entender" a utilidade das demonstrações matemáticas.

Lima, (2013) relata que a aprendizagem matemática depende de ações que caracterizam o "fazer matemática": experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim, demonstrar. Diferente da transmissão ordenada de definições e propriedades, onde os alunos não se engajam em ações que desafiem suas capacidades cognitivas, o aluno tem um papel ativo na construção do conhecimento.

Aqueles que possuem um bom conhecimento acerca da matemática utilizam as demonstrações matemáticas como algo que pode melhorar a metodologia de ensino nesta disciplina, mas fica evidente também que alguns docentes possuem receio de utilizar esta metodologia.

Quadro 5. Menção dos docentes acerca de como é a receptividade dos alunos, quanto à aplicabilidade das demonstrações matemáticas.

Respostas dos Docentes
Boa.
Alguns entenderam outros não.
Eles gostaram bastante por verificar na prática o conceito apresentado.
Alguns interessados em saber o porquê, e outros sem interesse.
Normal.
Regular.
As primeiras sempre se assustam, mas depois ao entender que é apenas para ter noção de como as coisas são encontradas acabam gostando por não serem obrigados a replicar.
A grande maioria tem muita dificuldade de seguir os passos da demonstração e se retém apenas em saber trabalhar com a fórmula final. Um ou outro se interessa em saber o porque.
Razoável.

Respostas dos Docentes (continuação).
Em especial em uma turma com excelentes alunos, acharam um grande diferencial do professor perante o que estavam acostumados com o ensino.
Muito baixa.
Alguns afirmaram não vê necessidade da demonstração.
Acharam desnecessário tudo o que foi apresentado.
Falta de interesse.
No início sempre tem receio, mas com o passar das aulas começam a compreender melhor o conteúdo, deixando a “decoreba “de lado.
Não se empolgam.
Quem gosta, questiona, participa. Quem não gosta nem presta muito atenção.
Alguns ficaram curiosos, no entanto, a maioria não costuma dar crédito a esse tipo situação!
Quando é geometria, a aceitação é maior.
Álgebra, mais complexa.
Alguns alunos não têm paciência, pois querem respostas imediatas e acham que não irão usar, outros demonstram interesse.
Não discuto esta aplicabilidade com eles
Um pouco complexa, não compreendem muito bem por falta de algumas estruturas que são essenciais pra conseguir entender plenamente.
Aceitam e se divertem muito, principalmente os alunos do 6° ano.
Completamente dispersos. Acham que é desnecessário o imediatismo deles atrapalha o processo
Para os mais curiosos foi um sucesso, para os mais dispersos foi uma "tortura".
A recepção depende muito de como é apresentado a demonstração. Não se deve demonstrar por demonstrar. O professor deve fazer com que o aluno perceba que a compreensão da demonstração é um importante caminho para um pleno aprendizado da matemática.
Quando são demonstrações simples eles entendem bem, mas quando as demonstrações envolvem muita álgebra ou se introduz de um conceito repentinamente (pulo do gato que resolve milagrosamente a conta), os alunos não gostam e perguntam "isto vai cair na prova?"
Não são bem aceitas.
Muito boa.
Preocupação devido a dificuldade de entender a demonstração, pois a princípio acreditavam que tais seriam cobradas deles, quando na verdade a intenção era na verdade validar as aplicações.
Ótima.
Nem todos conseguem entender.
Aceitação parcial.
Gostam muito! Provoco a curiosidade deles.
Não teve boa aceitação pois apresentam dificuldade em cálculos simples e entendimento na sua aplicabilidade.

Dados da pesquisa (2021).

De maneira geral, os resultados do quadro 6 expressaram de forma positiva e satisfatória a percepção dos docentes acerca da utilização das demonstrações matemáticas. A receptividade do professor é quase sempre satisfatória, quanto ao uso das demonstrações matemáticas, dentre as respostas mais importantes, destacam-se algumas: *“Ao apresentarmos as demonstrações matemáticas para os estudantes, o conceito será aprendido mais facilmente, o algoritmo ou argumentação utilizada para fazer as demonstrações se tornam ferramentas úteis para a solução dos problemas*.”, bem como “*Saber usar uma fórmula não é necessariamente saber matemática. Entender o porquê aquilo funciona é importante*”. Contudo, percebe-se que os professores entendem que ainda existe demanda para a superação de alguns entraves como: (I) existe a necessidade de maior letramento em matemática como é reportando a seguir, por um dos pesquisados: *“Recriar a Matemática historicamente* *construída por diversas gerações em tempo/espaço e lugar, requer bastante criatividade, fundamentalmente no ensino fundamental, via de regra, os estudantes apresentam baixa escolaridade em letramento matemático, dificuldade de leitura e interpretação”*; (II) Existe a necessidade evidente de um nivelamento dos discentes, quanto a noções básicas da matemática; (III) Necessidade de incentivar e proporcionar capacitações dos docentes, permitindo assim fazer uso de diferentes ferramentas de ensino, como é o das demonstrações; (IV) Aumento da carga horária de matemática, visando proporcionar maior interatividade entre e discente, proporcionando maior tempo para sutilezas na construção do raciocínio lógico-dedutivo e esclarecendo dúvidas, gerando assim motivação e diminuindo a dispersão dos discentes. Sendo assim, será permitido ao discente, uma maior segurança e consistência no seu aprendizado, assim haverá uma maior receptividade no uso de diferentes metodologias, como as demonstrações matemáticas.

Percebeu-se também que houve diferentes percepções para a mesma pergunta subjetiva. Os resultados mostraram que é uma boa forma de compreender a matemática. Algumas respostas mencionaram que tem uma percepção interessante, mas não é possível demonstrar todas elas. Às vezes necessitando de ferramentas matemáticas adequadas com o intuito de facilitar a aprendizagem. Praticamente inexistiu descontentamento por parte dos docentes em relação a usar ou não usar as demonstrações matemáticas. Na sua grande maioria utilizam sim e dizem ser uma metodologia com eficácia no processo de ensino e aprendizagem. Almouloud; Fusco e Silva, (2012) mencionam que as demonstrações matemáticas são indispensáveis para ampliação do conhecimento matemático, o simples ato de planejar uma prova contribui para o desenvolvimento da matemática. As demonstrações matemáticas produzem novas visões matemáticas, novas ligações contextualizadas e novos métodos para resolver problemas, dando a elas um valor muito além de comprovar a veracidade de proposições.

Quadro 6. Percepção dos docentes acerca da utilização das Demonstrações matemáticas durante a sua prática docente.

Respostas dos Docentes.
Acho interessante, mas queria um material manipulável.
Importante.
Considero importante para o entendimento de determinados assuntos.
Fundamental para dá significado ao conteúdo ensinado.
Conseguindo absorção por parte dos alunos, seria ótima.
Muito boa.
Muito boa para turmas que tenham esta receptividade.
É de extrema valia para expansão do aprendizado do pensamento matemático.
Essencial.
Importante.

Respostas dos Docentes (Continuação).
Acho interessante, mas não precisa demonstrar todas.
De grande importância para a formação da aprendizagem matemática.
Não tem muita relevância.
É necessário explicar muito bem as definições, demonstrações, a fim de que o discente as coloque em prática.
Ao apresentarmos as demonstrações matemáticas para os estudantes, o conceito será aprendido mais facilmente, o algoritmo ou argumentação utilizada para fazer as demonstrações se tornam ferramentas úteis para a solução dos problemas.
Ótimo para atrair a atenção, provocar questionamentos.
Depende da turma para dá certo.
O aprendizado é maior.
Utilizo menos hoje principalmente por conta da diminuição da carga horária de Matemática para 3 aulas semanais.
Só as utilizo em situações que eu julgo de ser de extrema facilidade na compreensão.
Acho que é importante por servir de base para vários tipos de situações.
Particularmente amo, pois consigo despertar no aluno onde aplicar tal conteúdo em seu cotidiano.
Acredito ser uma poderosa ferramenta, mas atualmente tenho optado alfabetizar os alunos em matemática. Não da para fazer demonstrações complexas sem eles nem o básico sabem.
Considero necessário, pois ajuda o aluno compreender o conteúdo como um todo.
As demonstrações devem ser utilizadas respeitando as limitações dos alunos.
Satisfatório.
Saber usar uma fórmula não é necessariamente saber matemática. Entender o porquê aquilo funciona é importante.
Muito importante para os discentes.
Eu gosto.
Ótima, os alunos utilizam para lembrar o assunto em dia de prova eventualmente.
É algo essencial para a compreensão completa dos conceitos matemáticos.
Acredito que é muito importante para quem busca a origem das coisas e não os modelos prontos.
É um mecanismo que revela a consolidação do aprendizado garantido ao educando Recriar a Matemática historicamente construída por diversas gerações em tempo/espaço e lugar, requer bastante criatividade, fundamentalmente no ensino fundamental, via de regra, os estudantes apresentam baixa escolaridade em letramento matemático, dificuldade de leitura e interpretação.
São de grande importância para o desenvolvimento do raciocínio matemático do estudante e deveria pelo menos de forma empírica, estar presente sempre que possível nos conteúdos.
Muito necessária.

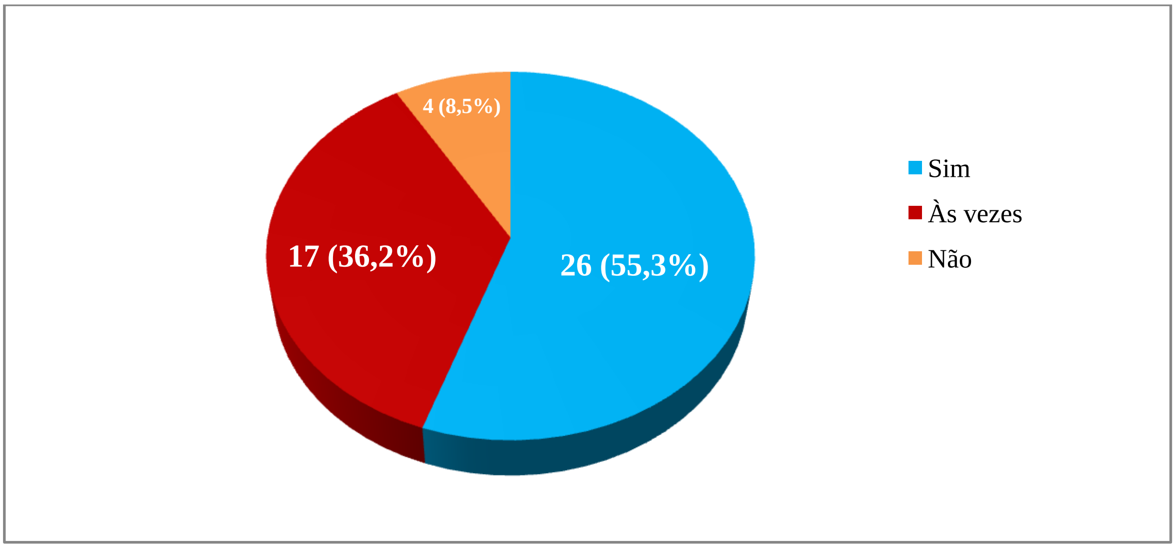
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Os dados da Figura 16 representam a identificação acerca do docente possuir facilidade em planejar suas aulas, fazendo uso das demonstrações matemáticas Observou-se que 53,3% demonstram não ter dificuldade de planejar as demonstrações matemáticas. Para 36,2% dos entrevistados, foi observado que reportaram que “Às vezes”. E para 8,5% reportaram que sim. É possível que este valor não seja maior, devido ao fato do docente não possuir tempo suficiente para o planejamento e execução das demonstrações matemáticas. Ficou evidenciado também que o processo de ensino e aprendizagem das demonstrações matemáticas não depende apenas do docente.

O docente necessita de um tempo suficiente para planejar suas aulas, de modo que as demonstrações matemáticas fiquem adequadas para uma satisfatória aprendizagem. O docente também dispõe de uma carga horária extenuante e cansativa, com salas com elevado número de alunos. Consequentemente demandando esforço e tempo para correção das atividades e avaliações, ficando desta forma uma carga horária insuficiente para um bom planejamento para o uso das demonstrações matemáticas. Também podem ser mencionados os seguintes fatores para este fato: (I) Ausência de materiais manipuláveis para auxiliar no ensino das demonstrações matemáticas; (II) Ficou evidenciado que não é possível fazer uso de todas as demonstrações matemáticas, pois algumas turmas não possuem requisitos e fundamentos básicos em matemática para tais e algumas demonstrações matemáticas estão além do conhecimento do ensino fundamental e médio e (III) muitos alunos não possuem facilidade em ler e entender os enunciados das questões das provas ou exercícios (IV) poucas aulas de matemática, o que implica em pouco tempo e muito conteúdo.

Segundo Silva e Sales (2005, p.34), para demonstrar, isto é, produzir uma demonstração necessita-se de muito domínio do assunto, certa dose de astúcia para perceber estruturas, que o olhar comum não distingue e capacidade para estabelecer relações sutis. Para compreendê-la é necessária muita abstração. Defende-se a sua formalização e rigor na dedução com base no princípio de que após ser concluída não pode deixar espaço para nenhuma dúvida, tendo em vista, que não será analisada somente por um grupo de especialistas e aceita pelos demais como sendo real.

Figura 16. Identificação acerca de o Docente possuir facilidade em planejar suas aulas, fazendo uso das demonstrações matemáticas.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Os dados contidos neste Quadro 7 reportam de que maneira o docente faz uso das demonstrações matemáticas em sua prática de ensino. As respostas mais mencionadas foram a utilização da lousa (quadro) e pincel, em aula expositiva. Também foi mencionado que utilizam o Geogebra, bem como materiais sólidos.

Como foi mencionado anteriormente o planejamento e execução das demonstrações matemáticas na prática docente, com o intuito de tornar mais eficiente o processo de ensino e aprendizagem vai depender principalmente da forma com que o docente irá conduzir esta metodologia. As respostas conferidas expõem esta preocupação do docente em diversificar as estratégias de planejamento nas demonstrações matemáticas em sala de aula.

Quadro 7. Discriminação acerca de como o docente executa as Demonstrações matemáticas em sala de aula.

Respostas dos Professores Entrevistados.
Desenho no quadro.
Algebricamente ou com algum material manipulável.
Explicação teórica.
Algumas vezes de forma tradicional com computador.
Lousa.
Quadro branco e marcadores, sites de desenhos dinâmicos.
Quase sempre no quadro mesmo, às vezes uso do geogebra e de matérias sólidos ou exemplos práticos.
Quadro, tinta e voz.
Apenas demonstrações utilizando de quadro e pincel.
A demonstração formal algébrica.
Jogos. Construções com materiais sólidos.
Através do geogebra, ou até mesmo a forma escrita.
Quadro branco.
Durante a aula, geralmente no inicio dela. Os recursos são piloto e quadro.
Geogebra.
Com o auxílio na maioria das vezes de quadro e pincel, às vezes utilizo recursos computacionais.
Nenhum, a escola não disponibiliza grandes infraestrutura para trabalhar, por exemplo, como software matemático.
Uso materiais diversos, como maquetes, fios, cubos, desenhos...
Contextualizando no máximo e usando o quadro.
Material manipulável (concreto); pesquisa; vídeos e quadro branco.
Em geometria espacial procuro explorar a partir de modelos concretos até chegar à exploração da álgebra no quadro.
Gosto de utilizar a própria escola para provar o que vemos em sala, como paredes, escadas, cestos, mesas, dentre outros.
O quadro.
Demonstração direta ou por redução ao absurdo. Os recursos são livros didáticos ou apostilas, quadro branco e pincel.
Quadro e pincel.
Giz, quadro negro e aula expositiva.
Lousa.
De maneira teórica, os recursos são os mesmos disponíveis para qualquer aula, geralmente o "quadro e giz".
Geogebra e material lúdico.
De preferência, de maneira prática a partir de situações reais. Uma escadaria pode ser utilizada para demonstrar seno, cosseno e tangente. Com material dourado, o teorema de Pitágoras, dentre outros.
Quando são demonstrações geométricas, utilizo imagens, material palpável.
Os recursos mais utilizados são: pincel atômico, lousa, caneta, borracha, papel e demais recursos próprios ou disponibilizados pela unidade escolar.

Respostas dos Professores Entrevistados (continuação).
Os instrumentos euclidianos, Software de plataforma dinâmica, recursos diversos do Laboratório de Matemática (materiais concretos), geoplano, malha quadriculada, sólidos geométricos, noções básicas de argumentação lógica a partir de hipótese.
Quadro e/ou atividades práticas.
Expositiva com auxílio do quadro e pincel.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

4. SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS DE ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES MENCIONADAS NO TRABALHO.

Nesse capítulo, apresentamos sequências didáticas de demonstrações matemáticas mencionadas na pesquisa direcionada para professores do Ensino Fundamental e Médio, com o intuito de proporcionar ao docente um material de fácil acesso e manipulação para que utilizem as demonstrações matemáticas em sua prática docente.

4.1. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS.

Público alvo: Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Objetivos: Demonstrar de diferentes maneiras a fórmula resolutiva de Bhaskara, utilizando-se de Álgebra e Geometria, proporcionando desta maneira atestar a autenticidade e a veracidade da fórmula.

Conhecimentos de Base: Produtos notáveis, equações polinomial de 1º grau, radiciação e operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Material: Atividade escrita impressa e uso da lousa.

Procedimentos preparatórios: Efetuar uma breve revisão de assuntos pré-requisitos mencionados para o ensino das demonstrações, de maneira a nivelar a sala, para que assim todos os alunos consigam acompanhar e participar do ensino da demonstração da fórmula.

Os discentes, em sua grande maioria, deparam-se com uma fórmula matemática pronta, sem conhecer os caminhos que levaram a tal modelo matemático e sem ter ideia de como se chegou a esta fórmula matemática. A partir deste momento, serão apresentadas três formas diferentes de demonstrar a fórmula resolutiva de equação do segundo grau.

1ª Forma

Considere-se uma equação do segundo grau do tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde **a**, **b** e **c** são números reais quaisquer, com **a** ≠ 0.

Assim, tem-se que:

$$ax^2 + bx = 0 - c,$$

$$ax^2 + bx = -c.$$

Dividindo os dois lados da igualdade por **a**, obtém-se:

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x = -\,\frac{c}{a}\,.$$

Agora se busca completar os quadrados perfeitos do lado esquerdo da igualdade. Dessa maneira, tem-se que somar $\frac{b^2}{4a^2}$ em ambos os lados da igualdade:

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{4\,a^2} = -\,\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4\,a^2}\,.$$

Note que do lado esquerdo da igualdade pode ser reescrito como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, pois desta maneira consegue-se um quadrado perfeito. Assim segue:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4\text{ac}}{4a^2}\,.$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros da equação, tem-se:

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\,,$$

$$\left|\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\,,$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\,\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

Adicionando $-\,\frac{b}{2a}$ a ambos os membros, obtêm-se:

$$\text{x} + \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\,\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

Logo, conclui-se que:

$$\text{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

Portando, obtemos a fórmula de Bhaskara.

2ª Forma

Apresentaremos a seguir a 2º demonstração considerando os polinômio mônicos. Seja $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Dividindo ambos os membros da equação pelo coeficiente de maior grau que é a, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Chamando $b' = \frac{b}{a}$ e $c' = \frac{c}{a}$, teremos:

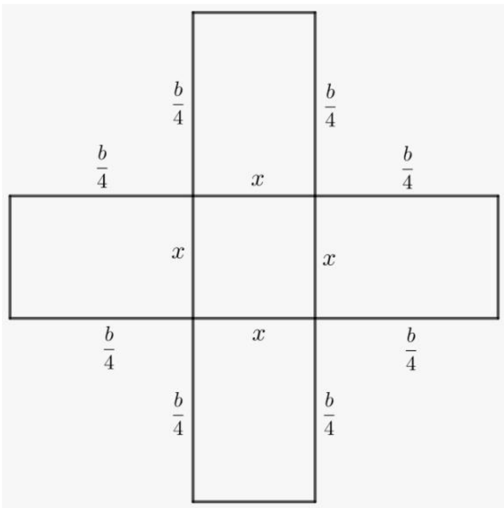
$$x^2 + b'x + c' = 0.$$

Note $x^2 + b'x + c'$ é um polinômio mônico. Faremos assim mais uma demonstração que valerá para estes polinômios.

Conforme LIMA (2013) as equações de segundo grau na Grécia eram resolvidas por meio de construções geométricas. Ainda antes de Bhaskara, no princípio do século IX D.C., o matemático árabe Al-Kowarismi, influenciado pela álgebra geométrica dos gregos, resolveu as equações do segundo grau, chegando à fórmula da seguinte maneira:

Al-Kowarismi interpretava, geometricamente, o lado esquerdo da igualdade $x^2 + bx = c$ como sendo uma cruz constituída por um quadrado de lado x e por *4* retângulos de lados $\frac{b}{4}$ e x, como mostra a Figura 17 a seguir.

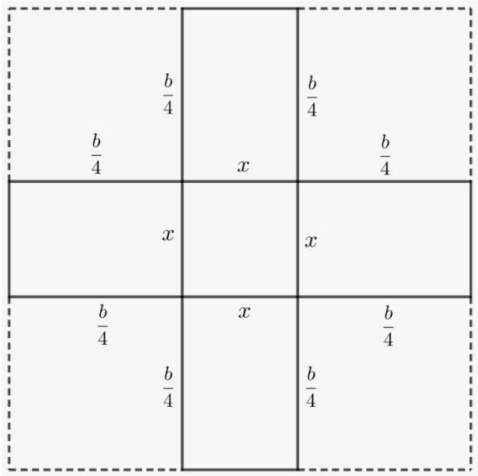
Figura 17. Exemplificação através da geometria plana para entendimento do passo a passo da demonstração.



Fonte: O autor, 2021.

Tinha-se como idéia completar essa cruz com quadrado do lado $\frac{b}{4}$, para obter um quadrado perfeito de lado x $+ \frac{b}{2}$.

Figura 18. Segunda exemplificação através da geometria plana para entendimento do passo a passo da demonstração.



Fonte: O autor, 2021.

Usando-se deste artifício geométrico (Figura 18), Al-Kowarismi observou que se adicionando quatro vezes $\frac{b^2}{16}$ $\left(\text{soma das áreas dos quatros quadrados de lado } \frac{b}{4}\right)$ ao lado esquerdo da equação $x^2 + bx = c$, obtinha-se $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$, que é a área do quadrado de lado $x + \frac{b}{2}$.

Portanto, tem-se:

$$x^2 + bx + 4\frac{b^2}{16} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \cdot$$

Assim a equação $x^2 + bx = c$ poderia ser escrita da seguinte forma:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c - \frac{b^2}{4} \cdot$$

Desenvolvendo, tem-se:

$$x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{c - \frac{b^2}{4}},$$

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{4c - b^2}{4}},$$

$$x = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2},$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4c + b^2}}{2} \cdot$$

Observa-se que neste caso trata-se de um caso particular da fórmula resolutiva de Bhaskara, quando $a = 1$.

3ª FORMA

Apresentaremos agora um método demonstrado recentemente para resolução dessas equações Quadráticas. Publicado pelo matemático Po-Shen Loh (nascido em 18 de junho de 1982), professor associado de matemática na Universidade Carnegie Mellon e atualmente treinador nacional da equipe da Olimpíada Internacional de Matemática dos Estados Unidos. Sob seu treinamento, a equipe venceu a competição em 2015, 2016, 2018, e 2019. Ele já havia ganhado uma medalha de prata pelos EUA como participante em 1999.

Vale destacar que as substituições e todas as soluções para encontrar dois números dados pela soma e produto já eram conhecidas pelos Babilônios. Essa metodologia nada mais é que uma compilação dessas técnicas antigas com a elegância e sofisticação da era renascentista.

Considere a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$\text{com } a \neq 0, \; B = \frac{b}{a} \text{ e } C = \frac{c}{a}\cdot$$

Primeiramente, buscaremos fatorar da seguinte maneira:

$$x^2 + Bx + C = (x - x_1)(x - x_2).$$

Encontraremos a solução da equação, observando que um valor de x torna o produto igual a zero, quando pelo menos um de seus fatores for zero, o que ocorre quando $x = x_1$ ou $x = x_2$. Pela propriedade distributiva, basta encontrar dois números x_1 e x_2 cuja soma é igual a $-B$ e o produto igual a C. Assim, x_1 e x_2 serão raízes que satisfaz estas condições. Portanto,

$$x^2 + Bx + C = 0,$$

$$x^2 + Bx + C = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2.$$

Note que $x_1 + x_2 = -B$ e $x_1x_2 = C$. Seja $x_1 = \frac{-B}{2} - w$ e $x_2 = \frac{-B}{2} + w$. Daí,

$$C = x_1x_2 = \left(\frac{-B}{2} - w\right)\left(\frac{-B}{2} + w\right) = \frac{B^2}{4} - w^2,$$

$$w^2 = \frac{B^2}{4} - C = \frac{B^2}{4} - \frac{4C}{4} = \frac{B^2-4C}{4},$$

$$w = \pm\sqrt{\frac{B^2-4C}{4}} == \pm\frac{\sqrt{B^2-4C}}{2}\cdot$$

Como $x_1 = \frac{-B}{2} - w$ e $x_2 = \frac{-B}{2} + w$, teremos:

$$x = \frac{-B}{2} \pm w = \frac{-B}{2} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4C}}{2}.$$

Lembrando que $B = \frac{b}{a}$ e $C = \frac{c}{a}$, segue que:

$$x = \frac{-\frac{b}{a}}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{c}{a}\right)}}{2},$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 4 \cdot \left(\frac{c}{a}\right)}}{2},$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}}}{2},$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}}{2},$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}}{2},$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Como queríamos demonstrar.

Essa demonstração está em Santos (2021 apud Loh, 2019).

Estrutura da Aula: 4 aulas (3 hora e 20 minutos).

Procedimento preparatório: 25 minutos.

Leitura individual ou em grupo: 20 minutos.

Apresentação das 3 formas de demonstrar: 110 minutos.

Registros das demonstrações no quadro e busca do consenso: 25 minutos.

Formalização: 20 minutos.

Formalização: o professor deve apresentar a definição e a simbologia no que concernem as equações do 2º grau, discutir as particularidades de cada passo das demonstrações e as especificidades de suas aplicações. Sugere-se ainda a resolução de equações quadráticas, sem o uso das fórmulas prontas.

4.2. SOMA DOS TERMOS DE UMA PA.

Público alvo: alunos do 1º ano do Ensino Médio

<u>Título</u>: Demonstração da Fórmula da soma dos termos de uma Progressão Aritmética (PA).
<u>Objetivos</u>: Demonstrar a fórmula da soma dos termos de uma PA, atestando assim a autenticidade e veracidade da fórmula.
<u>Conhecimentos de Base</u>: Operações fundamentais de adição, subtração, multiplicação, divisão e suas propriedades, assim como equações polinomiais do 1º grau, definição e termo geral de uma PA.
<u>Material</u>: Atividade escrita impressa e uso da lousa.
<u>Procedimentos preparatórios</u>: Fazer uma breve revisão dos Conhecimentos de Base citados anteriormente. Definir uma PA, fazer alguns exemplos e conjecturar junto com os alunos a termo geral da PA.

DEMONSTRAÇÃO:

Antes do professor apresentar a demonstração a seguir aos alunos, é interessante ele ter apresentado a definição de uma PA e algumas propriedades da razão.

Seja S_n é a soma dos *n* primeiros termos da PA, isto é:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n. \qquad (5.2.1)$$

Mas observe que:

$$\left.\begin{array}{r} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_1 + 2r \\ \vdots \\ a_{n-1} = a_1 + (n-2)r \\ a_n = a_1 + (n-1)r \end{array}\right\} \qquad (5.2.2)$$

E ainda podemos escrever:

$$\left.\begin{array}{r} a_{n-1} = a_n - r \\ a_{n-2} = a_n - 2r \\ \vdots \\ a_3 = a_n - (n-3)r \\ a_2 = a_n - (n-2)r \\ a_1 = a_n - (n-1)r \end{array}\right\} \qquad (5.2.3)$$

Assim, substituindo (5.2.2) em (5.2.1), temos:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \ldots + (a_1 + (n-2)r) + (a_1 + (n-1)r). \qquad (5.2.4)$$

E Também, substituindo (5.2.3) em (5.2.1), obtemos:

$$S_n = (a_n - (n-1)r) + (a_n - (n-2)r) + \ldots + (a_n - 2r) + (a_n - r) + a_n.$$

Reordenando os termos, ficamos com:

$$S_n = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + \ldots + (a_n - (n-2)r) + (a_n - (n-1)r). \qquad (5.2.5)$$

Agora, somando (5.2.4) e (5.2.5), termo a termo, verificamos que todos os termos envolvendo a variável *r* se anulam. Assim, tem-se:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$$

Note que no segundo membro da equação, tem-se *n* vezes $(a_1 + a_n)$.

Fazendo a simplificação, vem:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n\,,$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

<u>Estrutura da Aula</u>: 1 aula (50 minutos).

Procedimento preparatório: 6 minutos.

Leitura individual ou em grupo: 4 minutos.

Apresentação a demonstração da fórmula da soma da PA: 30 minutos.

Registros das demonstrações no quadro e busca do consenso: 6 minutos.

Formalização: 4 minutos.

<u>Formalização:</u> o professor deve apresentar a definição e a simbologia referente à Progressão Aritmética (PA), discutir as especificidades de seu cálculo e suas aplicações.

4.3. SOMA DOS TERMOS DE UMA PG.

Público alvo: alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Título: Demonstração da Fórmula da soma dos termos de uma Progressão Geométrica (PG).
Objetivos: Demonstrar a fórmula da soma dos termos de uma PG, atestando assim a autenticidade e veracidade da fórmula.
Conhecimentos de Base: Operações fundamentais de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação e suas propriedades, assim como equações do 1º grau, definição e termo geral de uma PG e suas propriedades.
Material: Atividade escrita impressa e uso da lousa.
Procedimentos preparatórios: Fazer uma breve revisão dos Conhecimentos de Base citados anteriormente. Definir uma PG, fazer alguns exemplos e conjecturar junto com os alunos o termo geral da PG.

DEMONSTRAÇÃO:

Antes de o professor apresentar a demonstração a seguir aos alunos, é interessante ele ter apresentado a definição de uma PG e algumas propriedades da razão.

S_n é a soma dos *n* primeiros termos da PG, isto é:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n. \qquad (5.3.1)$$

Mas observe que:

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_1 \cdot q^3 \\ a_5 &= a_1 \cdot q^4 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.2)$$

Assim, substituindo (5.3.2) em (5.3.1), temos:

$$S_n = a_1 + (a_1 \cdot q) + (a_1 \cdot q^2) + (a_1 \cdot q^3) + (a_1 \cdot q^4) + \ldots + (a_1 \cdot q^{n-1}). \qquad (5.3.3)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (5.3.3) pela razão q, obtemos:

$$q \cdot S_n = q \cdot a_1 + q \cdot (a_1 \cdot q) + q \cdot (a_1 \cdot q^2) + q \cdot (a_1 \cdot q^3) + q \cdot (a_1 \cdot q^4) + \ldots + q \cdot (a_1 \cdot q^{n-1}).$$

Ou seja,

$$q \cdot S_n = (a_1 \cdot q) + (a_1 \cdot q^2) + (a_1 \cdot q^3) + (a_1 \cdot q^4) + (a_1 \cdot q^5) + \ldots + (a_1 \cdot q^n). \quad (5.3.4)$$

Agora, subtraindo a equação $(5.3.4)$ da equação $(5.3.3)$, respectivamente, termo a termo, teremos:

$$q \cdot S_n - S_n = -a_1 + a_1 \cdot q^n.$$

Colocando os termos S_n e a_1 em evidência, segue:

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot (-1 + q^n).$$

Isolando o termo S_n e organizando os termos, teremos:

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot (-1 + q^n),$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{(q - 1)}.$$

Estrutura da Aula: 1 aula (50 minutos).
Procedimento preparatório: 9 minutos.
Leitura individual ou em grupo: 4 minutos.
Apresentação a demonstração da fórmula da soma da PG: 24 minutos.
Registros das demonstrações no quadro e busca do consenso: 8 minutos.
Formalização: 5 minutos.

Formalização: o professor deve apresentar a definição e a simbologia referente à Progressão Geométrica (PG), discutir as especificidades de seu cálculo e suas aplicações.

4.4. TEOREMA DE TALES

Público alvo: alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Objetivos: Demonstrar o Teorema de Tales, utilizando-se de Álgebra e Geometria, proporcionando desta maneira atestar a autenticidade e a veracidade da fórmula.
Conhecimentos de Base: Razão, proporção, equações em 1º grau, operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão e noções básicas de geometria plana.

Material: Atividade escrita impressa e uso da lousa.

Procedimentos preparatórios: Efetuar uma breve revisão de assuntos pré-requisitos mencionados para o ensino das demonstrações, de maneira a nivelar a sala, nestes assuntos para que assim todos os alunos consigam acompanhar e participar do ensino da demonstração da fórmula.

DEMONSTRAÇÃO

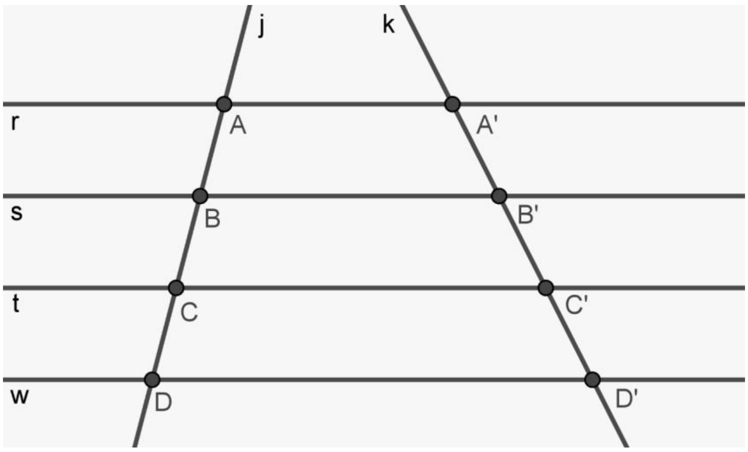
Se em um feixe de retas paralelas duas retas são transversais, logo a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos respectivos correspondentes a outra.

Para melhor organização vamos colocar a hipótese e tese, bem como fazer ilustração com figuras.

$$\left.\begin{array}{c}\overline{AB}\ e\ \overline{CD}\ são\ dois\ segmentos\ de\ uma\ transversal, e\ \overline{A'B'}\ e\ \overline{C'D'},\\ são\ os\ segmentos\ respectivos\ correspondentes\ da\ outra.\end{array}\right\} \quad \text{Hipótese}$$

$$\left.\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}\right\} \quad \text{Tese}$$

Figura 19. Feixe de retas paralelas e transversais.



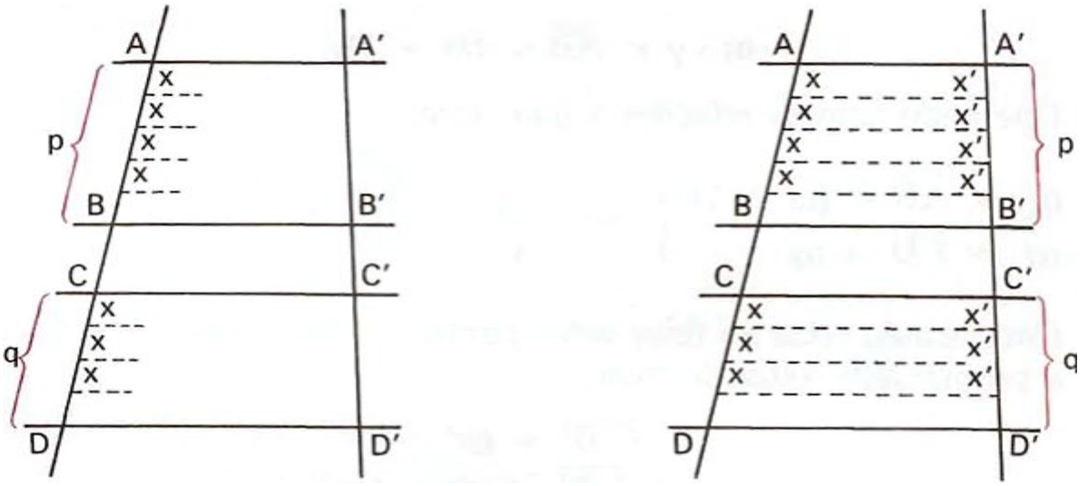
Fonte: O autor, 2021.

1ª FORMA

Dividiremos em dois casos para melhor organização.

1º caso: $\overline{AB}\ e\ \overline{CD}$ são comensuráveis.

Figura 20. Exemplificação através da geometria plana para entendimento do passo a passo da demonstração.



Fonte: Figura adaptada de DOLCE, Oswaldo e POMPEO, Jose Nicolau (2005).

Nesse caso existe um segmento x que é submúltiplo dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ conforme a figura acima. Assim, podemos escrever:

$$\begin{cases} \overline{AB} = px \\ \overline{CD} = qx \end{cases}.$$

Dividindo a medida dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, teremos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{px}{qx} = \frac{p}{q}\,. \qquad (5.4.1)$$

Analogamente, dividindo a medida dos segmentos correspondentes a $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ no feixe conforme figura, vem:

$$\begin{cases} \overline{A'B'} = px' \\ \overline{C'D'} = qx' \end{cases},$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{px'}{qx'} = \frac{p}{q}\,. \qquad (5.4.2)$$

Comparando (5.4.1) e (5.4.2), concluímos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}\,.$$

2º caso: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são incomensuráveis.

OBSERVAÇÃO:

Quanto ao este 2º caso de incomensuráveis, note que envolve noções de limites, entre outros conceitos que estão além do entendimento para os alunos do nosso público alvo.

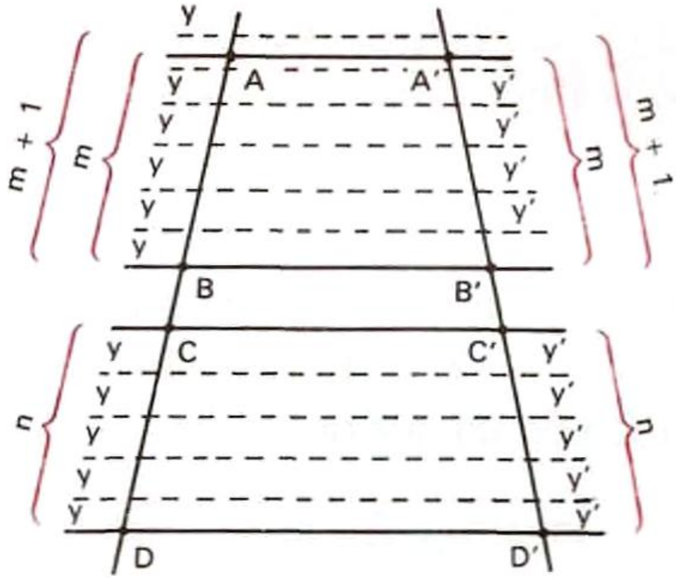
Contudo sugere-se conscientizar o aluno da existência do 2º caso para contemplar todas as possibilidades.

Neste caso não há múltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Assim, tomaremos um segmento y submúltiplo de $\overline{CD}$ (y cabe um certo número inteiro n vezes em $\overline{CD}$) conforme ilustrado na figura abaixo, ou seja:

$$\overline{CD} = n \cdot y.$$

Figura 21. Segunda exemplificação através da geometria plana para entendimento do passo a passo da demonstração.



Fonte: Figura adaptada de DOLCE, Oswaldo e POMPEO, Jose Nicolau (2005).

Como $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são incomensuráveis, marcando sucessivamente y em $\overline{AB}$, teremos que para um certo número inteiro m de vezes ocorre que:

$$m \cdot y < \overline{AB} < (m+1)y. \tag{5.4.3}$$

Temos ainda que:

$$ny = \overline{CD}. \tag{5.4.4}$$

Dividindo (5.4.3) por (5.4.4), vem:

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{(m+1)}{n} \; . \tag{5.4.5}$$

De maneira análoga, conduzindo as retas do feixe pelos pontos de divisão $\overline{AB}\ e\ \overline{CD}$, isto é, pelos segmentos correspondentes e aplicando a divisão, teremos:

$$\begin{cases} m \cdot y' < \overline{A'B'} < (m+1)y' \\ \quad ny' = \overline{C'D'} = ny' \end{cases} ,$$

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{(m+1)}{n} \; . \tag{5.4.6}$$

Note que *y é um submúltiplo de* $\overline{C'D'}$ que pode variar; dividindo *y*, aumentando n e nestas condições $\frac{m}{n}$ e $\frac{(m+1)}{n}$ forma um par de classes contínuas que definem um único número real, que é $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ pela expressão (5.4.5), e é $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ pela expressão (5.4.6). Como esse número é único, logo:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} \, .$$

Portando vale também a igualdade:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} \, .$$

Que permite concluir que a razão entre os segmentos correspondentes é constante.

2ª FORMA

Demonstração do Teorema de Tales por áreas.

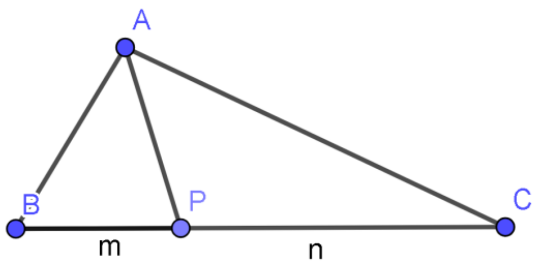
O teorema de Tales é usado para fundamentar, razões de segmentos, etc. Ele inicia o tratamento do que chamamos de Geometria Métrica. Iniciaremos relembrando algumas importantes propriedades que serão usadas no curso desta demonstração:

Propriedade 1:

Dado um triângulo de vértices A, B e C, seja P um ponto qualquer pertencente ao segmento $\overline{BC}$ tal que *med* $(\overline{BP})$ = *m* e a *med* $(\overline{PC})$ = *n*. Chamaremos de A_1 a área do triângulo ABP e A_2 a área do triângulo ACP. A ceviana $\overline{AP}$ divide o triângulo ABC tal que:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{m}{n} \, .$$

Figura 22. Relação de áreas no triângulo propriedade 1.

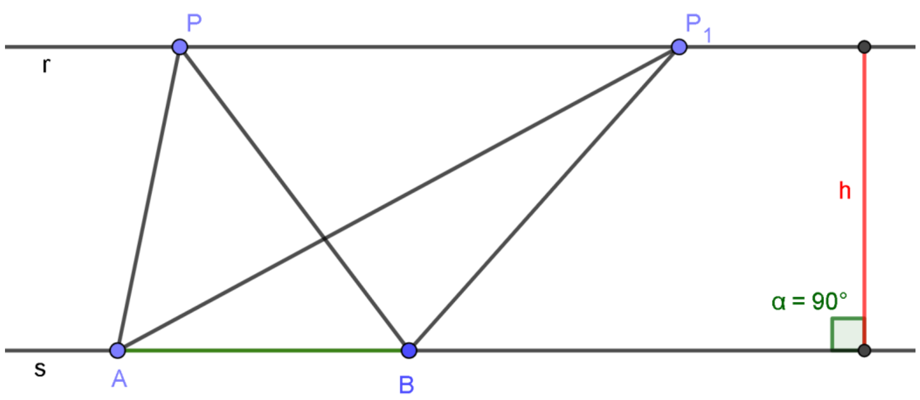


Fonte: Autor, 2021.

Propriedade 2:

Dadas duas retas r e s paralelas e um segmento $\overline{AB}$ fixo contido na reta s e seja P um ponto móvel sobre a outra reta r. Se construirmos triângulos distintos com base em $\overline{AB}$ e terceiro vértice P. Deslocando-se o ponto P em r, estes triângulos terão a mesma área.

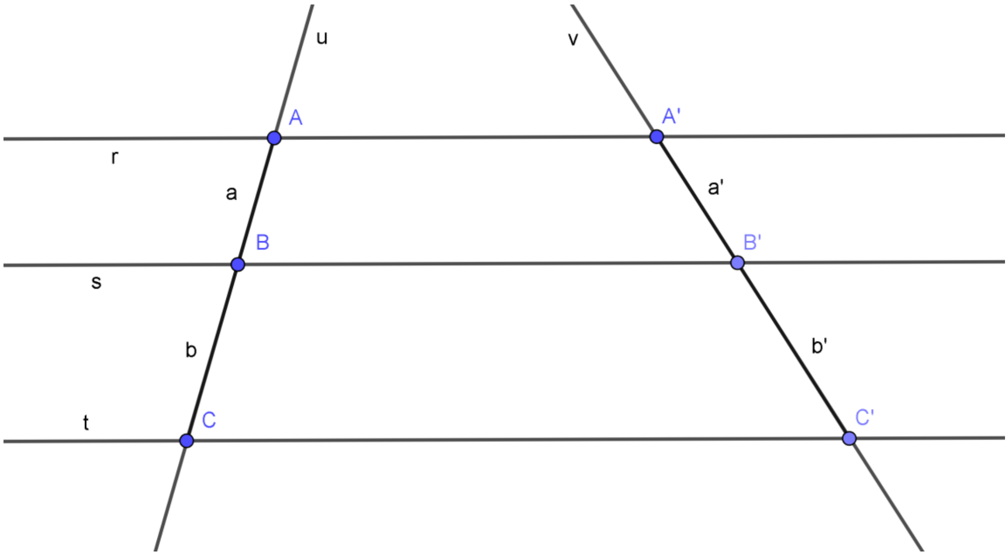
Figura 23. Relações entre áreas propriedade 2.



Fonte: Autor, 2021.

Demonstraremos o Teorema de Tales, isto é, dado um feixe de retas paralelas cortados por duas ou mais transversais, as paralelas determinam sobre as transversais segmentos proporcionais.

Figura 24. Teorema de Tales



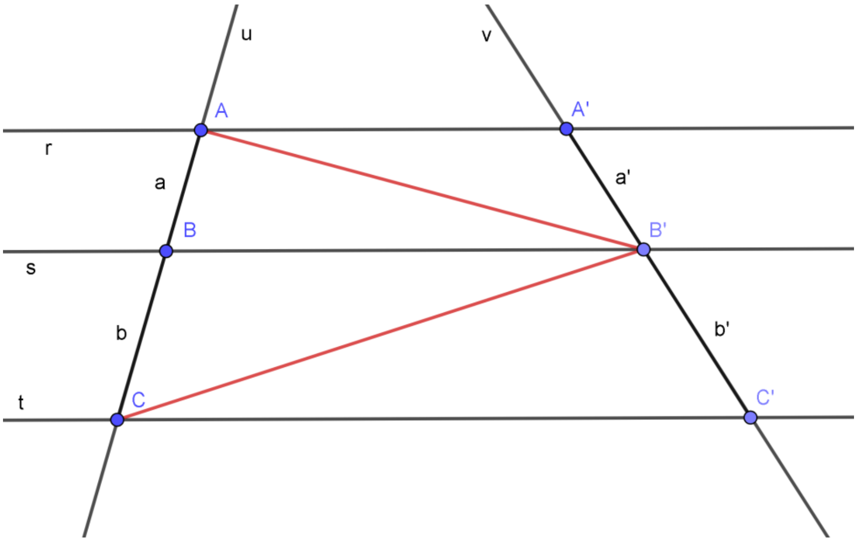
Fonte: Autor, 2021.

Queremos provar que:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Inicialmente ligaremos o ponto A ao ponto B'e o ponto C ao ponto B'.

Figura 25. Teorema de Tales, construções para demonstração.



Fonte: Autor, 2021.

Note que construimos assim o triângulo AB'C em que $\overline{BB'}$ é uma ceviana. Usando a propriedade 1, temos:

$$\frac{[AB'B]}{[BB'C]} = \frac{a}{b}.$$

Agora tomando $\overline{BB'}$ que está contida em s, como base fixa de um triângulo e como r ∥ s, pela propriedade 2, se movimentarmos o terceiro vértice deste triângulo na reta r, os triângulos formados possuirão a mesma área, por exemplo, de A para A', os triângulos ABB' e A'BB' possuirão a mesma área, isto é:

$$[ABB'] = [A'BB'].$$

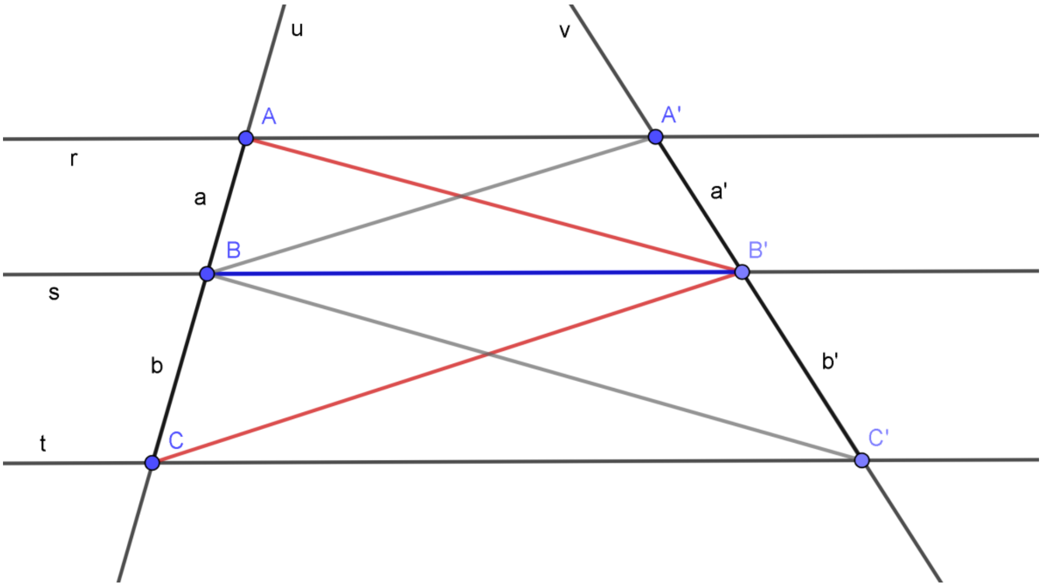
Analogamente, tomando como $\overline{BB'}$ contido em s como base fixa de um triângulo sendo s ∥ t, pela propriedade 2, os triângulos CBB' e C'BB' possuirão a mesma área, ou seja:

$$[CBB'] = [C'BB'].$$

Agora, observando o triângulo A'BC' em que $\overline{BB'}$ é uma ceviana. Pela propriedade 1, temos:

$$\frac{[A'BB']}{[B'CC']} = \frac{a'}{b'}.$$

Figura 26. Teorema de Tales. Construções para demonstração 2.



Fonte: Autor, 2021.

Como $[ABB'] = [A'BB']$ e [CBB’] = [C’BB’], então:

$$\frac{[A'BB']}{[B'CC']} = \frac{a}{b} = \frac{[AB'B]}{[BB'C]} = \frac{a'}{b'}.$$

Ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \; .$$

Estrutura da Aula: 3 aulas (2 horas e 30 minutos).
Procedimento preparatório: 20 minutos.
Leitura individual ou em grupo: 15 minutos.
Apresentação da demonstração: 80 minutos.
Registros das demonstrações no quadro e busca do consenso: 20 minutos.
Formalização: 15 minutos.
Formalização: o professor deve apresentar a definição e a simbologia no que concernem ao Teorema de Tales, discutir as particularidades de cada passo das demonstrações e as especificidades de suas aplicações. Sugere-se ainda a resolução de questões para melhor entendimento do que foi exposto.

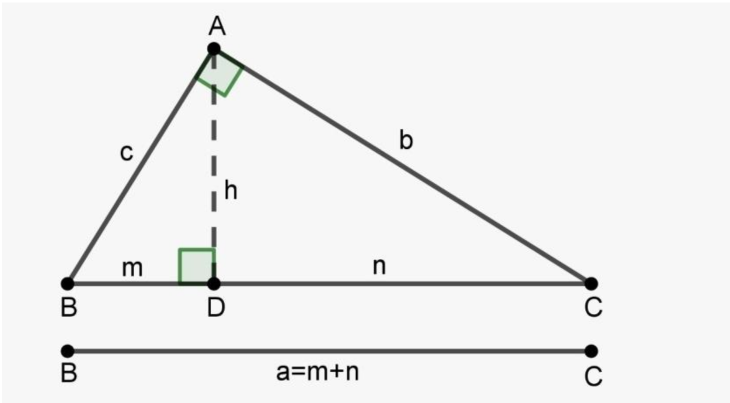
4.5. RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Público alvo: alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.
Objetivos: Demonstrar as relações métricas no triângulo retângulo, utilizando-se de Álgebra e Geometria, proporcionando desta maneira atestar a autenticidade e a veracidade da fórmula.
Conhecimentos de Base: Razão, proporção, equações em 1º grau, operações básicas de adição, subtração, multiplicação, divisão, noções básicas de geometria plana e semelhança de triângulos.
Material: Atividade escrita impressa e uso da lousa.
Procedimentos preparatórios: Efetuar uma breve revisão de assuntos pré-requisitos mencionados para o ensino das demonstrações, de maneira a nivelar a sala, nestes assuntos para que assim todos os alunos consigam acompanhar e participar do ensino da demonstração da fórmula.

DEMONSTRAÇÃO

Considere um triângulo ABC, retângulo em A, sendo $\overline{AD}$ um segmento perpendicular ao segmento $\overline{BC}$ em D, vamos organizar os seguintes elementos observando a figura:

Figura 27. Terceira exemplificação através da geometria plana para entendimento do passo a passo da demonstração.



Fonte: O autor, 2021.

$\overline{BC} = a$: hipotenusa.

$\overline{AB} = c$: cateto.

$\overline{AC} = b$: cateto.

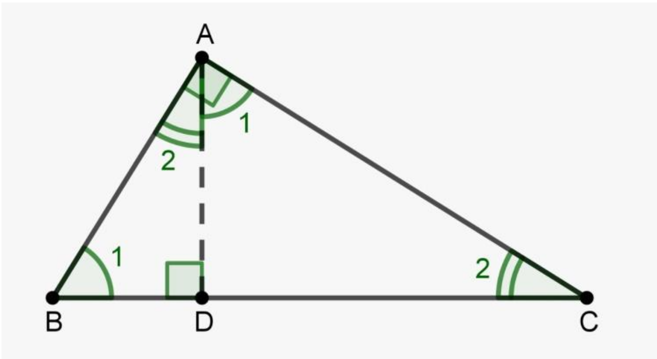
$\overline{AD} = h$: altura relativa *a* hipotenusa.

$\overline{CD} = n$: projeção do cateto *b* sobre a hipotenusa.

$\overline{BD} = m$: projeção do cateto *c* sobre a hipotenusa.

Note que a altura $\overline{AD}$ relativa a hipotenusa do triângulo retângulo ABC, divide a mesma em dois outros triângulos retângulos BAD e CAD semelhantes ao triângulo ABC pelo caso de semelhança AA (Ângulo, Ângulo). Observando as figuras ficará mais fácil a compreensão:

Figura 28. Quarta exemplificação através da geometria plana para entendimento do passo a passo da demonstração.

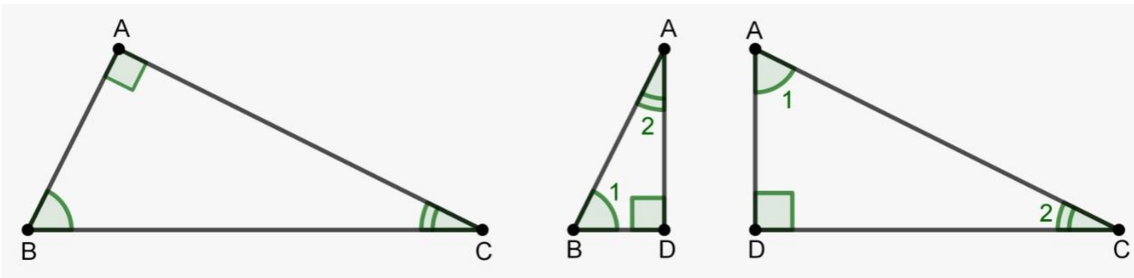


Fonte: O autor, 2021.

Observe que *<ABD = <CAD = 1* e *<BAD = <ACD = 2,* pois estes ângulos são complementares. Logo, de fato os triângulos *DBA* e *DAC* são semelhantes, isto é, $\Delta DBA \sim \Delta DAC$.

Desmembrando a figura para melhor entendimento, temos:

Figura 29. Quinta exemplificação através da geometria plana para entendimento do passo a passo da demonstração.



Fonte: O próprio autor.

Assim, teremos $\Delta ABC \sim \Delta DBA$ e $\Delta ABC \sim \Delta ACD$.

Logo, concluímos:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta ACD.$$

Com base nessas semelhanças, estabeleceremos as relações métricas.

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow bc = ah \\ \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am \\ \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Rightarrow ch = bm \end{cases},$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow bc = ah \end{cases},$$

$$\Delta DBA \sim \Delta DAC \Rightarrow \begin{cases} \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn \\ \frac{c}{b} = \frac{h}{n} \Rightarrow bh = cn \end{cases}.$$

Assim, organizando as relações encontradas, temos:

I) $b^2 = an.$

II) $c^2 = am.$

III) $h^2 = mn.$

IV) $bc = ah.$

V) $bh = cn.$

VI) $ch = bm.$

Estrutura da Aula: 2 aulas (1 hora e 40 minutos).

Procedimento preparatório: 15 minutos.

Leitura individual ou em grupo: 5 minutos.

Apresentação da demonstração: 50 minutos.

Registros das demonstrações no quadro e busca do consenso: 15 minutos.

Formalização: 15 minutos.

Formalização: o professor deve apresentar a definição e a simbologia no que concernem as relações métricas no triângulo retângulo, discutir as particularidades de cada passo das demonstrações e as especificidades de suas aplicações. Sugere-se ainda a resolução de exercícios de aplicação para melhor entendimento do que foi exposto.

4.6. TEOREMA DE PITÁGORAS.

Público alvo: alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Objetivos: Demonstrar o Teorema de Pitágoras de distintas formas, utilizando-se da Álgebra e Geometria, com o objetivo de atestar a autenticidade e a veracidade da fórmula.

Conhecimentos de Base: Razão, proporção, equações em 1º grau, sistemas de equações do 1º grau, operações básicas de adição, subtração, multiplicação, divisão, noções básicas de geometria plana e semelhança de triângulos.

Material: Atividade escrita impressa e uso da lousa.

Procedimentos preparatórios: Efetuar uma breve revisão de assuntos pré-requisitos mencionados para o ensino das demonstrações, de maneira a nivelar a sala, nestes assuntos para que assim todos os alunos consigam acompanhar e participar do ensino da demonstração da fórmula.

DEMONSTRAÇÕES

1ª FORMA

Conhecidas as relações métricas, como foi demonstrado na seção anterior, poderemos demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Para isso montaremos um sistema com as equações I) e II) da seção 4.5. Assim:

$$\begin{cases} b^2 = an \\ c^2 = am \end{cases}.$$

Somando-se membro a membro as equações, temos:

$$b^2 + c^2 = an + am.$$

Colocando *a* em evidência, teremos:

$$b^2 + c^2 = a(n + m).$$

Ora, $n + m = a$. Logo, segue:

$$b^2 + c^2 = a \cdot a\ ,$$

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Assim, concluímos que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa como queríamos demonstrar.

2ª FORMA

Prova por experimentação.

Recorta-se uma folha de cartolina com as seguintes formas:

- 4 triângulos retângulos congruentes quaisquer; (*a*)
- 1 quadrado com lado congruente a um dos catetos; (*b*)
- 1 quadrado com lado congruente ao outro cateto; (*c*)
- 1 quadrado com lado congruente a hipotenusa; (*d*)
- 2 quadrados cujo lado tem medida igual à soma das medidas dos catetos. (*e*)

Faremos agora a sobreposição dos triângulos para assim verificar que são congruentes.

EXPERIMENTO

Passo 1.

Utilizando a sobreposição cubra, sem deixar espaços vazios, um dos quadrados (*e*) com os quadrados (*b*) e (*c*) e os triângulos (*a*) também sem deixar espaços vazios.

Passo 2.

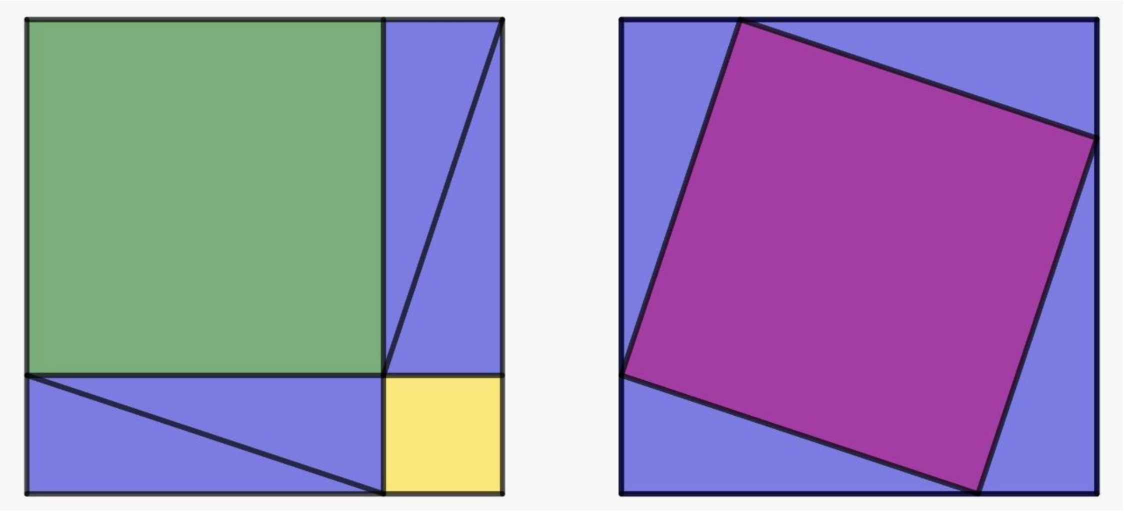
Fazendo uso também da sobreposição cubra o quadrado (*e*) com o quadrado (*d*) e os triângulos (*a*), sem que haja sobra.

Passo 3.

Fazendo uma análise das figuras, podemos chegar a seguinte conclusão:

(área do quadrado *b*) + (área do quadrado *c*) = (área do quadrado *d*), ou seja, a soma dos quadrados dos catetos é igual à área da hipotenusa.

Figura 30. Prova geométrica do Teorema de Pitágoras.



Próprio autor.

Essa prova acaba despertando no aluno o interesse e a curiosidade, pois envolve materiais concretos e o desafia a montar o quebra-cabeça.

3ª FORMA: Demonstração do Presidente.

James Abram Garfield, (19 de novembro de 1831 – 19 de setembro de 1881), Presidente dos Estados Unidos por apenas 4 meses, em virtude de seu assassinato. Foi advogado, professor e também gostava de matemática. Ele demonstrou o Teorema de Pitágoras utilizando o conceito de áreas.

Observando a figura 32, temos um trapézio decomposto em três triângulos retângulos de lados a, b e c. Note que a área do trapézio com bases a e b, cuja altura $a+b$ é igual à média aritmética das bases vezes a altura. Assim:

$$\frac{a+b}{2} \cdot (a+b) = \frac{(a+b)^2}{2} \cdot$$

Por outro lado, essa mesma área pode ser calculada como a soma das áreas dos três triângulos retângulos, daí:

$$\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2} \cdot$$

Desta forma, podemos então escrever:

$$\frac{(a+b)^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2} \cdot$$

Multiplicando ambos os membros por 2, temos:

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2.$$

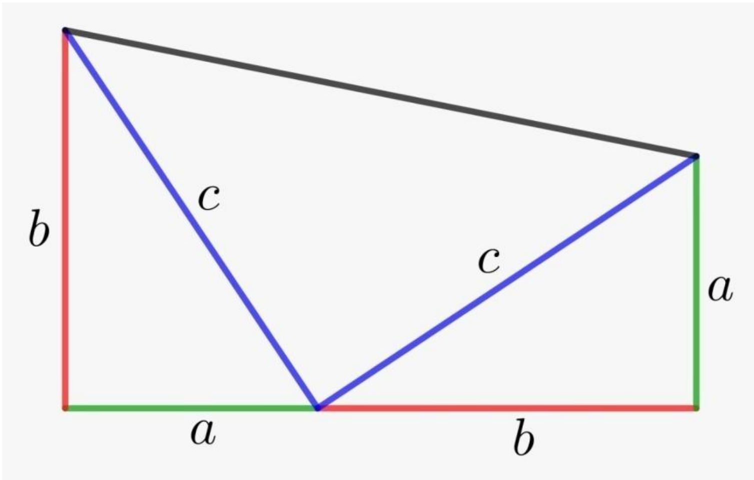
Desenvolvendo, temos:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2.$$

Logo, temos:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Figura 31. Demonstração do Presidente.



Próprio autor.

<u>Estrutura da Aula</u>: 3 aulas (2 horas e 30 minutos).

Procedimento preparatório: 20 minutos.

Leitura individual ou em grupo: 15 minutos.

Apresentação da demonstração: 80 minutos.

Registros das demonstrações no quadro e busca do consenso: 20 minutos.

Formalização: 15 minutos.

<u>Formalização:</u> o professor deve apresentar a definição e a simbologia no que concernem ao Teorema de Pitágoras, discutir as particularidades de cada passo das demonstrações e as especificidades de suas aplicações. Sugere-se ainda a resolução de exercícios de aplicação para melhor entendimento do que foi exposto.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Durante a construção desta dissertação o autor deste trabalho contextualizou a temática e gerou o seguinte questionamento: "*Será que é possível* à existê*ncia de uma resposta eficiente e positiva por parte do docente, quando o mesmo utiliza de estratégias envolvendo as demonstrações matemáticas dentro do processo de ensino e aprendizagem?"*

Ficou constatado que o processo de ensino e aprendizagem é um tanto complexo. Não depende por si só de um excelente docente, em termos de nível de escolaridade, faixa etária jovem, com experiência e uma boa qualificação para o ensino de matemática. Existem outras inúmeras variáveis apontadas neste trabalho que permitiu entender que para uma resposta eficiente e positiva no uso das demonstrações matemáticas, depende muito de inúmeras correções de estratégias e de planejamento, pensando principalmente na realidade do discente, além de condições que vão desde a carga horária da disciplina até a infra-estrutura e logística das unidades escolares, bem como de uma participação efetiva dos familiares dos discentes no ambiente escolar, fiscalizando e contribuindo para o bom desenvolvimento escolar do mesmo.

Observou-se, através deste questionário, que muitos discentes apresentam talvez de forma involuntária: desmotivação, dispersão, desinteresse, necessidade de obtenção de respostas imediatas, exigem dos docentes respostas e fórmulas prontas, sem exigir esforço por parte do mesmo, ausência de sensibilidade do grau de importância da Ciência Matemática, sendo resistente à aceitação de mudanças, bem como de uma boa receptividade de novas metodologias. Outra questão que não pode deixar de ser levada em consideração é que estes são poucos questionadores e pouco argumentadores. É possível que as informações imediatas e rápidas geradas pelos meios midiáticos, ao invés de contribuir positivamente, parece que atua de forma totalmente negativa, dentro do contexto.

Existe uma demanda clara que estes discentes precisam saber aprender o "pensar matemático", contudo grande parte dessas limitações mencionadas neste contexto podem ser resolvidas através de nivelamentos de discentes quanto ao conhecimento elementar da matemática, execução de estratégias para proporcionar maior motivação e interesse pela disciplina, bem como um aumento na carga horária das aulas de matemática e melhoria na infraestrutura, além de maior participação e interação da família do discente no cotidiano escolar, proporcionado um ambiente escolar adequado para o processo de ensino e aprendizagem.

No geral esta pesquisa científica gerou dados importantes acerca do questionamento do problema de pesquisa, como os dados mencionados abaixo.

Quando se perguntou ao docente qual era o grau de importância das demonstrações matemáticas para os mesmos, observou-se que a somatória das notas, apontadas pelos respondentes com notas 7 (14,3%), 8 (17,5%), 9 (7,9%) e 10 (33,33%) chega-se ao valor de 73%. Desta forma ficou evidenciado que os mesmos reconhecem a importância da utilização das demonstrações matemática, como ferramenta imprescindível para o "ensinar matemática".

Foi observado também que 27% dos pesquisados disponibilizaram notas 6 (7,9%), 5 (14,3%), 4 (1,6%) e 3 (3,2%). Não foram citados 0, 1 e 2. É possível que este fato esteja relacionado com diferentes demandas por melhoria na aplicabilidade das demonstrações matemáticas, dentre as quais: (I) precisa uma maior carga horária em matemática em sala de aula e em diferentes fases relacionadas aos anos escolares; (II) observou que os discentes, possuem pouca base em matemática em séries anteriores, fato este que precisa ser resolvido incentivando e sugerindo aos docentes que façam uso das demonstrações matemáticas na grade curricular desde as séries iniciais e a (III) constatou-se uma evidente desmotivação e dispersão dos discentes, quanto ao processo de ensino e aprendizagem. Resultado este que demanda de estratégias eficientes para reduzir estas duas características, como a participação efetiva da família na escola (Maior Reciprocidade), coordenadores pedagógicos, professores, bem como a instalação do SOE - Serviço Orientação Educacional e (IV) precisa efetuar uma melhoria das condições físicas e de logística em sala de aula.

Outra questão percebida foi que: quando se questionou acerca do entendimento do pesquisado sobre demonstrações matemáticas, através de perguntas subjetivas, observou-se que aproximadamente 51 % de um total de 57 perguntas, oriundas do questionário aplicado, explicitaram respostas muito coesas e demonstraram um real conhecimento acerca das demonstrações matemáticas. Já 49% dos respondentes geraram uma resposta correta, porém muito superficial em relação aos demais. Por estas respostas, não é possível afirmar que estes 51% conhecem mais as demonstrações matemáticas do que os demais. Para maiores informações esta questão se trata da primeira subjetiva do Questionário enviado, a de número 11. O questionário eletrônico disponibilizou para este respondente um numero significativo de linhas, e não as limitou.

Além do contexto acima que relata sobre a resposta do que gera o problema de pesquisa, a seguir encontra-se a resposta individualizada de cada objetivo específico.

- O primeiro objetivo específico se propôs a efetuar a verificação acerca dos docentes utilizarem das demonstrações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem. É possível afirmar, diante dos resultados obtidos gerados pelos questionários, que 77,8% dos entrevistados utilizam das demonstrações matemáticas. Percebeu-se que havia uma similaridade de características intrínsecas dos docentes acerca dos mesmos utilizarem as demonstrações matemáticas.
- O segundo objetivo específico teve como intuito identificar os principais fatores contribuintes que os docentes se deparam, quando utilizam as demonstrações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem. Observou que 54 % dos docentes encontraram entraves. Dentre os quais se pode citar: (I) demanda-se de uma maior carga horária em matemática em sala de aula e em diferentes fases relacionadas aos anos escolares; (II) observou que a maioria dos discentes, possuem pouca base em matemática em séries anteriores, (III) e constatou-se do discente uma talvez involuntária desmotivação e dispersão, quanto ao processo de ensino e aprendizagem, (IV) a questão de incentivar uma maior participação familiar com reuniões, acompanhamento no dia a dia das atividades escolares é algo crucial; (V) proporcionar maior tempo, para que o professor possa melhor se planejar para as aulas; (VI) proporcionar nivelamento de conteúdos de matemática para o discente, (VII) além de gerar melhorias na logística e infraestrutura da unidade escolar.
- O terceiro objetivo específico foi conhecer a importância dada pelos docentes, com relação à utilização das demonstrações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem. Ao efetuar a somatória das notas 7 (14,3%), 8 (17,5%), 9 (7,9%) e 10 (33,33%) ficou evidenciado que o valor chegou a 73%. Desta forma ficou claro que os docentes reconhecem a importância da utilização das demonstrações matemática, como ferramenta imprescindível para o “ensinar matemática”.
- O quarto e último objetivo específico foi: apontar o nível de segurança do docente acerca da utilização das demonstrações matemáticas no processo de Ensino e Aprendizagem. Os dados mostraram que 61,9 % dos respondentes mencionaram que “sim”.

Apesar de alguns professores reconhecerem a eficiência e a positividade das demonstrações matemáticas (12,5% dos pesquisados), porém revelaramm certo ceticismo em sua utilização na prática docente, devido às dificuldades impostas em seu cotidiano de ensino, dentre as quais, pode-se citar: (I) alunos que só querem decorar as fórmulas prontas; (II) na maioria das vezes as salas possuem alunos com uma diversidade significativa de níveis aprendizado, bem como (III) discentes com uma base ruim em séries iniciais. Já para 87,5% dos docentes consideram que esta ferramenta é aplicável na prática docente.

- O quinto objetivo específico foi efetuar planos de ensino que contenham algumas das demonstrações matemáticas mais mencionadas no questionário de pesquisa, com o intuito de proporcionar ao professor um material de fácil utilização e acesso para desta maneira facilitar e incentivar o docente no uso das demonstrações matemáticas em sua prática docente. A resposta deste objerivo específico foi desenvolvida na construção de sequências didáticas de algumas demonstrações mencionadas no questionário para os docentes, demonstrações estas com o passo a passo para que o docente seja incentivado a aplicar de forma prática estas demonstrações e motivá-los e fazer uso desta tão importante ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem.

Quanto às hipóteses apresentadas verificou-se que:

- É possível que a demonstração matemática apresente uma resposta satisfatória para a melhoria do ensino nesta disciplina. Quanto a esta hipótese é possível ser aceita, porém sugere-se um maior aprofundamento de diferentes literaturas acerca do assunto, tanto no Brasil, quanto em países, onde as demonstrações matemáticas são utilizadas desde as séries iniciais e de que maneira estes países conseguiram sobrepor as barreiras que geraram entraves para o uso das demonstrações matemática.

- O uso demonstração matemática pode encontrar dificuldades na sua aplicação devido à falta de conhecimentos elementares em matemática dos discentes em séries iniciais. Esta hipótese foi "aceita**".** Verificou-se que os professores reportaram: (I) falta de conhecimento básico na matemática foi a mais verificada, bem como o (II) desinteresse do discente e dispersão do discente em sala de aula.

- A pesquisa também mostrou que em certas ocasiões, os discentes não se sintam motivados e interessados devido a diferentes fatores contribuintes que atrapalham o uso de novas metodologias de ensino na Matemática, o que dificulta a aplicabilidade da demonstração matemática. Hipótese "aceita". Ficou constado que o processo de ensino e aprendizagem é um tanto complexo.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A., FUSCO, C.A. da S., SILVA, M. J. F. da. **Provar e demonstrar: um espinho nos processos de ensino e aprendizagem da matemática**, Paraná: RPEM, 2012.

ALMOULOUD, S. A; SILVA, M. J. F da. **Provar e demonstrar: um espinho nos processos de Ensino e aprendizagem da matemática**. RPEM, Campo Mourão, v.1, n.1, jul-dez. 2012.

ANDRADE, C. B.; SANTOS, J. C. B. dos; MOURA, V. C da S. **Comparação entre os métodos de ensino aprendizagem, com e sem a utilização de materiais manipuláveis.** Revista Científica Doctum: Educação. DOCTUM. Caratinga. v. 1, n. 2, Dez 2017.

ANDRADE, E. C. de. **Análise de uma proposta aplicada em sala de aula sobre geometria com foco na demonstração**. 2011. 150 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

ANDRADE, M.M. de. **Introdução à Metodologia do Trabalho Científico.** 10. ed. São Paulo: Atlas, 2010. 158 p.

BALDI, E. ***Leitura nas séries iniciais: Uma proposta para formação de leitores de literatura.*** Porto Alegre: Ed. Projeto, 2009.

BARBOSA, D.E.F; BARBOZA, P.L. **Os primeiros anos de docência do professor de matemática.** 2020. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2020.e73218. Acesso em 17 de junho de 2021.

BARRETO, R.G. **Tecnologia e educação: trabalho e formação docente**. Rev. Educação & Sociedade, Campinas, v. 25, n. 89, p. 1181-1201, dez. 2004.

BARRETO, V. **Paulo Freire para educadores**. Edição Especial. São Paulo: Editora Arte e Ciência, 2004; 187 p.

BICUDO, M. A.V. **Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Quantitativa segundo a abordagem fenomenológica**. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (Org.). Pesquisa Qualitativa em educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004, v. 1, p. 99-112.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura do**. BNCC - Base Nacional Comum Curricular.** 2018. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 13 de abril de 2021.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Congresso Nacional do. **Lei n° 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Diário Oficial da República Federativa do Brasil.** Brasília, DF, v.12, n.5. p.14.

BRASIL. **Constituição (1988). Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília, DF: Senado Federal do. ARTIGO 227. Centro Gráfico, 1988. BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Resolução n.2, de 07 de abril de 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura do, Secretaria de Educação Média e Tecnologia. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília: **MEC/**SEM, 1999.

DOLCE, Oswaldo e POMPEO, Jose Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana. Volume 9. 8º ed. São Paulo: Editora Atual, 2005.

DIAS, E.; PINTO, F.C.F**.; Educação e Sociedade.** Editorial • Ensaio: aval. pol. públ. educ. 27 (104) • Jul-Sep 2019. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ensaio/a/MGwkqfpsmJsgjDcWdqhZFks/?lang=pt>.Acesso em: 12 de junho de 2021.

ECCO, I.; NOGARO, U.; **A educação em Paulo Freire como processo de humanização**. Erechim: 2014.
Disponível em: https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/18184_7792.pdf. Acesso em 18 de junho de 2021.

FARIAS, J. E. S.; **Demonstrações no ensino fundamental e médio.** Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Matemática - Habilitação em 2 Licenciatura, do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, da Universidade Federal de Santa Catarina. 2002. Florianópolis. Este trabalho se encontra disponibilizado, por meio eletrônico. Disponível em: https://repositiorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/97063/Juliano%20Espezim%20Soares%20Faria0.PDF?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em 2 de julho de 2021.

FERREIRA, Roberto Martins. **Sociologia da Educação.** São Paulo: Moderna, 1996.

FERREIRA,S.M.S.P.; KROEFF, M.; **Referências bibliográficas de documentos eletrônicos.** São Paulo: APB, 1996. 2º v. (Ensaios APB, n. 35-36).

IDOETA, P.A.; **Mulheres é maioria nas universidades brasileiras, mas têm mais dificuldades em encontrar emprego**. BBC Português. Setembro de 2019. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-49639664. Acesso em 24 de junho de 2021.

IMPA - INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. **Mulheres debatem presença na Matemática e nas Ciências**. Disponível em: https://impa.br/noticias/mulheres-debatem-presenca-na-matematica-e-nas-ciencias/ 2018. Acesso em 12 de abril de 2021.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS. **Mulheres são a maioria no Ensino Superior Brasileiro**. Ano de 2018. Disponível em: portal. Inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/mulheres-sao-maioria-na-educacao-superior-brasileira/21206. Acesso em 24 de junho de 2021.

LAROS, J.A.; MARCIANO, J.L.P.; ANDRADE, J.M.; **Fatores que afetam o desempenho da prova de matemática do SEAB. Um estudo multinível. v.9; n.2; Porto Alegre.** 2010. Disponível em: http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1677-04712010000200004. Acesso em 1 de julho de 2021.

LIBÂNEO, José Carlos. **Professores, alunos e relações entre aspectos da vida contemporânea e o trabalho pedagógico: pesquisas sobre a produção da desigualdade na escolarização. Organização e Gestão da escola**. São Paulo: Coretez, 2003.

LIMA, L.M.M.; Construções Algorítmicas e Demonstrações Axonômicas. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza: Imprensa Universitária da UECE, 2013, 58 p.

LIMA, L.M.M., **Construções alogarítimicas e demonstrações axinômicas.** Dissertação de Mestrado apresentado no Mestrado Profissional em Mestrado (PROFMAT) da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestrado em Matemática. Fortaleza: 2013, UCE, 58 p.

LINDAURIANE R.V.P.; SANTOS, M. I. A. dos; SOUSA L. A. de. **A importância do uso de demonstrações matemáticas nos anos finais do ensino fundamental**. 2002. Disponível no seguinte link: http://prpi.ifce.edu.br/nl/_lib/file/doc520-Trabalho/O-uso-de-demonstra%E7%F5es-matem%E1ticas-no-anos-finais-do-Ensino-Fundamental.pdf. Acesso em 21 de março de 2021.

MANZO, A. J. **Manual para La preparación de monografias: una guía para presentar informes y tesis**. Buenos Aires: Humanitas, 1971.

MARCONI, M.A.; LAKATOS, E.M. **Técnicas de Pesquisa**. São Paulo: Atlas, 1999.

MELLO, G. N. de; **Políticas públicas de educação**. Revista Estudos Dirigidos. 1991. São Paulo: 5 (13). Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/ea/v5n13/v5n13a02.pdf. Acesso em 14 de março de 2021.

MELO, D.V.; **Qualidade da Educação e o IDEB. O olhar da equipe gestora no Município de Olinda-PE**; V- EPEPE-Encontro de pesquisa educacional no Estado de Pernambuco, 2014. Este trabalho se encontra disponibilizado no seguinte link: https://www.fundaj.gov.br/images/stories/epepe/V_EPEPE/EIXO_8/DanilaVieiradeMelo-CO08.pdf. Acesso em 14 de março de 2021.

MOREIRA, M. A.; **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

PALERMO, G.A.; SILVA, D.B. de N.; NOVELLINO, M.S.F.; **Fatores associados ao desempenho escolar: uma análise da proficiência em matemática dos alunos do quinto ano do Ensino Fundamental da Rede Municipal do Rio de Janeiro**, 2014. Rev. bras. estud. popul. 31 (2) • Dez 2014 . Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbepop/a/NLjZXbZcRrRHBknTf9C9VSz/?lang=PT. Acesso em 18 de maio de 2021.

PIETROPAOLO, R. C.; (Re) **Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores da educação básica**. Tese de Doutorado. PUC – São Paulo, 2005.

P.S. Loh. **A Simple Proof of the Quadratic Formula**. Arxiv Preprint ArXiv: 1910.06709, 2019.

REDLING, P.J.; **A metodologia de resolução de problemas, concepções e práticas pedagógicas de professores no ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado. UNESP - Bauru. Imprensa Universitária. 2011, 166 p.

REVISTA EDUCAÇÃO. **O que motiva o professores de matemática a seguir estudando.** 2018. Disponível em: https://revistaeducacao.com.br/2018/06/22/o-que-motiva-professores-matematica-seguir-estudando/. Acesso em 24 de junho de 2021.

SANTOS, J.B.; **A matemática: dificuldade no processo de ensino e aprendizagem no ensino médio no Colégio Dr, Jessé Fontes**. Ano 2007. Disponível em: https://monografias.brasilescola.uol.com.br/matematica/a-matematica-dificuldades-no-processo-ensino-aprendizagem.html. Acesso em 23 de abril de 2021.

SANTOS, M.S. **Estudo de Resultados Clássicos sobre Zeros de Polinômios**. 2021. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" Unesp - FCT, Presidente Prudente, 2021. No prelo.

SILVA, M.M. das S.; SALES, A.; **O professor do ensino fundamental e a demonstração matemática**. 2005. Disponível em: file:///C:/Users/Jucivalda/Downloads/3633-Texto%20do%20artigo-11245-1-10-20170504%20(2).pdf. Acesso em 20 de abril de 2020.

SILVEIRA, D.; **Participação de mulheres no mercado de trabalho tem o quinto ano de alta, mas remuneração segue menor que a dos homens**, **diz IBGE**. 2021. Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2021/03/04/participacao-de-mulheres-no-mercado-de-trabalho-tem-5o-ano-de-alta-mas-remuneracao-segue-menor-que-dos-homens-diz-ibge.ghtml. Acesso em 14 de março de 2021.

TAVARES, G, G; CARVALHO, A.R.V de; MILANESI, A.; PORTELA, F.S.; **Estudo sobre a percepção de discente de uma escola pública na cidade de Ilhéus, quanto ao processo de ensino-aprendizagem**. Revista Científica da Faculdade de Ilhéus, v.1, n.1, p.95-65, 2018.

TENENTE, L.; **Cerca de 40% dos professores de ensino médio não são formados na disciplina que ensinam aos alunos. Postagem no portal de notícias do G1 em 09 de fevereiro de 2020.** Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2020/02/09/40percent-dos-professores-de-ensino-medio-nao-sao-formados-na-disciplina-que-ensinam-aos-alunos.ghtml . Acesso em 14 de março de 2021.

TIBA, I.; **Quem ama educa**. São Paulo: Editora Gente, 2002, 302 p.

TOKARNIA, M**.; Estudantes brasileiros melhoram o desempenho em matemática: Resultados não foram tão bons em língua portuguesa**. Agência Brasil. Brasília: 2021. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2020-09/estudantes-brasileiros-melhoram-desempenho-em-matematica. Acesso em 14 de março de 2021.

VELOSO, E.; **Geometria: temas atuais**. Lisboa, IIE, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A (MODELO DO QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES)

Questionário para Professor de Matemática

Questionário para Professor de Matemática

Olá,

Meu nome é Jônatas da Silva Lôbo e sou discente do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Minha Instituição Associada é a UESC - Universidade Estadual de Santa Cruz, em Ilhéus - BA.

Este questionário que convido a responder enquadra-se numa investigação científica para coletar algumas informações a respeito da utilização de "demonstrações matemáticas" em sala de aula.

Os resultados obtidos serão utilizados apenas para fins acadêmicos (construção da minha dissertação de mestrado). O questionário é totalmente anônimo, seu nome não aparecerá em qualquer momento do estudo pois você será identificado com um número. Também vale salientar que sua participação é voluntária.

Com sua atenção
Jônatas da Silva Lôbo
E-mail: jonataslobomx@hotmail.com
Contato: (73)99939-2282

*Obrigatório

Idade *

Sua resposta

Sexo Biológico *

- Masculino
- Feminino

Qual a sua atual formação acadêmica? *

- Graduado
- Especialista
- Mestrando
- Mestre
- Doutorando
- Doutor

Você tem o diploma de licenciatura? *

- Sim, em Matemática
- Sim, em outra disciplina
- Não

APÊNDICE A

MODELO DO QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES. (Continuação...)

Questionário para Professor de Matemática

Em qual rede de ensino você leciona? *

- ◯ Pública
- ◯ Privada
- ◯ Ambas

Há quanto tempo leciona Matemática? *

- ◯ Menos de 10 anos
- ◯ Entre 10 e 15 anos
- ◯ Entre 15 e 20 anos
- ◯ Mais de 20 anos

Qual o estado da Federação que leciona? *

- ◯ Bahia
- ◯ Mina Gerais
- ◯ Espírito Santo
- ◯ Rio de Janeiro
- ◯ São Paulo
- ◯ Outro:

Em quais anos do Ensino Fundamental e Médio costuma Lecionar? *

- ☐ 6º ano do Ensino Fundamental
- ☐ 7º ano do Ensino Fundamental
- ☐ 8º ano do Ensino Fundamental
- ☐ 9º ano do Ensino Fundamental
- ☐ 1º ano do Ensino Médio
- ☐ 2º ano do Ensino Médio
- ☐ 3º ano do Ensino Médio
- ☐ Outro:

APÊNDICE A

MODELO DO QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES. (Continuação...)

Questionário para Professor de Matemática

Questionário para Professor de Matemática

*Obrigatório

Questionário para Professor de Matemática

Qual a sua carga horária semanal *

- ◯ 20 horas
- ◯ 40 horas
- ◯ 60 horas
- ◯ Outra

Em sua prática docente, utiliza de demonstrações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

O que você entende sobre Demonstrações Matemáticas?

Sua resposta

Qual a escala de importância você considera para se utilizar de demonstrações matemáticas como ferramenta a ser aplicada no processo de ensino e aprendizagem? *

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Completamente Inútil	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	Totalmente Importante

Se sente preparado para a utilização das Demonstrações Matemáticas durante o seu cotidiano em sala de aula? *

- ◯ Sim
- ◯ Não
- ◯ Às vezes

APÊNDICE A

MODELO DO QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES. (Continuação...)

Questionário para Professor de Matemática

Caso tenha sugestões a fim de que o uso das Demonstrações Matemáticas apresentem melhor eficácia no ensino de matemática, cite-a(s).

Sua resposta

Caso utilize em sua prática docente algumas demonstrações Matemáticas simples. Na sua percepção, encontra algum tipo de entrave que diminua a eficiência da sua aplicabilidade? *

- ○ Sim
- ○ Não encontro entraves.
- ○ Não utilizo demonstrações matemáticas em sala de aula.

Assinale a(s) alternativa(s), quanto aos entraves encontrados para trabalhar com as Demonstrações Matemáticas na sua prática docente: *

- ☐ Falta de conhecimento básico na Matemática Elementar por parte dos discentes
- ☐ Logística da Unidade escolar insatisfatória (parte física principalmente)
- ☐ Dispersão dos discentes em sala de aula
- ☐ Carga horária de aulas de matemática insuficiente para fazer uso desta ferramenta
- ☐ Desinteresse do discente
- ☐ Falta de preparação acadêmica para realizar esse tipo de atividade com os alunos
- ☐ Insegurança como docente para trabalhar dessa forma alguns conceitos
- ☐ Outro:

Cite alguma situação em que possa relatar exemplificando os entraves com a utilização de demonstrações em sala de aula.

Sua resposta

APÊNDICE A

MODELO DO QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES. (Continuação...)

Questionário para Professor de Matemática

Questionário para Professor de Matemática

Questionário para Professor de Matemática

Cite algumas Demonstrações Matemáticas utilizadas na sala de aula:

Sua resposta

Como foi a receptividade dos discentes, quanto a aplicabilidade das Demonstrações Matemáticas?

Sua resposta

Qual a sua opinião acerca da utilização das Demonstrações Matemáticas durante a sua prática docente?

Sua resposta

Você possui facilidade em planejar suas aulas fazendo uso das Demonstrações Matemáticas?

- Sim
- Não
- Às vezes

De que maneira você faz uso das Demonstrações Matemáticas? Quais tipos de recursos que você utiliza para operacionalizar as Demonstrações Matemáticas?

Sua resposta