UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET

COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ROBSON CAJUEIRO SIMÕES

OFICINA DE GEOMETRIA: UMA ABORDAGEM LÚDICA E CONTEXTUALIZADA DE POLIEDROS

ILHÉUS-BAHIA
2021

ROBSON CAJUEIRO SIMÕES

OFICINA DE GEOMETRIA: UMA ABORDAGEM LÚDICA E CONTEXTUALIZADA DE POLIEDROS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz.

Orientador: Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión

ILHÉUS-BAHIA
2021

S593 Simões, Robson Cajueiro.
Oficina de geometria: uma abordagem lúdica e contextualizada de poliedros / Robson Cajueiro Simões. – Ilhéus, BA: UESC, 2021.
96 f. : il.

Orientador: Nestor Felipe Castañeda Centurión.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Inclui referências e apêndices.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria. 3. Laboratórios de matemática. 4. Aprendizagem ativa. I. Título.

CDD 510.7

ROBSON CAJUEIRO SIMÕES

OFICINA DE GEOMETRIA: UMA ABORDAGEM LÚDICA E CONTEXTUALIZADA DE POLIEDROS

ILHÉUS-BAHIA, 13/04/2021

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión
UESC
(Orientador)

Prof. Dr. German Ignacio Gomero Ferrer
UESC

Prof$^{\underline{a}}$. Dra. Zulma Elizabete de Freitas Madruga
UFRB

Agradeço a Deus, a minha mãe Maria Amélia, aos meus irmãos Bia e Roozivel, aos meus sobrinhos Hugo, Willian e Hiago e a minha tia Soraia pelo apoio incondicional em todos os momentos difíceis da minha trajetória nesse curso. Este trabalho é dedicado a eles.

Agradecimentos

A Deus, por me conceder saúde e sabedoria para seguir sempre em frente. Obrigado por ser a minha força e o meu guia em todos os momentos. A ti, Senhor, toda honra e toda a glória.

A minha mãe, aos meus irmãos e sobrinhos pelo apoio e incentivo em todos os momentos da minha vida. Por acreditarem em mim, e não medirem esforços para a concretização dos meus sonhos. Sem vocês, nada seria possível. Amo vocês!

Aos meus colegas de curso pelos momentos de descontração, estudo e contribuição. O meu muito obrigado e levo-os como amigos para vida toda.

A minha prima Zoraia Cajueiro pelo apoio e paciência nas horas de aflição. Muito obrigado!

Ao meu orientador e professor Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión pela paciência, ensinamento, dedicação e pelas inúmeras contribuições dadas ao longo do curso, fazendo possível a realização deste trabalho.

À coordenação e todos os professores do PROFMAT – UESC, os quais tive a honra de ser aluno e contribuíram no meu caminhar nesse curso de mestrado, o meu obrigado!

Aos membros da banca examinadora pela participação e contribuição na avaliação deste trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

"Porque Deus tanto amou o mundo que deu o seu Filho Unigênito, para que todo o que nele crer não pereça, mas tenha a vida eterna".(João 3:16)

Resumo

Como referenciado na literatura, a matemática é uma das disciplinas que mais sofre rejeição por parte dos alunos, com isso, as barreiras e as dificuldades aumentam e refletem no mau desempenho dos estudantes tanto nas avaliações escolares quanto nas avaliações nacionais e internacionais, como, por exemplo, as avaliações do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa). Nesta dissertação temos o objetivo de apresentar uma proposta de oficina de matemática para o 6º ano do Ensino Fundamental, voltada para a área de geometria, que surge como um recurso didático utilizando o lúdico, a contextualização e a história em quadrinhos para auxiliar os professores no processo ensino-aprendizagem visando uma aprendizagem com significados dos discentes nas aulas de matemática. Na oficina são trabalhados os seguintes conteúdos geométricos: figuras geométricas planas e espaciais, poliedros convexos, côncavos e regulares e o teorema de Euler. Cabe destacar que noções espaciais têm aplicabilidade no cotidiano e em toda a vida escolar do aluno. A ludicidade é um importante fio condutor para desenvolver a oficina, pois toda atividade que envolva divertimento, prazer e criatividade faz parte do lúdico. A metodologia elaborada para a aplicação da oficina consiste em uma sequência de encontros com atividades lúdicas, contextualizadas e com material concreto para construir e diferenciar figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais, envolvendo assim, a participação direta e ativa de todos os envolvidos (educando e educador), o que acreditamos ser uma condição necessária para melhorar o processo de ensino-aprendizagem, valorizar a prática e colocar o discente como sujeito ativo na construção do conhecimento e o educador como mediador do saber.

Palavras-chave: Oficina de Matemática; Geometria; Ludicidade; Contextualização.

Abstract

As referenced in the literature, mathematics is one of the disciplines that suffers the most rejection by students, with this, the barriers and difficulties increase and reflect on the poor performance of students both in school evaluations and in national and international evaluations, such as the evaluations of the Basic Education Assessment System (Saeb) and the International Student Evaluation Program (Pisa). In this dissertation we aim to present a proposal of a mathematics workshop for the 6th year of elementary school, focused on the area of geometry, which emerges as a didactic resource using play, contextualization and comic books to assist teachers in the teaching-learning process aiming at learning with meanings of students in mathematics classes. The workshop is working on the following geometric contents: flat and spatial geometric figures, convex, concave and regular polyhedra and euler's theorem. It is worth mentioning that spatial nodes have applicability in daily life and throughout the student's school life. The ludicity is an important guiding thread to develop the workshop, because every activity that involves fun, pleasure and creativity is part of the playful. The methodology elaborated for the application of the workshop consists of a sequence of meetings with playful activities, contextualized and with concrete material to construct and differentiate two-dimensional and three-dimensional geometric figures, thus involving the direct and active participation of all involved (student and educator), which we believe is a necessary condition to improve the teaching-learning process , value practice and place the student as an active subject in the construction of knowledge and the educator as a mediator of knowledge.

Keywords: Mathematic Workshop; Geometry; Ludicity; Contextualization.

Lista de figuras

Sumário

Introdução

A Matemática apesar de ser uma disciplina fundamental tanto na vida escolar quanto na vida cotidiana dos alunos, é também uma das que mais sofre rejeição por parte deles. Essa afirmação é corroborada por Reis (2005), "a Matemática é a disciplina, tida, ainda, como difícil e em muitos casos rejeitada pelos discentes de todas as classes sociais e em todos os níveis de escolaridade". As dificuldades em Matemática não são simples, em se tratando de uma disciplina com a que, em geral, os alunos não se identificam por considerá-la complexa. Além do motivo de "não gostar" ou da dificuldade inerente ao aprendizado de novos conteúdos, essas dificuldades podem estar atreladas a outros fatores de ordem psicológica ou pedagógica, que precisam ser identificados para um melhor funcionamento do processo de ensino-aprendizagem. Para Machado (1989, p.9), ensinar matemática tem sido frequentemente uma tarefa difícil, sendo que muitas pessoas desenvolvem em sua vida escolar atitudes negativas em relação a ela.

Apresenta-se como um dos desafios do professor de matemática identificar dificuldades de cunho pedagógico dos alunos e desenvolver meios para saná-las. Por isso, há interesse em recursos ou metodologias que abordem o ensino dessa disciplina de forma mais atraente, motivadora e aplicável no cotidiano dos alunos. Nesse sentido, os pesquisadores Sant'anna e Menegolla (2002, p.32) afirmam que o professor deve ser capaz de selecionar adequadamente o método didático e organizar todos os procedimentos e técnicas, visando propiciar aos alunos a melhor aprendizagem. Eles acrescentam que no ensino sempre se estabelecem certas prioridades e para atingi-las, traçam-se estratégias que dirigem toda a ação.

Os professores podem buscar novos recursos didáticos que possibilitem o desenvolvimento do conhecimento e da prática do saber de forma mais atrativa, aplicável e diferenciada visando o crescimento intelectual dos alunos. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), parte do trabalho do educador é refletir, selecionar, organizar, planejar, mediar e monitorar o conjunto das práticas e interações, garantindo a pluralidade de situações que promovam o desenvolvimento pleno das crianças (BRASIL, 2017, p. 39).

Visando potencializar o entendimento do conteúdo apresentado em sala e viabilizar a construção do saber de forma prazerosa e interessante, esses métodos ou recursos podem ser auxiliados pela ludicidade, o que está em consonância com os trabalhos de Cunha (2007), Kishimoto (2010) e Vygotsky (1991). Segundo Alves (2006, p.24): "a utilização de atividades lúdicas em aulas de matemática, além dos aspectos cognitivos relevantes para a sua aplicação, não deve ignorar ou menosprezar o aspecto afetivo desencadeado pela ação do jogo, na aproximação entre aluno e professor". O jogo pode ser entendido como qualquer atividade que desperte o prazer, a motivação, a competição saudável, a socialização e o desenvolvimento do conhecimento através desse exercício. E é nesse sentido que nossa proposta está baseada no conceito de oficina pedagógica de Matemática, como será visto nos Capítulos 2 e 4.

A rejeição ou dificuldades dos alunos em relação à matemática nos leva a seguinte pergunta: por que a maioria dos alunos não gosta de matemática? Essa pergunta é difícil de responder. A partir da minha experiência docente, percebo que os alunos chegam para o 6^0 ano com a base matemática limitada e utilizando a memorização como recurso. Além disso, observo que os alunos têm dificuldades com o caráter lógico-reflexivo da disciplina, em geral, eles não estão acostumados com o processo de reflexão. Acrescento ainda, alguns preconceitos trazidos por eles, como por exemplo: "essa disciplina é para poucos", "só os inteligentes conseguem aprender Matemática" ou "meus pais falaram que só precisa do básico da Matemática porque o resto não usamos para nada", o que cria barreiras e dificuldades para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

As dificuldades e as barreiras criadas na Matemática refletem no desempenho dos alunos em avaliações nacionais e internacionais. Segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep, 2018), o desempenho dos alunos na prova do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) em 2018 foi insatisfatório o que não muda muito a realidade dos anos anteriores. Mais de dois terços dos estudantes brasileiros de 15 anos têm um nível de aprendizado em matemática mais baixo do que é considerado "básico" pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). E esse resultado negativo também é visto na Avaliação do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb). Como exemplo: em 2019, a maioria dos alunos do segundo ano do Fundamental estão no nível 4 (dentre 9 níveis), cerca de $19,83\%$. Quando se trata do domínio das habilidades matemáticas, $2,82\%$ dos participantes estão abaixo do nível 1. E em 2017, cerca de 54% dos estudantes baianos do 3º ano do Ensino Médio em matemática estão abaixo do nível 2 de 10 níveis avaliados.

Na perspectiva dessas avaliações o ensino da matemática ainda tem muito a melhorar. Essa constatação reforça nosso interesse na busca por práticas pedagógicas, com componentes de ludicidade e contextualização que possam auxiliar ao ensino da matemática. Para Freitas (2020), Anastasiou e Alves (2004), o processo de ensino-aprendizagem fica mais interessante com práticas pedagógicas que utilizam o lúdico como um fio condutor. Segundo Gianotto (2006), as oficinas pedagógicas são importantes espaços de construção, socialização e ludicidade, além de promover o encontro entre o teórico e o prático.

Paulo Freire (1998) afirma que o objetivo da educação é transformar alunos em pessoas capazes de tomar decisões próprias. E segundo Vieira e Valquind (2002), através das oficinas pedagógicas podemos ensinar de forma mais humanizada propiciando um ambiente onde a cultura e os valores dos discentes sejam respeitados. Lima (2007) defende que a utilização de oficinas é uma boa alternativa metodológica para ajudar o professor no processo de ensino-aprendizagem. E D'Ambrosio (1994) sustenta que a educação é aquela que todos se envolvem, se respeitam e se juntam para buscar novos conhecimentos e saberes. É nesse sentido que surge a proposta deste trabalho, a saber, oficinas de matemática voltadas para a Geometria Espacial no 6º ano, com o intuito de trabalhar esses conteúdos através do lúdico e da contextualização, levando em consideração que uma oficina pedagógica é um recurso que trabalha o raciocínio lógico estratégico, possibilita a troca de conhecimento entre professor e aluno, utiliza a criatividade deixando assim o educando como sujeito ativo e agente do seu próprio processo de aprendizagem.

Embasado nesse cenário, o presente estudo tem como objetivo geral utilizar a oficina pedagógica de matemática como recurso didático auxiliado pela ludicidade e contextualização, visando potencializar o entendimento do conteúdo apresentado e viabilizar a construção do saber de forma prazerosa e interessante nas aulas de matemática. As atividades possuem um componente democrático, colocam o aluno no centro processo de construção do seu conhecimento e o professor como mediador dessa ação. Isso em concordância com os trabalhos de Candau (1999), Vieira e Volquind (2002) e Paulo Freire (1998), como pode ser visto no Capítulo 2 do trabalho.

Dentre os objetivos específicos da proposta podemos mencionar: Estudar os objetos que possuem mais de uma dimensão e que ocupam lugar no espaço; estimular o trabalho em equipe, a socialização e a concentração do aluno; criar e executar passos para a construção de figuras geométricas espaciais; trabalhar a ludicidade nas aulas de matemática; expor o aluno ao desafio de construir, criar e comparar objetos para resolver situações-problemas; identificar e diferenciar poliedros regulares, convexos, côncavos e os elementos que compõem esses sólidos; introduzir a relação de Euler de forma dedutiva e compreensiva.

Metodologicamente, a proposta envolve quatro etapas: 1ª) Construindo trilhos e vagões: o aluno constrói figuras bidimensionais e tridimensionais e aprende a diferenciar elementos que compõem essas figuras; 2ª) Olimpíadas poliedrais da natureza: o estudante constrói poliedros regulares e deduz, através de construção, a impossibilidade de existir mais do que cinco poliedros regulares; 3ª) Jogando com poliedros convexos e côncavos: o docente apresenta formas geométricas que desafiam o aluno a construir poliedros adequados para o encaixe do jogo; 4ª) Fatiando poliedros e aplicando o Teorema de Euler: o discente efetua cortes planos em poliedros construídos a partir de massa de modelar e, na sequência, conta arestas, faces e vértices dos novos poliedros que surgiram. Uma tabela é preenchida com estes dados para ser utilizada numa atividade envolvendo a relação de Euler.

Vale ressaltar que o plano original seria a aplicação das etapas dessa oficina de matemática nas aulas do 6º ano na escola que leciono: Instituto Municipal de Ensino

Eusínio Lavigne (IME) em Ilhéus-Bahia, mas devido ao agravamento da COVID-19, as aulas presenciais foram suspensas e tomamos a decisão de suspender também a aplicação das atividades por entender que, devido ao perfil da proposta, a presença dos alunos é indispensável, com isso nos concentramos no aprimoramento das atividades da oficina.

Minha formação é de bacharel em Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), localizada em Ilhéus-BA. Os entraves e desafios recorrentes na aprendizagem da Matemática me fizeram gostar ainda mais dessa disciplina. Minha vida escolar foi totalmente na escola pública em Ilhéus, assim, como aluno, vivenciei as dificuldades dessa disciplina e hoje, participo do outro lado, como professor. Exerço a profissão de professor de Matemática desde 2009, mas já lecionei Física, Artes e Geometria (separada da disciplina de Matemática). Trabalhei em escolas municipais e estaduais e foi lecionando Matemática e Geometria no Colégio da Polícia Militar Rômulo Galvão (CPMRG) de Ilhéus, que tive a oportunidade de participar do projeto de Oficinas de Matemática Experimental que a escola junto com os professores da área de Matemática da UESC desenvolvem no 6º ano do Ensino Fundamental, me apaixonando pelas atividades desenvolvidas. Nas minhas aulas procuro ensinar de forma bem-humorada e ter uma boa relação de afetividade com os estudantes, pois criar laços afetivos e saber ouvir o aluno são fundamentais para quebrar barreiras no processo de ensino-aprendizagem. Como bem afirmado por Silva (2015, p.2), a afetividade é uma ferramenta fundamental no processo educativo, influenciando diretamente no cognitivo do educando e contribuindo para uma aprendizagem de qualidade e auxiliando no desenvolvendo intelectual dos educandos.

A minha atuação docente me propiciou momentos ímpares, porém trouxe muitos questionamentos relacionados à metodologia tradicional aplicada em sala de aula e, inclusive, questionamentos sobre minha prática docente: Como contribuir para a formação de estudantes capazes de entender o papel da matemática no mundo? Como motivar os alunos sobre o papel transformador da educação entendendo-a como um ato político? Como estimular o uso de práticas lúdicas para auxiliar as aulas de matemática? Como estimular professores a trabalhar o conteúdo teórico nas disciplinas de matemática atrelado à sua aplicabilidade?

Meu interesse em cursar o mestrado em Matemática no Profmat, emergiu a partir do momento que senti a necessidade de uma formação continuada capaz de contribuir para a minha atuação docente, uma vez que tenho atuado na educação básica e venho tentando tornar as aulas de matemática um ambiente prazeroso, divertido, afetivo e transformador.

Por que a oficina de Matemática dessa dissertação é voltada para área da Geometria Espacial? Na minha experiência como docente na disciplina de Geometria que leciono há mais de seis anos, percebo que os alunos do Ensino Fundamental têm dificuldades em assimilar os conteúdos geométricos, como, dificuldades em diferenciar figuras dimensionais, ter noção de espaço, saber os elementos que compõem cada poliedro, entre outros. Essas dificuldades vão sendo acumuladas e quando esses discentes chegam ao Ensino Médio, o mau desempenho em Geometria é notório. Esse cenário é percebido, por exemplo, no baixo desempenho nas avaliações do PISA em relação às questões envolvendo essa disciplina. Segundo o Inep (2012), na questão envolvendo figuras planas do PISA de 2012, cerca de 77% dos alunos do estado da Bahia ficaram abaixo do nível 2 de uma escala de 6 níveis, isto é, de acordo com a OCDE, os estudantes avaliados são capazes de executar ações óbvias, dar continuidade imediata ao estímulo dado, mas não conseguem fazer interpretações literais dos resultados e nem conseguem empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos ou convenções de nível básico. Nas minhas aulas, gosto de trabalhar com material concreto e contextualizado, principalmente no 6º ano, onde percebo que os estudantes gostam de aulas diferentes das tradicionais, por isso, pensar em buscar novos recursos para incrementar as aulas é interessante e motivador. Assim, sendo apaixonado por essa área da matemática, acredito que os alunos possam se encantar também com esses conceitos e conteúdos utilizando a ludicidade e a contextualização nesse processo.

Nossa proposta, utiliza a contextualização nas etapas da oficina através de histórias em quadrinhos e vídeos preparados para auxiliar os professores no momento inicial e na discussão final das atividades da oficina [1]. Nesse canal, encontram-se vídeos com o passo a passo ou instruções de algumas construções para a consolidação do aprendizado para a discussão final das etapas, animações das histórias em quadrinhos usadas nas etapas iniciais da oficina, entre outros. Acreditamos que este material configura-se como um recurso que motiva e intensifica a compreensão e a interação do aluno com o conteúdo dando um melhor entendimento para seus argumentos e deduções.

A presente dissertação está estruturada em cinco capítulos. O primeiro capítulo apresenta uma análise dos dados sobre o desempenho dos estudantes brasileiros em matemática nas avaliações do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) e do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb). No segundo capítulo, descrevem-se os conceitos de ludicidade e de oficinas pedagógicas, em especial o de oficina de matemática. No terceiro capítulo, faz-se uma revisão de conceitos topológicos para introduzir a definição de poliedro e, a seguir, são vistos os conceitos de poliedro convexo, superfície poliédrica e poliedro regular. Também é enunciado e demonstrado o Teorema de Euler, assim como, discute-se a existência de apenas cinco poliedros regulares. No quarto capítulo, apresentam-se as atividades do objeto da nossa proposta: uma oficina de matemática na área de Geometria Espacial. Por fim, no quinto e último capítulo são apresentadas as considerações finais do trabalho.

[1] Os vídeos podem ser acessados YouTube através do seguinte *link*: <https://www.youtube.com/channel/UCPPimNspLigN9NNE4hmuuCA>.

1 A matemática no cenário atual

A matemática está presente na evolução e na necessidade humana. Desde tempo antigo, o homem aprendeu a contar através de pedras ou marcações em objetos para sobreviver e saber identificar seus pertences e seus alimentos, assim, surgia à matemática "básica". De acordo com Ferro (2016, p. 19), "nos primórdios, a matemática se assentava nas experiências do cotidiano das civilizações, as quais motivaram os povos a produzir uma linguagem que pudesse comunicar sobre a quantificação das coisas, do espaço e das formas". De lá para cá, a matemática se estruturou, criou conceitos, demonstrações e fundamentos e se tornou a ciência que envolve o raciocínio lógico e abstrato, estuda formas e lugares no espaço entre outros conteúdos. Ela está presente em tudo e tem uma participação efetiva na capacidade de fazer análise crítica e no desenvolvimento de estratégias e tecnologias tanto na vida pessoal quanto coletiva.

Na escola, a matemática se tornou uma disciplina indispensável em toda vida escolar do aluno. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. Ainda, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 265):

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos.

Isto é, a matemática faz o aluno aprender a enfrentar situações-problemas em diversos contextos, incluindo-se problemas abstratos relacionados com fenômenos físicos ou não e expressar suas respostas com argumentação através de diferentes registros e linguagens como, por exemplo, gráficos, tabelas, dentre outros.

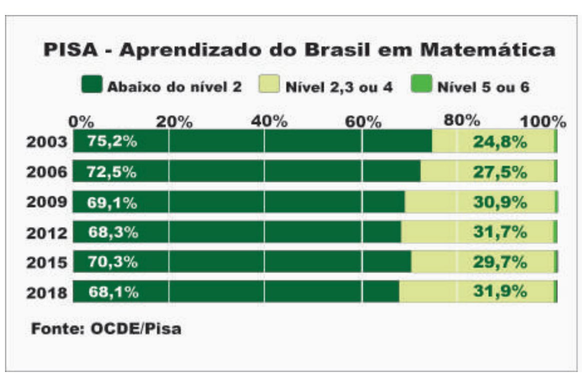
Nessa disciplina, o processo de ensino e aprendizagem envolve todos os elementos que compõem o saber, tanto os matemáticos quanto os heurísticos (baseados em informação e intuição). A BNCC (BRASIL, 2018, p. 265) acrescenta que "apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática". Ou seja, o aluno não aprende apenas exercitando ou aplicando a teoria em situações-problema, mas também criando estratégias, soluções ou deduções de forma empírica ou não para uma determinada situação.

A BNCC (BRASIL, 2018, p. 268) propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. São elas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística. Nessa dissertação, daremos destaque à geometria que estuda as formas, tamanhos e propriedades de figuras dimensionais. Continuando com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 271)

> A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência.

Fica clara a importância da Geometria, e de toda a Matemática, na vida escolar do aluno, porém, quando analisamos se os conceitos apontados pela BNCC estão sendo assimilados na sala de aula, percebemos que a realidade é outra. As dificuldades e entraves existentes para o ensino e aprendizagem das disciplinas de matemática refletem no desempenho dos alunos tanto nas provas escolares internas quanto nas avaliações internacionais e nacionais usadas para diagnosticar e refletir sobre o ensino de Matemática no país. Segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) o desempenho dos alunos nas provas do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) durante os anos de 2003 a 2018 foi desanimador, pois mais de dois terços dos estudantes brasileiros de 15 anos têm um nível de aprendizado em matemática abaixo do nível 2 (considerado básico) de acordo com a Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Vejamos o gráfico a seguir.

Figura 1 – Resultado do desempenho dos estudantes na avaliação do PISA



Fonte: adaptada pelo autor.

Isso mostra que o Brasil está estagnado em relação ao desempenho dos alunos em Matemática. De acordo com os dados da Figura 1, no ano 2018, $68,1\%$ dos estudantes brasileiros estão no pior nível de proficiência em matemática e não possuem nível básico, considerado como o mínimo para o exercício pleno da cidadania.

Ao longo dos anos em que a prova do PISA ocorreu, o Brasil sempre ficou nas piores colocações, isto é, não houve uma melhora significativa desde quando começou essa avaliação. Se observarmos a Tabela 2 em relação a países da América do Sul, o Brasil sempre ficou atrás do Uruguai e do Chile e ficou na disputa da pior colocação com a Argentina. Conforme os dados abaixo.

Figura 2 – Ranking do Brasil com os demais países membros da OCDE

MATEMÁTICA

Países	POSIÇÃO					
	2003	2006	2009	2012	2015	2018
Argentina	X	52º	55º	60º	42º	72º
Brasil	41º	53º	57º	58º	65º	71º
Chile	X	47	49º	51º	48º	60º
Colômbia	X	54º	58º	62º	61º	70º
Uruguai	36º	42º	47º	53º	51º	59º
TOTAL DE PAÍSES PARTICIPANTES	41	57	65	65	70	79

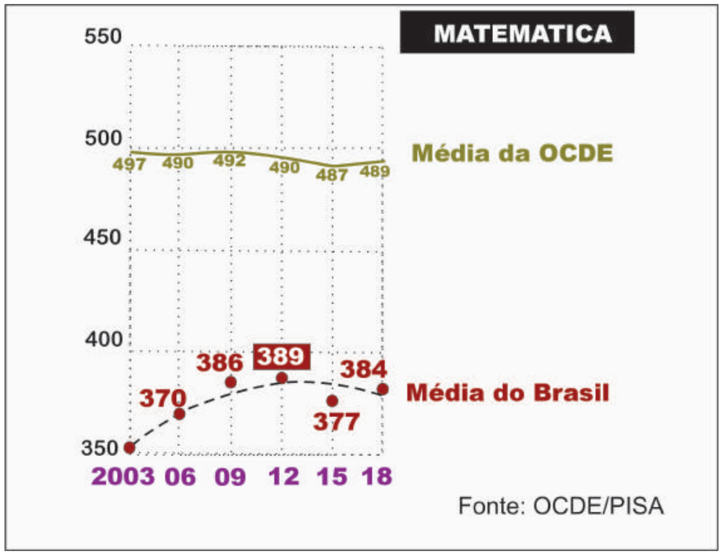
Fonte: OCDE/PISA

Fonte: adaptada pelo autor.

Na sua primeira participação no ano de 2003, o país ficou em último lugar e em 2009 e 2018 foram as melhores colocações do Brasil ficando distante apenas oito posições do último colocado. Agora, se compararmos a pontuação do Brasil com a média da OCDE, o desempenho fica ainda pior com uma diferença significativa, conforme mostra a Figura 3.

Analisando essa figura, percebe-se que mesmo tendo uma melhora em 2012, a diferença de pontos para a média da OCDE foi de 101 pontos. Na sequência tivemos uma queda em 2015 e crescemos novamente apenas 7 pontos em 2018, ou seja, estagnamos. Esse péssimo desempenho, mostra que os alunos avaliados não estão conseguindo responder as questões básicas de forma coerente. Nas provas de Matemática do Pisa são avaliadas as seguintes habilidades: a capacidade dos alunos de "formular, usar e interpretar a matemática" para seu cotidiano, desde controlar seus gastos no mercado até medir quantidades para uma receita, compreender estatísticas ou avaliar custos de um projeto. O objetivo disso, segundo a organização da avaliação, é que as escolas formem alunos capazes de "refletir e entender o papel da matemática no mundo". Isto é, não há nada de novo entre o que o PISA avalia e o que é cobrado no conteúdo programático escolar das disciplinas de Matemática.

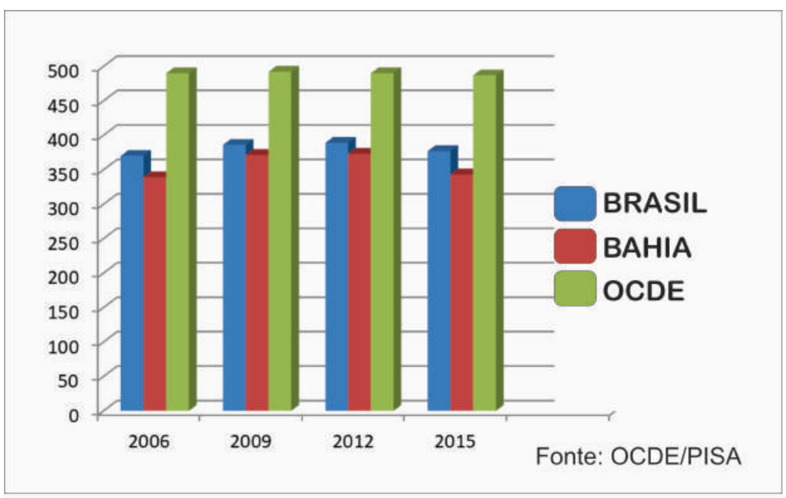
Figura 3 – Média de pontos do Brasil e da OCDE nas avaliações do PISA



Fonte: adaptada pelo autor.

O PISA possibilita avaliar comparativamente a situação dos países participantes, mas também emite relatórios do desempenho dos estudantes de cada estado da federação. Nesse trabalho, destacamos o desempenho dos alunos do estado da Bahia no PISA e o comparamos com a pontuação média do Brasil e da OCDE.

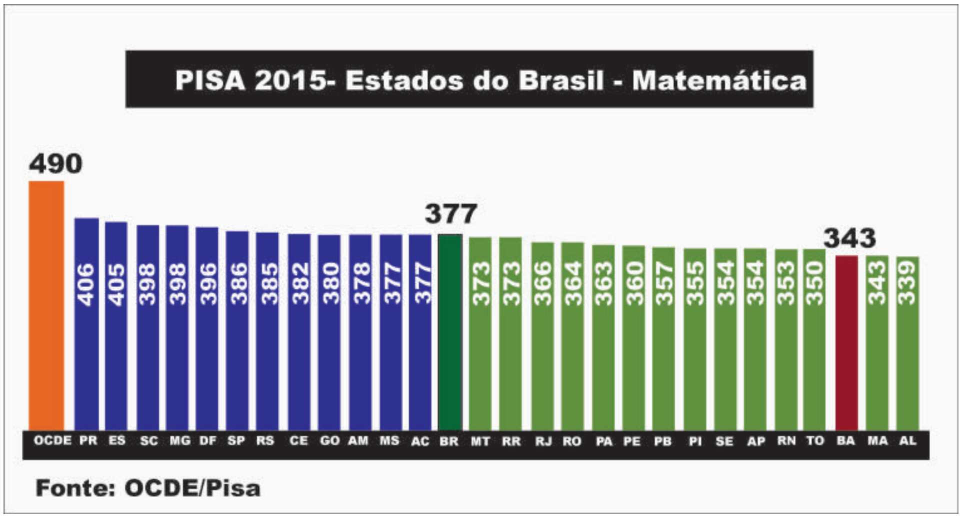
Figura 4 – Desempenho da Bahia nas provas do PISA



Fonte: adaptada pelo autor.

A partir da Figura 4, percebemos que o desempenho dos estudantes da Bahia ficou bem abaixo da nota da OCDE e próximo à nota do Brasil. Significa que a maioria dos estudantes da Bahia se encontra abaixo do nível 2 da avaliação do PISA. Agora, se compararmos a Bahia com o desempenho de todos os estados brasileiros no ano de 2015, ficamos na antepenúltima posição, conforme mostrado no gráfico 5.

Figura 5 – Desempenho da Bahia nas provas do PISA comparado com a OCDE e o Brasil



Fonte: adaptada pelo autor.

Nas questões que envolvem geometria, o PISA objetiva avaliar se o aluno: compreende a noção de perspectiva, a transformação de formas (com e sem uso de tecnologias), a interpretação de vistas de cenas tridimensionais a partir de diferentes perspectivas, e a construção de representações de formas. O desempenho do Brasil nessa disciplina em 2012 pode ser visto na Figura 6. Observamos que $70,9\%$ dos estudantes estão abaixo do nível 2, ou seja, mais de dois terços dos alunos brasileiros não responderam questões básicas de geometria.

Figura 6 – Desempenho do Brasil em Geometria no PISA 2012

	Abaixo do Nível 1	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Nível 6 ou acima
Geometria (Espaço e Forma)	40,3%	30,6%	18,8%	7,3%	2,4%	0,6%	0,1%

Fonte: PISA 2012

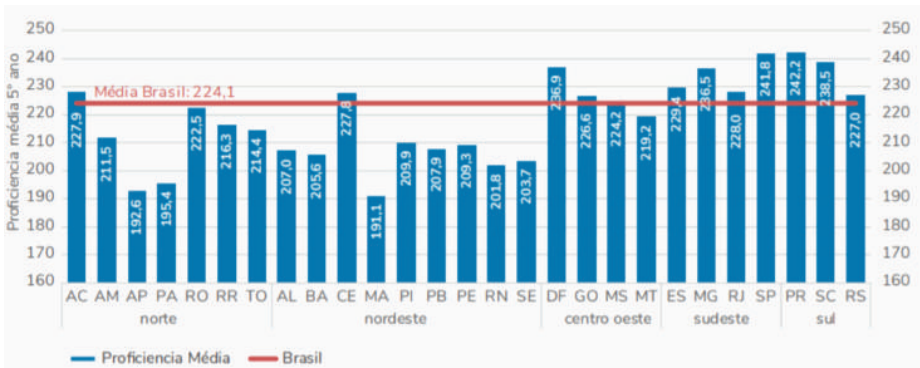
Fonte: adaptada pelo autor.

A seguir analisaremos os resultados da prova aplicada pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) nos anos de 2017 e 2019 dando ênfase ao estado da Bahia. Em 2017, foram avaliados o 5º e 9º ano do Ensino Fundamental e a 3ª série do Ensino Médio. Já em 2019, a prova de matemática do Saeb avaliou o 2º ano do Ensino Fundamental.

A Figura 7 apresenta o desempenho médio em matemática dos alunos do 5º ano em matemática. Observa-se que o estado da Bahia (205,6) fica abaixo da média Brasil

(224,1) e se comparado com a média do estado que teve a maior pontuação, o estado do Paraná (242,2), a diferença é de $36,6$ pontos.

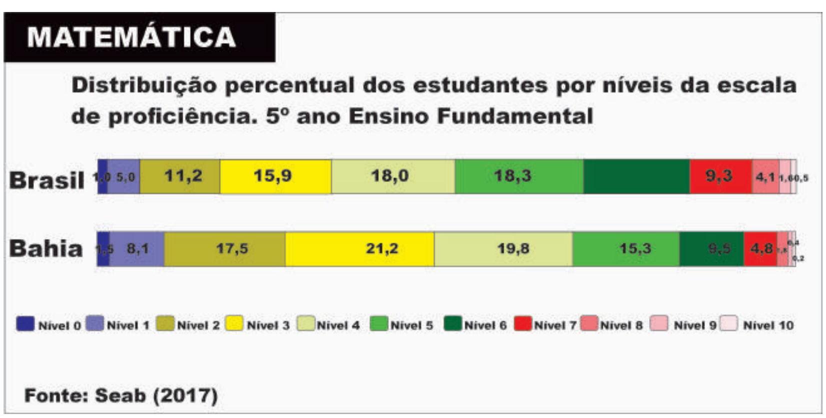
Figura 7 – Proficiência dos estudantes do 5º ano na prova do Saeb 2017



Fonte: Saeb, 2017.

A Figura 8 traz a distribuição percentual dos estudantes por níveis de escala de proficiência em matemática dessa série. De acordo com o Saeb, a proficiência média nacional (224,1) em Matemática no 5º ano está no intervalo referente ao nível 4 dessa escala de proficiência. Abaixo desse nível situa-se o 33% dos estudantes, o que indica um menor desempenho em termos das habilidades avaliadas no teste. A Bahia encontra-se com maior percentual no nível 3 numa escala de 10 níveis. Segundo o Saeb, no nível 3, o aluno sabe noções básicas da geometria, tais como, reconhecer dentre um conjunto de polígonos, aquele que possui o maior número de ângulos e associar figuras geométricas elementares (quadrado, triângulo e círculo) a seus respectivos nomes.

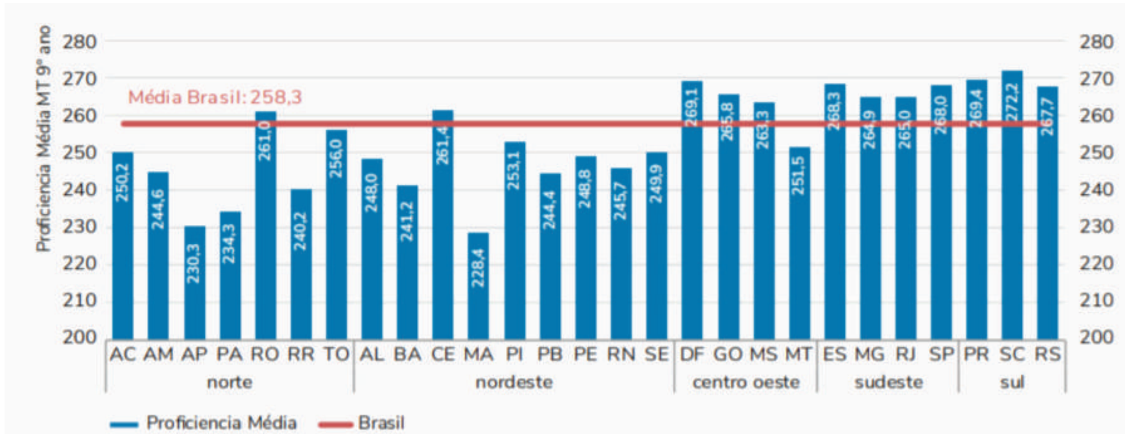
Figura 8 – Distribuição percentual dos estudantes do 5º ano



Fonte: adaptada pelo autor.

No gráfico 9 apresenta a proficiência média em matemática no 9º ano. Nota-se que o estado da Bahia (241,2) fica abaixo da média Brasil (258,3) e se comparado com a média do estado que teve a maior pontuação, o estado de Santa Catarina (272,2), a diferença é de 31 pontos.

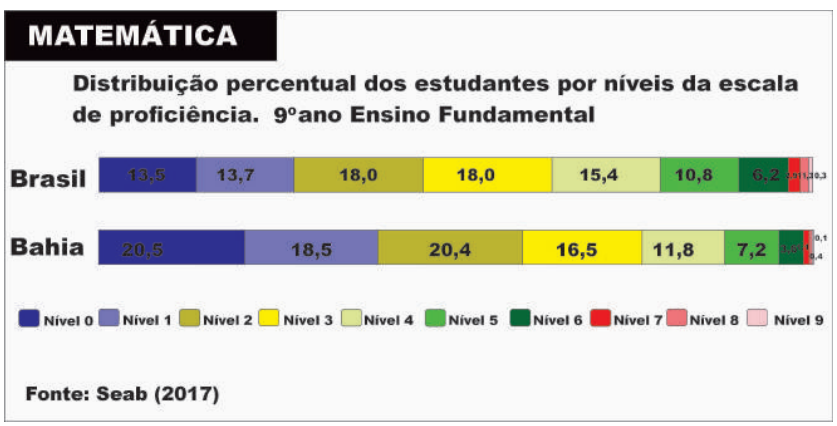
Figura 9 – Proficiência dos estudantes do 9º ano na prova do Saeb 2017



Fonte: Saeb, 2017.

A Figura 10 mostra um panorama da proficiência em relação aos níveis, do mais baixo ao mais alto, numa escala de 0 a 9. Constata-se que o Brasil se encontra no nível 3 dessa escala e a Bahia em maior concentração no nível 0, ou seja, 20,5% dos estudantes baianos não demonstram habilidades elementares. E a maioria dos alunos da Bahia que participaram dessa prova, cerca de 59,4%, estão abaixo do nível 2.

Figura 10 – Distribuição percentual dos estudantes do 9º ano

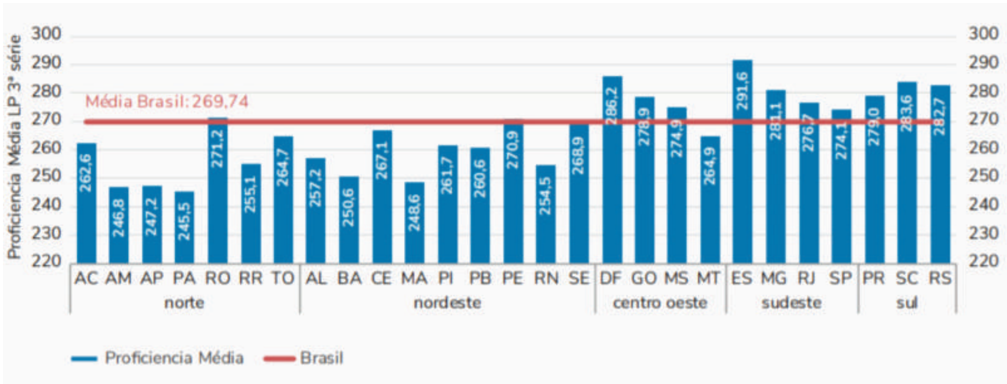


Fonte: adaptada pelo autor.

A Figura 11 apresenta a proficiência média em Matemática no 3º ano do Ensino Médio. A Bahia (250,6 pontos) ficou abaixo da média Brasil (269,74) e ficou atrás do melhor colocado, o Espírito Santo (291,6 pontos).

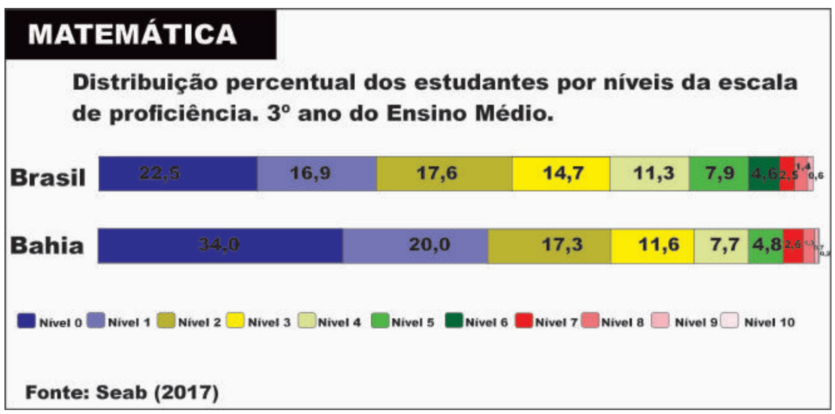
Para o Saeb, como ilustrado na Figura 12, a proficiência média nacional (269,74) em Matemática na 3ª série do ensino médio está no intervalo referente ao nível 2 dessa escala de proficiência. Abaixo desse nível situam-se 39% dos estudantes, o que indica um menor desempenho em termos das habilidades avaliadas no teste. A maioria dos alunos do estado da Bahia ficaram no nível 0, cerca de 34% e a maioria desses estudantes (54%) ficaram abaixo do nível 1 se comparado a todos os níveis da escala de proficiência.

Figura 11 – Proficiência dos estudantes do 3º ano na prova do Saeb 2017



Fonte: Saeb, 2017.

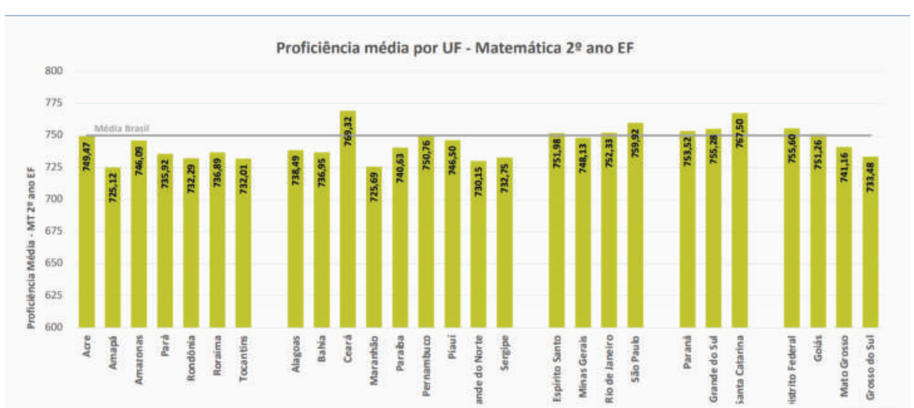
Figura 12 – Distribuição percentual dos estudantes do 3º ano do Ensino Médio



Fonte: adaptada pelo autor.

No gráfico da Figura 13, é analisada a proficiência média por estados do 2º ano do Ensino Fundamental e observa-se que a média da Bahia (736,95) ficou abaixo da média Brasil (750). A melhor colocação foi do estado do Ceará (769,32) e a pior colocação foi do Amapá (725,12).

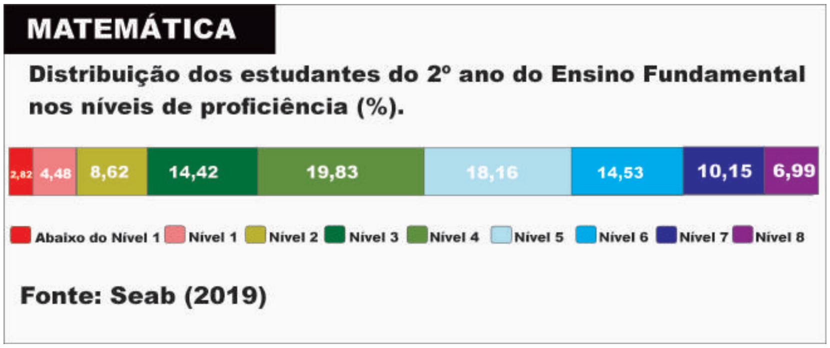
Figura 13 – Proficiência dos estudantes do 2º ano na prova do Saeb 2019



Fonte: Saeb, 2019.

Na Figura 14 temos a distribuição percentual dos estudantes do 2º ano do Ensino Fundamental nos níveis de proficiência, temos que $19,83\%$ dos estudantes encontram-se no nível 4 e $30,34\%$ abaixo desse nível.

Figura 14 – Distribuição percentual dos estudantes do 2º ano



Fonte: adaptada pelo autor.

Fazendo um balanço do ano de 2017, a rede estadual de educação baiana melhorou o desempenho no 5º ano do Ensino Fundamental em relação à matemática, de acordo com o Saeb. Segundo dados, referentes a 2017, os alunos matriculados no 5º ano tiveram uma melhora de cinco pontos em relação a 2015. O melhor crescimento foi do estado do Acre, cerca de 10 pontos. No 9º ano, a Bahia teve um desempenho abaixo do esperado comparado a 2015 cuja variação das proficiências entre esses anos ficou negativa de 1,5. A maior variação positiva foi de Tocantins (8,6) e a maior variação negativa (-3,7) foi do Maranhão. Já no 3º ano, do ensino médio a Bahia teve um desempenho também baixo comparado ao ano de 2015, a variação negativa de 0,5, ou seja, em 2015 o desempenho foi melhor que em 2017. A maior variação positiva foi de Sergipe (10,7) e a maior variação negativa foi da Paraíba (-9,9).

O diagnóstico decorrente da análise desses dados nos diz que a situação do ensino de Matemática no estado da Bahia está aquém do esperado, sendo que o quadro no Brasil como um todo não é muito diferente. Sabemos que a identificação dos motivos desse quadro é muito complexa, mas acreditamos que a implementação de metodologias que usem a ludicidade e a contextualização visando estimular o aluno a desenvolver o raciocínio lógico, a criatividade, a sociabilidade e o trabalho em equipe podem contribuir no auxílio da melhoria almejada. É nesse sentido que esperamos que a oficina proposta neste trabalho venha a ajudar no ensino de Geometria.

2 Ludicidade, Contextualização e as Oficinas de Matemática

Neste capítulo, discorremos sobre a ludicidade e sua importância no processo de ensino e aprendizagem possibilitando a criatividade, a motivação e o engajamento dos alunos nas atividades; a contextualização como recurso para possibilitar a compreensão e o entusiasmo do aluno em relação ao conteúdo trabalhado em sala de aula, destacando as histórias em quadrinhos como um dos recursos contextuais para a nossa proposta de trabalho; as oficinas pedagógicas como ferramenta lúdica para auxiliar os educadores na sua prática docente, em especial abordaremos a Oficina de Matemática explicitando recomendações gerais para sua aplicação que foram propostas nos trabalhos de Pereira (2017) e de Araújo (2017) e que acreditamos possam ser seguidas em todas as oficinas de matemática.

2.1 A Ludicidade

Semanticamente, "lúdico" significa feito através de jogos, brincadeiras, atividades criativas. Isto é, toda atividade que envolva divertimento, prazer e criatividade faz parte do lúdico. O lúdico abraça a liberdade, a espontaneidade e a ação de quem pratica a brincadeira ou atividade, brincadeira esta que deve influenciar positivamente no processo de aprendizagem em todas as fases da vida. Para Cunha (2007), "O estímulo aos processos criativos, a manutenção do prazer na atividade e o cultivo ao autoconceito positivo são princípios fundamentais no processo educacional". Sendo assim, o lúdico pode estar presente na aprendizagem e no desenvolvimento intelectual e social dos alunos.

As atividades lúdicas ajudam o docente a introduzir conceitos de forma prazerosa, motivacional e indutiva, de conteúdos ainda não estudados ou já estudados. Além disso, trabalha a socialização e a superação das limitações e das frustrações dos alunos. De acordo com Kishimoto (2010, p. 42):

> [...] a utilização do jogo potencializa a exploração e a construção do conhecimento, por contar com a motivação interna, típica do lúdico, mas o trabalho pedagógico requer a oferta de estímulo externos e a influência de parceiros...".

O jogo descrito por Kishimoto pode consistir em atividades lúdicas que exploram a imaginação e o brincar do aluno, possibilitando a interação entre o teórico (conteúdo) e a prática (concreto). Para Vygotsky (1991), "a criança reorganiza suas experiências. Oferecer oportunidades para a criança brincar é criar espaço para a reconstrução do conhecimento". Ou seja, oferecer atividades lúdicas, como por exemplo as oficinas didáticas que possuem componentes lúdicos, é um recurso a mais para auxiliar no desenvolvimento do senso crítico, do conhecimento e da motivação aos discentes no processo ensino-aprendizagem. Segundo Teixeira (1995, p. 23), as situações lúdicas mobilizam esquemas mentais. Sendo uma atividade física e mental, a ludicidade aciona e ativa as funções psico-neurológicas e as operações mentais, estimulando o pensamento.

Dessa forma, atividades lúdicas tendem a potencializar ainda mais o entendimento do conteúdo apresentado em sala de aula e viabilizam a construção do conhecimento de forma prazerosa, garantindo aos discentes a motivação necessária para uma boa aprendizagem. Por outro lado, essas atividades desenvolvem as habilidades sociais, a cooperação, a persistência, o respeito às regras e a ampliação do conhecimento do aluno.

2.2 Contextualização

A matemática é uma disciplina que envolve conceitos abstratos que, no modelo de ensino tradicional, em geral, são abordados sem um contexto, seja ele histórico, dentro da própria matemática ou relacionado com a realidade do aluno. Na escola, a forma de avaliar, geralmente, se dá através de provas escritas com questões que envolvem pouca contextualização. Assim, muitas vezes, as questões vêm de forma objetiva, o que não dá espaço para os educandos pensarem e responderem com perspectivas diferentes. Sendo assim, acreditamos que o uso da contextualização tanto nas avaliações quanto em atividades pedagógicas é importante para fazer a ponte entre o mundo abstrato e o real de forma compreensiva e acessível. Para Spinelli (2011),

> [...] os contextos de ensino são agentes que dão vida às abstrações, na medida em que configuram o objeto de estudo sobre uma rede de significações em que diversos conceitos se associam, permitindo, dessa forma, que o objeto de conhecimento seja visto como um feixe de relações, estabelecido a partir do conjunto de circunstâncias que caracteriza o contexto adotado". (SPINELLI, 2011, p. 05)

Mas para contextualizar, o professor deve ter domínio do conteúdo a ser contextualizado e do processo de contextualização em si. Ou seja, é ideal que o educador tenha a base teórica para fazer essa ponte entre o conteúdo e a contextualização pensando no seu público. Como afirma Maioli (2012, p. 14), “é fundamental que o professor tenha embasamento teórico sobre como pode se dar essa relação (sujeito e objeto). [...] A nosso ver, a ideia de contextualização passou a ser incorporada ao discurso pedagógico, mas não com a explicitação das teorias que a sustentam”.

Para Vasconcellos (2008),

> [...] contextualizar é apresentar em sala de aula situações que deem sentido aos conhecimentos que desejamos que sejam aprendidos, por meio

> da problematização, resgatando os conhecimentos prévios e as informações que os alunos trazem, criando, dessa forma, um contexto que dará significado ao conteúdo, isto é, que o conduza à sua compreensão". (VASCONCELLOS, 2008, p. 49)

Nesse sentido, nossa proposta parte de situações-problema que, na medida do possível, trazem um contexto mais próximo da realidade dos alunos, por exemplo, ao utilizar trilhos de trens, um jogo de computador ou um bolo para trabalhar conceitos relacionados a poliedros. Acreditamos que isso ajude no resgate de conteúdos estudados anteriormente de forma que a aprendizagem de novos conteúdos seja significativa.

Um exemplo clássico de ausência de contextualização é a prática de ensino de fórmulas para o cálculo do volume de um sólido. O professor pode apenas mostrar a forma geométrica e, a partir do reconhecimento de alguns elementos, mostrar como se calcula seu volume através de uma fórmula, e, nas provas pode se limitar a cobrar o uso mecânico da mesma. Alternativamente, ele poderia preparar uma situação-problema que use o conhecimento prévio do aluno com relação a essa forma geométrica (latas de conservas, reservatórios etc) para contextualizar a introdução e testagem dessa fórmula. Por exemplo, no caso do cilindro poderia ser levada para a sala de aula uma lata de conserva desse formato para que o aluno meça e registre suas dimensões e, na sequência, compare o volume calculado com os dados constantes no rótulo da lata. Assim, havendo a oportunidade de contextualizar, o professor não deve hesitar em usar este recurso.

Na oficina proposta nesta dissertação também usaremos histórias em quadrinhos como ferramenta de apoio à contextualização. A importância deste recurso no processo da construção do saber é vista na afirmação de Araújo, Costa e Costa (2008),

> É importante reforçarmos que a utilização das histórias em quadrinhos em sala de aula como possível recurso didático-pedagógico e, até mesmo, como metodologia de ensino, pode ser um instrumento viável e prático no sentido de poder levar o aluno a uma melhor compreensão do conteúdo da disciplina apresentado durante as aulas, sem falar que os quadrinhos podem ser um "estimulante" para sensibilizar o aluno quanto a questões ou problemas referentes ao seu meio social, como por exemplo, a inclusão social por meio da arte. Isso se justifica pelo fato de esta forma de literatura ser bastante acessível ao público (ARAÚJO; COSTA; COSTA, 2008)

Assim, utilizar a contextualização como recurso pode auxiliar ao professor a melhorar sua prática docente, permitindo que o aluno se envolva e torne um sujeito ativo no processo de ensino-aprendizagem. Isto pode ser potencializado com o uso de histórias em quadrinhos por se tratar de um recurso que costuma divertir e envolver além de estimular o imaginário dos alunos.

2.3 Oficinas Pedagógicas de Matemática

O processo de aprendizagem é contínuo e transformador, sendo assim, o docente deve procurar recursos que auxiliem nesse processo de forma prazerosa e didática. Dentre os recursos lúdicos que o professor poderá utilizar em sala de aula, podemos citar as oficinas pedagógicas como exemplo principal.

Para Freitas (2020, p. 15) "para haver aprendizagem precisa-se de coisas simples e interessantes, pois basta que educadores opinem práticas pedagógicas nas quais o elemento lúdico é concebido como fio condutor". De acordo com Anastasiou e Alves (2004, p. 69), "o professor deverá ser um verdadeiro estrategista, o que justifica a adoção do termo estratégia, no sentido de estudar, selecionar, organizar e propor as melhores ferramentas facilitadoras para que os estudantes se apropriem do conhecimento". Assim, cabe ao professor criar ou desenvolver métodos, recursos ou estratégias que facilitem o processo de ensino-aprendizagem. A continuação, veremos que as oficinas pedagógicas se tornam recursos didáticos nos quais o professor faz a ponte do teórico para o prático de forma lúdica propiciando o interesse pelo conteúdo a ser desenvolvido através dessas atividades.

2.3.1 O que são as oficinas pedagógicas

Oficinas pedagógicas são instrumentos de apoio didático pedagógico que visam a formação do conhecimento construído por meio do trabalho coletivo e suprir as dificuldades de aprendizagem relacionadas com o conteúdo dado em sala de aula.

De acordo com Candau (1999):

> [...] a oficina é concebida como uma realidade integradora, complexa e reflexiva, na qual a relação teoria-prática é a força motriz do processo pedagógico. Está orientada à promoção constante da comunicação com a realidade social e para ser um grupo de trabalho altamente participativo no qual cada um é um membro a mais do grupo e dá sua contribuição específica"

As oficinas pedagógicas são espaços de construção coletiva de conhecimento, de análise da realidade, de confronto entre o teórico e o prático, da socialização e da ludicidade. Segundo Pereira (2017, p. 15): "uma oficina pedagógica se constitui em um espaço destinado à realização de uma atividade que requer participação, leitura, discussão de textos, vivências diversas relacionadas ao desenvolvimento de tarefas propostas ao coletivo, fica evidente que se trata de um espaço onde se aprende em conjunto uns com os outros".

Para Vieira e Volquind (2002, p. 11), oficina é:

> [...] uma forma de ensinar e aprender, mediante a realização de algo feito coletivamente. Salienta-se que oficina é uma modalidade de ação. Toda oficina necessita promover a investigação, a ação, a reflexão; combina o

> trabalho individual e a tarefa socializadora; garantir a unidade entre a teoria e a prática.

As oficinas pedagógicas requerem planejamento do tempo a ser utilizado, do conteúdo que será trabalhado, das habilidades, das competências que serão desenvolvidas e do perfil do público alvo. Como descreve Pereira (2017, p. 15): "Oficinas de ensino geralmente são planejadas visando garantir unidade entre a teoria e a prática e consistem de atividades coordenadas que procuram induzir a construção de saberes, decorrentes principalmente, do conhecimento prévio, das habilidades, dos interesses, das necessidades, dos valores e julgamentos dos participantes". Porém, conhecendo a realidade das escolas, sabemos que não é fácil articular projetos que se distanciem do modelo de aula tradicional, mas acreditamos que é exatamente na concepção e execução deste tipo de projetos que o professor tem um ganho substancial no seu aprimoramento profissional. Conforme afirma Gianotto (2006),

> Ao priorizar a prática, tão escassa da sala de aula, as oficinas não somente despertam o interesse dos alunos, mas também constitui um desafio para o professor no que se refere ao seu planejamento e execução, assim como ao exigir, não somente leitura, mas ainda a capacidade de criar e desenvolver atividades que fujam da rotina, elaboração de metodologias, definições de dinâmicas e a busca de parcerias, para o enriquecimento do trabalho. Uma experiência cansativa, porém muito gratificante, que permite praticar a interdisciplinaridade tão discutida atualmente. (GIANOTTO, 2006, p. 4)

O papel do professor nas oficinas será de mediador do conhecimento, isto é, coloca-se como ponte entre aluno e conhecimento. Dessa forma, o educador evidencia que o conhecimento está voltado para o aluno e para a aprendizagem e, consequentemente, ele ensina e aprende ao mesmo tempo. Paulo Freire afirma:

> Se, na verdade, o sonho que nos anima é democrático e solidário, não é falando aos outros, de cima para baixo, sobretudo, como se fôssemos os portadores da verdade a ser transmitida aos demais, que aprendemos a escutar, mas é escutando que aprendemos a falar com eles. (FREIRE, 1998, p. 127)

Logo, o professor não pode pensar que é detentor do conhecimento e nem ter uma postura de superioridade diante dos alunos, pois essas atitudes inibem a participação dos estudantes e, dessa forma, dificultam o êxito do processo de ensino-aprendizagem, além disso, pela rejeição existente, este quadro se agrava no ensino de Matemática. Como mediador do conhecimento, o professor deve saber ouvir os educandos. Com isso, o processo de aprender torna-se mútuo, compartilhado, respeitoso e, quando bem dirigido, pode ajudar a identificar, de forma individualizada, os problemas de aprendizagem dos alunos.

2.3.2 O que são Oficinas de Matemática

Oficinas de Matemática são oficinas pedagógicas voltadas para o ensino do conteúdo matemático. Elas estimulam um ambiente onde o aprendizado de matemática aconteça de forma lúdica, prazerosa e criativa, fazendo a ponte entre o teórico e o prático, além de estimular o desenvolvimento do senso crítico.

Nessas oficinas os alunos formam seus grupos, expõem suas ideias, criam estratégias e soluções para uma determinada situação-problema, assim, eles estão desenvolvendo sua autonomia dentro de um processo educacional, como defendido por Piaget (1948):

> O principal objetivo da educação deve ser suscitar indivíduos autônomos, ou seja, governados por si mesmos, tornando-se capazes de tomar decisões próprias, ao contrário da heteronomia, que significa ser governado por outra pessoa, acreditando no outro, sem críticas - o outro é quem decide.

Isto também está em consonância com o conceito de "autonomia moral", como explicam Kamii e Joseph (1992, p. 73): "uma pessoa moralmente autônoma é governada pelo que ela acredita ser correto e não por um sistema de punições e recompensas".

Para D'Ambrósio (1994), a verdadeira educação é uma ação enriquecedora para todos os que com ela se envolvem, e sugere que em vez de despejarmos conteúdos desvinculados da realidade nas cabeças dos alunos, devemos aprender com eles, reconhecer seus saberes e, juntos, buscarmos novos conhecimentos. É nessa linha, que optamos pelo desenvolvimento de uma oficina de matemática sobre conteúdos de Geometria, pois entendemos que o seu caráter lúdico e o papel do professor-mediador podem constituir um ambiente propício à curiosidade, ao tratamento de conteúdos matemáticos, à solução de situações-problemas, à criatividade, enfim, à aprendizagem significativa de matemática.

A seguir, descreveremos os objetivos gerais da nossa proposta e algumas recomendações que acreditamos que toda oficina de matemática deverá seguir. Tais recomendações foram propostas nos trabalhos de Pereira (2017) e de Araújo (2017) que fazem parte de um grupo de pesquisa que desenvolveu um tipo especial de Oficina de matemática, chamada Oficina de Matemática Experimental (OME), no Colégio da Polícia Militar Rômulo Galvão (CPMRG), localizado na cidade de Ilhéus-Bahia.

2.4 Objetivos Gerais das Oficinas de Matemática

Os objetivos gerais das Oficinas de Matemáticas estão divididos em matemáticos e não matemáticos. Os objetivos matemáticos, como o próprio nome faz referência, são estabelecidos após a definição da matemática por trás da proposta. No caso da Oficina de Matemática, proposta neste trabalho, o pano de fundo é a Geometria Espacial, em específico os poliedros convexos, o Teorema de Euler e os poliedros regulares, assim, os objetivos matemáticos estão relacionados a este segmento da matemática. Entre tais objetivos, podemos elencar que os alunos: consigam compreender, reconhecer e diferenciar elementos que compõem um poliedro; tenham noção de objetos que possuem mais de uma dimensão e ocupam lugar no espaço; entendam o conceito de poliedro regular e a existência de apenas cinco poliedros regulares; adquiram conhecimento para entender e aplicar o Teorema de Euler. Em relação aos objetivos não matemáticos, queremos estimular nos alunos o trabalho em equipe, a socialização e a criatividade.

2.4.1 Recomendações Gerais para aplicar as Oficinas

A finalidade principal desta seção é apresentar recomendações que facilitam a aplicação das atividades das oficinas e melhoram o desempenho do educador. Como, por exemplo, como lidar com situações e entraves que poderão surgir no início, no meio e no fim durante a aplicação das oficinas. O educador deverá respeitar o tempo dos grupos nas mesas, ter uma boa logística e controle da "boa bagunça" que poderá surgir com o entusiasmo dos alunos no desenvolvimento das atividades. A seguir descreveremos em detalhe estas recomendações.

2.4.2 Evite dar explicações longas

Durante as oficinas deve-se evitar dar explicações longas e definitivas à turma, a pequenos grupos ou a alunos individualmente. Os objetivos da oficina não devem ser mencionados durante o processo das atividades. Estes objetivos devem ser atingidos como resultado das discussões feitas em grupos, mas os alunos não precisam estar cientes deles. Por exemplo, na última etapa da oficina proposta neste trabalho e a partir da identificação de um padrão, os alunos tentarão deduzir a relação de Euler para poliedros convexos através da análise dos dados de uma tabela previamente preenchida por eles. Assim, o papel de mediação do professor será fundamental para eles conseguirem propor essa relação sem que seja necessário mostrá-la para eles.

Em geral, os alunos começam a fazer perguntas sobre o que pode ou não pode ser feito. Se as perguntas surgirem durante as etapas das atividades das oficinas, se recomenda socializá-las com o grupo ao qual pertence o aluno; ou, se os membros do grupo estiverem muito concentrados com o problema, o melhor é conversar individualmente com quem fez a pergunta. Todas as questões técnicas ou normativas devem ser discutidas na turma, em pequenos grupos, ou individualmente dependendo da situação e as normas devem ser decididas com a turma. Se surgir uma questão normativa que já foi discutida com a turma, se recomenda procurar a ajuda de algum aluno do grupo para que lembre qual foi à decisão da turma. Caso alguma questão técnica já tenha sido discutida com outro aluno ou grupo, uma boa ideia é orientar quem fez a pergunta consultar aquele aluno ou grupo que já tirou essa dúvida. Sempre que possível, o professor deve participar também dessa troca de informação.

As respostas e soluções devem ser discutidas com os alunos, individualmente, em grupos pequenos, ou com a turma toda; dependendo da atividade. Ao perceber que um aluno está com dificuldades para resolver um problema ou criar figuras, deve-se discutir estratégias e não fornecer a solução do mesmo. Se um aluno está cometendo um erro no procedimento da solução ou da criação, devemos ajudá-lo a perceber o erro e a descobrir como consertá-lo. Na nossa proposta, há diversas atividades de construção de figuras geométricas tridimensionais utilizando material concreto nas quais, acreditamos, surgirão de forma natural discussões e dúvidas dos participantes.

No final da atividade é importante conversar com a turma sobre o que foi realizado; induzindo os alunos a expor o que aprenderam com a atividade. Como parte desta discussão final, deve-se comentar informalmente sobre os objetivos matemáticos e não matemáticos da atividade. Neste momento, o professor poderá exibir vídeos com animações que foram preparados pelo autor dessa dissertação como material de apoio. O objetivo é que após um exaustivo trabalho, os vídeos sirvam para o amadurecimento dos conceitos abordados. Assim, por exemplo, existem animações mostrando o passo a passo da construção de poliedros regulares.

2.4.3 Mantenha uma "bagunça produtiva"

O uso de material concreto e histórias em quadrinhos são características lúdicas da proposta. Ao trabalhar com material manipulável (jujubas, palitos, material impresso, elásticos, massa de modelar etc) para atingir objetivos matemáticos nas atividades, espera-se um grande envolvimento e empolgação por parte dos alunos. Um dos pilares do sucesso da oficina é que essa empolgação não seja inibida, ao contrário, recomenda-se que seja utilizada como motor de envolvimento dos alunos na oficina, isto significa que o professor, no seu papel de mediador, deve procurar manter uma "bagunça produtiva". Dessa forma, surge o desafio de garantir que todos os alunos estejam sempre realizando alguma atividade. Como iremos trabalhar com construção de figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais, dentro das atividades preparamos atividades complementares chamadas de "cartas na manga" direcionadas a alunos que terminaram antes ou que precisam de um trabalho personalizado no desenvolvimento das atividades.

2.4.4 Mantenha uma boa logística

Em algumas escolas já existem espaços destinados a atividades pedagógicas alternativas, mas na maioria delas são usadas as próprias salas de aula para essas atividades. Sendo assim, se faz necessário planejar toda a ação necessária para a execução da oficina.

Por exemplo, definir e arrumar o local de aplicação; preparar com antecedência o material de apoio; definir o número de participantes na oficina: impressões, conexão à internet, material manipulável; coordenar antecipadamente com a direção escolar o apoio necessário para o normal desenvolvimento da oficina.

Para poder obter informações que possam contribuir no melhoramento da oficina proposta, existe a necessidade de desenvolver algum tipo de registro das atividades, o que envolve o armazenamento e classificação do material utilizado pelos participantes para análise posterior.

2.4.5 Respeite o tempo de cada grupo

Após o aluno terminar a atividade, recomenda-se ao professor passar para a próxima atividade sempre que todos os membros do grupo tiverem terminado. Quando alguns alunos de um grupo tiverem terminado com alguma atividade, podemos incentivá-los a ajudar quem ainda não terminou ou tem dificuldade com o problema proposto, mas recomendando que não se diga como se faz a atividade, nem que a façam por eles. Caso alguns não aceitem essa orientação, como explicado antes, poderá ser usada alguma “carta na manga”.

3 Poliedros

Neste Capítulo apresentaremos os conceitos matemáticos que fundamentam a proposta de oficina deste trabalho. As principais referências utilizadas são Muniz Neto (2012), Muniz Neto (2013) e Dolce e Pompeo (2005).

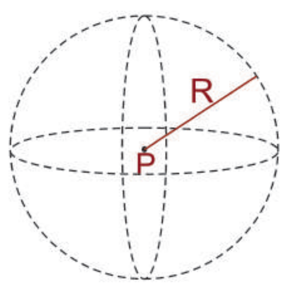
3.1 Alguns conceitos Topológicos

Os conceitos e resultados topológicos apresentados nesta seção são necessários para a definição de poliedro que seguiremos neste texto.

Definição 1 (Bola Aberta)**.** Seja A um conjunto de pontos do espaço. Dados um ponto $P \in A$ e um número real $R > 0$, definimos como bola aberta de centro P e raio R, o conjunto dos pontos $Q \in A$ para os quais a distância de Q ao ponto P é menor que R. Indicaremos este conjunto com a notação $\mathcal{B}(P;R)$. Em termos matemáticos:

$$\mathcal{B}(P;R) = \{Q; \overline{PQ} < R\}$$

Figura 15 – Bola aberta de centro P e raio $R > 0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

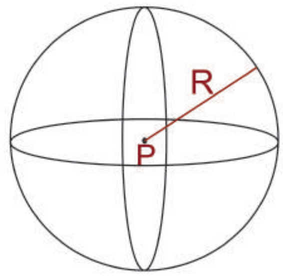
Definição 2 (Bola fechada)**.** Sejam $P \in A$ e $R > 0$ um número real, definimos como bola fechada de centro P e raio R, o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a R do ponto P. Indicaremos este conjunto com a notação $\overline{\mathcal{B}(P;R)}$. Em termos matemáticos:

$$\overline{\mathcal{B}(P;R)} = \{Q; \overline{PQ} \leq R\}$$

Definição 3 (Ponto Interior)**.** Seja A um conjunto de pontos do espaço. Um ponto $P \in A$ chama-se **ponto interior** de A se existir $R > 0$ tal que

$$\mathcal{B}(P;R) \subset A.$$

Figura 16 – Bola fechada de centro P e raio $R > 0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Isto quer dizer que todos os pontos suficientemente próximos de P ainda pertencem ao conjunto A. O conjunto de todos os pontos interiores de A é denotado por $int(A)$.

Definição 4 (Conjunto Aberto)**.** A é aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, $A \subset int(A)$.

Observação 1. Como sempre vale $int(A) \subset A$, segue que **um conjunto A é aberto se, e somente se,** $int(A) = A$.

Observação 2. O conjunto vazio, tradicionalmente denotado por $\emptyset$, é um conjunto aberto, pois se $\emptyset$ não fosse aberto, existiria em $\emptyset$ algum ponto que não seja interior. Como não existe ponto no conjunto vazio, somos forçados a admitir que o conjunto vazio é aberto.

Exemplo 1. A bola aberta $\mathcal{B}(P;R)$ é um conjunto aberto.

Demonstração. Para mostrarmos que $\mathcal{B}(P;R)$ é aberto, devemos mostrar que $\mathcal{B}(P;R) \subset int(\mathcal{B}(P;R))$. Assim, seja $Q \in \mathcal{B}(P;R)$, então $\overline{PQ} < R$. Tomando $r = R - \overline{PQ} > 0$, afirmamos que $\mathcal{B}(Q;r) \subset \mathcal{B}(P;R)$. De fato, dado $Z \in B(Q;r)$ temos $\overline{PZ} \leq \overline{PQ} + \overline{QZ} < \overline{PQ} + r = R$, assim, $Z \in \mathcal{B}(P;R)$. Logo, $Q \in int(\mathcal{B}(P;R))$ e o resultado segue. Portanto, $\mathcal{B}(P;R)$ é um conjunto aberto. $\square$

Definição 5 (Conjunto Fechado)**.** Dizemos que A é um conjunto fechado quando o seu complementar, A^c, for aberto.

A seguir veremos um exemplo de conjunto fechado.

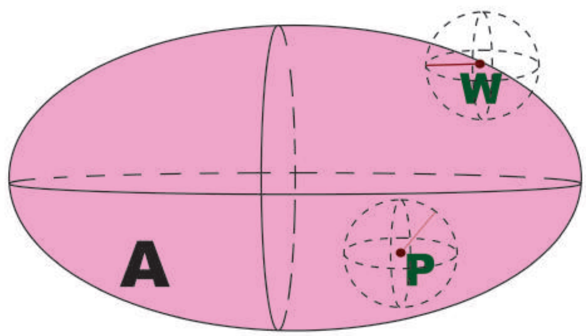
Exemplo 2. A bola fechada $\overline{\mathcal{B}(P;R)}$ é um conjunto fechado.

Demonstração. Basta provar que $\overline{\mathcal{B}(P;R)}^c$ é aberto. De fato, seja $Q \in \overline{\mathcal{B}(P;R)}^c$, isto significa que $\overline{PQ} > R$. Tomando $r = \overline{PQ} - R > 0$ afirmamos que $\overline{\mathcal{B}(Q;r)} \subset \overline{\mathcal{B}(P;R)}^c$. De fato, dado $Z \in \mathcal{B}(Q;r)$ temos $\overline{ZQ} < r = \overline{PQ} - R$, daí, $R < \overline{PQ} - \overline{ZQ}$. Agora, como $\overline{PQ} \leq \overline{PZ} + \overline{ZQ}$ então $\overline{PQ} - \overline{ZQ} \leq \overline{PZ}$, assim, $R < \overline{PZ}$, isto é, $Z \in \overline{\mathcal{B}(P;R)}^c$, o que prova o afirmado. Logo, Q é um ponto interior de $\overline{\mathcal{B}(P;R)}^c$, daí, $\overline{\mathcal{B}(P;R)}^c$ é um conjunto aberto, isto é, $\overline{\mathcal{B}(P;R)}$ é um conjunto fechado. $\square$

Definição 6 (Fronteira)**.** Seja A um conjunto de pontos do espaço. Dizemos que P é ponto fronteira de A se toda bola aberta centrada em P contiver pontos de A e do seu complementar A^c. O conjunto de todos os pontos fronteira de A é chamado de fronteira de A e será denotada por ∂A. Simbolicamente, escrevemos:

$$P \in \partial A \Leftrightarrow \forall\ R > 0, \quad \mathcal{B}(P;R) \cap A \neq \emptyset \ \text{ e } \ \mathcal{B}(P;R) \cap A^c \neq \emptyset$$

Figura 17 – P é ponto interior de A e W é ponto de fronteira de A



Fonte: Elaborada pelo autor.

Lema 3.1.1. Um conjunto A de pontos do espaço é fechado se, e somente se, $\partial A \subset A$. Além disso, temos:

$$A = int(A) \cup \partial A$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja A um conjunto fechado. Como A^c é aberto e $A \cap A^c = \emptyset$ então para demonstrarmos que $\partial A \subset A$ basta provarmos que $\partial A \cap A^c = \emptyset$. De fato, seja $P \in A^c$, então, existe $R > 0$ tal que $\mathcal{B}(P;R) \subset A^c$, assim, $P \notin \partial A$. Dessa forma, $\partial A \cap A^c = \emptyset$ como queríamos demonstrar.

$\Leftarrow$) Seja A um conjunto contendo todos os seus pontos fronteira. Se $P \notin A$, então, $P \notin \partial A$. Então, existe uma bola centrada em P contida inteiramente em A^c. Isto é, P é um ponto de interior de A^c. Logo, A^c é aberto. Portanto, A é fechado.

Agora, falta demonstrar que $A = int(A) \cup \partial A$.

Seja A um conjunto fechado, logo, pelo que provamos acima, $\partial A \subset A$ e como $int(A) \subset A$, temos que $int(A) \cup \partial A \subset A$. Por outro lado, seja $P \in A$, temos duas possibilidades a considerar:

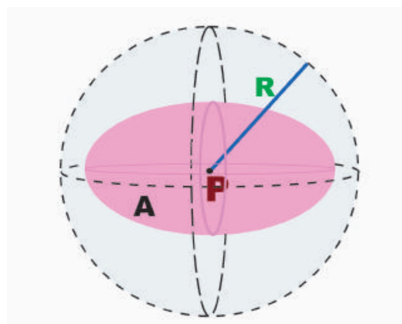
i) $P \in int(A)$.

ii) $P \notin int(A)$. Neste caso, toda bola aberta centrada em P contém pontos do complementar de A. Como $P \in A$, temos: $\mathcal{B}(P;R) \cap A \neq \emptyset$ e $\mathcal{B}(P;R) \cap A^c \neq \emptyset$, $\forall\ R > 0$. Logo, $P \in \partial A$. Assim, $A \subset int(A) \cup \partial A$.

Portanto, $A = int(A) \cup \partial A$, se A for um conjunto fechado. $\square$

Definição 7 (Conjunto Limitado)**.** Seja A um conjunto de pontos do espaço. Dizemos que A é limitado se está contido em alguma bola aberta.

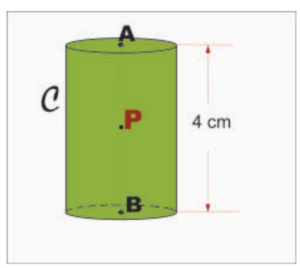
Figura 18 – Conjunto A contido em uma bola aberta de centro P e raio $R > 0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3. Considere o sólido abaixo. Ele é um conjunto limitado?

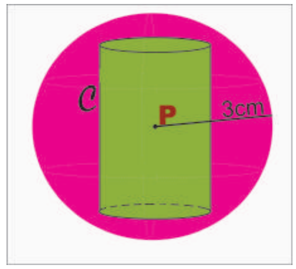
Figura 19 – Cilindro reto $\mathcal{C}$ de raio da base 1cm e altura 4cm



Fonte: Elaborada pelo autor.

De fato, o cilindro $\mathcal{C}$ é um conjunto limitado, pois, por exemplo, ele está contido em $\mathcal{B}(P;3)$, onde P é o ponto médio do seu eixo central.

Figura 20 – Cilindro reto $\mathcal{C}$ contido em $\mathcal{B}(P;3)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Poliedros

Nessa seção, apresentaremos a definição de poliedro, alguns exemplos de sólidos que são poliedros e de outros que não o são.

Etimologicamente, a palavra Poliedro vem das palavras grega *poli* que significa "muitas, várias", e *edro* que significa "face". Neste trabalho seguiremos a seguinte definição que pode ser encontrada em Muniz Neto (2013, p.318).

Definição 8. Um poliedro é um conjunto fechado e limitado do espaço, com interior não vazio e cuja fronteira consiste da união de um número finito de polígonos satisfazendo as condições a seguir:

(a) Dois polígonos quaisquer não estão contidos em um mesmo plano.

(b) Se dois polígonos se intersectam, então eles têm um vértice ou um lado comum.

(c) Se dois polígonos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ não se intersectam, então existem polígonos $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$, $\mathcal{P}_2$, $\cdots$, $\mathcal{P}_k = \mathcal{Q}$, tais que $\mathcal{P}_i$ e $\mathcal{P}_{i+1}$ se intersectam, para $1 \leq i < k$

De acordo com o Lema 3.1.1, por ser um conjunto fechado, temos $\partial\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$, para todo poliedro $\partial\mathcal{P}$. Por vezes, nos referiremos $\mathcal{P}$ como a **superfície** de $\mathcal{P}$ e os polígonos que a compõem como as **faces** de $\mathcal{P}$. As **arestas** e os **vértices** de $\mathcal{P}$ são, respectivamente, os lados e os vértices das suas faces.

Observação 3. Na seguinte tabela são apresentados alguns nomes dados a poliedros de acordo a seu número de faces.

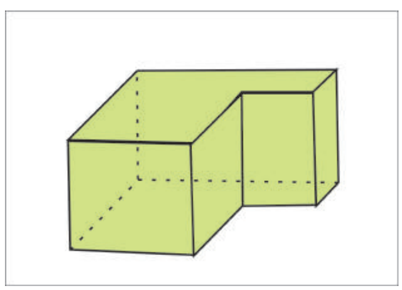
Número de faces	Nome do poliedro
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro ou Cubo
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Undecaedro
12	Dodecaedro
$\vdots$	$\vdots$
20	Icosaedro

Se o poliedro tiver n faces, sendo $n > 20$, ele recebe apenas o nome de **poliedro de n faces**.

A seguir, discutiremos informalmente alguns exemplos de sólidos que são poliedros e outros que não o são.

Exemplo 4. O sólido a seguir é um poliedro?

Figura 21 – Sólido a ser analisado



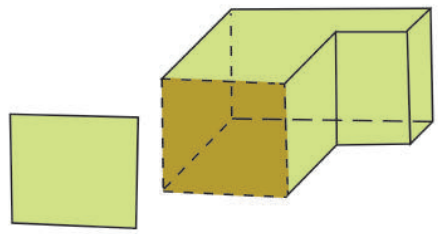
Fonte: Elaborada pelo autor.

O sólido mostrado na figura é um conjunto fechado e limitado. Sua fronteira é formada pela união dos polígonos que limitam a parte interna. Qualquer par destes polígonos não são coplanares e, neste caso, quando dois desses polígonos se intersectam, o fazem num lado comum. Também pode ser verificado que a fronteira satisfaz a *(c)* da Definição 8. Dessa forma, o sólido em análise é um poliedro.

Exemplo 5. Ao retirarmos uma face do sólido da Figura 21, ainda teremos um poliedro?

O sólido apresentado não é mais um poliedro, pois não é um conjunto fechado. De fato, a face retirada faz parte da fronteira do sólido remanescente, assim, ao não conter parte da fronteira, ele não pode ser um conjunto fechado.

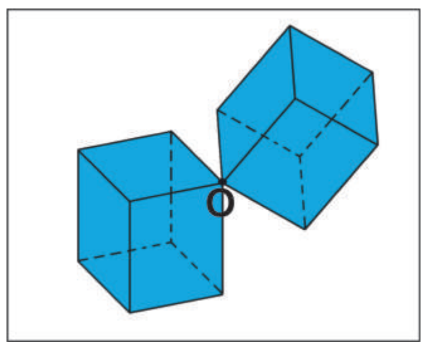
Figura 22 – Poliedro com face retirada



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 6. Na figura abaixo, temos dois hexaedros unidos por um vértice O, podemos afirmar que o sólido resultante desta junção é um poliedro?

Figura 23 – Junção de hexaedros 1



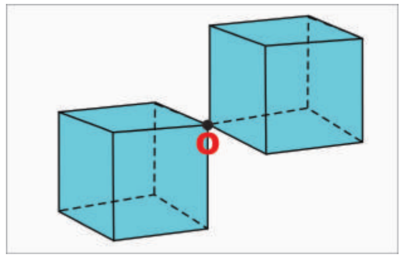
Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos observar que esse sólido é um conjunto fechado e limitado. A fronteira do sólido é formada pela união das fronteiras dos dois hexaedros. Veja que nenhum par de polígonos que constituem a fronteira são coplanares, além disso, quando se intersectam, obtemos um lado comum ou um vértice. Também dados dois polígonos que não se intersectam é possível chegar de um para outro através de polígínos que se intersectam. Assim este sólido, segundo a definição 8, adotada nesta dissertação, é um poliedro.

Observação 4. Embora, pela definição adotada, o sólido da Figura 23 seja um poliedro, a variante mostrada na Figura 24 não será mais um poliedro pois a fronteira faces coplanares como mostra a Figura 25.

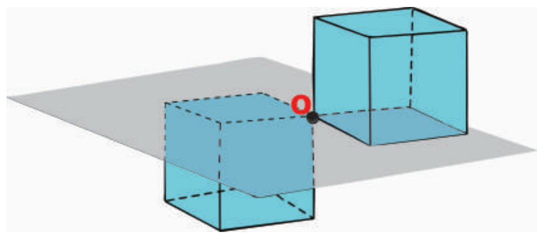
Observação 5. Em Muniz Neto (2012) é dada outra definição de poliedro que inclui a seguinte condição: "é sempre possível, caminhando sobre as faces, ir de um ponto de uma a um ponto qualquer de outra sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas)". A Figura 26 mostra que o sólido da Figura 23 não satisfaz esta condição, por um raciocínio análogo a Figura 24 também não a satisfaz, assim, ambos sólidos não seriam poliedros.

Figura 24 – Junção de hexaedros 2



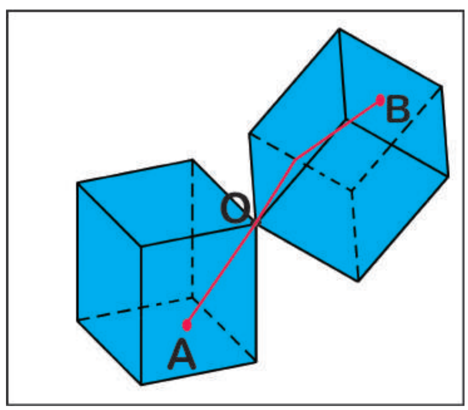
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25 – Junção de hexaedros 3



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 26 – Todo caminho unindo os pontos A e B passa pelo vértice O



Fonte: Elaborada pelo autor.

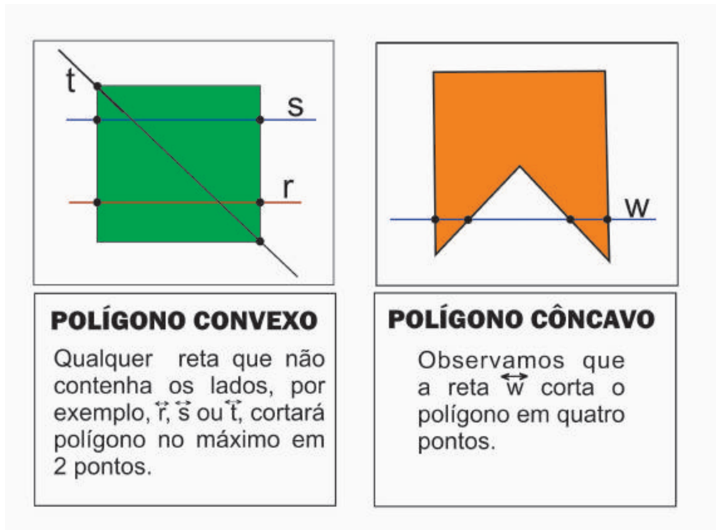
3.3 Poliedros Convexos

Nesta seção, apresentaremos o conceito de poliedro convexo e, para isso, relembraremos a definição de polígono convexo que será usado como motivação. Começamos recordando a definição de polígono convexo (Muniz Neto, 2013, p. 17)

Definição 9. Sejam $n \geq 3$ um natural e A_1, A_2,..., A_n pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2 \ldots A_n$ é um **polígono convexo** se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j mas deixa todos eles em um mesmo semiplano dentre os que ela determina (aqui $A_{n+1} = A_1$). Se um polígono não for convexo, diremos que é **côncavo**.

Usando uma linguagem mais simples, um polígono é convexo se toda reta que não contenha qualquer de seus lados, o corta em no máximo dois pontos (pertencentes a seus lados). Esta propriedade é ilustrada na Figura 27.

Figura 27 – À esquerda temos exemplo de um polígono convexo. À direita um exemplo de polígono côncavo.

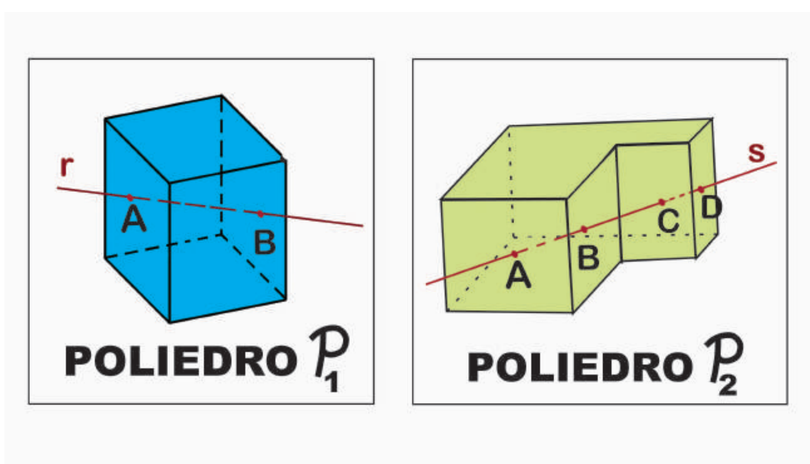


Fonte: Elaborada pelo autor.

Seguindo essa linha adotaremos a seguinte definição.

Definição 10. Dizemos que um **poliedro é convexo** se qualquer reta (não coplanar com nenhuma de suas faces) corta sua superfície em, no máximo, dois pontos. Um poliedro que não é convexo será chamado de **côncavo**.

Figura 28 – Poliedro $\mathcal{P}_1$ convexo e poliedro $\mathcal{P}_2$ côncavo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 28, nota-se que qualquer reta (em particular a reta r) não coplanar com as faces do poliedro $\mathcal{P}_1$ corta sua superfície em no máximo dois pontos, logo, esse poliedro é convexo. Já o poliedro $\mathcal{P}_2$ é côncavo, pois a reta s corta sua superfície em quatro pontos, a saber, A ,B, C e D. Destacamos que o poliedro da Figura 23 é côncavo.

3.4 Teorema de Euler

Nesta seção apresentaremos e demonstraremos o Teorema 3.4.2 (Teorema de Euler) que, como veremos no Capítulo 4, foi a base para a Etapa 4 da oficina proposta neste trabalho.

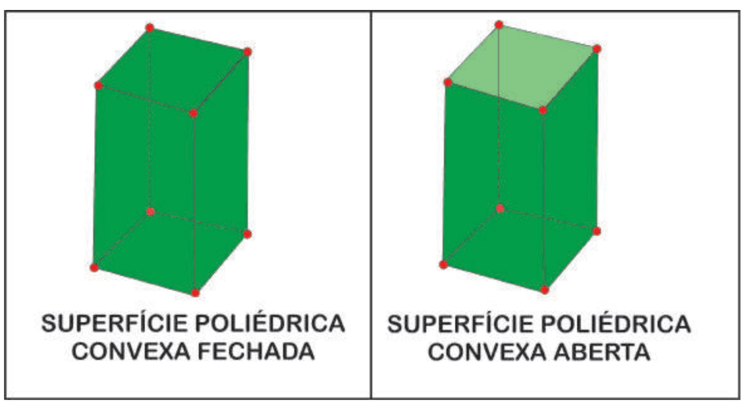
Começaremos com a seguinte definição

Definição 11 (Superfície poliédrica convexa)**.** Chamaremos de **superfície poliédrica convexa fechada** à fronteira (superfície) de qualquer poliedro convexo. Se removermos um número finito de faces de uma superfície poliédrica convexa fechada, deixando as arestas das faces remanescentes, a superfície restante será chamada de **superfície poliédrica convexa aberta**, desde que as arestas que estão em apenas uma face formem uma única poligonal fechada [1]

A Figura 29 mostra exemplos de tais superfícies poliédricas convexas.

..

Figura 29 – Exemplo de superfícies poliédricas convexas fechada e aberta



Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir, demonstraremos um lema que será usado na demonstração do Teorema de Euler

Lema 3.4.1. Numa superfície poliédrica convexa aberta, vale a relação:

$$V + F = A + 1$$

[1] Dados os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a **poligonal** $A_1A_2\ldots A_n$ é o conjunto formado pelos segmentos A_1A_2, A_2A_3,... e $A_{n-1}A_n$. A poligonal $A_1A_2\ldots A_n$ é **fechada** se $A_n = A_1$.

onde V, A e F denotam, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces da superfície.

Demonstração. A prova será feita por indução finita referente ao número de faces da superfície poliédrica convexa aberta. Uma superfície poliédrica convexa aberta de uma face, na verdade, é um polígono convexo. Como em qualquer polígono lados (arestas) e vértices coincidem, temos

$$F = 1 \text{ e } A = V \Rightarrow V + F = A + 1,$$

assim o resultado é válido neste caso. Suponhamos que a mesma fórmula seja válida para uma superfície poliédrica aberta de F' faces, V' vértices e A' arestas. Isto é:

$$V' + F' = A' + 1 \tag{1}$$

Mostraremos que, sob esta suposição, a fórmula será válida para uma superfície poliédrica convexa aberta de $F = F' + 1$ faces, V vértices e A arestas. A figura 30 tenta ilustrar o processo de acrescentar uma face com p lados (arestas) a superfície poliédrica com F' faces.

Figura 30 – Superfície poliédrica aberta com $F' + 1$ faces.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando que das p arestas, q coincidam com arestas já existentes, concluímos que o número de arestas acrescentadas à superfície de F' faces é $p - q$ e, portanto,

$$A = A' + p - q. \tag{2}$$

O número de vértices coincidentes da face acrescentada, é igual ao número de arestas coincidentes mais um, isto é, $q+1$. Então, o número de vértices acrescentados à superfície poliédrica de F' faces será $p - (q + 1)$, assim,

$$V = V' + p - (q + 1). \tag{3}$$

Por fim, usando 2, 3 e 1, obtemos:

$$\begin{aligned} V + F - A &= V' + p - (q+1) + F' + 1 - (A' + p - q) \\ &= V' + F' - A' = 1. \end{aligned}$$

Dessa forma, $V + F = A + 1$ e o processo indutivo está completo. □

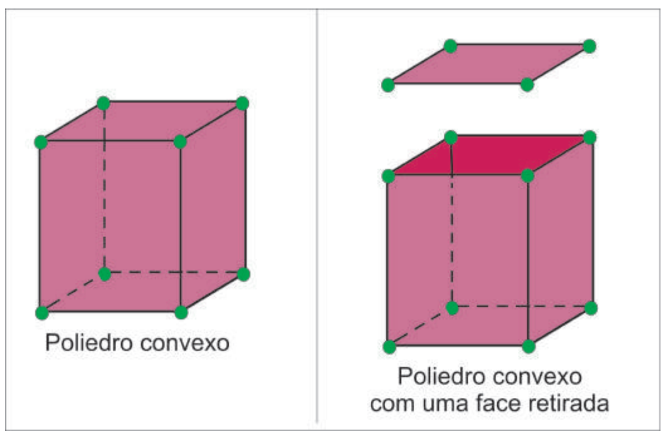
Teorema 3.4.2 (Teorema de Euler)**.** Para todo poliedro convexo vale a relação

$$V + F = A + 2$$

em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

Demonstração. Consideramos um poliedro convexo com V vértices, com A arestas e F faces. Se removermos uma face da superfície poliédrica convexa fechada deste poliedro, obteremos uma superfície poliédrica convexa aberta de $F' = F - 1$ faces, $A' = A$ arestas e $V' = V$ vértices, para a qual vale a relação dada pelo Lema 3.4.1.

Figura 31 – Retirando uma face de um poliedro



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim,

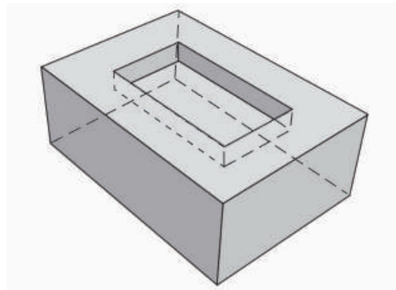
$$\begin{aligned} 1 &= V' + F' - A' \\ & V + F - 1 - A, \end{aligned}$$

donde obtemos $V + F = A + 2$. □

O questionamento que o leitor poderá fazer é: se a hipótese de convexidade for removida, a relação de Euler continuará sendo válida? Com base nessa pergunta vamos analisar os exemplos a seguir.

Exemplo 7. Observe o poliedro a seguir. Esse poliedro é convexo? Ele satisfaz a relação de Euler?

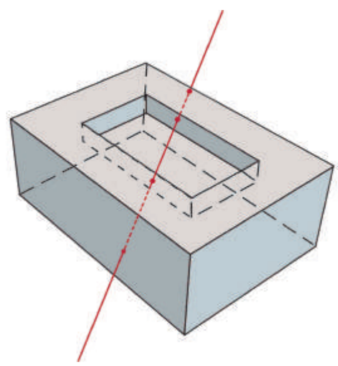
Figura 32 – Poliedro



Fonte: adaptada pelo autor

Esse poliedro é côncavo, pois ao traçarmos a reta mostrada na figura abaixo, ela tocará o poliedro 4 pontos.

Figura 33 – Poliedro

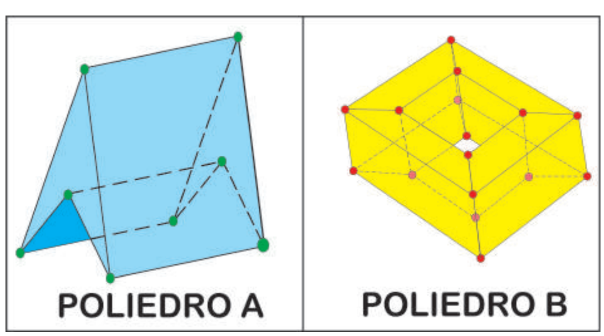


Fonte: adaptada pelo autor

Esse sólido tem 11 faces, 16 vértices e 24 arestas. Assim, temos: $F+V = 11+16 = 27$ e $A+2 = 24+2 = 26$, logo, $F+V \neq A+2$. Portanto, esse poliedro não satisfaz a relação de Euler.

Exemplo 8. Observe os poliedros A e B mostrados na figura abaixo. Esses poliedros são convexos? A relação de Euler é válida para cada um deles?

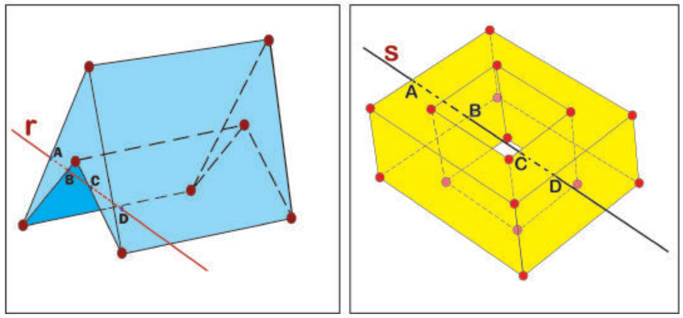
Figura 34 – Poliedro A e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Primeiro, vamos analisar se esses poliedros são convexos. Veja que ao traçarmos as retas r e s nos poliedros A e B, respectivamente, elas cortam esses sólidos em quatro pontos, como mostrado na Figura 35. Logo, esses poliedros são côncavos.

Figura 35 – Retas r e s cortando os poliedros A e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, vamos verificar se a relação de Euler é válida para esses poliedros. Para isso, basta contar o número de faces (F), vértices (V) e arestas (A). Sendo assim, temos:

No poliedro A: $V = 8,\ A = 12$ e $F = 6\ \Rightarrow\ V + F = 8 + 6 = 14 = 12 + 2 = A + 2.$

No poliedro B: $V = 16,\ A = 24$ e $F = 10\ \Rightarrow\ V + F = 16 + 10 = 26 = 24 + 2 = A + 2.$

Portanto, nos poliedros A e B a relação de Euler é válida.

Assim, concluímos que ao retirarmos a hipótese de convexidade, a relação de Euler, em geral, não é válida para poliedros côncavos.

3.5 Poliedros Regulares

Começaremos nesta seção relembrando a definição e alguns exemplos de polígonos convexos regulares. Em seguida, o conceito de poliedros regulares, alguns exemplos e o teorema da existência de apenas cinco poliedros regulares.

Começaremos lembrando a seguinte definição.

Definição 12. Um polígono convexo é regular se tem todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes.

Exemplos de polígonos regulares: quadrados, triângulos equiláteros, pentágonos regulares entre outros.

Citaremos a seguir, a definição de poliedros regulares feita por Muniz Neto (2013, p.327).

Definição 13. Um poliedro convexo é dito regular se as duas condições a seguir forem satisfeitas:

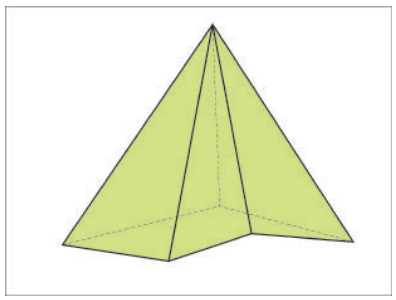
a) Todas suas faces forem polígonos regulares com um mesmo número de arestas.

b) Em cada um de seus vértices incidir um mesmo número de arestas.

Para fixarmos essa definição, vejamos um exemplo:

Exemplo 9. O poliedro a seguir é côncavo, podemos afirmar que ele é regular?

Figura 36 – Sólido Côncavo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Apesar de todos as faces laterais serem triângulos semelhantes, a base não é um triângulo. Portanto, esse poliedro não é regular.

Após o conhecimento sobre poliedro convexo regular, o leitor poderá se questionar sobre quantos poliedros convexos regulares existem. Para responder a esse questionamento, apresentaremos e demonstraremos o Teorema 3.5.1.

Teorema 3.5.1. Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.

Demonstração. Considere um poliedro regular de F faces, V vértices e A arestas. Sendo n o número de lados de cada face e m o número de arestas que concorre em cada vértice. Para um poliedro convexo ser regular, devemos satisfazer as duas condições da definição. Assim, vamos analisá-las:

1) "Todas as suas faces forem polígonos regulares com um mesmo úmero de arestas", isto é, que $n \geq 3$, pois as faces são formadas por polígonos e o de menor lado é o triângulo. E como cada aresta está ligada em duas faces para formar um poliedro. Assim, temos:

$$nF = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{n} \tag{4}$$

2) “Em cada um de seus vértices incidir um mesmo número de arestas". Isso significa que $m \geq 3$, pois cada vértice pode ter três ou mais arestas ligadas a ele. Como cada aresta contém dois vértices, temos:

$$m.V = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{m} \tag{5}$$

É sabido que todo poliedro convexo vale a relação de Euler, ou seja, $F+V = A+2$.

Assim, substituindo (4) e (5) na relação de Euler, temos:

$$\frac{2A}{n} + \frac{2A}{m} = A + 2 \Rightarrow \frac{2A.m + 2An}{n.m} = \frac{Amn + 2mn}{n.m}$$
$$\Rightarrow 2Am + 2An = Amn + 2mn \Rightarrow 2Am + 2An - Amn = 2mn$$
$$\Rightarrow A(2m + 2n - mn) = 2mn \Rightarrow A = \frac{2mn}{2m + 2n - mn}$$

Sabe-se que o denominador é maior que zero, isto é,

$$2m + 2n - mn > 0 \Rightarrow 2n > m(n-2) \Rightarrow m < \frac{2n}{n-2}$$

Pela segunda condição em que $m \geq 3$, temos que:

$$\frac{2n}{n-2} > m \geq 3 \Rightarrow 2n > 3n - 6 \Rightarrow n \leq 6$$

mas se $n = 6 \quad \Rightarrow m < \frac{2\times 6}{6-2} = 3$, o que é uma contradição. Logo, $3 \leq n < 6$.

Assim, temos:

i) Se $n = 3 \Rightarrow A = \frac{2\times 3m}{2m+2\times 3-3m} \Rightarrow A = \frac{6m}{6-m}$. Analisando o denominador, isto é, $6 - m > 0$, temos:

$$\begin{cases} \text{se } m = 5 \Rightarrow A = 30 \Rightarrow F = \frac{2\times 30}{3} = 20 \\ \text{se } m = 4 \Rightarrow A = 12 \Rightarrow F = \frac{2\times 12}{3} = 8 \\ \text{se } m = 3 \Rightarrow A = 6 \Rightarrow F = \frac{2\times 6}{3} = 4 \end{cases}$$

ii) Se $n = 4 \Rightarrow A = \frac{2\times 4m}{2m+2\times 4-4m} \Rightarrow A = \frac{8m}{8-2m} = \frac{4m}{4-m}$. Analisando o denominador, isto é, $4 - m > 0$, temos:

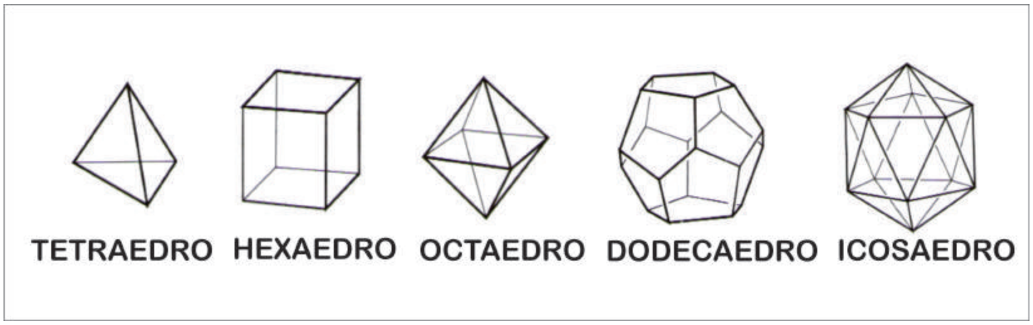
$$\text{se } m = 3 \Rightarrow A = 12 \Rightarrow F = \frac{2\times 12}{4} = 6$$

iii) Se $n = 5 \Rightarrow A = \frac{2\times 5m}{2m+2\times 5-5m} \Rightarrow A = \frac{10m}{10-3m}$. Analisando o denominador, isto é, $10 - 3m > 0$, temos:

$$\text{se } m = 3 \Rightarrow A = 30 \Rightarrow F = \frac{2\times 30}{5} = 12$$

Portanto, existem apenas cinco poliedros regulares formados por quatro faces (**tetraedro**), 6 faces (**hexaedro** ou **cubo**), 8 faces (**octaedro**), 12 faces (**dodecaedro**) e 20 faces (**icosaedro**). □

Figura 37 – Os cinco poliedro regulares



Fonte: Adaptada do livro de Geometria do Profmat

4 Oficina de Matemática

Nesse capítulo apresentaremos a proposta de oficina de matemática objeto dessa dissertação. Ela consiste em quatro etapas.

A primeira etapa tem como principal objetivo fazer o aluno reconhecer, construir e diferenciar figuras geométricas planas e espaciais, bem como seus elementos que os compõem. Nela, os alunos também contarão com uma história em quadrinhos para contextualizar essa ação.

Na segunda etapa, os alunos se depararão com montagem de poliedros regulares, através de material concreto, como, elásticos e desenhos feitos de papel em forma de quadrados, triângulos equiláteros, e pentágonos regulares. O objetivo matemático é construir poliedros regulares e entender o porquê da existência de apenas cinco poliedros regulares. Já os objetivos não matemático são: socialização, trabalho em equipe, afetividade e criatividade.

Na terceira etapa, os alunos serão apresentados ao jogo "Poliedrix" cujo objetivo principal é introduzir conceitos de convexidade e concavidade nos poliedros. O jogo acontecerá em quatro fases e cada fase tem desafio de construir um sólido que completa a sequência. Nessa etapa, os estudantes contarão com os materiais jujubas e palitos para construção dos poliedros.

Na quarta e última etapa, os estudantes aplicarão o conhecimento acumulado durante esses encontros para saber diferenciar e contar os vértices, as faces e as arestas, bem como, identificar poliedros convexos e côncavos para preencherem uma tabela, assim, motivá-los a encontrar um padrão para chegarem na fórmula da relação de Euler. Para isso, a etapa se dividirá em duas fases: a primeira, os alunos farão dois "bolos" de massinha de modelar em formato de poliedros convexos e côncavos. Eles receberão um plano-cortador para contar esses "bolos" em pedaços (poliedros) menores e assim, perceberão que um poliedro pode gerar outros sólidos. Na segunda fase, os alunos analisarão os dados da tabela que eles preencherão ao longo dos encontros e tentarão chegar à fórmula do teorema de Euler. Após essa dedução, o professor lançará desafios sobre a aplicação desse teorema e a retirada da sua hipótese, os estudantes tentarão responder utilizando vários meios, como, por exemplo, o contraexemplo para afirmarem que a volta do teorema não é verdadeira.

Foram criados pelos autor vídeos com histórias em quadrinhos para motivar o início de cada etapa e vídeos com o passo a passo ou explicação de alguma atividade para a consolidação do aprendizado nas etapas das discussão.

Em cada etapa da oficina serão descritos os objetivos, as listas de materiais e equipamentos, o tempo (hora/aula) de cada oficina, os roteiros das ações, as explicações bem como as discussões que podem gerar, as recomendações e a carta na manga quando houver.

4.1 Etapa 1: Construindo Trilhos e Vagões

4.1.1 Objetivos

1. Objetivos matemáticos:

   (a) Compreender, reconhecer e diferenciar vértices, faces e arestas;

   (b) Introduzir noções de figuras bidimensionais e tridimensionais;

   (c) Estudar os objetos que possuem mais de uma dimensão e ocupam lugar no espaço.

2. Objetivos heurísticos:

   (a) Expor o aluno ao desafio de construir, criar e comparar objetos para resolver situações-problemas;

   (b) Associar jujubas a vértices e palitos a arestas;

   (c) Apresentar ao aluno o método prático das oficinas de matemática, estimulando-o a resolver, entender e praticar problemas e desafios do conteúdo programático de matemática;

   (b) Estimular o aluno a formular e seguir instruções de ações.

3. Objetivos não-matemáticos:

   (a) Estimular o aluno a trabalhar em equipe;

   (b) Trabalhar a criatividade de docentes e discentes.

4.1.2 Lista de Equipamentos e Materiais

- 8 Jujubas para cada aluno;
- 10 Palitos de petiscos (menor que o palito de churrasco), palitos de dente ou palitos de plástico para pirulitos número 14.

4.1.3 Roteiro das ações

1. colocando em prática (roteiro geral para todas as atividades):

   (a) Forme grupos com 4 alunos (alguns grupos podem ter 3 participantes);

Figura 38 – Jujuba e palitos de pirulitos

Fonte: elaborado pelo autor.

(b) Distribua as jujubas e os palitos em cada mesa;

(c) Siga as instruções de cada atividade proposta para essa oficina.

4.1.4 Atividades

1. Objetivos específicos:

    (a) Trabalhar a construção de figuras geométricas planas;

    (b) Criar e executar passos para a construção de figuras geométricas planas utilizando material concreto.

2. Duração da atividade: 1 aula

3. O professor distribuirá o texto abaixo para cada grupo e fará uma leitura em conjunto com os alunos.

Aventura nos trilhos espaciais

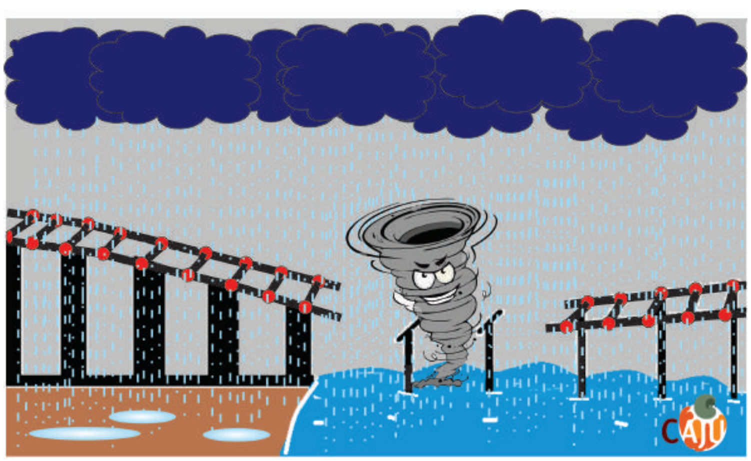
As pessoas da cidade de Boa Viagem gostam de passar as férias na Ilha da Cajulândia. E para chegar lá precisam pegar o trem da Alegria que passa por uma estrada férrea ligando a cidade a essa ilha.

Figura 39 – Estrada férrea para chegar até a Ilha Cajulândia

Fonte: elaborado pelo autor.

> Certa vez, caiu um temporal daqueles! Teve até furacão. E esse furacão derrubou alguns trilhos da estrada férrea.Veja como ficou:

Figura 40 – Temporal na estrada



Fonte: elaborado pelo autor.

> Sendo assim, vamos ajudar a construir esses trilhos com os materiais que estão na sua mesa?

4.1.4.1 Recomendações:

(a) Observa-se que alguns alunos poderão fazer os trilhos sem as jujubas, então, o professor pedirá para eles erguerem os trilhos. Assim, espera-se que os alunos notarão que para dar sustentação e grudar os palitos deverão utilizar as jujubas.

(b) O professor lerá a história contando-a de forma natural e empolgante.

(C) Faça o registro fotográficos das construções para o uso futuro.

(D) O educador poderá exibir o vídeo da história "Aventuras nos trilhos espaciais"feita pelo autor através do *link* abaixo. <https://www.youtube.com/watch?v=xvI0cXqixqs>

4.1.4.2 Discussão:

(a) O professor questionará os alunos quais as funções das jujubas e dos palitos na construção dos trilhos.

(b) Os alunos tiveram dificuldades para associar os trilhos com os materiais jujubas e palitos?

(c) Compare a produção dos grupos em relação ao número de trilhos construídos, as formas e o tempo de cada grupo.

4.1.5 Segunda atividade

1. Objetivos específicos:
   (a) Trabalhar a construção de figuras geométricas tridimensionais;
   (b) Criar e executar passos para a construção de figuras tridimensionais utilizando material concreto.
   (c) Ter noção dos elementos que compõem os poliedros como arestas, faces e vértices.
2. Duração da atividade: 1 aula
3. O professor distribuirá o texto abaixo para cada grupo e fará uma leitura em conjunto com os alunos.

Aventura nos trilhos espaciais (segunda parte)

Agora que consertaram os trilhos, a viagem com o trem da Alegria foi liberada em direção a ilha da Cajulândia. O trem vai sair da estação Alegria com destino à ilha. Porém, o computador que emite passagens deu defeito e vendeu passagens acima do permitido. Na finalidade de resolver esse problema, surgiu a ideia de construir um vagão especial cujo objetivo é acoplar no trem para que todos os turistas consigam chegar na Ilha. Então, o desafio está lançado: quem construir o vagão especial mais bonito com palitos e jujuba vai ter o seu vagão acoplado no trem da Alegria.

Figura 41 – Trem da Alegria passando pela estrada férrea

Fonte: elaborado pelo autor.

4.1.5.1 Recomendações:

(a) Os discentes construirão uma figura espacial com as jujubas e os palitos, alguns com formato de cubo, paralelepípedo ou prisma. O professor deixará eles livres para criar essas figuras.

(b) O professor lerá a história contando-a de forma natural e empolgante.

(c) O professor imprimirá as figuras da história em tamanho maior e distribuirá para cada grupo.

(d) No caso dos alunos terem dificuldades ao formarem as figuras tridimensionais, o professor os incentivará a continuarem tentando, mas poderá mostrar a Figura 41 para motivá-los.

d) O educador poderá exibir o vídeo da história "Aventura nos trilhos espaciais (segunda parte)"feita pelo autor através do *link*: <https://www.youtube.com/watch?v=A6DGVnf_zuk>

4.1.5.2 Discussão:

(a) O professor questionará os alunos se eles notaram figuras geométricas planas nos vagões.

(b) Espera-se que os vagões construídos pelos alunos tenham formas de pirâmides, cubos ou outro prisma. Assim, o professor pedirá ao aluno que compare os vagões diferentes em relação ao seu construído, em relação ao número de jujubas e palitos.

(c) Quantos alunos construíram vagões da mesma forma geométrica?

4.1.6 Terceira atividade

1. Objetivos específicos:

   (a) Introduzir o conceito de poliedros, arestas, faces e vértices através de história em quadrinhos;

2. Duração da atividade: 1 aula

3. O professor lerá a história em quadrinhos em conjunto com os alunos.

> **Aventura nos trilhos espaciais (terceira parte)**
>
> Após os vagões serem montados um turista teve a informação que um país já trabalhavam construções geométricas do mesmo formato dos vagões especiais que construímos. Então, reuniram-se todos da ilha para escutar esse relato.Vamos acompanhar ?

Figura 42 – Encarte da história: Aventura nos trilhos espaciais

Fonte: elaborado pelo autor.

4.1.6.1 Recomendações:

a) O professor poderá apresentar a história em quadrinhos no data show ou impressa em forma de encarte (Figura 42 e Apêndices: A, A.1, A.2 e A.3) e distribuirá nos grupos.

b) O professor poderá pedir uma pesquisa sobre poliedros feita no livro didático deles.

c) O educador poderá exibir o vídeo da história do encarte feita pelo autor através do *link* abaixo. <https://www.youtube.com/channel/UCPPimNspLigN9NNE4hmuuCA.>

4.1.6.2 Discussão:

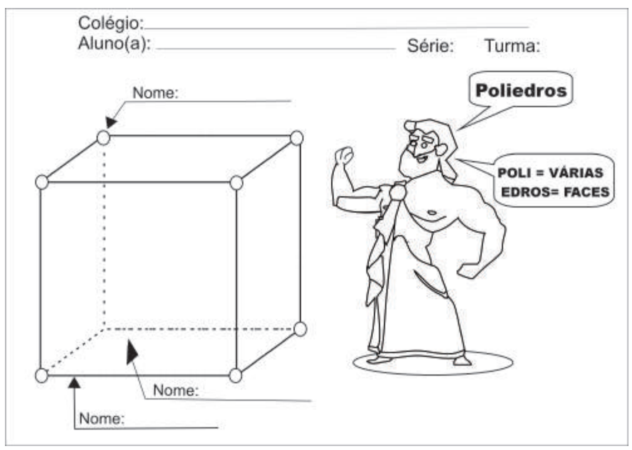
a) Depois da leitura da história, o professor questionará os alunos o que eles entenderam da história e debater com eles sobre essas novas informações mais técnicas usadas na matemática como vértice, arestas e faces.

B) O professor perguntará aos alunos se a história os ajudou a entender o conceito de poliedros e seus elementos.

4.1.6.3 Carta na Manga

Se a oficina acabar antes do tempo estipulado da aula, o professor distribuirá o desenho (Figura 43 e Apêndice A.4) para eles pintarem e identificarem os elementos dos poliedros.

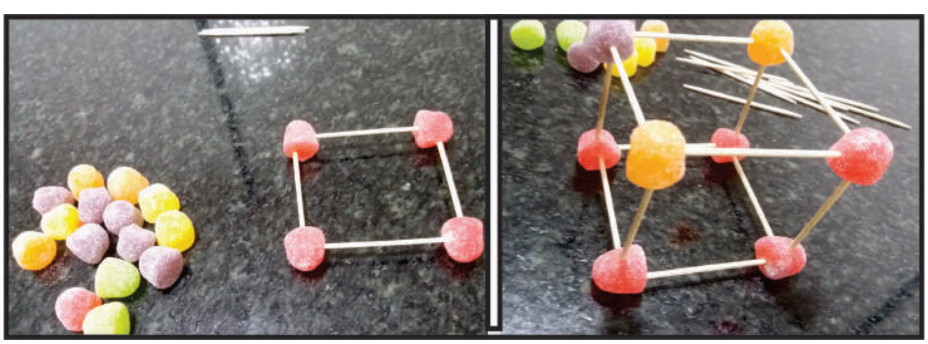
Figura 43 – Carta na manga: atividade para pintar



Fonte: elaborado pelo autor.

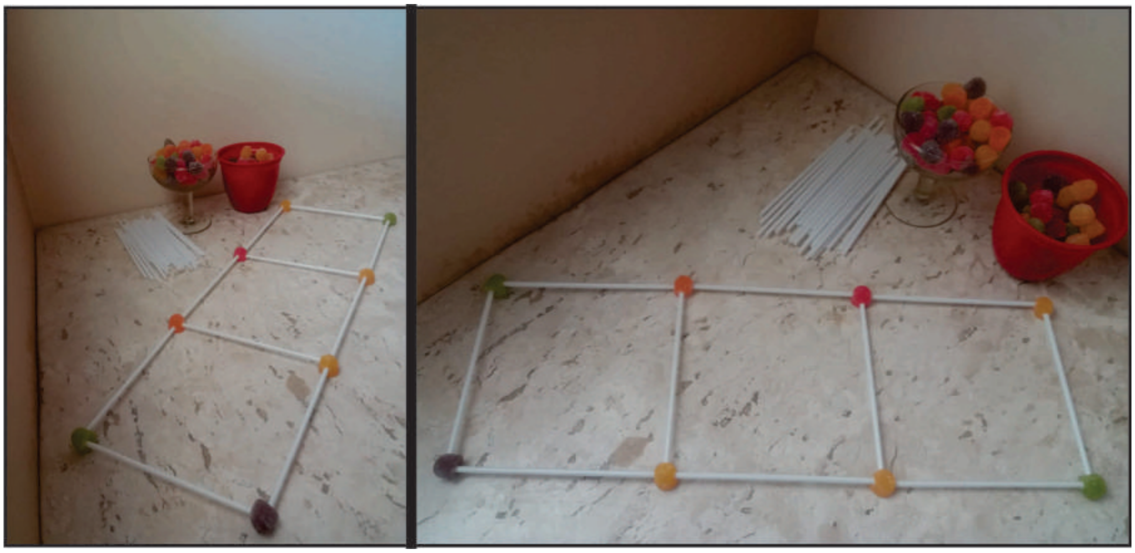
Abaixo, temos fotos dos trilhos e vagões feitos com jujubas, palitos de dente e palitos de pirulito nº 14.

Figura 44 – Trilhos e vagão feitos de palito de dente e jujubas



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 45 – Vagão e trilhos feitos de palito de pirulito e jujubas



Fonte: elaborado pelo autor.

4.2 Etapa 2: Olimpíadas Poliedrais da Natureza

4.2.1 Ojetivos:

1. Objetivos matemáticos:
   (a) Trabalhar com conceitos de poliedros regulares;
   (b) Construir poliedros regulares;
   (c) Entender o porquê só existem apenas 5 poliedros regulares;
   (d Verificar a impossibilidade das construções dos poliedros regulares.
2. Objetivos heurísticos:
   (a) Associar arestas com palitos, vértices com jujubas e faces com os lados formados pelos vértices e arestas;
   (b) Expor o aluno ao desafio de construir, criar e comparar objetos para resolver situações-problemas;
   (c) Apresentar ao aluno o método prático das oficinas de matemática, estimulando-o a resolver, entender e praticar problemas e desafios do conteúdo programático de matemática;
   (d) Estimular o aluno a formular e seguir instruções de ação.
3. Objetivos não-matemáticos:
   (a) Incentivar o aluno a trabalhar em equipe;

(b) Estimular a criatividade de docentes e discentes;

(c) Trabalhar com a ludicidade.

4. Lista de Equipamentos e Materiais

- Papel de gramatura 240 g/m^2
- Elástico com tamanho pequeno
- Tesoura
- Figuras de polígonos regulares para serem recortadas (Apêndices B.1, B.2 e B.3)
- Tabela no Apêndice C.

4.2.2 Roteiro de Ações

1. Depois das figuras recortadas, dobre as hastes para facilitar a montagem, conforme a figura abaixo.

Figura 46 – Dobrando as hastes

Fonte: elaborado pelo autor.

2. O professor ensinará a eles como devem unir as figuras com os elásticos. Depois, lançara o desafio das Olimpíadas Poliedrais de Platão. Essas olimpíadas estão divididas em modalidades poliedrais, isto é:

- Modalidade triangular
- Modalidade Quadrangular
- Modalidade Pentagonal

c) O Professor formará grupos de 4 alunos, separará a entrega do material de cada modalidade e distribuirá nas mesas deles os materiais: os triângulos, quadrados e pentágonos já recortados, elásticos e a tabela. Lerá os desafios propostos de cada modalidade e pedirá aos alunos para irem preenchendo a tabela (Apêndice C) em cada modalidade realizada. Nessa Tabela constará espaços em brancos para o preenchimento feito pelos alunos sobre faces, arestas, vértices e os poliedros formados.

Texto motivacional

Fonte: elaborado pelo autor.

Olimpíadas poliedrais de Platão

Antigamente, os povos de todo o planeta respeitavam a natureza e tudo que existia nela. Eles acreditavam nos elementos sagrados que formavam o universo. Assim, criaram as olimpíadas da Natureza para encontrar elementos que representavam formas perfeitas. Então, propuseram criar formas geométricas que representassem os elementos sagrados. Platão participou de todos as modalidades e criou os poliedros regulares que tinham como faces triângulos equiláteros, quadrados ou pentágonos. Porém, Platão pode não ter formado todos os poliedros regulares. E por isso, temos todos os anos esse desafio das olimpíadas para encontrar um participante que consiga construir mais poliedros regulares que os que Platão já fez e assim, colocar o seu nome nas olimpíadas. E aí, vamos participar?

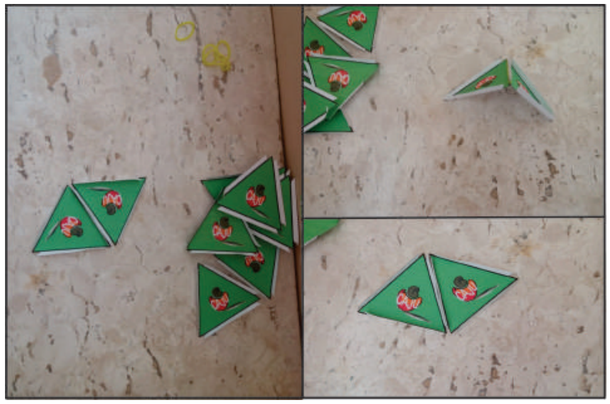
4.2.3 Modalidade Triangular: construindo poliedros com triângulos equiláteros

Duração: 2 aulas de 50 minutos

Desafio: O professor lançará o desafio de construir poliedros com 2 ou mais triângulos.

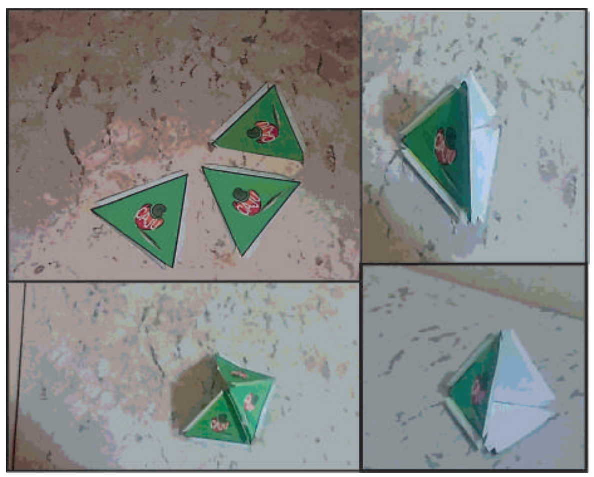
Nas figuras 47, 48, 49,51 e 52 são mostradas formas de montar poliedros a partir da união de triângulos equiláteros.

Figura 47 – Com 2 triângulos equiláteros: percebemos que não formará nenhum poliedro



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 48 – Com 3 triângulos unidos em 1 vértice: não é possível formar um poliedro, mas pode ser um possível vértice para um poliedro

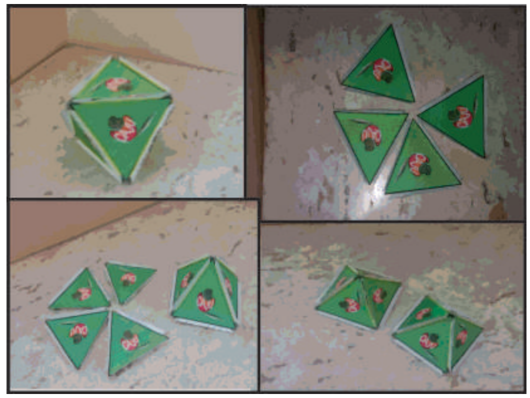


Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 49 – Com 3 triângulos em um possível vértice e mais 1 triângulo: formará um tetraedro

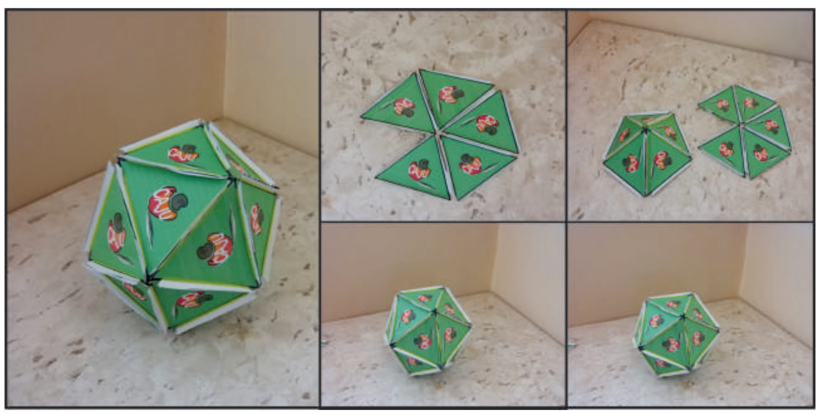
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 50 – Unindo os 2 possíveis vértices (4 triângulos em cada vértice), formaremos o Octaedro



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 51 – Com 5 triângulos unidos em 1 vértice: percebemos que não formará um poliedro, mas pode ser um possível vértice para o icosaedro



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 52 – Com 6 triângulos em 1 vértice: percebemos que a figura fica plana e assim, não poderá formar nenhum poliedro

Fonte: elaborado pelo autor.

4.2.4 Recomendações:

(1) O professor deixará os alunos à vontade para formar as figuras e na medida que eles forem criando alguns poliedros, o professor os estimulará a criar mais figuras tridimensionais até chegar na impossibilidade de criar mais.

(2) O educador lembrará para os alunos que para ser um poliedro, a figura deverá ser fechada. Isso elimina a possibilidade dos alunos construírem figuras tridimensionais aberta e afirmarem que são poliedros.

(3) Os alunos poderão ter dificuldades na construção do icosaedro, então, o professor poderá mostrar o vídeo do autor ensinando o passo a passo dessa construção. Link do vídeo: <https://www.youtube.com/channel/UCPPimNspLigN9NNE4hmuuCA>

4.2.5 Discussão

(1) Após tentativas de erros e acertos, o professor questionará os alunos o porquê da impossibilidade de não haver mais poliedros formados com triângulos equiláteros além desses formados. Alguns alunos poderão dizer que a figura ficou plana na hora de montar e juntar seis triângulos e outros poderá responder algo sobre os ângulos. Nesse momento, o professor ainda não dará explicação e sim aguardará as próximas modalidades para que os alunos tenham uma formulação mais detalhada sobre esse fato.

(2) O professor fará questionamentos aos alunos sobre as propriedades dos triângulos que formaram as figuras tridimensionais que eles construíram.

4.2.6 Modalidade quadrangular: Construindo poliedros com quadrados

Duração: 1 aula de 50 minutos

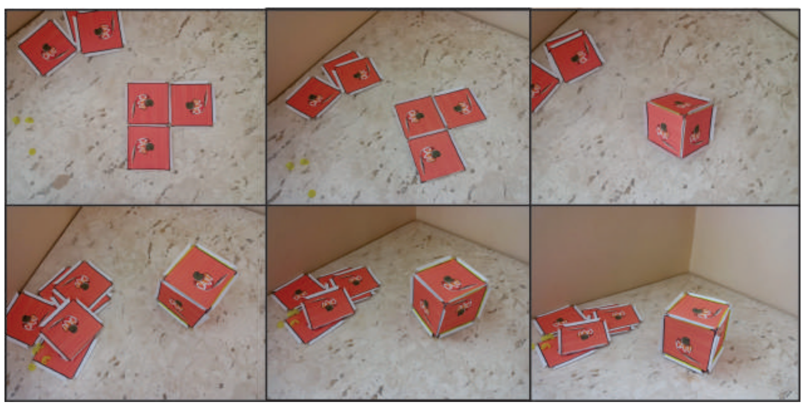
Desafio: O professor lançará o desafio de construir poliedros com 2 ou mais quadrados.

Nas figuras 53, 54 e 55 são mostradas formas de montar poliedros a partir da união de quadrados.

Figura 53 – Com 2 quadrados em 1 vértice: percebemos que não formará nenhuma base para um poliedro

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 54 – Com 3 quadrados em 1 vértice: percebemos que a base que formou podemos preencher com mais 3 quadrados, com isso, formará um Hexaedro



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 55 – Com 4 quadrados: percebemos que a figura fica plana

Fonte: elaborado pelo autor.

4.2.7 Recomendações:

(1) O professor deixará os alunos à vontade para formar as figuras e na medida que eles forem acertando os poliedros o professor poderá estimulá-los a criar mais figuras tridimensionais até chegar na impossibilidade de criar mais.

(2) O professor lembrará os alunos do preenchimento da tabela.

4.2.8 Discussão

(1) Após tentativas de erros e acertos, o professor questionará os alunos o porquê da impossibilidade de não haver mais figuras tridimensionais com mais de 6 quadrados.

(b) O professor fará questionamentos aos alunos sobre os quadrados e suas propriedades.

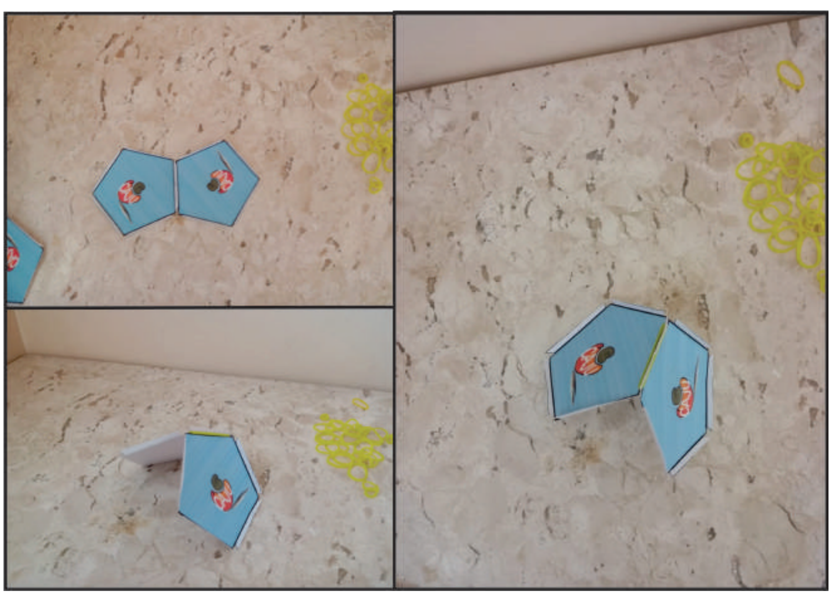
4.2.9 Modalidade Pentagonal: construindo poliedros com pentágonos regulares

Duração: 1 aula de 50 minutos

Desafio: Construir poliedros com pentágonos regulares.

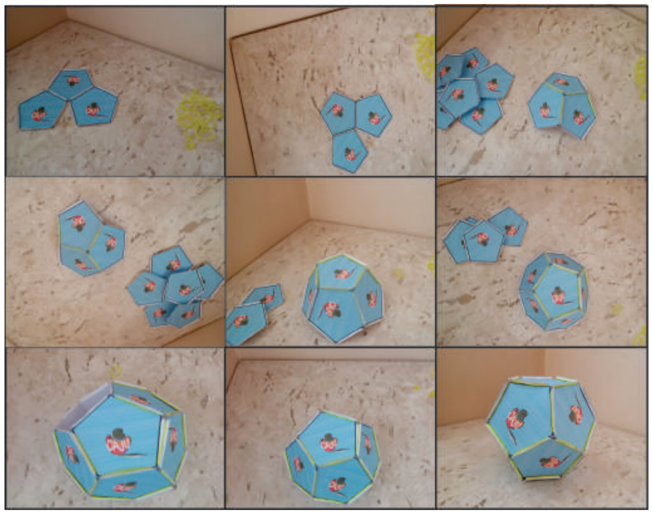
Nas figuras 56, 57 e 58 são mostradas formas de montar poliedros a partir da união de pentágonos regulares.

Figura 56 – Com 2 Pentágonos Regulares: percebemos que não formará nenhum poliedro



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 57 – Iniciando com 3 Pentágonos Regulares: percebemos que a figura dá base para preenchermos com 12 pentágonos até formar um dodecaedro



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 58 – Com 4 Pentágonos Regulares: não é possível colocar 4 pentágonos num vértice sem criar superposição dos polígonos. Logo , não poderá formar mais poliedros

Fonte: elaborado pelo autor.

4.2.10 Recomendações:

1. Os alunos poderão ter dificuldades na construção do dodecaedro, assim, o professor mostrará o vídeo do autor ensinando o passo a passo dessa construção. Link do vídeo:

   Link do vídeo: <https://www.youtube.com/channel/UCPPimNspLigN9NNE4hmuuCA>

4.2.11 Discussão:

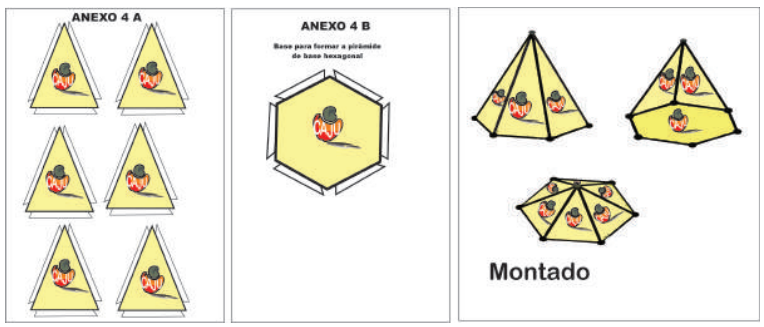
(1) O professor questionará os alunos sobre o fato da impossibilidade de formar mais figuras geométricas espaciais regulares além das já existentes em relação as figuras

planas regulares que serviram para construção desses poliedros.

4.2.12 Carta na manga

O professor poderá lançar no final da oficina um desafio “temos triângulos isósceles (Apêndice B.4) e um hexágono (Apêndice B), quem construir um poliedro utilizando todas essas figuras bidimensionais em menos tempo ganha um brinde", por exemplo, levar para casa o poliedro que o vencedor construiu.

Figura 59 – Poliedro montado da carta na manga



Fonte: elaborado pelo autor.

4.3 Etapa 3: Jogando com poliedros convexos e côncavos

4.3.1 Objetivos:

1 Objetivos matemáticos:

(a) Trabalhar com conceitos de poliedros regulares e não regulares;

(b) Construir poliedros regulares, convexos e côncavos;

(c) Diferenciar poliedros convexos e côncavos;

(d) Estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de poliedros;

(e) Preencher a tabela do Apêndice C.

2 Objetivos heurísticos:

(a) Associar arestas com palitos, vértices com jujubas e faces com os lados formados pelos vértices e arestas;

(b) Expor o aluno ao desafio de construir, criar e comparar objetos para resolver situações-problemas;

(c) Apresentar ao aluno o método prático das oficinas de matemática, estimulando-o a resolver, entender e praticar problemas e desafios do conteúdo programático de matemática;

3 Objetivos não-matemáticos:

(a) Incentivar o aluno a trabalhar em equipe;

(b) Estimular a criatividade de docentes e discentes;

(c) Trabalhar com a ludicidade.

4 Lista de Equipamentos e Materiais:

- Palito de churrasco, de “dente"ou de pirulito.
- Balas de Goma (jujubas).
- Tabela para anotação dos dados (Apêndice C).
- Folhas impressas com o jogo (Apêndices: D, D.1, D.2 e D.5).

4.3.2 Roteiro das ações

(A) O Professor formará grupos de 4 alunos e distribuirá nas mesas deles os materiais. Lerá o texto motivacional e pedirá aos alunos preencherem o a tabela na medida que forem construindo os poliedros do jogo.

(B) O docente poderá explicar o jogo da seguinte maneira: “Vocês já jogaram o Tetrisum? jogo de quebra-cabeça virtual que consiste em empilhar figuras que descem a tela de forma que completem linhas horizontais. Quando uma linha se forma, ela se desintegra, as camadas superiores descem, e o jogador ganha pontos. Quando a pilha de peças chega ao topo da tela, a partida se encerra. O nosso jogo é baseado no Tetris só que um pouco diferente, vocês receberão as folhas do jogo e irão construir poliedro que encaixam nos espaços que faltam em cada etapa. O desafio é: “ Será que pode ser construído uma única peça para cada etapa do jogo?".

(C) A medida que forem acertando as peças do quebra-cabeça, o professor dará a folha da próxima etapa do jogo.

(D) No final do jogo, o professor abrirá a discussão com os alunos sobre as formas das peças (poliedros) formadas. E explicará a diferença entre poliedros convexos e côncavos através de um palito colorido que é dá uma ideia ilusória de uma reta.

(E) Caso o educador queira mostrar para os educandos a história em quadrinhos de Borges em forma de encarte encontra-se nos Apêndices D.3 e D.4.

Texto motivacional

Vamos realizar o sonho de Borges?

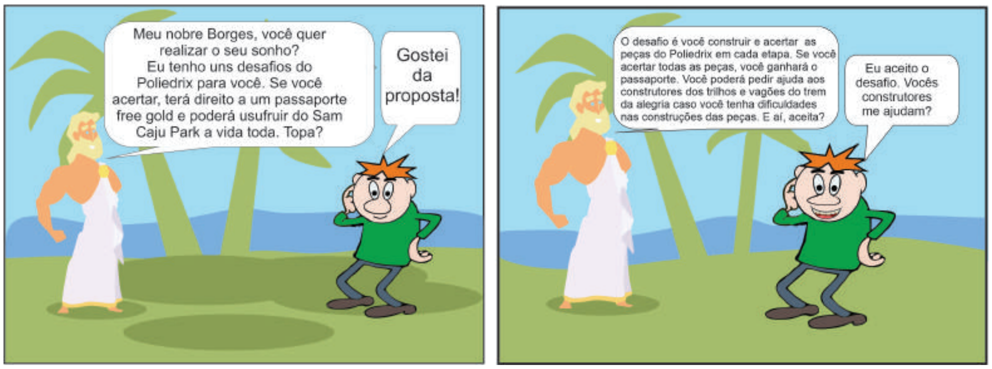
Borges foi para à ilha da Cajulândia realizar o seu maior sonho que é conhecer e se divertir no parque aquático Siam Caju Park (o maior super mega parque aquático do mundo). Porém, Borges não tinha muito dinheiro e o passaporte do parque custa mais do que ele tinha imaginado.

Figura 60 – Borges e seu sonho

Fonte: elaborado pelo autor.

Então, Borges ficou muito triste e comentou com o Grego (vocês lembram dele? É o grego da primeira oficina) que o seu sonho não ia ser realizado porque estava com pouco dinheiro para comprar o passaporte. Assim, o Grego se comoveu com a situação de Borges e fez uma proposta para ele. Vamos acompanhar essa história.

Figura 61 – O desafio do Grego



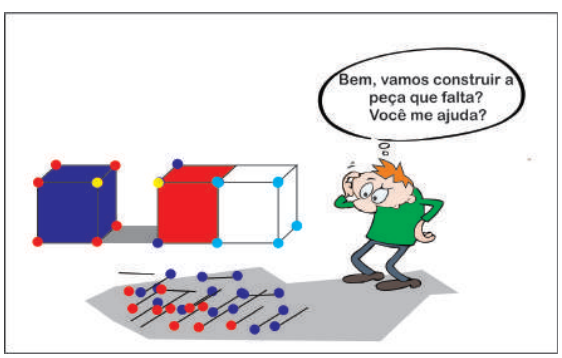
Fonte: elaborado pelo autor.

Esse passaporte dá direito a 4 acompanhantes, não paga nada para entrar, tudo que consumir ou usar no parque sai de graça. Assim, Borges ficou animado para o desafio e alegre em realizar o seu sonho. Porém, Borges não é muito bom em construir poliedros, que tal ajudá-lo e irem com o Borges para conhecer o maior parque do mundo? Vamos?

Duração: 2 aulas de 50 minutos

1) **Primeiro desafio de Grego (Apêndice D)**

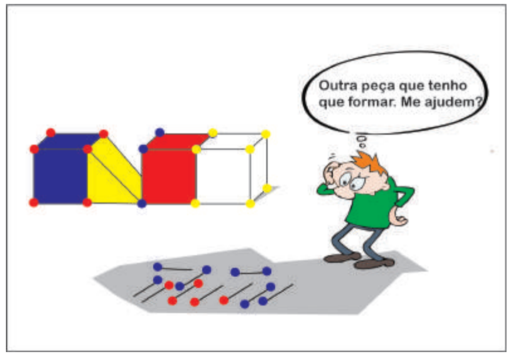
Figura 62 – Desafio 1



Fonte: elaborado pelo autor.

2) **Segundo desafio de Grego (Apêndice D.1)**

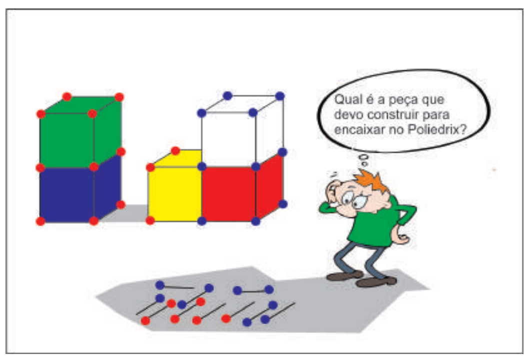
Figura 63 – Desafio 2



Fonte: elaborado pelo autor.

3) **Terceiro desafio de Grego (Apêndice D.2)**

Figura 64 – Desafio 3



Fonte: elaborado pelo autor.

4.3.3 Recomendações:

a) O professor só poderá entregar a folha da próxima etapa quando o grupo acertar a peça.

b) Os alunos poderão fazer dois ou mais poliedros para encaixar no espaço do jogo para tentar passar para próxima etapa, sendo assim, cabe ao professor reforçar o desafio: “será que você consegue construir uma única peça ?".

c) O professor poderá estimular uma competição entre os alunos da seguinte forma: quem terminar o jogo primeiro ganhará um brinde.

d) Lembrar que os alunos deverão preencher os dados de cada peça na tabela disponibilizada no início do jogo.

4.3.4 Discussão

1. O professor questionará os alunos sobre as diferenças existentes nas peças que eles construíram. Como por exemplo, se todas as peças foram construídas com palitos (arestas) de mesmo tamanho. E assim, ele explicará sobre poliedros regulares e não regulares.

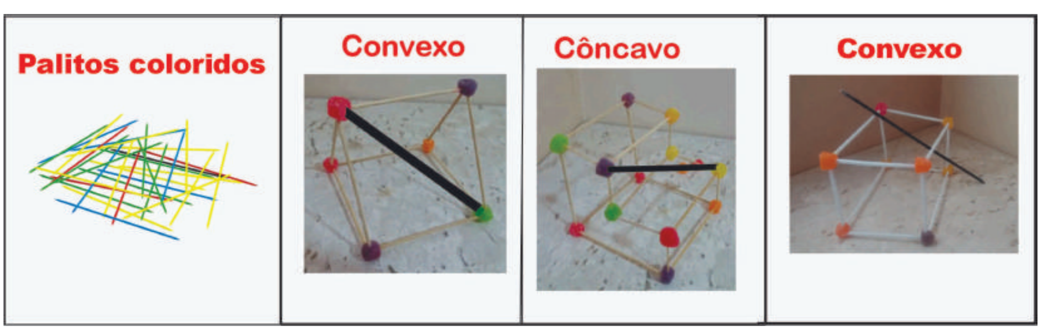
2. Depois que os alunos construírem as figuras de cada etapa, o professor abrirá um debate:

    - Esses poliedros que vocês construíram tem alguma propriedade em comum? Quais?
    - Esses poliedros têm propriedades diferentes entre eles? Quais?

    Alguns alunos começarão a falar da forma, dos números de arestas, faces e vértices que eles têm e do tamanho. Assim, começarão a formar o conhecimento em relação ao formato desses poliedros. Com isso, o professor que está mediando a discussão, entregará aos grupos três palito colorido de tamanhos diferentes (exemplo: um palito de cor amarela com a mesma medida das arestas, um com uma medida que dá pra ligar uma jujuba a outra não consecutiva e não colinear de cor vermelha e outro maior que os anteriores para “vazar"a figura de um lado a outro de cor preta, conforme a figura 65) e pedirá aos docentes que unam esse palito aos vértices que estão no poliedro.

    Os alunos ao ligarem o palito colorido nos vértices (jujubas) formarão arestas (conhecimento já adquirido nas outras oficinas) e diagonais (cabe ao professor explicar: quando o palito liga um vértice ao outro não consecutivos chamamos de diagonais). Porém, eles notarão que o palito colorido estará “todo dentro"(contido) em dois poliedros e nos outros o palito já não “estará todo dentro", ou seja, uma parte ficará de fora. Assim, o professor introduzirá os conceitos de convexidade e concavidade para os alunos.

Figura 65 – Convexo e côncavo



Fonte: Elaborada pelo autor

4.4 Etapa 4 Cortando poliedros e aplicando o teorema de Euler

4.4.1 Objetivos

1. Objetivos matemáticos:

    a) Identificar poliedros e seus elementos

    b) Contar o número de arestas, faces e vértices dos poliedros;

    c) Reconhecer e diferenciar poliedro convexos e côncavos;

    d) Deduzir e compreender a Relação de Euler.

2. Objetivos heurísticos:

    a) Estudar os objetos que possuem mais de uma dimensão e ocupam lugar no espaço.

    b) Expor o aluno ao desafio de construir, criar e comparar objetos para resolver situações-problemas;

    (c) Apresentar ao aluno o método prático das oficinas de matemática, estimulando-o a resolver, entender e praticar problemas e desafios do conteúdo programático de matemática;

    (d) Estimular o aluno a formular e seguir instruções de ação.

3. Objetivos não-matemáticos:

    a) Incentivar o aluno a trabalhar em equipe.

    b) Trabalhar a coordenação motora fina do aluno.

    c) Estimular a concentração, a socialização e a criatividade do aluno.

4.4.2 Lista de Equipamentos e Materiais

a) Massinha de modelar ("Soft-baby colors- Acrilex- 150g");

b) Canetinha hidrográfica de qualquer cor;

c) Um pedaço retangular de garrafa plástica de 8 cm $\times$ 13 cm;

d) Tabela para preencher os dados (Apêndice C);

e) Folhas com as imagens dos bolos de Lia (Apêndice E.1 e E.2);

f) Data Show para projetar as imagens selecionadas dos poliedros que os alunos já fizeram.

4.4.3 Roteiro das Ações - Etapa 1: Cortando poliedros

1. O professor distribuirá as massinhas de modelar para cada grupo formado (3 ou 4 alunos), a tabela, o texto motivacional, o cortador-plano (pedaço de garrafa plástica com formato de retângulo) e as duas folhas impressas com as figuras que eles irão formar com essa massinha (Apêndice E.1 e E.2).

Os desafios de Grego

Lia é a filha do Grego e está completando 15 anos. Ela sonha com uma viagem à Terra do Nunca, mas seu pai nunca permite a coitada ir.

Figura 66 – Lia e sua paixão

Fonte: elaborado pelo autor.

O Grego planejou uma festa para comemorar o aniversário da sua filha Lia na qual ele chama de forma carinhosa de Li. Ele encomendou dois bolos em forma dessas duas letras.

Figura 67 – Bolos de aniversário para Lia

Fonte: Elaborada pelo autor

Sabemos que esse grego é meio maluquinho das ideias e ele planejou uns desafios para a sua filha caso ela acerte todos, Lia poderá ir para a Terra do Nunca com tudo pago.

Figura 68 – Lia e os desafios

Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, antes de cortar o bolo, ele conversou com a Lia sobre os desafios. Ela concordou, mas com receio de perder, pois ela não é muito boa em desafios.

- **O primeiro desafio:** Cortar o bolo em forma de I em três pedaços.
- **O segundo desafio:** "Depois que você cortou o bolo em três pedaços, quantas arestas, lados e vértices têm os novos pedaços?".

Figura 69 – Lia pede ajuda

Fonte: Elaborada pelo autor

Agora o desafio passou para o bolo em forma de L.

- **O terceiro desafio:** "Você consegue cortar esse bolo de forma que o cortador-plano passe pelas duas flores de forma que ele fique dentro do bolo ?"
- **O quarto desafio:** "Corte o bolo em três pedaços e conte quantas arestas, lados e vértices têm os novos pedaços?"

Figura 70 – Lia e o desafio final

Fonte:Elaborada pelo autor

Vamos ajudar a Lia a responder corretamente esses desafios e proporcionar a viagem dos sonhos dela? Vamos?!

4.4.4 Instruções:

(A) O professor entregará aos alunos as imagens do bolo para os alunos reproduzirem com a massinha de modelar.

(b) O professor pedirá aos alunos que façam riscos com a canetinha nas bordas das massinhas em forma do bolo de Lia para que eles consigam visualizar melhor as arestas e os vértices. Sempre que os discentes cortarem a massinha, eles irão cobrir com a canetinha esses novos pedaços para facilitar a contagem das arestas e vértices.

(C) Quando terminarem o desafio do bolo em forma de I, o professor pedirá aos alunos que misture e amasse bem a massinha para fazer o novo bolo em forma de L.

4.4.5 Recomendações:

(A) Sugere-se ao professor que mostre o vídeo do autor com o passo a passo da construção do bolo em forma de I e L com a massinha de modelar.

Link do vídeo: <https://www.youtube.com/channel/UCPPimNspLigN9NNE4hmuuCA>

(B) Recomenda-se colocar duas colheres de amido de milho na massinha de modelar para que ela tenha mais consistência.

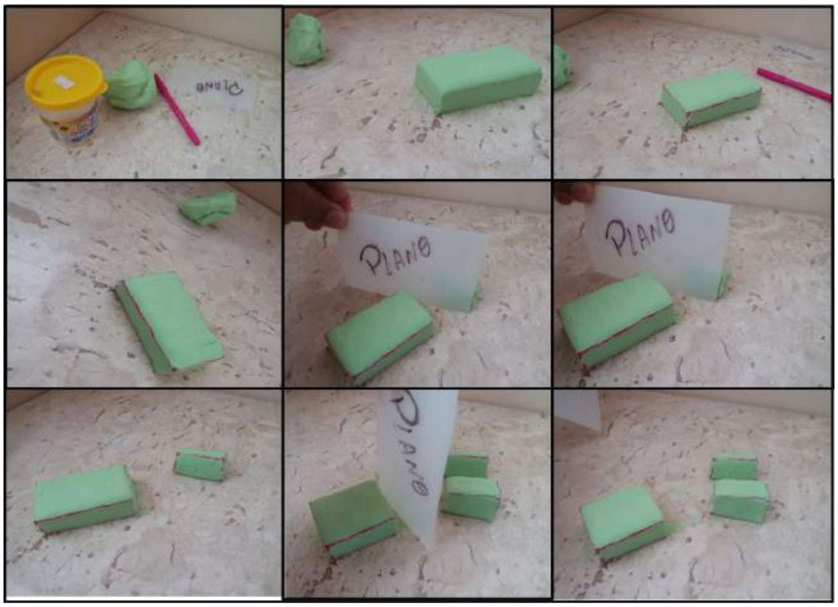
(C) O plano-cortador utilizado nas imagens foi feito de garrafa de desinfetante de 5 litros por ser mais dura, mas pode ser de garrafa de refrigerante;

(D) Em relação a massinha de modelar, recomendamos optar por cores mais claras para facilitar o contorno da canetinha.

4.4.6 Discussões

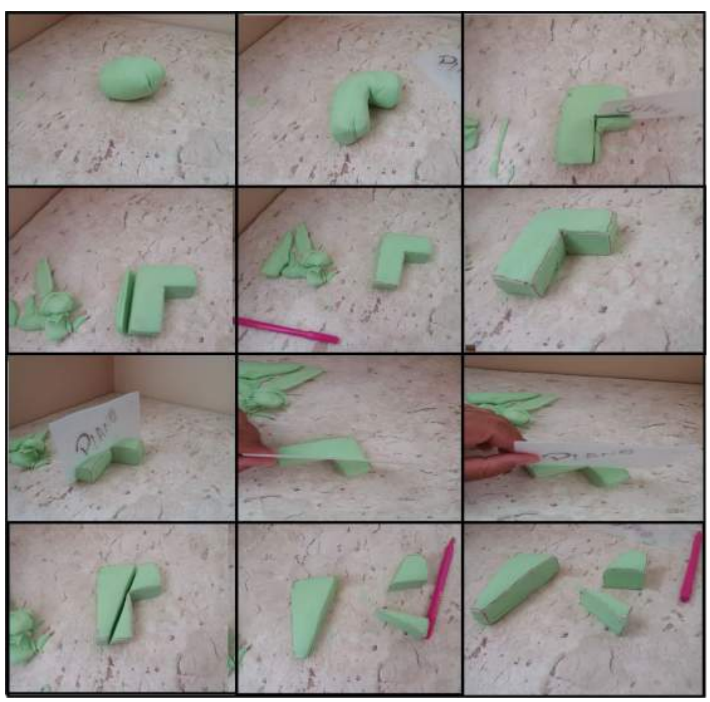
(1) O professor e os alunos debaterão sobre as perguntas dos desafios promovidos pelo Grego. Após esse debate, o docente recolherá todos os materiais, exceto a tabela.

Figura 71 – Montando o bolo em forma de I



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 72 – Montando o bolo em forma de L



Fonte: Elaborada pelo autor

4.4.7 Etapa 2 - Trabalhando com os dados e a Relação de Euler

O professor mostrar através da projeção no data show ou impressa os poliedros que os alunos construíram e anotaram na tabela. E questionará aos alunos se aqueles poliedros tem algo em comum ou não, observando os dados anotados.

O professor lançará um desafio para os alunos utilizarem os dados dessa tabela para postularem ou identificarem alguma relação aritmética entre o número de faces, arestas e vértices. Espera-se que após várias tentativas e com a mediação do professor, os discentes identifiquem o padrão da relação de Euler, $F + V - A = 2$.

O docente lançará mais um desafio: "será que essa expressão matemática serve para todos os poliedros?", "se um poliedro satisfazer a relação de Euler, será que esse poliedro é convexo?".

O professor esperará as respostas dos alunos e explicará essas perguntas com exemplos de poliedros construídos em sala de aula.

4.4.8 Recomendações:

(A) As imagens projetadas no data show poderão ser fotos dos trabalhos dos alunos ou feitas no Geogebra 3D (Apêndice F.2 e F.1);

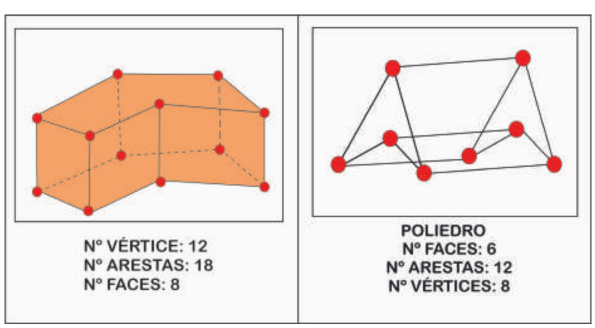
(B) No final da oficina, sugere-se ao professor mostrar o vídeo dos poliedros construídos pelos alunos no Geogebra feito pelo autor.

<https://www.youtube.com/channel/UCPPimNspLigN9NNE4hmuuCA>

(C) Sugere-se ao professor aplicar uma pesquisa sobre o matemático Euler para os alunos.

(D) O professor montará a Figura 73 em sala para os alunos visualizarem o contraexemplo que não vale a volta da Relação de Euler.

Figura 73 – contraexemplo da volta da relação de Euler



Fonte: Elaborada pelo autor

5 Considerações Finais

O diagnóstico decorrente da análise dos dados mostrados no Capítulo 1, mostra que a situação do ensino de Matemática, e em particular da Geometria, no estado da Bahia está abaixo do esperado, sendo que o quadro no Brasil como um todo não é muito diferente. Sabemos que não é tarefa fácil a identificação dos motivos desse quadro, mas acreditamos que a implementação de metodologias que usem a ludicidade e a contextualização com suporte nas histórias em quadrinhos, para o desenvolvimento de atividades, tais como oficinas de matemática, que visem estimular o aluno a desenvolver o raciocínio lógico, a criatividade, a sociabilidade e o trabalho em equipe podem contribuir no auxílio da melhoria almejada. É nesse sentido que esperamos que a oficina proposta neste trabalho venha a contribuir no ensino de Geometria no 6º ano do Ensino Fundamental.

A ludicidade, a contextualização, o material concreto e manipulável, e as animações criadas como apoio às atividades são elementos fundamentais dessa proposta. Acreditamos que a valorização do lúdico e da contextualização como ferramentas motivacionais visam uma aprendizagem significativa dos discentes nas aulas de Geometria. O material concreto e manipulável permite que os alunos coloquem em prática os conceitos teóricos aprendidos em sala de aula e desenvolvam a criatividade e estimulam a resolver, entender e praticar situações desafiadoras.

Os temas geométricos abordados na oficina foram escolhidos dentre aqueles propostos na disciplina Matemática para o 6º ano do Fundamental (Anos Finais) e que são importantes para os próximos conteúdos geométricos das séries posteriores. Os alunos costumam apresentar dificuldades em diferenciar figuras espaciais, identificar elementos que as compõem, e também em entender de forma contextualizada os conceitos de convexidade e concavidade. Se não superadas, estas barreiras, relacionadas à falta de entendimento de conceitos geométricos, dificultam a aprendizagem de geometria. Já participei, cerca de um ano, no projeto de Oficinas de Matemática Experimental no Colégio da Polícia Militar em Ilhéus e isso me dá confiança de que o tipo de atividade proposta possa contribuir na aprendizagem de geometria de forma significativa.

Nas etapas da oficina, utilizamos materiais que possibilitam trabalhar conceitos geométricos que, muitas vezes, em sala de aula, não ficam claros para o aluno, pois são cobrados de forma teórica e abstrata. Por exemplo, na etapa quatro, o aluno tem que fazer cortes (planos) num poliedro convexo, com isso, espera-se que ele compreenda na prática que os poliedros menores gerados vão continuar com a propriedade de serem convexos. E ao preencher a tabela com as informações sobre arestas, vértices e faces dos poliedros que construíram na sala em cada etapa da oficina, acreditamos que possa motivar os estudantes a encontrarem um padrão para deduzir a relação de Euler.

O processo de execução da oficina vai requerer tempo e esforço do professor e envolvimento da escola no apoio ao desenvolvimento das atividades. Por outro lado, espera-se que a oficina estimule os professores de matemática a buscarem novos recursos didáticos de forma a favorecer o processo de ensino-aprendizagem, colocando ao aluno como sujeito ativo e participativo nesse processo. Assim, esperamos fomentar mudanças no ambiente escolar que poderão incentivar outros professores de outras áreas a implementar propostas similares nas suas aulas.

Por fim, espera-se que a aplicação das atividades da oficina estimule o papel do professor como mediador da aprendizagem contribuindo à construção do conhecimento fundamentada na troca de saberes entre os participantes. Assim, torna-se fundamental a análise dos materiais produzidos pelos alunos para determinar o sucesso ou não da proposta. Esta análise também contribui para identificar os acertos e erros da proposta fazendo com que ela passe por um processo contínuo de melhoria. Cabe destacar que por conta da pandemia que assola o Brasil e o mundo, não foi possível aplicar a oficina, mas quando a situação normalizar, poderemos aplicá-la e analisar sua pertinência.

Referências

ALVES, Eva Maria Siqueira. **Ludicidade e o Ensino de Matemática**. Papirus Editora, 2006.

ANASTASIOU, Léa das Graças Camargos et al. **Estratégias de ensinagem. Processos de ensinagem na universidade. Pressupostos para as estratégias de trabalho em aula**. v.3, 2004.

ARAUJO, Luciene Liger do Nascimento. **Oficinas de Matemática Experimental uma história de TV. Minimizando custos**. 2017, 52 p. Dissertação(Mestrado em Matemática)-Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, 20017

ARAÚJO, Gustavo Cunho; COSTA, Mauricio Alves; COSTA, Evânio Bezerra. **As historias em quadrinhos na educação: possibilidades de um recurso Didático-Pedagógico**. Revista Eletrônica de Ciências Humanas, Letras e Artes. Uberlândia, n. 2, p. 26-27.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC/SEF, 2018.

CANDAU, Vera Maria. Oficinas Aprendendo e Ensinando Direitos Humanos: UMA PROPOSTA DE TRABALHO. **Novameria/PUC-Rio**, 1999. Disponível em: <http://www.dhnet.org.br/direitos/militantes/veracandau/candau_edh_proposta_trabalho.pdf>. Acesso em: 25 de janeiro de 2021.

CUNHA, N. H. S. **Criar para brincar: a sucata como recurso pedagógico**. Editora Ground, 2007.

D'AMBRÓSIO, U. **Ciências, informática e sociedade: uma coletânea de textos**. Brasília: EUB, 1994.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial**.6ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

FERRO, Lussuede Luciana de Souza. **A criança da educação infantil e a linguagem matemática: relações interdependentes no processo de ensino e aprendizagem**. 2016, 164 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual. Maringá, 2016.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 8ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1998.

FREITAS, W. V. C. d. **Ludicidade: processo de aprendizagem e construção da personalidade da criança**. Amazon Digital Services LLC, 2020.

GIANOTTO, Dulcinéia Éster Pagani. **Oficinas pedagógicas como atividades de estágio supervisionado na disciplina de Prática de Ensino de Ciências e Biologia. XIII Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino – XIII Endipe**. Pernambuco: UFPE, 2006.

INEP. **Portal Inep**. Disponível em: <http:// www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/resultados>. Acesso em: 25 de fevereiro de 2021.

INEP. **Portal Inep**. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa/resultados>. Acesso em: 02 de fevereiro de 2021.

KAMII, Constance. Autonomia: a meta da Educação Piagetiana. **KAMII, Constance** & **JOSEPH, Linda Leslie. Aritmética: novas perspectivas-implicações da teoria de Piaget**. Campinas: Papirus, 1992.

KISHIMOTO, T. M. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. Cortez editora, 2010.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise: volume 1**. 12ª ed. Rio de Janeiro: Impa, 2007.

LIMA, Ivoneide Pinheiro de. **A matemática na formação do pedagogo: oficinas pedagógicas e a plataforma Teleduc na elaboração dos conceitos**. Tese (Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará. Ceará, p. 184, 2007.

MACHADO, Nílson José. **lógica? É lógico!**. Scipione, 1989.

MENEGOLLA, Maximiliano; SANT'ANNA, Ilza Martins. **Didática-Aprender a ensinar**. 7ª ed. São Paulo: Edições Loyola, 2002.

MUNIZ NETO, A. C. M. **Geometria**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MUNIZ NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PEREIRA, Katiane. **Oficinas de Matemática Experimental: entrando numa fria**. 2017, 61 p. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, 2017.

PIAGET, Jean. **A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação**. Rio de Janeiro: LCT, 1971.

PIAGET, Jean. **O juízo moral da criança. Tad. de Elzon Leonardon**. São Paulo: Summus, 1994.

REIS, Leonardo Rodrigues dos. **Rejeição à matemática: causas e formas de intervenção**. 2005. 12 p. Monografia (Graduação) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2005.

SILVA, Erivânia Guedes da. A afetividade na prática pedagógica e na formação docente. **Brasilescola**, 2015. Disponível em: <https://monografias.brasilescola.uol.com.br/pedagogia/a-afetividade-na-pratica-pedagogica-na-formacao-docente.htm>. Acesso em: 13 de janeiro de 2021.

SPINELLI, W. **construção do conhecimento entre abstrair e o contextualizar: o caso do ensino da Matemática**. 2011. 138 p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2011.

TEIXEIRA, C. E. **A ludicidade na escola**. São Paulo: Loyola, v. 1, 1995.

VASCONCELOS, M. B. F. **A contextualização e o ensino de matemática: Um estudo de caso**. 2008. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2008.

VIEIRA, Elaine; VOLQUIND, Léa. **Oficinas de ensino: o quê?: por quê?: como?**. 4ª ed.Porto Alegre: Edipucrs, 2002.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

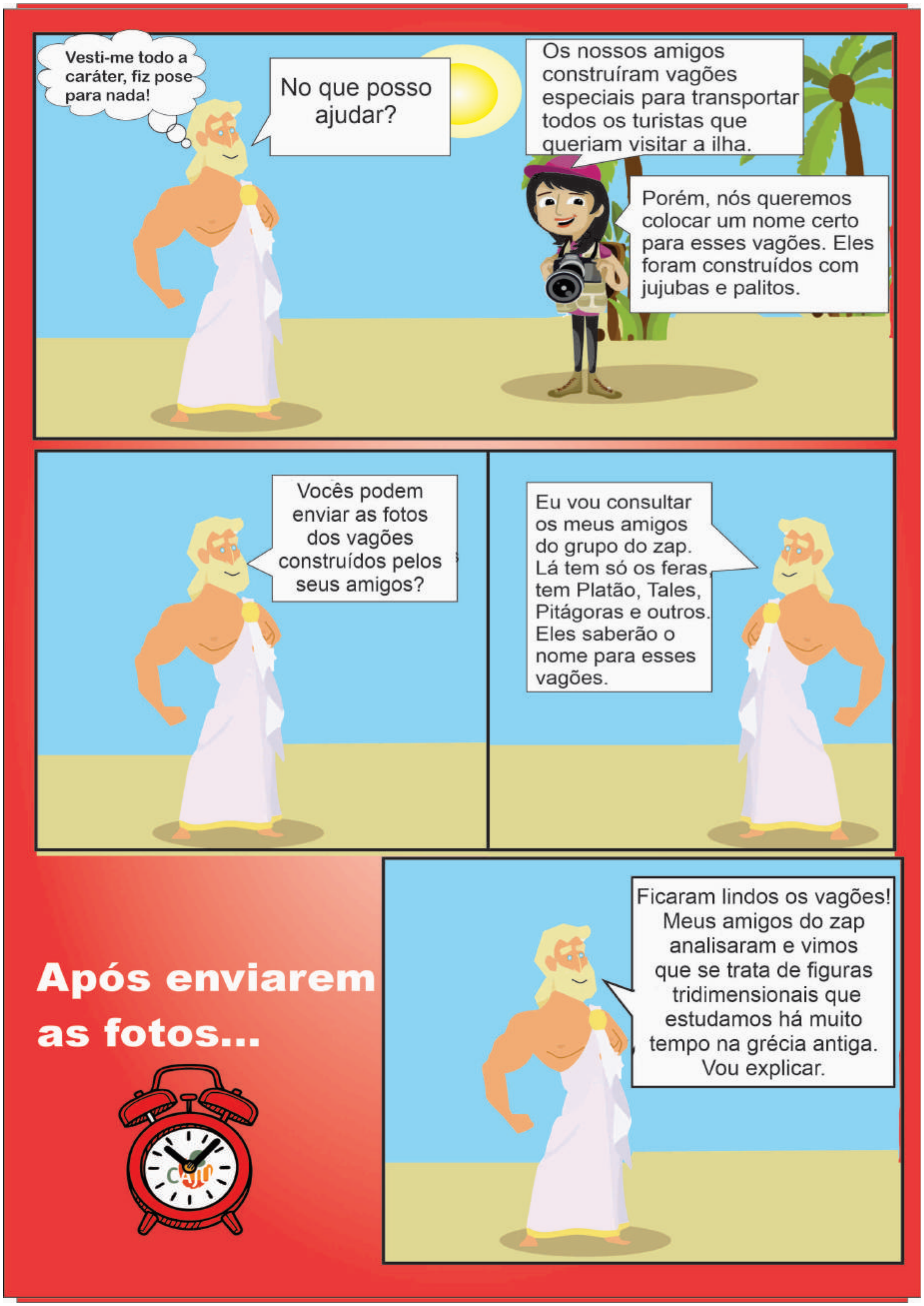
Apêndices

APÊNDICE A – História em quadrinhos (capa)

A.1 História em Quadrinhos- página 1

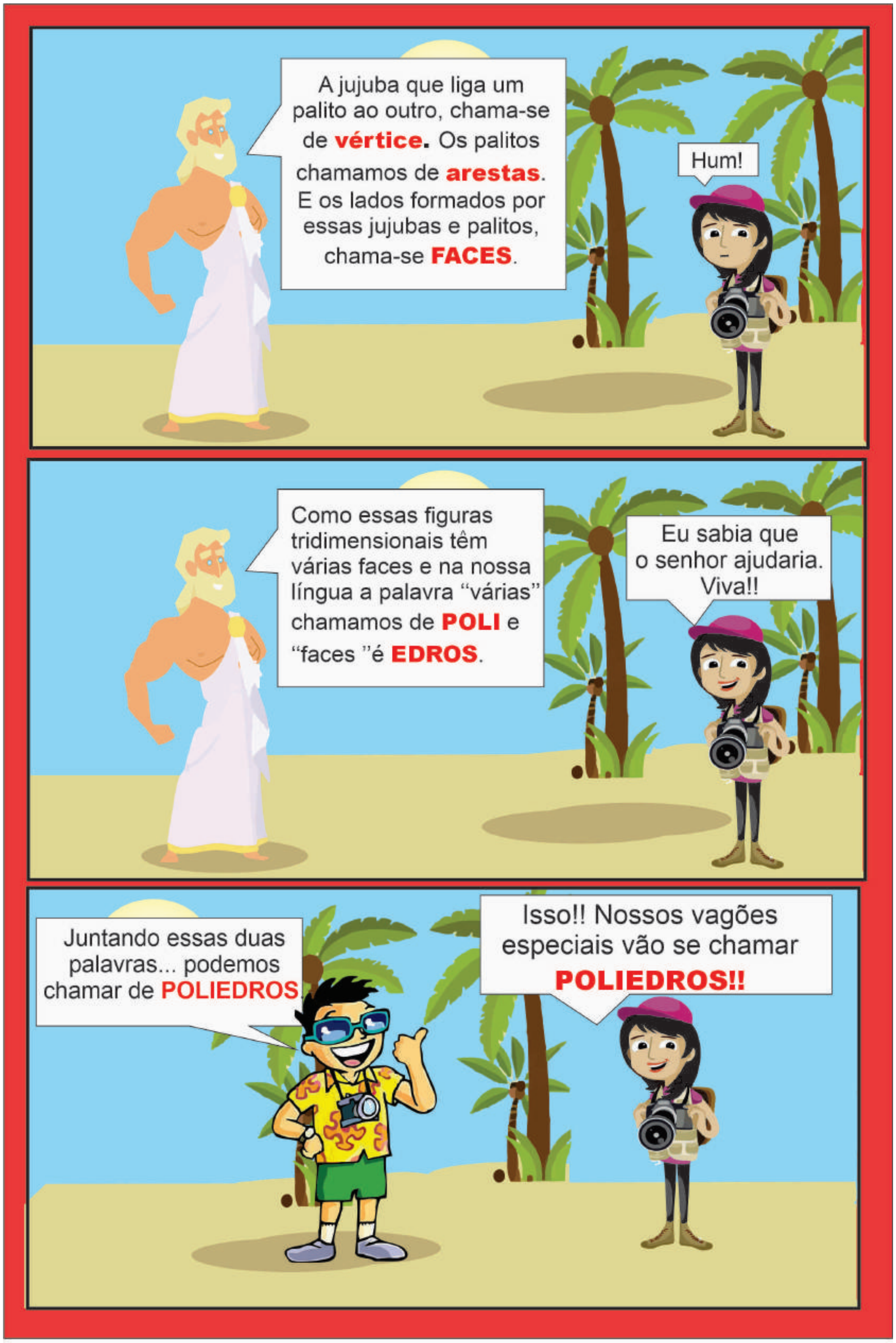
Fonte: Elaborada pelo autor

A.2 História em Quadrinhos- página 2



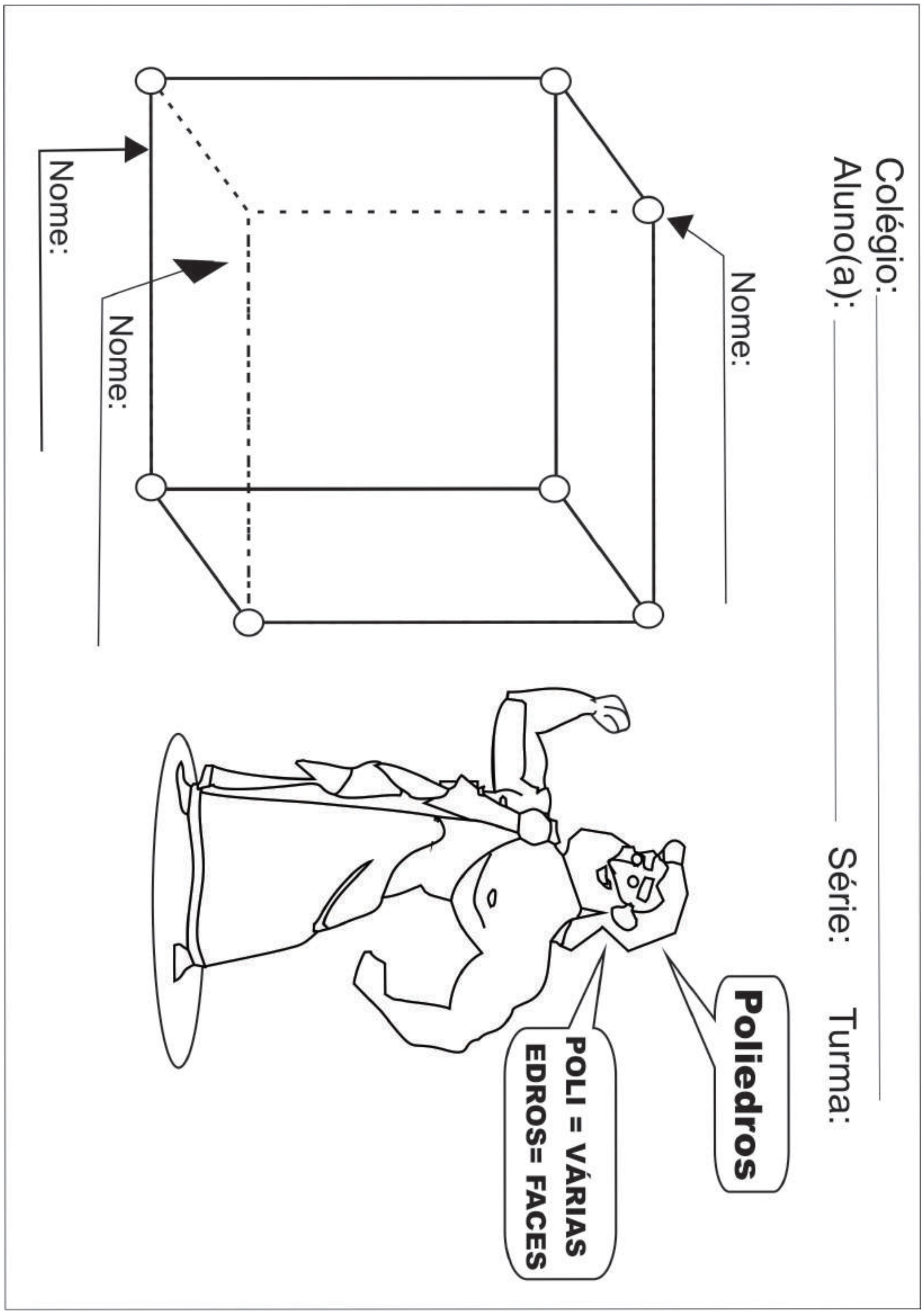
Fonte:Elaborada pelo autor

A.3 História em Quadrinhos- página 3



Fonte: Elaborada pelo autor

A.4 Carta na manga- Etapa 1

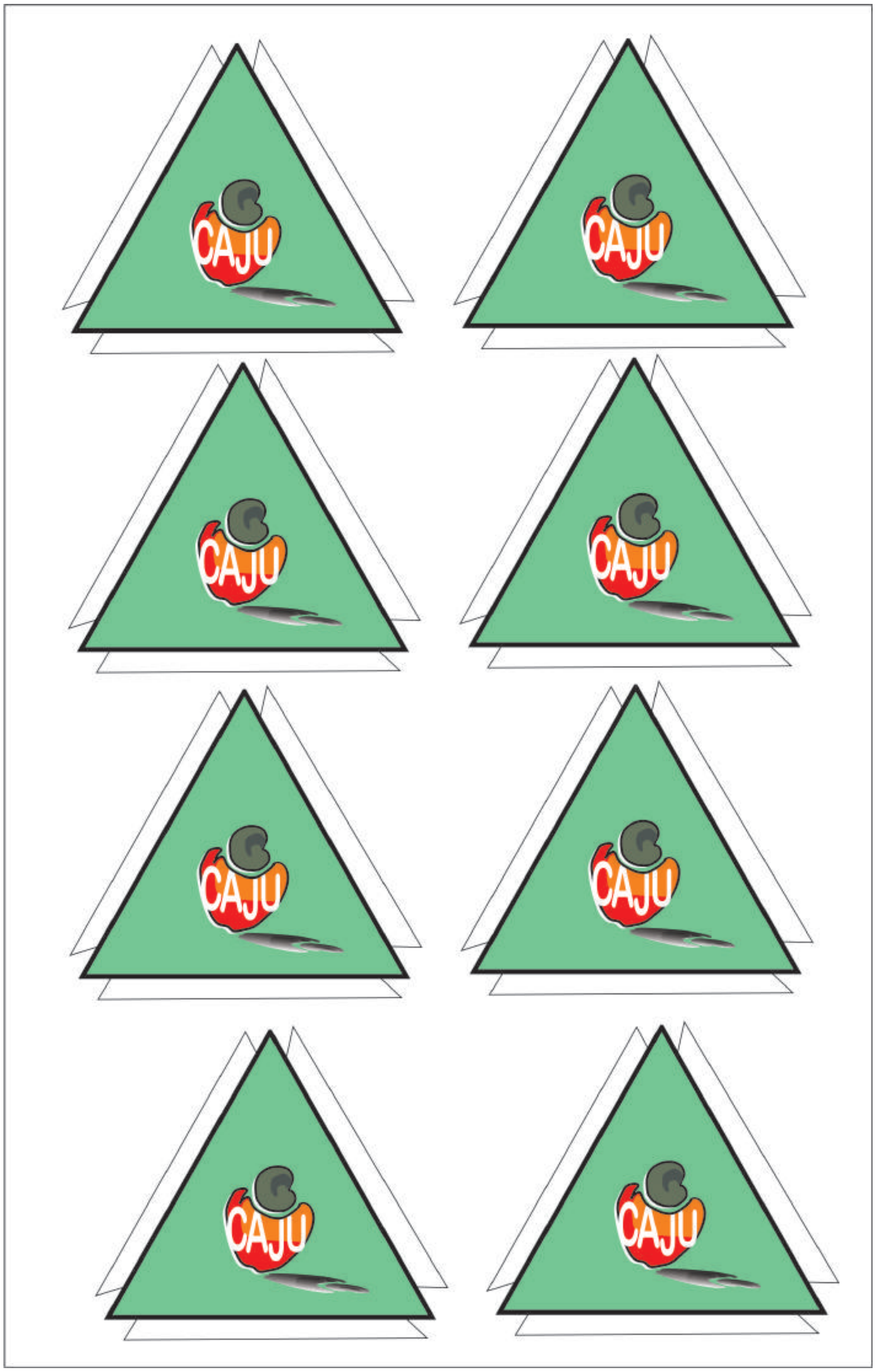


Fonte:Elaborada pelo autor

APÊNDICE B – Hexágono regular para recortar - Oficina 2

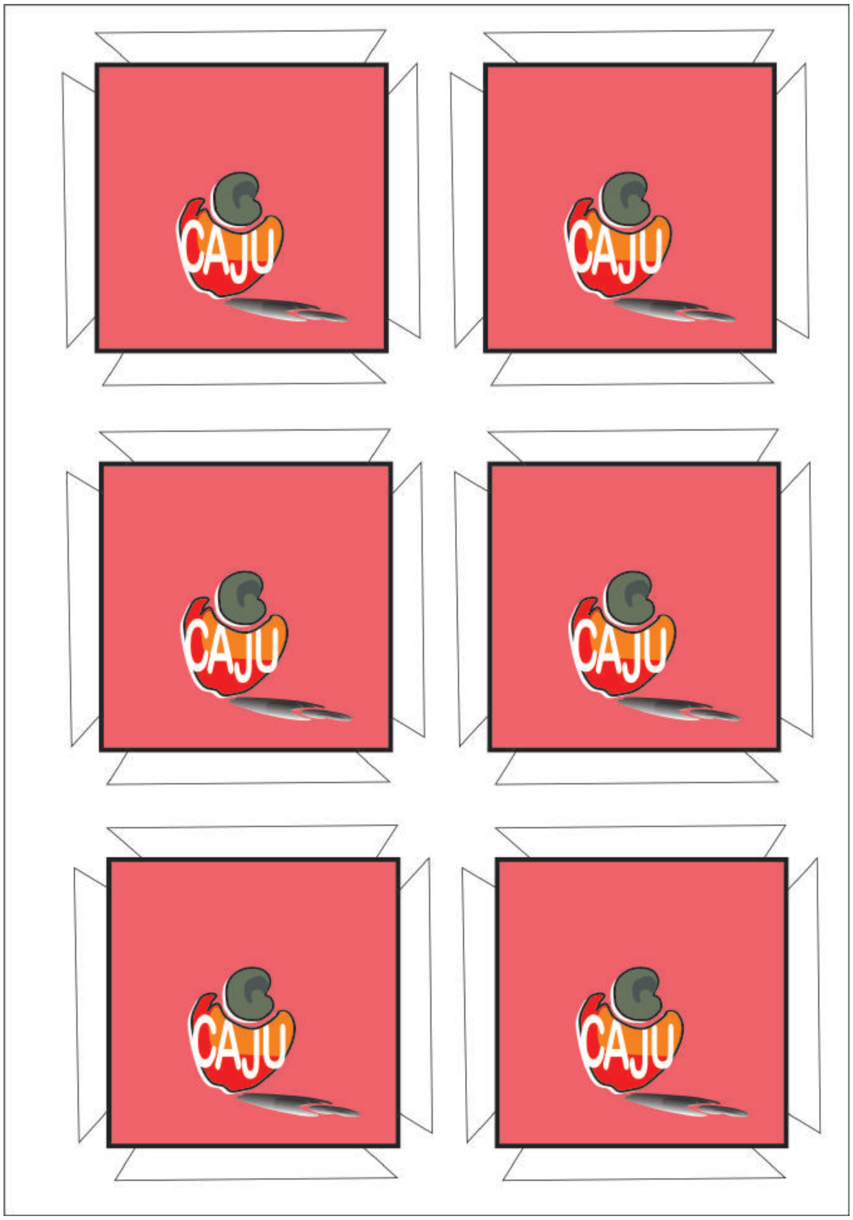
Fonte: Elaborada pelo autor

B.1 Triângulos Equiláteros para recortar



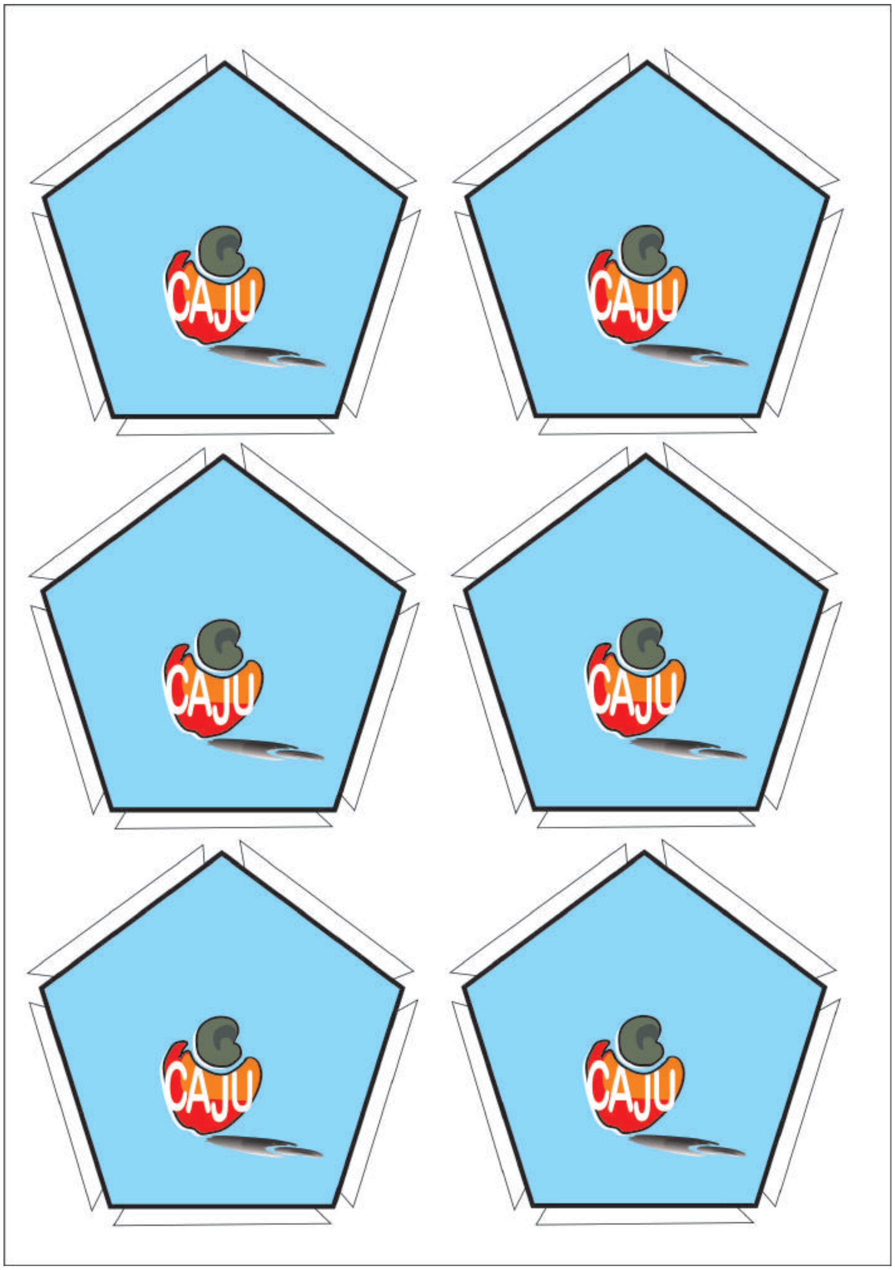
Fonte: Elaborada pelo autor

B.2 Quadrados para recortar



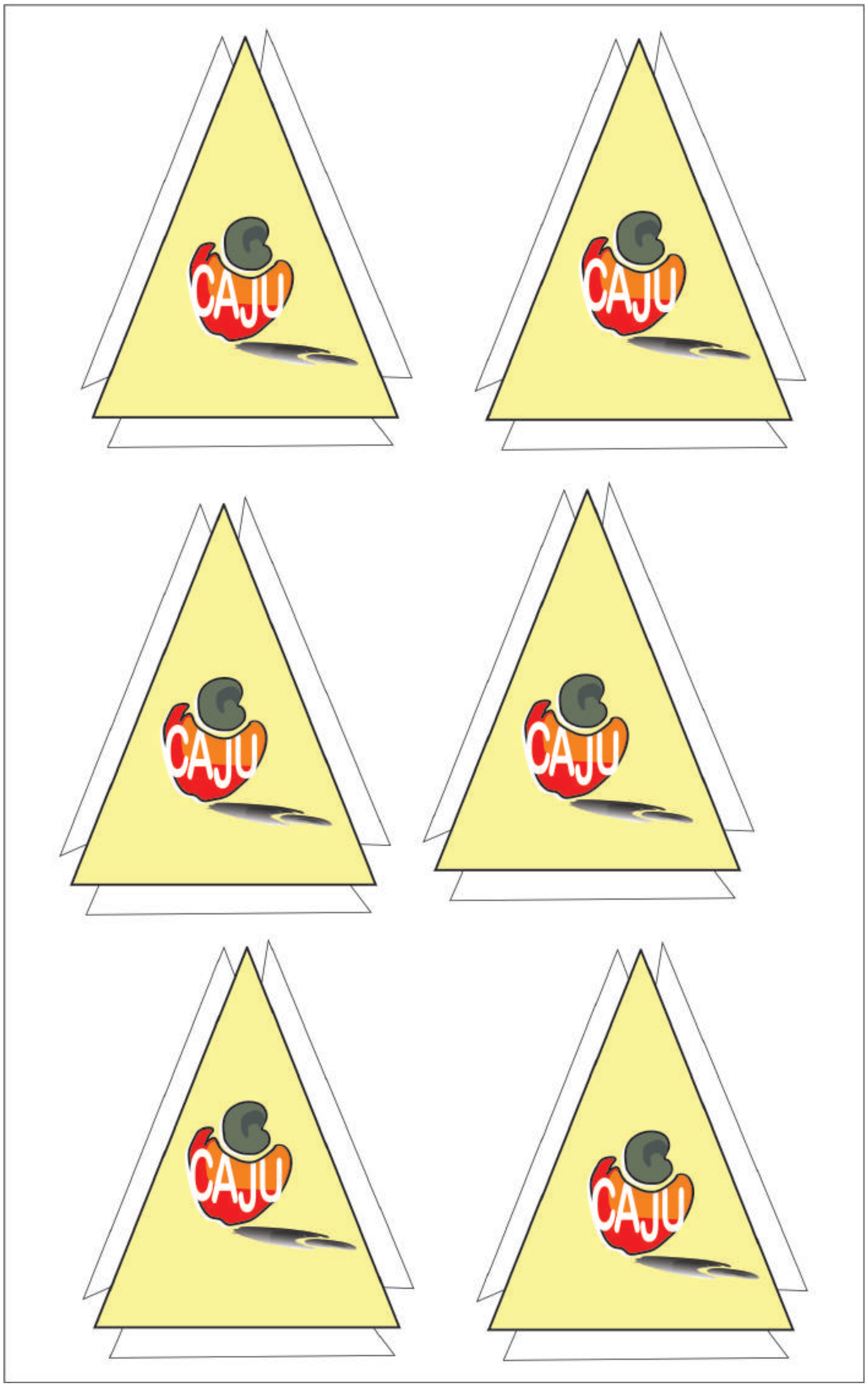
Fonte:Elaborada pelo autor

B.3 Pentágonos regulares para recortar



Fonte: Elaborada pelo autor

B.4 Triângulos Isósceles para recortar



Fonte: Elaborada pelo autor

APÊNDICE C – Tabela para anotação dos dados

COLÉGIO: ____

ALUNO(A): ____

SÉRIE/ANO: ________ **TURMA:** ______ **DATA:** ____________

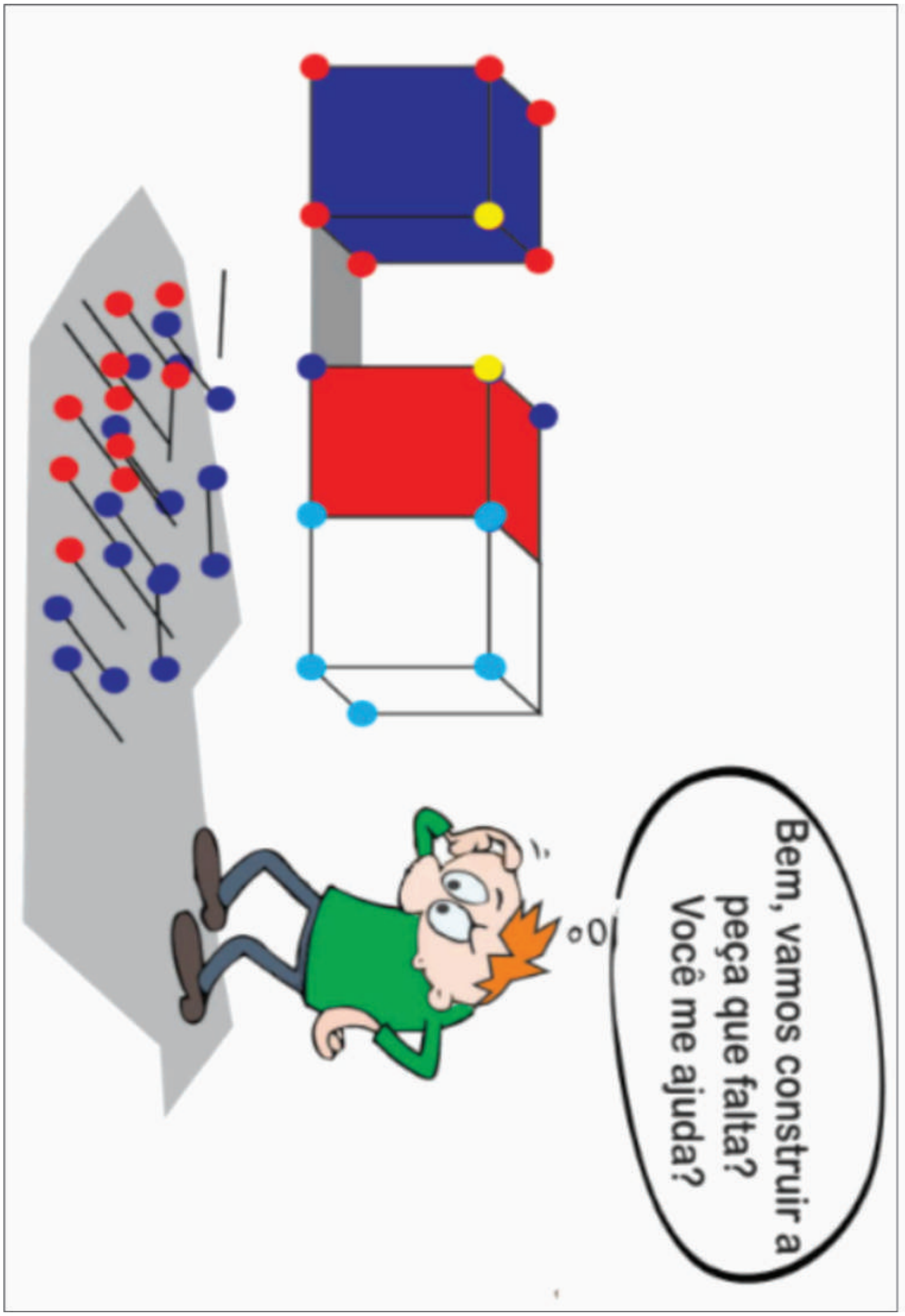
PROFESSOR(A): ____________________ **DISCIPLINA:** ____________

TABELA DE PREENCHIMENTO

POLIEDRO	Nº DE FACES	Nº DE VÉRTICES	Nº DE ARESTAS		CONVEXO	CÔNCAVO	REGULAR

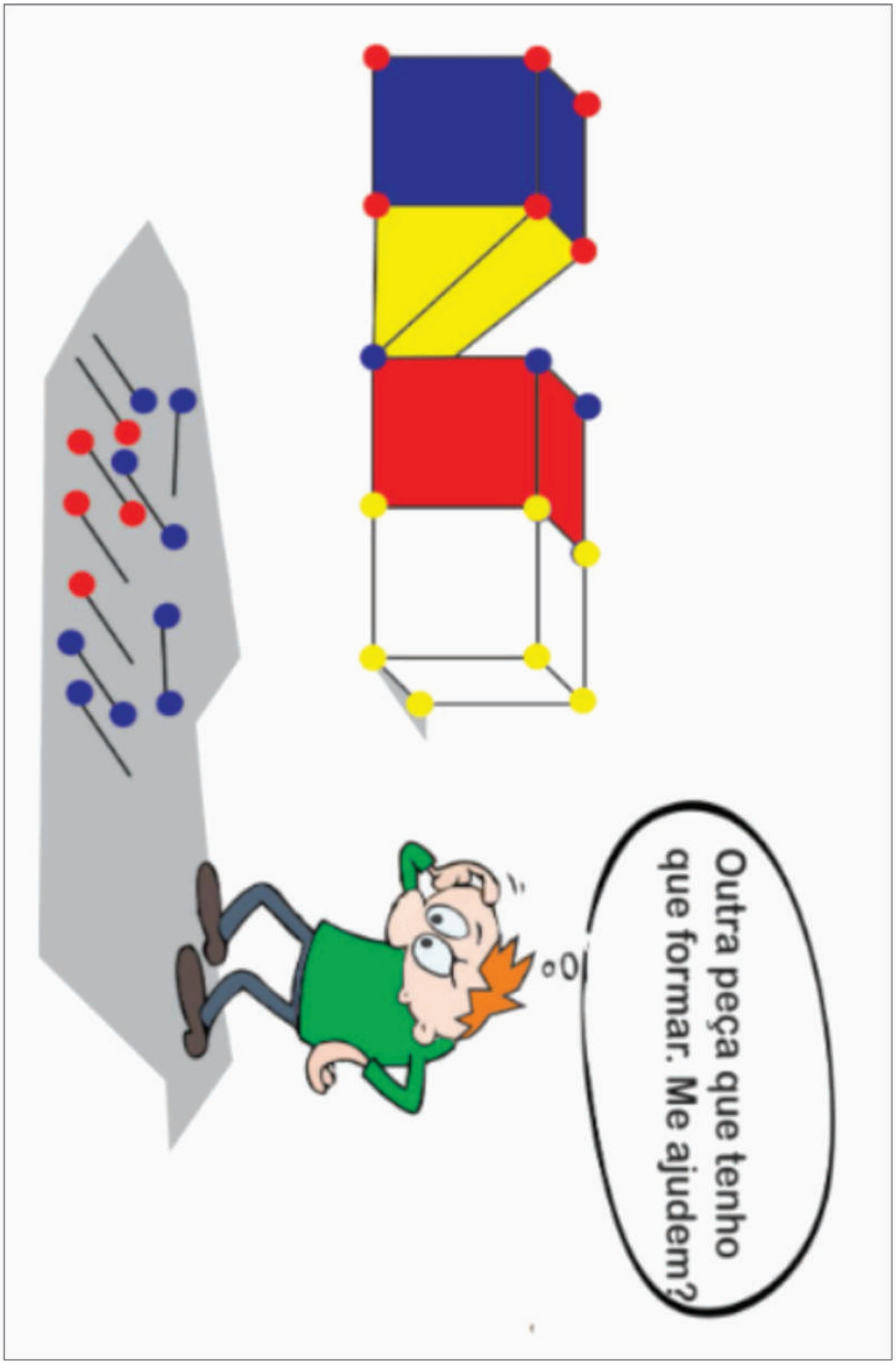
Fonte: Elaborada pelo autor

APÊNDICE D – Poliedrix - Etapa 1- fase 1



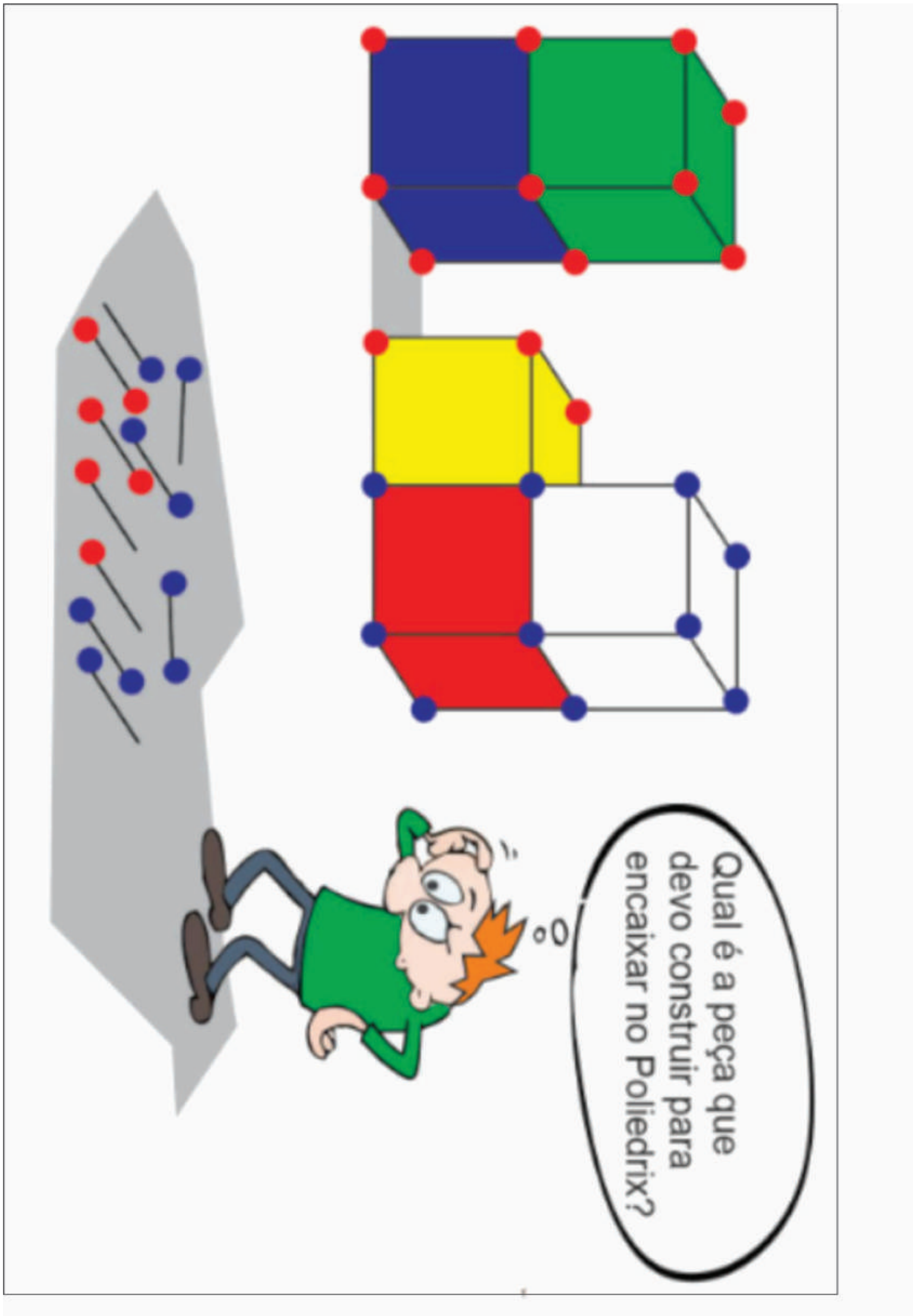
Fonte: Elaborada pelo autor

D.1 Poliedrix - Etapa 2- fase 2



Fonte: Elaborada pelo autor

D.2 Poliedrix - Etapa 3-fase 3

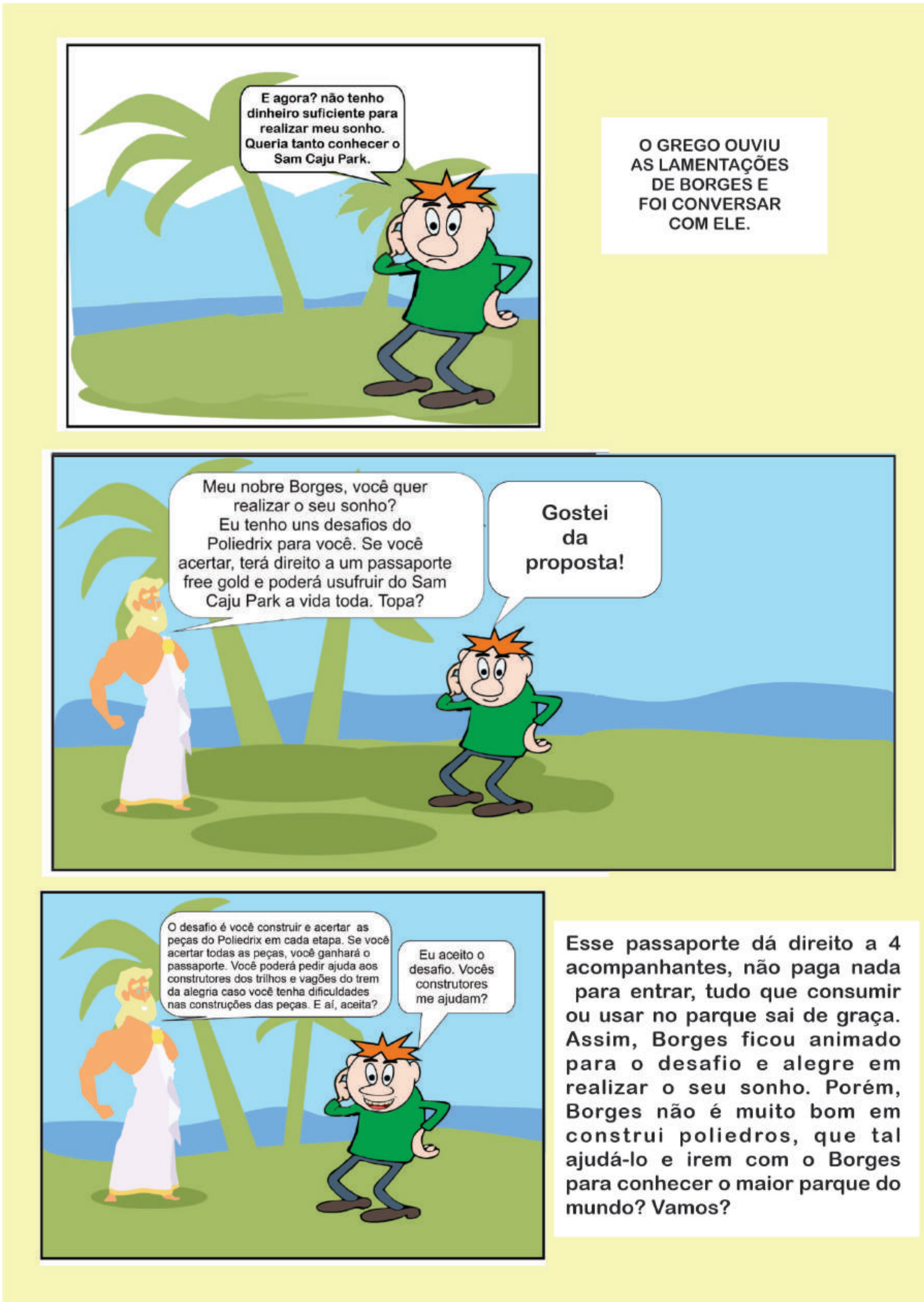


Fonte:Elaborada pelo autor

D.3 SONHO DE BORGES- PÁGINA 1

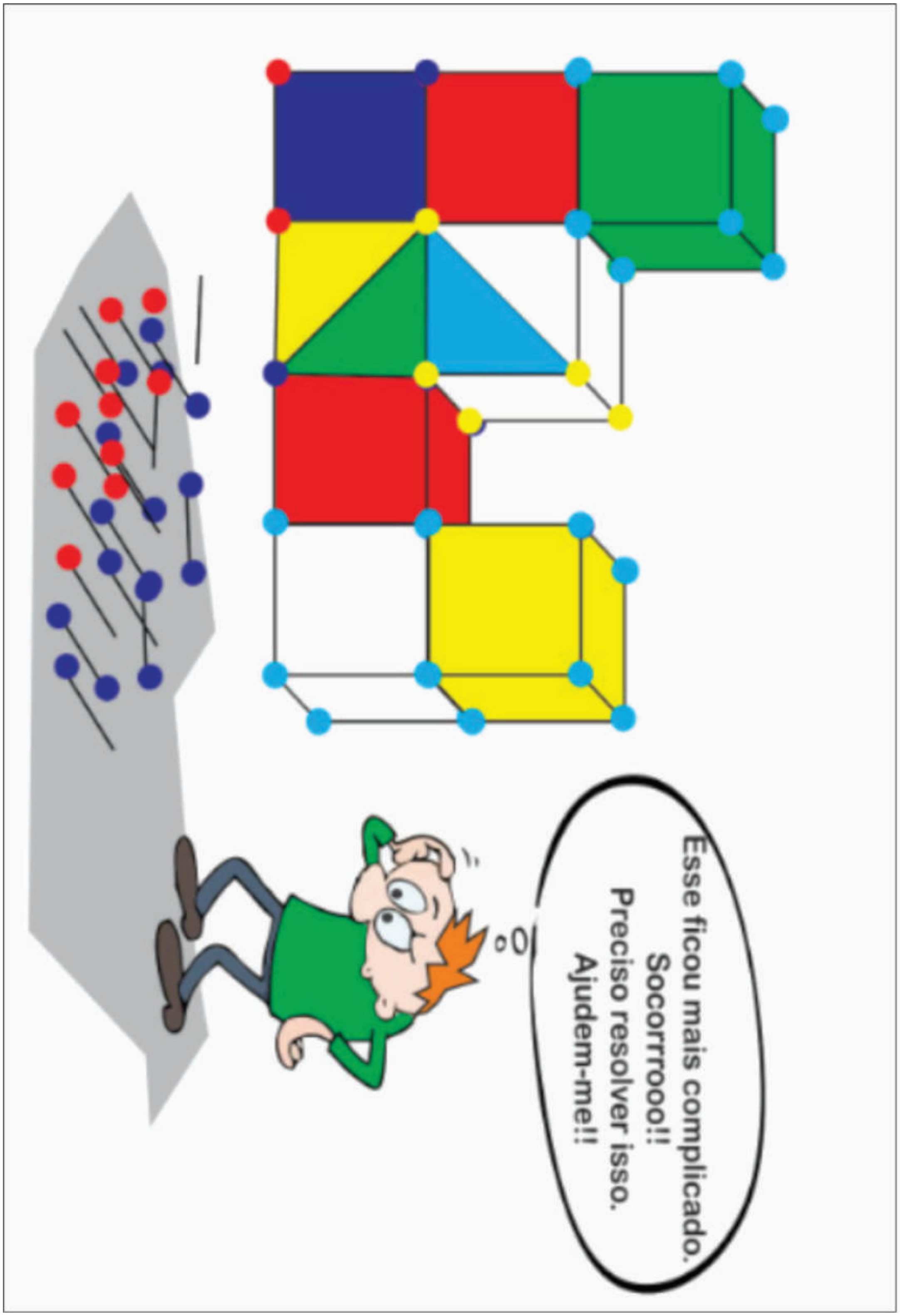
Fonte: Elaborada pelo autor

D.4 SONHO DE BORGES- PÁGINA 2



Fonte: Elaborada pelo autor

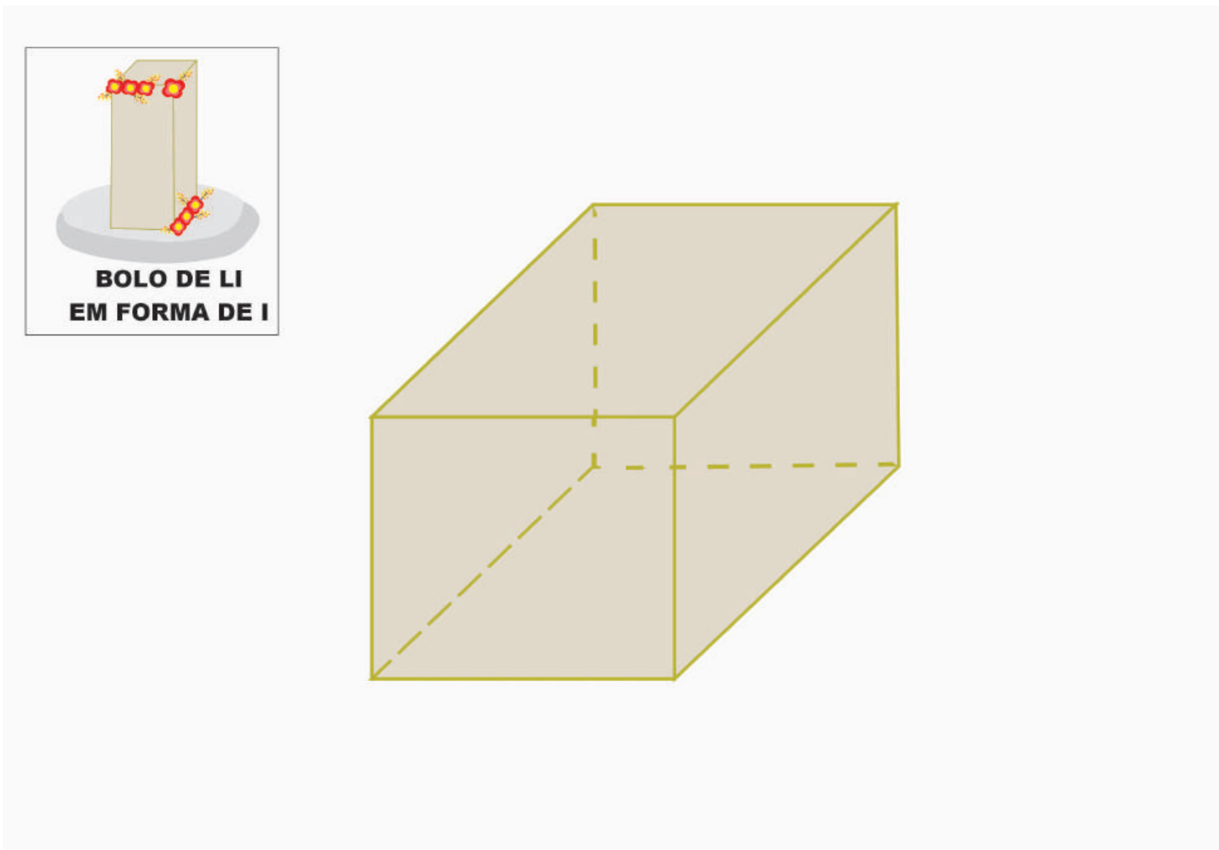
D.5 Poliedrix - Etapa 4 - fase 4



Fonte: Elaborada pelo autor

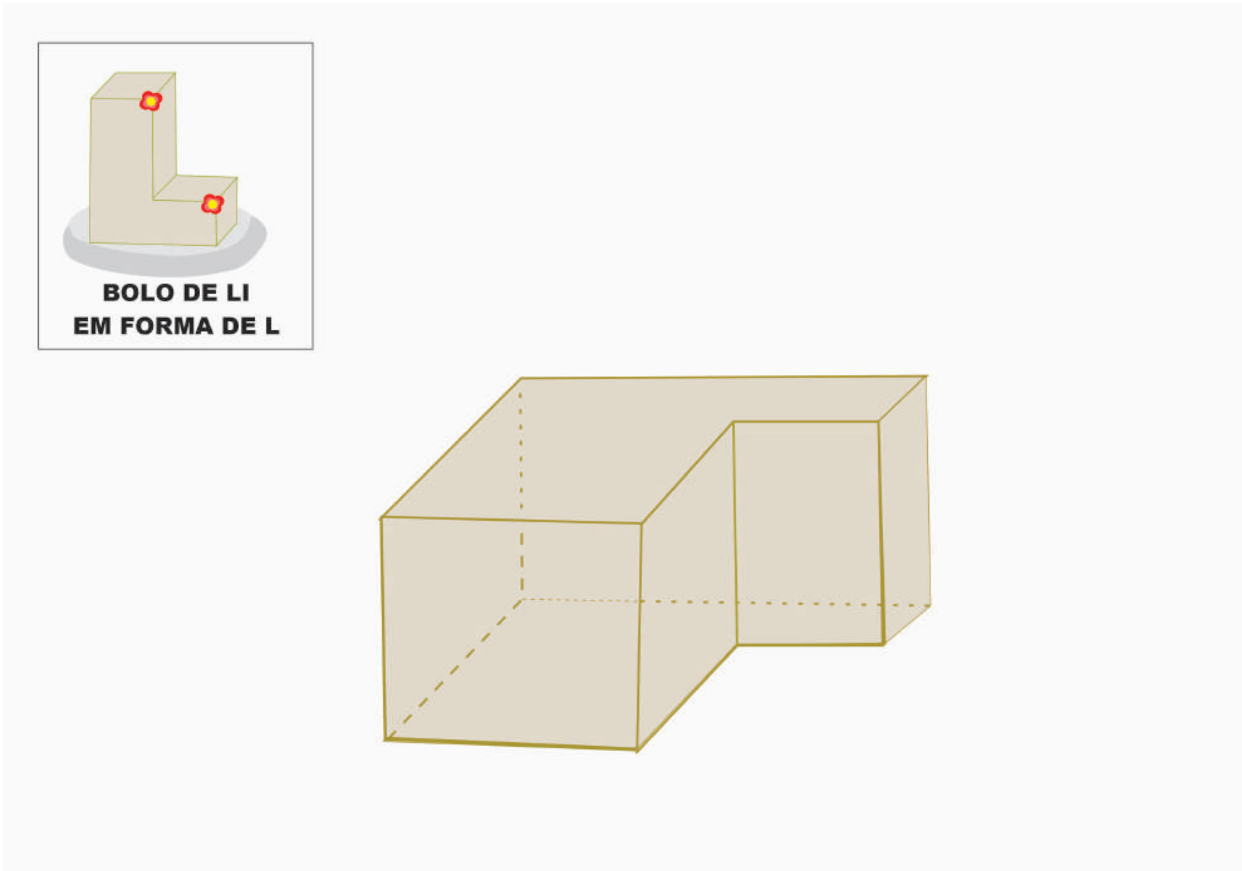
APÊNDICE E – Bolo da Lia

E.1 Bolo em formato de I



Fonte:Elaborada pelo autor

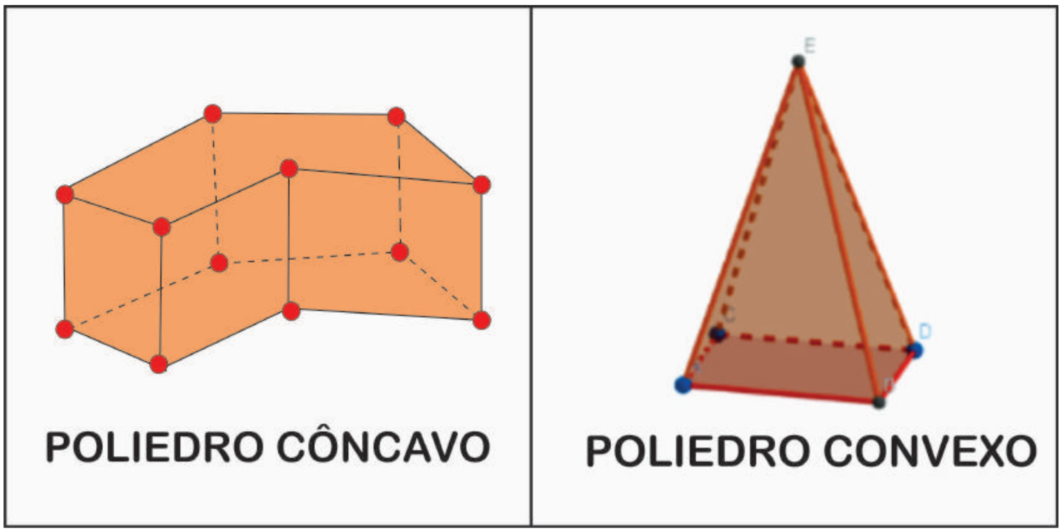
E.2 Bolo em formato de L



Fonte: pelo autor

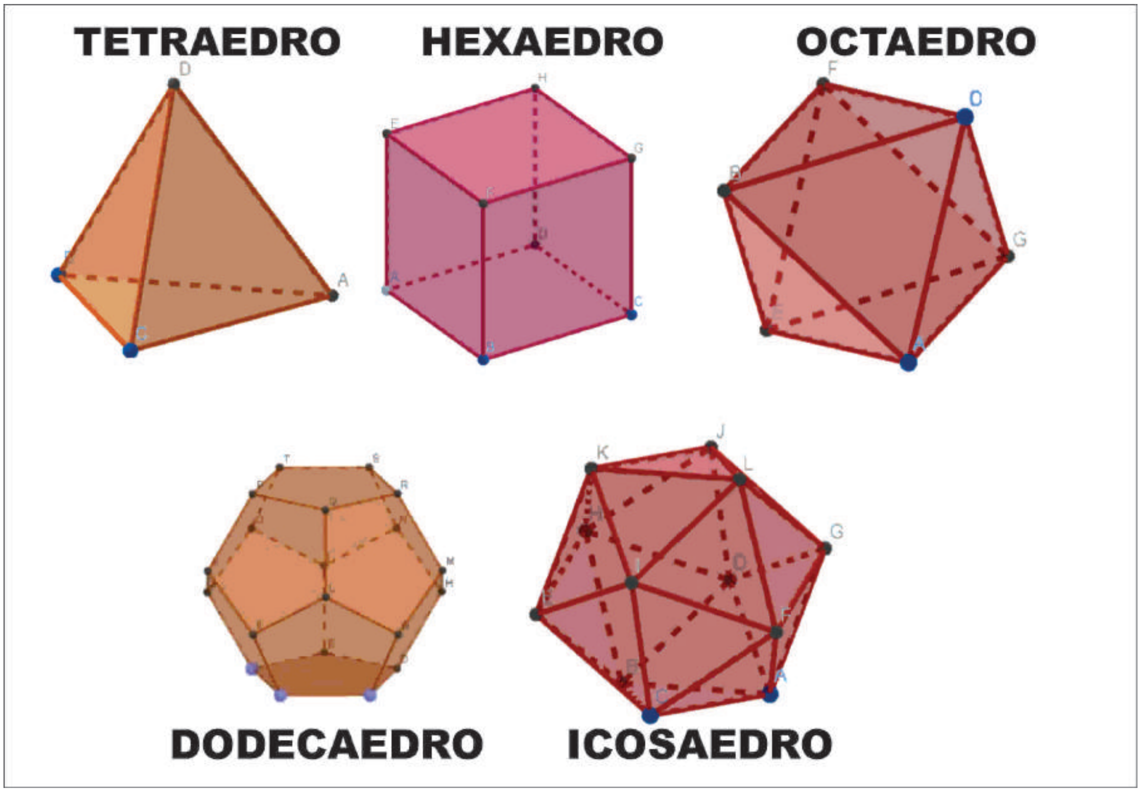
APÊNDICE F – Imagens de alguns poliedros côncavo e convexo

F.1 Poliedros côncavo e convexo



Fonte:Elaborada pelo autor

F.2 Poliedros regulares



Fonte: pelo autor