



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL-PROFMAT**

Paloma Brockveld

**OS NÚMEROS DE BERNOULLI COMO UM EXEMPLO DE RELAÇÃO
ENTRE O DISCRETO E O CONTÍNUO NA MATEMÁTICA**

Florianópolis

2021

Paloma Brockveld

**OS NÚMEROS DE BERNOULLI COMO UM EXEMPLO DE RELAÇÃO
ENTRE O DISCRETO E O CONTÍNUO NA MATEMÁTICA**

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Eliezer Batista

Florianópolis

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

BROCKVELD, PALOMA

OS NÚMEROS DE BERNOULLI COMO UM EXEMPLO DE RELAÇÃO ENTRE
O DISCRETO E O CONTÍNUO NA MATEMÁTICA / PALOMA BROCKVELD ;
orientador, ELIEZER BATISTA, 2021.

72 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática,
Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Números de Bernoulli. I. BATISTA,
ELIEZER. II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Paloma Brockveld

**OS NÚMEROS DE BERNOULLI COMO UM EXEMPLO DE RELAÇÃO
ENTRE O DISCRETO E O CONTÍNUO NA MATEMÁTICA**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Eduardo Tengan
UFSC

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro
UFSC

Prof. Dr. Giuliano Boava
UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

Prof^ª. Dr^ª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora do Programa

Prof. Dr. Eliezer Batista
Orientador

Florianópolis, 20 de Junho 2021.

Com gratidão, dedico este trabalho a todos que se fizeram presentes
nesta trajetória.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço meus pais que me proporcionaram uma educação de qualidade e todo suporte para dar continuidade a minha vida acadêmica.

Agradeço a UFSC pela disponibilidade gratuita do programa - ofertado com qualidade. Agradeço aos professores e coordenadores do curso e aos colegas de classe.

Agradeço ao Prof. Dr. Eliezer Batista pela orientação, pela disponibilidade e por permitir disfrutar um pouco do seu imenso conhecimento.

Agradeço ao meu amigo Cleison dos Santos Ramthum por todo apoio e principalmente pelo poder de transformar as palavras.

Agradeço a minha companheira de vida, Liana Garcia Ribeiro, pelo apoio, parceria e companherismo. Por entender que, assim como nos agradecimentos do TCC, não consegui expressar em palavras minha gratidão pelo apoio prestado.

Tente mover o mundo – o primeiro passo será mover a si mesmo.

(Platão)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo primordial a apresentação dos Números de Bernoulli de uma maneira clara e objetiva. Primeiramente, com o intuito de empregar ao trabalho uma forma amplamente didática, iniciaremos com uma motivação, em seguida, apresentaremos exemplos e aplicações. Abordaremos o conceito de funções geradoras e, a partir daí, será estabelecido uma relação entre a matemática discreta e matemática contínua. Além disso, iremos apresentar a função geradora como uma possível ferramenta para a resolução de problemas de Análise Combinatória dentro do Ensino Médio.

Palavras-chave: Números de Bernoulli. Polinômio de Bernoulli. Funções geradoras.

ABSTRACT

This work has as main objective the presentation of Bernoulli's Numbers in a clear and objective way. Firstly, in order to use work in a widely didactic way, its initialization will be explored through a motivation, then, we will focus on the exploration of examples and applications. We will approach the concept of generating functions and, from there, a relationship will be established between discrete mathematics and continuous mathematics. In addition, we will present the generating function as a possible tool for solving Combinatorial Analysis problems in high school.

Keywords: Bernoulli numbers. Generating functions. Bernoulli polynomials.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Jacob Bernoulli – Wikimedia Commons.....	21
Figura 2	Árvore genealógica da família Bernoulli.	23
Figura 3	Recorte de uma página do livro <i>Ars Conjectandi</i> mostrando a fórmula de Bernoulli para soma de potências de números inteiros.	26
Figura 4	Números de Bernoulli por Seki – Wikimedia Commons.....	27
Figura 5	Retrato de Leonhard Euler feito por Emanuel Handmann em 1753.....	28
Figura 6	A nota de 10 francos suíços trouxe a imagem de Euler como estampa.....	31

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	19
2 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA	21
2.1 JACOB BERNOULLI	21
2.1.1 Uma abordagem breve sobre a vida de Jacob Bernouli (Jacob/Jacques/Jacob I)	21
2.1.2 Uma abordagem breve sobre a obra de Jacob Bernoulli (Jacob/Jacques/Jacob I)	23
2.1.3 Ars Conjectandi	24
2.2 SEKI TAKAKAZU	27
2.3 LEONHARD EULER	28
2.3.1 Uma abordagem breve sobre a vida de Leonhard Euler	28
2.3.2 Uma abordagem breve sobre a obra de Leonhard Euler	29
2.3.3 Problema da Basileia	31
3 NÚMEROS DE BERNOULLI - UMA INTRODUÇÃO	33
3.1 NÚMEROS DE BERNOULLI - RECORRÊNCIA	33
4 FUNÇÕES GERADORAS E NÚMEROS DE BERNOULLI	37
4.1 SÉRIES	37
4.1.1 Definição e Convergência	37
4.1.2 Série de Potências	44
4.2 FUNÇÕES GERADORAS	46
4.2.1 Números de Bernoulli e funções geradoras	49
5 APLICAÇÕES E RESULTADOS IMPORTANTES	53
5.1 FUNÇÃO COTANGENTE HIPERBÓLICA:	53
5.2 POLINÔMIOS DE BERNOULLI	54
6 FUNÇÕES GERADORAS NO ENSINO MÉDIO	59
7 CONCLUSÃO	67
REFERÊNCIAS	69

1 INTRODUÇÃO

Os números de Bernoulli são uma sequência de números racionais com grande importância dentro da matemática moderna e aparecem com frequência dentro da teoria dos números e da geometria diferencial. Os números de Bernoulli surgiram com a ideia de sintetizar somas infinitas, problema que há milênios foi sendo trabalhado por diversos matemáticos, tendo diversas aplicações interessantes. Entre essas aplicações, temos: o último teorema de Fermat, expansão de Euler-Maclaurin e cálculo diferencial.

Os números de Bernoulli fazem uma ponte entre a matemática discreta ou finita e a matemática contínua. Podemos definir estes números de diversas maneiras, as mais frequentes são: recursiva, explícita e através de funções geradoras. Neste trabalho vamos explorar a forma recursiva e a que utiliza função geradora.

No segundo capítulo faremos uma contextualização histórica sobre os matemáticos Jacob Bernoulli, Seki Takakazu e Leonhard Euler. Estes matemáticos foram essenciais na construção dos números de Bernoulli, os primeiros descobrindo estes números e o terceiro fazendo o processo de generalização e formalização.

É aceito que a primeira aparição dos números de Bernoulli foi no livro póstumo *Ars Conjectandi* de Jacob Bernoulli, em 1713. Além da importância do livro apresentar os números de Bernoulli, nele é possível encontrar uma teoria fundamental para o estudo de probabilidades. No livro, os números de Bernoulli foram escritos com uma notação que não é atual e não apresentou uma formalidade matemática de generalização para estes números, apresenta apenas o cálculo recursivo para estes números.

No terceiro capítulo vamos ver os números de Bernoulli de maneira discreta através da recursão e também calcular alguns números de Bernoulli. Mais à frente, quando falarmos dos Polinômios de Bernoulli, também veremos uma outra recorrência para encontrar estes números.

No quarto capítulo vamos falar sobre as funções geradoras e a generalização dos números de Bernoulli. Nesta parte abordaremos toda a base teórica necessária para compreender essa generalização. Assim, temos uma visão dos números de Bernoulli dentro da matemática contínua. Ao adentrarmos em função geradora é essencial que saibamos

trabalhar com séries, neste capítulo vamos falar sobre as séries e sua convergência.

No quinto capítulo vamos trazer algumas aplicações importantes dos números de Bernoulli. Iremos trabalhar os polinômios de Bernoulli e verificar uma nova relação de recorrência dos números de Bernoulli.

No sexto capítulo vamos apresentar aplicações de funções geradoras dentro da matemática do ensino médio. Através de alguns problemas vamos perceber que aplicando o conteúdo de funções geradoras conseguimos desenvolver uma resolução rápida e simples.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

2.1 JACOB BERNOULLI

2.1.1 Uma abordagem breve sobre a vida de Jacob Bernouli (Jacob/Jacques/-Jacob I)

Jacob Bernoulli (1655-1705), também conhecido como Jacques (ou Jacob I), durante sua trajetória, foi reconhecido como filósofo, teólogo e matemático. E, embora sendo de uma família de renomados matemáticos, foi o primeiro de sua linhagem a ser reconhecido como um matemático renomado. A história nos mostra que Jacob Bernoulli, realizando um desejo de seu pai, aprofundou seus estudos nas áreas da filosofia e teologia. Entretanto, após seus primeiros contatos com a matemática, encontrou nela um grande apreço.



Figura 1: Jacob Bernoulli – Wikimedia Commons

Se formou em teologia em 1676 e, em seguida, atuou como professor particular na cidade de Genebra. Em 1682, retornou a Basileia, sua cidade natal, onde recusou sua nomeação como clérigo e dedicou-se demasiadamente aos estudos de conceitos matemáticos avançados.

Durante o período em Genebra, aproveitou para estudar com os seguidores de René Descartes e, no ano de 1681, viajou para a Europa, onde conheceu Johann Hudde, Robert Boyle, Robert Hooke, Gottfried Leibniz, Isaac Barrow e Christian Huygens. Jacob tinha muito interesse na área da astronomia e apresentou sua teoria sobre cometas, teoria essa que na sequência foi provada incorreta. Estudou as principais obras dos matemáticos de sua época, incluindo *La Géométrie* de René Descartes e os trabalhos de Wallis e Barrow. Com base nestes estudos, despertou interesse pela Geometria e pelo Cálculo Infinitesimal.

No ano de 1684 casou-se com Judith Stupanus, com quem teve dois filhos, Nicolau

e Verena. Nenhum dos filhos despertou interesse pelas áreas da Matemática e da Física, embora a família tenha influenciado fortemente para que isto, de fato, acontecesse. Três anos após seu casamento com Judith, Jacob foi nomeado professor de Matemática em Basileia, onde já era reconhecido, desde 1683, como professor de Física.

Também no ano de 1687, Johann Bernoulli, irmão mais novo de Jacob Bernoulli, que era estudante de Medicina, conforme desejo de sua família, pediu que Jacob o ensinasse Matemática. Após o aceite de Jacob, iniciaram os estudos em Cálculo Diferencial, usando como base os estudos de Leibniz. Na época, as noções apresentadas por Leibnizeram consideradas conceitos de nível avançado e, poucos matemáticos desenvolviam com-petências e aptidões a partir deles.

Segundo (Peiffer, 2006) os irmãos Bernoulli desenvolveram diversas habilidades e um avanço significativo, concentrando seus esforços nos estudos de Leibniz. Posteriormente, Jacob percebeu que seu irmão havia apresentado um raciocínio lógico ainda mais aprimorado que grande parte dos estudiosos da época, inclusive, talvez mais aprimorado que o do próprio Jacob. Essa percepção de Jacob, fez com que um sentimento de rivalidade e competição se desenvolvesse em ambos. Um fato que se destacou na rivalidade entre os dois, foi que os irmãos desenvolviam desafios e os publicavam, afim de que o outro não conseguisse solucionar, causando assim, sentimentos de impotência intelectual e um constrangimento perante outros estudiosos. Mesmo assim, há diversas contribuições para a Matemática advindas dos irmãos Bernoulli.

Dono de uma personalidade forte e considerado como uma pessoa difícil de lidar, Jacob realizou denúncias sobre práticas ilícitas que aconteciam na Universidade de Basileia, em 1691. Alguns profissionais da Universidade, sentindo-se ofendidos com tais acusações iniciaram um processo de limitação das atividades exercidas por Jacob, essas limitações foram encerradas ainda no final daquele ano, após conversas entre os envolvidos e um pedido de desculpas por parte de Jacob.

Em 1692, começou a sofrer de problemas de saúde que iniciaram com uma tosse forte, seguida de gota e por fim uma febre debilitante que ocasionou seu falecimento em 1705.

A família Bernoulli possuía o costume de dar nomes iguais aos seus membros. Um exemplo disso é o fato de Jacob Bernoulli e seu irmão Nicolau terem dado o mesmo nome para seus filhos, que curiosamente nasceram no mesmo ano. Diante disso, foram

necessárias algumas caracterizações para diferenciar um membro de outro. Um exemplo disso é o uso de números romanos, conforme vemos na imagem abaixo. No diagrama aparecem os nomes em francês (Jacques e Jean) ao invés dos nomes em alemão (Jacob e Johan), sendo Jacob Bernoulli retratado por Jacques I.

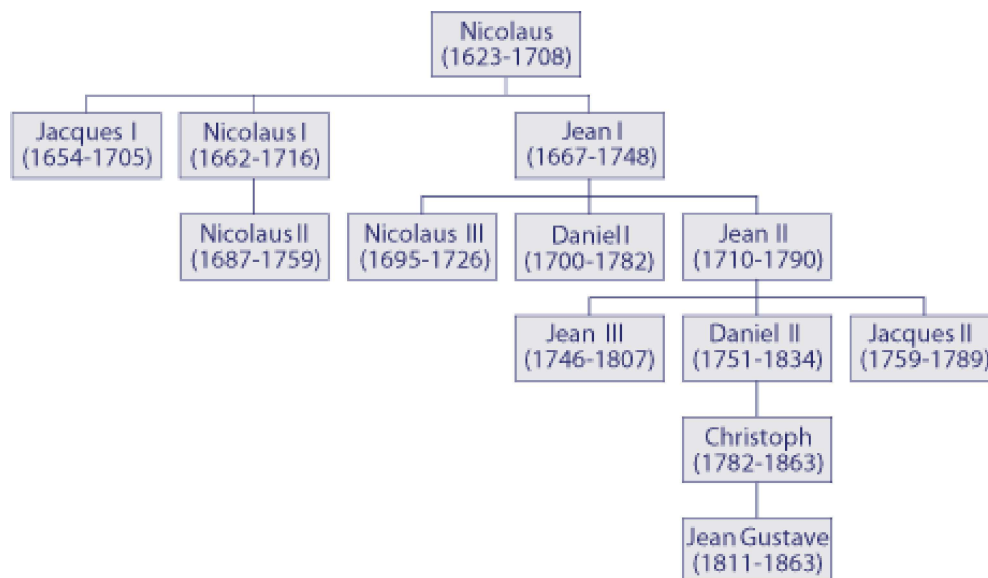


Figura 2: Árvore genealógica da família Bernoulli.

2.1.2 Uma abordagem breve sobre a obra de Jacob Bernoulli (Jacob/Jacques/-Jacob I)

Cálculo diferencial, integral e equações diferenciais foram os conceitos principais que embasaram e direcionaram os estudos de Jacob. Entretanto, seu maior interesse foi nas habilidades e teorias desenvolvidos através dos estudos das séries. Durante muitos anos Jacob buscava solucionar problemas matemáticos, destacando-se entre eles o problema da curva catenária.

Em 1682 começou a submeter artigos no *Journal des savants* onde apresentava ou criticava obras sobre a área das ciências naturais – máquinas para respirar embaixo d'água, pesar o ar, centro de oscilação, entre outros. Foi a partir de 1685 que começou a fazer publicações sobre matemática, no mesmo jornal. Sua principal obra foi publicada 8 anos após seu falecimento e ainda se encontrava-se incompleta, falaremos dela em breve.

Segundo (Zindel, 2018) Jacob fez uma enorme contribuição para a área da probabilidade e estatística. Foi através do seu trabalho que a probabilidade começou a ser

mensurada – foi o primeiro matemático a quantificar/calcular variações e a incerteza. Uma das suas maiores contribuições foi a Lei dos Grandes Números (ou Teorema Áureo). Este teorema é o teorema fundamental da teoria da probabilidade, através deste teorema conseguimos estabelecer a relação entre a frequência de ocorrer certo evento com a probabilidade deste ocorrer – o teorema afirma que quanto maior a frequência deste evento mais próximo a probabilidade da média aritmética dos resultados observados irá se aproximar da probabilidade real. Portanto, temos que Bernoulli foi o primeiro a firmar o caráter frequentista da probabilidade.

Temos por padrão que o surgimento da probabilidade matemática começa com a correspondência entre Pascal e Fermat, em meados de 1654. Os matemáticos estavam preocupados com a divisão do pagamento de um jogo quando ele é interrompido antes do final planejado. Pascal, Fermat e Huygens, em meados do século XVII, fizeram um grande trabalho no campo de jogos de azar. Após isso, esta teoria ficou sem qualquer avanço até que Bernoulli deu continuidade a este estudo. Este período de pausa foi chamado por Steve Stigles como “Idade das trevas das probabilidades”.

Para Bernoulli a prova do teorema Áureo permitiria estender a matemática aplicada nos jogos de azar para um grupo maior de situações que ocorrem no cotidiano, incluindo questões civis, morais e econômicas. Porém, o próprio matemático encontrou dificuldades em exemplificar tais situações.

2.1.3 Ars Conjectandi

Em 1713, oito anos após sua morte, o sobrinho e também matemático Nicholas Bernoulli (1687 - 1759) publicou a grande obra-prima de Jacob Bernoulli sobre a teoria das probabilidades “Ars Conjectandi”, publicada com o título de “A arte da Conjectura”. A obra estava incompleta e foi publicada em sua forma original.

A obra apresenta conjecturas sobre assuntos da probabilidade que até então eram tratados apenas com o “bom senso”. São apresentados os principais estudos de Bernoulli dentro deste campo foram: teoria de combinações e permutações, os números de Bernoulli, a previsibilidade matemática e a lei de Bernoulli para grandes números (necessária para toda teoria moderna de amostragem).

Além da importância histórica, a obra ainda apresenta aplicações da teoria da probabilidade em situações cotidianas – seguro, jogos de azar e análise estatística (que ainda estava em formação). Foi nesta obra que surgiram os números de Bernoulli, na tentativa de descrever uma forma de calcular a soma de potências de inteiros consecutivos.

O livro foi dividido em quatro partes conforme descrito por (Adame, 2016). A primeira parte é uma reedição do livro de Huygens, onde são trabalhados algumas proposições e problemas envolvendo a área da probabilidade. Bernoulli apresentou resoluções usando séries infinitas e logaritmos. Aos resultados numéricos apresentou generalizações e novas formas de resolução. Uma das maiores contribuições de Bernoulli é a resolução do seguinte problema: calcular a chance de um jogador ganhar tendo infinitos jogadores e cada um podendo lançar o dado uma única vez. Esse problema relaciona a probabilidade de um jogador ganhar com a probabilidade dos demais perderem.

A segunda parte foi intitulada de “A doutrina de permutações e combinações”. Este trecho foi utilizado como livro texto de análise combinatória durante o século XVIII. Essa parte abordou com muitos detalhes os seguintes temas: permutações, combinações, o número de combinações de uma classe particular, números figurativos e suas propriedades, as somas de potências de inteiros, as propriedades dos C_n , combinações com repetição, combinações com repetição restrita, variações sem repetição, variações com repetição e variações com repetição restrita.

A terceira parte apresenta aplicações da teoria de combinações e traz a solução detalhada de 24 problemas de jogos de azar. Enquanto nas duas primeiras partes Bernoulli desenvolveu ferramentas para resolver problemas relacionados aos jogos de azar e os aplicou em problemas clássicos discutidos por Pascal, Fermat e Hygens, nessa parte ele resolve novos problemas e, em sua maioria, os ilustra com jogos inventados por ele.

Por último, a quarta parte apresenta o famoso Teorema de Bernoulli. Além disso, apresenta toda a teoria fundamental e moderna da probabilidade. Além de aplicação aos jogos de azar, são mostradas aplicações em problemas cívicos, morais e econômicos.

Observamos, na figura 3, que Bernoulli utilizava o atual símbolo de integral “ \int ” para representar os somatórios. Tal símbolo era e continuou por muito tempo popular para representar soma de números inteiros consecutivos. O símbolo atual para somatório “ \sum ” foi inicialmente utilizado por Leonard Euler em 1755. Na época, alguns matemáticos

também aderiram a utilização desse símbolo, porém não todos.

Foi então, entre os anos de 1822 a 1829, com os matemáticos Joseph Fourier e Carl Gustav Jacob Jacobi, que o símbolo \sum começou a ser popularizado e aceito como símbolo de somatório. Devemos observar, também, que antes de se popularizar o símbolo \sum para qualquer somatório ele estava mais associado a somatórios que envolviam índices ou subíndices.

... Atque si porrò ad altiores gradatim potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum licet :

Summae Potestatum

$$f n = \frac{1}{2} n n + \frac{1}{2} n$$

$$f n n = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n n + \frac{1}{6} n$$

$$f n^3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n n$$

$$f n^4 = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n$$

$$f n^5 = \frac{1}{6} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{5}{12} n^4 - \frac{1}{12} n n$$

$$f n^6 = \frac{1}{7} n^7 + \frac{1}{2} n^6 + \frac{1}{2} n^5 - \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{42} n$$

$$f n^7 = \frac{1}{8} n^8 + \frac{1}{2} n^7 + \frac{7}{12} n^6 - \frac{7}{24} n^4 + \frac{1}{12} n n$$

$$f n^8 = \frac{1}{9} n^9 + \frac{1}{2} n^8 + \frac{2}{3} n^7 - \frac{7}{15} n^5 + \frac{2}{9} n^3 - \frac{1}{30} n$$

$$f n^9 = \frac{1}{10} n^{10} + \frac{1}{2} n^9 + \frac{3}{4} n^8 - \frac{7}{10} n^6 + \frac{1}{2} n^4 - \frac{1}{12} n n$$

$$f n^{10} = \frac{1}{11} n^{11} + \frac{1}{2} n^{10} + \frac{5}{6} n^9 - 1 n^7 + 1 n^5 - \frac{1}{2} n^3 + \frac{5}{66} n$$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentuis ensperexit, eundem etiam continuare poterit absque his ratiociniorum ambabimus : Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\int n^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} A n^{c-1} + \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} B n^{c-3}$$

$$+ \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2 \cdot c - 3 \cdot c - 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} C n^{c-5}$$

$$+ \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2 \cdot c - 3 \cdot c - 4 \cdot c - 5 \cdot c - 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} D n^{c-7} \dots \& \text{ ita deinceps,}$$

exponentem potestatis ipsius n continué minuendo binario, quosque perveniatur ad n vel nn. Literae capitales A, B, C, D & c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $f n n$, $f n^4$, $f n^6$, $f n^8$, & c. nempe

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}.$$

Figura 3: Recorte de uma página do livro *Ars Conjectandi* mostrando a fórmula de Bernoulli para soma de potências de números inteiros.

Na última linha podemos verificar os coeficientes que posteriormente foram denominados números de Bernoulli. Os termos “julgamento Bernoulli” e “números de Bernoulli” são os frutos desta obra.

2.2 SEKI TAKAKAZU

O interesse pela determinação de fórmulas que apresentem o resultado da soma das potências de números inteiros consecutivos tem mais de dois milênios. Muitos matemáticos se dedicaram a este estudo e entre eles temos o japonês Seki Takakazu (1642-1708) que, curiosamente, também definiu os *números de Bernoulli* em seu livro póstumo *Katsu Sampo*.

Nesta situação, conforme (Arakawa et al., 2014) citado por (Mirkoski, 2018) não há dúvidas quanto a descoberta independente. A descoberta dos dois matemáticos ocorreu quase ao mesmo tempo, tendo seus livros póstumos apenas um ano de diferença, e praticamente usando os mesmos conceitos.

Vale observar que Bernoulli apresentou alguns padrões dos coeficientes que não foram citados pelo matemático japonês. Um fator que leva Seki a não ser tão citado nessa descoberta é a linguagem da escrita que não é facilmente traduzida, além de que Bernoulli apresentou seus estudos de maneira mais facilmente compreensiva através de sequências.

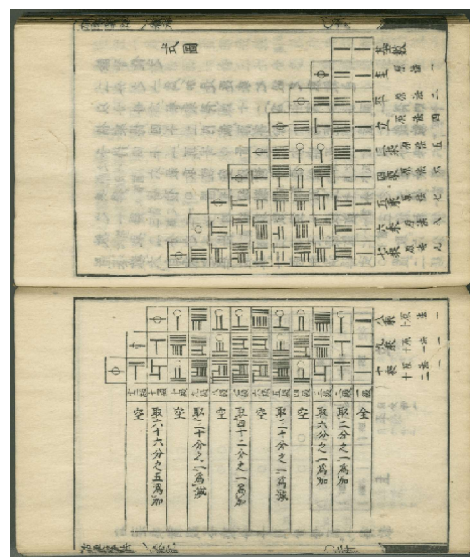


Figura 4: Números de Bernoulli por Seki – Wikimedia Commons

Seki, também, é o primeiro matemático a desenvolver determinantes, tentando resolver sistemas de equações, ao apresentar um polinômio associado a um quadrado de números gerando, assim, a ideia de determinantes. De maneira independente, Leibniz, 10 anos depois, definiu e desenvolveu o estudo sobre este conceito.

Seki é considerado o maior matemático japonês da história, desde criança era considerado um prodígio na matemática. Em 1683, lançou seu livro *Kai Fukudai no Ho* (Método de Solução de Questões Secretas) com o qual passou a ser um matemático conhecido.

2.3 LEONHARD EULER

2.3.1 Uma abordagem breve sobre a vida de Leonhard Euler

O matemático Leonhard Paul Euler nasceu em 1707 na Suíça, na cidade da Basileia. Nasceu em uma família bem estruturada, o que permitiu que ele tivesse acesso a uma educação de qualidade. Em 1733, ele casou-se com Katharina Gsell com quem teve 13 filhos -- somente 5 sobreviveram a infância. Katharina faleceu em 1773, após 40 anos de casamento. Três anos após este acontecimento, Euler casou-se com a meia-irmã da falecida esposa, Salome Abigail Gsell. Foi com ela que Euler viveu os últimos anos de sua vida. Um amigo que presenciava sua vida doméstica disse: “Uma criança no colo, um gato sobre o ombro, assim escrevia ele suas obras imortais” (Garbi, 1997) .

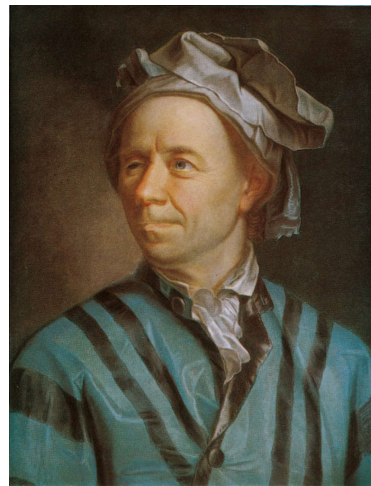


Figura 5: Retrato de Leonhard Euler feito por Emanuel Handmann em 1753.

Seu pai, Paul Euler, era pastor na Igreja Calvinista e tinha o desejo de que o filho seguisse o mesmo caminho (Boyer, 2003). Apesar de Euler não ter se tornado pastor, mesmo após muita insistência de seu pai, manteve sua vida seguindo fortemente os preceitos da religião (Simmons, 2002).

Enquanto Jacob Bernoulli teve grandes problemas com sua família ao escolher seguir os estudos na área da matemática, Euler teve o apoio de seu pai. Isso pode ser justificado pelo fato de que o pai de Euler também tinha grande interesse na área e era um grande amigo de Jacob Bernoulli, por anos os dois estudaram juntos. A proximidade da família de Euler com a família Bernoulli talvez seja o que mais o influenciou interesse do jovem Euler pela matemática (Boyer, 2003).

Aos 14 anos, Euler ingressou na Universidade da Basileia para estudar Medicina, Teologia e Ciências Humanas. Dois anos depois, ainda na Universidade da Basileia, começou a se dedicar a matemática (Simmons, 2002). Após sua última formação iniciou sua carreira como professor de Filosofia, Teologia e Matemática na mesma universidade.

Em 1727, por influência dos filhos de Bernoulli, Daniel e Nicolas, foi convidado a

integrar a Academia de Ciências de São Petersburgo na Rússia, onde foi nomeado professor de Física em 1730 e de Matemática em 1733 (Simmons, 2002). Aos 26 anos ele se tornou um matemático de destaque melhorando muito a sua vida financeira e possibilitando se dedicar à pesquisa matemática.

Euler possuía sérios problemas de visão que pioraram com o decorrer dos anos e, aos 28 anos, perdeu a visão do olho direito. Mas isso não impediu que ele mantivesse sua intensa produtividade de trabalhos. Possuía uma memória excepcional, quase fotográfica. A produtividade era tanta que foram necessários 50 anos para a Academia de São Petersburgo publicar toda a sua obra, mesmo publicando com regularidade. Em 1766, percebeu que estava perdendo a visão do segundo olho e começou a treinar seus filhos e outros ajudantes para escrever enquanto ele ditava.

Em 1741, foi para a Academia de Ciências de Berlim, onde foi convidado a ser professor de Matemática. Lá conquistou a admiração de pessoas importantíssimas, porém devido a sua timidez e a ter se tornado motivo de zombaria resolveu retornar, em 1766, para a Academia de Ciências de São Petersburgo. Foi lá que Euler trabalhou até o fim de sua vida.

2.3.2 Uma abordagem breve sobre a obra de Leonhard Euler

A obra de Euler conta com mais de 850 títulos, entre artigos e livros, nas áreas de cálculo, álgebra, geometria, física e astronomia. Nenhum outro estudioso na história da matemática produziu tanto. Tinha como objetivo tornar a matemática acessível para alunos de engenharia, arquitetura e outras áreas técnicas, sendo assim, suas obras possuíam caráter didático (Boyer, 2003). Seus trabalhos mais renomados foram *A Introduction in analysin infinitorum* (1748), sobre funções matemática, e *Intitutiones calculi differentialis* (1755), sobre cálculo diferencial.

Diversas áreas da matemática evoluíram com os estudos de Euler, entre elas: o Cálculo Diferencial e Integral e a Análise Matemática. Segundo Boyer (2003) a contribuição de Euler foi tão grande que é possível dizer que Euler fez pela análise o que Euclides fez pela geometria.

Suas contribuições para a matemática são inúmeras, diversas fórmulas carregam

seu nome. Temos a Relação de Euler para poliedros convexos: $V - A + F = 2$, em que V é o número de vértices, F o número de faces e A o número arestas. Em Trigonometria, convencionou a notação A, B, C como os vértices opostos aos lados a, b, c de um triângulo ABC qualquer, convencionou ainda r como o raio de seu círculo inscrito (Boyer, 2003).

Na Álgebra, introduziu a letra i para representar a raiz quadrada de -1 , ou seja $i = \sqrt{-1}$ e deu aos números complexos a forma $z = a + bi$, com a e b números reais. Ao resolver o problema das setes pontes de Königsberg (sobre o rio Pregel, na Alemanha) deu início à teoria dos grafos.

Desenvolveu também as Fórmulas de Euler ($e^{i\pi} + 1 = 0$ e $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$), a notação \sum para somatórios e com o uso das séries de potências resolveu o problema da Basileia.

Euler trabalhou a teoria dos números figurados, mais especificamente os números pentagonais. E também, em trabalho conjunto com Bernoulli, desenvolveu a equação de viga Euler-Bernoulli que se tornou extremamente importante na engenharia. Além disso, estudou as funções geratrizes e definiu o número de partição – o número de maneiras em que um número natural pode ser expresso pela adição de números naturais.

Em 1735, se tornou conhecido internacionalmente após resolver o problema de Basileia, que será tratado com em maior detalhe na próxima seção. Na época Euler era aluno de Johann Bernoulli, e provavelmente foi Johann que apresentou o problema para Euler. Jacob Bernoulli tentou resolver o mesmo problema, porém fracassou. Euler resolveu o problema de maneira extremamente clara e didática, gerando assim sua fama. A teoria por trás da resolução deste problema foi utilizada por Bernhard Riemann em seu artigo de 1859, em que fez a extensão da função zeta para o plano complexo.

Euler foi o primeiro matemático a usar conhecimentos da área da Análise para resolver problemas sobre Teoria de Números. Entre eles, o problema de encontrar as soluções inteiras de uma equação linear. Para isso, construiu um método popularmente conhecido como Método das Funções Geradoras. Estudaremos mais sobre elas no quarto capítulo.



Figura 6: A nota de 10 francos suíços trouxe a imagem de Euler como estampa.

2.3.3 Problema da Basileia

Um famoso problema que deixou Euler muito conhecido foi o Problema da Basileia sobre teoria dos números. Proposto por Pietro Mengoli em 1647 e em 1735. Por não ter sido resolvido pelos grandes matemáticos da época fez com que Euler fosse conhecido rapidamente. Mais tarde, em 1859, suas ideias foram usadas por Bernhard Riemann em um artigo que ele define a função zeta.

O Problema da Basileia consiste em encontrar o resultado da soma exata dos inversos dos quadrados dos inteiros positivos, isto é, encontrar o resultado da seguinte série infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Como essa série converge, podemos calcular o seu valor.

Demonstração. (Feita por Euler) Sabemos que $\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Agora, considere a seguinte função:

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Note que $\text{sen}(x) = xf(x)$ e, deste modo, podemos escrever $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$. Agora Euler recorre a série de potências da função seno e a trata como um polinômio. Sendo assim, a função $f(x)$ possui infinitas raízes da forma $k\pi$ com $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Portanto, a

função f pode ser fatorada como produtos de fatores do primeiro grau:

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{-\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right) \dots$$

Observando o coeficiente do termo x^2 em $f(x)$ obtemos:

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \frac{1}{25\pi^2} - \dots$$

Multiplicando por π^2 , obtemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

■

Desta forma Euler chega ao resultado. Porém, atualmente essa prova não é válida, pois séries de potências não são polinômios e, portanto, não temos as mesmas propriedades. Na época de Euler, ele não dispunha da teoria de convergência de séries que temos hoje e, em função disso, naquele tempo sua prova foi aceita. Bernoulli também fez uma prova deste problema e hoje temos outras demonstrações formais que utilizam o cálculo, como conhecemos hoje.

Dentre as provas encontradas para esse problemas temos duas que são mais conhecidas. Vejamos um pouco sobre elas.

A primeira escrita por Tom Apostol, conhecido por seus livros de cálculo. O matemático resolve utilizando o cálculo da integral dupla $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx$, a expande em uma série geométrica e a decompõe em produto. Outra forma, também, é fazendo uma mudança de coordenadas rotacionando-as 45° , após isso é feito substituições trigonométricas que finalizam a resolução.

A segunda prova não tem um autor definido, mas os Arquimedianos atribuem a John Scholes. O matemático relaciona os valores da função cotangente ao quadrado. Utiliza duas identidades e mostra que as duas convergem para o mesmo valor.

As duas provas completas podem ser encontradas em (Filho, 2014).

3 NÚMEROS DE BERNOULLI - UMA INTRODUÇÃO

Os números de Bernoulli são os termos de uma sequência de números racionais que foram descobertos de forma independente pelo matemático suíço Jacob Bernoulli e pelo matemático japonês Seki Takakazu. Esses dois matemáticos encontraram estes números por acaso quando tentavam calcular as somas de potências inteiras.

A partir desta descoberta, os números de Bernoulli apareceram em diversos resultados importantes, incluindo as expansões em série de funções trigonométricas e trigonométricas hiperbólicas, a Fórmula de Soma de Euler-Maclaurin e nos valores da função zeta de Riemann quando calculada em números pares.

3.1 NÚMEROS DE BERNOULLI - RECORRÊNCIA

Nesta seção vamos definir os números de Bernoulli através de recursão. Podemos encontrar os números de Bernoulli através da seguinte recursão:

- $B_0 = 1$;
- $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$ para $n \geq 2$.

Agora vamos calcular os cinco primeiros números de Bernoulli utilizando esta recorrência.

Para $n = 2$, temos que:

$$\sum_{k=0}^1 \binom{2}{k} B_k = \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 = 1 \cdot 1 + 2B_1 = 0.$$

Portanto, $B_1 = -\frac{1}{2}$.

Para $n = 3$, temos que:

$$\sum_{k=0}^2 \binom{3}{k} B_k = \binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3B_2 = 0;$$

$$3B_2 = \frac{3}{2} - 1.$$

Portanto, $B_2 = \frac{1}{6}$.

Para $n = 4$, temos que:

$$\sum_{k=0}^3 \binom{4}{k} B_k = \binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{2} B_2 + \binom{4}{3} B_3 = 1 - \frac{4}{2} + 1 + 4B_3 = 0;$$

$$4B_3 = -2 + \frac{4}{2} = 0.$$

Portanto, $B_3 = 0$.

Para $n = 5$, temos que:

$$\sum_{k=0}^4 \binom{5}{k} B_k = \binom{5}{0} B_0 + \binom{5}{1} B_1 + \binom{5}{2} B_2 + \binom{5}{3} B_3 + \binom{5}{4} B_4 = 0;$$

$$1 - \frac{5}{2} + \frac{10}{6} + 0 + 5B_4 = 0;$$

$$5B_4 = -\frac{1}{6}.$$

Portanto, $B_4 = -\frac{1}{30}$.

Para $n = 6$, temos que:

$$\sum_{k=0}^5 \binom{6}{k} B_k = \binom{6}{0} B_0 + \binom{6}{1} B_1 + \binom{6}{2} B_2 + \binom{6}{3} B_3 + \binom{6}{4} B_4 + \binom{6}{5} B_5 = 0;$$

$$1 - \frac{6}{2} + \frac{15}{6} + 0 - \frac{15}{30} + 6B_5 = 0;$$

$$6B_5 = \frac{6 - 18 + 15 - 3}{6} = 0.$$

Portanto, $B_5 = 0$.

Prosseguindo desta forma, podemos encontrar os próximos valores. Temos então:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1; & B_1 &= -\frac{1}{2}; & B_2 &= \frac{1}{6}; & B_3 &= 0; & B_4 &= -\frac{1}{30}; \\ B_5 &= 0; & B_6 &= \frac{1}{42}; & B_7 &= 0; & B_8 &= -\frac{1}{30}; & B_9 &= 0; \\ B_{10} &= \frac{5}{66}; & B_{11} &= 0; & B_{12} &= -\frac{691}{2730}. \end{aligned}$$

Assim, reescrevendo o trecho do livro de Bernoulli com a linguagem da matemática moderna, teremos:

$$S_0(n) = n;$$

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n;$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n;$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2;$$

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n;$$

$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2;$$

$$S_6(n) = \frac{1}{7}n^7 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n;$$

$$S_7(n) = \frac{1}{8}n^8 - \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2;$$

$$S_8(n) = \frac{1}{9}n^9 - \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n;$$

$$S_9(n) = \frac{1}{10}n^{10} - \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2;$$

$$S_{10}(n) = \frac{1}{11}n^{11} - \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 - \frac{5}{66}n.$$

Bernoulli encontrou padrões nesta sequência de fórmulas. Alguns destes podemos ver nos primeiros dez termos da sequência expostos acima. Por exemplo, o coeficiente de n^{m+1} em $S_m(n)$ sempre será $\frac{1}{m+1}$, o coeficiente de n^m é $-\frac{1}{2}$, o coeficiente de n^{m-1} é $\frac{m}{12}$, o coeficiente de n^{m-2} é sempre nulo, e assim por diante. Obs.: Bernoulli não chegou a demonstrar esse resultado. Ele chegou a essa conclusão de forma empírica. Na seção sobre os Polinômios de Bernoulli voltaremos a falar da forma recursiva dos números de Bernoulli.

No próximo capítulo veremos os números de Bernoulli através da função geradora $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ e, a partir disso, traremos diversos resultados importantes acerca deste tema.

4 FUNÇÕES GERADORAS E NÚMEROS DE BERNOULLI

Neste capítulo veremos como Euler estudou os números de Bernoulli usando a função geradora $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$. Mas antes de adentrarmos ao mundo das funções geradoras, vamos relembrar alguns tópicos sobre séries. Este conteúdo está intimamente ligado com as funções geradoras e com os números de Bernoulli.

4.1 SÉRIES

Nesta seção vamos seguir os passos da referência [18] para trazer alguns resultados acerca das séries numéricas.

4.1.1 Definição e Convergência

Definição 4.1. *Seja (a_n) uma sequência em \mathbb{R} , a soma infinita*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \dots + a_n + \dots$$

é chamada de série com termo geral a_n e cada número a_i é chamado de termo da série. As somas finitas

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + \dots + a_N$$

são chamadas de somas parciais da série.

Na maioria dos casos desejamos compreender o comportamento dessa soma infinita e desenvolver métodos para determinar se uma série possui ou não um valor de soma e, caso possua um valor, buscamos calculá-lo.

Obs.: Quando os índices da série já estão implícitos ou já são conhecidos podemos denotar a série como simplesmente $\sum a_n$.

Definição 4.2. *Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge quando a sequência das somas parciais (S_N) converge. Neste caso, se $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$, denotamos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Se as somas parciais divergem dizemos que a série também diverge.*

Exemplos:

1. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Temos que a n -ésima soma parcial desta série é dada por:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ e, deste modo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Ou seja, esta série é convergente.

Obs.: Para uma série $\sum a_n$ é comum usar a notação $\sum a_n < \infty$ quando a série é convergente.

2. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

é divergente pois $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ não existe, visto que $S_n = 0$ quando n é par e $S_n = 1$ quando n é ímpar, assim temos duas subsequências que convergem para diferentes valores.

3. (Série Harmônica) A série $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente. De fato, suponha que esta série é convergente, então as séries $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ e $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ também seriam convergentes. Além disso, como $S_n = A_n + B_n$, quando $n \rightarrow \infty$ teríamos $S = A + B$.

Por um lado, temos que $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{S}{2}$. E assim, $A = B = \frac{S}{2}$.

Por outro lado, temos que

$$B - A = \lim_{n \rightarrow \infty} (B_n - A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} \right) > 0.$$

Assim, $B > A$. Contradição.

4. (Série Geométrica) Considere a série $1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$, com $a \in \mathbb{R}$.

Se $a = 1$, a n -ésima soma parcial da série geométrica é

$$S_n = 1 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^n = n + 1$$

e assim temos que é divergente, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$.

Se $a = -1$ a série é divergente, pelo exemplo 2.

Se $|a| \neq 1$, podemos determinar a convergência ou a divergência da série. Como a soma parcial é dada por:

$$S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n,$$

ao multiplicarmos por a , obtemos:

$$a \cdot S_n = a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n+1}.$$

Subtraindo a primeira igualdade da segunda igualdade, temos:

$$S_n - a \cdot S_n = 1 - a^{n+1}.$$

Logo, como assumimos $|a| \neq 1$ podemos escrever:

$$S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^{n+1}}{1 - a}.$$

Se $|a| < 1$ segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0$ e daí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - a},$$

ou seja, concluímos que: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$, em que $|a| < 1$, isto é, a série converge.

Quando $|a| > 1$ a série será divergente.

Teorema 4.3. (*Teste da Comparação*) *Sejam (a_n) e (b_n) sequências de termos não negativos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq c \cdot b_n \forall n \geq n_0$ então a convergência da série $\sum b_n$ implica a convergência da série $\sum a_n$ e a divergência da série $\sum a_n$ implica a divergência da série $\sum b_n$.*

Demonstração. Sejam (a_n) e (b_n) sequências de termos não negativos arbitrarias. Suponha que existam $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq c \cdot b_n \forall n \geq n_0$. Sem perda de generalidade podemos considerar $a_n \leq c \cdot b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, as somas parciais s_n e t_n , de $\sum a_n$ e $\sum b_n$ respectivamente, formam sequências não decrescentes tais que $s_n \leq c \cdot t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $c > 0$, (t_n) limitada implica (s_n) limitada e (s_n) ilimitada implica (t_n) ilimitada.

Do exposto segue o desejado. ■

Teorema 4.4. (*Critério do termo geral*) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge então a sequência (a_n) converge para zero, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Demonstração. Suponha que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Digamos que $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Como $S_N = S_{N-1} + a_N$, temos que:

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_{N-1} + a_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{N-1} + \lim_{N \rightarrow \infty} a_N = S + \lim_{N \rightarrow \infty} a_N.$$

Disso segue que $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = 0$. ■

Proposição 4.5. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes com as somas A e B , respectivamente, e $k \in \mathbb{R}$ uma constante, então:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A - B$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n = k \cdot A$.

Demonstração. Vamos demonstrar o item (1) inicialmente.

Sejam A_n e B_n as sequências das somas parciais de $\sum a_n$ e $\sum b_n$, respectivamente, ou seja:

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k;$$

$$B_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Como $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem para A e B , respectivamente, temos que dado $\epsilon > 0$ existem $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |A_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$ e $\forall n \geq n_1 \Rightarrow |B_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$.

Tome $n_m = \max\{n_0, n_1\}$. Assim, $\forall n \geq n_m$, valem:

$$\begin{aligned} |A_n - A| &< \frac{\epsilon}{2}; \\ |B_n - B| &< \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Então, temos que:

$$|(A_n + B_n) - (A + B)| \leq |A_n - A| + |B_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n) = A + B.$$

Por outro lado, temos que:

$$A_n + B_n = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k).$$

E, assim, temos que:

$$A + B = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

O item (2) é análogo ao item (1) e a demonstração do item (3) também decorre da linearidade do limite. ■

Definição 4.6. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita ser absolutamente convergente se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Exemplos:

1. Dada uma série convergente $\sum a_n$, se os termos da série não trocam de sinal temos que $\sum |a_n|$ também será convergente, ou seja, a série é absolutamente convergente.
2. Para $-1 < a < 1$ temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ é absolutamente convergente.

Definição 4.7. Uma série $\sum a_n$ que converge, mas que não é absolutamente convergente, é chamada condicionalmente convergente.

Corolário 4.8. (Teste da Raiz ou Teste de Cauchy) Dada a série $\sum a_n$, se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$ para todo $n > n_0$ (ou seja, a partir de um n_0) então a série é absolutamente convergente.

Demonstração. Dada a série $\sum a_n$, suponha que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$ para todo $n > n_0$. Assim, $|a_n| \leq c^n$ para todo $n > n_0$. Já vimos que a série geométrica $\sum c^n$ converge. Portanto, pelo Critério de Comparação, temos que a série $\sum |a_n|$ converge. Logo, $\sum a_n$ é absolutamente convergente. ■

Obs.: Caso $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ temos que a série $\sum a_n$ diverge. De fato, neste caso temos que $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ a partir de um n_0 suficientemente grande. Disso temos que $|a_n| > 1$ para todo $n > n_0$. Pelo Critério do Termo Geral segue que a série $\sum a_n$ diverge. Além disso, quando $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ a série pode ser convergente ou divergente.

Exemplo: Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com $a_n = \left(\frac{\log n}{n}\right)^n$. Como $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\log n}{n}$ tende a zero, pelo Teste da Raiz, temos que esta série é absolutamente convergente.

Teorema 4.9. (*Teorema da Convergência Absoluta*) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergir, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergirá, ou seja, toda série absolutamente convergente é convergente.

Demonstração. Suponha que $\sum |a_n|$ converge. Então pelo Teste de Cauchy temos que dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m \geq n_0$, implica

$$\left| \sum_{n=n_0}^m |a_n| \right| < \epsilon,$$

ou seja,

$$|a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + \cdots + |a_m| < \epsilon.$$

Pela desigualdade triangular para módulos, temos que:

$$|a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_m| \geq |a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + \cdots + |a_m| < \epsilon,$$

e disso concluímos que:

$$\left| \sum_{n=n_0+1}^m a_n \right| < \epsilon$$

$\forall m \geq n_0$, ou seja, a série $\sum a_n$ também converge. ■

Obs.: A recíproca deste teorema não é válida. Por exemplo, considere a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Temos que as somas parciais de índice par são:

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2},$$

$$S_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right),$$

$$S_6 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right),$$

e assim por diante. Perceba que $S_2 < S_4 < S_6 < \dots < S_{2n} < \dots$ pois em cada parêntese temos um número positivo. Agora veja que as somas parciais de índice ímpar são dadas por:

$$S_1 = 1,$$

$$S_3 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right),$$

$$S_5 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right),$$

e assim por diante. Portanto, agora temos que $S_1 > S_3 > S_5 > \dots > S_{2n+1} > \dots$. Então existem $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = s'$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = s''$.

Como $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$, temos que $s' = s''$. Denotando $s = s' = s''$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$. Logo, a série é convergente. Mas a série não é absolutamente convergente. Veja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^{n+1}|}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

E já vimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Teorema 4.10. (*Teste da Razão*) Sejam $\sum a_n$ uma série de termos todos não nulos e $\sum b_n$ uma série convergente com $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ para todo $n > n_0$, então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Demonstração. Sejam $\sum a_n$ uma série de termos todos não nulos e $\sum b_n$ uma série convergente com $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ arbitrárias. Suponha que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ para todo $n > n_0$. Para $n > n_0$, multiplicando membro a membro as desigualdades:

$$\frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} \leq \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}, \frac{|a_{n_0+3}|}{|a_{n_0+2}|} \leq \frac{b_{n_0+3}}{b_{n_0+2}}, \dots, \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

obteremos $\frac{|a_n|}{|a_{n_0+1}|} \leq \frac{b_n}{b_{n_0+1}}$. Ou seja, $|a_n| \leq k \cdot b_n$ onde $k = \frac{|a_{n_0+1}|}{b_{n_0+1}}$.

Portanto, segue do Teorema da Convergência Absoluta que $\sum a_n$ converge absolutamente. ■

4.1.2 Série de Potências

Para este tópico iremos trazer alguns resultados e exemplos que podem ser encontrados no Capítulo 4 da referência [17].

Definição 4.11. *Uma série de potências centrada em $c \in \mathbb{R}$ é uma série do tipo $\sum a_n(x - c)^n$ em que x é uma variável e $a_n \in \mathbb{R}$. Podemos definir uma função $f(x) = \sum a_n(x - c)^n$ cujo domínio é todos os pontos de \mathbb{R} em que a série converge.*

As séries de potência são uma ótima ferramenta para representarmos algumas funções. Chamamos essa representação de expansão em série de potência.

Exemplos:

1. Já vimos que a série geométrica é dada por $1 + a + a^2 + \dots + a^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ quando $|a| < 1$. Temos então que a série de potências $\sum x^n$ (veja que aqui $a_n = 1$ e $c = 0$) representa a função $f(x) = \frac{1}{1-x}$ e o intervalo de convergência é dado por $(-1, 1)$.
2. (Série de Taylor) Sejam $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função infinitamente derivável e $x, x_0 \in (a, b)$. Definimos a Série de Taylor de f em torno de x_0 calculada em x por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

onde $f^{(n)}(x_0)$ denota a n -ésima derivada de f calculada em x_0 . A série de Taylor é convergente ou divergente dependendo do valor de $f(x)$.

3. (Série de McLaurin) Seja $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função infinitamente derivável com $r > 0$. A Série de McLaurin é dada pela Série de Taylor em torno de $x_0 = 0$. Ou seja, a série de McLaurin é a seguinte:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

4. Vamos representar a função $f(x) = \frac{1}{x}$ em uma série de potências centrada em 3:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{(x-3)+3} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{x-3}{3}+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-3)^n.$$

Este desenvolvimento é válido quando $|x-3| < 3$. A série, neste caso, converge nos pontos deste disco centrado em 3 e diverge fora dele. No próximo teorema podemos ver essa convergência num caso mais geral.

Teorema 4.12. (*Raio de Convergência*) Toda série de potências $\sum a_n(x-c)^n$ está associada a um número $r \geq 0$, tal que a série converge absolutamente em $|x-c| < r$ e diverge em $|x-c| > r$. Este número r é chamado de raio de convergência da série de potências e o disco de centro c e raio r $\{x \in \mathbb{R} : |x-c| < r\}$ é chamado de disco de convergência da série de potências.

Demonstração. Considere a série de potências $\sum a_n(x-c)^n$. Caso a série convirja somente em $x=c$ então temos $r=0$. Caso contrário, a série converge em um certo $x_1 \neq c$. Então o termo geral $a_n(x_1-c)^n$ tende a zero.

Portanto existe M tal que $|a_n(x_1-c)^n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$|a_n(x-c)^n| = |a_n(x_1-c)^n| \left| \frac{x-c}{x_1-c} \right|^n \leq M \left| \frac{x-c}{x_1-c} \right|^n.$$

Portanto, a série $\sum |a_n(x-c)^n|$ é majorada pela série

$$M \sum \left| \frac{x-c}{x_1-c} \right|^n$$

que converge quando $\left| \frac{x-c}{x_1-c} \right| < 1$, ou seja, no disco $|x-c| < |x_1-c|$. Logo, a série $\sum a_n(x-c)^n$ converge absolutamente em todo x neste disco.

Seja r o supremo do conjunto dos números $|x_1-c|$, onde x_1 varia no conjunto dos pontos em que a série $\sum a_n(x-c)^n$ converge. Dado x' no disco $|x-c| < r$, pela definição de r , existe x_1 onde a série diverge tal que $|x'-c| < |x_1-c|$.

Do exposto segue que a série $\sum a_n(x-c)^n$ converge absolutamente em x' e, portanto, no disco $|x-c| < r$.

Além disso, pela definição de r temos que a série diverge em $|x-c| > r$. ■

Definição 4.13. (*Multiplicação de séries de potência*) Dadas as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ e

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ temos que:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$$

em que $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Este produto é conhecido como *Produto de Cauchy*.

4.2 FUNÇÕES GERADORAS

Funções geradoras são uma das principais ferramentas para a resolução de problemas de contagens, principalmente problemas que envolvem a seleção de objetos nos quais repetição é permitida.

Esta técnica teve origem nos trabalhos de A. De Moivre (1667-1754), tendo sido aplicada extensivamente por L. Euler (1707-1783) em problemas de teoria aditiva de números, especificamente na teoria de partições. Este método foi muito usado por S. Laplace (1789-1827) no estudo de probabilidade. N. Bernoulli (1687-1759) utilizou este método no estudo de permutações caóticas.

Antes de adentrarmos nos problemas envolvendo as funções geradoras precisamos lembrar de um problema, apresentado no teorema abaixo.

Teorema 4.14. *O número de soluções inteiras positivas da equação*

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m > r$$

é dado por C_{m-1}^{r-1} .

Demonstração. Estamos interessados em expressar o inteiro positivo m como soma de r inteiros positivos, basta colocarmos $r - 1$ barras divisoras entre as m parcelas de 1.

$$1 + 1 + |1 + 1 + \cdots + 1| + 1 + \cdots + 1 = m.$$

O valor de x_1 será o número de 1's que antecedem a primeira barra, o valor de x_2 o valor de 1's entre a primeira e a segunda barra e assim por diante. Até obtermos o valor de x_r , como sendo o número de 1's a direita da barra de número $(r - 1)$. Como cada distribuição de barras corresponde a uma única solução para a equação (1.1), basta

contarmos de quantas maneiras podemos fazer isto. Devemos selecionar $r - 1$ dos $m - 1$ possíveis locais (os sinais de “+” que separam os “1’s”) para a colocação das barras divisoras, o que pode ser feito um total de C_{m-1}^{r-1} maneiras diferentes. ■

Exemplo 4.15. *Encontrar o número de soluções em inteiros positivos da equação:*

$$x_1 + x_2 = 5.$$

Temos, pelo teorema anterior, que $m = 5$ e $r = 2$ e portanto:

$$C_{m-1}^{r-1} = C_4^1 = 4.$$

Exemplo 4.16. *Encontrar o número de soluções em inteiros positivos da equação:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9.$$

Temos, pelo teorema anterior, que $m = 9$ e $r = 5$ e portanto:

$$C_{m-1}^{r-1} = C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70.$$

Agora se quiseres soluções inteiras não negativas, admitindo a possibilidade do zero como solução, teremos algumas soluções a mais.

Teorema 4.17. *O número de soluções inteiras não negativas da equação*

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m > 0$$

é dado por C_{m+r-1}^{r-1} .

Demonstração. Vamos escrever uma sequência de 1’s e b’s, neste caso as letras b’s irão substituir as barras utilizadas no Teorema 4.14.

Estamos interessssados em expressar o inteiro positivo m como soma de r inteiros positivos, basta colocarmos $r - 1$ letras b entre as m parcelas de 1.

A diferença agora é que podemos escrever letras b’s uma ao lado da outra, sendo assim a solução entre elas é zero, pois não há parcelas de 1’s entre as letras b’s. Sendo assim, temos $r - 1$ elementos permutando entre o total de $m + r - 1$ elementos.

Assim, o total de soluções que vamos ter é de C_{m+r-1}^{r-1} . ■

Definição 4.18. *A função geradora de uma sequência $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de números reais ou com-*

plexos é uma função G definida pela série de potências:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

com domínio dado pelos pontos onde a série converge.

Teorema 4.19. *Sejam f e g funções geradoras das sequências (a_r) e (b_r) respectivamente, temos que:*

1. $Af(x) + Bg(x)$ é a função geradora para a sequência $(Aa_r + Bb_r)$ para todos $A, B \in \mathbb{R}$.
2. $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}) x^n$.
3. A função geradora para a sequência $a_r = a_0 + a_1 + \dots + a_r$ é $(1 + x + x^2 + \dots)f(x)$.
4. A função geradora para a sequência (ra_r) é igual a $xf'(x)$ onde $f'(x)$ é a derivada de f com relação a x .
5. $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Demonstração. 1. Sejam f e g funções geradoras das sequências (a_r) e (b_r) respectivamente e $A, B \in \mathbb{R}$. Então:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_r x^r \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_r x^r.$$

Logo,

$$Af(x) + Bg(x) = Aa_0 + Aa_1x + \dots + Aa_r x^r + \dots + Bb_0 + Bb_1x + \dots + Bb_r x^r$$

$$Af(x) + Bg(x) = (Aa_0 + Bb_0) + (Aa_1 + Bb_1)x + \dots + (Aa_r + Bb_r)x^r$$

Assim, $Af(x) + Bg(x)$ é a função geradora para a sequência $(Aa_r + Bb_r)$.

2. Decorre do produto de Cauchy.
3. Tome $b_r = 1$ em 2, ou seja, $g(x) = 1 + x + x^2 + \dots$, assim teremos uma função geradora para $(a_0 + a_1 + \dots + a_r)$.

4. Seja $f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a^r x^r$. Então $f'(x) = \sum_{r=0}^{\infty} r a^r x^{r-1}$. Disso segue que:

$$x f'(x) = \sum_{r=0}^{\infty} r a^r x^r.$$

Portanto, a função geradora de (ra_r) é $x f'(x)$.

$$5. \int f(x) dx = \int \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r dx = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \int x^r dx = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \frac{x^{r+1}}{r+1}.$$

■

4.2.1 Números de Bernoulli e funções geradoras

Euler definiu os números de Bernoulli através das funções geradoras. Ele não sabia que Bernoulli já havia feito a soma muitos anos antes, e acabou formalizando a soma. Vejamos:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

Expandindo ambos os membros da equação obtemos:

$$1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{720} + \dots = B_0 \frac{t^0}{0!} + B_1 \frac{t^1}{1!} + B_2 \frac{t^2}{2!} + B_3 \frac{t^3}{3!} + B_4 \frac{t^4}{4!} + \dots$$

Igualando os coeficientes de t^n temos:

$$B_0 \frac{t^0}{0!} = 1 \frac{t^0}{0!}$$

$$B_1 \frac{t^1}{1!} = -\frac{t^1}{2}$$

$$B_2 \frac{t^2}{2!} = \frac{t^2}{12}$$

$$B_3 \frac{t^3}{3!} = 0 t^3$$

·
·
·

Note que no membro esquerdo não temos t com expoente ímpar maior que 2 e portanto temos que no membro direito os coeficientes dos t com expoente ímpar maior do que 2 devem ser iguais a zero como veremos na próxima posição.

Sendo assim, encontramos os seguintes números de Bernoulli:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, \dots$$

Ou seja, a função $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ é uma função geradora para a sequência $\left(\frac{B_n}{n!}\right)$ em que os B_n 's são os números de Bernoulli.

Proposição 4.20. *Os números de Bernoulli satisfazem as seguintes afirmações:*

1. $B_0 = 1$.
2. $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B_i = 0$ para $n > 1$.

Demonstração. Já temos que:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

Assim, multiplicando $e^t - 1$ em ambos os membros obtemos:

$$t = (e^t - 1) \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

Escrevendo $e^t - 1$ em expansão de Taylor temos:

$$t = \left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots\right) \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

Fazendo o produto de Cauchy das séries acima temos:

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^{n+1-k}}{(n+1-k)!} \cdot \frac{B_k t^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{B_k t^{n+1}}{(n+1-k)! k!}$$

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{B_k t^{n+1} (n+1)!}{(n+1-k)! k! (n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Trocando os índices do somatório ficamos com:

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \frac{t^n}{n!}.$$

Veja que de um lado temos apenas t . Temos que o coeficiente de t no outro lado é um e o coeficiente de qualquer potência de t é zero. Portanto, temos o desejado. ■

Teorema 4.21. *Sejam n um inteiro positivo e p um número primo tal que $(p-1)$ divide $2n$. Então $B_{2n} + \sum \frac{1}{p}$ é um número inteiro.*

Proposição 4.22. *Os números de Bernoulli com índice ímpar diferente de 1 são iguais a zero, isto é, $B_{2n+1} = 0$ para $n > 0$*

Demonstração. Considere a função geradora da definição de Euler dos números de Bernoulli:

$$\frac{x}{e^x - 1} = B_0 + B_1x + B_2\frac{x^2}{2!} + \dots + B_n\frac{x^n}{n!} + \dots$$

Defina a função $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} - B_1x$. Vejamos que f é uma função par. Sabemos que $B_1 = -\frac{1}{2}$. Temos então:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{2x + x(e^x - 1)}{2(e^x - 1)}$$

$$f(x) = \frac{x(e^x + 1)}{2(e^x - 1)} \cdot \frac{e^{-x/2}}{e^{-x/2}} = \frac{x(e^{x/2} + e^{-x/2})}{2(e^{x/2} - e^{-x/2})}.$$

Por fim, vejamos que $f(x) = f(-x)$, para todo $x \neq 0$.

$$f(-x) = \frac{-x(e^{-x/2} + e^{x/2})}{2(e^{-x/2} - e^{x/2})} = \frac{-x(e^{x/2} + e^{-x/2})}{-2(e^{x/2} - e^{-x/2})} = f(x).$$

Disso segue que a série de potências de $\frac{x}{e^x - 1} - B_1x$ não tem termos de potência ímpar diferente de zero. ■

Com a função geradora da definição de Euler conseguimos aplicar os números de Bernoulli em outros resultados, como veremos no próximo capítulo.

5 APLICAÇÕES E RESULTADOS IMPORTANTES

Neste capítulo veremos algumas aplicações importantes dos números Bernoulli. Veremos os polinômios de Bernoulli e resultados que podem ser obtidos a partir deles.

5.1 FUNÇÃO COTANGENTE HIPERBÓLICA:

Considere f a função geradora da definição de Euler dos números de Bernoulli:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = B_0 + B_1x + B_2\frac{x^2}{2!} + \dots + B_n\frac{x^n}{n!} + \dots$$

Fazendo $f(x) - B_1x$ obtemos:

$$f(x) - B_1x = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x(e^x + 1)}{2(e^x - 1)} = \frac{x}{2} \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{x}{2} \coth\left(\frac{x}{2}\right)$$

Além disso, temos que:

$$x \coth(x) = \frac{2x}{e^{2x} - 1} + \frac{2x}{2} = \sum_{n \geq 0} B_{2n} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n \geq 0} 4^n B_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Em \mathbb{C} podemos usar as relações:

$$\operatorname{sen} z = -i \operatorname{senh}(iz) \text{ e } \operatorname{cos}(z) = \operatorname{cosh}(iz)$$

para chegarmos nas seguintes séries:

- $\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!};$
- $\operatorname{cos}(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!};$
- $\operatorname{senh}(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$
- $\operatorname{cosh}(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$

Como $\cot(z) = \frac{\operatorname{cos}(z)}{\operatorname{sen}(z)} = i \frac{\operatorname{cosh}(iz)}{\operatorname{senh}(iz)} = i \operatorname{coth}(iz)$, temos:

$$z \cot(z) = \sum_{n \geq 0} B_{2n} \frac{(2iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n \geq 0} (-4)^n B_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Note que estas são as expansões em série de Taylor destas funções.

5.2 POLINÔMIOS DE BERNOULLI

Os polinômios de Bernoulli são uma generalização dos números de Bernoulli. Temos diversas propriedades interessantes com estes polinômios e na próxima seção vamos utilizá-los na prova da fórmula de Soma de Euler-Maclaurin. Veremos também a forma recursiva destes polinômios e vamos relacionar com a recursão para os números de Bernoulli.

Definição 5.1. *Os polinômios de Bernoulli são uma sequência de polinômios $B_k(y)$ definidos pela seguinte expansão da série de potências:*

$$\frac{xe^{xy}}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(y)x^k}{k!}.$$

Note que a função geradora dos polinômios de Bernoulli é a função geradora dos números de Bernoulli multiplicada pelo termo e^{xy} . Além disso se tomarmos $y = 0$ temos que $e^{xy} = 1$ e, portanto, $B_k(0) = B_k$.

Vejamos agora uma relação de recorrência para os polinômios de Bernoulli.

Proposição 5.2. *Os polinômios de Bernoulli satisfazem a seguinte relação de recorrência:*

$$B_k(y) = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} B_n y^{k-n}.$$

Demonstração. Veja que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(y)x^k}{k!} = \frac{x}{e^x - 1} \cdot e^{xy} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k x^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xy)^k}{k!} \right)$$

Fazendo o produto de Cauchy, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(y)x^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \frac{(xy)^{k-n}}{(k-n)!} \cdot \frac{B_n x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \frac{y^{k-n} B_n}{(k-n)! n!} x^k. \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(y)x^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} y^{k-n} B_n \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Agora, se compararmos os termos de x nas somas, obtemos o desejado:

$$B_k(y) = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} B_n y^{k-n}.$$



Usando essa relação podemos calcular os primeiros polinômios de Bernoulli:

$$B_0(y) = 1$$

$$B_1(y) = y - \frac{1}{2}$$

$$B_2(y) = y^2 - y + \frac{1}{6}$$

$$B_3(y) = y^3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{2}y$$

$$B_4(y) = y^4 - 2y^3 + y^2 - \frac{1}{30}$$

$$B_5(y) = y^5 - \frac{5}{2}y^4 + \frac{5}{3}y^3 - \frac{1}{6}y$$

$$B_6(y) = y^6 - 3y^5 + \frac{5}{2}y^4 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{42}.$$

Agora vamos analisar um desses polinômios mais de perto. O que acontece quando integramos ou diferenciamos? Considere o polinômio $B_5(y)$:

$$\frac{d}{dy}B_5(y) = 5y^4 - 10y^3 + 5y^2 - \frac{1}{6} = 5 \left(y^4 - 2y^3 + y^2 - \frac{1}{30} \right).$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dy}B_5(y) = 5B_4(y).$$

Além disso,

$$\int_0^1 B_5(y)dy = \frac{1}{6}y^6 - \frac{1}{2}y^5 + \frac{5}{12}y^4 - \frac{1}{12}y^2 \Big|_0^1 = 0.$$

Na próxima proposição veremos que esse resultado será válido em geral. Mais que isso, teremos uma definição indutiva dos polinômios de Bernoulli.

Proposição 5.3. *Uma família de polinômios $B_k(y)$ são os polinômios de Bernoulli se, e somente se:*

1. $B_0(y) = 1$;
2. $B'_k(y) = kB_{k-1}(y)$ para todo $k > 0$.

3. $\int_0^1 B_k(y)dy = 0$ para todo $k > 0$.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que essa sequência de polinômios é única e depois que os polinômios de Bernoulli satisfazem essas três propriedades.

Unicidade:

Suponha que exista outra sequência de polinômios $\overline{B}_k(y)$ que satisfaça as propriedades 1, 2 e 3. Já temos, da propriedade 1 que $B_0(y) = 1 = \overline{B}_0(y)$. Agora, para $k > 0$ e para todo y temos, pela propriedade 2, que:

$$(B'_k - \overline{B}'_k)(y) = B'_k(y) - \overline{B}'_k(y) = kB_{k-1}(y) - k\overline{B}_{k-1}(y) = 0$$

Assim, $B_k(y) = \overline{B}_k(y) + c$ em que c é alguma constante. Pela propriedade 3 temos que:

$$0 = \int_0^1 B_k(y)dy = \int_0^1 \overline{B}_k(y)dy + \int_0^1 cdy = 0 + c$$

Portanto, $c = 0$ e, assim, $B_k(y) = \overline{B}_k(y)$.

Logo, de fato essa definição indutiva gera uma sequência única. Note que a primeira propriedade especifica o primeiro termo, a segunda propriedade determina cada próximo termo com diferença de uma constante e a terceira propriedade determina exatamente essa constante.

Agora vejamos que os polinômios de Bernoulli satisfazem 1, 2 e 3. Da definição dos polinômios de Bernoulli já temos que a propriedade 1 é válida. Vejamos a propriedade 2:

$$\frac{d}{dy} \frac{xe^{xy}}{e^x - 1} = \frac{d}{dy} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(y)x^k}{k!}$$

$$\frac{x^2 e^{xy}}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B'_k(y)x^k}{k!}$$

Dividindo ambos os lados por x e, em seguida, trocando o índice k por $k + 1$ no somatório ficamos com:

$$\frac{d}{dy} \frac{xe^{xy}}{e^x - 1} = \frac{d}{dy} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B'_k(y)x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B'_{k+1}(y)x^k}{(k+1)!}$$

Agora, podemos igualar as duas expansões de $\frac{xe^{xy}}{e^x - 1}$ para obter:

$$\frac{B'_{k+1}(y)}{(k+1)!} = \frac{B_k(y)}{k!}$$

Disso segue que:

$$B'_{k+1}(y) = (k+1)B_k(y)$$

Finalmente, para $k > 0$, a propriedade 3 também é satisfeita:

$$\int_0^1 B_k(y)dy = \frac{B_{k+1}(y)}{k+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{k+1}(B_{k+1}(1) - B_{k+1}(0)) = 0$$

pois $B_{k+1}(0) = B_{k+1}$ e $B_{k+1}(1) = \sum_{n=0}^{k+1} \binom{k+1}{n} B_n = B_{k+1}$. ■

Proposição 5.4. *Os números de Bernoulli satisfazem a seguinte relação de recorrência:*

1. $B_0 = 1$;

2. $B_m = -\frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m+1}{j} B_j$, para $m > 0$.

Demonstração. Note que, pela definição dos polinômios de Bernoulli, temos:

$$B_0(0) = B_0 = 1$$

Além disso, para $m > 0$:

$$\int_0^1 B_m(y)dy = 0$$

Com isso, pela proposição anterior, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k \int_0^1 y^{m-k} dy \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k \frac{1}{m-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k \frac{1}{m+1} \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} B_k + \binom{m+1}{m} B_m = 0$$

Logo,

$$B_m = -\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} B_k.$$

■

Vamos calcular alguns números de Bernoulli utilizando essa relação de recorrência.

$$B_1 = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^0 \binom{2}{k} B_k = -\frac{1}{2} B_0 = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} B_2 &= -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^1 \binom{3}{k} B_k = -\frac{1}{3} \left(\binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 \right) = \\ &= -\frac{1}{3} \left(1 \cdot 1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right) = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3 &= -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^2 \binom{4}{k} B_k = -\frac{1}{4} \left(\binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{2} B_2 \right) = \\ &= -\frac{1}{4} \left(1 \cdot 1 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 \cdot \frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{4} \cdot 0 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_4 &= -\frac{1}{5} \sum_{k=0}^3 \binom{5}{k} B_k = -\frac{1}{5} \left(\binom{5}{0} B_0 + \binom{5}{1} B_1 + \binom{5}{2} B_2 + \binom{5}{3} B_3 \right) = \\ &= -\frac{1}{5} \left(1 \cdot 1 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 10 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot 0 \right) = \\ &= -\frac{1}{5} \left(1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} \right) = -\frac{1}{5} \left(\frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{30}. \end{aligned}$$

As propriedades mostradas tornam os polinômios de Bernoulli uma ferramenta analítica extremamente útil. Com esta teoria poderemos compreender totalmente o próximo resultado, que une integração e soma em uma importante fórmula matemática.

6 FUNÇÕES GERADORAS NO ENSINO MÉDIO

As funções geradoras podem ser abordadas no ensino da matemática dentro do Ensino Médio para resolver problemas de contagem e de análise combinatória, conteúdo deste segmento. Porém, como citado por Dionisio Nogueira Neto (NETO, 2014) em sua tese, para aplicar as funções geradoras na resolução destes problemas precisamos utilizar séries de Taylor que não é conteúdo do Ensino Médio.

Comum a matemática do Ensino Médio e as funções geradoras temos os Binômios de Newton. Dentro do Ensino Médio é trabalhado através de fórmulas que auxiliam no cálculo dos coeficientes binomiais, enquanto dentro das funções geradoras organizamos um sistema de combinatória.

Abaixo vamos apresentar alguns exemplos de problemas combinatórios e em seguida apresentar algumas resoluções: como é resolvida no Ensino Médio e como pode ser resolvida através das funções geradoras.

Mais à frente, também, apresentaremos alguns resultados que podem facilmente ser apresentados aos estudantes deste segmento como uma ferramenta mais rápida para a resolução de problemas desta área.

Exemplo 6.1. *Dentro de um grupo com 5 pessoas, quantos subgrupos de no mínimo 2 pessoas podemos formar?*

Primeiramente vamos abordar uma resolução que pode ser trabalhada no Ensino Médio com o objetivo de introduzir o assunto.

Resolução 1. Como se trata de um problema “pequeno” podemos listar soluções. Assim, sejam A, B, C, D e E as 5 pessoas. Desejamos formar grupos de 2, 3, 4 e 5 pessoas. Vamos descrever todas as possíveis soluções:

Grupo com duas pessoas: $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}$;

Grupo com três pessoas: $\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, B, E\}, \{A, C, D\}, \{A, C, E\},$

$\{A, D, E\}, \{B, C, D\}, \{B, C, E\}, \{B, D, E\}, \{C, D, E\};$

Grupo com quatro pessoas: $\{A, B, C, D\}, \{A, B, C, E\}, \{A, B, D, E\}, \{A, C, D, E\}, \{B, C, D, E\};$

Grupo com cinco pessoas: $\{A, B, C, D, E\}.$

Portanto, somando as quantidades de grupos acima, podemos formar 26 grupos.

Agora, vamos resolver usando os conceitos da análise combinatória.

Resolução 2. Temos um problema de combinatória simples, visto que a ordem dos elementos não importa e não há restrições. Vamos calcular quantas comissões conseguimos formar com 2, 3, 4 ou 5 pessoas. Sendo assim:

$$C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} + \frac{5!}{3!(5-3)!} + \frac{5!}{4!(5-4)!} + \frac{5!}{5!(5-5)!} = 10 + 10 + 5 + 1 = 26$$

Portanto, podemos formar 26 grupos.

Por último, vamos resolver aplicando funções geradoras.

Resolução 3. Podemos resolver pensando na quantidade de subgrupos que um grupo de 5 elementos possui e eliminar os grupos com quantidades de elementos que não desejamos.

Podemos formar 2^5 subgrupos de um grupo de 5 elementos. Porém, destes grupos não desejamos aqueles que possuem apenas um elemento ou nenhum elemento.

$$\text{Assim, temos um total de : } 2^5 - C_5^0 - C_5^1 = 32 - 1 - 5 = 26 \text{ grupos.}$$

Resolução 4. Primeiramente vamos descrever e contar todas as soluções utilizando polinômios. Suponha que cada pessoa seja representada por x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 . Assim, a quantidade de grupos que podem ser formados por uma pessoa pode ser representada por:

$p_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$, um polinômio de grau 1 com 5 comissões de uma pessoa, em que x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 representam cada um dos grupos de uma pessoa.

Analogamente podemos representar aos grupos de duas pessoas por $x_i x_j$, de três pessoas por $x_i x_j x_k$, de quatro pessoas por $x_i x_j x_k x_m$ e de cinco pessoas por $x_i x_j x_k x_m x_n$ em que $i, j, k, m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e i, j, k, m, n são todos diferentes entre si.

Assim temos os polinômios:

$p_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_1 x_5 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_4 + x_3 x_5 + x_4 x_5$ um polinômio de grau 2 com 10 grupos.

$p_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_5 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_5 + x_1 x_4 x_5 + x_2 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_5 + x_2 x_4 x_5 + x_3 x_4 x_5$ um polinômio de grau 3 com 10 grupos.

$p_4 = x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_5 + x_1 x_2 x_4 x_5 + x_1 x_3 x_4 x_5 + x_2 x_3 x_4 x_5$ um polinômio de grau 4 com 5 grupos.

$p_5 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ um polinômio de grau 4 com 5 grupos.

Podemos escrever esses polinômios de uma forma sintética:

$$p = (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4)(1 + x_5) = 1 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5,$$

sendo p o polinômio que representa todos os grupos possíveis com cinco elementos, em que cada termo representa um grupo distinto. A constante 1 pode ser associada ao grupo vazio.

Apesar de que o polinômio p representa os grupos possíveis, este polinômio não representa a solução do problema.

Vamos assumir $x = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$, assim:

$$p(x) = (1 + x)^5 = \sum_{0 \leq k \leq 5} C_5^k x^k.$$

Podemos escrever também:

$$p(x) = (1 + x)^5 =$$

$$= \binom{5}{0} \cdot 1^5 x^0 + \binom{5}{1} \cdot 1^4 x^1 + \binom{5}{2} \cdot 1^3 x^2 + \binom{5}{3} \cdot 1^2 x^3 + \binom{5}{4} \cdot 1^1 x^4 + \binom{5}{5} \cdot 1^0 x^5$$

$$p(x) = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + 1x^5$$

Podemos obter a solução do problema através da soma dos coeficientes dos termos de graus 2, 3, 4 e 5 do polinômio $p(x)$, visto que o problema aceita apenas os grupos de 2, 3, 4 e 5 pessoas.

Além disso, temos que $p(x)$ é denominado **função geradora ordinária** deste problema, abordaremos mais profundamente mais à frente.

Abaixo vamos ver uma interpretação de Dionizio (NETO, 2014) para um problema apresentado por Santos (2009), que introduz, assim como no exemplo acima, a noção de função geradora dentro da teoria de análise combinatória.

Exemplo 6.2. *Suponhamos uma caixa contendo quatro bolas, sendo duas amarelas, uma branca e uma cinza. Denominaremos, respectivamente, por a , b e c as bolas de cores amarela, branca e cinza. Vamos listar as possibilidades de tirarmos uma ou mais bolas desta caixa.*

Primeiramente, precisamos lembrar que a ordem em que as bolas são retiradas não será levada em consideração. Assim:

Mancira de tirar uma bola: a , b ou c .

Maneira de tirar duas bolas: aa , ab , ac , bc .

Maneira de tirar três bolas: aab , aac , abc .

Maneira de tirar quatro bolas: $aabc$.

Associamos o polinômio $1 + ax + a^2x^2$ às bolas de cor amarela, e as de cor branca e cinza associamos, respectivamente, $1 + bx$ e $1 + cx$.

Vejamos como interpretar o polinômio $1 + ax + a^2x^2$:

1. O termo ax representa que uma bola amarela foi escolhida.

2. O termo a^2x^2 representa que duas bolas amarelas foram escolhidas.

3. O termo constante 1 (x^0) representa que nenhuma bola amarela foi escolhida.

De maneira análoga podemos interpretar os polinômios $1 + bx$ e $1 + cx$. Cada um desses polinômios controla a escolha ou não escolha de uma bola de determinada cor.

Fazendo o produto desses três polinômios obtemos:

$$\begin{aligned} & (1 + ax + a^2x^2)(1 + bx)(1 + cx) = \\ & = 1 + (a + b + c)x + (a^2 + ab + ac + bc)x^2 + (a^2b + a^2c + abc)x^3 + a^2bcx^4. \end{aligned}$$

Podemos perceber que este polinômio determina diretamente todas as possibilidades de escolhas listadas anteriormente. O coeficiente determina as bolas retiradas e o expoente de x determina o total de bolas retiradas.

Caso o problema tratasse de buscar o número de possibilidades, e não de listá-las, bastaria substituir $a = b = c = 1$, obtendo:

$$(1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x) = 1 + 3x + 4x^2 + 3x^3 + 1x^4$$

que podemos interpretar da seguinte forma: existem 3 maneiras de retirarmos uma só bola, 4 maneiras de retirarmos 2 bolas, 3 maneiras de retirarmos 3 bolas e 1 maneira de retirarmos 4 bolas. Além disso, temos uma maneira de retirarmos nenhuma bola ($1 = x^0$).

Dizemos que o polinômio $1 + 3x + 4x^2 + 3x^3 + 1x^4$ é a função geradora ordinária para o problema apresentado, e cada um dos seus coeficientes apresenta respostas para esse problema.

Observação: Teixeira (2004) chama o binômio $(1 + x)$ de “**polinômio controlador**”, pois este determina se uma pessoa/objeto é ou não selecionado para compor a solução. E assim, temos que o 1 encontrado em $p(x)$ é interpretado como vazio, pois representa o coeficiente de x^0 .

Vejamos agora alguns teoremas que sustentam essa aplicação direta, usada nos exemplos acima, aos problemas de combinatória.

A formalidade matemática de teoremas, proposições, corolário e demonstrações não é muito presente dentro do ensino da matemática no Ensino Médio. Porém, é possível apresentá-los com a ideia de representar uma lei/fórmula, facilitando o entendimento da sua importância e seu uso.

Definição 6.3. Se a_r , para $r = 0, 1, 2, 3, \dots$, é o número de soluções de um problema de combinatória, a função geradora ordinária para este problema é a série de potências:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_nx^n.$$

Temos que o número de maneiras de retirarmos r objetos de um conjunto de n objetos distintos, com $r \leq n$, é C_n^r observamos então que a função geradora desse problema é

$$f(x) = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \dots + C_n^r x^r + \dots + C_n^n x^n,$$

que é equivalente a:

$$(1 + x)^n.$$

Teorema 6.4. O número de maneiras de distribuímos n objetos distintos em k compartimentos distintos, sem que nenhum compartimento fique vazio, que indicamos por $T(n, k)$, é:

$$T(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Demonstração. Temos que cada um dos k compartimentos deve ter pelo menos um objeto, e a ordem dos n objetos distribuídos é relevante, a função geradora exponencial para este problema é:

$$f(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^k = (e^x - 1)^k$$

e, a solução para esse problema é o coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$. Sabemos que:

$$(e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} e^{(k-i)x}.$$

e como

$$e^{(k-i)x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-i)^n x^n,$$

Assim, temos que

$$(e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-i)^n x^n = \sum_{i=0}^k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \frac{x^n}{n!}.$$

Então, o coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ é:

$$T(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n. \quad \blacksquare$$

Exemplo 6.5. *Uma companhia telefônica contrata 8 pessoas para trabalharem em três diferentes escritórios. De quantas maneiras ela pode distribuir esses 8 contratados para três escritórios diferentes de modo que cada um receba pelo menos um novo funcionário?*

Através do teorema anterior conseguimos resolver o problema de maneira bem simples e rápida. Temos que $n = 8$ e $k = 3$, assim:

$$T(8, 3) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i \binom{3}{i} (3-i)^8 = 3^8 - (3) \cdot 2^8 + \binom{3}{2} = 3^8 - 3 \cdot 2^8 + 3 = 5796$$

Exemplo 6.6. *Determine a função geradora ordinária tal que o coeficiente a_r , de x^r é o número de soluções inteiras positivas de:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = r, \text{ em que } r \in \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$

$$3 \leq x_i \leq 5, \text{ para } i \in \{1, 2\}$$

$$6 \leq x_3 \leq 8.$$

A solução de a_r , neste exemplo, é o coeficiente de x^r , conforme vimos na introdução a função geradora. Podemos obter este coeficiente através do produto:

$$(x^3 + x^4 + x^5)^2 (x^6 + x^7 + x^8) = x^{12} + 3x^{13} + 6x^{14} + 6x^{15} + 5x^{16} + 2x^{17} + x^{18}.$$

7 CONCLUSÃO

Os números de Bernoulli são uma sequência que pode surpreender com a quantidade de aplicações e resultados poderosos que os envolvem. Neste trabalho pudemos ver alguns destes resultados. Estudamos a definição dos números de Bernoulli por recorrência e através da função geradora e também algumas aplicações importantes.

Vimos aqui a história dos números de Bernoulli, passando pela história dos principais matemáticos envolvidos. Apesar de serem descobertos ao somar potências inteiras, os matemáticos encontraram os números de Bernoulli em diversos campos da matemática. Lembramos também que Jacob Bernoulli e Seki Takakazu descobriram esses números de forma independente e ambos merecem o reconhecimento.

Finalmente, no último capítulo, conseguimos aplicar o conteúdo de funções geradoras em problemas de contagem e combinatória do ensino médio.

REFERÊNCIAS

1. GRAHAM, R.L.; KNUTH, D.E.; PATASHNIK, O.: *Matemática Concreta - Fundamentos para a Ciência da Computação*, Editora LTC, 2ª edição, 1995.
2. SANTOS, J.P.O.; MELLO, M.P.; MURARI, I.T.C.: *Introdução à Análise Combinatória*, Editora Unicamp, 3ª edição, 2002.
3. SANTOS, J.P.O.; ESTRADA, E.L.: *Problemas Resolvidos de Combinatória*, Editora Ciência Moderna, 2ª edição, 2011.
4. KOLMAN, B.; BUSBY, R.C.; ROSS, S.: *Discrete Mathematical Structures*, Prentice Hall, 3ª edição, 1996.
5. RODRIGUES, J.C.P.S.: *Introdução ao Estudo de Funções Geradoras*, 2018.
6. LARSON, N.: *The Bernoulli Numbers: A Brief Primer*, 2019.
7. MIRKOSKI, M.L.: *Números e Polinômios de Bernoulli*, 2018.
8. GARCIA, D.G.: *Resolução de Problemas Combinatórios Utilizando Funções Geradoras*, 2013.
9. MACHADO, J.W.S.: *Função Geradora: Uma ferramenta de contagem*, 2015.
10. NETO, D.N.: *O uso de funções geradoras no ensino médio para articular conteúdos variados em análise combinatória*, 2014.
11. PEIFFER, J.: *Jacob Bernoulli, teacher and rival of his brother Johann*, 2006.
12. GAYO, J.; WILHELM, R.: *O problema que tornou Euler famoso*, 2014.
13. RIBEIRO, W.F.: *Valores inteiros de funções geradoras de sequências recorrentes: os resultados de Fibonacci e Lucas*, 2019.
14. FILHO, M.F.C.J.S.: *Euler e o problema de Basileia*, 2014.
15. BOYER, C.B.: *História da matemática*, Editora Edgard Blucher, 3ª edição, 2010.
16. SIMMONS, J.C.: *Os 100 maiores cientistas da História: Uma classificação dos cientistas mais influentes do passado e do presente*, Editora DIFEL, 2002.

17. AVILA, G.: *Variáveis complexas e aplicações*, Editora LTC, 3ª edição, 2008.
18. LIMA, E. L.: *Curso de Análise Volume 1*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 7ª edição, 1976.
19. ADAME, C. M.: *Breve historia del Ars Conjectandi*, Miscelânea Matemática, Volume 60, 2016.
20. ZAHN, M.: *Sequências e séries*, 2017. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/zahn/files/2017/04/seq_ser.pdf. Acessado em: 15/12/2020.
21. ZINDEL, M. L.: *Tomada De Decisão E Risco: A Contribuição Dos Matemáticos E Estatísticos*, Estadística y Sociedad, p.05-30, n.5, 2018.