Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

ANASTÁCIO BRITO ALVES

ANÁLISE E SIMULAÇÃO DA CONTA DE ÁGUA: UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FUNÇÕES POLIGONAIS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Salvador - Bahia
Julho de 2021

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

ANASTÁCIO BRITO ALVES

ANÁLISE E SIMULAÇÃO DA CONTA DE ÁGUA: UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FUNÇÕES POLIGONAIS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª Dra. Graça Luzia Dominguez Santos

Salvador - Bahia
Julho de 2021

Análise da Simulação da Conta de Água: Uma proposta de Ensino de Funções Poligonais através da Resolução de Problemas

Anastácio Brito Alves

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 16/07/2021.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Graça Luzia Dominguez Santos
Instituto de Matemática e Estatística – Universidade Federal da Bahia

Prof. Dr. Mariana Cassol
Instituto de Matemática e Estatística – Universidade Federal da Bahia

Prof. Dr. Ives Lima de Jesus
Instituto Federal da Bahia

A tia Lita, mulher centenária, forte, e que me faz refletir sobre a vida e a velhice;

A Anilson Gomes (in memorian), um amigo excepcional que sempre acreditou em mim;

À nova geração da Família Brito;

A Tuane: doce, meiga e apoiadora em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Não conquistamos nada sozinhos. Muitas pessoas participaram comigo da minha caminhada pelo Mestrado Profissional e sou grato a todas elas. Tive surpresas, alegrias, tristezas, vitórias e perdas: a dinâmica da vida dá o seu tom. Agradecer é, antes de tudo, um gesto de reconhecimento e gratidão, uma justiça afetuosa. Gostaria, portanto, de agradecer a todos e todas que estiveram junto comigo neste processo. A minha família, sempre muito presente, apoiadora e sem a qual eu não estaria conquistando essa vitória. A meus pais, minhas maiores referências. A tio Aelson, a tia Glória e a minha prima Maísa, que me acolheram em sua casa e tornaram possível a maior parte da escrita desta dissertação. Aos guerreiros e às guerreiras da turma do mestrado: Ana Rita, Ana Carolina, Carlos Alberto, Diana Souza, Hugo Gabriel, Ivson Andrade, Joselito Gualberto e, em especial, a Caio (Walter), com o qual compartilhei angústias, confissões, ideias, opiniões e muitas risadas em horas de ligações telefônicas altamente reconfortantes. A todos professores e a todas professoras de Matemática do Ensino Básico que fizeram parte de minha trajetória, despertaram em mim o interesse e me incentivaram: Andreia, Jô, Antônia, Laura, Anita, Lia, Jacqueline, Aldemi, Cléber, Adalberto, Orlando, Avani, José Luiz, Cláudio e Genebaldo. Aos professores e às professoras do PROFMAT. Ao professor Joseph Nee pela ajuda inestimável com o LaTeX e pelas contribuições para o texto. Ao professor Enaldo Vergasta pela criteriosa e minuciosa correção matemática do texto. Aos amigos e às amigas Afonso, Ana Cecília, Ana Luiza, Arthur Couto, Caio Messias, Carlos Rocha, Matheus Gama, Raphael Dantas e Vânia Melo. A Karla Daniella pelo carinho, pela disposição e pela excelente correção ortográfica desta dissertação. Aos membros da banca, Professor Ives Lima e Professora Mariana Cassol, por terem aceitado o convite de participar desse importante momento e pelas valiosas ponderações ao meu trabalho. À professora e minha orientadora Graça Luzia por ter aceitado me orientar, por ter sido compreensiva durante os tempos difíceis e por ter me feito crescer como mestrando.

“Se eu conversasse com Deus
Iria lhe perguntar:
Por que é que sofremos tanto
Quando viemos pra cá?
Que dívida é essa
Que a gente tem que morrer pra pagar?

Perguntaria também
Como é que ele é feito
Que não dorme, que não come
E assim vive satisfeito
Por que foi que ele não fez
A gente do mesmo jeito?

Por que existem uns felizes
E outros que sofrem tanto?
Nascemos do mesmo jeito
Moramos no mesmo canto
Quem foi temperar o choro
E acabou salgando o pranto?”

Leandro Gomes de Barros

RESUMO

Esta dissertação visa apresentar um produto educacional como proposta de ensino de funções poligonais utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas como abordagem pedagógica. O referido produto, o qual pode ser aplicado em turmas do Ensino Médio, consiste em desenvolver um simulador de fatura de água num programa de planilhas eletrônicas. Este trabalho é composto por Introdução, dois capítulos e Considerações Finais. Na Introdução apresento minha trajetória acadêmica, minhas motivações para a escolha do tema e de que forma elas se articulam até culminarem nesta dissertação, bem como um resumo de sua estrutura. No primeiro capítulo é feita uma revisão de literatura acerca de concepções de problema e de Resolução de Problemas, seguida de uma breve discussão sobre as novas tecnologias – em particular as simulações e o uso de planilhas eletrônicas – e sua importância no contexto educacional. Finalizando esse capítulo abordamos funções poligonais, juntamente com exemplos, proposições e teoremas, os quais podem ser utilizados para a simulação de fatura de água. No segundo capítulo é feita uma caracterização do produto educacional, no qual são exibidas informações técnicas e legais acerca do sistema de cobrança e da estrutura tarifária de contas de água no Estado da Bahia, para em seguida apresentarmos a atividade proposta. O produto educacional está estruturado em três etapas. A primeira etapa da atividade consiste em compreender e discutir aspectos gerais e as características das contas de água trazidas pelos estudantes. A segunda parte da atividade pretende, baseada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas, suscitar nos alunos as relações funcionais associadas ao contexto da conta de água, ao procurar relacionar o volume de água consumido e o valor pago em cada faixa de consumo a funções escritas por várias sentenças. A terceira e última etapa da atividade consiste na construção de um simulador de fatura de água num programa de planilha eletrônica, retomando assim as análises feitas nas atividades anteriores. No último capítulo desta dissertação são feitas considerações finais, seguidas de um apêndice contendo um breve tutorial sobre como utilizar alguns recursos de um programa de planilha eletrônica.

Palavras-chave: Funções. Conta de água. Resolução de Problemas. Planilha eletrônica. Sistema de cobrança.

ABSTRACT

This dissertation aims to present an educational product as a proposal for teaching polygonal functions via teaching-learning-assessment through Problem Solving methodology as pedagogical approach. The mentioned product, which can be applied in High School groups, consists of developing a water bill simulator in a spreadsheet software. This work is composed of an Introduction, two chapters and Final Considerations. In the Introduction, I present my academic trajectory, my motivations for choosing the theme and how they were articulated until they culminated in this dissertation, as well as a summary of its structure. In the first chapter, a literature review about problem conceptions and Problem Solving was done, followed by a brief discussion about new technologies – in particular simulations and the use of electronic spreadsheets – and their importance in the educational context. At the end of this chapter, polygonal functions, examples, propositions and theorems are presented, which can be used to help simulate water bills. The educational product is characterized in the second chapter, in which technical and legal information about the billing system and the tariff structure of water bills in the State of Bahia are displayed, so that we are able to present the proposed activity. The educational product is structured in three stages. The first step of the activity is to understand and discuss general aspects and characteristics of the water bills brought by students. The second part of the activity intends, based on the teaching-learning-assessment through Problem Solving methodology, to prompt students to think about functional relationships associated with the context of the water bills, by seeking to relate the volume of water consumed and the amount paid for each range of consumption to piecewise functions. The third, and last, stage of the activity consists of building a water bill simulator in an electronic spreadsheet program, thus resuming the analyzes carried out in previous activities. In the last chapter of this dissertation, final remarks were made, followed by an appendix containing a brief tutorial on how to use some features of a spreadsheet program.

Keywords: Functions. Water bill. Problem Solving. Spreadsheet. Billing system.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Questão 163 do ENEM 2019 (Caderno Amarelo - 1ª aplicação) 27
Figura 2 – Gráfico de uma função poligonal 28
Figura 3 – Gráfico da função modular 29
Figura 4 – Protótipos de função rampa 30
Figura 5 – Exemplo de rampa crescente 31
Figura 6 – Exemplo de rampa decrescente 32
Figura 7 – Exemplo de função poligonal 33
Figura 8 – Rampa infinita 35
Figura 9 – Exemplo de função poligonal aberta à direita 36
Figura 10 – Gráfico da função degrau 37
Figura 11 – Conta de água 42
Figura 12 – Hidrômetro 43
Figura 13 – Cobrança progressiva 48
Figura 14 – Como ler o hidrômetro 53
Figura 15 – Leituras anterior e atual de um hidrômetro 54
Figura 16 – Construção do Simulador - Passo 1 63
Figura 17 – Construção do Simulador - Passo 2 65
Figura 18 – Construção do Simulador - Passo 3 66
Figura 19 – Construção do Simulador - Passo 4 67
Figura 20 – Tela inicial do *Excel* 2019 73
Figura 21 – Exemplos de seleção de células 74
Figura 22 – Exemplos da função ABS 77
Figura 23 – Exemplos da função DEGRAU 78
Figura 24 – Exemplos da função E 79
Figura 25 – Exemplos da função OU 80
Figura 26 – Exemplos da função SE 81
Figura 27 – Exemplos da função SOMA 82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Porcentagens da Tarifa de Esgoto 45
Tabela 2 – Tabela Tarifária 46
Tabela 3 – Tabela tarifária da categoria residencial 53
Tabela 4 – Solução da questão 1.5 56
Tabela 5 – Solução da questão 1.6 57
Tabela 6 – Tabela auxiliar para encontrar as funções rampas da conta de água 58
Tabela 7 – Operações aritméticas 75
Tabela 8 – Sinais comparativos 76

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO . . . 11

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . 17
1.1 Abordagens Pedagógicas . . . 17
1.1.1 Resolução de Problemas . . . 17
1.1.2 Novas Tecnologias e Simulações . . . 22
1.2 Funções Poligonais . . . 26

2 CARACTERIZAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL . . . 40
2.1 Análise da Conta de Água . . . 40
2.1.1 A Fatura . . . 41
2.1.2 Modelos Progressivos de Cobrança . . . 43
2.1.3 Estrutura Tarifária . . . 44
2.1.3.1 Categorias de imóveis para cobrança . . . 44
2.1.4 Contribuições Tributárias . . . 47
2.1.5 Um Exemplo de Fatura . . . 48
2.2 Resolução de Problemas e Simulação no contexto da Conta de Água . . . 48
2.3 O Produto Educacional . . . 52
2.3.1 Atividade 1 - Explorando a conta de água . . . 52
2.3.2 Atividade 2 - Pensando em funções . . . 54
2.3.3 Atividade 3 - Criando o simulador . . . 55
2.4 Sugestões de Solução . . . 55
2.4.1 Atividade 1 . . . 56
2.4.2 Atividade 2 . . . 57
2.4.3 Atividade 3 . . . 63

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . 68

REFERÊNCIAS . . . 69

APÊNDICE A – PLANILHAS ELETRÔNICAS . . . 72

INTRODUÇÃO

"Wer in der Demokratie schläft, wacht in der Diktatur auf."

Goethe[1]

Esta dissertação tem como objetivo apresentar um produto educacional como proposta para o ensino de funções poligonais: um simulador de fatura. Sua construção – feita em uma planilha eletrônica – sucede a resolução de um problema, o qual consiste em determinar funções que relacionem as características de um imóvel e seu consumo de água ao valor pago na fatura.

Neste capítulo introdutório, pretendo narrar o caminho percorrido do final da minha graduação até o momento da escolha do tema desta dissertação. Durante o relato aqui escrito, procuro contemplar minha trajetória (pessoal, acadêmica e profissional), as justificativas para a escolha do tema e meus objetivos. Não faço a distinção por seções ou tópicos, por entender que isso tudo faz parte de um processo dinâmico, não linear e embricado. Por fim, apresento a estrutura e a organização desta dissertação.

Os três pilares – pessoal, acadêmico e profissional –, embora teoricamente distintos, acabam por se interlaçarem na prática, dificultando a tarefa de falar de um sem mencionar o outro, afinal compõem a vida de uma mesma pessoa. Essa indissociabilidade está relatada no decorrer dessa seção inicial.

Cursei licenciatura em Matemática na Universidade Federal da Bahia (UFBA) de 2013 a 2017, período em que o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) era bem divulgado, o que por um lado me impulsionava a continuar meus estudos e a não me contentar apenas com a graduação. No entanto, a possibilidade de trabalho imediato em escolas privadas e cursinhos ou concorrer a vagas em diversos concursos públicos eram também presentes. Assim, a ideia de conciliar trabalho e estudo, para ser um profissional em constante qualificação, era imperativa. Nessa linha, no que tange ao mestrado, o PROFMAT era, até então, a única opção que me propiciaria realizar ambas as atividades. Prestei então o concurso de admissão, denominado Exame Nacional de Acesso (ENA), em meados de 2017, o qual coincidiu, em data (felizmente, não em turno), com a etapa da prova didática do concurso público para o cargo de docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano (IF Baiano).

Em novembro do mesmo ano foi publicado o resultado do PROFMAT, para o qual eu fui aprovado e minha turma ingressou no início de 2018. Tínhamos aulas todas às sextas-feiras,

[1] Quem dorme na democracia, acorda na ditadura.

pela tarde e à noite, e nos mantivemos neste ritmo em 2018 e 2019. Inicialmente eu trabalhava em duas escolas e cursava o mestrado, concretizando-se meu desejo de trabalhar e de estudar, e assim o fiz, até que em outubro de 2018 fui nomeado para o concurso que havia prestado em 2017. Concluí as atividades em Salvador e tomei posse no concurso, o que exigiu adaptação à nova realidade.

Lotado no *campus* Santa Inês, semanalmente fazia o trajeto de ida e volta (Salvador – Santa Inês), em uma média de quatro horas, compreendendo três rodovias federais. Por volta de setembro de 2019, contactei com a minha atual orientadora, Graça Luzia – a qual havia sido minha professora de Cálculo B à época em que cursava Engenharia Elétrica –, pedindo que me orientasse no trabalho de conclusão do mestrado, esta prontamente aceitou meu pedido. Como uma primeira opção temática, vislumbrei a Topografia, tida pelos discentes como uma das disciplinas mais difíceis de seus cursos técnicos integrados ao Ensino Médio. Embora fosse um tema rico, havia uma série limitações que, naquele momento, impediam-me de desenvolver bem a dissertação ao redor dessa área. Como, por exemplo, o fato de eu lecionar no curso técnico de Alimentos e este não dispor da disciplina Topografia em seu currículo, e o fato do uso e do manuseio dos equipamentos dessa disciplina envolverem outros profissionais do Instituto, não havendo disponibilidade nem coincidência de horários para tal. Desse modo, percebi a importância de um outro tema que me permitisse desenvolver o trabalho com mais independência e fluidez.

A opção por trabalhar com funções poligonais foi inspirada em uma aula da disciplina MA11 - Números e Funções Reais, quando nosso professor discutiu as funções poligonais aplicadas ao Imposto de Renda. A situação chamou-me a atenção por ser demasiadamente diferente do que costumava ver, bem como pela praticidade, tal episódio ficou bem registrado na memória, contudo, por certo tempo, não fora cogitada para motivar um trabalho mais profundo e específico como este.

No entanto, com a necessidade de definir a nova temática, lembrei-me da referida aula e resolvi trazer à tona aquele conteúdo e suas possíveis aplicações. Trabalhar com o Imposto de Renda com os estudantes poderia não ser tão tangível a eles, por se tratar de uma preocupação essencialmente dos adultos com renda acima de certo limite. Todavia, foi ainda me inspirando no modelo progressivo do imposto, que me deparei com as situações de conta de água. Estudei mais detalhadamente suas características e encontrei coincidências relativas à cobrança progressiva, sendo então possível associá-las a funções poligonais. Neste momento, ficou definido, portanto, o conteúdo matemático de suporte ao tema.

Após a escolha do conteúdo e de um contexto, era necessário pensar em um modo de concretizar a proposta. Recorri ao regimento do PROFMAT, uma vez que um dos requisitos para obtenção do grau de mestre era a aprovação no trabalho conclusão final, o qual

> poderá ser apresentado em diferentes formatos, tais como dissertação, revisão sistemática e aprofundada da literatura, artigo, patente, registros de propriedade

> intelectual, projetos técnicos, publicações tecnológicas; desenvolvimento de aplicativos, de materiais didáticos e instrucionais e de produtos, processos e técnicas; produção de programas de mídia, editoria, relatórios finais de pesquisa, *softwares*, projeto de aplicação ou adequação tecnológica, protótipos para desenvolvimento ou produção de instrumentos, equipamentos e *kits*, projetos de inovação tecnológica, sem prejuízo de outros formatos, de acordo com temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica e impacto na prática didática em sala de aula.

A construção de um simulador de fatura como produto educacional visa oportunizar aos estudantes a mobilização de conhecimentos matemáticos, em especial, as funções poligonais, ao aplicá-los, com apoio de tecnologias digitais, em seus contextos de vida. Não se pretende, portanto, imitar a fatura original, mas provocar reflexões sobre como a matemática pode auxiliar na compreensão de uma política tarifária, ademais de desenvolver um pensamento crítico financeiro e ambiental.

Atrelada à situação de sala de aula relatada, existem outras razões para a escolha do tema, posto que o tema em si não se resume ao conteúdo matemático previsto nos currículos escolares e nos documentos oficiais da Educação, tampouco a questões de vestibulares, ENEM e olimpíadas; o tema está associado a um conteúdo, a um contexto e a abordagens pedagógicas que envolvem e colocam em prática a proposta como um todo.

É usual os documentos oficiais e livros didáticos utilizarem a denominação "Funções definidas por várias sentenças" para funções reais com variável real que podem ser representadas algebricamente por leis de formação diferentes em subconjuntos do seu domínio. Optamos por não empregar tal nomenclatura, por entendermos que não se trata de um tipo específico de função, não havendo dessa forma uma definição precisa para as denominadas "Funções definidas por várias sentenças". Quando for necessário, nessa Introdução, nos referirmos a tais funções, utilizaremos "funções escritas por várias sentenças".

A elaboração de um livro didático, de um plano de aula, de um produto educacional pensado para a Educação Básica deve levar em conta a legislação e os documentos oficiais norteadores. Hodiernamente, não se fala em Educação Básica sem fazer menção à Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Em implementação até 2022, ela é

> um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p. 7, grifo original)

Não será feita aqui uma exposição profunda e detalhada acerca da BNCC, tampouco críticas relativas a ela, uma vez que tais discussões fogem do escopo deste trabalho. Trata-se, destarte, de um documento de referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares de todo o país, bem como para as propostas pedagógicas das instituições escolares (BRASIL, 2018).

Ao longo da Educação Básica, deve ser assegurado o desenvolvimento de dez competências gerais, através das aprendizagens essenciais definidas nas BNCC, consolidando-se assim, pedagogicamente, os direitos de aprendizagem e de desenvolvimento dos estudantes. Para cada área de conhecimento, existem competências específicas, as quais explicitam como as competências gerais se expressam nessas áreas (BRASIL, 2018).

Na BNCC, *competência* é definida como “a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2018, p. 8). Com intuito de garantir o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades, as quais expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares e estão relacionadas a diferentes objetos de conhecimento (conteúdos, conceitos e processos) (BRASIL, 2018).

No conjunto de habilidades da área de Matemática e suas tecnologias, encontra-se, de modo mais específico, o conteúdo “Funções escritas por várias sentenças”, representado na habilidade EM13MAT404[2]:

> “Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 539).

Esta habilidade insere-se na Competência Específica 4, a qual visa “compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas” (BRASIL, 2018, p. 531).

A atenção à resolução de problemas concretiza-se em boa parte da BNCC, em especial nas etapas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Considerada como processo matemático, juntamente com a investigação, o desenvolvimento de projetos e a modelagem, a resolução de problemas configura-se como objeto e estratégia para a aprendizagem. O desenvolvimento das habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente está intrinsecamente relacionado a algumas formas de organização da aprendizagem matemática, com base na

[2] Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico: o primeiro par de letras indica a etapa de Ensino Médio; o primeiro par de números (13) indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio; a segunda sequência de letras indica a área (três letras) ou o componente curricular (duas letras); os números finais indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (1º número) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números). (BRASIL, 2018, p. 34)

análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática (BRASIL, 2018).

Nesse conjunto de competências gerais, destaca-se a *Competência Geral 5*:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

Na proposta aqui apresentada que corresponde à construção de um simulador, após a resolução de um problema, fica claro que o conteúdo se torna contextualizado e associado aos objetos matemáticos em questão, sobretudo por se tratar de uma temática presente no cotidiano dos discentes. Pressupondo que a aprendizagem Matemática está relacionada à compreensão, a BNCC reconhece que

> recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização (BRASIL, 2018, p. 276).

Nesse contexto, e a partir das ideias acima elencadas, propomos uma atividade não convencional que contemple não somente um conteúdo matemático específico – funções poligonais –, mas que estimule o pensamento crítico, o trabalho em equipe e que esteja de acordo com as novas demandas da BNCC (uso de tecnologias e resolução de problemas).

Este trabalho estrutura-se em introdução, três capítulos e um apêndice. A presente seção dedica-se à apresentação da trajetória pessoal, acadêmica e profissional, da escolha, de justificativa do tema e dos objetivos deste trabalho. O primeiro capítulo traz a fundamentação teórica, – do ponto de vista pedagógico e matemático –, que alicerça o produto educacional. É iniciado com a discussão acerca do conceito de problema (matemático), seguido das concepções de Resolução de Problemas. Posteriormente, é tratada a questão das tecnologias digitais, em particular das simulações e do uso de planilhas eletrônicas no contexto educacional. Para finalizar esta primeira parte, é feita a exposição do conteúdo matemático, visando sobretudo a construção da simulação proposta como produto educacional.

O segundo capítulo é dedicado à caracterização do produto educacional. Em sua primeira seção, é dada o contexto do produto educacional, ao serem apresentadas as características da conta de água; em seguida, compila-se as perspectivas de ensino debatidas no capítulo anterior com vistas ao produto educacional. Na terceira seção, são apresentadas as etapas do produto educacional, e na seção posterior, são trazidas sugestões de solução.

O terceiro e último capítulo traz as considerações finais. Após as referências, há um apêndice que trata de planilhas eletrônicas, que consiste em um minitutorial baseado no produto educacional.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

> *"People enjoy fantasy, and that is just what mathematics can provide - a relief from the daily life, an anodyne to the practical workaday world."*
>
> Paul Lockhart[1]

Neste capítulo, apresentaremos abordagens pedagógicas por compreendê-las como as que melhor atendem à proposta de construção de um simulador de fatura, pautada na Resolução de Problemas e no uso de Novas Tecnologias, em particular, nas simulações feitas em planilhas eletrônicas. A finalização do capítulo ocorrerá através de uma discussão acerca do caráter específico de funções poligonais[2] percebidas como necessárias para o desenvolvimento da atividade, juntamente com comentários, considerações, exemplos e resultados.

1.1 Abordagens Pedagógicas

Para a atividade proposta que culmina no "simulador de fatura de água", justificaremos e adotaremos duas estratégias: Resolução de Problemas e Novas Tecnologias. Compreender o funcionamento da cobrança pelo consumo de água e encontrar funções que modelam essa situação constitui-se um problema (matemático) e, para simular tal fenômeno, pode-se lançar mão de um tipo de programa de computador específico (planilha eletrônica) a fim de melhor consolidar os conhecimentos mobilizados durante a solução do problema proposto. Desse modo, faremos, na seção seguinte, uma discussão acerca do conceito de problema matemático baseada na revisão bibliográfica e, por conseguinte, o porquê de a primeira etapa da atividade ser considerada um problema, justificando assim a escolha da primeira abordagem. Na seção que se sucede, discorreremos sobre as Novas Tecnologias, em especial sobre a informática, o uso do computador e as simulações em planilhas eletrônicas.

1.1.1 Resolução de Problemas

O substantivo *problema* é polissêmico, isto é, dotado de vários significados. É comum ouvir pessoas falarem em problema familiar, problema de saúde, problema psicológico, problema

[1] As pessoas gostam de fantasia, e é justamente isto que a matemática pode fornecer - um alívio à vida diária, um anódino ao mundo prático do dia a dia.

[2] que podem ser vistas em alguns documentos oficiais e livros didáticos como funções reais com variável real representadas algebricamente por várias leis de formação.

financeiro, problema social, problema ambiental, problema no trabalho, problema na escola ou problema técnico (em computadores, celulares etc.). Nessas situações, geralmente atribui-se ao problema um sentido negativo, algo ruim. Por outro lado, em ciência, um problema pode surgir de uma dúvida ou de um questionamento; é um ponto de partida para pesquisas e novas descobertas, sendo, portanto, um meio para seu desenvolvimento. O processo de busca por respostas, e seu eventual êxito, então, ganham uma conotação positiva, distanciando-se do sentido dado do ponto de vista mais comum.

Os dicionários de língua portuguesa trazem inúmeros outros significados para o termo e não se eximem de definir problema científico, ou, em particular, matemático. Ferreira (1975) define-o como "questão matemática proposta para que se lhe dê a solução." O mesmo verbete aparece no dicionário Houaiss (2001) como a "tarefa de calcular uma ou várias quantidades desconhecidas, denominadas *incógnitas*, relacionadas a outras conhecidas, os *dados*."

A revisão de literatura permite encontrar e confrontar perspectivas diversas acerca do conceito de problema (matemático). Para Pereira (1980, p. 54) problema "é toda situação na qual o indivíduo necessita obter novas informações e estabelecer relações entre elementos conhecidos e os contidos num objetivo a que se propõe a realizar para atingi-lo." Já para Lester (1983 apud POZO et al., 1998, p. 15), problema é "uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução."

Em sua tese de livre docência, Dante (1988, p. 9) traz que problema é "qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la." Mais especificamente, define problema matemático como "qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la." Ainda, Onuchic (1999, p. 215) compreende que problema "é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver."

Em outra perspectiva, Wagner (2003, p. 612) afirma que um problema não pode ser dado a alguém, ou não se pode ter um problema no sentido de ter controle sobre ele. Em vez disso, "meus problemas devem me prender, eles me fazem cativo" (tradução nossa). Ainda, ele acredita que a riqueza de uma atividade de Matemática no contexto de sala de aula pode ser aferida na medida em que os estudantes estão sendo cativados pelos problemas matemáticos.[3]

Ademais, de acordo com Cai e Lester (2012, p. 148), "quando os pesquisadores utilizam o termo resolução de problema, eles estão se referindo a tarefas matemáticas que têm o potencial de proporcionar desafios intelectuais que podem melhorar o desenvolvimento matemático dos alunos".

Fica claro que "o termo problema pode fazer referência a situações muito diferentes, em

[3] In his discussion about the source of good mathematics problems, Kilpatrick asserts, "one person cannot give a problem to another person" (1987, p. 124). Outside the context of mathematics, two conditions are necessary for me to believe that I have a problem having an unfulfilled need and finding no obvious way of fulfilling that need. I cannot be given a problem. I cannot even have a problem in the sense that I have control over it. Rather, my problems hold me? they make me captive. I suggest that the richness of classroom mathematical activity might be measured by the extent to which students are being captivated by mathematical problems.

função do contexto no qual ocorrem e das características e expectativas das pessoas que nelas se encontram envolvidas" (POZO et al., 1998, p. 13). Nota-se que todas as perspectivas supramencionadas associam um *problema* a um *indivíduo* ou *grupo de indivíduos* e seu envolvimento perante ele. Destarte, entende-se que para uma atividade ser caracterizada como "problema", sua natureza depende também das qualidades e dos interesses daqueles que estão a resolvê-lo. Logo, um problema não é absolutamente um problema, mas subjetivamente um problema. Este raciocínio alinha-se à compreensão de Pozo et al. (1998, p. 16), ao afirmarem que

> uma situação somente pode ser concebida como um problema na medida em que exista um reconhecimento dela como tal, e na medida em que não disponhamos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos. [...] Por isso, é possível que uma mesma situação represente um problema para uma pessoa enquanto que para outra esse problema não existe, quer porque ela não se interesse pela situação, quer porque possua mecanismos para resolvê-la com um investimento mínimo de recursos cognitivos [...].

Complementar à ideia descrita acima, Onuchic et al. (2019, p. 36) ressalta que "para que uma atividade se constitua, de fato, como um problema, o professor não pode prescrever aos estudantes os métodos e/ou regras específicas para que obtenham a solução". Assim, se os estudantes já têm sua solução memorizada ou conhecida, ou a atividade não se faz interessante, esta não será para eles um problema. Neste ponto, o papel do professor torna-se grande e decisivo no tocante à promoção de um ambiente favorável à proposição de problemas.

Independentemente da concepção que se tenha de problema, buscam-se esforços no sentido de tentar resolvê-lo. Seja como atividade comum na vida cotidiana, uma estratégia adotada em sala de aula ou permeada no meio científico, fala-se em "Resolução de Problemas". Vale ressaltar que as concepções de problema não param em seus significados, mas perpassam por caminhos e por estratégias para sua solução.

> Considerada o "coração" da atividade matemática, a resolução de problemas tem sido a força propulsora para a construção de novos conhecimentos e, reciprocamente, novos conhecimentos proporcionam a proposição e resolução de intrigantes e importantes problemas. Apesar disso, [...] a forma de incorporá-la de modo a promover uma significativa e efetiva aprendizagem ainda não está clara para os professores de Matemática (ONUCHIC et al., 2019, p. 29).

O estudo da literatura aponta três formas diferentes de realizar um trabalho, em sala de aula de Matemática, fundamentadas na Resolução de Problemas, a saber: (1) ensino **sobre** Resolução de Problemas, (2) ensino **para** Resolução de Problemas e (3) ensino **através** de Resolução de Problemas (SCHROEDER; LESTER, 1989).

O ensino sobre Resolução de Problemas corresponde a tratá-la como um (novo) conteúdo – além daqueles já presentes nos currículos de Matemática –, o qual consiste em estabelecer "heurísticas" ou "estratégias" como forma de orientar os alunos na resolução de problemas, com regras e processos gerais, independentes do conteúdo específico abordado. Esse modelo (ou uma sua pequena variação) foi atribuído a George Pólya[4] que, em seu livro intitulado *How to solve it*[5], colocou seu conhecido "roteiro" com orientações sobre como resolver um problema. O modelo descreve um conjunto de quatro etapas independentes no processo de solução de problemas matemáticos: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e fazer uma retrospectiva (PÓLYA, 1945; SCHROEDER; LESTER, 1989; POZO et al., 1998; ONUCHIC, 1999; ALLEVATO, 2005; ONUCHIC et al., 2019).

No ensino *para* Resolução de Problemas, a Matemática é vista como utilitária, isto é, o maior propósito de sua aprendizagem é dotá-la de um sentido prático, para poder utilizá-la seja em problemas rotineiros ou não rotineiros. Embora a aquisição de conhecimento matemático seja de suma importância, a Matemática é ensinada separada (antes) de suas aplicações, uma vez que, em um primeiro momento, os alunos são expostos à teoria, a conceitos, a treinos de habilidades ou a algoritmos e só então transferem o que aprenderam de um contexto para outros contextos. Um grande perigo dessa abordagem é que problemas não rotineiros geralmente exigem técnicas e estratégias mais elaboradas que os rotineiros (SCHROEDER; LESTER, 1989; ONUCHIC, 1999; ALLEVATO, 2005; ONUCHIC et al., 2019).

No ensino **através**[6] da Resolução de Problemas, estes são valorizados não só como um propósito para aprender Matemática, mas também como meio primário de o fazer. O ensino de um tópico matemático começa com uma situação-problema que engloba aspectos-chave do tópico, e técnicas matemáticas são desenvolvidas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. Desse modo, a Resolução de Problemas é tida como ponto de partida para as atividades matemáticas em sala de aula. O objetivo de aprender Matemática é transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros. O aprendizado de Matemática dessa maneira pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo de conceito ou técnica matemática) para o abstrato (uma representação simbólica de uma série de problemas e técnicas para operar com esses símbolos). (SCHROEDER; LESTER, 1989; ONUCHIC et al., 2019)

O produto educacional adotará a perspectiva de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. Tal escolha não abomina as duas estratégias anteriores, porque de acordo com Schroeder e Lester (1989, p. 33), "embora em teoria essas três concepções de ensinar resolução de problemas podem ser isoladas, na prática elas se interlaçam e ocorrem em várias

[4] Matemático húngaro, foi professor na Suíça e nos Estados Unidos. Fez notáveis contribuições nas áreas de teoria dos números, análise matemática, geometria, álgebra, combinatória e probabilidade. Também se interessou pela heurística, especialmente por resolução de problemas, buscando identificar métodos sistemáticos no processo de resolução e, mais geralmente, de invenção em Matemática. Ele escreveu 5 livros sobre esses assuntos: "How to Solve it" (1945); "Mathematics and Plausible Reasoning" - Volume I: Induction and Analogy in Mathematics e Volume II: Patterns of Plausible Inference (1954); "Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving" - Volumes 1 e 2 (1962/64).

[5] Traduzido para o português sob o título *A arte de resolver problemas*.

[6] "ao longo", "no decurso", significando que ambas a Matemática e a Resolução de Problemas são consideradas simultaneamente e são construídas mútua e continuamente (ONUCHIC et al., 2019).

combinações e sequências.”

O trinômio *ensino-aprendizagem-avaliação* baseia-se nas concepções de (ONUCHIC et al., 2019), que, a partir de trabalhos, estudos e pesquisas, consideram necessário adotar princípios de avaliação contínua e formativa e integrá-los ao já conhecido processo de ensino-aprendizagem, dando assim origem e justificando o termo referenciado. Esse termo composto visa expressar a ocorrência simultânea das suas partes durante a construção do conhecimento, tendo no aluno o papel central e o professor como guia e mediador.

Compreender, fundamentar e implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas exige dos professores e estudantes mudanças de postura (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82). O professor precisa selecionar problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende desenvolver e precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Por outro lado, os alunos devem entender e assumir essa responsabilidade. Onuchic e Allevato (2011, p. 82) destacam vantagens em se trabalhar com essa metodologia em sala de aula:

> • Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o *dar sentido*.
>
> • Resolução de problemas desenvolve *poder matemático* nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
>
> • Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a auto-estima dos estudantes aumentam.
>
> • Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.
>
> • Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita *tradicional*. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
>
> • A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos.

Baseadas em suas pesquisas desenvolvidas e em experiências junto a professores da Educação Básica, Onuchic et al. (2019) sugerem uma maneira de por em prática o trabalho de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, organizada em dez etapas: (1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo e (10) proposição e resolução de novos problemas.

No entanto, entendendo que há diversas concepções e tipos de problema, e modos distintos de utilizar a Resolução de Problemas, visando atender às peculiaridades da atividade proposta, sugere-se um procedimento alternativo inspirado no roteiro acima e que se encaixe melhor com a proposta feita aqui, visto que, “não há formas rígidas de se trabalhar através de resolução de problemas em sala de aula de Matemática” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82). O produto educacional é uma atividade que, para ser completada, requer sua divisão em três etapas, as quais consistem em (1) explorar a conta de água, (2) encontrar uma função que modela a conta de água, (3) construir o simulador de fatura em um programa de planilha eletrônica.

Dentro de cada etapa sugere-se uma sequência didática, inspirada na maneira de colocar em prática a metodologia de Resolução de Problemas proposta por Onuchic et al. (2019).

- Atividade 1 - Explorando a conta de água: Seu objetivo é familiarizar os estudantes com os aspectos da conta de água, tornando-se indispensável. É tida como uma fase de “preparação para o problema”, não como o problema em si.
- Atividade 2 - Encontrando uma função: É o cerne da proposta como um todo, considerada o problema em si.
- Atividade 3 - Construindo o simulador: A fatura será transplantada para uma planilha eletrônica, na qual as principais informações sobre a conta de água e as funções encontradas na atividade anterior serão inseridas.

1.1.2 Novas Tecnologias e Simulações

Lápis, borracha, caneta, papel, quadro, giz, livro: por muito tempo esses foram os principais instrumentos tecnológicos utilizados por alunos e por professores para anotar, estudar e produzir conhecimento. Ainda hoje fazem-se presentes nas salas de aulas de escolas e de universidades espalhadas pelo país. No entanto, devido ao avanço da ciência e da tecnologia, novos personagens têm surgido nesse cenário, desempenhando papéis distintos e diversos, substituindo, complementando ou aprimorando as antigas tecnologias.

As *novas tecnologias* desenvolvem-se velozmente, e como não conseguem ser processadas com a mesma rapidez pelas pessoas, acabam por penetrar aos poucos em todos os setores da sociedade atual. Estão nas roupas, nas casas, na rua, no trabalho, na saúde, no lazer, nos meios de transporte e na palma da mão. O senso comum aponta para o entendimento de tecnologia como aparato digital e/ou eletroeletrônico. Não cabe julgar tal concepção, mas nos referir à tecnologia como uso da inteligência humana para produzir objetos, instrumentos, processos e produtos que atendam suas necessidades e seus interesses.

Nesse sentido, tendo “invadido” os ambientes educacionais, seja por políticas de incentivo, seja por aqueles que frequentam seus espaços físicos ou seja pela sociedade (de consumo), torna-se valioso pensar em formas de utilizá-las a nosso favor. Porém, cabe ressaltar que não discutiremos qual a melhor, mais adequada e racional forma de lidar com as novas tecnologias em sala de aula, posto que estamos cientes da impossibilidade de abominá-las e de competir com elas. Pretendemos, portanto, conhecer algumas possibilidades e saber usufrui-las de modo a promover um ambiente de ensino-aprendizagem mais rico, diverso e mais próximo dos avanços e das demandas da sociedade. Dentro da Educação Matemática, o computador e a informática têm seus lugares de destaque. Segundo Borba e Penteado (2019, p. 36),

> a informática é uma nova extensão de memória, com diferenças qualitativas em relação às outras tecnologias da inteligência e que permite a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e em uma "nova linguagem" que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea.

Estes autores defendem o papel da Informática na Educação Matemática como uma perspectiva de cidadania, ao afirmarem que "o acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma 'alfabetização tecnológica"', a qual deve ser vista como um "aprender a ler essa nova mídia" (BORBA; PENTEADO, 2019, p. 13). Ainda, "o acesso à informática na educação deve ser visto não apenas como um direito, mas como parte de um projeto coletivo que prevê a democratização de acessos a tecnologias desenvolvidas por essa mesma sociedade" Ibid., p. 13.

Corroborando as contribuições que a literatura tem feito ao longo de muitos anos de pesquisas, os documentos legais ligados à educação brasileira também apontam para o uso de tecnologias digitais e do computador. Preocupada com as transformações ocasionadas pelas tecnologias, suas repercussões e seus impactos nos indivíduos, no mundo e consequentemente nas gerações futuras, a BNCC explicita e tematiza, nas competências gerais da Educação Básica, diferentes dimensões que caracterizam a computação e as tecnologias digitais, como o pensamento computacional, que

> envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos (BRASIL, 2018, p. 474).

As dimensões que caracterizam as tecnologias digitais e a computação articulam-se com as competências gerais, as competências específicas, os objetivos de aprendizagem e as habilidades das três etapas do Ensino Básico, respeitando as peculiaridades de cada uma delas. As novas gerações nascem imersas no mundo digital e ao alcançarem o Ensino Médio, esses jovens tornam-se muito mais ativos, consumidores e até produtores de conteúdo. De acordo com a BNCC, a forte e intrínseca relação entre as culturas juvenis e a digital requer a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens construídas nas etapas anteriores ao Ensino Médio, por isso o foco do trabalho deve estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais, relacionadas a todas as áreas do conhecimento, às diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho Brasil (2018). Tais competências e habilidades devem permitir aos estudantes

> usar diversas ferramentas de software e aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática; e
>
> utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade (BRASIL, 2018, p. 475).

Simulações não são exclusivas aos computadores ou, de modo mais geral, às tecnologias digitais. Um jogador de futebol pode simular uma falta sem tê-la sofrido; um grupo de peritos pode simular trechos de um crime através de gestos, movimentos e uso de ferramentas; um processo de despoluição pode ser simulado através de um experimento; a ejeção de lava vulcânica pode ser simulada utilizando-se vinagre e bicarbonato de sódio (experimento bastante comum em feiras de ciências escolares); uma situação de tribunal pode ser estudada através de um júri simulado; uma importante prova de concurso geralmente é precedida de um simulado. Assim, simulações buscam antecipar, prever, preparar, representar, imitar situações da realidade, tal afirmação dá conta de responder à pergunta que naturalmente surge: "para que simular?"

Para prever o comportamento futuro dos sistemas usando modelos, isto é, antecipar os efeitos produzidos por alterações ou pelo emprego de outros métodos em suas operações. Construir teorias e hipóteses considerando observações efetuadas através de modelos. Por exemplo, Tajra (2001, p. 19), quando se refere ao uso dos *softwares* de simulação e de programação afirma que "[...] são excelentes recursos computacionais que permitem o aprimoramento das habilidades lógico, matemática e de resolução de problemas."

Ao escreverem sobre a criação de uma simulação no computador, Bellemain, Bellemain e Gitirana (2006) afirmam que essa tarefa consiste geralmente em programar um modelo das propriedades dos objetos ou de fenômenos e representá-los coerentemente na tela do computador. Os referidos autores distinguem também duas abordagens metodológicas relativas ao trabalho junto aos alunos com modelização de fenômenos a partir de simulações com o computador:

> (a) a investigação, por parte do aluno, do modelo que foi programado para simular os fenômenos, a partir da observação das propriedades do objeto por meio da experimentação do modelo; (b) a construção da simulação em um *software* por meio da descrição do modelo pelo aluno. Ibid., p. 5.

Nossa concepção de simulação adotada nesta dissertação alinha-se com a segunda abordagem referida acima, na qual o aluno constrói sua própria simulação, por meio de um programa de computador (planilha eletrônica), baseando-se em um modelo (conta de água). O papel ativo conferido ao estudante promove benefícios, conforme destaca (BLISS, 1994 apud PEDRO; SAMPAIO, 2005, p. 2844):

> Quando o aluno constrói um modelo sobre algum problema estudado e o representa no computador, ele está expressando e construindo o seu próprio

> conhecimento, tendo a chance de rever, comparar e avaliar os conceitos envolvidos. Uma vez representado, estes modelos podem ser simulados, gerando a possibilidade de ampliação do entendimento do problema.

Ademais de constituir por si uma motivação a mais para o aluno, "o uso do computador para a construção e simulação de modelos facilita o processo de criação (externalização de ideias sobre um problema), experimentação (testagem de hipóteses através da simulação), reflexão e reconstrução de modelos" (PEDRO; SAMPAIO, 2005, p. 2844).

Há múltiplas maneiras e inúmeros recursos que permitem realizar simulações. Destacamos o uso das planilhas eletrônicas, que são programas de computador que se utilizam de tabelas para realização de cálculos, geração de gráficos, armazenagem de dados, emissão de relatórios, preenchimento de formulários, informatização de processos, entre outras funções. Este tipo de programa não foi criado para fins didáticos, contudo é totalmente passível de adequações para propósitos pedagógicos, além de sua utilização ser uma prática estimulada pela BNCC, a qual

> propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas (BRASIL, 2018, p. 528).

Além das orientações constantes nos documentos oficiais da educação brasileira, a literatura traz suas colaborações acerca do uso de planilhas eletrônicas no ensino de Matemática. Coxford e Shulte (1999, p. 205) afirmam que elas "[...] podem ser instrumentos eficazes de ensino, ajudando os alunos a experimentar o processo de fazer matemática. Muitos tópicos podem ser introduzidos de maneira significativa através de um programa de planilhas."

Mais especificamente, no que tange o ensino de função, o uso de planilhas eletrônicas, conforme Abreu (2002, p. 92),

> é particularmente interessante porque permite que o aluno se envolva num processo interativo de resolução ou modelação de um determinado problema. A sua utilização pode ser associada com essas abordagens metodológicas, a resolução de problemas ou a Modelagem Matemática.

Na proposta feita neste trabalho, as planilhas eletrônicas exercem papel fundamental na construção de um simulador de faturas, não somente por serem o ambiente no qual ele se concretiza, mas por também facilitarem a escrita e executarem cálculos com funções, os quais, se feitos manualmente, demandariam um tempo muito grande e poderiam ser motivo de desestímulo.

A próxima seção trata das funções poligonais importantes para o produto educacional, serão apresentados exemplos como motivação para a definição desse tipo de função, além de resultados serem enunciados e demonstrados.

1.2 Funções Poligonais

Como mencionamos na Introdução, é usual encontrar em livros (didáticos) de Matemática disponíveis até então – bem como anteriores à BNCC –, em materiais digitados (aulas e apostilas) ou em vídeo-aulas, seções ou trechos abordando e usando a denominação funções definidas por várias sentenças (IEZZI et al., 2016; IEZZI; MURAKAMI, 2013; DANTE, 2016) para funções reais com variável real que podem ser representadas algebricamente por distintas leis de formação ou regras de associação (sentenças) em subconjuntos do seu domínio (subdomínios). Optamos por não empregar tal nomenclatura, por entendermos que não se trata de um tipo específico de função, considerando que não existe uma definição precisa para tais funções.

Nos grandes atacados, é bastante comum serem oferecidos descontos nos produtos quando os clientes compram em certas quantidades. Por exemplo, uma lata de refrigerante pode custar R\$2,00, mas ao adquirir, pelo menos, doze dessas unidades, o valor da lata diminui para R\$1,80. Cabe ressaltar que não faremos aqui uma análise da estratégia de venda utilizada pelo mercado, visto que as atenções serão voltadas à interpretação da situação e à busca de uma eventual função que determine alguma informação relacionada à situação.

A depender do direcionamento que se dê, é razoável perguntar-se se existe alguma função que calcule o preço a ser pago pelo cliente segundo a quantidade de latas de refrigerante compradas. É de se suspeitar, pelo menos, que alguma coisa mude quando se passa a comprar doze ou mais latas, afinal, o preço da unidade passa a custar vinte centavos a menos. Dessa forma, é preciso analisar duas situações: (1) o que acontece quando se compra menos de doze latas e (2) o que acontece quando se compra doze ou mais latas.

Nesse contexto, estabelecemos dois conjuntos disjuntos que compõem o domínio da função a ser encontrada. Para representar a quantidade de latas compradas pelo cliente, utilizaremos como variável a letra x. No primeiro caso, como cada lata custa 2 reais, o valor pago será $2x$, contanto que o número de latas seja menor que doze. No segundo caso, cada lata passa a custar 1,80 reais e o valor pago será $1,8x$, contanto que o número de latas seja pelo menos doze. Denotando por p a função que determina o valor pago pelo cliente ao comprar uma quantidade x de latas de refrigerante, pode-se escrever

$$p(x) = \begin{cases} 2x & \text{, se } 0 \leq x < 12 \\ 1,8x & \text{, se } x \geq 12 \end{cases}$$

Muito pode-se dizer e perguntar sobre a função acima. Embora seus subdomínios sejam intervalos, a variável independente representa uma quantidade inteira, já que se refere ao número de latas de refrigerante compradas. Assim, a função p acima está definida no conjunto dos números naturais, ou ainda, $\mathbb{R} \cap \mathbb{N}$ (naturais pertencentes a intervalos reais), de modo que podemos escrever $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Este fato se reflete também em seu gráfico, que será composto por pontos isolados.

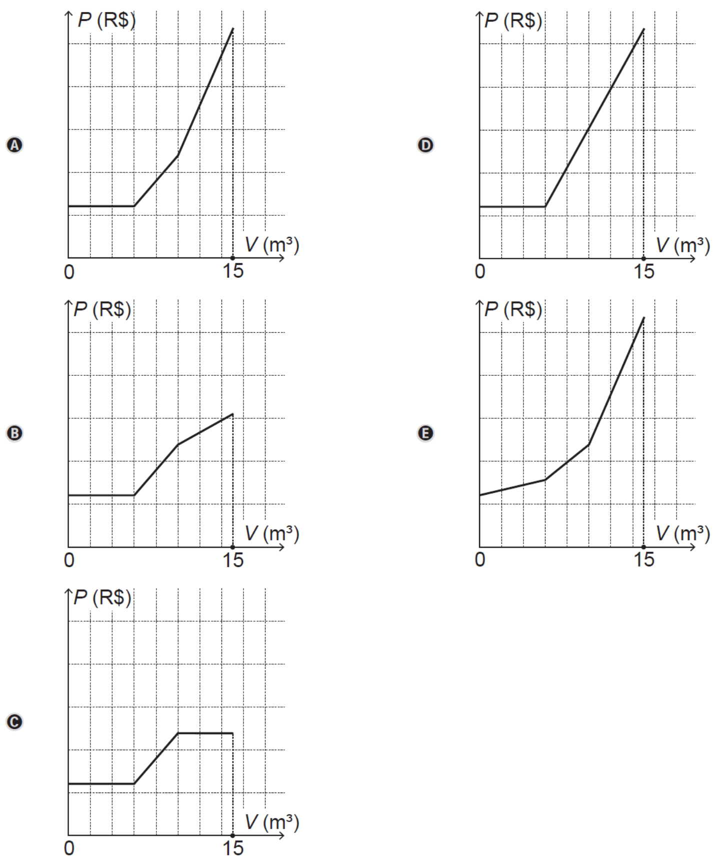
Outra situação interessante pode ser utilizada como exemplo para entender a ideia de função poligonal, desta vez recorrendo a gráficos (ver Figura 1). A questão a seguir foi extraída da prova do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), do ano de 2019, 1ª aplicação.

Uma empresa presta serviço de abastecimento de água em uma cidade. O valor mensal a pagar por esse serviço é determinado pela aplicação de tarifas, por faixas de consumo de água, sendo obtido pela adição dos valores correspondentes a cada faixa.

- Faixa 1: para consumo de até 6 m³, valor fixo de R$ 12,00;
- Faixa 2: para consumo superior a 6 m³ e até 10 m³, tarifa de R$ 3,00 por metro cúbico ao que exceder a 6 m³;
- Faixa 3: para consumo superior a 10 m³, tarifa de R$ 6,00 por metro cúbico ao que exceder a 10 m³.

Sabe-se que nessa cidade o consumo máximo de água por residência é de 15 m³ por mês. O gráfico que melhor descreve o valor P, em real, a ser pago por mês, em função do volume V de água consumido, em metro cúbico, é

Figura 1 – Questão 163 do ENEM 2019 (Caderno Amarelo - 1ª aplicação)



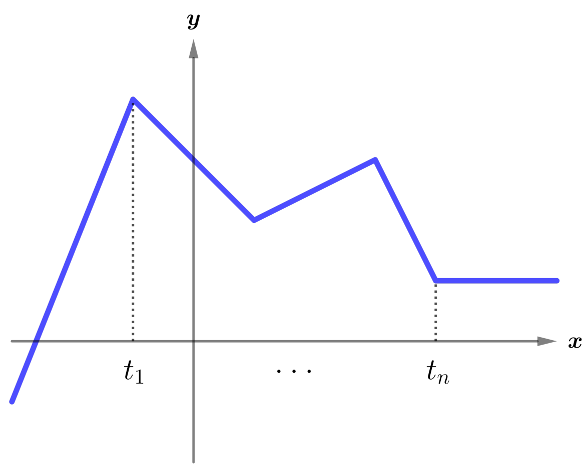
Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2019/caderno_de_questoes%20_2_dia_caderno_5_amarelo_aplicacao_regular.pdf>. Acesso em: 03 de mar 2021.

Diferente da primeira situação, busca-se explorar nessa questão mais o aspecto gráfico do que o algébrico. Com algum conhecimento de função afim, conclui-se que a Faixa 1 representa um segmento de reta horizontal, parte do gráfico de uma função constante. Com isso, elimina-se a alternativa E. As Faixas 2 e 3 possuem tarifas, por metro cúbico, iguais a 3 e 6 reais, respectivamente, tais valores determinam as inclinações dos segmentos de reta correspondentes. Então, da Faixa 2 para a Faixa 3 há um aumento na inclinação. Com isso, eliminam-se as alternativas B (a inclinação diminui), C (a tarifa da Faixa 3 é constante) e D (as tarifas das Faixas 2 e 3 não são iguais). A resposta correta é, portanto, a alternativa A.

Apresentaremos a seguir a definição de funções poligonais, bem como alguns tipos especiais dessas funções, a saber, função modular, função rampa e função degrau, as quais terão papel fundamental na elaboração do produto educacional. Buscamos com nossa proposta promover o aprendizado de funções poligonais a partir de uma situação real e próxima ao cotidiano dos estudantes.

Definição 1.1. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função poligonal se existem $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ reais tais que, para cada um dos $n + 1$ intervalos por eles determinados, f coincide com uma função afim[7]. Se $f_i(t_i) = f_{i-1}(t_i),\ i = 1, \ldots, n$, ou seja, não há descontinuidades, o gráfico de f é uma linha poligonal (LIMA, 2013), como na Figura 2.

Figura 2 – Gráfico de uma função poligonal



Fonte: Elaborada pelo autor.

Um dos exemplos mais clássicos e abordados na Educação Básica de funções poligonais é a função modular, definida a partir do módulo de um número real. O módulo de um número real x, denotado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} -x & , \text{ se } x < 0 \\ x & , \text{ se } x \geq 0 \end{cases} .$$

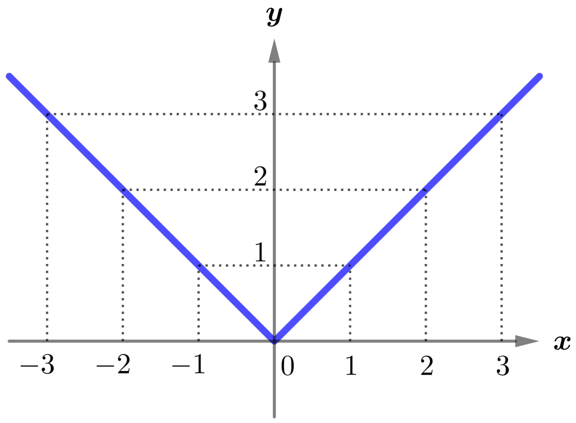
[7] Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é dita *função afim* quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax + b \in \mathbb{R}$, em que a e b são números reais dados. Notamos que quando $a = 0$, a aplicação associa todo elemento do domínio ao elemento b, sendo essa função em particular denominada *função constante*

Alternativamente pode-se escrever $|x| = \max\{x, -x\}$, ou seja, $|x|$ será igual ao maior dos valores x ou $-x$, uma vez que pelo menos um deles será maior ou igual a zero. Com efeito, se x é positivo, $-x$ é negativo e x será o maior dos dois valores; se x é negativo, $-x$ é positivo e este será o maior dos dois valores. O caso $x = 0$ é indiferente, pois tanto 0 quanto -0 são nulos. Assim, tem-se, por exemplo, que $|-4| = -(-4) = 4 = |4| = \max\{-4, 4\}$.

Também chamado de *valor absoluto*, o módulo de um número real está associado à noção de distância. Podemos interpretar o termo $|x - a|$ como sendo a distância entre os números x e a.

Definição 1.2. Uma aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ recebe o nome de *função módulo* ou *função modular* quando a cada x associa o elemento $|x|$, isto é, $f(x) = |x|$. Seu gráfico encontra-se na Figura 3.

Figura 3 – Gráfico da função modular



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como o domínio da função modular está dividido em dois subintervalos disjuntos, de forma que a função restrita a cada um desses subintervalos ($x < 0$ e $x \geq 0$) coincide com uma função afim, trata-se de uma função poligonal. O mesmo ocorre com funções do tipo $|x - a|,\ a \in \mathbb{R}$. Pode-se estender este raciocínio para a soma $|x - a| + |x - b|$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, cujo domínio subdivide-se em três intervalos: $x < a$, $a \leq x < b$ e $x \geq b$, em que a referida função restrita a cada um desses subintervalos é uma função afim, a saber, $-2x + a + b$, $b - a$ e $2x - a - b$, respectivamente. Generalizando tal argumentação, temos que uma função cuja lei de formação é uma combinação linear[8] de n funções modulares é uma função poligonal, cujo domínio está subdividido em $n + 1$ intervalos.

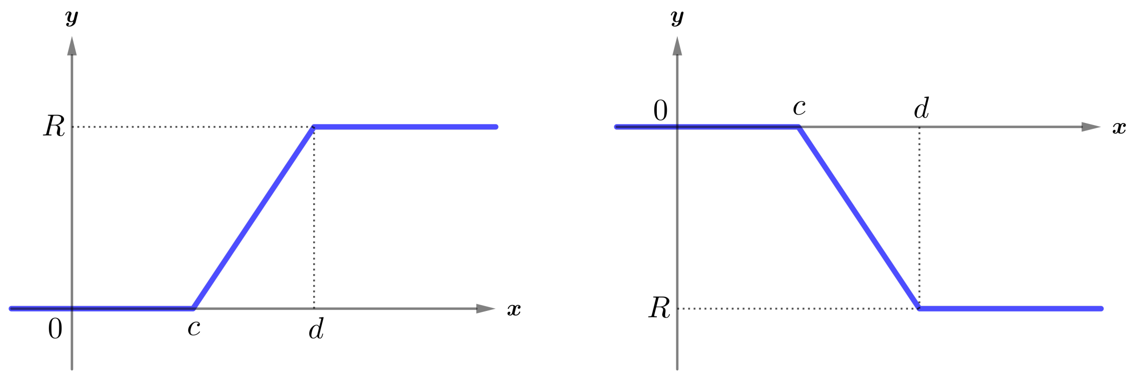
Destacamos que apesar de a função poligonal ter sido definida em $\mathbb{R}$, denominaremos também de poligonais as funções poligonais restritas a intervalos abertos ou fechados de $\mathbb{R}$, situações estas presentes no produto educacional.

[8] $k_1|x - a_1| + \cdots + k_n|x - a_n|,\ k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Demonstraremos ainda nesta seção que toda função poligonal pode ser escrita dessa forma (Teorema 1.1). Esse resultado permite expressar as funções poligonais de uma maneira mais compacta. Para demonstração do Teorema 1.1 definiremos *funções rampas*.

Definição 1.3. Chama-se *função rampa* uma função poligonal $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cujo gráfico é composto por duas semirretas horizontais (patamares), em $(\infty, c]$ e $[d, \infty)$, com $c < d$, onde assume, respectivamente, os valores 0 e R, ligados por um segmento de reta oblíquo (rampa), e que apresenta-se sob uma das formas contidas na Figura 4 (LIMA, 2013).

Figura 4 – Protótipos de função rampa



Elaborada pelo autor.

A função rampa pode ser escrita como:

$$r(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < c \\ \frac{R}{d-c}(x-c) & , \text{ se } c \leq x < d \\ R & , \text{ se } x \geq d \end{cases} .$$

O gráfico de uma função rampa por si só dá margem a uma interessante interpretação: um certo fenômeno possui um estado inicial nulo, em seguida (de)cresce linearmente, estabilizando-se logo após.

A proposição a seguir mostra como escrever uma função rampa, de forma mais compacta, usando funções modulares.

Proposição 1.1. Toda função rampa $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita sob a forma

$$r(x) = \frac{m}{2}\Big[d - c + |x-c| - |x-d|\Big],$$

onde $m = \frac{R}{d-c}$ é a inclinação (coeficiente angular) da rampa.

Demonstração. Faremos a análise para cada intervalo do domínio. Se

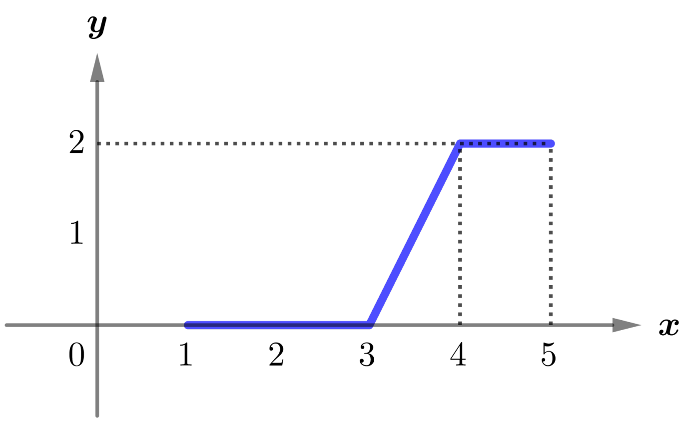
- $x < c$, $r(x) = \dfrac{m}{2}\Big[d - c + (-x + c) - (-x + d)\Big] = 0;$
- $c \leq x < d$, $r(x) = \dfrac{m}{2}\Big[d - c + (x - c) - (-x + d)\Big] = m(x - c);$
- $x \geq d$, $r(x) = \dfrac{m}{2}\Big[d - c + (x - c) - (x - d)\Big] = m(d - c) = R.$

□

A seguir apresentaremos uma série de exemplos e resultados que mostram como escrever de outra maneira funções poligonais definidas em um intervalo fechado ou aberto à direita.

Exemplo 1.1. A função rampa $r_1 : [1, 5] \to \mathbb{R}$, cujo gráfico encontra-se na Figura 5, tem seu patamar inferior terminando no ponto $(3, 0)$ e o superior iniciando no ponto $(4, 2)$. A inclinação da rampa que os conecta é dada por $\frac{2}{4-3} = 2$.

Figura 5 – Exemplo de rampa crescente



Elaborada pelo autor.

Portanto, a função pode ser escrita da forma

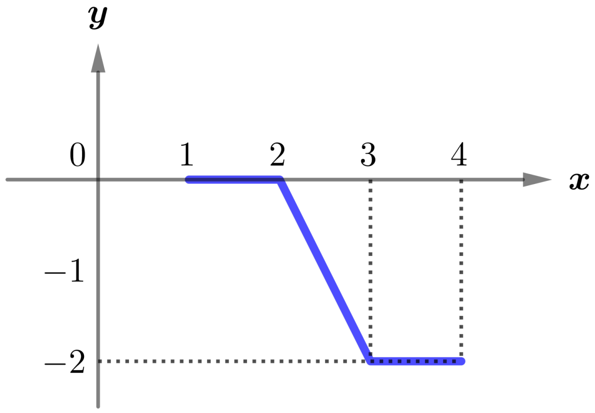
$$r_1(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } 1 \leq x < 3 \\ 2x - 6 & , \text{ se } 3 \leq x < 4 \\ 2 & , \text{ se } 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

ou, segundo a Proposição 1.1,

$$r_1(x) = \frac{2}{2}\Big(4 - 3 + |x - 3| - |x - 4|\Big) = 1 + |x - 3| - |x - 4|.$$

Exemplo 1.2. A função rampa $r_2 : [1, 4] \to \mathbb{R}$, cujo gráfico encontra-se na Figura 6, tem seu patamar superior terminando no ponto $(2, 0)$ e o inferior iniciando no ponto $(3, -2)$. A inclinação da rampa que os conecta é dada por $\frac{-2}{3-2} = -2$.

Figura 6 – Exemplo de rampa decrescente



Elaborada pelo autor.

Portanto, a função pode ser escrita da forma

$$r_2(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } 1 \leq x < 2 \\ -2x+4 & , \text{ se } 2 \leq x < 3 \\ -2 & , \text{ se } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

ou, segundo a Proposição 1.1,

$$r_2(x) = \frac{-2}{2}\Big(3 - 2 + |x-2| - |x-3|\Big) = -1 - |x-2| + |x-3|.$$

O próximo teorema enuncia o fato de que uma função poligonal, sem descontinuidades, pode ser escrita utilizando funções rampas.

Teorema 1.1. Toda função poligonal sem descontinuidades definida em um intervalo $[a, b]$ pode ser expressa como uma soma de uma função constante (que pode ser vista como uma função rampa de inclinação zero) com um número finito de funções rampas (LIMA, 2013).

Demonstração. Por definição, uma função poligonal $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ coincide com uma afim em cada um dos intervalos $[t_i, t_{i+1}]$, com $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} = b$. Denotando-se f_i para cada uma dessas componentes afins, podemos escrevê-las da forma $f_i(x) = m_i(x - t_i) + f(t_i)$. Por outro lado, para cada f_i podemos associar uma função rampa r_i:

$$r_i(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < t_i \\ m_i(x-t_i) & , \text{ se } t_i \leq x < t_{i+1} \\ f(t_{i+1}) - f(t_i) & , \text{ se } x \geq t_{i+1} \end{cases}.$$

Afirmamos que $f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} r_i(x)$. Com efeito, para

- $t_1 \leq x < t_2 : f(x) = f(a) + r_1(x) + \sum_{i=2}^{n} 0 = m_1(x - t_1) + f(t_1) = f_1(x).$

- $t_2 \leq x < t_3 : f(x) = f(a) + r_1(x) + r_2(x) + \sum_{i=3}^{n} 0 = f(t_1) + f(t_2) - f(t_1) + m_2(x - t_2) = m_2(x - t_2) + f(t_2) = f_2(x).$

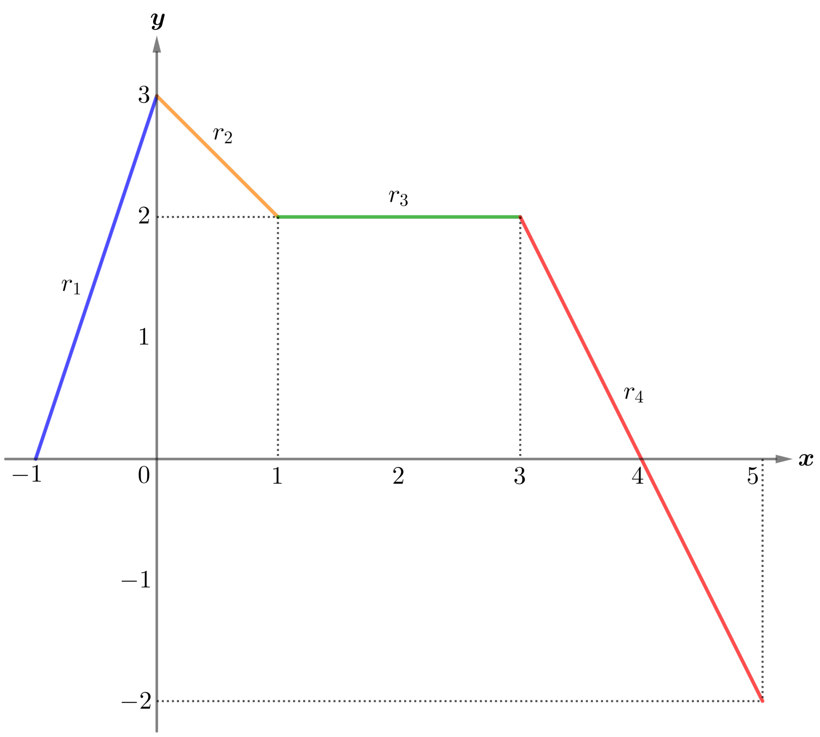
  $\vdots$

- $t_i \leq x < t_{i+1} : f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} r_i = f(t_1) + \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(t_{i-1})] + m_i(x - t_i) = m_i(x - t_i) + f(t_i) = f_i(x).$

$\square$

Exemplo 1.3. Considere a função poligonal $f : [-1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, cujo gráfico encontra-se na Figura 7. Segundo o Teorema 1.1, podemos escrevê-la como a soma de uma constante e um número finito de funções rampas, estas, denotadas por r_1, r_2, r_3 e r_4, correspondendo a cada componente afim da poligonal.

Figura 7 – Exemplo de função poligonal



Elaborada pelo autor.

De fato, temos:

- $f(-1) = 0$

- $r_1(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < -1 \\ 3x+3 & , \text{ se } -1 \leq x < 0 \\ 3 & , \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

- $r_2(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < 0 \\ -x & , \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ -1 & , \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$

- $r_3(x) = 0, \text{ se } -1 \leq x \leq 5$

- $r_4(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < 3 \\ -2x+6 & , \text{ se } 3 \leq x < 5 \\ -4 & , \text{ se } x \geq 5 \end{cases}$

Portanto, para todo $x \in [-1, 5]$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-1) + r_1(x) + r_2(x) + r_3(x) + r_4(x) \\ &= \begin{cases} 3x+3 & , \text{ se } -1 \leq x < 0 \\ -x+3 & , \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ 2 & , \text{ se } 1 \leq x < 3 \\ -2x+8 & , \text{ se } 3 \leq x \leq 5 \end{cases} . \end{aligned}$$

O teorema anterior provou que toda função poligonal pode ser escrita como soma de funções rampas, as quais, por sua vez, são escritas como soma de uma função constante e funções modulares (Proposição 1.1). Reunindo-se ambos os fatos, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.2. Toda função poligonal sem descontinuidades definida em um intervalo $[a, b]$ pode ser expressa como uma soma de uma constante e de um número finito de funções modulares.

□

Exemplo 1.4. Utilizaremos a mesma função do Exemplo 1.3, juntamente com o Teorema 1.2, para escrever a expressão da poligonal f como soma de uma constante e de funções modulares. Do gráfico da Figura 7, obtemos:

- $f(-1) = 0$

- $r_1(x) = \frac{3}{2}\big[0 - (-1) + |x - (-1)| - |x - 0|\big] = \frac{3}{2}\big(1 + |x+1| - |x|\big)$

- $r_2(x) = \frac{-1}{2}\big[1 - 0 + |x - 0| - |x - 1|\big] = -\frac{1}{2}\big(1 + |x| - |x-1|\big)$

- $r_3(x) = 0$

- $r_4(x) = \frac{-2}{2}\big(5 - 3 + |x-3| - |x-5|\big) = -\big(2 + |x-3| - |x-5|\big)$

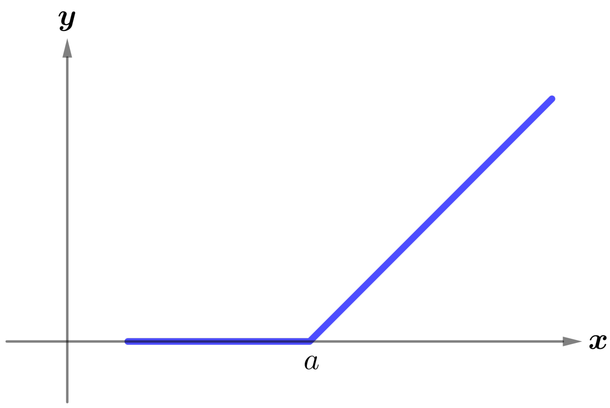
Portanto, para todo $x \in [-1, 5]$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-1) + r_1(x) + r_2(x) + r_3(x) + r_4(x) \\ &= -1 + \tfrac{3}{2}|x+1| - 2|x| + \tfrac{1}{2}|x-1| - |x-3| + |x-5|. \end{aligned}$$

Em situações como a do cálculo do Imposto de Renda, da conta de água ou de gás, a última faixa salarial ou de consumo é ilimitada, isto é, não há limite superior de salário, de volume de água ou de gás consumido. Para atender a esses casos, definimos a *função rampa infinita*, como a seguir.

Definição 1.4. Chama-se *função rampa infinita* uma função $r_\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se anula em $(-\infty, a]$ e coincide com uma função afim em (a, ∞), como esboça o gráfico da Figura 8.

Figura 8 – Rampa infinita



Elaborada pelo autor.

A função rampa infinita pode ser escrita como

$$r_\infty(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < a \\ m(x-a) & , \text{ se } x \geq a \end{cases},$$

e também utilizando função modular conforme a proposição a seguir.

Proposição 1.2. Toda função rampa infinita definida em $\mathbb{R}$ pode ser escrita como

$$r_\infty(x) = \frac{m}{2}\Big[|x-a| + x - a\Big].$$

Demonstração. Faremos a análise para cada intervalo do domínio. Se

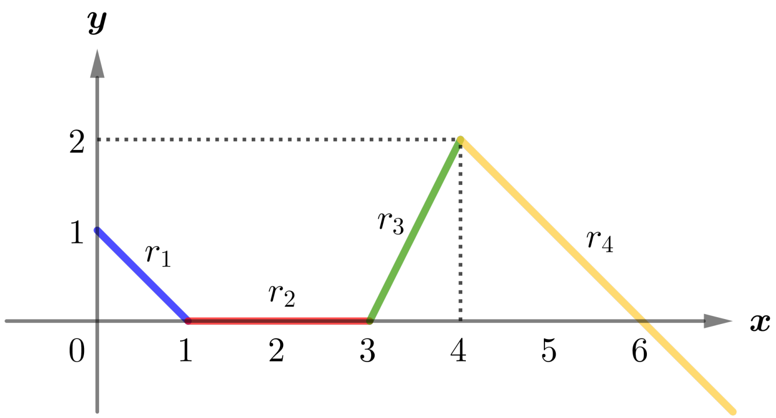
- $x < a$, $r_\infty(x) = \dfrac{m}{2}\Big[(-x+a) + x - a\Big] = 0;$
- $x \geq a$, $r_\infty(x) = \dfrac{m}{2}\Big[(x-a) + x - a\Big] = m(x-a).$

□

O Teorema 1.1 continua válido quando a última componente é uma rampa infinita, ou seja, toda poligonal aberta à direita pode ser escrita como uma soma de um número finito de funções rampas, sendo a última delas uma rampa infinita. O próximo exemplo ilustra este resultado.

Exemplo 1.5. Considere a função poligonal $f : [0, \infty[$, que é aberta à direita e cujo gráfico está representado na Figura 9.

Figura 9 – Exemplo de função poligonal aberta à direita



Elaborada pelo autor.

Obtemos:

- $f(0) = 1$
- $r_1 = \frac{-1}{2}\big(1 - 0 + |x - 0| - |x - 1|\big) = -\frac{1}{2}\big(1 + |x| - |x - 1|\big)$
- $r_2 = 0$
- $r_3 = \frac{2}{2}\big(4 - 3 + |x - 3| - |x - 4|\big) = 1 + |x - 3| - |x - 4|$
- $r_4 = -\frac{1}{2}\big(|x - 4| + x - 4\big)$

Portanto, para todo $x \in [0, \infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + r_1(x) + r_2(x) + r_3(x) + r_4(x) \\ &= f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}|x - 1| + |x - 3| - \frac{3}{2}|x - 4|. \end{aligned}$$

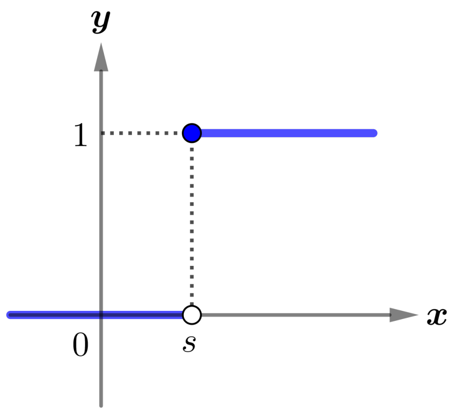
Alternativamente às funções rampas, a função degrau – definida a seguir – também cumpre o papel de escrever, de forma mais sintetizada, funções poligonais. Os mesmos resultados enunciados e demonstrados para as funções rampas serão feitos para as funções degraus.

Definição 1.5. Fixada uma constante real s, a função $u_s : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ dada por

$$u_s(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < s \\ 1 & , \text{ se } x \geq s \end{cases}$$

é chamada *função degrau* ou *função degrau unitário*, cujo gráfico está esboçado na Figura 10.

Figura 10 – Gráfico da função degrau



Elaborada pelo autor.

De maneira mais simples, podemos dizer que o domínio da função degrau é dividido em dois subconjuntos de valores: (1) menores que um valor fixo e (2) iguais ou maiores que o mesmo valor fixo, atribuindo ao primeiro grupo o valor de saída 0 e, ao segundo, 1.

A proposição a seguir mostra uma maneira de escrever uma função rampa como combinação de funções degraus.

Proposição 1.3. Sejam r e u_s, respectivamente, as funções rampa e degrau, como definidas anteriormente. Tem-se

$$r(x) = m[(x - c)u_c - (x - d)u_d].$$

Demonstração. Com efeito, analisando cada intervalo do domínio, temos para

- $x < c,\ u_c = u_d = 0$ e então $r(x) = 0$;
- $c \leq x < d,\ u_c = 1,\ u_d = 0$ e então $r(x) = m(x - c)$;
- $x \geq d,\ u_c = u_d = 1$ e então $r(x) = m(d - c) = R$.

□

Exemplo 1.6. As funções rampas dos Exemplos 1.1 e 1.2 podem ser reescritas, de acordo com a Proposição 1.3, utilizando funções degraus, respectivamente, por

$$r_1(x) = 2[(x-3)u_3 - (x-4)u_4]$$

e

$$r_2(x) = -2[(x-2)u_2 - (x-3)u_3].$$

Assim como podemos escrever uma função rampa em termos de função degrau, o mesmo ocorre com uma função rampa infinita, fato este presente na seguinte proposição.

Proposição 1.4. A função rampa infinita, definida anteriormente, pode ser escrita em termos de função degrau como

$$r_\infty(x) = m(x-a)u_a.$$

Demonstração. Com efeito, analisando cada intervalo do domínio, se

- $x < a$, então $u_a = 0$ e $r_\infty(x) = 0$;
- $x \geq a$, então $u_a = 1$ e $r_\infty(x) = m(x-a)$.

□

Exemplo 1.7. Utilizaremos a mesma função do Exemplo 1.5, juntamente com as Proposições 1.3 e 1.4, para escrever a expressão da poligonal f (aberta à direita) como soma de uma constante e de funções degraus.

Do gráfico da Figura 9, obtemos:

- $f(0) = 1$
- $r_1(x) = -1\big[xu_0 - (x-1)u_1\big]$
- $r_2(x) = 0$
- $r_3(x) = 2\big[(x-3)u_3 - (x-4)u_4\big]$
- $r_1(x) = -1(x-4)u_4$

Portanto, para todo $x \in [0, \infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + r_1(x) + r_2(x) + r_3(x) + r_4(x) \\ &= 1 - \big[xu_0 - (x-1)u_1\big] + 2\big[(x-3)u_3 - (x-4)u_4\big] - (x-4)u_4 \\ &= 1 - xu_0 + (x-1)u_1 + 2(x-3)u_3 - 3(x-4)u_4. \end{aligned}$$

Os modelos progressivos de cobrança, abordados no capítulo seguinte, podem ser estudados a partir de funções rampas e/ou funções degraus. Os resultados apresentados nessa seção mostram como as funções poligonais podem ser escritas como somas de funções rampas (Teorema 1.1) e também como as funções rampas podem ser expressas algebricamente usando-se as funções modulares e degraus. Tais resultados serão utilizados para as possíveis soluções da terceira parte do Produto Educacional desenvolvido nesse estudo, o qual será apresentado detalhadamente no próximo capítulo.

2 CARACTERIZAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

"Le fondement de toute éducation c'est l'amour."

Pe. Pierre Vigne[1]

Este capítulo visa qualificar o produto educacional no âmbito da conta de água e nas perspectivas pedagógicas apresentadas no capítulo 1. Na primeira seção, será feita uma exposição contendo aspectos legais e técnicos referentes à conta de água, de modo a prover informações necessárias ao entendimento do modelo de cobrança e das características da conta de água. Na seção seguinte, traremos as perspectivas da Resolução de Problemas e das Novas Tecnologias frente à proposta feita. Na terceira seção, apresentaremos o produto educacional em si, que é composto por três atividades sequenciais. Por fim, faremos uma sugestão de solução para cada uma das atividades propostas.

2.1 Análise da Conta de Água

Esta seção é dedicada inteiramente à apresentação e à análise dos aspectos principais relacionados à conta de água, visando à construção do produto educacional: um simulador de fatura, o qual é uma planilha eletrônica que detalha o consumo mensal de água em certo imóvel, respeitando a estrutura tarifária adotada pela empresa prestadora do serviço de abastecimento de água e esgotamento sanitário da região na qual o imóvel está localizado.

A construção do simulador visa oportunizar aos estudantes a mobilização de conhecimentos matemáticos, em especial as funções poligonais, ao aplicá-los com apoio de tecnologias digitais em seus contextos de vida. Assim, não se pretende imitar a fatura original, mas provocar reflexões sobre como a Matemática pode auxiliá-los na compreensão de uma política tarifária, bem como auxiliá-los a desenvolver um pensamento crítico ambiental e financeiro.

Ressaltamos que a escolha da empresa que terá sua conta de água estudada, foi baseada apenas pelo critério geográfico. A conta de água será apresentada, bem como sua estrutura geral, juntamente com um suporte teórico legal da conta de água da Empresa Baiana de Águas e Saneamento S.A. (Embasa). A estrutura tarifária e os preços dos serviços da Embasa são regulados pela Agência Reguladora de Saneamento Básico do Estado da Bahia (Agersa).

[1] O fundamento de toda educação é o amor.

2.1.1 A Fatura

A fatura de água é o documento, recebido e pago pelo consumidor, que contém as informações de registro e de leitura do hidrômetro, os dados do imóvel, seu endereço, a descrição do consumo, o histórico de consumo recente, os parâmetros de qualidade da água fornecida (cor, turbidez, cloro, coliformes totais e *Escherichia Coli*) e os impostos cobrados. Ela pode ser enviada pelo correio, ou ser emitida instantaneamente por um agente, mediante leitura in loco do hidrômetro. Um modelo de leitura e de entrega simultânea encontra-se a seguir, no qual foram destacadas as seguintes informações:

1. **Matrícula** - é o número do registro de um imóvel na Embasa. É composta por 9 números e o último algarismo corresponde ao dígito verificador, quando necessário.

2. **Inscrição** - conjunto de dados numéricos que permite a localização física do imóvel.

3. **Período de consumo** - período em que foi realizada a apuração do consumo, corresponde ao intervalo entre as datas das leituras atual e anterior.

4. **Número do hidrômetro** - é o número que consta no equipamento destinado a medir e registrar, contínua e cumulativamente, o volume de água fornecido ao imóvel.

5. **Leitura Atual e Leitura Anterior** - leituras do hidrômetro, em metro cúbico (m^3), realizadas nas datas de apuração do consumo no mês atual e no mês anterior, respectivamente.

6. **Dias de consumo** - quantidade de dias referentes à diferença entre a data da leitura atual e a data da leitura anterior.

   Data da leitura - data em que foi apurada a leitura do hidrômetro.

   Data da fatura/emissão - data em que a conta foi emitida.

7. **Tarifa** - Valor a ser pago pelo serviço, conforme tipo de enquadramento ou atividade do imóvel.

8. **Consumo Médio Mensal / Ligação** - É o consumo médio individual de cada imóvel ou unidade usuária.

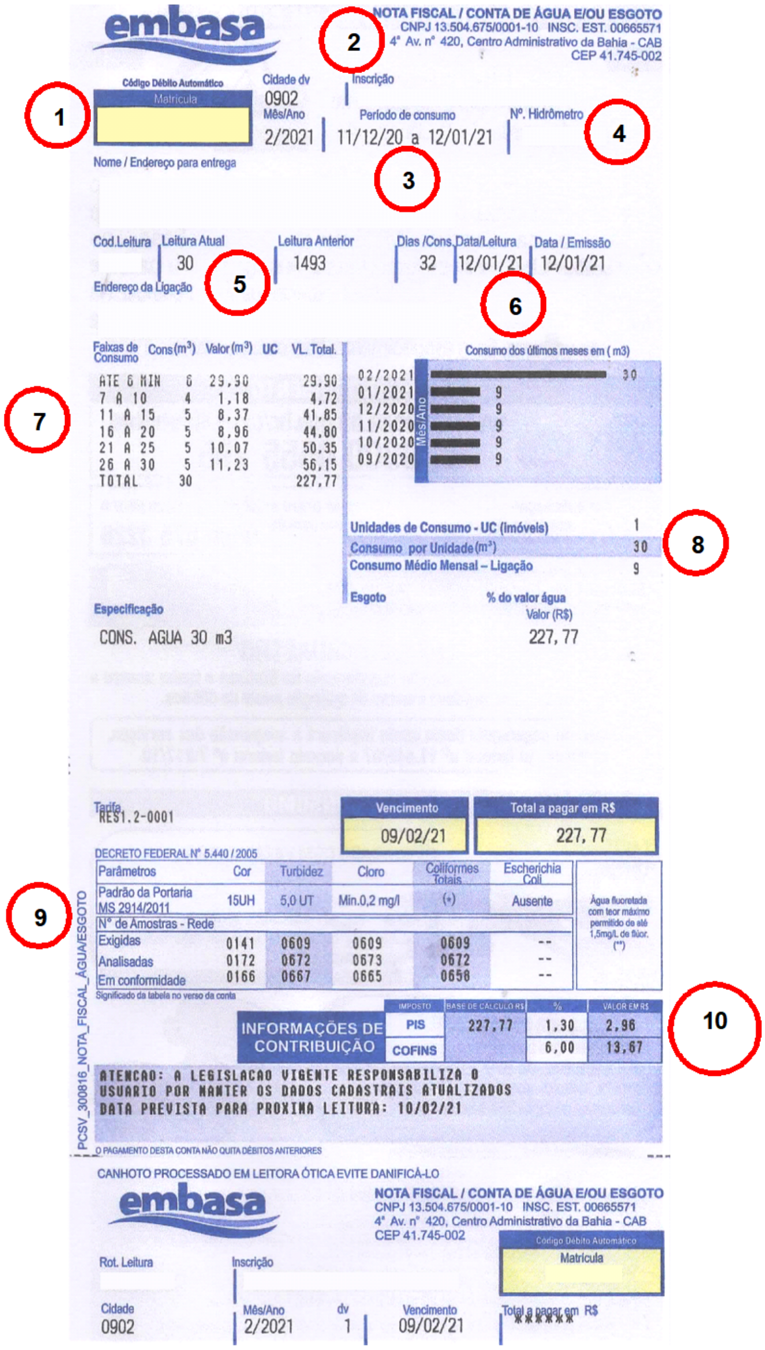
   Unidades de Consumo (UC) - imóvel ou subdivisão de imóvel, com numeração própria, caracterizada como unidade autônoma de consumo, de qualquer categoria, atendida por ramal próprio ou compartilhado.

   Consumo Médio por Unidade (m^3) - Consumo total dividido pelo número de unidades de consumo.

   Percentual de Esgoto[2] - Percentual fixo sobre o valor referente ao consumo de água, conforme decreto estadual nº 7.765/2000.

[2] Vide Tabela 1, página 45.

Figura 11 – Conta de água



Fonte: Elaborada pelo autor.

9. **Parâmetros de qualidade da água** - Atendimento ao Decreto Federal n° 5.440/2005 e Portaria MS n° 2.914/2011.

10. **PIS/COFINS**[3] - Tributos cobrados de acordo com a Lei Federal n° 12.741/2012.

O hidrômetro é um aparelho de precisão utilizado em todo o mundo para medir o

[3] Programa de Integração Social (PIS)/Contribuição para Financiamento da Seguridade Social (COFINS). Estes tributos serão detalhados na subseção 2.1.4.

consumo de água. Antes de ser instalado, ele passa por vários testes de resistência física e de confiabilidade de medição validados pelo Instituto Nacional de Metrologia (Inmetro).

O aparelho é dotado de uma turbina que se move com a passagem da água. Ao girar, a turbina coloca em movimento um sistema de relojoaria que faz o mostrador indicar com precisão o volume de água que passa pela tubulação (EMBASA, 2018).

Figura 12 – Hidrômetro

Fonte: Embasa.

A leitura do hidrômetro é realizada uma vez por mês, sempre no mesmo dia ou em datas próximas e os leituristas registram o valor indicado no marcador. Apenas os números pretos são considerados na leitura, indicando a quantidade de água consumida em metros cúbicos (equivalente a mil litros). Os números vermelhos não são considerados na cobrança. O consumo mensal é representado pela diferença entre a leitura atual e a leitura obtida do mês anterior.

2.1.2 Modelos Progressivos de Cobrança

A base legal para a cobrança de tarifas é dada por leis e decretos federais e estaduais. A Lei nº 11.445/2007, conhecida como Lei Nacional de Saneamento Básico, estabelece as diretrizes nacionais e a política federal de saneamento básico. Em seu Artigo 30, dispõe sobre a estrutura de remuneração e de cobrança dos serviços públicos de saneamento básico, os quais consideram "categorias de usuários, distribuídas por faixas ou quantidades crescentes de utilização ou de consumo. (BRASIL, 2017)"

O Decreto Federal nº 7.217/2010, o qual estabelece normas para a execução da lei supracitada, dispõe em seu Artigo 8º, § 2º, que "a remuneração pela prestação dos serviços públicos de abastecimento de água pode ser fixada com base no volume consumido de água, podendo ser progressiva, em razão do consumo. (BRASIL, 2010)" A legislação, portanto, autoriza e fornece subsídios para a estrutura tarifária da Embasa, baseada em modelos progressivos de cobrança. Tais modelos seguem o regime de tributação progressiva, no qual o consumo é distribuído progressivamente em cada faixa de consumo e o valor a ser pago em cada uma é calculado multiplicando-se este consumo pela tarifa correspondente a cada faixa.

2.1.3 Estrutura Tarifária

A estrutura tarifária corresponde à forma de cobrança de tarifas dos serviços públicos de água e de saneamento. Além de considerar o perfil dos imóveis, dividindo-os em categorias, ela visa "a obtenção de uma tarifa média que possibilite o equilíbrio econômico-financeiro da companhia de saneamento básico e que assegure o adequado atendimento aos usuários de menor consumo, com base em tarifa mínima" (EMBASA, 2018, p. 50). O modelo garante o acesso aos serviços de abastecimento de água e de esgotamento sanitário para todas as camadas sociais.

O valor total de uma fatura divide-se em tarifa mínima, volume consumido de água e tarifa de esgoto. A tarifa mínima de água, prevista no inciso III do Art. 30 da Lei 11.445/2007,

> é o valor mínimo a ser pago, pelo usuário, pelo serviço de abastecimento de água prestado num determinado período, [...] uma vez que as despesas decorrentes dos serviços prestados não cessam e são disponibilizados 24 horas por dia. Por isso, mesmo que não haja nenhum consumo num imóvel por qualquer período, o responsável está sujeito ao pagamento da tarifa mínima, [...] que compreende a disponibilidade de 6 metros cúbicos (m^3) ou 6.000 litros (ℓ) de água por mês (EMBASA, 2018, p. 52-3).

Todo consumo que ultrapassar o mínimo estabelecido, será considerado como excedente e terá tarifa diferenciada, por faixa, para cada metro cúbico.

O serviço de esgotamento sanitário, previsto em lei, é tão importante quanto o acesso à água de qualidade, por prezar pela saúde pública, pela conservação dos recursos naturais e pela proteção ao meio ambiente. A tarifa de esgoto é determinada por lei para, juntamente com a tarifa de água, cobrir os custos operacionais de coleta, de transporte e de tratamento do esgoto doméstico, bem como cobrir os custos de manutenção da rede coletora de esgoto, de forma a garantir sua adequada operação (EMBASA, 2018). A cobrança da tarifa de esgoto é determinada pela Lei Nacional de Saneamento Básico e regulamentada pelo Decreto Lei nº 7.217/2010. O valor da tarifa na Bahia, para usuários de redes coletoras, foi determinado pela Lei Estadual nº 7.307/1998, regulamentada pelo Decreto Estadual nº 7.765/2000. A Tabela 1 mostra a porcentagem da tarifa de esgoto incidente sobre o valor da conta de abastecimento de água, considerando o tipo de imóvel.

2.1.3.1 Categorias de imóveis para cobrança

A tabela tarifária depende do tipo de imóvel que se beneficia dos serviços de abastecimento de água e de esgotamento sanitário. Assim, existem tarifas específicas para cada tipo de imóvel com critérios que vão de sua estrutura física à sua finalidade enquanto imóvel. Conforme o Artigo 13 da Lei nº 8.987/1995, que dispõe sobre o regime de concessão e permissão da prestação de serviços públicos, "as tarifas poderão ser diferenciadas em função das características técnicas e dos custos específicos provenientes do atendimento aos distintos segmentos de usuários. (BRASIL, 1995)"

Tabela 1 – Porcentagens da Tarifa de Esgoto

Tipos de moradia	Taxa
Sistemas Convencionais (Capital)	80%
Sistemas Convencionais (Interior)	80%
Sistemas Independentes operados pela Embasa (Interior)	45%
Conjuntos Habitacionais, com sistema próprio e operado pela Embasa	45%
Sistemas Condominiais (situações especiais de operações por quadras)	45%

Fonte: Embasa.

As classificações dos imóveis foram obtidas e trazidas, na íntegra, da página da Embasa na *internet*[4]. As unidades atendidas com os serviços de abastecimento de água e/ou de esgotamento sanitário estão divididas nas seguintes categorias:

- **Residencial**: Imóveis para moradia, incluindo as instalações de uso comum em condomínios, desde que não haja exploração com fins comerciais. Essa categoria está subdividida em residencial normal/veraneio, residencial intermediária e residencial social.
- **Serviços, comércio e outras atividades**: Imóveis nos quais são exercidas atividades comerciais ou de prestação de serviços.
- **Industrial**: Imóveis onde são exercidas atividades inerentes à transformação de matéria-prima em bens de consumo, sem finalidade de comércio varejista.
- **Pública**: Imóveis utilizados por órgãos ou entidades da administração pública direta e indireta, autarquias e fundações das esferas federal, estadual ou municipal que não exerçam atividades econômicas.

As categorias podem ainda ser divididas em subcategorias, considerando as características, porte e utilização dos imóveis. A categoria residencial, por exemplo, pode ser subdividida em:

- **Residencial Social**: Residências cadastradas e enquadradas no Programa Bolsa Família[5].

[4] http://old.embasa.ba.gov.br/centralservicos/index.php/tarifas?informacoes=sim. Acesso em: 30 jan. 2020.
[5] Esta categoria possui tarifas menores com relação às demais, por atender aos usuários de baixa renda, possibilitando o acesso de famílias carentes aos serviços de saneamento básico. Podem ser beneficiados pela tarifa os usuários inscritos no Programa Bolsa Família, depois de avaliação realizada pela empresa.

- **Residencial Intermediária**: Residências com as seguintes características:

  1) Área construída menor ou igual a 60 m².

  2) Padrão COELBA[6] mono ou bifásico.

  3) Dotadas de no máximo 2 (dois) banheiros.

  4) Com até no máximo 8 (oito) pontos de utilização de água.

  5) Inexistência de piscina.

- **Residencial Normal / Veraneio**: Normal - qualquer residência não enquadrada nas categorias Residencial Social e Residencial Intermediária; Veraneio - residências localizadas nas cidades balnearias, estações termais com utilização sazonal.

- **Filantrópicas**: Entidades Filantrópicas autorizadas pela Diretoria Executiva (conforme norma complementar à RD 263/92).

As tarifas da Tabela 2 sofrem reajustes periódicos. Sua versão atual, exibida a seguir, vigora desde 12 de junho de 2019.

Tabela 2 – Tabela Tarifária

Faixas de Consumo (m³)	Residencial Social	Residencial Intermediária	Residencial Normal/Veraneio	Filantrópica
0 a 6	13,40	26,40	29,90	13,40
7 a 10	0,83	1,07	1,18	0,83
11 a 15	5,91	6,78	8,37	5,91
16 a 20	6,43	7,34	8,96	6,43
21 a 25	9,59	9,63	10,07	9,59
26 a 30	10,69	10,73	11,23	10,69
31 a 40	11,82	11,82	12,35	11,82
41 a 50	13,55	13,55	13,55	13,55
> 50	16,29	16,29	16,29	16,29

Fonte: Embasa.

Apresentamos as informações técnicas que entendemos necessárias para construção do simulador de fatura, embora haja outras categorias e tarifas, que podem ser consultadas no *site* da Embasa.

[6] Companhia de Eletricidade do Estado da Bahia.

2.1.4 Contribuições Tributárias

O § 5º do Artigo 150 da Constituição diz que "a lei determinará medidas para que os consumidores sejam esclarecidos acerca dos impostos que incidam sobre mercadorias e serviços" (BRASIL, 1988). Conforme o Artigo 1º da Lei nº 12.741/2012, que dispõe sobre as medidas de esclarecimento ao consumidor de que trata o parágrafo supramencionado:

> Emitidos por ocasião da venda ao consumidor de mercadorias e serviços, em todo território nacional, deverá constar, dos documentos fiscais ou equivalentes, a informação do valor aproximado correspondente à totalidade dos tributos federais, estaduais e municipais, cuja incidência influi na formação dos respectivos preços de venda.

Especifica ainda o § 3º do mesmo artigo acima, que "a informação de que trata este artigo poderá constar de painel afixado em local visível do estabelecimento, ou por qualquer outro meio eletrônico ou impresso, de forma a demonstrar o valor ou percentual, ambos aproximados, dos tributos incidentes sobre todas as mercadorias ou serviços postos à venda. (BRASIL, 2012)" Assim sendo, devem constar na fatura de água as informações sobre PIS e COFINS.

PIS

O Programa de Integração Social (PIS), instituído pela Lei Complementar nº 7/1970, alterada pelas Leis Complementares nº 17/1973 e nº 26/1975, e o Programa de Formação do Patrimônio do Servidor Público (PASEP), instituído pela Lei Complementar nº 8/1970, são contribuições sociais de natureza tributária, criadas com o objetivo de integrar os trabalhadores na vida e no desenvolvimento das empresas. Com a nova Constituição Federal de 1988, passaram a ter a finalidade de financiar o pagamento do seguro-desemprego e do abono anual aos trabalhadores que recebam até dois salários mínimos, além de financiar programas de desenvolvimento econômico, por meio do Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES). (SILVA, 2005)

COFINS

A Contribuição para Financiamento da Seguridade Social (COFINS) foi criada pela Lei Complementar nº 70/1991, alterada pela Lei nº 9.718/1998, e é uma contribuição federal, de natureza tributária, destinada exclusivamente às despesas com atividades-fins das áreas de saúde, previdência e assistência social. (SILVA, 2005)

2.1.5 Um Exemplo de Fatura

Diante das informações técnicas e legais que concernem à conta de água, apresentamos na Figura 13 um exemplo real de fatura de água de uma residência normal, localizada no município de Salvador-Ba, composta por uma unidade de consumo, não isenta da taxa de esgoto, cujo consumo mensal totalizou 30 m³.

Figura 13 – Cobrança progressiva

Faixas de Consumo	Cons(m^3)	Valor(m^3)	UC	VL. Total.
ATE 6 MIN	6	29,90		29,90
7 A 10	4	1,18		4,72
11 A 15	5	8,37		41,85
16 A 20	5	8,96		44,80
21 A 25	5	10,07		50,35
26 A 30	5	11,23		56,15
TOTAL	30			227,77

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os 30 m³ de água distribuem-se nas faixas, ocupando suas capacidades máximas até alcançarem a última delas, na qual se identifica o quanto nela foi consumido. Como o preço por metro cúbico é diferenciado em cada faixa, multiplica-se o volume de água consumido pelo valor do metro cúbico.

2.2 Resolução de Problemas e Simulação no contexto da Conta de Água

A fundamentação teórica feita no primeiro capítulo apresentou de modo mais geral duas abordagens pedagógicas na área da Educação Matemática: a Resolução de Problemas e as Novas Tecnologias. Para nossa proposta, utilizaremos desse aporte teórico para propor adaptações que julgamos convenientes e adequadas para a construção do produto educacional. A presente seção trata, portanto, das perspectivas dessas duas estratégias alicerçando e objetivando o simulador de fatura.

A proposta de construir um simulador de fatura de água utilizando uma planilha eletrônica, na nossa visão, constitui-se um *problema*, porque se trata de uma atividade não convencional, cujo intuito é desenvolver um novo conteúdo que demanda estratégias e um pensar mais elaborados, configurando-se, desse modo, em uma situação de resolução não imediata. Por partirmos da realidade visando ao aprendizado matemático, remontamos as ideias de Schroeder e Lester (1989), partindo-se do real para o abstrato, do rotineiro para o não rotineiro.

O produto educacional está dividido em três etapas ou atividades. A primeira delas (Atividade 1, página 52) consiste no estudo e no entendimento da conta de água – das moradias dos próprios estudantes –, em uma etapa que consideramos como *pré-problema*. Isto porque esta primeira atividade não se configura como o cerne da proposta, todavia é elemento essencial para que se entenda o contexto do problema e se possa resolvê-lo. De outro modo, trata da ambientação e da preparação para o problema. Essa concepção se coaduna com o que versa a BNCC:

> Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. (BRASIL, 2018, p. 535-6)

Por não haver formas rígidas de se trabalhar através de resolução de problemas em sala de aula de Matemática (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011), faremos uma adaptação do roteiro sugerido por Onuchic et al. (2019):

1. **Proposição do pré-problema:** O professor pede, com antecedência, que os estudantes tragam as contas de água de suas residências, explica a proposta como um todo e propõe a Atividade 1.

2. **Leitura individual:** Recebendo o pré-problema impresso, cada estudante faz sua leitura. A ação, nesta etapa, é do estudante; ao ler individualmente, tem a possibilidade de refletir, de se colocar em contato com a linguagem matemática e de desenvolver sua própria compreensão do problema proposto.

3. **Leitura em conjunto:** Os estudantes reúnem-se em pequenos grupos – idealmente de três pessoas, sendo que este mesmo grupo prosseguirá em todas as etapas – e fazem nova leitura e discussão do pré-problema. O professor ajuda os grupos na compreensão do pré-problema e na resolução de problemas secundários, mas as ações são realizadas, essencialmente, pelos estudantes. Nessa fase, exercitam a expressão de ideias para a qual necessitam utilizar e aprimorar a linguagem a fim de expressarem-se com clareza, com coerência e se fazerem entendidos.

4. **Resolução do pré-problema:** Inicia-se a resolução do pré-problema propriamente dita. Os estudantes, em seus grupos, tentam resolvê-lo, o que lhes conduzirá à construção de conhecimento sobre o conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. A ação dos estudantes volta-se à expressão escrita, pois, para resolver o problema, precisarão da linguagem matemática ou de outros recursos de que dispõem; linguagem corrente, desenhos, gráficos, tabelas ou esquemas.

5. **Observar e incentivar:** O professor age, enquanto isso, observando o trabalho dos estudantes, incentivando-os a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já

conhecidas, e a troca de ideias. Auxilia-os nas dificuldades, sem, contudo, fornecer-lhes respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos estudantes.

6. **Registro das resoluções na lousa:** Após esse trabalho, representantes dos grupos são solicitados a fazerem o registro de suas resoluções na lousa (certas, erradas ou feitas por diferentes processos). Diante desse "painel de soluções", o professor estimula os estudantes a compartilharem, a justificarem suas ideias, a defenderem pontos de vista, a compararem e a discutirem as diferentes soluções, isto é, a avaliarem suas próprias resoluções de modo a aprimorarem a apresentação (escrita) da resolução.

A segunda atividade (Atividade 2, página 54) corresponde a encontrar uma função que determine o valor pago pelo consumo de água, seja em cada faixa de consumo específica ou total. Nesse momento, sugerimos novamente o roteiro proposto por Onuchic et al. (2019), com algumas adaptações e mais algumas etapas.

1. **Proposição do problema:** O professor propõe a Atividade 2 aos estudantes. Esse problema é chamado problema gerador, pois visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda não trabalhado em sala de aula.

2. **Leitura individual:** Recebendo o problema impresso, cada estudante faz sua leitura. A ação, nesta etapa, é do estudante que ao ler individualmente, tem a possibilidade de refletir, de se colocar em contato com a linguagem matemática e de desenvolver sua própria compreensão do problema proposto.

3. **Leitura em conjunto:** Os estudantes reúnem-se nos mesmos grupos da atividade anterior e fazem nova leitura e nova discussão do problema. O professor ajuda os grupos na compreensão do problema e na resolução de problemas secundários, porém as ações são realizadas, essencialmente, pelos estudantes. Nessa fase, exercitam a expressão de ideias para a qual necessitarão utilizar e aprimorar a linguagem a fim de se expressarem com clareza, com coerência e de se fazerem entendidos.

4. **Resolução do problema:** Inicia-se a resolução do problema propriamente dita. Os estudantes, em seus grupos, tentam resolver o problema gerador que lhes conduzirá à construção de conhecimento sobre o conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. A ação dos estudantes se volta à expressão escrita, pois para resolverem o problema, precisarão da linguagem matemática ou de outros recursos de que dispõem: linguagem corrente, desenhos, gráficos, tabelas ou esquemas.

5. **Observar e incentivar:** O professor age, enquanto isso, observando o trabalho dos estudantes, incentivando-os a utilizarem seus conhecimentos prévios, técnicas operatórias

já conhecidas, e a troca de ideias. Auxilia nas dificuldades, sem, contudo, fornecer-lhes respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos estudantes.

6. **Registro das resoluções na lousa:** Após esse trabalho, representantes dos grupos são solicitados a fazerem o registro de suas resoluções na lousa (certas, erradas ou feitas por diferentes processos). Diante desse "painel de soluções", o professor estimula os estudantes a compartilharem, a justificarem suas ideias, a defenderem pontos de vista, compararem e discutirem as diferentes soluções, isto é, avaliarem suas próprias resoluções de modo a aprimorarem a apresentação (escrita) da resolução.

7. **Plenária:** Em sessão plenária, ou seja, em um esforço conjunto, professor e estudantes tentam chegar a um consenso sobre resultados adequados. Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo.

8. **Busca do consenso:** Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e as soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre resultados adequados.

9. **Formalização do conteúdo:** O professor registra na lousa uma apresentação "formal" - organizada e estruturada em linguagem matemática - padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando diferentes técnicas operatórias e construindo demonstrações se for o caso.

10. **Proposição e resolução de novos problemas:** Após a etapa de formalização de novos problemas relacionados ao problema gerador, estes são propostos aos estudantes para que lhes possibilitem analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas, e assim por diante.

Esta última etapa – a de proposição de novos problemas –, alinha-se ao que preconiza a BNCC acerca da Resolução de Problemas, quando justifica e reitera, dentro das habilidades referentes à Competência Específica 3, o uso da expressão "Resolver e Elaborar Problemas" no lugar de "Resolver Problemas", por compreender que essa escolha

> amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada (BRASIL, 2018, p. 536).

Além disso, em consonância a nossa proposta de associação da Resolução de Problemas às Simulações:

> Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. (BRASIL, 2018, p. 536)

A terceira atividade (Atividade 3, página 55) consiste na construção do simulador de fatura em um programa de planilhas eletrônicas. É importante frisar que, a fim de que a utilização do programa de planilha eletrônica não se torne uma preocupação a mais, é interessante que durante o ano letivo o professor trabalhe com esse programa, o que propiciará a si e a seus estudantes alguma familiaridade com o recurso.

2.3 O Produto Educacional

2.3.1 Atividade 1 - Explorando a conta de água

A Atividade 1 tem caráter introdutório e visa oportunizar aos estudantes uma análise mais profunda da conta de água. Sugere-se que eles tragam as faturas de suas residências, formem grupos e respondam às questões propostas. A duração prevista para a atividade é de duas horas-aulas.

VOCÊ CONHECE SUA CONTA DE ÁGUA?

A água passa por um longo processo de transformação, desde sua captação até chegar aos imóveis para que esteja própria para o consumo humano. Na Bahia, a companhia responsável pelos serviços de abastecimento de água e de esgotamento sanitário é a Embasa (Empresa Baiana de Águas e Saneamento). Todos os meses ela emite um documento que contém os dados de identificação do imóvel e do responsável por ele, o detalhamento do consumo de água, a tarifa de esgoto, parâmetros de qualidade da água e impostos: a fatura. Para sua emissão, é necessário que um agente leiturista faça a leitura do hidrômetro e registre o valor do consumo atual do imóvel. O hidrômetro é um aparelho de alta precisão que mede a quantidade de água consumida, servindo também para detectar eventuais vazamentos. Existem vários tipos de hidrômetro, dependendo do tipo de imóvel e de sua finalidade. Para "ler" o hidrômetro, basta reconhecer os números que indicam o valor do consumo, que é sempre medido em metros cúbicos (m^3), um metro cúbico corresponde a mil litros. No hidrômetro, existem algarismos das cores preta (que indica a quantidade inteira de metros cúbicos) e vermelha (que indica a quantidade de centenas e dezenas de litros de água). A leitura atual é feita considerando apenas os dígitos pretos, ignorando os dígitos vermelhos (ver Figura 14) . O volume consumido é calculado pela diferença entre a leitura atual e a leitura anterior (feita no mês anterior).

Figura 14 – Como ler o hidrômetro

Fonte: Embasa.

O valor pago por metro cúbico de água não é constante, ele é feito por faixas de consumo. Além disso, os imóveis são divididos em categorias, e para cada categoria existem tarifas diferenciadas. A Tabela 3 mostra as tarifas da categoria residencial.

Tabela 3 – Tabela tarifária da categoria residencial

Faixas de Consumo (m³)			Residencial Social	Residencial Intermediária	Residencial Normal/Veraneio
0	a	6	13,40	26,40	29,90
7	a	10	0,83	1,07	1,18
11	a	15	5,91	6,78	8,37
16	a	20	6,43	7,34	8,96
21	a	25	9,59	9,63	10,07
26	a	30	10,69	10,73	11,23
31	a	40	11,82	11,82	12,35
41	a	50	13,55	13,55	13,55
	>	50	16,29	16,29	16,29

Fonte: Embasa.

Após sua utilização, a água se torna esgoto e precisa ser tratada com a mesma importância. Por isso, existe também uma tarifa de esgoto que também depende do tipo de imóvel, alguns imóveis são isentos da tarifa de esgoto. Na fatura de água, é possível identificar a isenção ou não dessa tarifa, bem como calcular seu percentual sobre o valor pago pela água.

Com base no texto e nas contas de água trazidas, responda:

1. Quanto você paga de tarifa mínima? Com essa informação, você consegue dizer a qual categoria sua residência pertence? Este imóvel é isento da tarifa de esgoto? Caso negativo,

qual é o valor da taxa de esgoto? Compare suas respostas com as de seus colegas.

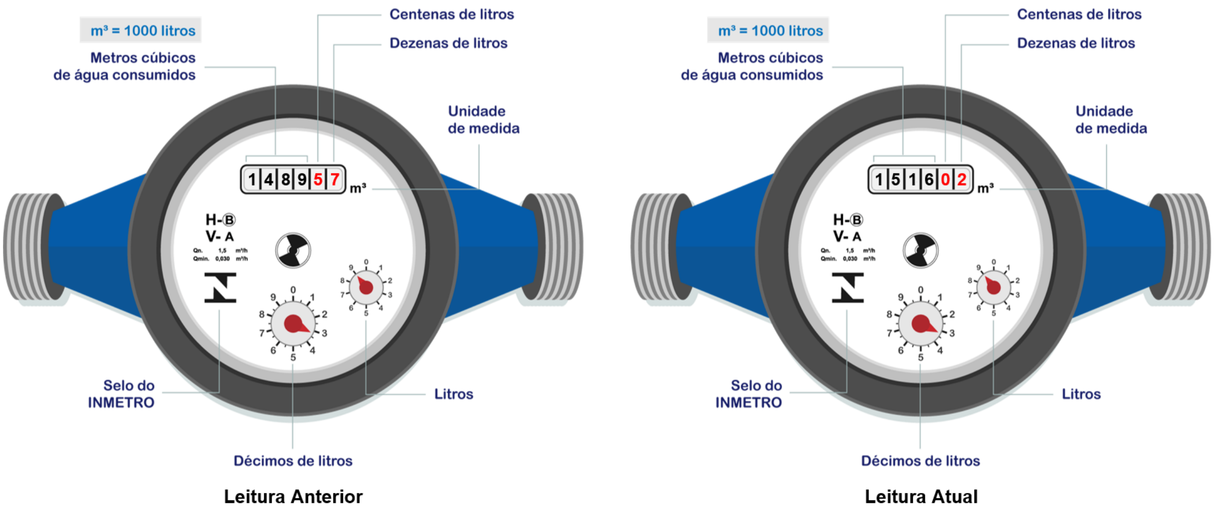
2. Quais impostos são pagos? Qual porcentagem do valor total da fatura eles compreendem?

3. Se um agente leiturista encontrasse o hidrômetro de um imóvel registrando 40,95 m³, qual seria o valor de leitura atual informado pelo agente para a emissão da fatura?

4. Analisem as contas de água do grupo e descrevam de que forma o consumo de água é cobrado.

5. Descrevam a conta de água de um imóvel enquadrado na categoria residencial normal, cujas leituras anterior e atual estão representadas na Figura 15:

Figura 15 – Leituras anterior e atual de um hidrômetro



Fonte: https://igua.com.br/informacoes-para-voce (adaptada).

6. Cada faixa de consumo, exceto a última (que é aberta), comporta um volume máximo de água, possuindo, portanto, um preço máximo correspondente. Determine os preços máximos pagos em cada faixa, da primeira até a penúltima.

Nessa etapa é válido apresentar vídeos e realizar rodas de conversas com os estudantes sobre o consumo sustentável de água e não tratamento de esgoto. Indicamos o vídeo "Passando a limpo - Educação Ambiental", que pode ser acessado[7] através do link https://www.youtube.com/watch?v=NF2mCB04H3k.

2.3.2 Atividade 2 - Pensando em funções

A Atividade 2 é uma continuação da anterior e pretende introduzir de forma natural a linguagem funcional relacionada à situação, isto é, quais grandezas estão envolvidas, de que

[7] Acesso em: 16 jun. 2021

forma isso se dá, se existe uma função que possibilite uma modelagem da situação. Sugere-se duas horas-aula para a realização desta etapa.

1. Dado que o valor da conta de água depende do volume de água consumido, existe alguma função que represente a relação entre essas grandezas? Que tipo de função é esse?
2. Escolha uma categoria de imóvel. Considerando x o volume de água consumido, determine as expressões que permitem calcular o valor pago em cada faixa.
3. Baseando-se nas respostas do item anterior, qual função descreve o valor total pago pelo consumo de água nesse imóvel?
4. Esboce o gráfico da função encontrada no item anterior. Qual é seu domínio? Avalie seu comportamento.

2.3.3 Atividade 3 - Criando o simulador

A Atividade 3 propõe a construção do simulador de fatura através do programa de planilha eletrônica com base nas atividades anteriores. Neste momento, é importante observar a familiaridade ou não dos estudantes com o programa, fazendo-se necessárias intervenções e orientações. Sugere-se duas horas-aula para a realização desta atividade.

1. Baseando-se nas faturas de água dos membros da equipe e nas atividades anteriores, crie um simulador de fatura utilizando um programa de planilha eletrônica. Nele devem constar:
   - consumo mensal
   - tipo de residência
   - consumo de água nas respectivas faixas
   - valor pago em cada faixa
   - tarifa de esgoto
   - impostos
   - valor total da conta
2. Finalizado e testado o simulador, quais tipos de problemas vocês proporiam?

2.4 Sugestões de Solução

O objetivo desta seção não é a de dar uma resposta pronta para a atividade, muito menos engessá-la. No entanto, existem formas de construir a planilha eletrônica que simulem a fatura da conta de água utilizando as funções rampa e degrau. Trata-se, portanto, de um modelo de solução que possa guiar tanto professores quanto estudantes.

Para a construção do simulador, existem itens dos quais não se pode prescindir, e que constam na fatura original, a saber: tipo de categoria residencial, valor do consumo mensal, isenção ou não da taxa de esgoto, faixas de consumo, consumo na faixa, tarifa, valor pago e impostos.

2.4.1 Atividade 1

1. Resposta pessoal.
2. Os impostos pagos são o PIS e a COFINS.
3. O valor informado para emissão da fatura seria de 40 m³.
4. Resposta pessoal.
5. De acordo com os hidrômetros da Figura 15, o consumo mensal de água no imóvel foi de 1516 - 1489 = 27 m³. A Tabela 4 detalha a fatura de água desse imóvel.

Tabela 4 – Solução da questão 1.5

Faixas de Consumo (m³)	Volume utilizado na faixa (m³)	Preço do m³	Preço a pagar
0 a 6	6	–	29,90
7 a 10	4	1,18	4,72
11 a 15	5	8,37	41,85
16 a 20	5	8,96	44,80
21 a 25	5	10,07	50,35
26 a 30	2	11,23	22,46

Fonte: Elaborada pelo autor.

Total: 29,90 + 4,72 + 41,85 + 44,80 + 50,35 + 22,46 = R$194,08.

6. Os preços máximos pagos em cada faixa, da primeira até a penúltima, podem ser organizados como na Tabela 5.

Tabela 5 – Solução da questão 1.6

Faixas de Consumo (m^3)	Capacidade máxima da faixa (m^3)	Preço do m^3	Valor completo da faixa
0 a 6	6	–	29,90
7 a 10	4	1,18	4,72
11 a 15	5	8,37	41,85
16 a 20	5	8,96	44,80
21 a 25	5	10,07	50,35
26 a 30	5	11,23	56,15
31 a 40	10	12,35	123,50
41 a 50	10	13,55	135,50

Fonte: Embasa.

2.4.2 Atividade 2

Há certamente mais de uma maneira de determinar funções relativas ao problema da conta de água abordada neste trabalho. Pode-se pensar em funções que determinam o volume de água consumido em cada faixa, em uma função que calcule o valor pago em cada faixa de consumo, ou ainda em uma função que determine o valor total referente ao consumo de água (desconsiderando tarifa de esgoto e impostos). Ademais, uma mesma função pode ser escrita de modos distintos, mas apesar disso, todas essas possibilidades ou são equivalentes ou podem ser relacionadas tendo em vista que descrevem o mesmo fenômeno. É necessário, ainda, ter certo cuidado com relação aos significados dados às variáveis (independentes) que participam de tais funções, sobretudo porque esses significados determinam o papel que as funções a serem encontradas desempenham.

A variedade de funções relacionadas ao problema da conta de água lhe atribui grande riqueza de discussões e de diferentes possibilidades, por exemplo, de construção de tabelas e de gráficos. Junto ao volume de água consumido, existem outros parâmetros que permitem definir as funções desejadas, a saber: a categoria do imóvel e a isenção da tarifa de esgoto. Assim, pode-se considerar que qualquer função que se queira determinar leva em conta essas três variáveis. No entanto, para evitar complexidades desnecessárias, fixaremos aqui uma categoria de imóvel e definir a isenção ou não da tarifa de esgoto. Desse modo, a função a ser determinada dependerá única e exclusivamente do consumo mensal de água.

Convém observar que *o volume de água consumido é sempre um valor inteiro positivo*. Isto independe se a função considera como variável do domínio o valor do consumo registrado no hidrômetro ou o valor informado pelo agente leiturista no momento da leitura do hidrômetro para a emissão da fatura, o qual se encontra impresso na conta de água. Portanto, o domínio da função – qualquer que seja – é o conjunto dos números naturais e seu gráfico será um conjunto de pontos isolados.

Para fins de simplificação e de exemplificação, nesta seção serão tratadas duas funções, cuja variável do domínio de ambas representa o volume mensal de água consumido em um imóvel enquadrado na categoria *residencial normal*: (1) a função f informará o valor pago em cada faixa de consumo específica e (2) a função g informará o valor total pago até uma faixa específica, isto é, o valor acumulado. Embora ligeiramente distintas, isso não configura um empecilho para a análise simultânea de ambas as funções.

A fim de auxiliar na dedução das funções f e g, constrói-se a Tabela 6, a qual informa o preço pago por cada faixa de consumo cheia e o valor acumulado. Como a última faixa é aberta (maior que 50), ela não possui capacidade máxima nem, consequentemente, um valor completo. No entanto, atrelado a ela existe uma tarifa de 16,29 por m³ de água e um valor acumulado das faixas anteriores que corresponde a um consumo de 50 m³, isto é, R$486,77.

Tabela 6 – Tabela auxiliar para encontrar as funções rampas da conta de água

Faixas de consumo (m³)	Capacidade máxima da faixa (m³)	Preço do m³	Valor completo da faixa	Valor acumulado
0 a 6	6	-	29,90	29,90
7 a 10	4	1,18	4,72	34,62
11 a 15	5	8,37	41,85	76,47
16 a 20	5	8,96	44,80	121,27
21 a 25	5	10,07	50,35	171,62
26 a 30	5	11,23	56,15	227,77
31 a 40	10	12,35	123,50	351,27
41 a 50	10	13,55	135,50	486,77

Fonte: Elaborada pelo autor.

Atribuindo uma numeração a cada faixa de consumo (Faixa 1: 0 a 6, Faixa 2: 7 a 10, Faixa 3: 11 a 15, Faixa 4: 16 a 20, Faixa 5: 21 a 25, Faixa 6: 26 a 30, Faixa 7: 31 a 40, Faixa 8: 41 a 50 e Faixa 9: acima de 50) e com as informações da Tabela 6, é preciso aplicar a regra de cobrança estabelecida pelo sistema progressivo. Seja x o valor do consumo mensal numa residência normal.

Faixa 1: $\xrightarrow[\text{independente do volume}]{\text{tarifa mínima}} 29,90$

Faixa 2: $\xrightarrow[\text{da faixa 1}]{\text{retiram-se os 6 m³}} x-6 \xrightarrow[\text{sobre o volume de água excedente}]{\text{cobra-se 1,18 por metro cúbico}} 1,18(x-6)$

Faixa 3: $\xrightarrow[\text{das faixas anteriores}]{\text{retiram-se os 10 m³}} x-10 \xrightarrow[\text{sobre o volume de água excedente}]{\text{cobra-se 8,37 por metro cúbico}} 8,37(x-10)$

Faixa 4: $\xrightarrow[\text{das faixas anteriores}]{\text{retiram-se os 15 m³}} x-15 \xrightarrow[\text{sobre o volume de água excedente}]{\text{cobra-se 8,96 por metro cúbico}} 8,96(x-15)$

Faixa 5: $\xrightarrow[\text{das faixas anteriores}]{\text{retiram-se os 20 m³}} x-20 \xrightarrow[\text{sobre o volume de água excedente}]{\text{cobra-se 10,07 por metro cúbico}} 10,07(x-20)$

Faixa 6: $\xrightarrow[\text{das faixas anteriores}]{\text{retiram-se os 25 m³}} x-25 \xrightarrow[\text{sobre o volume de água excedente}]{\text{cobra-se 11,23 por metro cúbico}} 11,23(x-25)$

Faixa 7: $\xrightarrow[\text{das faixas anteriores}]{\text{retiram-se os 30 m³}} x-30 \xrightarrow[\text{sobre o volume de água excedente}]{\text{cobra-se 12,35 por metro cúbico}} 12,35(x-30)$

Faixa 8: $\xrightarrow[\text{das faixas anteriores}]{\text{retiram-se os 40 m³}} x-40 \xrightarrow[\text{sobre o volume de água excedente}]{\text{cobra-se 13,55 por metro cúbico}} 13,55(x-40)$

Faixa 9: $\xrightarrow[\text{das faixas anteriores}]{\text{retiram-se os 50 m³}} x-50 \xrightarrow[\text{sobre o volume de água excedente}]{\text{cobra-se 16,29 por metro cúbico}} 16,29(x-50)$

Considerando o valor pago separadamente em cada faixa, constrói-se a função f a seguir.

$$f(x)=\begin{cases} 29,90, & \text{se } 0\le x\le 6\\ 1,18(x-6), & \text{se } 7\le x\le 10\\ 8,37(x-10), & \text{se } 11\le x\le 15\\ 8,96(x-15), & \text{se } 16\le x\le 20\\ 10,07(x-20), & \text{se } 21\le x\le 25\\ 11,23(x-25), & \text{se } 26\le x\le 30\\ 12,35(x-30), & \text{se } 31\le x\le 40\\ 13,55(x-40), & \text{se } 41\le x\le 50\\ 16,29(x-50), & \text{se } x\ge 51 \end{cases},\ x\in\mathbb{N}$$

É importante destacar que, como x representa um número natural, é indiferente escrever, a partir da segunda faixa, o intervalo $a<x\le b$ ou $a+1\le x\le b$. Por este motivo, e para utilizar as faixas de consumo constantes nas contas de água e no site da Embasa, escrevemos, por exemplo, $7\le x\le 10$ no lugar de $6<x\le 10$.

Na etapa de retirar o volume acumulado das faixas anteriores, pode-se recorrer à Tabela 6 para encontrar o valor correspondente a esse volume (coluna 5). Com isso, constrói-se também a função g a seguir, na qual cada sentença é composta pelo preço do volume acumulado nas faixas anteriores somado ao valor pago pelo volume de água consumido naquela faixa específica.

$$g(x) = \begin{cases} 29,90, & \text{se } 0 \leq x \leq 6 \\ 29,90 + 1,18(x-6), & \text{se } 7 \leq x \leq 10 \\ 34,62 + 8,37(x-10), & \text{se } 11 \leq x \leq 15 \\ 76,47 + 8,96(x-15), & \text{se } 16 \leq x \leq 20 \\ 121,27 + 10,07(x-20), & \text{se } 21 \leq x \leq 25 \\ 171,62 + 11,23(x-25), & \text{se } 26 \leq x \leq 30 \\ 227,77 + 12,35(x-30), & \text{se } 31 \leq x \leq 40 \\ 351,27 + 13,55(x-40), & \text{se } 41 \leq x \leq 50 \\ 486,77 + 16,29(x-50), & \text{se } x \geq 51 \end{cases}, \; x \in \mathbb{N}$$

As funções f e g e acima deduzidas, dentro de suas características, modelam muito bem o problema proposto. Ambas são escritas por nove sentenças, as quais, quando transcritas para uma planilha eletrônica utilizando-se comandos lógicos tais como SE, E e OU, podem torná-los longos e mais propícios a erros de sintaxe, uma vez que estes, como veremos a seguir, são usados mais de uma vez e concatenados num único comando. Porém, também podemos usar as funções rampas e degraus e os resultados que as relacionam com as funções poligonais, estudadas no Capítulo 1, para modelar o fenômeno. Cabe ao professor decidir ou não pela abordagem de qualquer das funções rampa ou degrau no momento da formalização do conteúdo, por elas apresentarem igualmente uma boa alternativa no momento da construção do simulador, tendo em vista que existem comandos pré-definidos na planilha eletrônica utilizada para funções modulares e degraus.

Nas duas subseções seguintes, o problema da conta de água será tratado sob a ótica das funções abordadas na seção 1.2. Vale ressaltar que embora as funções rampa e degrau tenham sido definidas no conjunto dos números reais, elas não perdem suas propriedades – contidas e demonstradas nos teoremas da seção 1.2 –, valendo também para o conjunto dos números naturais, ou algum seu subconjunto.

Resolução utilizando a função rampa

A função rampa é bastante adequada para a situação proposta. Ela é definida por três sentenças[8]: seu primeiro patamar tem imagem zero, sua rampa é uma função afim e seu segundo patamar é uma constante não nula. Isto equivale às três únicas possibilidades para determinado valor de consumo: anterior à faixa (primeiro patamar), dentro da faixa (função afim) e posterior à faixa (segundo patamar). Este raciocínio conduz ao fato de que uma única rampa pode representar uma informação sobre uma única faixa de consumo, mas que a soma de todas as funções rampas determinam informações sobre todo o consumo, em particular, o valor total relativo ao consumo de água.

---

[8] Vide 1.3

A Proposição 1.1 mostra como escrever funções rampas, conhecendo-se seus parâmetros, e o Teorema 1.1 assegura que é possível escrever uma função poligonal como soma de uma função constante e de funções rampas (ou, neste caso, um conjunto de pontos isolados desta poligonal).

$$\text{Faixa 1} \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}(6-0+|x-0|-|x-6|)}_{\text{consumo de água}} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{29,90}_{\text{tarifa mínima}}$$

$$\text{Faixa 2} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{1,18}_{\text{preço do m³}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(10-6+|x-6|-|x-10|)}_{\text{consumo de água}}$$

$$\text{Faixa 3} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{8,37}_{\text{preço do m³}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(15-10+|x-10|-|x-15|)}_{\text{consumo de água}}$$

$$\text{Faixa 4} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{8,96}_{\text{preço do m³}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(20-15+|x-15|-|x-20|)}_{\text{consumo de água}}$$

$$\text{Faixa 5} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{10,07}_{\text{preço do m³}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(25-20+|x-20|-|x-25|)}_{\text{consumo de água}}$$

$$\text{Faixa 6} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{11,23}_{\text{preço do m³}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(30-25+|x-25|-|x-30|)}_{\text{consumo de água}}$$

$$\text{Faixa 7} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{12,35}_{\text{preço do m³}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(40-30+|x-30|-|x-40|)}_{\text{consumo de água}}$$

$$\text{Faixa 8} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{13,55}_{\text{preço do m³}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(50-40+|x-40|-|x-50|)}_{\text{consumo de água}}$$

$$\text{Faixa 9} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{16,29}_{\text{preço do m³}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(|x-50|+x-50)}_{\text{consumo de água}}$$

A função rampa da faixa 9 difere das outras por ser uma rampa infinita, caso este tratado na Proposição 1.2.

As funções descritas acima atuam cada uma em sua respectiva faixa de consumo, e por isso determinam o valor pago em cada uma delas. Logo, elas estão diretamente relacionadas à função f deduzida nesta seção. Contudo, a soma de todas elas, isto é, o valor total pago pelo consumo de água, está diretamente ligada à função g.

Resolução utilizando a função degrau

A função degrau também é bastante adequada para a situação proposta. Ela é definida por duas sentenças[9]: seu primeiro patamar tem imagem 0 e seu segundo patamar tem imagem 1. Este comportamento dicotômico pode ser interpretado como (1) o consumo não alcança a faixa ou (2) o consumo alcança (ou ultrapassa) a faixa, respectivamente. Resumidamente, atribui-se 0 se o consumo não alcançou certa faixa de consumo, e 1 caso contrário.

A Proposição 1.2 mostra como escrever funções rampas em termos de funções degraus e o Teorema 1.1 assegura que é possível escrever uma função poligonal como soma de uma função constante e de funções rampas (ou, neste caso, um conjunto de pontos isolados desta poligonal).

$$\text{Faixa 1} \longrightarrow \underbrace{\left[xu_0 - (x-6)u_6\right]}_{\text{consumo de água}} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{29,90}_{\text{tarifa mínima}}$$

$$\text{Faixa 2} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{1,18}_{\text{preço do m³}} \cdot \underbrace{\left[(x-6)u_6 - (x-10)u_{10}\right]}_{\text{consumo de água}}$$

$$\text{Faixa 3} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{8,37}_{\text{preço do m³}} \cdot \underbrace{\left[(x-10)u_{10} - (x-15)u_{15}\right]}_{\text{consumo de água}}$$

$$\text{Faixa 4} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{8,96}_{\text{preço do m³}} \cdot \underbrace{\left[(x-15)u_{15} - (x-20)u_{20}\right]}_{\text{consumo de água}}$$

$$\text{Faixa 5} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{10,07}_{\text{preço do m³}} \cdot \underbrace{\left[(x-20)u_{20} - (x-25)u_{25}\right]}_{\text{consumo de água}}$$

$$\text{Faixa 6} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{11,23}_{\text{preço do m³}} \cdot \underbrace{\left[(x-25)u_{25} - (x-30)u_{30}\right]}_{\text{consumo de água}}$$

$$\text{Faixa 7} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{12,35}_{\text{preço do m³}} \cdot \underbrace{\left[(x-30)u_{30} - (x-40)u_{40}\right]}_{\text{consumo de água}}$$

$$\text{Faixa 8} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{13,55}_{\text{preço do m³}} \cdot \underbrace{\left[(x-40)u_{40} - (x-50)u_{50}\right]}_{\text{consumo de água}}$$

$$\text{Faixa 9} \xrightarrow{\text{valor pago}} \underbrace{16,29}_{\text{preço do m³}} \cdot \underbrace{(x-50)u_{50}}_{\text{consumo de água}}$$

A função degrau da faixa 9 difere das outras por representar uma rampa infinita, caso este tratado na Proposição 1.4.

As funções descritas acima atuam cada uma em sua respectiva faixa de consumo, e por

[9] Vide 1.5

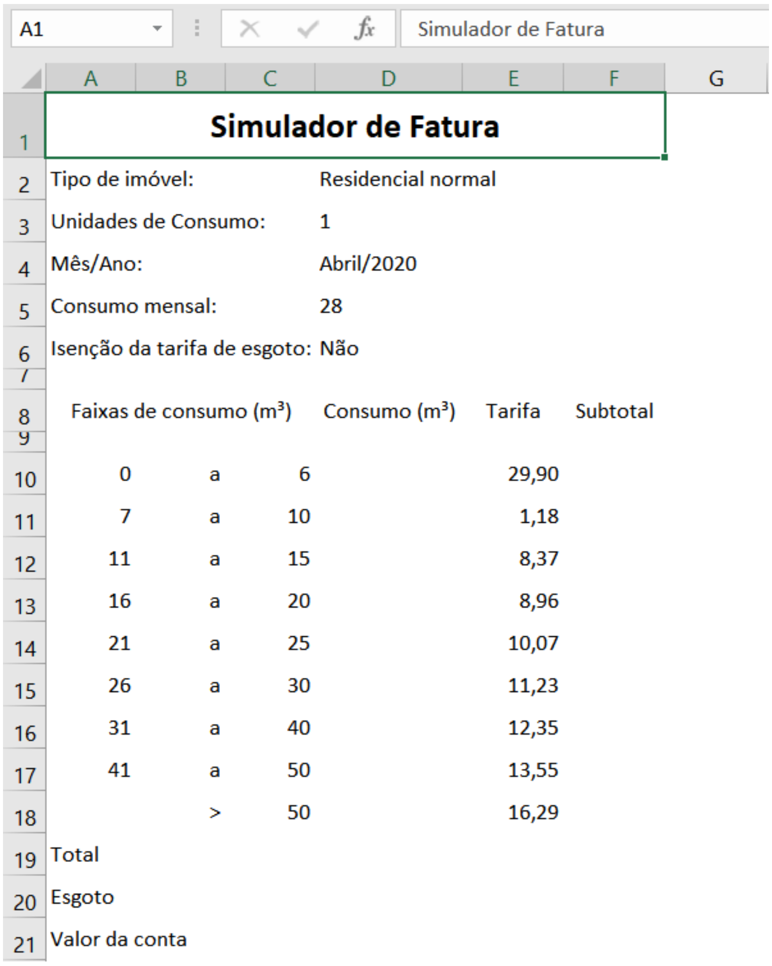
isso determinam o valor pago em cada uma delas. Logo, elas estão diretamente relacionadas à função f deduzida nesta seção. Contudo, a soma de todas elas, isto é, o valor total pago pelo consumo de água, está diretamente ligada à função g.

2.4.3 Atividade 3

A solução sugerida da Atividade 3 requer alguma familiaridade com o uso de planilhas eletrônicas. O Apêndice traz um minitutorial com orientações acerca das principais funções e dos recursos necessários para a construção do simulador de fatura.

O *layout* do simulador pode sobremaneira variar, não havendo, portanto, uma maneira fixa de estabelecer sua estrutura e dispor suas informações. Contudo, tomando como referência a própria fatura de água, torna-se razoável apresentar dados sobre o tipo de imóvel – e consequentemente as tarifas atribuídas a ele –, a quantidade de unidades de consumo, a isenção ou não da tarifa de esgoto e, certamente, o consumo mensal de água, uma vez que todos esses elementos influenciam no valor final da conta de água. Além disso, para melhor visualização, organizam-se as faixas de consumo verticalmente como mostra a Figura 16.

Figura 16 – Construção do Simulador - Passo 1



A1 | Simulador de Fatura

	A	B	C	D	E	F	G
1	Simulador de Fatura						
2	Tipo de imóvel:			Residencial normal			
3	Unidades de Consumo:			1			
4	Mês/Ano:			Abril/2020			
5	Consumo mensal:			28			
6	Isenção da tarifa de esgoto:			Não			
7							
8	Faixas de consumo (m^3)			Consumo (m^3)	Tarifa	Subtotal	
9							
10	0	a	6		29,90		
11	7	a	10		1,18		
12	11	a	15		8,37		
13	16	a	20		8,96		
14	21	a	25		10,07		
15	26	a	30		11,23		
16	31	a	40		12,35		
17	41	a	50		13,55		
18		>	50		16,29		
19	Total						
20	Esgoto						
21	Valor da conta						

Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante lembrar que o consumo mensal é a variável em questão. Logo, as fórmulas a serem inseridas devem ser indexadas – ou referir-se – a ela. No nosso exemplo, o consumo mensal em m^3 está inserido na célula $D5$, assumindo assim o papel da variável x contida na fundamentação teórica sobre as funções rampas e degraus. A título de ilustração, atribuímos 28 à célula *D5*.

Em seguida, deve-se inserir as fórmulas das funções nas células referentes ao consumo por faixa. Isto pode ser feito de pelo menos três modos: (1) utilizando comandos lógicos, pois eles envolvem o intervalo da faixa e a sentença referente à faixa específica; (2) utilizando funções rampas e (3) utilizando funções degraus.

A seguir apresentaremos como isso pode ser feito dessas três maneiras.

1. Utilizando comandos lógicos

    - Faixa 1: =SE(D5<=6;D5;6)
    - Faixa 2: =SE(E(D5>=7;D5<=10);D5-6;SE(D5<7;0;4))
    - Faixa 3: =SE(E(D5>=11;D5<=15);D5-10;SE(D5<11;0;5))
    - Faixa 4: =SE(E(D5>=16;D5<=20);D5-15;SE(D5<16;0;5))
    - Faixa 5: =SE(E(D5>=21;D5<=25);D5-20;SE(D5<21;0;5))
    - Faixa 6: =SE(E(D5>=26;D5<=30);D5-25;SE(D5<26;0;5))
    - Faixa 7: =SE(E(D5>=31;D5<=40);D5-30;SE(D5<31;0;10))
    - Faixa 8: =SE(E(D5>=41;D5<=50);D5-40;SE(D5<41;0;10))
    - Faixa 9: =SE(D5>50;D5-50;0)

2. Utilizando funções rampas

$$r(x) = \frac{1}{2}\Big[(d-c) + |x-c| - |x-d|\Big]$$

    - Faixa 1: =(6-0+ABS(D5-0)-ABS(D5-6))/2
    - Faixa 2: =(10-6+ABS(D5-6)-ABS(D5-10))/2
    - Faixa 3: =(15-10+ABS(D5-10)-ABS(D5-15))/2
    - Faixa 4: =(20-15+ABS(D5-15)-ABS(D5-20))/2
    - Faixa 5: =(25-20+ABS(D5-20)-ABS(D5-25))/2
    - Faixa 6: =(30-25+ABS(D5-25)-ABS(D5-30))/2
    - Faixa 7: =(40-30+ABS(D5-30)-ABS(D5-40))/2
    - Faixa 8: =(50-40+ABS(D5-40)-ABS(D5-50))/2
    - Faixa 9: =(ABS(D5-50)+D5-50)/2

3. Utilizando funções degraus

$$r(x) = [(x-c)u_c - (x-d)u_d]$$

- Faixa 1: =((D5-0)*DEGRAU(D5;0)-(D5-6)*DEGRAU(D5;6))
- Faixa 2: =((D5-6)*DEGRAU(D5;6)-(D5-10)*DEGRAU(D5;10))
- Faixa 3: =((D5-10)*DEGRAU(D5;10)-(D5-15)*DEGRAU(D5;15))
- Faixa 4: =((D5-15)*DEGRAU(D5;15)-(D5-20)*DEGRAU(D5;20))
- Faixa 5: =((D5-20)*DEGRAU(D5;20)-(D5-25)*DEGRAU(D5;25))
- Faixa 6: =((D5-25)*DEGRAU(D5;25)-(D5-30)*DEGRAU(D5;30))
- Faixa 7: =((D5-30)*DEGRAU(D5;30)-(D5-40)*DEGRAU(D5;40))
- Faixa 8: =((D5-40)*DEGRAU(D5;40)-(D5-50)*DEGRAU(D5;50))
- Faixa 9: =((D5-50)*DEGRAU(D5;50))

Após qualquer das escolhas de funções, obtém-se uma planilha como na Figura 17 seguir.

Figura 17 – Construção do Simulador - Passo 2

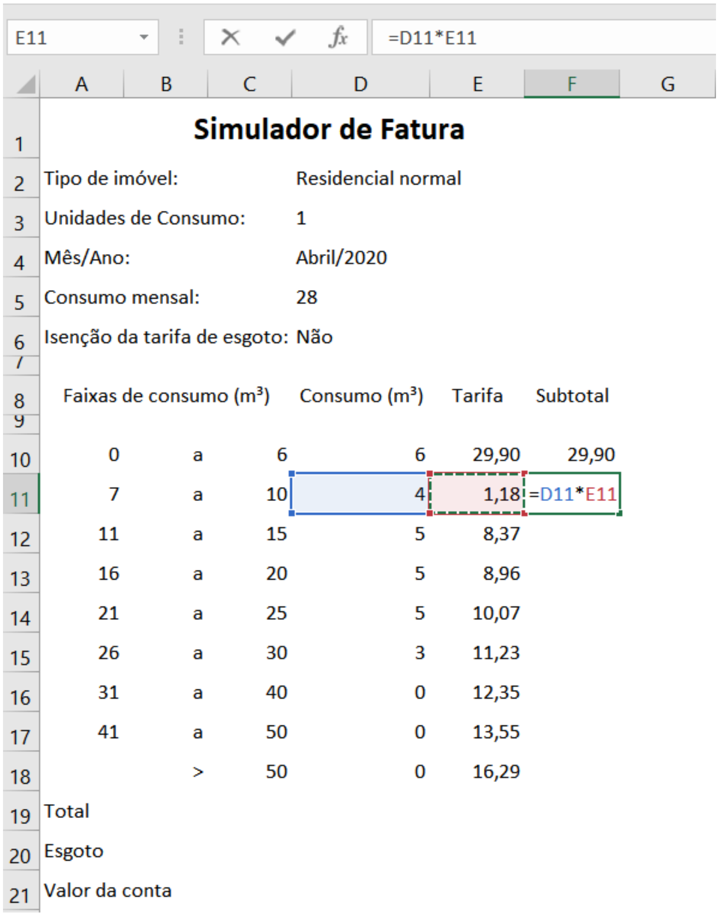
A1 | Simulador de Fatura

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Simulador de Fatura**						
2	Tipo de imóvel:			Residencial normal			
3	Unidades de Consumo:			1			
4	Mês/Ano:			Abril/2020			
5	Consumo mensal:			28			
6	Isenção da tarifa de esgoto:			Não			
7							
8	Faixas de consumo (m³)			Consumo (m³)	Tarifa	Subtotal	
9							
10	0	a	6	6	29,90		
11	7	a	10	4	1,18		
12	11	a	15	5	8,37		
13	16	a	20	5	8,96		
14	21	a	25	5	10,07		
15	26	a	30	3	11,23		
16	31	a	40	0	12,35		
17	41	a	50	0	13,55		
18		>	50	0	16,29		
19	Total						
20	Esgoto						
21	Valor da conta						

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para calcular o valor pago em cada faixa, excetuando a primeira – que corresponde à tarifa mínima (fixa) –, multiplica-se o valor do consumo pelo valor do metro cúbico naquela faixa específica. Esta etapa está representada na Figura 18.

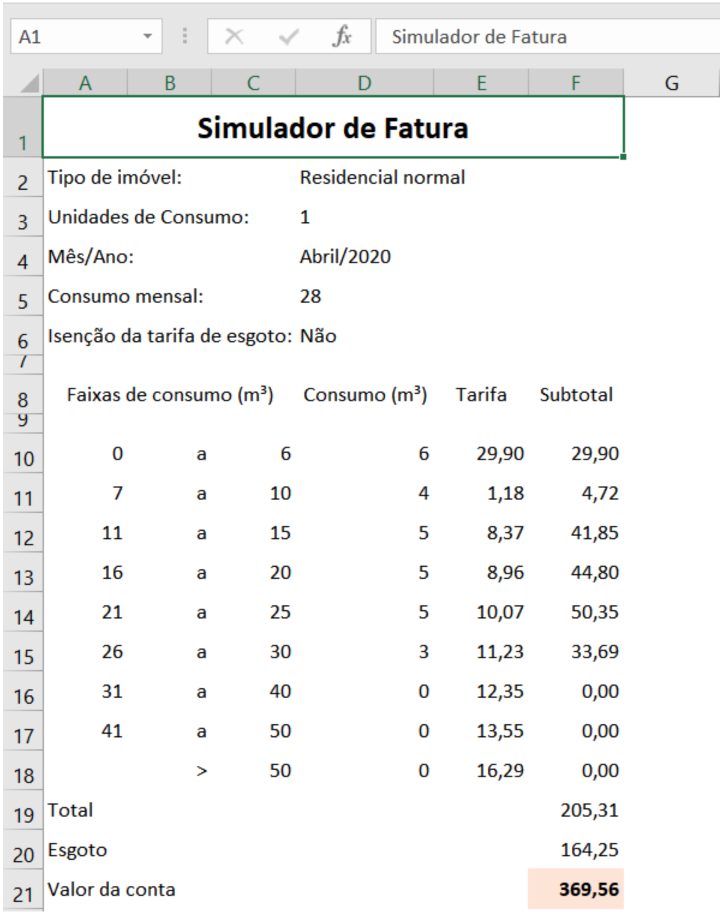
Figura 18 – Construção do Simulador - Passo 3



Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalizando a construção do simulador, resta somar os valores pagos em todas as faixas, calcular a tarifa de esgoto e obter o total da conta. Entendendo que o simulador precisa atender a diferentes tipos de situações, nem sempre um imóvel será isento ou não de tarifa de esgoto, sendo necessário portanto atribuir um teste lógico para essa informação. No nosso exemplo, tal informação encontra-se na célula *D6*, e podemos inserir, na célula referente à tarifa de esgoto, a fórmula *=SE(D6="Não";0,8*F19;0)*. Isto significa que se o imóvel não for isento, deve ser calculado 80% do valor pago pela água, ou seja, 0,8*F19; caso contrário (isenção), nada será pago (zero). Por fim, faz-se o somatório do valor referente ao consumo de água e à tarifa de esgoto, através, neste exemplo, da fórmula *=SOMA(F10:F18)*. O simulador finalizado está representado na Figura 19.

Figura 19 – Construção do Simulador - Passo 4



A1 | Simulador de Fatura

Simulador de Fatura

Tipo de imóvel:			Residencial normal		
Unidades de Consumo:			1		
Mês/Ano:			Abril/2020		
Consumo mensal:			28		
Isenção da tarifa de esgoto:			Não		
Faixas de consumo (m³)			Consumo (m³)	Tarifa	Subtotal
0	a	6	6	29,90	29,90
7	a	10	4	1,18	4,72
11	a	15	5	8,37	41,85
16	a	20	5	8,96	44,80
21	a	25	5	10,07	50,35
26	a	30	3	11,23	33,69
31	a	40	0	12,35	0,00
41	a	50	0	13,55	0,00
	>	50	0	16,29	0,00
Total					205,31
Esgoto					164,25
Valor da conta					**369,56**

Fonte: Elaborada pelo autor.

Cabe ressaltar que é de extrema importância realizar testes, a fim de verificar o correto funcionamento do simulador, possibilitando assim sua validação. Para tal, é necessário simular alguns casos – sobretudo aqueles envolvendo os limites das faixas – e verificar as fórmulas inseridas.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

"No llores porque ya se terminó, sonríe porque sucedió."

Gabriel García Márquez[1]

A pandemia da Covid-19 acometeu o mundo inteiro do final de 2019 até o presente momento. As diversidades foram acentuadas, as desigualdades escancaradas e as múltiplas realidades prejudicadas. A Educação como um todo tem sido fortemente comprometida. Enquanto escrevíamos esta dissertação, testemunhávamos cenários local, regional e global extremamente difíceis, desafiadores e tristes. Desse modo, infelizmente não fomos capazes de aplicar a atividade proposta para então analisar seus resultados.

Nossa expectativa com o produto educacional, lançando mão da Resolução de Problemas e da Simulação, é propor uma atividade diferente das usuais, optamos por um viés criativo, colaborativo, participativo, tecnológico e aberto à criticidade. Esperamos promover discussões e levar nossos estudantes a olharem a Matemática de um jeito diferente, como uma ciência mais humana, dinâmica e presente em nossas vidas. O professor ou a professora que decidir utilizar nossa proposta poderá, em particular na primeira e na segunda atividades propostas, despertar em seus estudantes consciência crítica, econômica, ambiental e cidadã, ao levantar a questão da água, recurso natural indispensável à vida, fonte de interesses e de disputas, embora abundante em nosso território, muitas vezes, inacessível à população mais pobre de nosso país. Além disso, faz-se importante discutir o trajeto da água desde sua captação até tornar-se esgoto, e como este é tratado e descartado.

Por fim, o modelo de cobrança deve ser compreendido e bem analisado. Nosso viés adotado pretende saber se os estudantes conseguem aplicar os conceitos de funções poligonais, resolver e interpretar situações-problema relacionadas a essas funções. Com o simulador de fatura, intencionamos aproximar tecnologias – tão inerentes às novas gerações – à sala de aula, estimular a criatividade, o desenvolvimento do raciocínio lógico e da lógica de programação e a capacidade de representar situações reais em ambientes virtuais para compreendê-las e estudá-las melhor, inclusive ampliar o estudo de outros sistemas de modelo progressivo/regressivo de cobrança.

[1] Não chore porque acabou, sorria porque aconteceu.

REFERÊNCIAS

ABREU, M. A. M. de. **Metodologia do ensino de matemática**. Florianópolis: UFSC/LED, 2002.

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados: Análise de uma Experiência**. Tese de Doutorado em Educação Matemática, 2005.

BELLEMAIN, F.; BELLEMAIN, P. M. B.; GITIRANA, V. Simulação no ensino da matemática: Um exemplo com cabri-géomètre para abordar conceitos de área e perímetro. **III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Águas de Lindóia - SP, 2006.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

BRASIL. Decreto n. 11.445, de 17 de dezembro de 2002. Regulamenta a Contribuição para o PIS/Pasep e a Cofins devidas pelas pessoas jurídicas em geral. Brasília, DF: Senado, 2002.

BRASIL. Decreto n. 7.217, de 21 de junho de 2010. Regulamenta a Lei no 11.445, de 5 de janeiro de 2007. Brasília, DF: Senado, 2010.

BRASIL. Lei Complementar n. 7, de 7 de setembro de 1970. Institui o Programa de Integração Social, e dá outras providências. Brasília, DF: Senado, 1970.

BRASIL. Lei Complementar n. 70, de 30 de dezembro de 1991. Institui contribuição para financiamento da Seguridade Social, eleva a alíquota da contribuição social sobre o lucro das instituições financeiras e dá outras providências. Brasília, DF: Senado, 1991.

BRASIL. Lei n. 11.445, de 5 de janeiro de 2007. Estabelece as diretrizes nacionais para o saneamento básico. Brasília, DF: Senado, 2007.

BRASIL. Lei n. 12.741, de 8 de dezembro de 2012. Dispõe sobre as medidas de esclarecimento, de que trata o parágrafo 5 do art. 150 da Constituição Federal. Brasília, DF: Senado, 2012.

BRASIL. Lei n. 8.212, de 24 de julho de 1991. Dispõe sobre a organização da Seguridade Social, institui Plano de Custeio, e dá outras providências. Brasília, DF: Senado, 1991.

BRASIL. Lei n. 8.987, de 13 de fevereiro de 1995. Dispõe sobre o regime de concessão e permissão da prestação de serviços públicos previsto no art. 175 da Constituição Federal. Brasília, DF: Senado, 1995.

BRASIL. Lei n. 9.718, de 27 de novembro de 1998. Altera a Legislação Tributária Federal. Brasília, DF: Senado, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília - DF, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 26 jan. 2021.

CAI, J.; LESTER, F. Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno? **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 60, p. 241–254, 2012.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As Idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1999.

DANTE, L. R. **Criatividade e Resolução de problemas na Prática Educativa Matemática**. Tese de Livre Docência, Rio Claro, 1988.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto&aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. 1.

EMBASA. **Guia do usuário**. Salvador - BA, 2018. Disponível em: <http://old.embasa.ba.gov.br/centralservicos/index.php/downloads/finish/3-material-educativo/18-guia-do-usuario>. Acesso em: 5 maio 2020.

FERREIRA, A. B. H. **Novo Dicionário da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1975.

HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 1.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar: conjuntos, funções**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 1.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. v. 1.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LUBISCO, N. M. L.; VIEIRA, S. C. **Manual de estilo acadêmico: trabalhos de conclusão de curso, dissertações e teses**. 6. ed. Salvador: EDUFBA, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/29414/3/manual-de-estilo-academico-6ed-miolo-RI.pdf>. Acesso em: 03 mar. 2021.

MARKOVITS, Z.; EYLON, B. S.; BRUCKHEIMER, M. Functions today and yesterday. In: ____. **For the Learning of Mathematics**. [S.l.: s.n.], 1986. v. 6, n. 2, p. 18–28.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: ____. **BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. v. 6, n. 2, cap. 12, p. 199–220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. In: ____. **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)**. Rio Claro: UNESP, 2011. v. 25, n. 41, p. 73–98.

ONUCHIC, L. R. et al. **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2019.

PEDRO, M. V.; SAMPAIO, F. F. Pcns e modelagem computacional: Reflexões a partir de relatos de experimentos com o software wlinkit. **XXV Congresso da Sociedade Brasileira de Computação**, São Leopoldo - RS, 2005.

PEREIRA, W. C. A. **Resolução de Problemas Criativos: ativação da capacidade de pensar**. Brasília: Embrapa-DID, 1980.

PÓLYA, G. **How to solve it**. Princeton: Princeton University Press, 1945.

POZO, J. I. et al. **A Solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: ____. **TRATFON, P. R.; SHULTE, A. P. (eds.). New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31–42.

SILVA, R. da. **Direito Tributário**. 12. ed. Brasília: VESTCON, 2005.

TAJRA, S. F. **Informática na Educação: Novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade**. 4. ed. São Paulo: Érica, 2001.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 14, n. 3, p. 293–305, 1983.

WAGNER, D. R. We have a problem here: 5 + 20 = 45. **The Mathematics Teacher MT**, v. 96, n. 9, p. 612–616, 2003.

APÊNDICE A – PLANILHAS ELETRÔNICAS

Este apêndice tem o intuito não de ser um tutorial completo, mas de fornecer informações básicas acerca de planilhas eletrônicas, bem como apresentar alguns de seus recursos com vistas à construção do simulador de fatura.

Planilha Eletrônica é um tipo de programa de computador que utiliza tabelas para realização de cálculos, geração de gráficos, armazenagem de dados, emissão de relatórios, preenchimento de formulários, informatização de processos, entre outras funções. Atualmente, podemos também utilizar planilhas eletrônicas em *smartphones* e *tablets*.

Existem inúmeros[1] programas de planilha eletrônica e todos eles possuem diversos recursos. Para nossas demonstrações, sem prejuízos, utilizaremos o *Microsoft Excel 2019*. Por possuírem funções e sintaxes bastante semelhantes, é possível facilmente adaptar a escrita e os comandos para outros programas com mesmo propósito.

A planilha eletrônica será o ambiente no qual o produto educacional se concretizará. Portanto, faz-se necessário conhecer sua interface e alguns de seus recursos, os quais serão apresentados a seguir.

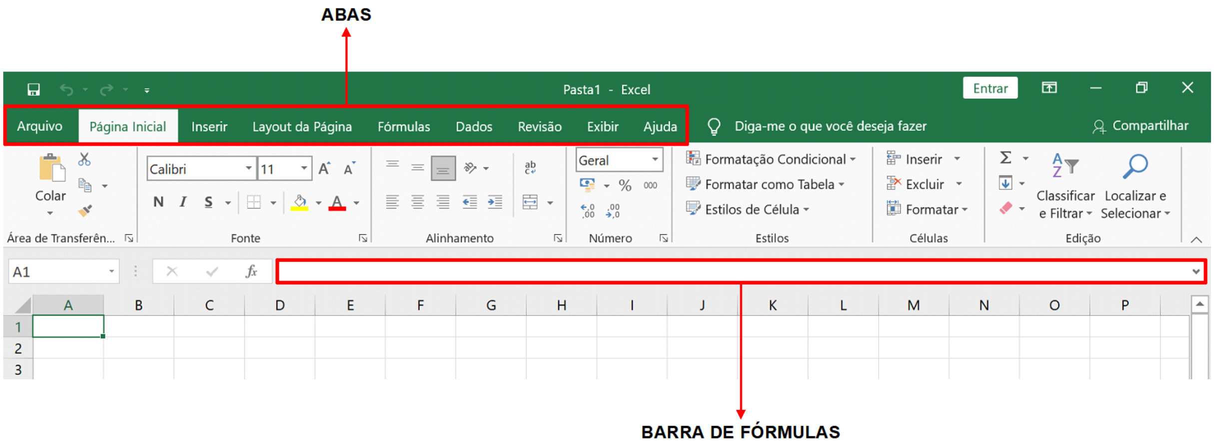
Tela inicial

Ao abrir um novo arquivo no *Excel* 2019, o programa exibe uma tela inicial, na qual pode-se visualizar algumas suas ferramentas e recursos, distribuídos em menus, e uma planilha eletrônica em branco. Nela as *células*, unidades fundamentais, estão dispostas em colunas e linhas, representadas por letras e números, respectivamente. Desse modo, cada célula possui um endereço único, que a identifica, localiza e difere das demais. O *retângulo de seleção* é o retângulo que indica qual célula está ativa no momento. Na Figura 20, o retângulo de seleção está na célula *A1*, localizada na coluna A e na linha 1.

Na porção superior da tela inicial destacam-se as abas e a barra de fórmulas. As abas contêm os recursos do programa e são divididas por funcionalidade. A barra de fórmulas exibe e permite alterar o conteúdo da célula ativa, isto é, sobre a qual está posicionado o retângulo de seleção.

[1] *Apache OpenOffice, BIRT, Free Office, Google Sheets, Libre Office, Numbers, Quip, Thinkfree, Zoho Sheet.*

Figura 20 – Tela inicial do *Excel* 2019



Fonte: Elaborada pelo autor.

Construção de tabelas

A construção de tabelas, para qualquer fim, pressupõe a utilização das informações contidas nas células da planilha, juntamente com os recursos do programa. Portanto, deve-se conhecer a forma de selecionar células, inserir os conteúdos desejados e utilizar as funções necessárias para obter as respostas esperadas. Por necessidade ou estética, recorre-se também à formatação da tabela para conferi-la uma visualização mais organizada e harmoniosa, com intuito de dispor os dados de forma mais clara.

Seleção

Selecionar uma célula significa torná-la ativa e, por conseguinte, pronta para utilização. Uma seleção pode envolver uma célula isolada, células dispostas em retângulo ou até mesmo células aleatórias. Em qualquer caso, a seleção se dá através do *mouse* e/ou do teclado.

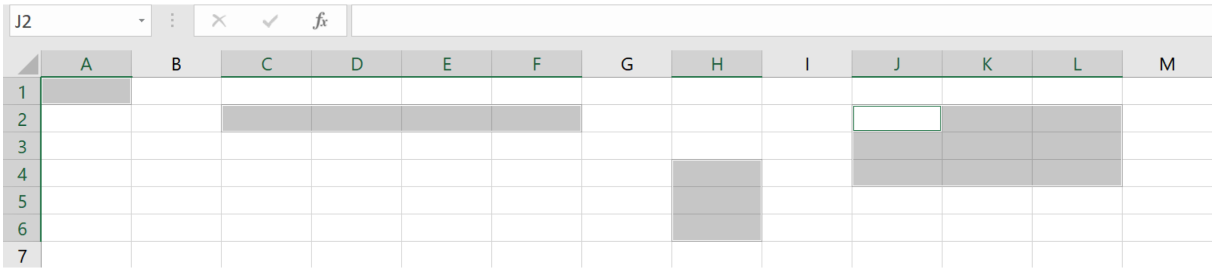
Um *retângulo* é uma disposição sequencial de células com mais de uma coluna ou mais de uma linha. Ele é identificado por suas células inicial e final. Quando possui uma única linha ou uma única coluna, é chamado também de *faixa horizontal* ou *faixa vertical*, respectivamente.

Seleções com o *mouse* são feitas clicando-se sobre a célula desejada e/ou arrastando-a até a célula final. Para selecionar uma faixa, posiciona-se o cursor na célula inicial, mantém-se o botão esquerdo do *mouse* pressionado e arrasta-se o retângulo de seleção até a célula final da faixa, momento no qual o botão esquerdo deve ser liberado. Durante este processo, as células marcadas ficam com fundo escuro, para que se tenha controle da área selecionada.

Uma seleção aleatória acontece ao se manter pressionada a tecla CTRL e clicar individualmente nas células desejadas.

Para selecionar uma faixa de células com o teclado, posiciona-se o retângulo de seleção sobre a célula inicial da faixa, mantém-se pressionada a tecla SHIFT e move-se o retângulo de seleção com as teclas de seta até o final da faixa. Ao atingir essa posição, a tecla SHIFT deve ser liberada.

Figura 21 – Exemplos de seleção de células



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 21 encontram-se exemplos de seleção. Uma célula isolada, *A1*, uma faixa horizontal, *C2:F2*, uma faixa vertical, *H4:H6* e um retângulo, *J2:L4*. Todas essas seleções configuram também, juntas, uma seleção aleatória.

Para desmarcar uma seleção, basta clicar sobre qualquer célula da planilha que não esteja marcada, desde que não haja teclas pressionadas.

Conteúdo das células

A função de uma célula é armazenar informações, que podem ser um texto, um número, um comando ou uma fórmula que faça menção ao conteúdo de outras células. Neste último caso, a informação de uma célula está *indexada* ou depende da informação de outra célula.

Para inserir dados numa célula, deve-se selecioná-la e digitar o conteúdo desejado, ou na própria célula, ou na barra de digitação. Após inserido, basta clicar ENTER ou apertar o botão ✓na barra de fórmulas.

Formatação da Planilha

Formatar significa dar forma. Trata-se de ajustar os parâmetros visuais para um formato desejado. Sobre algumas possibilidades de formatação, destacamos as abas e os menus a seguir:

- Página Inicial: concentra os principais elementos de formatação do *Excel* 2019, a saber: Fonte, Alinhamento, Número e Células.
- Fonte: permite alterar características como tipo, tamanho e cor de letra, estilo da fonte, efeitos de destaque, bem como características das células, tais quais tamanho, cor, preenchimento e bordas.
- Alinhamento: permite alterar os alinhamentos vertical e horizontal do texto, a saber: à esquerda, centralizado, à direita e justificado (apenas horizontal). Também traz os recursos de quebra automática de texto e mesclagem de células.

- Número: permite alterar características de conteúdo da célula, em especial a forma como o programa o interpreta. Assim, um número pode ter configuração geral (padrão) ou ser entendido como moeda, data, hora, porcentagem, fração, científico ou texto comum.
- Células: permite alterar características como estilos visuais, largura, altura, proteção, inserção e exclusão de células.

Símbolos

Símbolos são caracteres especiais com função própria dentro da linguagem do programa. Eles servem sobretudo para realizar operações aritméticas e fazer testes comparativos.

Cálculos aritméticos podem ser realizados digitando-se valores constantes ou fazendo menção a conteúdos de outras células. Exibimos a seguir a Tabela 7, contendo símbolos e exemplos de operações aritméticas básicas.

Tabela 7 – Operações aritméticas

Símbolo	Operação	Exemplo numérico	Exemplo de menção a células
+	adição	=1+2	=A1+B2
-	subtração	=10-25	=F3-H8
*	multiplicação	=3*5	=C4*D1
/	divisão	=49/21	=E2/G2
ˆ	potenciação	=4ˆ3	=A3ˆB6

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao criar um cálculo que possua mais de uma operação matemática, deve-se levar em consideração a precedência de operadores, ou seja, qual operação o *Excel* fará primeiro. Por padrão, a ordem de preferência é dada por:

1. potenciação;
2. multiplicação e divisão;
3. soma e subtração.

Em situações envolvendo muitas operações, utilizam-se os parênteses a fim de estabelecer a ordem de preferência de execução das operações.

Sinais Comparativos

Os sinais comparativos são utilizados em testes lógicos ou em expressões envolvendo condicionais. A Tabela 8 traz os símbolos comparativos mais comuns.

Tabela 8 – Sinais comparativos

Símbolo	Significado
>	maior que
<	menor que
>=	maior ou igual a
<=	menor ou igual a
=	igual a
<>	diferente de

Fonte: Elaborada pelo autor.

Funções e Fórmulas

No contexto de planilhas eletrônicas, entende-se por *função* um comando predefinido, ou criado pelo usuário, que recebe uma informação e devolve uma resposta. O termo *fórmula* refere-se a expressões, simples ou complexas, envolvendo funções e/ou operações matemáticas. Uma fórmula, portanto, pode conter vários operadores ou funções distintas. Por esse motivo, é comum o uso de parênteses, de modo a delimitar os termos e/ou indicar a ordem de preferência dos operadores envolvidos.

Toda função possui uma *sintaxe*, isto é, uma forma própria de escrevê-la, obedecendo-se determinada ordem ou estrutura, de modo que o programa entenda e execute a operação desejada. Erros de sintaxe não retornam a informação esperada. O *Excel* abre uma pequena faixa-lembrete de sintaxe ao escrever-se, dentro da célula, *=FUNÇÃO(*, isto é, o sinal de igualdade, o nome da função e o parêntese esquerdo.

Faz parte da sintaxe de uma função seus *argumentos*, ou seja, as informações dadas para que a função retorne um resultado. Os argumentos podem ser números, fórmulas, textos, valores lógicos, matrizes, valores de erro ou referências a células. Dentro da sintaxe de uma função, argumentos entre colchetes são sempre opcionais.

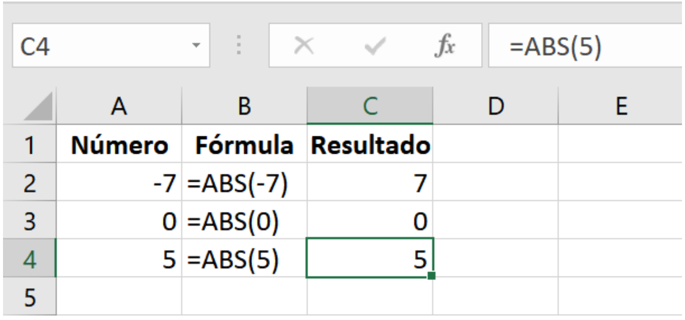
A estrutura de uma função começa com um sinal de igual (=), seguido do nome da função, um parêntese de abertura, os argumentos da função separados por vírgulas e um parêntese de fechamento.

A função ABS

- Descrição/Objetivo: Retorna o valor absoluto de um número.
- Sintaxe: =ABS(núm)
- Argumento:

  núm: é o número real cujo valor absoluto deseja-se obter.

Figura 22 – Exemplos da função ABS



C4 =ABS(5)

	A	B	C	D	E
1	**Número**	**Fórmula**	**Resultado**		
2	-7	=ABS(-7)	7		
3	0	=ABS(0)	0		
4	5	=ABS(5)	5		
5					

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nos exemplos da Figura 22, a função ABS necessita apenas da informação numérica, retornando seu valor absoluto. Caso se queira criar a função modular, basta atribuir ao argumento da função ABS a célula indexada, a qual fará o papel da variável. Assim, =ABS(A2) calcula o valor absoluto de *A2*, qualquer que seja seu valor.

A função DEGRAU

- Descrição/Objetivo: Devolve 1 se o número é maior ou igual a um valor limite; caso contrário, devolve 0. Utiliza-se esta função para filtrar um conjunto de valores.
- Sintaxe: =DEGRAU(número;[passo])
- Argumentos:

  número: é o valor a ser testado em relação a passo.

  [passo]: é o valor limite. Se ele não for informado, o programa atribui ao passo o valor zero.

Figura 23 – Exemplos da função DEGRAU

D4 =DEGRAU(5;2)

	A	B	C	D	E
1	**Número**	**Passo**	**Fórmula**	**Degrau**	
2	-7	-3	=DEGRAU(-7;-3)	0	
3	0	0	=DEGRAU(0;0)	1	
4	5	2	=DEGRAU(5;2)	1	
5					

Fonte: Elaborada pelo autor.

No primeiro exemplo da Figura 23, =DEGRAU(-7;3) testou que o número -7 é menor que o (passo) -3, atribuindo portanto valor de saída 0. No segundo exemplo, como 0 é igual a si próprio, =DEGRAU(0;0) retornou o valor 1. No terceiro caso, =DEGRAU(5,2) verificou que 5 (número) é menor que 2 (passo), devolvendo o valor 1. Para criar a função degrau, basta estabelecer o passo e indexar o argumento número à célula desejada. Assim, =DEGRAU(A2;0) é a função que verifica se o valor de A2 é menor que zero – retornando 0 –, ou maior ou igual a zero – retornando 1.

A função E

- Descrição/Objetivo: A função E retornará VERDADEIRO se todos os seus argumentos forem avaliados como VERDADEIRO e retornará FALSO se um ou mais argumentos forem avaliados como FALSO.
- Sintaxe: =E(lógico1, [lógico2], ...)
- Argumentos:

  lógico1: A primeira condição que você deseja testar que pode ser avaliada como VERDADEIRO ou FALSO.

  [lógico2], ...: Opcional. Condições adicionais que você deseja testar que podem ser avaliadas como VERDADEIRO ou FALSO, até um máximo de 255 condições.

Figura 24 – Exemplos da função E

C5 | =E(A5>=7;A5<=10)

	A	B	C	D
1	**Número**	**Fórmula**	**Resultado**	
2	6	=E(A2>=7;A2<=10)	FALSO	
3	7	=E(A3>=7;A3<=10)	VERDADEIRO	
4	8	=E(A4>=7;A4<=10)	VERDADEIRO	
5	11	=E(A5>=7;A5<=10)	FALSO	
6				

Fonte: Elaborada pelo autor.

Todos os exemplos da Figura 24 tratam de verificar se o referido número pertence ou não ao intervalo em questão. No último caso, utilizamos a função E para testar se o número 11, que está na célula *A5*, é maior do que 7 e menor do que 10. O resultado FALSO é, portanto, mostrado na célula *C5*.

A função E é bastante utilizada em associação com outras funções, a exemplo da SE. Um uso comum para a função E é expandir a utilidade de outras funções que realizam testes lógicos. Por exemplo, a função SE realiza um teste lógico e, em seguida, retornará um valor se o teste for avaliado como VERDADEIRO e outro valor se o teste for avaliado como FALSO. Usando a função E como argumento *teste_lógico* da função SE, você pode testar várias condições diferentes em vez de apenas uma.

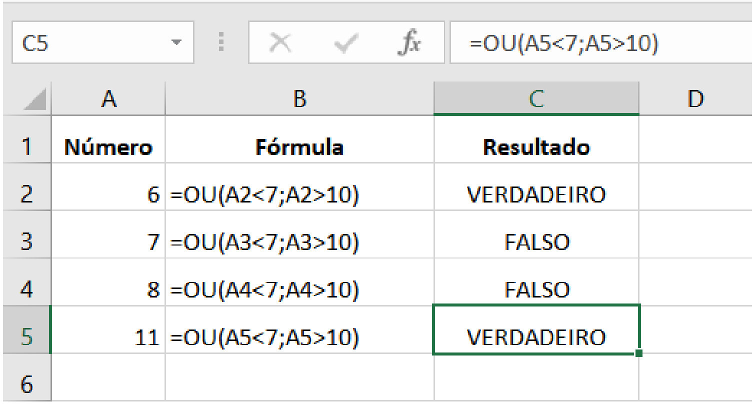
A função OU

- Descrição/Objetivo: A função OU retornará VERDADEIRO se qualquer um dos argumentos for avaliado como VERDADEIRO e retornará FALSO se todos os argumentos forem avaliados como FALSO.
- Sintaxe: =OU(lógico1, [lógico2], ...)
- Argumentos:

  lógico1: A primeira condição que você deseja testar que pode ser avaliada como VERDADEIRO ou FALSO.

  [lógico2], ...: Opcional. Condições adicionais que você deseja testar que podem ser avaliadas como VERDADEIRO ou FALSO, até um máximo de 255 condições.

Figura 25 – Exemplos da função OU



C5 =OU(A5<7;A5>10)

	A	B	C	D
1	**Número**	**Fórmula**	**Resultado**	
2	6	=OU(A2<7;A2>10)	VERDADEIRO	
3	7	=OU(A3<7;A3>10)	FALSO	
4	8	=OU(A4<7;A4>10)	FALSO	
5	11	=OU(A5<7;A5>10)	VERDADEIRO	
6				

Fonte: Elaborada pelo autor.

Todos os exemplos da Figura 25 tratam de verificar se o referido número satisfaz alguma das condições colocadas no comando. No último caso, utilizamos a função OU para testar se o número 11, que está na célula *A5*, é menor do que 7 ou maior do que 10. O resultado VERDADEIRO é, portanto, mostrado na célula *C5*.

Um uso comum para a função OU é expandir a utilidade de outras funções que realizam testes lógicos. Por exemplo, a função SE realiza um teste lógico e retornará um valor se o teste for avaliado como VERDADEIRO e outro valor se o teste for avaliado como FALSO. Usando a função OU como argumento *teste_lógico* da função SE, você pode testar várias condições diferentes em vez de apenas uma.

A função SE

- Descrição/Objetivo: Especifica um teste lógico a ser executado, retornando um valor caso o teste resulte Verdadeiro e outro caso Falso.
- Sintaxe: =SE(teste_lógico;[valor_se_verdadeiro];[valor_se_falso])
- Argumentos:

  teste_lógico: condição a ser verificada.

  [valor_se_verdadeiro]: caso a condição seja verificada, retorna o valor escolhido.

  [valor_se_falso]: caso a condição não seja verificada, retorna o valor escolhido.

Figura 26 – Exemplos da função SE

C5 =SE(OU(A5<7;A5>10);0;1)

	A	B	C	D
1	**Número**	**Fórmula**	**Resultado**	
2	5	=SE(A2<=6;A2;A2+1)	5	
3	7	=SE(A3>7;0;2*A3)	14	
4	8	=SE(E(A4>=7;A4<=10);A4-7;0)	1	
5	11	=SE(OU(A5<7;A5>10);0;1)	0	
6				

Fonte: Elaborada pelo autor.

No primeiro exemplo da Figura 26, o primeiro argumento da função *SE* (a condição *A2<=6*), testa de o valor encontrado na célula *A2* é menor ou igual a 6; o segundo argumento (*A2*) é o valor de retorno se o teste resultar em verdadeiro; o terceiro argumento (*A2+1*) é o valor de retorno, caso contrário, isto é, se *A2* é maior que 6.

No segundo exemplo, caso o valor em *A3* seja maior que 7, a função retornará 0; caso contrário, *2*A3* (o produto de 2 por *A3*).

O terceiro e quarto exemplos misturam a função *SE* com *E* e *OU*, respectivamente. Isto é bastante comum quando se deseja que duas ou mais condições sejam avaliadas simultaneamente. Neste terceiro exemplo, caso o valor em *A4* seja maior ou igual a 7 e menor ou igual a 10, então calcula-se *A4-7*; caso contrário, retorna-se 0. No quarto e último exemplo, se *A5* for menor que 7 ou maior que 10, retorna-se 0; caso contrário, 1.

Por definição, caso não se informem os valores lógicos do teste para a função *SE*, o programa automaticamente atribui 1, se verdadeiro, e 0, se falso.

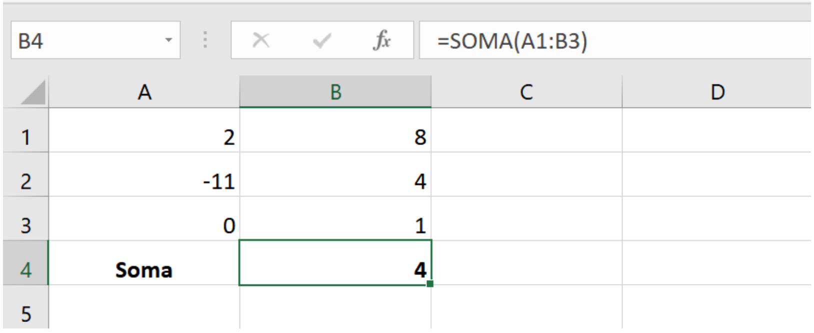
A função SOMA

- Descrição/Objetivo: Somar valores. É possível adicionar valores individuais, referências de célula ou intervalos, ou uma mistura dos três.
- Sintaxe: =SOMA(número1;[número2]; ...)
- Argumentos:

  número1: representa o primeiro número que se deseja somar. Ele pode ser um número, uma referência de célula ou um intervalo de células.

  [número2], ...: este e os seguintes são opcionais e obedecem a mesma característica anterior. É possível especificar até 255 números dessa maneira.

Figura 27 – Exemplos da função SOMA



Fonte: Elaborada pelo autor.

No exemplo da Figura 27, a função *SOMA* recebeu como argumento e identificou o retângulo *A1:B3*, somando todos os seus elementos e devolvendo o resultado.