

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

Curso de Pós-Graduação Profissionalizante em Matemática - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

Andréa Ribeiro de Souza Ottoni
Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

**Geometria dinâmica no estudo de congruência
e semelhança de triângulos na
Geometria Euclidiana**

Santo André - SP
Agosto de 2013.

Curso de Pós-Graduação Profissionalizante em Matemática - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

Andréa Ribeiro de Souza Ottoni

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

**Geometria dinâmica no estudo de congruência
e semelhança de triângulos na
Geometria Euclidiana**

Trabalho apresentado junto ao Programa de Mestrado Profissionalizante em Matemática da Universidade Federal do ABC como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação do Professor Doutor Márcio Fabiano da Silva

Santo André,
07 de agosto de 2013.



Universidade Federal do ABC

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata **Andréa Ribeiro de Souza Ottoni**, realizada em 07 de agosto de 2013.

Márcio Fabiano da Silva

Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva (UFABC) – Presidente

Alexandre LyMBERopoulos

Prof. Dr. Alexandre LyMBERopoulos (USP) – Membro Titular

S. Lodovici

Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici (UFABC) – Membro Titular

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos (UFAM) – Membro Suplente

Prof. Dr. Igor Leite Freire (UFABC) – Membro Suplente

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 22 de AGOSTO de 2013.

Assinatura do autor: .

Assinatura do orientador: Márcio Fabiano da Silva

Dedico este trabalho aos meus pais e a minha filha.

Agradecimentos

Aos meus pais, Homero (in memoriam) e Luana, por acreditarem em mim, financiarem meus estudos até a graduação e por todo o carinho com a minha filha durante a minha ausência. A minha querida filha Luana, que suportou minha ausência nestes dois anos de uma maneira maravilhosa. Aos meus professores, principalmente meu orientador Márcio Fabiano da Silva, que me incentivou e me atendeu prontamente quando precisei e ao prof. Sinuê Dayan Barbero Lodovici que se prontificou a ajudar a todos os alunos, mesmo os alunos que não estavam sob sua orientação, com o LaTeX. A banca examinadora pela disponibilidade bem como pelas contribuições ao trabalho. A minha chefia nas escolas em que leciono que tiveram paciência e tolerância com minhas ausências. Aos meus colegas do mestrado e aos meus amigos que sentiram a minha falta nos fins de semana. À CAPES, pelo auxílio concedido.

A todos, meus sinceros agradecimentos.

Resumo

Baseados no livro de Moise [8], apresentamos neste trabalho uma teoria axiomática para os conceitos de congruência e semelhança de triângulos na Geometria Euclidiana Plana. Exploramos estes conceitos com o uso do software de geometria dinâmica Régua e Compasso (CaR). A dissertação está dividida em três partes. Na primeira parte, discutimos os principais resultados a respeito de congruência e semelhança de triângulos. Na segunda parte, discutimos o software “régua e compasso”, detalhando a funcionalidade de cada um dos botões. Finalmente, na última parte, propomos atividades que exploram o conceito de congruência e semelhança de triângulos a partir do software.

Palavras-Chave

Geometria Euclidiana, congruência, semelhança, triângulo, software dinâmico

Abstract

Based on the book of Moise [8] in this work we present an axiomatic theory about the concepts of congruence and similarity of triangles in the plane Euclidean Geometry. We explore these concepts with the use of the dynamic geometry software named Compass and Ruler. The dissertation is divided in three parts. In the first part we show the main results on congruence and similarity of triangles. In the second part we discuss the Compass and Ruler software by showing how it works. In the last part we suggest some activities which explore the concepts of congruence and similarity of triangles with the use of the software.

Keywords

Euclidean geometry, congruence, similarity, triangles, dynamic software.

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	3
2.1	Postulados de Incidência	3
2.2	Postulados de Ordem	4
2.3	Postulados de Separação	8
2.4	Postulados de Medição de Ângulos	10
3	Congruência entre Triângulos	13
3.1	Critérios de congruência e consequências	13
3.1.1	Postulado LAL de Congruência	14
3.2	Desigualdades Triangulares	20
4	Postulado das Paralelas	29
4.1	Condições suficientes para o paralelismo	29
4.2	Postulado das Paralelas	31
4.3	Projeções paralelas	33
5	Semelhança entre Triângulos	39
5.1	Semelhança	40
5.2	Teorema de Pitágoras	44
6	Construções Elementares com Régua e Compasso	49
6.1	Postulado 1	50
6.2	Postulado 2	50
6.3	Algumas construções Básicas	50

7	Software Régua e Compasso	59
7.1	Software “Régua e Compasso”	59
7.2	Barra de ferramentas	59
7.3	Índice	61
7.4	Atividades para praticar	68
8	Atividades	71
8.1	Atividade 1: Criar Macro - Triângulos Congruentes (<i>LAL</i>)	71
8.2	Atividade 2: Criar Macro - Triângulos Congruentes (<i>ALA</i>)	75
8.3	Atividade 3: Criar Macro - Triângulos Congruentes (<i>LLL</i>)	79
8.4	Atividade 4: Criar Macro - Triângulos Semelhantes (<i>AAA</i>)	82
8.5	Atividade 5: Criar Macro - Triângulos Semelhantes (<i>LLL</i>)	86
8.6	Atividade 6: Criar Macro - Triângulos Semelhantes (<i>LAL</i>)	90
8.7	Atividade 7: Criar Macro - Demonstração do Teorema de Pitágoras	94
8.7.1	Demonstração do Teorema de Pitágoras	94
8.8	Atividade 8: Criar Macro - Verificação do Teorema de Pitágoras.	99
9	Comentários Finais	101
	Bibliografia	103

Lista de Figuras

2.1	Segmento de reta	5
2.2	Semirreta	6
2.3	Ângulos	6
2.4	Triângulo	6
2.5	Teorema 2.5	9
2.6	Teorema 2.6	9
2.7	Teorema 2.7	10
3.1	Postulado LAL de Congruência	15
3.2	Teorema do triângulo isósceles	15
3.3	Teorema 3.2	16
3.4	Caso ALA de congruência	17
3.5	Demonstração do caso ALA	17
3.6	Demonstração do caso LLL	18
3.7	$A = G$	18
3.8	$G - A - C$	19
3.9	Bissetriz	19
3.10	Desigualdade angular	20
3.11	Desigualdade entre segmentos	21
3.12	Ângulo Externo	21
3.13	Ângulos Externos e Internos	21
3.14	Teorema do Ângulo Externo	22
3.15	Corolário 3.4	23

3.16	Demonstração Proposição 3.1	23
3.17	Menor distância entre um ponto e uma reta	25
3.18	Desigualdade triangular	25
3.19	Desigualdade triangular	26
3.20	Proposição 3.4	26
3.21	Demonstração Proposição 3.4	26
3.22	Demonstração Proposição 3.4	27
3.23	Caso LAA de Congruência	28
4.1	$r, s \parallel t$	30
4.2	Classificação de ângulos entre retas	30
4.3	Demonstração do teorema 4.4	31
4.4	Soma dos ângulos Internos de um Triângulo	32
4.5	Projeção Vertical	33
4.6	Projeção Paralela	34
4.7	Projeções Paralelas	34
4.8	Demonstração Teorema 4.7	35
4.9	Corolário 4.2	36
5.1	Semelhança entre Triângulos	40
5.2	Demonstração do caso AAA	41
5.3	Demonstração do caso LLL	42
5.4	Demonstração do caso LAL	43
5.5	Proposição 5.1	44
5.6	Teorema de Pitágoras	45
5.7	Recíproca do Teorema de Pitágoras	46
5.8	Razão de semelhança	47
6.1	Circunferências	51
6.2	Transporte de um segmento	51
6.3	Transporte de um ângulo	52
6.4	Transporte de um triângulo	52

6.5	Mediatriz	53
6.6	Demonstração Teorema 6.1	53
6.7	Construção Fundamental 1	54
6.8	Bissetriz	54
6.9	Teorema 6.2 - Bissetriz	55
6.10	Teorema 6.2 - Bissetriz	55
6.11	Teorema 6.2 - Bissetriz	56
6.12	1º caso - Reta perpendicular	56
6.13	2º caso - Reta perpendicular	57
6.14	Construção Fundamental 4	57
6.15	Traçado de uma paralela	58
7.1	Janela “Configurações”	60
7.2	Janela “Editar barra de ícones”	60
7.3	Tela Principal	60
8.1	Caso LAL de Congruência	72
8.2	Caso ALA de Congruência	75
8.3	Caso LLL de Congruência	79
8.4	Caso AAA de Semelhança	82
8.5	Caso LLL de Semelhança	86
8.6	Caso LAL de Semelhança	90
8.7	Teorema de Pitágoras	94
8.8	Demonstração do Teorema de Pitágoras	97
8.9	Verificação do Teorema de Pitágoras	99

Capítulo 1

Introdução

A geometria surgiu de forma intuitiva, através da necessidade e da observação da natureza pelo homem. Os registros mais antigos que se tem de atividades humanas acerca da geometria remontam à época das antigas civilizações da Mesopotâmia. Em 300 a.C., Euclides, um matemático grego, publicou uma série de 13 livros intitulada “Os Elementos”. Em sua homenagem, a geometria plana que é trabalhada no ensino básico é conhecida como Geometria Euclidiana Plana. Neste trabalho, Euclides constrói axiomáticamente a geometria plana.

O método axiomático consiste na construção de uma teoria na qual os resultados devem ser demonstrados a partir de certas afirmações, que são supostas verdadeiras, conhecidas como Axiomas ou Postulados. Apesar do belíssimo e rigoroso trabalho feito por Euclides em Os Elementos, muitos termos e conceitos ali presentes não estavam claros e bem definidos. Por exemplo, o livro I trata de geometria plana e sua construção baseia-se nas dez seguintes proposições, sendo as cinco primeiras Axiomas e as cinco últimas Postulados:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.
2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
5. O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.
6. Existe uma única reta contendo dois pontos dados.
7. Todo segmento de reta pode ser estendido indefinidamente em todas as direções.
8. Existe uma circunferência com quaisquer centro e raio dados.

9. Todos os ângulos retos são iguais entre si.
10. Se uma reta intersecta outras duas retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se estendidas indefinidamente, interceptam-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Este último postulado é conhecido como V Postulado de Euclides ou Postulado das Paralelas. Nele é que se baseiam a geometria Euclidiana e as chamadas Geometrias Não-Euclidianas.

O desenvolvimento da Análise e da Teoria dos Conjuntos, principalmente no início do Século XX, deram à Geometria a possibilidade de uma nova abordagem, no que se refere à construção de uma teoria axiomática, sendo David Hilbert um dos maiores responsáveis pelo desenvolvimento dessas áreas. No trabalho *The Foundations of Geometry*, Hilbert supõe a existência de três relações primitivas que são expressas por um ponto pertence a uma reta, um ponto está entre dois pontos e a relação de congruência. Essas relações devem satisfazer uma série de axiomas, divididos nos seguintes grupos: Incidência, Ordem, Continuidade, Medida e Congruência.

Para o desenvolvimento desta dissertação, admitiremos, o Postulado das Paralelas em uma de suas formas equivalentes, devido a Playfair: dados uma reta e um ponto fora dela, existe uma única reta passando pelo ponto dado e paralela à reta dada. Para a construção da geometria plana, baseamo-nos no livro de Moise [8]. Para esta construção, admitimos, por exemplo, as propriedades dos números reais. É o caso do Postulado da Reta, que afirma que toda reta tem um sistema de coordenadas.

Nosso trabalho está dividido em três partes: na primeira, apresentamos os conceitos de congruência e semelhança de triângulos para a Geometria Euclidiana, de acordo com [8]. Isto será feito nos Capítulos 2, 3, 4 e 5. O Capítulo 2 contém os postulados e as definições e resultados preliminares, necessários para introduzirmos os conceitos de congruência e semelhança de triângulos, que serão detalhados nos Capítulos 3, 4 e 5.

No Capítulo 6, apresentamos a funcionalidade do software Régua e Compasso, que tem distribuição livre e gratuita. Esta foi uma das razões pela escolha deste software no desenvolvimento de nosso trabalho. Outros motivos para sua escolha são a simplicidade operacional que ele oferece e sua qualidade como um software de geometria dinâmica, permitindo-nos explorar conceitos geométricos e programação de macros.

No Capítulo 7, exploramos os conceitos de congruência e semelhança de triângulos com o uso do software Régua e Compasso, por meio de atividades que podem ser propostas e realizadas em sala de aula com alunos do ensino fundamental e médio.

Capítulo 2

Preliminares

Nesta dissertação, pontos, retas e planos são tomados como termos primitivos (não-definidos), sendo a reta e o plano conjunto de pontos. O mesmo acontece com a relação pertencer: pontos pertencentes a retas e planos.

A seguir, serão apresentados postulados, definições e resultados, que serão utilizados na construção dos conceitos de congruência e semelhança de triângulos. Não apresentaremos as demonstrações destes resultados preliminares, que podem ser vistas em detalhes em [8]. Nosso objetivo neste capítulo é fixar notação e mostrar a teoria axiomática que adotamos, passando pelos postulados de incidência e ordem, medidas de segmentos e ângulos e convexidade.

2.1 Postulados de Incidência

Postulado de Incidência 0: Retas e planos são conjuntos de pontos.

Definição 2.1. *Pontos pertencentes a uma reta são chamados colineares e pontos pertencentes a um plano são chamados coplanares.*

Postulado de Incidência 1: Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Notação: dados dois pontos P e Q , a reta que os contém é representada por \overleftrightarrow{PQ} .

Postulado de Incidência 2: Dados três pontos não-colineares, existe um único plano que os contém.

Postulado de Incidência 3: Se dois pontos pertencem a um plano, a reta que os contém está contida nesse plano.

Postulado de Incidência 4: Se dois planos distintos têm algum ponto em comum então sua intersecção é uma reta.

Postulado de Incidência 5: Em toda reta existem pelo menos dois pontos distintos. Todo plano contém pelo menos três pontos não colineares.

Proposição 2.1. *Duas retas distintas interceptam-se no máximo em um ponto.*

Proposição 2.2. *Dados uma reta e um ponto fora dela, há exatamente um plano que contém a reta dada e que passa pelo ponto dado.*

2.2 Postulados de Ordem

A fim de introduzirmos a relação estar-entre para pontos, admitiremos os seguintes postulados de distância:

Postulado de Distância 0: Existe uma função d cujo domínio são os pares de pontos de um espaço geométrico S e cujo contradomínio é \mathbb{R} . Na notação de conjuntos,

$$d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$$

Esta função satisfaz os seguintes postulados.

Postulado de Distância 1: Para cada par de pontos $P, Q \in S$, vale que $d(P, Q) \geq 0$.

Postulado de Distância 2: Para cada par de pontos $P, Q \in S$ vale que $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.

Postulado de Distância 3: Para cada par de pontos $P, Q \in S$, $d(P, Q) = d(Q, P)$.

Notação: $d(P, Q) = PQ$.

A função d que satisfaz os postulados de Distância 0-3 é chamada de função distância.

Definição 2.2. *Seja L uma reta e $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação biunívoca entre L e \mathbb{R} . Dizemos que f é um sistema de coordenadas para L se*

$$PQ = |f(P) - f(Q)|, \forall P, Q \in L.$$

Neste caso, $x = f(P)$ é a coordenada do ponto P .

Postulado de Distância 4: (Postulado da reta) Toda reta admite um sistema de coordenadas.

Proposição 2.3. (teorema da colocação da régua) *Sejam P e Q dois pontos distintos de uma reta L . Existe um sistema de coordenadas no qual a coordenada de P é O (isto é, P é a origem) e a coordenada de Q é positiva.*

Definição 2.3. *Sejam A, B e C três pontos distintos e colineares. Dizemos que B está entre A e C , e escrevemos $A - B - C$ se*

$$AB + BC = AC.$$

Proposição 2.4. *Se $A - B - C$ então $C - B - A$.*

Proposição 2.5. *Dados 3 pontos distintos quaisquer numa reta L , exatamente um deles está entre os outros dois.*

Proposição 2.6. *Sejam A e B dois pontos distintos. Então:*

1. *existe um ponto C tal que $A - B - C$;*
2. *existe um ponto D tal que $A - D - B$.*

A partir da relação estar-entre, definimos segmento de reta e semirreta.

Definição 2.4. *Dados dois pontos distintos A e B em uma reta, o conjunto de pontos formado por A , B e os pontos entre A e B é chamado de segmento entre A e B , que é denotado por \overline{AB} .*

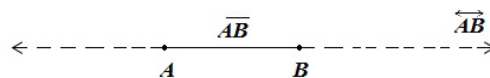


Figura 2.1: Segmento de reta

Definição 2.5. *Dados dois pontos distintos A e B em uma reta, o conjunto de pontos formado por todos os pontos C pertencentes à reta \overleftrightarrow{AB} tal que A não esteja entre C e B é chamado de semirreta. Essa semirreta é representada por \overrightarrow{AB} . O ponto A é chamado de origem da semirreta \overrightarrow{AB} .*

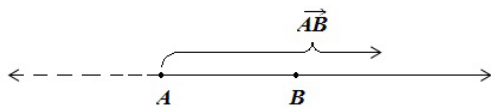


Figura 2.2: Semirreta

Definição 2.6. A união de duas semirretas distintas que possuem a mesma origem, mas não estão contidas em uma mesma reta, é chamada ângulo. Elas são chamadas de lados do ângulo, e sua origem é chamada de vértice do ângulo.

Notação: o ângulo formado pelas semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} será denotado por $\angle BAC$. Quando não houver ambiguidade, usaremos a notação \hat{A} .

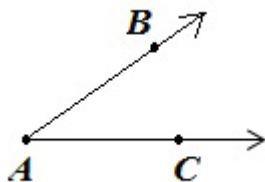


Figura 2.3: Ângulos

Definição 2.7. Dados três pontos A, B e C não colineares, então o conjunto

$$\overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}.$$

é chamado de triângulo.

Notação: $\triangle ABC$.

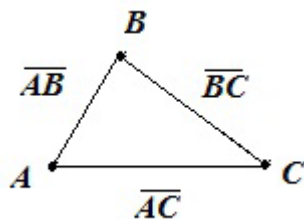


Figura 2.4: Triângulo

Os três segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} são chamados de *lados* do triângulo, os pontos A , B e C são chamados *vértices* do triângulo e $\angle BAC$, $\angle ACB$ e $\angle ABC$ são os *ângulos* do $\triangle ABC$.

Proposição 2.7. *Se A e B são dois pontos distintos quaisquer então $\overline{AB} = \overline{BA}$.*

Proposição 2.8. *Se C é um ponto de \overrightarrow{AB} , distinto de A , então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.*

Proposição 2.9. *Sejam $B_1 \in \overrightarrow{AB}$, com B_1 distinto de A e B , e $C_1 \in \overrightarrow{AC}$, com C_1 distinto de A e C . Então $\angle BAC = \angle B_1AC_1$.*

Proposição 2.10. *Se $\overline{AB} = \overline{CD}$ então $A, B \in \{C, D\}$.*

A seguir, apresentamos o conceito de congruência de segmentos.

Definição 2.8. *Dado um segmento \overline{AB} , definimos a medida de \overline{AB} como sendo o número real $d(A, B) = AB$.*

Notação: $m(\overline{AB}) = AB$.

Definição 2.9. *Dados dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , dizemos que \overline{AB} e \overline{CD} são congruentes se $AB = CD$.*

Notação: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

O próximo resultado trata do transporte de segmentos, que é uma construção muito importante na geometria.

Proposição 2.11. *(teorema da Construção de Segmentos) Dados um segmento \overline{AB} e uma semirreta \overrightarrow{CD} , existe um único ponto $E \in \overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{CE} \cong \overline{AB}$.*

O próximo resultado nos ensina a “somar” segmentos.

Proposição 2.12. *(teorema da aditividade de segmentos) Se $A - B - C$, $A' - B' - C'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ então $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.*

Definição 2.10. *Se $A - C - B$ e $\overline{AC} \cong \overline{CB}$, então C é chamado de ponto médio de \overline{AB} .*

Teorema 2.1. *Um segmento tem um único ponto médio.*

2.3 Postulados de Separação

Nesta seção, apresentamos o conceito de convexidade de regiões planas. Os resultados desta seção são muito utilizados nas demonstrações dos resultados das seções posteriores.

Definição 2.11. Um conjunto C de pontos é dito convexo se $\forall P, Q \in C (P \neq Q), \overline{PQ} \subset C$.

A seguir, enunciamos o chamado Postulado de Separação, que garante que uma reta divide o plano que a contém em duas regiões convexas.

PS.1 - Dados uma reta L e um plano π que a contém, o conjunto de pontos que estão em π e não estão em L é a união de dois conjuntos disjuntos H_1 e H_2 , tais que

- (a) H_1 e H_2 são convexas.
- (b) se $P \in H_i$ e $Q \in H_j$, com $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$, então $\overline{PQ} \cap L \neq \emptyset$.

$$\pi \setminus L = H_1 \cup H_2$$

Definição 2.12. Nas condições de PS.1, dizemos que L separa π em dois semiplanos H_1 e H_2 de origem L . Também dizemos que H_1 e H_2 são os lados da origem L em π .

Notação:

$P, Q \in H_i$, com $i \in \{1, 2\}$, escrevemos P, Q m.l. L para indicar que P e Q estão do mesmo lado de L .

$P \in H_i$ e $Q \in H_j$, com $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$, escrevemos P, Q l.o. L para indicar que P e Q estão em lados opostos de L .

Teorema 2.2. (Postulado de Pasch) Dados um triângulo $\triangle ABC$ e uma reta L no mesmo plano, se L contém um ponto E tal que $A - E - C$ então $L \cap \overline{AB} \neq \emptyset$ ou $L \cap \overline{BC} \neq \emptyset$.

Definição 2.13. Se $A - B - C$ então \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} são chamadas semirretas opostas.

Definição 2.14. O interior do ângulo $\angle A = \angle BAC$ é a intersecção do lado de \overleftrightarrow{AB} que contém C com o lado de \overleftrightarrow{AC} que contém B . O exterior do $\angle BAC$ é o conjunto de pontos que não estão no interior e nem sobre o ângulo.

Notação: $int(\angle BAC)$ indica o interior do ângulo $\angle BAC$, enquanto que $ext(\angle BAC)$ indica seu exterior.

Observação 2.1. $X \in \text{int}(\angle BAC) \Rightarrow X, C \text{ m.l. } \overleftrightarrow{AB} \text{ e } X, B \text{ m.l. } \overleftrightarrow{AC}$.

Definição 2.15. O interior do triângulo $\triangle ABC$ é a intersecção dos interiores de seus três ângulos.

Notação: $\angle A = \angle BAC$ é o ângulo oposto ao lado \overline{BC} do $\triangle ABC$.

Teorema 2.3. Todo lado de um triângulo, com exceção de seus extremos, está contido no interior do ângulo oposto.

Teorema 2.4. Se $F \in \text{int}(\angle BAC)$ então $\overrightarrow{AF} \setminus \{A\} \subset \text{int}(\angle BAC)$.

Teorema 2.5. Considere o $\triangle ABC$ e sejam D, E e F tais que $B - D - C, A - C - E$ e $A - D - F$. Então $F \in \text{int}(\angle BCE)$.

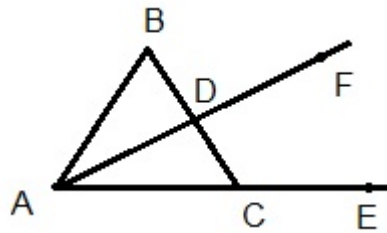


Figura 2.5: Teorema 2.5

Teorema 2.6. Sejam L uma reta, A e F dois pontos distintos de L e B, G l.o. L . Então $\overline{FB} \cap \overrightarrow{AG} = \emptyset$.

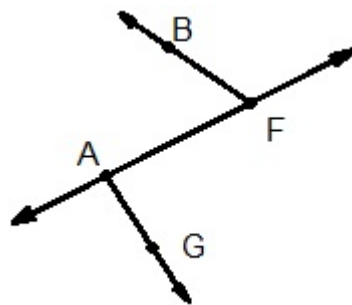


Figura 2.6: Teorema 2.6

Teorema 2.7. No triângulo $\triangle ABC$, seja D um ponto entre A e C e seja E um ponto tal que E, B m.l. \overleftrightarrow{AC} . Então $\overrightarrow{DE} \cap \overline{AB} \neq \emptyset$ ou $\overrightarrow{DE} \cap \overline{BC} \neq \emptyset$.

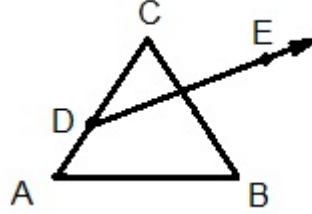


Figura 2.7: Teorema 2.7

Teorema 2.8. (teorema da Barra Transversal) Se $D \in \text{int}(\angle BAC)$ então $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BC} = \{X\}$, onde $B - X - C$.

2.4 Postulados de Medição de Ângulos

Do mesmo modo que definimos congruência de segmentos em termos de medidas, definimos congruência de ângulos. Para isto, começamos apresentando os postulados de medição de ângulos.

Postulado de Medição de ângulos 0: Existe uma função m , que chamamos de medida angular, cujo domínio é o conjunto de todos os ângulos e cuja imagem é o intervalo real $]0, 180[$. Na notação de conjuntos, se \mathcal{A} denota o conjunto de todos os ângulos, então

$$m : \mathcal{A} \rightarrow]0, 180[\subset \mathbb{R},$$

onde $0 < m(\alpha) < 180, \forall \alpha \in \mathcal{A}$.

Postulado de Medição de ângulos 1: (Postulado da construção de ângulos) Seja \overrightarrow{AB} uma semirreta contida na origem de um semiplano H . Para todo número real $a, 0 < a < 180$, existe exatamente uma semirreta \overrightarrow{AP} , com $P \in H$, tal que $m(\angle PAB) = a$.

Postulado de Medição de ângulos 2: (Postulado da adição de ângulos) Se $D \in \text{int}(\angle BAC)$ então $m(\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC)$.

Definição 2.16. Se \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são semirretas opostas e \overrightarrow{AD} é uma outra semirreta, dizemos que os ângulos $\angle DAB$ e $\angle DAC$ formam um par linear.

Definição 2.17. Dizemos que dois ângulos $\angle ABC$ e $\angle DEF$ são suplementares se $m(\angle ABC) + m(\angle DEF) = 180$.

Postulado de Medição de ângulos 3: (Postulado do suplemento) Se dois ângulos formam um par linear então eles são suplementares.

Definição 2.18. Dizemos que dois ângulos $\angle ABC$ e $\angle DEF$ são congruentes se $m(\angle ABC) = m(\angle DEF)$.

Notação: $\angle ABC \cong \angle DEF$.

Definição 2.19. Se num par linear os dois ângulos são congruentes então cada um deles é chamado de ângulo reto.

Teorema 2.9. (Teorema da construção de ângulos) Seja $\angle ABC$ um ângulo, $\overrightarrow{B'C'}$ uma semirreta contida na origem de um semiplano H . Então existe exatamente uma semirreta $\overrightarrow{B'A'}$, com $A' \in H$, tal que $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

Teorema 2.10. (Teorema da aditividade de ângulos) Se $D \in \text{int}(\angle BAC)$, $D' \in \text{int}(\angle B'A'C')$, $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$, $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$ então $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

Definição 2.20. Duas semirretas são chamadas de perpendiculares se sua união for um ângulo reto.

Se \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} forem perpendiculares, escrevemos $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

Definição 2.21. Se α for um ângulo tal que $0 < m(\alpha) < 90$, dizemos que α é um ângulo agudo. Se α for um ângulo tal que $90 < m(\alpha) < 180$, dizemos que α é um ângulo obtuso. Dois ângulos são complementares se a soma de suas medidas é um ângulo reto.

Definição 2.22. Se $m(\angle ABC) < m(\angle DEF)$, dizemos que $\angle ABC$ é menor que $\angle DEF$. Neste caso, escrevemos $\angle ABC < \angle DEF$.

Definição 2.23. Dois ângulos formam um par vertical se seus lados formarem pares de semirretas opostas. Ou seja, se $B - A - C'$, $C - A - B'$ e $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AB'}$, então $\angle BAC$ e $\angle B'AC'$ formam um par vertical (também chamamos de ângulos opostos pelo vértice).

Teorema 2.11. (Teorema do par vertical) Se dois ângulos formam um par vertical então eles são congruentes.

Capítulo 3

Congruência entre Triângulos

Neste capítulo, apresentamos o importante conceito da Geometria, conhecido como congruência entre triângulos. Este conceito está relacionado à seguinte questão: “dados dois triângulos, é possível mover um deles de modo que ele fique perfeitamente sobreposto com o outro?” Em outras palavras, “se existe um movimento rígido (composição de translações com rotações) que transforma um triângulo no outro”. Nesta dissertação, não estudaremos os movimentos rígidos, mas daremos condições para dizer se tal sobreposição é “perfeita” ou não.

3.1 Critérios de congruência e consequências

Como veremos na definição a seguir, quando dois triângulos são congruentes, os lados e os ângulos de um deles são congruentes aos respectivos lados e ângulos do outro. A questão é se para analisarmos a congruência entre dois triângulos, estas seis condições de congruência devem ser verificadas. A resposta é NÃO, pois admitindo-se o chamado Postulado LAL de congruência, outros critérios surgem com a finalidade de assegurar a congruência entre triângulos, sem a necessidade de passarmos pelas seis condições. As provas dos resultados deste capítulo também podem ser encontradas em ([8]), mas apresentaremos versões delas nesta dissertação, pois temos por objetivo estudar a Congruência entre triângulos. Começamos com algumas definições importantes.

Definição 3.1. *Dados os triângulos $\triangle ABC, \triangle DEF$ e uma correspondência biunívoca $ABC \leftrightarrow DEF$ entre seus vértices, se cada par de lados correspondentes forem congruentes e cada par de ângulos correspondentes forem congruentes, então esta correspondência é uma congruência. Isto é, a correspondência*

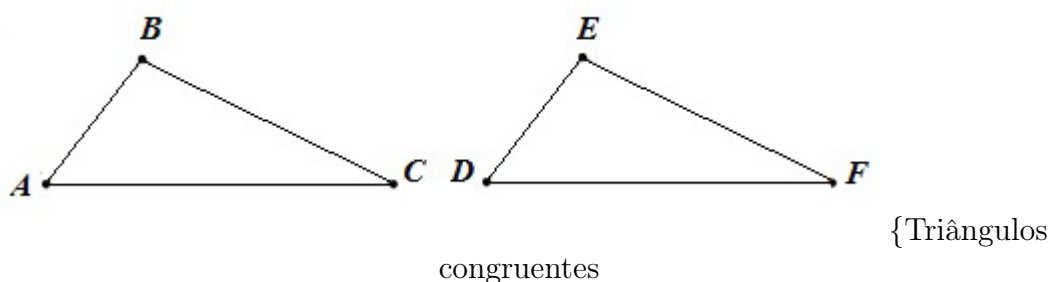
$$ABC \leftrightarrow DEF$$

é uma congruência se todas as seis condições seguintes forem satisfeitas:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &\cong \overline{DE}, & \angle A &\cong \angle D, \\ \overline{AC} &\cong \overline{DF}, & \angle B &\cong \angle E, \\ \overline{BC} &\cong \overline{EF}, & \angle C &\cong \angle F. \end{aligned}$$

Se $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma congruência, dizemos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são congruentes, e escrevemos

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$



Definição 3.2. Um triângulo é dito isósceles se possui dois lados congruentes. Neste caso, o terceiro lado é chamado de base do triângulo e os ângulos opostos aos lados congruentes são chamados de ângulos da base. Se todos os lados de um triângulo forem congruentes, então o triângulo é dito equilátero. O triângulo que não é isósceles nem equilátero é dito escaleno.

Como já foi dito, se quisermos verificar se uma correspondência é uma congruência, não precisamos checar todas as seis condições. Para isto, admitimos o chamado Postulado Lado-Ângulo-Lado de congruência entre triângulos.

3.1.1 Postulado LAL de Congruência

Dados dois triângulos e uma correspondência entre seus vértices, se um par de lados de um triângulo e o ângulo formado entre eles são congruentes às partes correspondentes do outro, então a correspondência é uma congruência. Por exemplo, dados os triângulos $\triangle ABC, \triangle DEF$ e a correspondência biunívoca $ABC \leftrightarrow DEF$ entre seus vértices, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \angle A \cong \angle D$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

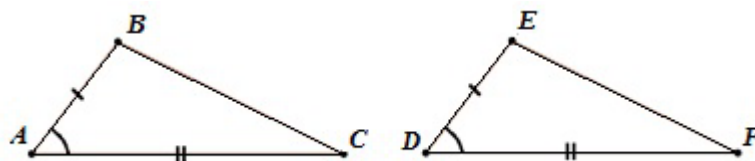


Figura 3.1: Postulado LAL de Congruência

Teorema 3.1. (Teorema do triângulo isósceles) *Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes.*

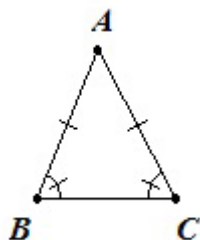


Figura 3.2: Teorema do triângulo isósceles

Demonstração. Dado o triângulo $\triangle ABC$, suponha que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Mostremos que $\angle B \cong \angle C$. Considere a correspondência $ABC \leftrightarrow ACB$ entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACB$. Como $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ e $\angle A \cong \angle A$, segue do *Postulado LAL de congruência* que $\triangle ABC \cong \triangle ACB$. Portanto, $\angle B \cong \angle C$. \square

Corolário 3.1. *Todo triângulo equilátero possui os três ângulos congruentes.*

Demonstração. Dado o triângulo $\triangle ABC$ equilátero, basta aplicar o Teorema 3.1 aos lados \overline{AB} e \overline{AC} , obtendo-se que $\angle B \cong \angle C$ e depois repetir o processo para os lados \overline{AC} e \overline{BC} , obtendo-se que $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$. \square

Teorema 3.2. *Dada uma reta e um ponto que não pertence a essa reta, então existe uma reta que passa por esse ponto e é perpendicular a reta dada.*

Demonstração. Sejam r uma reta e B um ponto, tal que $B \notin r$. Sejam A e C pontos da reta r . Pelo Teorema 2.9, existe um ponto Q tal que

1. B e Q se encontram em lados opostos de r ,

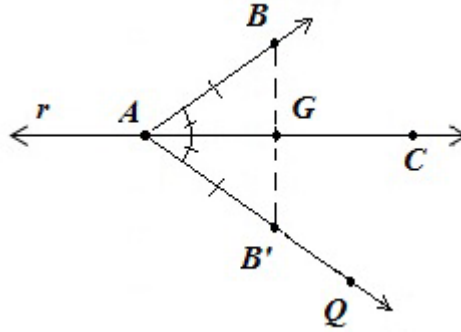


Figura 3.3: Teorema 3.2

2. $\angle BAC \cong \angle QAC$.
3. $BB' \cap \overleftrightarrow{AC} = G$

Pela Proposição 2.11, existe B' pertencente a \overleftrightarrow{AQ} tal que $\overline{AB'} \cong \overline{AB}$. Há as duas seguintes possibilidades:

1. $G \neq A$. Neste caso, concluímos que $\triangle AGB \cong \triangle AGB'$. Assim, $\angle AGB \cong \angle AGB'$. Como esses dois ângulos são suplementares e congruentes, temos que os dois são ângulos retos. Portanto $\overleftrightarrow{BG} \perp \overleftrightarrow{AC}$
2. $G = A$. Nesse caso $\angle BGC \cong \angle BAC$ e $\angle B'GC \cong \angle QAC$. Portanto $\angle BGC \cong \angle B'GC$. Como estes ângulos formam um par linear então $\overleftrightarrow{BG} \perp \overleftrightarrow{AC}$.

□

Teorema 3.3. (ALA)

Dados os triângulos $\triangle ABC, \triangle DEF$ e uma correspondência biunívoca $ABC \leftrightarrow DEF$ entre seus vértices, se $\angle A \cong \angle D, \overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\angle C \cong \angle F$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Demonstração. Pela Proposição 2.11, existe um ponto B' sobre \overleftrightarrow{DE} tal que $\overline{DB'} \cong \overline{AB}$. Segue do Postulado LAL de congruência que $\triangle ABC \cong \triangle DB'F$. Logo, $\angle DFB' \cong \angle ACB$ e $\overline{FB'} = \overline{FE}$. Consequentemente, $B' = E$. Portanto, temos que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

□

Corolário 3.2. Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles. Isto é, dado $\triangle ABC$ se $\angle A \cong \angle C$, então $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

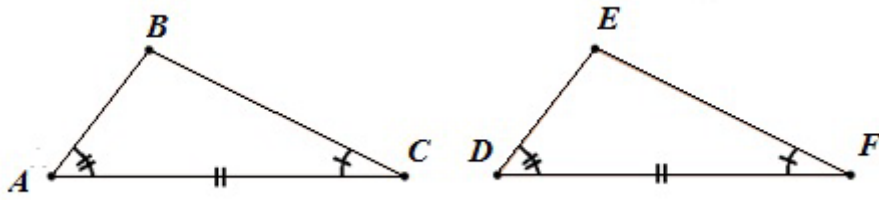


Figura 3.4: Caso ALA de congruência

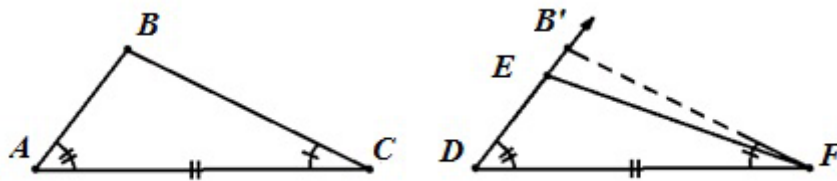


Figura 3.5: Demonstração do caso ALA

Demonstração. Considere a correspondência $ABC \leftrightarrow ACB$. Por hipótese, $\angle B \leftrightarrow \angle C$, $\overline{BC} \leftrightarrow \overline{CB}$ e $\angle C \leftrightarrow \angle B$. Assim, pelo Teorema 3.3 $\triangle ABC \cong \triangle ACB$. Logo, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

□

O próximo corolário é a recíproca do Corolário 3.1.

Corolário 3.3. *Todo triângulo que possui três ângulos congruentes é equilátero.*

Demonstração. Dado $\triangle ABC$, suponha que $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$. Basta aplicar o Corolário 3.2 aos ângulos $\angle A$ e $\angle B$, obtendo-se que $\overline{BC} \cong \overline{AC}$, e depois repetir o processo para os $\angle A$ e $\angle C$, obtendo-se que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Portanto, $\overline{BC} \cong \overline{AC} \cong \overline{AB}$.

□

Teorema 3.4. (LLL)

Dados os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ e uma correspondência biunívoca $ABC \leftrightarrow DEF$, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Demonstração. Primeiro vamos “copiar” $\triangle DEF$ no lado de baixo do $\triangle ABC$ formando o $\triangle AB'C \cong \triangle DEF$ como mostra a figura:

1. Pelo Teorema 2.9, existe Q tal que Q e B estão em lados opostos de \overleftrightarrow{AC} e $\angle CAQ \cong \angle FDE$.

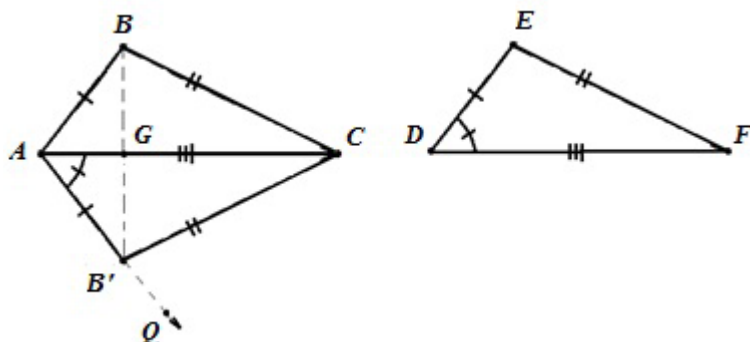
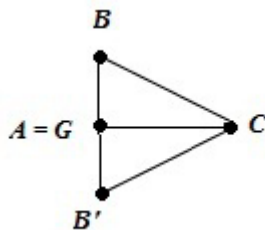


Figura 3.6: Demonstração do caso LLL

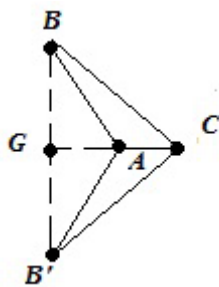
2. Segue do Teorema da Construção de Segmentos que existe B' sobre \overrightarrow{AQ} tal que $\overline{AB'} \cong \overline{DE}$.
3. Pelo Postulado LAL de Congruência, temos que $\triangle AB'C \cong \triangle DEF$.

Agora vamos mostrar que $\triangle AB'C \cong \triangle ABC$ e que, portanto $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Por construção de B' , temos que $\overline{BB'}$ intersecta \overleftrightarrow{AC} no ponto G , pois B e B' se encontram em lados opostos de \overleftrightarrow{AC} . Há os seguintes casos:

- i) $A - G - C$ (conforme Figura 3.6)
- ii) $A = G$

Figura 3.7: $A = G$

- iii) $G - A - C$

Figura 3.8: $G - A - C$ iv) $G = C$ v) $A - C - G$

Os casos $G = C$ e $A - C - G$ são análogos aos casos (ii) e (iii).

Demonstração do caso (i): por construção, o triângulo $\triangle AB'B$ é isósceles, pois $\overline{AB'} \cong \overline{DE} \cong \overline{AB}$. Logo, $m\angle ABG = m\angle AB'G$ e $m\angle CBG = m\angle CB'G$. Temos que G pertence ao interior do ângulo $\angle ABC$ (uma vez que $A-G-C$, pelo Teorema 2.3). De modo análogo, G se encontra no interior do ângulo $\angle AB'C$. Consequentemente, segue do Teorema de aditividade de ângulos que $\angle ABC \cong \angle AB'C$. Pelo Postulado LAL de Congruência, segue que $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$. Portanto, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. A demonstração dos casos (ii) e (iii) podem ser feitas de maneira análoga.

□

Definição 3.3. Dado o ângulo $\angle ABC$, se D for um ponto tal que D pertence ao interior do ângulo $\angle ABC$ e $\angle ABD \cong \angle CBD$, dizemos que \overrightarrow{BD} é a bissetriz do ângulo $\angle ABC$.

Teorema 3.5. Todo ângulo tem uma e apenas uma bissetriz.

Demonstração. Dado $\angle BAC$, sem perda de generalidade, suponha que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

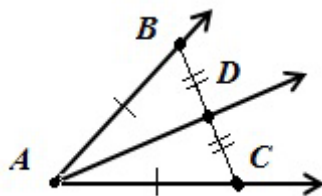


Figura 3.9: Bissetriz

Demonstração: seja D o ponto médio de \overline{BC} . Então D se encontra no interior do ângulo $\angle BAC$. Pelo Teorema 3.4 (LLL), $\triangle ADC \cong \triangle ADB$. Portanto $\angle BAD \cong \angle CAD$; e assim \overrightarrow{AD} é bissetriz do $\angle BAC$.

Agora precisamos mostrar que ela é única e para isso é suficiente mostrar que toda bissetriz do $\angle BAC$ passa pelo ponto médio D .

Suponha que exista \overrightarrow{AE} outra bissetriz do $\angle BAC$. Então necessariamente E se encontra no interior do $\angle BAC$ e pelo Teorema 2.8 segue que \overrightarrow{AE} intersecta \overline{BC} em algum ponto D' , entre B e C . Pelo Postulado LAL de congruência, temos que $\triangle AD'E \cong \triangle AD'B$. Portanto, $\overline{D'B} \cong \overline{D'C}$, e D' é ponto médio de \overline{BC} . Como, pelo Teorema 2.1, \overline{BC} tem apenas um ponto médio, segue que $\angle BAC$ tem somente uma bissetriz.

□

3.2 Desigualdades Triangulares

Até aqui, em nosso estudo de geometria de triângulos, nós temos lidado somente com congruência, ou teoremas, onde sob certas condições podemos demonstrar que dois segmentos (ou ângulos) são congruentes. Nós vamos agora investigar condições sobre as quais nós podemos dizer que um segmento é maior do que outro, ou que um ângulo é maior do que outro.

Do mesmo modo que na Definição 2.18, definimos desigualdade entre ângulos em termos de medida. Isto é,

$$\angle ABC < \angle DEF \quad \text{se} \quad m\angle ABC < m\angle DEF.$$

Essa mesma ideia pode ser descrita em termos de congruência. Nós podemos dizer que $\angle ABC < \angle DEF$ se existe um ponto G , na parte interna do $\angle DEF$ tal que $\angle ABC \cong \angle GEF$.

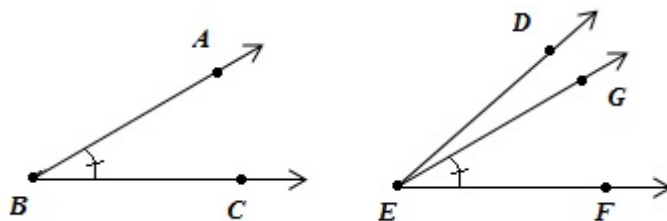


Figura 3.10: Desigualdade angular

Definição 3.4. Dizemos que \overline{AB} é menor do que \overline{CD} se a distância AB for menor do que a distância CD . Ou ainda, dizemos que se existe um ponto E , entre C e D , tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$, então $\overline{AB} < \overline{CD}$.

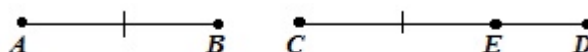


Figura 3.11: Desigualdade entre segmentos

Vamos analisar agora as desigualdades associadas a um determinado triângulo.

Definição 3.5. Os ângulos internos de um triângulo são os ângulos formados pelos lados do triângulo.

Definição 3.6. Dado um $\triangle ABC$. Se $A - C - D$, então $\angle BCD$ é chamado de ângulo externo do $\triangle ABC$.

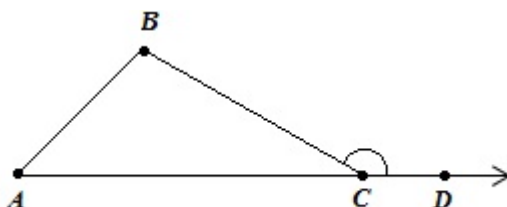


Figura 3.12: Ângulo Externo

O ângulo interno de um triângulo e seu ângulo externo são suplementares. Todo triângulo tem seis ângulos externos, como indicado na figura abaixo.

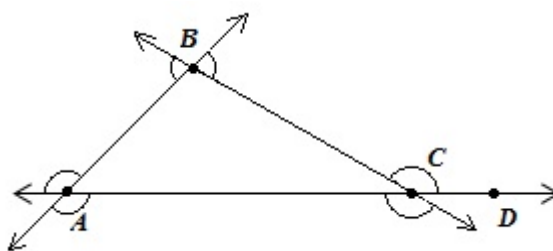


Figura 3.13: Ângulos Externos e Internos

Definição 3.7. Dado um $\triangle ABC$, os $\angle BAC$ e $\angle ABC$ são chamados de ângulos internos opostos ao vértice C . Analogamente, $\angle BCA$ e $\angle CAB$ são chamados de ângulos internos opostos ao vértice B .

Teorema 3.6. (*Teorema do Ângulo Externo*) Um ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer ângulo interno oposto a ele.

Isto é, dado um $\triangle ABC$, se $A - C - D$, então

$$\angle BCD > \angle B \quad \text{e} \quad \angle BCD > \angle A.$$

Demonstração. Seja E o ponto médio de \overline{BC} .

Pela 2.11, existe F tal que $A - E - F$ e $\overline{EA} \cong \overline{EF}$. Como, por hipótese, $\overline{EB} \cong \overline{EC}$ e $\angle AEB \cong \angle FEC$ (OPV), então pelo *Postulado LAL de Congruência* $\triangle AEB \cong \triangle FEC$, portanto $\angle B \cong \angle BCF$.

Uma vez que, por construção, F se encontra na parte interna do $\angle BCD$, então $\angle BCF < \angle BCD$ e portanto

$$\angle B \cong \angle BCF < \angle BCD.$$

□

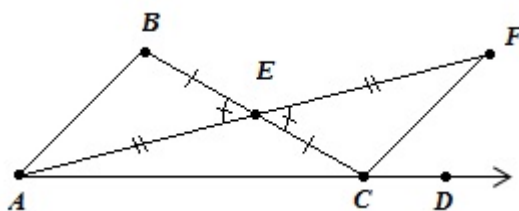


Figura 3.14: Teorema do Ângulo Externo

Corolário 3.4. A perpendicular de uma reta dada, que passa por um determinado ponto não pertencente a ela, é única.

Isto é, seja r uma reta e P um ponto não pertencente a ela, então existe uma, e somente uma, reta que passa por P e é perpendicular a r .

Demonstração. Suponha que existam duas retas perpendiculares a r e passando por P e que intersectem r nos pontos Q e R . Vamos mostrar que é impossível.

Seja S um ponto de r tal que $Q - R - S$, então $\angle PRS$ é um ângulo externo do $\triangle PQR$ e $\angle PQR$ é um dos ângulos internos opostos a R , como os dois são retos, de acordo com o Teorema 3.6, isso é impossível, pois $\angle PRS > \angle PQR$.

□

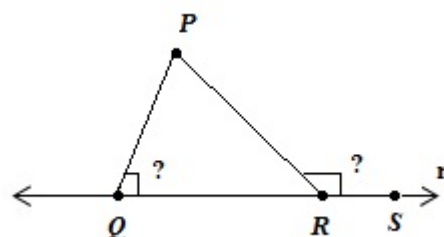


Figura 3.15: Corolário 3.4

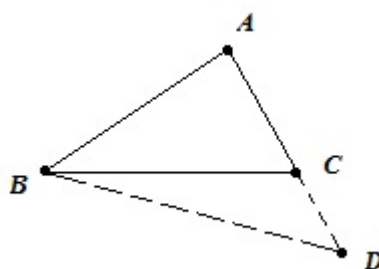


Figura 3.16: Demonstração Proposição 3.1

Proposição 3.1. *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes, e o maior ângulo é o oposto ao maior lado.*

Isto é, dado um $\triangle ABC$, se $\overline{AB} > \overline{AC}$, então $\angle C > \angle B$.

Demonstração. Seja D um ponto de \overrightarrow{AC} , tal que $\overline{AD} \cong \overline{AB}$, então $A - C - D$, conforme a Figura 3.15, porque $\overline{AD} \cong \overline{AB} > \overline{AC}$. Como os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes, temos

$$\angle ABD \cong \angle D. \quad (3.1)$$

Como $A - C - D$, segue que C se encontra na parte interna de $\angle ABD$. Portanto

$$\angle ABC < \angle ABD \quad (3.2)$$

Portanto

$$\angle ABC < \angle D \quad (3.3)$$

Uma vez que $\angle ACB$ é um ângulo externo do $\triangle BCD$, pelo Teorema 3.6 temos

$$\angle D < \angle ACB \quad (3.4)$$

Por 3.3 e 3.4,

$$\angle ABC < \angle ACB.$$

Assim, no $\triangle ABC$, temos

$$\angle B < \angle C$$

□

Proposição 3.2. *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes então os lados que se opõem a estes ângulos não são congruentes e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.*

Isto é, dado um $\triangle ABC$, se $\angle B < \angle C$, então

$$\overline{AC} < \overline{AB}.$$

Demonstração. Se $\overline{AC} \cong \overline{AB}$, então pelo Teorema 3.1, segue que $\angle B \cong \angle C$, o que contradiz a hipótese. Se $\overline{AC} > \overline{AB}$, então pela Proposição 3.1, segue que $\angle B > \angle C$, o que contradiz a hipótese.

Portanto a única possibilidade é

$$\overline{AC} < \overline{AB}.$$

□

Proposição 3.3. *O menor segmento unindo uma reta a um ponto fora dela é o segmento perpendicular.*

Isto é, seja r uma reta, P um ponto não pertencente a r , Q a interseção da reta r com a reta que passa por P e é perpendicular a r , denominado pé da perpendicular baixada do ponto P à reta r e R um ponto qualquer distinto de Q pertencente a r , então $\overline{PQ} < \overline{PR}$.

Demonstração. Seja S um ponto pertencente a r tal que $S - Q - R$, então $\angle PQS$ é um ângulo externo do $\triangle PQR$. Portanto $\angle PQS > \angle PRQ$. Como $\overline{PQ} \perp r$ sabemos que $\angle PQS \cong \angle PRQ$, portanto $\angle PRQ < \angle PQR$ e pela Proposição 3.2 segue que $\overline{PQ} < \overline{PR}$. □

Teorema 3.7. (*Desigualdade Triangular*): *Em qualquer triângulo, a soma de dois de seus lados é maior do que o terceiro lado.*

Isto é, dados três pontos não colineares A, B e C , têm-se que $AB + BC > AC$.

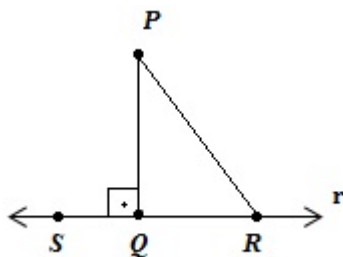


Figura 3.17: Menor distância entre um ponto e uma reta

Demonstração. Seja D um ponto pertencente a \overrightarrow{CB} tal que $C - B - D$ e $BD = BA$, então

$$CD = AB + BC. \quad (3.5)$$

Como B se encontra na parte interna do $\angle DAC$, pela Proposição 2.3, temos

$$\angle DAB < \angle DAC \quad (3.6)$$

E uma vez que $\triangle BAD$ é isósceles, com $BA = BD$, segue que $\angle D \cong \angle BAD$, portanto

$$\angle D < \angle DAC \quad (3.7)$$

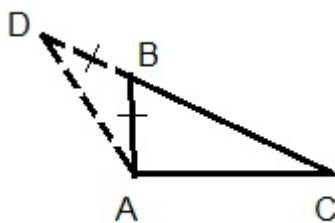


Figura 3.18: Desigualdade triangular

Aplicando a Proposição 3.2 para o $\triangle ADC$, temos $\overline{CD} > \overline{AC}$, expressando em termos de distância, temos

$$CD > AC \quad (3.8)$$

Por 3.5 e 3.8, temos

$$AB + BC = CD > AC.$$

□

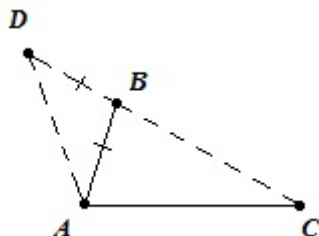


Figura 3.19: Desigualdade triangular

Proposição 3.4. *Dados $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\angle A > \angle D$, então $\overline{BC} > \overline{EF}$.*

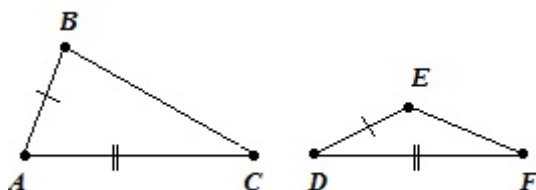


Figura 3.20: Proposição 3.4

Demonstração. 1. Existe K, na parte interna de $\angle BAC$, tal que $\triangle AKC \cong \triangle DEF$.

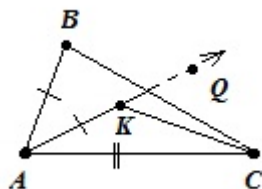


Figura 3.21: Demonstração Proposição 3.4

Para mostrar isso, primeiro pegamos Q , no mesmo lado de B em relação à \overleftrightarrow{AC} , tal que $\angle QAC \cong \angle EDF$ (Pelo Teorema 2.9). Uma vez que $\angle A > \angle D$, Q se encontra na parte interna do $\angle BAC$. Seja K pertencente a \overleftrightarrow{AQ} tal que $\overline{AK} \cong \overline{DE} \cong \overline{AB}$. Por LAL , temos $\triangle AKC \cong \triangle DEF$.

2. Agora, seja \overleftrightarrow{AR} a bissetriz do $\angle BAK$.

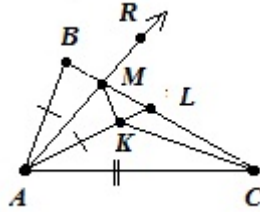


Figura 3.22: Demonstração Proposição 3.4

Pelo Teorema 3.5, \overleftrightarrow{AK} intersecta \overline{BC} no ponto L , do mesmo modo, \overleftrightarrow{AR} intersecta \overline{BL} no ponto M .

3. Pelo *Postulado LAL de Congruência*, temos

$$\triangle ABM \cong \triangle AKM.$$

Portanto $MB = MK$. Pelo Teorema 3.7, temos

$$CK < CM + MK.$$

Portanto

$$CK < CM + MB,$$

Uma vez que $CM + MB = CB$, pois $C - M - B$ e $CK = EF$, pois $\triangle AKC \cong \triangle DEF$, temos, finalmente $EF < CB$.

□

Teorema 3.8. (*LAA*) Dada uma correspondência entre dois triângulos, se dois ângulos e um lado do primeiro triângulo são congruentes às partes correspondentes do segundo, então a correspondência é uma congruência.

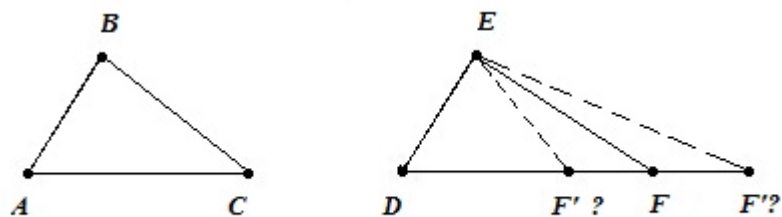


Figura 3.23: Caso LAA de Congruência

Isto é, Dado $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ e $ABC \leftrightarrow DEF$, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$ e $\angle C \cong \angle F$, então

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Como o caso em que o lado dado se encontra entre os ângulos já foi demonstrado *ALA*, vamos demonstrar apenas o outro caso *LAA*.

Demonstração. Seja F' um ponto de \overrightarrow{DF} , tal que $\overline{DF'} \cong \overline{AC}$. Pelo *Axioma de congruência*, temos

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF',$$

portanto $\angle F' \cong \angle F$. Mas então

$$D - F - F', \tag{3.9}$$

$$D - F' - F \quad \text{ou} \tag{3.10}$$

$$F = F'. \tag{3.11}$$

Se 3.9, então $\angle F$ é um ângulo externo do $\triangle EFF'$, pois $\angle F > \angle F'$, o que é falso.

Se 3.10, então $\angle F'$ é um ângulo externo do $\triangle EFF'$ e $\angle F' > \angle F$, o que é falso.

Portanto $\angle F = \angle F'$, e $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

□

Capítulo 4

Postulado das Paralelas

Em geometria, o postulado das paralelas, também chamado de quinto postulado de Euclides, é um axioma independente dos demais. Como já dito, adotaremos neste trabalho o enunciado devido a Playfair. Antes de chegarmos ao postulado das Paralelas veremos alguns conceitos necessários para futuras demonstrações.

4.1 Condições suficientes para o paralelismo

Definição 4.1. *Duas retas são chamadas paralelas se elas pertencem a um mesmo plano, mas não se intersectam.*

Analogamente ao caso de perpendicularidade, adotaremos algumas notações:

Se duas retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{AC} são paralelas, então usamos a notação

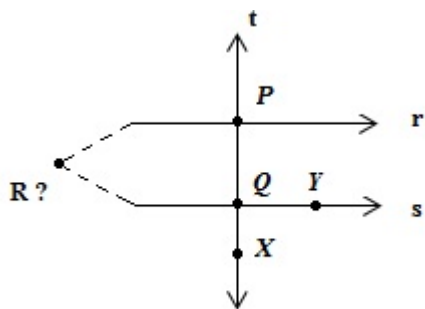
$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{AC}$$

Dois segmentos são paralelos se as retas que os contem são paralelas.

Usamos a mesma notação entre segmentos e retas, retas e semirretas e assim por diante. Assim $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$ significa que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$, o que significa que as retas não se intersectam.

Teorema 4.1. *Se duas retas pertencem a um mesmo plano, e são perpendiculares a uma mesma reta, então elas são paralelas. Isto é, sejam r, s e t três retas pertencentes ao plano π , tal que $r \perp t$ e $s \perp t$, então $r \parallel s$.*

Demonstração. Suponha que r e s intersectem t nos pontos P e Q , respectivamente. Suponha que $r \cap s \neq \emptyset$, sendo R o ponto onde elas se intersectam. Então existem duas retas perpendiculares a t passando por R o que contradiz o Corolário 3.4. \square

Figura 4.1: $r, s \parallel t$

Teorema 4.2. Dada uma reta r e um ponto P não pertencente a essa reta, existe pelo menos uma reta que passa por P e é paralela a r .

Definição 4.2. Seja t uma reta transversal a duas retas r e s , com t intersectando r no ponto E e s no ponto B . Sejam D e F pertencentes a r tais que $D - E - F$ e A e C pertencentes a s tais que A, D m.l. t e $A - B - C$. Os $\angle DEB, \angle FEB, \angle ABE$ e $\angle CBE$ são chamados ângulos internos. Os pares de ângulos $(\angle ABE, \angle FEB)$ e $(\angle DEB, \angle CBE)$ são chamados de alternos internos.

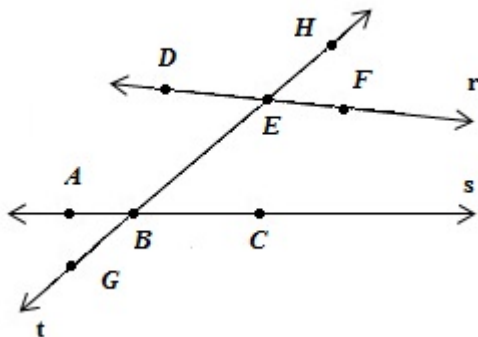


Figura 4.2: Classificação de ângulos entre retas

Definição 4.3. Se $\angle DEB$ e $\angle EBC$ são alternos internos e $\angle EBC$ e $\angle ABG$ formam um par vertical, então $\angle DEB$ e $\angle ABG$ são chamados ângulos correspondentes.

Proposição 4.1. Dadas duas retas e uma transversal, se um par de ângulos correspondentes for congruente, então o par de ângulos alternos internos é congruente.

Demonstração. Dada a Figura 4.2, se $\angle DEB \cong \angle ABG$ e uma vez que $\angle ABG \cong \angle EBC$ (par vertical), então $\angle DEB \cong \angle EBC$. \square

Teorema 4.3. (*Teorema dos ângulos alternos internos*): Se duas retas r e s são cortadas por uma reta transversal t formando um par de ângulos alternos internos congruentes, então as duas retas são paralelas.

Demonstração. Dada a Figura 4.2, se $\angle DEB \cong \angle EBC$ e supondo que as retas não fossem paralelas, com R sendo o ponto de intersecção, então teríamos duas retas formando um mesmo ângulo com t e passando por R o que contradiz o *Postulado de medição de ângulos 1*. \square

Definição 4.4. Um triângulo é dito retângulo se um dos ângulos internos é reto. O lado oposto ao ângulo reto é denominado hipotenusa e os outros dois catetos.

Pelo Teorema 4.3, segue que um triângulo tem no máximo um ângulo reto. Mais ainda, pelo Teorema 3.6, um triângulo retângulo possui dois ângulos agudos. Pela Proposição 3.2, a hipotenusa é o maior lado de um triângulo. (Pois a hipotenusa é o lado oposto ao maior ângulo, que é o ângulo reto).

4.2 Postulado das Paralelas

Dada uma reta e um ponto não pertencente a ela, existe uma, e apenas uma, reta paralela à reta dada e que passa pelo ponto dado.

O teorema abaixo nos dá a recíproca do Teorema 4.3 :

Teorema 4.4. Dadas duas retas e uma transversal, se as retas são paralelas, então cada par de ângulos alternos internos são congruentes.

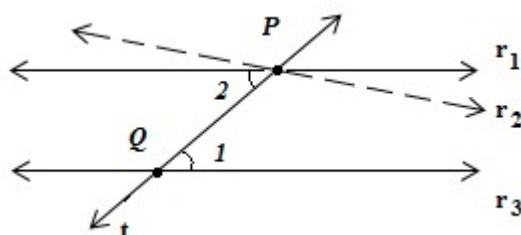


Figura 4.3: Demonstração do teorema 4.4

Demonstração. Existe somente uma reta r_2 , que passa por P , de modo que os ângulos alternos internos sejam congruentes conforme figura 4.3, e pelo Teorema 4.3, temos $r_2 \parallel r_3$.

Uma vez que de acordo com o *Postulado das paralelas* existe somente uma paralela, temos $r_1 = r_2$.

Portanto

$$\angle 1 \cong \angle 2.$$

□

Proposição 4.2. *Dadas duas retas e uma transversal, se as retas são paralelas, então cada par de ângulos correspondentes são congruentes.*

A demonstração dessa proposição é análoga ao Teorema 4.4.

Teorema 4.5. *Em qualquer triângulo ABC temos*

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$$

Demonstração. Seja r paralela à \overleftrightarrow{AC} passando por B . Seja D e E pontos pertencentes a r , tal que $D - B - E$, e tal que D, C l.o. \overleftrightarrow{AB} .

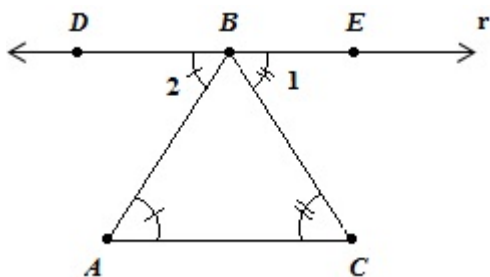


Figura 4.4: Soma dos ângulos Internos de um Triângulo

Então

$$m\angle DBA + m\angle ABC = m\angle DBC,$$

e

$$m\angle DBC + m\angle EBC = 180.$$

Portanto

$$m\angle EBC + m\angle ABC + m\angle DBA = 180.$$

Pelo Teorema 4.4,

$$m\angle EBC = m\angle C \quad \text{e} \quad m\angle DBA = m\angle A,$$

portanto

$$m\angle BAC + m\angle ABC + m\angle BCA = 180.$$

□

Corolário 4.1. *Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.5,

$$\begin{aligned} m\angle A + m\angle B + 90 &= 180 \\ m\angle A + m\angle B &= 180 - 90 \\ m\angle A + m\angle B &= 90. \end{aligned}$$

□

4.3 Projeções paralelas

Definição 4.5. *Dadas duas retas r e s em um mesmo plano, definimos como projeção vertical de r em s a função $f : r \rightarrow s$ na qual a cada ponto P pertencente a r corresponde um ponto $P' = f(P)$ pertencente a s que é o pé da perpendicular de s que passa por P .*

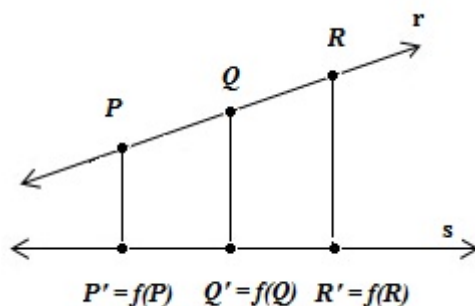


Figura 4.5: Projeção Vertical

Definição 4.6. *Dadas duas retas r e s e uma transversal t (r , s e t são coplanares). t intersecta r e s nos pontos Q e Q' , respectivamente.*

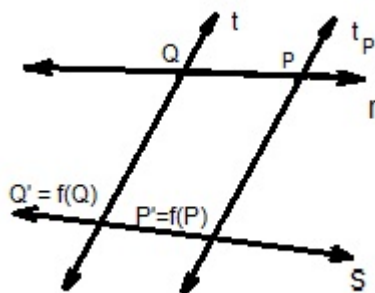


Figura 4.6: Projeção Paralela

Seja $f(Q) = Q'$. Para cada ponto P de r , seja t_P a reta passando por P , tal que $t_P \parallel t$; seja P' o ponto onde t_P intersecta s e seja $f(P) = P'$. Isto define a função:

$$f : r \rightarrow s.$$

Esta função é chamada *Projeção de r em s na direção de t* ou simplesmente *Projeções Paralelas*.

Proposição 4.3. *Projeções paralelas preservam posições.*

Isto é, seja $f : r \rightarrow s$ uma projeção paralela, se $P - Q - R$ em r , então $P' - Q' - R'$ em s .

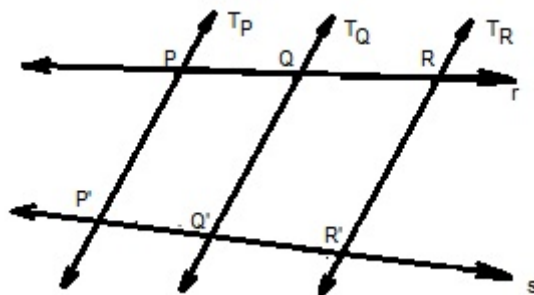


Figura 4.7: Projeções Paralelas

Demonstração. Sejam T_P, T_Q e T_R uma projeção paralela conforme definição acima, então

$$T_P \parallel T_Q \parallel T_R$$

Como $T_Q \parallel T_R$, então R e R' m.l. T_Q , pois $\overline{R'R'}$ não intersecta T_Q . Analogamente, P, P' m.l. T_Q , mas P, R l.o. T_Q , porque $P - Q - R$. Aplicando duas vezes o Teorema 3.2,

temos que P', R l.o. T_Q . Portanto $\overline{P'R'}$ intersecta T_Q no ponto X . Uma vez que $T_Q \neq s$, existe somente um ponto de intersecção. Portanto $X = Q'$. Portanto Q' pertence a $\overline{P'R'}$ e $P' - Q' - R'$.

□

Teorema 4.6. *Em um paralelogramo, cada par de lados opostos são congruentes.*

Teorema 4.7. *Projeções paralelas preservam congruências.*

Isto é, seja $f : r \rightarrow s$ uma projeção paralela, se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ em r , então $\overline{A'B'} \cong \overline{C'D'}$ em s .

Demonstração. Se $r \parallel s$, então \overline{AB} e $\overline{A'B'}$ são lados opostos de um paralelogramo. Pelo Teorema 4.6, segue que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. Analogamente, $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, portanto $\overline{AB} \cong \overline{C'D'}$. Suponha que r e s não sejam paralelas, conforme a Figura 4.8. Seja v a reta que passa por A , paralela a s , intersectando T_B no ponto E . Seja w a reta que passa por C , paralela a s , intersectando T_D no ponto F .

Notação: $\angle 1 = \angle BAE$, $\angle 2 = \angle ABE$ e $\angle 1' = \angle DCF$, $\angle 2' = \angle CDF$. Sendo $v \parallel w$ e r uma transversal. Pelo Teorema 4.4, temos

$$\angle 1 \cong \angle 1'.$$

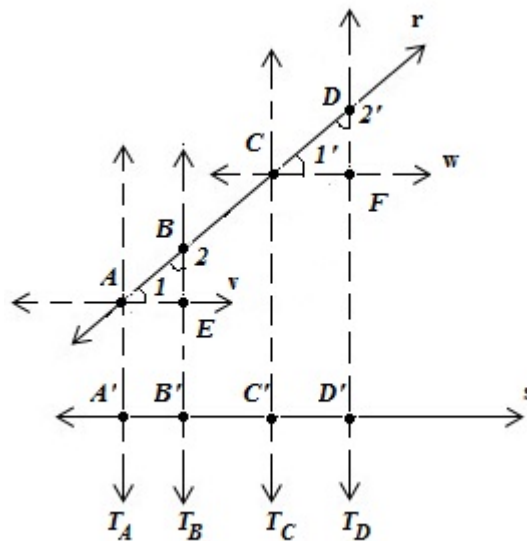


Figura 4.8: Demonstração Teorema 4.7

Pela mesma razão, (mas usando $T_B \parallel T_D$)

$$\angle 2 \cong \angle 2'.$$

Uma vez que, por hipótese, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, segue por *ALA* que

$$\triangle ABE \cong \triangle CDF$$

Portanto $\overline{AE} \cong \overline{CF}$, mas $\overline{AE} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{CF} \cong \overline{C'D'}$, porque esses segmentos são lados opostos de um paralelogramo. Portanto

$$\overline{A'B'} \cong \overline{C'D'}.$$

□

Teorema 4.8. (*Teorema de Tales*) *Sejam r, s e w três retas paralelas, e t e t' duas transversais intersectando-as nos pontos A, B e C e A', B' e C' , respectivamente. Se $A - B - C$ e $A' - B' - C'$, então*

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}.$$

O Teorema anterior pode ser estendido para conseguirmos o caso geral:

Corolário 4.2. *Se dois segmentos de uma mesma reta não têm pontos em comum, então a razão entre seus comprimentos é igual a suas projeções paralelas correspondentes.*

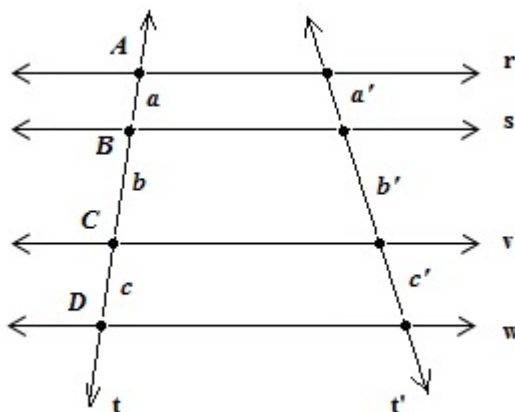


Figura 4.9: Corolário 4.2

Demonstração. Sejam A, B, C e D quatro pontos pertencentes à reta t . Chamando

$$a = AB, \quad b = BC \quad \text{e} \quad c = CD$$

Aplicando o Teorema 4.8 duas vezes, temos

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

Portanto, temos

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Então

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \quad \text{e} \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}.$$

□

Capítulo 5

Semelhança entre Triângulos

Neste capítulo veremos um dos mais importantes conceitos da Geometria e um dos mais utilizados para demonstrações de diversos teoremas e proposições que aparecem no conteúdo do ensino fundamental e médio. O teorema de Pitágoras é um dos exemplos. Intuitivamente falando, dois triângulos são semelhantes se eles têm a mesma forma, porém não necessariamente o mesmo tamanho. Para entendermos melhor o conceito de semelhança entre triângulos devemos conhecer primeiro o conceito de proporcionalidade. Dadas duas sequências de números positivos

$$a, b, c, \dots; \quad a', b', c', \dots$$

Se

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \dots,$$

então nós dizemos que as duas sequências são *Proporcionais*, e escrevemos

$$a, b, c, \dots \sim a', b', c', \dots$$

A constante

$$k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \dots,$$

é chamada de constante de proporcionalidade. Note que proporcionalidade é uma relação de simetria. Isto é, se

$$a, b, c, \dots \sim a', b', c', \dots$$

$$a', b', c', \dots \sim a, b, c, \dots$$

Note, porém que a constante de proporcionalidade depende da ordem na qual as sequências são escritas. Se alterarmos a ordem, nós obteremos uma nova constante que é inversa da primeira.

5.1 Semelhança

Dado $\triangle ABC, \triangle DEF$ e uma correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$

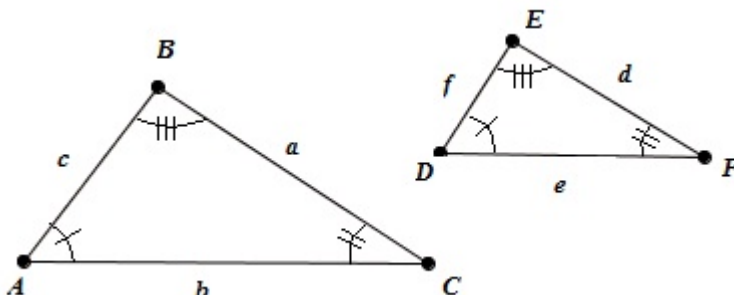


Figura 5.1: Semelhança entre Triângulos

Se

$$a, b, c \sim d, e, f$$

então dizemos que os lados correspondentes são *proporcionais*. Se os lados correspondentes são proporcionais e cada par de ângulos correspondentes são congruentes, então dizemos que a correspondência é uma *semelhança*, e representamos por

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

Se existe uma semelhança entre dois triângulos, então dizemos que os triângulos são *semelhantes*.

Do mesmo modo que no caso de congruência, na expressão

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

está subentendido a congruência dos três ângulos e as proporcionalidades:

$$AB, AC, BC \sim DE, DF, EF.$$

Teorema 5.1. (AAA)

Dada uma correspondência entre dois triângulos, se os ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência é uma semelhança.

Isto, é dado $\triangle ABC, \triangle DEF$ e a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$

Se $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$, então

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

Demonstração. Seja E' e F' pontos de \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} , tal que $AE' = f$ e $AF' = e$, como mostra a Figura 5.2.

Pelo teorema LAL de congruência, temos

$$\triangle AE'F' \cong \triangle DEF.$$

Portanto $\angle AE'F' \cong \angle E$. Uma vez que $\angle E \cong \angle B$, temos $\angle AE'F' \cong \angle B$; assim $\overleftrightarrow{E'F'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e A, F' e C são correspondentes a A, E' e B . Pelo Corolário 4.1, temos

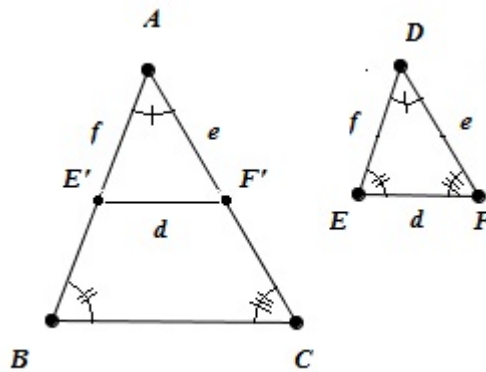


Figura 5.2: Demonstração do caso AAA

$$\frac{f}{AB} = \frac{e}{AC}$$

Analogamente,

$$\frac{d}{BC} = \frac{e}{AC}$$

Portanto

$$d, e, f \sim a, b, c.$$

e

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

□

É claro que pelo Teorema 4.5, se dois pares de ângulos correspondentes forem congruentes o terceiro também será. Assim podemos utilizar o corolário a seguir.

Corolário 5.1. (AA) *Dada uma correspondência entre dois triângulos, se dois pares de ângulos correspondentes forem congruentes, então a correspondência é uma semelhança.*

A demonstração é a mesma do Teorema 5.1.

Teorema 5.2. (LLL)

Dada uma correspondência entre dois triângulos, se os lados correspondentes são proporcionais, então os ângulos são congruentes e a correspondência é uma semelhança.

Isto é, dados $\triangle ABC, \triangle DEF$ e uma correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$, se

$$a, b, c \sim d, e, f$$

então

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Demonstração. Seja E' um ponto de \overrightarrow{AB} tal que $AE' = f$. Seja r a reta que passa por E' e é paralela à \overrightarrow{BC} . Se $r \parallel \overrightarrow{AC}$, então $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AC}$, o que é falso. Portanto r intersecta \overrightarrow{AC} no ponto F' .

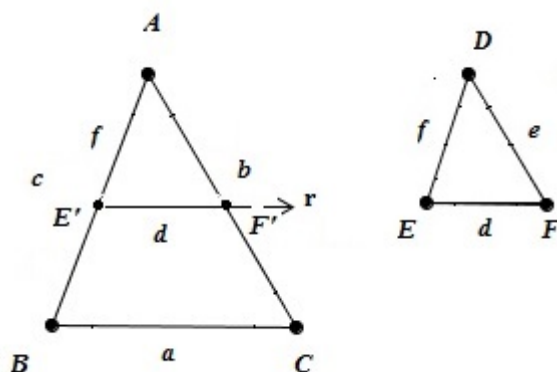


Figura 5.3: Demonstração do caso LLL

Agora pela Proposição 4.2, $\angle AE'F' \cong \angle B$, pois são ângulos correspondentes e $\angle A \cong \angle A$. Portanto

$$\triangle AE'F' \sim \triangle ABC,$$

portanto

$$f, AF', E'F' \sim c, b, a.$$

Portanto

$$\frac{c}{f} = \frac{b}{AF'} = \frac{a}{E'F'} \quad \text{e} \quad AF' = \frac{bf}{c}, \quad E'F' = \frac{af}{c}.$$

Mas

$$f, e, d \sim c, b, a.$$

Assim

$$\frac{c}{f} = \frac{b}{e} = \frac{a}{d} \quad \text{e} \quad e = \frac{bf}{c}, \quad d = \frac{af}{c}.$$

Por *LLL* de congruência, temos

$$\triangle AE'F \cong \triangle DEF,$$

portanto

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

□

Teorema 5.3. (*LAL*)

Dada uma correspondência entre dois triângulos, se dois pares de lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes entre os lados são congruentes, então a correspondência é uma semelhança.

Isto é, dados $\triangle ABC, \triangle DEF$ e uma correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$, se $\angle A \cong \angle D$ e $b, c \sim e, f$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

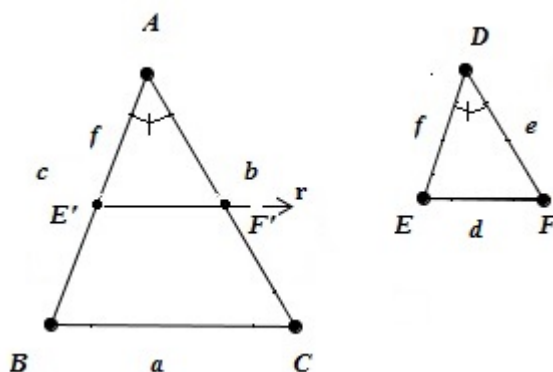


Figura 5.4: Demonstração do caso LAL

Demonstração. Seja E' um ponto de \overrightarrow{AB} tal que $AE' = f$. Seja r a reta que passa por E' e é paralela à \overleftarrow{BC} . Então r intersecta \overleftarrow{AC} no ponto F' . A demonstração segue:

1. $\triangle AE'F' \sim \triangle ABC$

2. $b, c \sim AF', f$
3. $AF' = e$.
4. $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$.
5. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

□

5.2 Teorema de Pitágoras

Proposição 5.1. *A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo divide o triângulo em dois triângulos semelhantes ao primeiro triângulo.*

Isto é, seja $\triangle ABC$ retângulo em C e seja D o pé da perpendicular à \overleftrightarrow{AB} que passa por C , então

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle CBD.$$

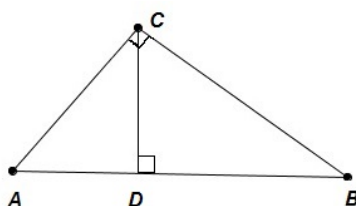


Figura 5.5: Proposição 5.1

Demonstração. $\angle A \cong \angle A$ e $\angle ADC \cong \angle ACB$, pois ambos são retos. Pelo caso de semelhança AA, temos

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC$$

Analogamente,

$$\triangle CBD \sim \triangle ABC$$

□

Teorema 5.4. *(Teorema de Pitágoras). Em um triângulo retângulo qualquer, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

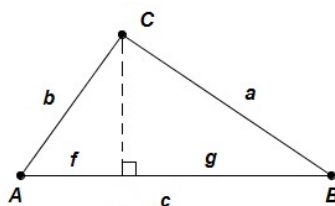


Figura 5.6: Teorema de Pitágoras

Isto é, seja $\triangle ABC$ retângulo em C , então

$$c^2 = b^2 + a^2$$

Demonstração. Pela Proposição 5.1,

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle CBD$$

Portanto

$$h, f, b \sim a, b, c \sim g, h, a$$

1. Uma vez que

$$\frac{f}{b} = \frac{b}{c},$$

temos

$$f = \frac{b^2}{c},$$

e uma vez que

$$\frac{g}{a} = \frac{a}{c},$$

temos

$$g = \frac{a^2}{c}.$$

2. Portanto

$$f + g = \frac{(a^2 + b^2)}{c} = c.$$

E portanto

$$c^2 = b^2 + a^2.$$

□

Proposição 5.2. (Recíproca do Teorema de Pitágoras).

Dado um triângulo no qual os lados a, b e c obedecem a equação

$$c^2 = b^2 + a^2,$$

então o triângulo é retângulo em C .

Demonstração. Dado $\triangle ABC$, com $c^2 = b^2 + a^2$. Seja $\angle F$ um ângulo reto e sejam D e E pontos nos lados do $\angle F$ tal que $FE = a$ e $FD = b$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$DE^2 = a^2 + b^2$$

Portanto

$$DE = \sqrt{a^2 + b^2} = c$$

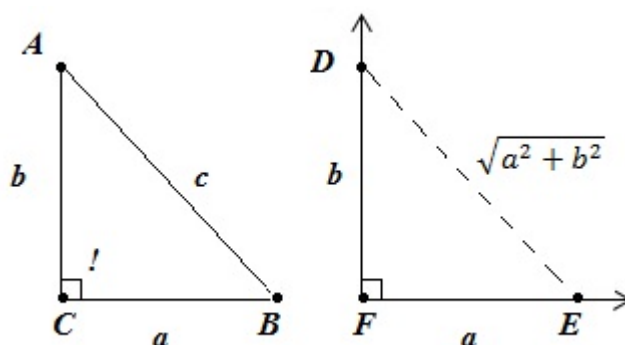


Figura 5.7: Recíproca do Teorema de Pitágoras

Pelo caso de congruência LLL , $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Portanto $\triangle ABC$ é um triângulo retângulo em C .

□

Proposição 5.3. Dados dois triângulos semelhantes a razão entre quaisquer alturas correspondentes é igual a razão entre quaisquer dois lados correspondentes.

Isto é, Suponha $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Seja h a altura relativa ao lado BC e h' a altura relativa ao lado $B'C'$, então

$$\frac{h}{h'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Demonstração. Seja \overline{AD} e $\overline{A'D'}$ as alturas cujos comprimentos são h e h' . Se $D = B$, então $D' = B'$ e não há nada a ser provado. Caso contrário, pelo caso de semelhança AA, $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$, portanto

$$\frac{h}{h'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

□

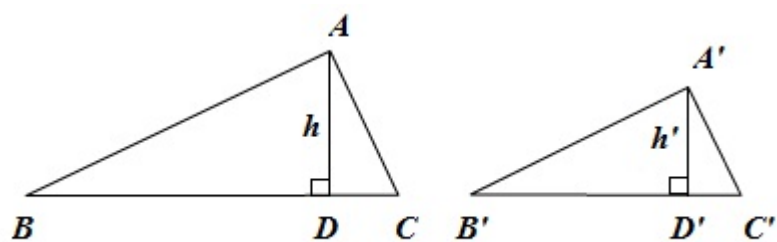


Figura 5.8: Razão de semelhança

Capítulo 6

Construções Elementares com Régua e Compasso

A tradição de se utilizar régua e compasso nas Construções Geométricas remonta à época da descoberta dos números irracionais. Incapaz de compreender e conviver com os incomensuráveis, a escola pitagórica entrou em irremediável crise. Inspirados por Platão, os matemáticos gregos procuraram inverter a situação tomando a Geometria como fundamentação para a Aritmética, sendo assim levados a procurar uma base axiomática para a Geometria. Desse modo, os gregos erigiram um sistema filosófico baseado na crença da existência de um mundo abstrato formado apenas por idéias e é nele que toda a teoria que se pretenda científica, como a Geometria, deve ser construída. O conceito de número irracional, para muitos alunos, é um número que não pode ser escrito na forma de fração ou cuja representação decimal é infinita e não periódica. Recorrer a utilização da História da Matemática no ensino da disciplina contribuirá sobremaneira para que se crie, nos estudantes, uma compreensão maior e melhor do conhecimento matemático. As construções geométricas efetuadas com o auxílio da régua e do compasso adquirem, para os antigos geômetras gregos, um caráter de teoremas de existência e daí sua importância. Como afirma COSTA:

[...] Muito antes de desaparecer, como matéria obrigatória no ensino do 1º grau, o desenho geométrico já havia sido transformado numa coleção de receitas memorizadas, onde muito mal se aproveitava o mérito da prática no manejo dos instrumentos do desenho ([3]).

Lorenzato([7]) afirma que está estabelecido um círculo vicioso, pois os docentes que não estudaram Geometria não sabem ensiná-la e ainda que é necessário um amplo e contínuo esforço de diferentes áreas educacionais para que mudanças se efetivem no atual quadro do ensino da Geometria escolar.

Como um dos objetivos deste trabalho é capacitar o professor do ensino público na área da Geometria, neste capítulo apresentaremos algumas operações executadas com os instrumentos régua e compasso. Com o aprofundamento do professor nesta área o mesmo poderá utilizar esse conhecimento para criar atividades utilizando o software “Régua e Compasso”.

6.1 Postulado 1

Os únicos instrumentos permitidos no Desenho Geométrico (além do lápis e papel) são a “Régua não graduada” e o “Compasso comum”.

6.2 Postulado 2

As únicas operações que podem ser executadas com os instrumentos especificados no postulado anterior são:

- a) assinalar um ponto, ou completamente arbitrário, ou arbitrário, mas sobre uma figura já desenhada no papel;
- b) traçar uma reta, ou completamente arbitrária, ou arbitrária, mas passando por um ponto conhecido;
- c) traçar a reta que passa por dois pontos conhecidos;
- d) traçar um arco de circunferência de centro e raio, ou ambos arbitrários, ou um deles conhecido e o outro arbitrário;
- e) traçar o arco de circunferência de centro conhecido, conhecendo também ou seu raio ou seu ponto.

6.3 Algumas construções Básicas

Nesta seção vamos elaborar certas construções fundamentais que representam os primeiros passos e, portanto, os mais simples das Construções Geométricas. Todas essas construções serão executadas em um plano fixado.

1. Assinale dois pontos distintos A e B no papel e trace as circunferências de centro A (resp., B) e que passa por B (resp., A).

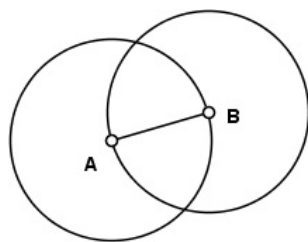


Figura 6.1: Circunferências

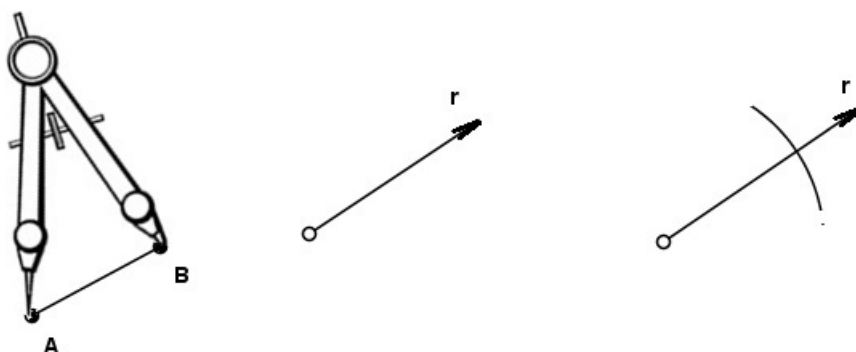
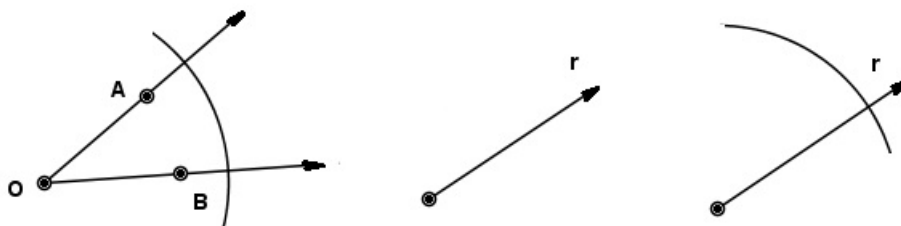


Figura 6.2: Transporte de um segmento

2. Transporte um segmento dado \overline{AB} a partir de uma semirreta r dada.
3. Transporte um ângulo conhecido $\angle AOB$ a partir de uma semirreta r dada, num dos lados da reta que contém r .



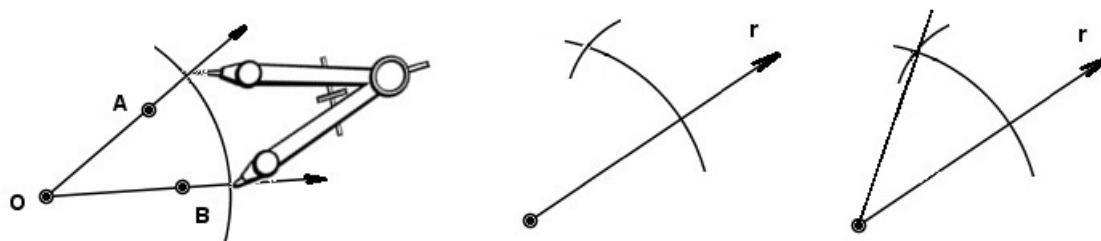


Figura 6.3: Transporte de um ângulo

4. Transporte um triângulo conhecido $\triangle ABC$ a partir de uma semirreta r dada, num dos lados da reta que contém r .

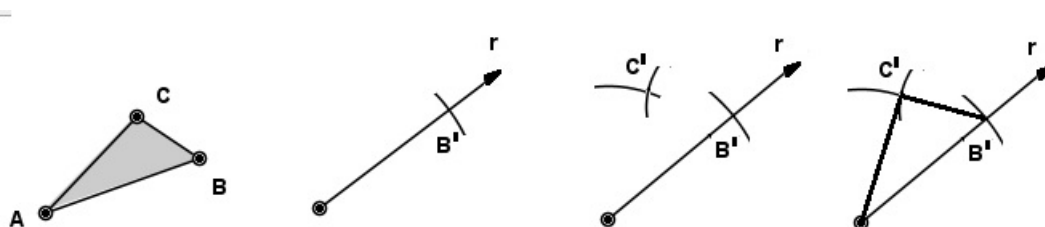


Figura 6.4: Transporte de um triângulo

Definição 6.1. Dado um segmento \overline{AB} contido em um plano fixo π , a reta mediatriz em π , de \overline{AB} é a reta que satisfaz:

- i) $m \subset \pi$;
- ii) m é perpendicular a \overline{AB} no seu ponto médio.

A propriedade característica da reta mediatriz é destacada no seguinte resultado.

Teorema 6.1. a) Se m é a reta mediatriz, em π , do segmento \overline{AB} , então todos os pontos de m são equidistantes de A e B .

b) Sejam A, B e P pontos de um plano π . Se P é equidistante de A e B , então P pertence à reta mediatriz, em π , do segmento \overline{AB} .

Demonstração. 1. Seja M o ponto médio de \overline{AB} e P um ponto arbitrário de m . Se $P = M$ então P é equidistante de A e B . Se $P \neq M$, então, pelo Postulado LAL de congruência entre triângulos, temos $\triangle PAM \cong \triangle PBM$ de modo que $PA = PB$, isto é, P é equidistante de A e B .

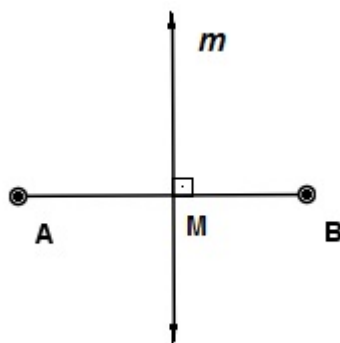


Figura 6.5: Mediatriz

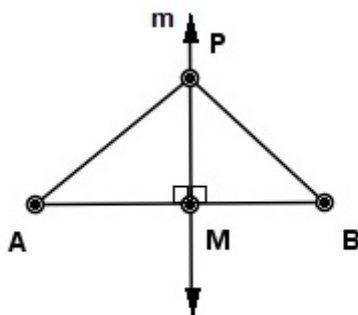


Figura 6.6: Demonstração Teorema 6.1

2. Seja M o ponto médio de \overline{AB} e $P \neq M$ tal que $PA = PB$. Pelo Teorema 4.2 (caso LLL de semelhança entre triângulos), sabemos que $\triangle PAM \cong \triangle PBM$ e, portanto, $\angle PMA \cong \angle PMB$. Como $m\angle PMB = 90$, ou seja, a reta \overleftrightarrow{PM} é perpendicular a \overline{AB} . Pela unicidade da perpendicular concluímos que $P \in m$.

□

Construção da mediatriz:

Construção Fundamental 1. Traçar a reta mediatriz de um segmento \overline{AB} dado.

Com um mesmo raio arbitrário, maior do que a metade do segmento \overline{AB} , traçamos dois arcos de circunferência com centros nos pontos A e B , sucessivamente, obtendo os pontos P e Q na intersecção dos arcos.

A reta \overleftrightarrow{PQ} é a mediatriz procurada uma vez que P e Q são equidistantes de A e B .

Definição 6.2. Uma semirreta \overrightarrow{OC} é a bissetriz do $\angle AOB$ se:

1. O ponto C se encontra no interior do $\angle AOB$, isto é, C, A m.l. \overrightarrow{OB} enquanto que C, B m.l. \overrightarrow{OA} ;

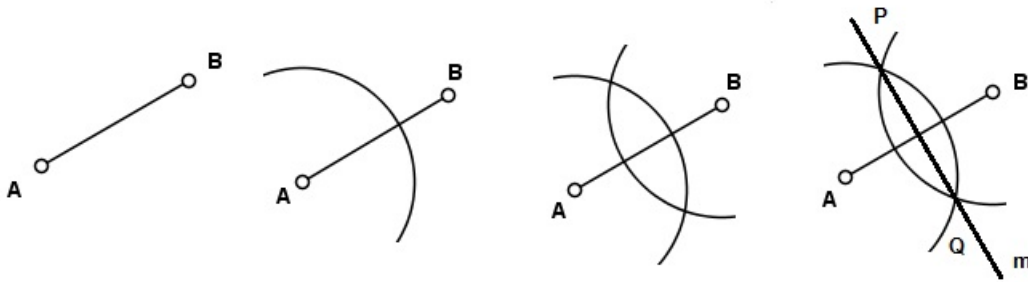


Figura 6.7: Construção Fundamental 1

2. $m\angle AOC = m\angle BOC$.

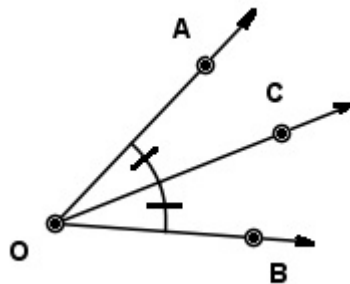


Figura 6.8: Bissetriz

Assim como a reta mediatriz, a bissetriz também possui uma propriedade característica.

Teorema 6.2. a) Se P pertence à bissetriz do $\angle AOB$ e $P \neq O$, então P se encontra no interior do $\angle AOB$ e é equidistante das retas \overleftrightarrow{OA} e \overleftrightarrow{OB} .

b) Se P se encontra no interior do $\angle AOB$ e é equidistante das retas \overleftrightarrow{OA} e \overleftrightarrow{OB} , então P pertence à bissetriz do $\angle AOB$.

Demonstração. 1. Traçando as perpendiculares \overline{PM} e \overline{PN} como na figura abaixo:

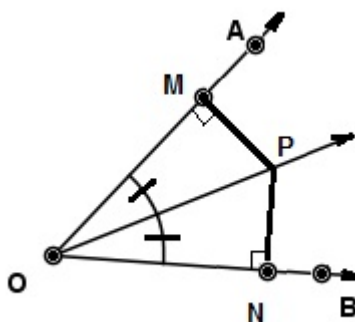


Figura 6.9: Teorema 6.2 - Bissetriz

temos, pelo Teorema 3.8 - (LAA), que $\triangle PMO \cong \triangle PNO$ de modo que $PM = PN$, ou seja, P é equidistante das retas \overleftrightarrow{OA} e \overleftrightarrow{OB} . O fato de que P se encontra no interior do $\angle AOB$ é consequência da definição de bissetriz.

2. Traçando novamente as perpendiculares \overline{PM} e \overline{PN}

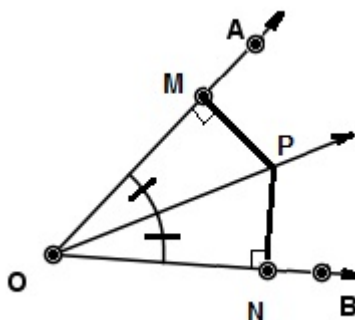


Figura 6.10: Teorema 6.2 - Bissetriz

temos, por hipótese, que $PM = PN$ e, portanto, $\triangle PMO \cong \triangle PNO$ pelo Teorema 3.8 - (LAA).

Logo $m\angle AOP = m\angle BOP$ de modo que \overrightarrow{OP} é a bissetriz do $\angle AOB$.

□

A construção com régua e compasso da bissetriz é descrita a seguir.

Construção Fundamental 2. Traçar a bissetriz de um ângulo $\angle AOB$ dado.

Com o centro no vértice O do ângulo dado e raio arbitrário traçamos um arco de circunferência que intercepta as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} nos pontos X e Y , respectivamente. A seguir, com o mesmo raio arbitrário, porém maior do que $\frac{XY}{2}$, traçamos dois arcos de circunferência com centros nos pontos X e Y , obtendo assim, na intersecção dos arcos, o ponto C tal que O, C l.o. \overleftrightarrow{XY} .

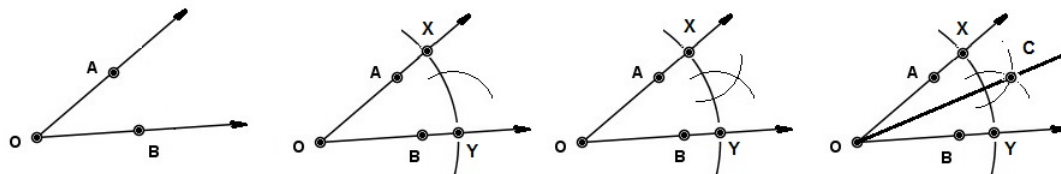


Figura 6.11: Teorema 6.2 - Bissetriz

A semirreta \overrightarrow{OC} é a bissetriz procurada. Com efeito, desde que $\triangle PMO \cong \triangle PNO$, temos $m\angle XOC = m\angle YOC$.

Finalizamos este parágrafo com mais duas construções fundamentais.

Construção Fundamental 3: Traçar por um ponto P a reta perpendicular à uma reta r dada.

1º caso: $P \in r$

Com centro em P e raio arbitrário traçamos um arco de circunferência que intercepta r nos pontos A e B . A reta mediatriz m do segmento \overline{AB} é a reta procurada, pois m é perpendicular a \overleftrightarrow{AB} no seu ponto médio.

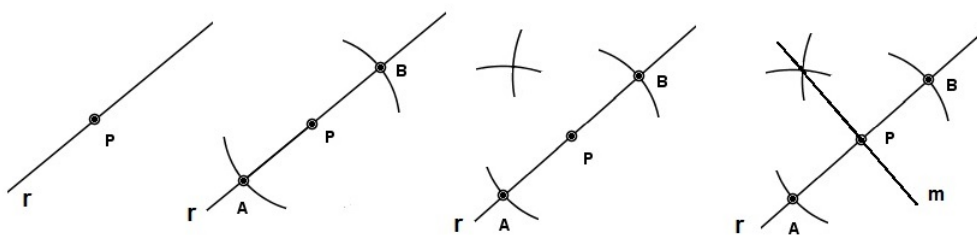


Figura 6.12: 1º caso - Reta perpendicular

2º caso: $P \notin r$

Com centro em P e raio arbitrário, porém maior do que $\text{dist}(P, r)$, traçamos um arco de circunferência que intersecta r nos pontos A e B . A reta mediatriz m do segmento \overline{AB} é novamente a reta procurada, uma vez que P é equidistante de A e B (e, portanto, $P \in m$) e m é, por definição, perpendicular à \overline{AB} .

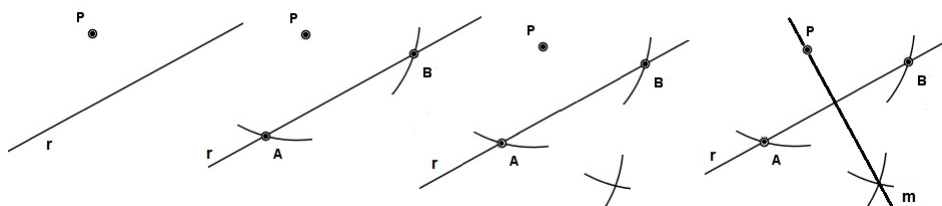


Figura 6.13: 2º caso - Reta perpendicular

Construção Fundamental 4. Traçar por um ponto P a reta paralela à uma reta dada.

Com centro num ponto O de r tal que a reta \overleftrightarrow{OP} não seja perpendicular à r , traçamos uma semi-circunferência com raio OP que intersecta r nos pontos A e B . O arco de centro B e raio AP determina o ponto Q nessa semi-circunferência.

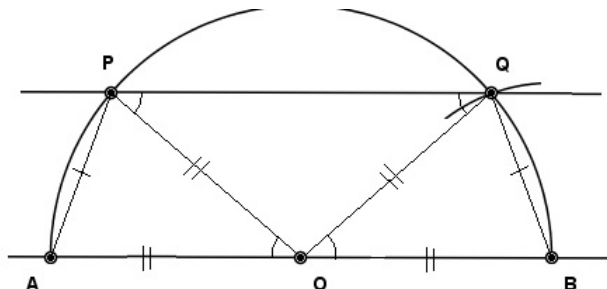


Figura 6.14: Construção Fundamental 4

A reta \overleftrightarrow{PQ} é a paralela procurada, pois como pelo Teorema 3.4 - caso LLL de congruência entre triângulos $\triangle AOP \cong \triangle BOQ$, segue que $m\angle AOP = m\angle BOQ = 90 - \frac{1}{2}m\angle POQ$.

Por outro lado, $m\angle QPO = m\angle PQO = 90 - \frac{1}{2}m\angle POQ$ e, portanto, $m\angle AOP = m\angle QPO$. Como $\angle AOP$ e $\angle QPO$ são alternos internos relativamente às retas r e \overleftrightarrow{PQ} , pelo Teorema 4.3 $r \parallel \overleftrightarrow{PQ}$.

Capítulo 7

Software Régua e Compasso

7.1 Software “Régua e Compasso”

O aplicativo “Régua e Compasso”, desenvolvido pelo professor René Grothmann da Universidade Católica de Berlim, na Alemanha, é um software de geometria dinâmica plana gratuito. Ele está escrito na linguagem Java, tem código aberto e roda em qualquer plataforma (Microsoft Windows, Linux, Macintosh, etc). Diferentemente do que ocorre com a régua e o compasso tradicionais, as construções feitas com o “Régua e Compasso” são dinâmicas e interativas, o que faz do programa um excelente laboratório de aprendizagem da geometria. Uma vez feita a construção, pontos, retas e círculos podem ser deslocados na tela mantendo-se as relações geométricas (pertinência, paralelismo, etc.) previamente estabelecidas, permitindo assim que o usuário, ao invés de gastar o seu tempo com detalhes de construção repetitivos, se concentre na associação existente entre os objetos. Existem vários outros softwares de geometria dinâmica disponíveis no mercado. Apesar de algumas diferenças, o princípio de funcionamento é basicamente o mesmo, de modo que as atividades desenvolvidas com qualquer um deles podem facilmente ser adaptadas para o “Régua e Compasso” (18/01/2013 - Site do Prof. Humberto José Bortolossi UFF - <http://www.professores.uff.br/hjbortol/car/>). A versão utilizada neste trabalho é a versão 8.6 disponível na página <http://www.professores.uff.br/hjbortol/car/>.

7.2 Barra de ferramentas

É o local onde estão situados os ícones com as ferramentas.

Primeiramente, vamos incluir na barra de ferramentas dois ícones que utilizaremos com grande frequência nas atividades do Capítulo 7.

1. Clique em “Configurações” e depois em “Editar caixa de ferramentas”, conforme figura abaixo:

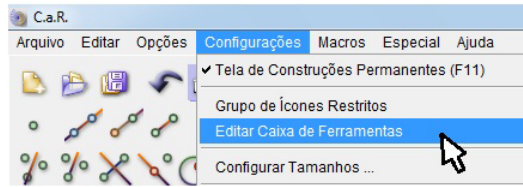


Figura 7.1: Janela “Configurações”

2. Quando aparecer a janela “Editar barra de ícones” clicar nos dois ícones destacados e depois em OK.



Figura 7.2: Janela “Editar barra de ícones”

Após estas alterações sua tela estará conforme a figura abaixo:

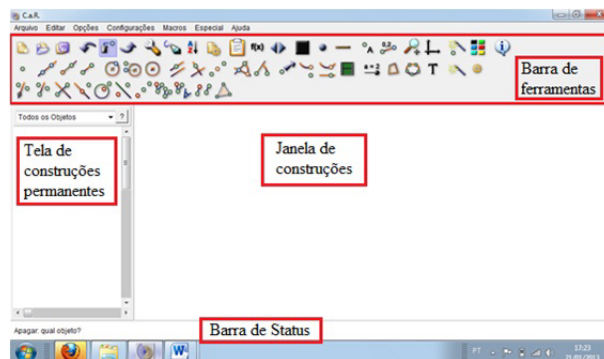


























Figura 7.3: Tela Principal









7.3 Índice









1.  NOVA CONSTRUÇÃO Abre um arquivo novo.	2.  CARREGAR CONSTRUÇÃO Abre um arquivo existente.
3.  SALVAR CONSTRUÇÃO Salva o arquivo atual.	4.  APAGAR ÚLTIMO OBJETO Desfaz o último comando.
5.  APAGAR OBJETOS E SEUS DESCENDENTES Apaga o objeto livre e os objetos dependentes.	6.  DESFIZER ÚLTIMAS REMOÇÕES Refaz o último comando.
7.  EDITAR OBJETOS Altera propriedades do objeto selecionado.	8.  DESENHAR COM O MOUSE Desenho livre.









<p>9.</p>  <p>RENOMEAR</p> <p>Renomeia o objeto.</p>	<p>10.</p>  <p>OBJETOS INICIAIS/ OBJETOS FINAIS/ DEFINIR MACROS</p> <p>Identifica os objetos iniciais e finais para definir uma macro.</p>
<p>11.</p>  <p>MOSTRAR E EDITAR COMENTÁRIOS</p> <p>Inserir ou modificar um comentário.</p>	<p>12.</p>  <p>CRIAR UMA FUNÇÃO</p> <p>Permite traçar gráfico de funções ou de curvas paramétricas.</p>
<p>13.</p>  <p>REVISAR CONSTRUÇÃO</p> <p>Refaz passo a passo a construção.</p>	<p>14.</p>  <p>COR PADRÃO DO OBJETO</p> <p>Define ou altera a cor de um objeto.</p>
<p>15.</p>  <p>TIPO PADRÃO DO PONTO</p> <p>Define o tipo de ponto.</p>	<p>16.</p>  <p>ESPESSURA PADRÃO DO OBJETO</p> <p>Define a espessura do objeto.</p>

<p>17.</p>  <p>MOSTRAR NOMES DOS OBJETOS</p> <p>Mostra os nomes dos objetos.</p>	<p>18.</p>  <p>MOSTRAR VALORES DOS OBJETOS</p> <p>Mostra os valores dos objetos.</p>
<p>19.</p>  <p>ZOOM COM O MOUSE</p> <p>Zoom.</p>	<p>20.</p>  <p>MOSTRAR GRADE</p> <p>Mostra ou oculta os eixos cartesianos e a grade.</p>
<p>21.</p>  <p>MOSTRAR OU ESCONDER OBJETOS</p> <p>Mostra ou esconde os objetos.</p>	<p>22.</p>  <p>MOSTRAR CORES SELECIONADAS</p> <p>Faz com que sejam exibidos apenas os objetos das cores selecionadas.</p>
<p>23.</p>  <p>AJUDA CONTEXTUALIZADA</p> <p>Ajuda.</p>	<p>24.</p>  <p>PONTO</p> <p>Constrói um ponto.</p>







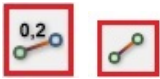
<p>25.</p>  <p>RETA</p> <p>Constrói uma reta que passa por dois pontos.</p>	<p>26.</p>  <p>SEMI-RETA</p> <p>Constrói uma semirreta que passa por dois pontos.</p>
<p>27.</p>  <p>SEGMENTO</p> <p>Constrói um segmento que passa por dois pontos.</p>	<p>28.</p>  <p>CIRCUNFERÊNCIA</p> <p>Constrói uma circunferência dado o centro e um ponto.</p>
<p>29.</p>  <p>COMPASSO</p> <p>Constrói uma circunferência com a medida do raio.</p>	<p>30.</p>  <p>CIRCUNFERÊNCIA COM RAIO</p> <p>Constrói uma circunferência dada a medida do raio.</p>
<p>31.</p>  <p>RETA PARALELA</p> <p>Constrói uma reta paralela a uma reta dada.</p>	<p>32.</p>  <p>RETA PERPENDICULAR</p> <p>Constrói uma reta perpendicular a uma reta dada.</p>






<p>33.</p>  <p>PONTO MÉDIO</p> <p>Constrói o ponto médio entre dois pontos.</p>	<p>34.</p>  <p>ÂNGULO</p> <p>Constrói um ângulo dado o vértice e dois pontos.</p>
<p>35.</p>  <p>ÂNGULO DE AMPLITUDE FIXA</p> <p>Constrói um ângulo dada a medida.</p>	<p>36.</p>  <p>MOVER PONTO</p> <p>Move o ponto.</p>
<p>37.</p>  <p>RASTREAR PONTO OU RETA</p> <p>Marca o rastro de um ponto ou reta, de acordo com o movimento de outro ponto ou reta.</p>	<p>38.</p>  <p>RASTREAR AUTOMATICAMENTE PONTO OU RETA</p> <p>Marca o rastro de um ponto ou reta, de acordo com o movimento de um ou outro ponto que se move sobre um objeto.</p>
<p>39.</p>  <p>ANIMAÇÃO DE UM PONTO</p> <p>Anima (movimenta) um ponto sobre um segmento ou circunferência (círculo).</p>	<p>40.</p>  <p>EXPRESSÃO ARITMÉTICA</p> <p>Abre o editor de expressões aritméticas, que retorna um valor numérico da expressão e relaciona o comprimento dos objetos construídos.</p>


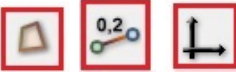
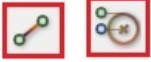

<p>41.</p>  <p>POLÍGONO</p> <p>Insera um polígono dados os vértices.</p>	<p>42.</p>  <p>CÔNICA PASSANDO POR 5 PONTOS</p> <p>Insera uma cônica dados 5 pontos.</p>
<p>43.</p>  <p>TEXTO</p>	<p>44.</p>  <p>ESCONDER OBJETOS</p>
<p>45.</p>  <p>EXECUTAR MACRO</p> <p>Executa uma macro.</p>	<p>46.</p>  <p>BISSETRIZ COMO UMA RETA</p> <p>Macro: Constrói a bissetriz (reta) dados 2 pontos e o vértice.</p>
<p>47.</p>  <p>BISSETRIZ COMO UMA SEMIRRETA</p> <p>Macro: Constrói a bissetriz (semirreta) dados 2 pontos e o vértice.</p>	<p>48.</p>  <p>MEDIATRIZ</p> <p>Macro: Constrói a mediatriz (reta) dados 2 pontos.</p>

<p>49.</p>  <p>PROJEÇÃO DE UM PONTO SOBRE UMA RETA</p> <p>Constrói o pé da perpendicular dados uma reta e um ponto.</p>	<p>50.</p>  <p>REFLEXÃO POR UM CÍRCULO</p> <p>Constrói o ponto simétrico em relação à circunferência dada.</p>
<p>51.</p>  <p>REFLEXÃO POR UMA RETA</p> <p>Constrói o ponto simétrico em relação à reta dada.</p>	<p>52.</p>  <p>REFLEXÃO POR UM PONTO</p> <p>Constrói o ponto simétrico em relação a um ponto dado.</p>
<p>53.</p>  <p>ROTAÇÃO</p> <p>Rotaciona um ângulo em relação a um centro.</p>	<p>54.</p>  <p>ROTAÇÃO DADO UM ÂNGULO</p> <p>Rotaciona um objeto num determinado ângulo em relação a um centro.</p>
<p>55.</p>  <p>TRANSLAÇÃO</p> <p>Translada objetos.</p>	<p>56.</p>  <p>TRIÂNGULO</p> <p>Constrói um triângulo.</p>

7.4 Atividades para praticar

Atividade	Ferramentas utilizadas
1. Construa um ponto livre.	
2. Construa um ponto livre com uma forma de apresentação diferente do ponto criado no item anterior.	
3. Apague os pontos que você criou.	
4. Construa uma reta.	
5. Construa outra reta, escolhendo previamente uma cor e uma espessura para a linha da construção, dentre as opções existentes.	
6. Solicite uma Nova Construção (sempre que desejar, faça uso desse recurso).	
7. Construa um segmento de reta, utilizando a ferramenta Segmento. Utilizando os recursos do software, solicite que a medida desse segmento apareça na janela geométrica.	

<p>8. Construa duas semirretas de mesma origem, não colineares. Determine medida do ângulo convexo formado por estas semirretas.</p>	
<p>9. Construa: a) uma reta; b) uma reta paralela a que você construiu; c) uma reta perpendicular a que você construiu no item a).</p>	
<p>10. Construa um segmento de reta. Marque seu ponto médio. Movimente uma das extremidades desse segmento.</p>	
<p>11. Construa duas circunferências: uma utilizando a ferramenta Círculo e outra utilizando a ferramenta Círculo com Raio Fixo. Movimente as duas circunferências pelo centro. Descreva a diferença que você observou entre as duas construções.</p>	
<p>12. Oculte as circunferências construídas no item anterior.</p>	

<p>13. Construa uma circunferência e marque um ponto fora dela. Anime esse ponto sobre a circunferência construída. (Clicar com o botão esquerdo no ponto e dar um clique duplo na circunferência).</p>	
<p>14. Ative a ferramenta Polígono. Faça algumas construções utilizando essa ferramenta. Ative as ferramentas Mostrar Valores dos Objetos e Exibir Grade e faça novas construções utilizando a ferramenta Polígono.</p>	
<p>15. Construa um segmento de reta. Construa um outro segmento de reta, congruente ao primeiro, utilizando a ferramenta Compasso.</p>	
<p>16. Ative a ferramenta Criar uma Função. Na janela que se abrirá, escreva na linha correspondente a Y, a lei de uma função da qual deseje que seja construído o gráfico. Clique em <i>Ok</i>.</p>	
<p>17. Copie as construções que estão na janela geométrica e cole em um arquivo de um editor de texto.</p>	<p><i>CTRL+C e CTRL+V</i></p>

FONTE: Tabela (<http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br>)

Capítulo 8

Atividades

Atividades que explorem o conceito de Congruência e Semelhança entre triângulos a partir do Software

8.1 Atividade 1: Criar Macro - Triângulos Congruentes (LAL)

Macros são atalhos para passos de construção. São como novas ferramentas criadas pelo usuário. Nesta atividade iremos criar uma macro para exemplificar o *Postulado de congruência (LAL)* que garante que dados dois triângulos cujos dois pares de lados correspondentes bem o ângulo formado por esses dois lados são congruentes, esses triângulos são congruentes.

Postulado de congruência (LAL). Dados $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ e uma correspondência biunívoca $ABC \leftrightarrow DEF$ entre seus vértices. Se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

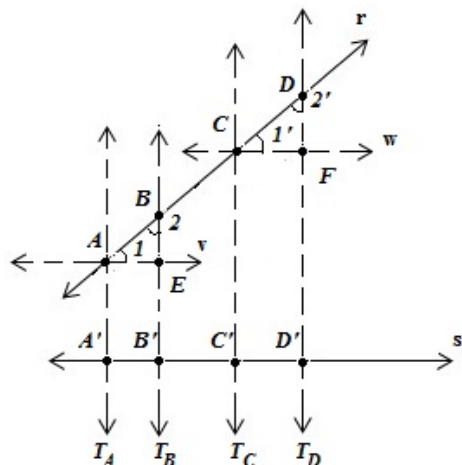




Figura 8.1: Caso LAL de Congruência



Passo 1:

Construa os pontos A , B e C , identificando-os.

Clique sobre o ícone  e construa os três pontos, nomeie-os clicando sobre o ícone  e depois sobre os pontos A , B e C , nesta ordem.



Passo 2:


Construa o $\angle A$, mostrando seu valor.

Clique sobre o ícone  para que mostre o valor, clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos C , A e B , nesta ordem.

Passo 3:




Construa os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} .


Clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos A e B , A e C e B e C . Para renomear os segmentos clique sobre o ícone  e depois sobre os segmentos \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , nesta ordem.

Obs.: Como o ícone  já está selecionado os valores dos segmentos aparecerão automaticamente na *Janela de construções*.

Passo 4:


Construa o segmento \overline{DE} , tal que $\overline{DE} = c$.

Clique sobre os ícones  e , e construa um segmento \overline{DE} qualquer. Clique com o botão direito do mouse sobre esse segmento, marque a caixa “Fixo”, digite “c” na caixa *comprimento*, marque a opção  e digite “OK”.

Para renomear os pontos clique em  e depois sobre os pontos D e E , nesta ordem.




Passo 5:

Construa o ângulo $\angle D \cong \angle A$:

Clique sobre o ícone , clique sobre os pontos E e D , nesta ordem e depois sobre um ponto qualquer F' . A janela de edição irá aparecer automaticamente. Digite “a1” na caixa *amplitude do ângulo* e clique “OK”.

Passo 6:

Construa o segmento \overline{DF} :

Clique sobre o ícone , clique sobre os pontos A e C para medir o comprimento de \overline{AC} , e depois sobre o ponto D . O programa irá construir a LG dos pontos que distam a medida AC em relação ao ponto D . Clique sobre o ícone  e sobre a intersecção entre a circunferência e a semirreta $\overrightarrow{DF'}$ criando o ponto F . Para nomear o ponto clique sobre o ícone  e depois sobre o ponto F .




Passo 7:

Esconda os objetos auxiliares:

Selecione na *Tela de construções permanentes*, com a tecla “ctrl” pressionada, a circunferência e a semirreta $\overrightarrow{EF'}$, clique com o botão direito do mouse sobre um dos itens selecionados e depois em *Esconder*.


Passo 8:

Construa os segmentos \overline{EF} e \overline{DF} :

Clique sobre os ícones  e . Clique sobre os pontos E e F e depois em D e F para criar os segmentos \overline{EF} e \overline{DF} , respectivamente, mostrando seus valores. Para renomear os segmentos clique sobre o ícone  e depois sobre os segmentos \overline{EF} , \overline{DF} e \overline{DE} , nesta ordem.

Passo 9:

Mostre os ângulos $\angle D$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$ e $\angle F$.


Clique sobre o ícone  e depois sobre os três pontos que formam cada um dos ângulos. Exemplo: $\angle B$, pontos A , B e C , nesta ordem.

Passo 10:

Você pode alterar a visualização e a aparência dos objetos. Por exemplo: Para mover os nomes e os valores dos objetos basta clicar com o botão direito do mouse sobre os valores e arrastá-los para a posição que desejar. Clicando com o botão direito do mouse sobre o objeto na *Tela de construções* permanentes e depois em *Editar* objeto você pode alterar as propriedades do objeto, como a cor, a espessura, etc.

Passo 11:

Nesta construção garantimos que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\angle A \cong \angle D$. Para demonstrarmos o *Postulado de congruência LAL* podemos acrescentar expressões algébricas que demonstrem que os triângulos são congruentes.

Clique sobre o ícone  e no local da Janela de construção onde você quer que apareçam os dados. Na janela “*Editar expressão*” para cada objeto digite o nome (exemplo “AB”) na caixa “*Explicação*” e digite o nome do segmento correspondente àquele lado (exemplo “c”) na caixa “*Expressão aritmética*”. Clique “OK”. Repita essas operações para os objetos: \overline{AB} , \overline{DE} , \overline{AC} , \overline{DF} , $\angle A$ e $\angle D$ conforme a Figura 8.1.




Passo 12:

Movimente os pontos livres e verifique que a congruência $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ se verifica para quaisquer valores de $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Isto é, todas as seis condições necessárias para a congruência são satisfeitas:

$$\begin{array}{ll} \overline{AB} \cong \overline{DE}, & \angle A \cong \angle D, \\ \overline{AC} \cong \overline{DF}, & \angle B \cong \angle E, \\ \overline{BC} \cong \overline{EF}, & \angle C \cong \angle F. \end{array}$$

Passo 13:

Definir Macro.

Clique sobre o ícone . Clique sobre os pontos A , B , C , D e E , clique sobre o ícone , Clique sobre os segmentos AB , BC , AC , DE , DF e EF , Clique sobre o ponto F , Clique sobre os ângulos $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$ e $\angle F$, Clique sobre as expressões algébricas. Clique sobre o ícone , digite “*Triângulos Congruentes LAL*” no campo “*Nome*” e clique “OK”.

8.2 Atividade 2: Criar Macro - Triângulos Congruentes (ALA)

Nesta atividade iremos criar uma macro para exemplificar o Teorema 3.3 (*LAL*) que garante que dados dois triângulos cujos dois pares de ângulos correspondentes bem como o par de lados entre eles são congruentes, esses triângulos são congruentes.

Teorema 3.3(ALA).

Dados $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ e uma correspondência biunívoca $ABC \leftrightarrow DEF$ entre seus vértices. Se $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\angle C \cong \angle F$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

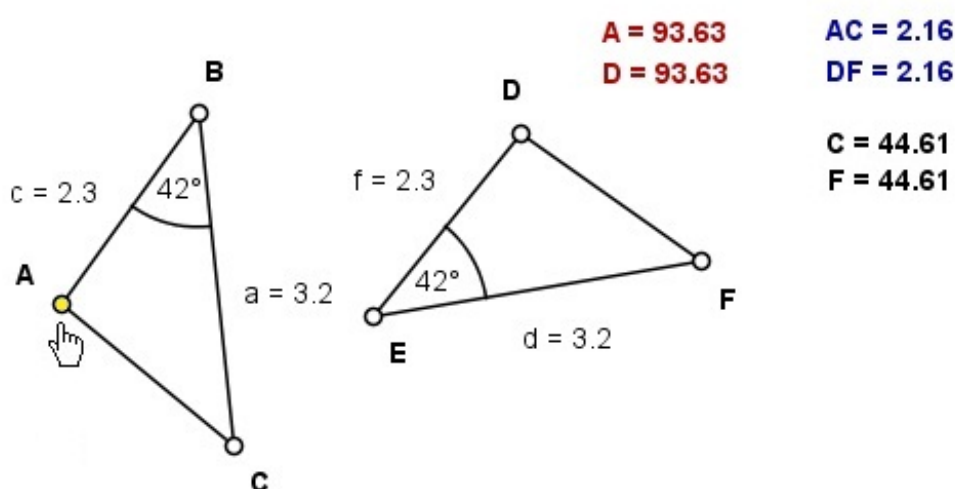




Figura 8.2: Caso ALA de Congruência


Passo 1:

Construa os pontos A , B e C , identificando-os.

Clique sobre o ícone  e construa os três pontos. Para nomeá-los clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos A , B e C , nesta ordem.


Passo 2:


Construa $\angle A$ e $\angle C$.

Clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos C , A e B , nesta ordem. Repita a operação para os pontos A , B e C .

Passo 3:


Construa \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} .

Clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos A e B , A e C e B e C .

Para renomear os segmentos clique sobre o ícone  e depois em \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , nesta ordem.


Passo 4:

Construa \overline{DF} , tal que $\overline{DF} = b$.

Clique sobre o ícone  e construa um segmento \overline{DF} qualquer. Clique com o botão direito do mouse sobre esse segmento, marque a caixa “Fixo”, digite “ b ” na caixa “comprimento” e digite “OK”.



Passo 5:

Construa o $\angle D$ e o $\angle F$ tal que $m\angle A = m\angle D$ e $m\angle C = m\angle F$.

Clique sobre o ícone , depois sobre os pontos F, D e sobre um ponto qualquer E' nesta ordem. A janela de edição irá aparecer automaticamente. Digite “a1” na caixa amplitude do ângulo e clique “OK”. Repita as operações sobre os pontos D, F e sobre um ponto qualquer E'' do mesmo lado de E' , nesta ordem. A janela de edição irá aparecer automaticamente. Digite “a2” na caixa amplitude do ângulo e clique “OK”.



Passo 6:

Construa o ponto E sobre a intersecção de \overrightarrow{DE} e \overrightarrow{FE} .

Clique sobre o ícone  e depois sobre a intersecção de \overrightarrow{DE} e \overrightarrow{FE} . Para renomear os pontos clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos D, E e F , nesta ordem.



Passo 7:

Construa \overline{EF} e \overline{DE} .

Clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos E e F . Repita para os pontos D e E . Para renomear os segmentos clique sobre o ícone  e depois sobre os segmentos \overline{EF} , \overline{DF} e \overline{DE} , nesta ordem.

Passo 8:

Construa $\angle B$ e $\angle E$.


Clique sobre os ícones  e  e depois sobre os três pontos que formam cada um dos ângulos. O $\angle B$, pontos A , B e C , nesta ordem. O $\angle E$, pontos D , E e F , nesta ordem.

Passo 9:

Você pode alterar a visualização e a aparência dos objetos. Por exemplo: Para mover os nomes e os valores dos objetos basta clicar com o botão direito do mouse sobre os valores e arrastá-los para a posição que desejar. Clicando com o botão direito do mouse sobre o objeto na *Tela de construções* permanentes e depois em *Editar* objeto, ou clicando duas vezes sobre o objeto, você pode alterar as propriedades do objeto, como a cor, a espessura, etc. ou mostrar o nome ou o valor.


Passo 10:

Esconda os objetos auxiliares.

Selecione na *Tela de construções* permanentes, com a tecla “*ctrl*” pressionada, os $\angle D$ e $\angle F$, clique com o botão direito do mouse sobre um dos itens selecionados e depois em *Editar Objeto*, clique sobre o ícone  e em “*OK*”.

Passo 11:

Nesta construção garantimos que $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\angle C \cong \angle F$. Para demonstrarmos o *Teorema ALA*, podemos acrescentar expressões algébricas que demonstrem que os triângulos são congruentes.

Clique sobre o ícone  e no local da *Janela de construção* onde você quer que apareçam os dados. Na janela “*Editar expressão*” para cada objeto digite o nome (exemplo “*A*”) na caixa “*Explicação*” e digite o nome do ângulo correspondente (exemplo “*a1*”) na caixa “*Expressão aritmética*”. Clique “*OK*”.

Passo 12:

Movimente os pontos livres e verifique que a congruência $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ se verifica para quaisquer valores de $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\angle C \cong \angle F$.

Isto é, todas as seis condições necessárias para a congruência são satisfeitas:



$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \quad \angle A \cong \angle D,$$

$$\overline{AC} \cong \overline{DF}, \quad \angle B \cong \angle E,$$


$$\overline{BC} \cong \overline{EF}, \quad \angle C \cong \angle F.$$

Passo 13:

Definir Macro.

Clique sobre o ícone  , Clique sobre os pontos A , B , C , D e F , Clique sobre o ícone  . Clique sobre os segmentos AB , BC , AC , DE , DF e EF . Clique sobre o ponto E .

Clique sobre os ângulos $\angle B$, e $\angle E$. Clique sobre as expressões algébricas.

Clique sobre o ícone  , digite “*Triângulos Congruentes ALA*” no campo “*Nome*” e clique “*OK*”.

8.3 Atividade 3: Criar Macro - Triângulos Congruentes (LLL)

Nesta atividade iremos criar uma macro para exemplificar o Teorema 3.4 (LLL) que garante que dados dois triângulos cujos três pares de lados correspondentes são congruentes, esses triângulos são congruentes.

Teorema 3.4 (LLL). Dados $\triangle ABC, \triangle DEF$ e uma correspondência biunívoca $ABC \leftrightarrow DEF$. Se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

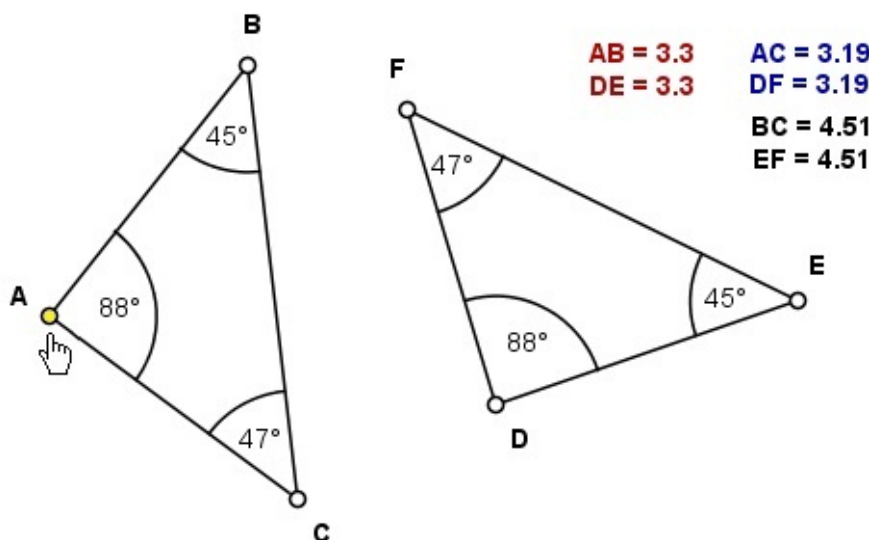




Figura 8.3: Caso LLL de Congruência



Passo 1:

Construa os pontos A , B e C , identificando-os.

Clique sobre o ícone  e construa os três pontos. Para nomeá-los clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos A , B e C , nesta ordem.


Passo 2:

Construa os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC}

Clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos A e B , A e C e B e C . Para renomear os segmentos clique sobre o ícone  e depois sobre os segmentos \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , nesta ordem.


Passo 3:


Construa o segmento \overline{DE} , tal que $\overline{DE} = c$.

Clique sobre o ícone  e construa um segmento \overline{DE} qualquer. Clique com o botão direito do mouse sobre esse segmento, marque a caixa “Fixo”, digite “c” na caixa comprimento e digite “OK”.



Passo 4:

Construa os segmentos \overline{DF} e \overline{EF} .

Clique sobre o ícone , clique sobre o ponto D e sobre um ponto qualquer. A janela de edição irá aparecer automaticamente. Digite “b” na caixa comprimento e clique “OK”.


Clique sobre o ícone , clique sobre o ponto E e sobre um ponto qualquer. A janela de edição irá aparecer automaticamente. Digite “a” na caixa comprimento e clique “OK”.

Clique sobre o ícone  e depois sobre a intersecção das duas circunferências.

Construa os segmentos clicando sobre o ícone  e sobre os pontos D e F e depois E e F . Para renomear os segmentos e os pontos, clique sobre o ícone  e depois sobre os segmentos \overline{EF} , \overline{DF} e \overline{DE} , nesta ordem e sobre os pontos D , E e F , nesta ordem.



Passo 5:

Esconda os objetos auxiliares.

Selecione na *Tela de construções permanentes*, com a tecla “ctrl” pressionada, as duas circunferências, clique com o botão direito do mouse sobre um dos itens selecionados e depois em *Editar Objeto*, clique sobre o ícone  e em “OK”.

Passo 6:

Construa os $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ e $\angle F$.


Clique sobre os ícones  e  e depois sobre os três pontos que formam cada um dos ângulos (o vértice deve ser sempre o segundo ponto). Exemplo: O $\angle A$, pontos B , A e C , nesta ordem. O $\angle B$, pontos A , B e C , nesta ordem, etc.

Passo 7:

Você pode alterar a visualização e a aparência dos objetos. Por exemplo: Para mover os nomes e os valores dos objetos basta clicar com o botão direito do mouse sobre os valores e arrastá-los para a posição que desejar. Clicando com o botão direito do mouse sobre o objeto na *Tela de construções permanentes* e depois em *Editar objeto*, ou clicando duas vezes sobre o objeto, você pode alterar as propriedades do objeto, como a cor, a espessura, etc. ou mostrar o nome ou o valor.

Passo 8:

Nesta construção garantimos que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Para demonstrarmos o *Teorema LLL*, podemos acrescentar expressões algébricas que demonstrem que os triângulos são congruentes.

Clique sobre o ícone  e no local da *Janela de construção* onde você quer que apareçam os dados. Na janela “Editar expressão” para cada objeto digite o nome (exemplo “AB”) na caixa “Explicação” e digite o nome do segmento ou ângulo correspondente (exemplo “c” ou “a1”) na caixa “Expressão aritmética”. Clique “OK”.




Passo 9:

Movimente os pontos livres e verifique que a congruência $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ se verifica para quaisquer valores de $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Isto é, todas as seis condições necessárias para a congruência são satisfeitas:

$$\begin{array}{ll} \overline{AB} \cong \overline{DE}, & \angle A \cong \angle D, \\ \overline{AC} \cong \overline{DF}, & \angle B \cong \angle E, \\ \overline{BC} \cong \overline{EF}, & \angle C \cong \angle F. \end{array}$$

Passo 10:

Definir Macro.

Clique sobre o ícone , Clique sobre os pontos A , B , C , D e E , Clique sobre o ícone , Clique sobre os segmentos AB , BC , AC , DE , DF e EF , Clique sobre o ponto F , Clique sobre os $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$, e $\angle F$. Clique sobre as expressões algébricas. Clique sobre o ícone , digite “*Triângulos Congruentes LLL*” no campo “Nome” e clique “OK”.

8.4 Atividade 4: Criar Macro - Triângulos Semelhantes (AAA)

Nesta atividade iremos criar uma macro para exemplificar o Teorema 3.3 (*LAL*) que garante que dados dois triângulos cujos ângulos correspondentes são congruentes, então os lados correspondentes são proporcionais e esses triângulos são semelhantes.

Teorema 5.1 (AAA). Dada uma correspondência entre dois triângulos, se os ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência é uma semelhança. Isto é, dado $\triangle ABC, \triangle DEF$ e a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$. Se $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

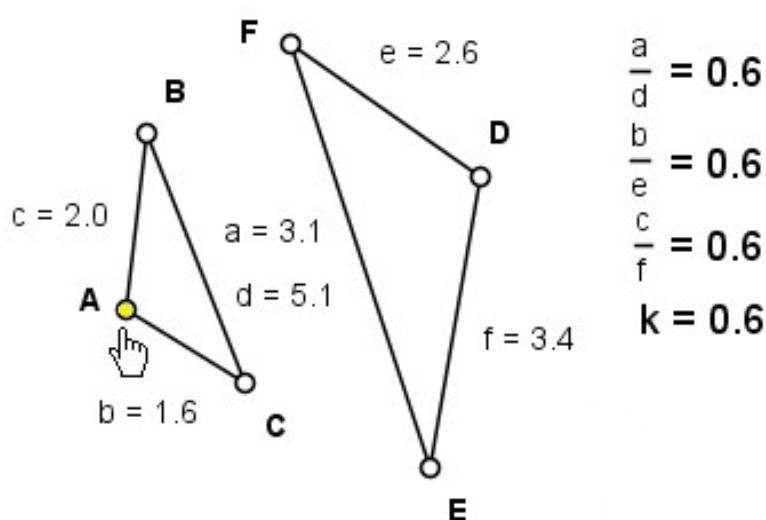




Figura 8.4: Caso AAA de Semelhança

Passo 1:



Construa os pontos A , B e C , identificando-os.

Clique sobre o ícone  e construa os três pontos. Para nomeá-los clique

sobre o ícone  e depois sobre os pontos A , B e C , nesta ordem.



Passo 2:

Construa os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} .

Clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos A e B , A e C e B e C . Para renomear os segmentos clique sobre o ícone  e depois sobre os segmentos \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , nesta ordem.



Passo 3:

Construa os ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$.

Clique sobre o ícone  e depois sobre os três pontos que formam cada um dos ângulos (o vértice deve ser sempre o segundo ponto). O $\angle A$, pontos B , A e C , nesta ordem. O $\angle B$, pontos A , B e C , nesta ordem. O $\angle C$, pontos A , C e B , nesta ordem. Para renomear os ângulos clique sobre o ícone  e depois sobre os $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ nesta ordem.



Passo 4:

Construa os $\angle D$, $\angle E$ e $\angle F$, tal que $m\angle D = m\angle A$, $m\angle E = m\angle B$ e $m\angle F = m\angle C$.

Construa o segmento \overline{DE} qualquer utilizando o ícone . Clique sobre o ícone , depois sobre os pontos D e E e sobre um ponto qualquer F' nesta ordem. A janela de edição irá aparecer automaticamente. Digite “\a” na caixa amplitude do ângulo e clique “OK”. Repita as operações sobre os pontos E , D e sobre um ponto qualquer F'' do mesmo lado de F' , nesta ordem. A janela de edição irá aparecer automaticamente. Digite “\b” na caixa “amplitude do ângulo” e clique “OK”.


Obs.: Pelo Teorema 4.5 a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180, portanto o último par de ângulos correspondentes será automaticamente congruente.

Passo 5:

Construa o ponto F sobre a intersecção de \overrightarrow{DF} com \overrightarrow{EF} Clique sobre o ícone  e depois sobre a intersecção de \overrightarrow{DF} com \overrightarrow{EF} . Para renomear os pontos clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos D , E e F , nesta ordem.



Passo 6:

Esconda os objetos auxiliares.

Selecione na Tela de construções permanentes, com a tecla “*ctrl*” pressionada, os $\angle D$ e $\angle E$, clique com o botão direito do mouse sobre um dos itens selecionados e depois em Editar Objeto, clique sobre o ícone  e em “OK”.


Passo 7:

Construa os segmentos \overline{EF} e \overline{DF} .

Clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos E e F . Repita para os pontos D e F . Para renomear os segmentos clique sobre o ícone  e depois sobre os segmentos \overline{EF} , \overline{DF} e \overline{DE} , nesta ordem.

Passo 8:


Mostre os valores dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{AC} , \overline{DE} , \overline{EF} e \overline{DF} .

Selecione os segmentos na *Tela de construções* permanentes, com a tecla “*ctrl*” pressionada. Clique com o botão direito do mouse sobre um dos itens selecionados e depois em *Editar Objeto*, clique sobre o ícone  e em “OK”.

Passo 9:

Você pode alterar a visualização e a aparência dos objetos. Por exemplo: Para mover os nomes e os valores dos objetos basta clicar com o botão direito do mouse sobre os valores e arrastá-los para a posição que desejar. Clicando com o botão direito do mouse sobre o objeto na *Tela de construções* permanentes e depois em *Editar objeto*, ou clicando duas vezes sobre o objeto, você pode alterar as propriedades do objeto, como a cor, a espessura, etc. ou mostrar o nome ou o valor.

Passo 10:

Nesta construção garantimos que $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$. Para demonstrarmos o *Teorema AAA*, podemos acrescentar expressões algébricas que demonstrem que os triângulos são semelhantes. Clique sobre o ícone  e no local da *Janela de construção* onde você quer que apareçam os dados. Na janela “Editar expressão” para cada objeto digite “ $\$ \frac{a}{d} \$$ ” na caixa “Explicação” e digite “ $(a)/(d)$ ” na caixa “Expressão aritmética”. Clique “OK”. Repita o processo para acrescentar as outras equações.

Passo 11:




Movimente os pontos livres e verifique que a semelhança $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ se verifica para quaisquer valores de $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$.

Isto é, as condições necessárias para a semelhança são satisfeitas:

$$k = \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

Passo 12:

Definir Macro.

Clique sobre o ícone . Clique sobre os pontos A , B , C , D e E . Clique sobre o ícone . Clique sobre os segmentos AB , BC , AC , DE , DF e EF . Clique sobre o ponto F . Clique sobre as expressões algébricas. Clique sobre o ícone , digite “*Triângulos Semelhantes AA*” no campo “Nome” e clique “OK”.

8.5 Atividade 5: Criar Macro - Triângulos Semelhantes (LLL)

Nesta atividade iremos criar uma macro para exemplificar o Teorema 5.2 (LLL) que garante que dados dois triângulos cujos três pares de lados correspondentes são proporcionais, então os ângulos são congruentes e a correspondência é uma semelhança.

Teorema 5.2 (LLL). Dada uma correspondência entre dois triângulos, se os lados correspondentes são proporcionais, então os ângulos são congruentes e a correspondência é uma semelhança.

Isto é, dados $\triangle ABC, \triangle DEF$ e uma correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$, se $a, b, c \sim d, e, f$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

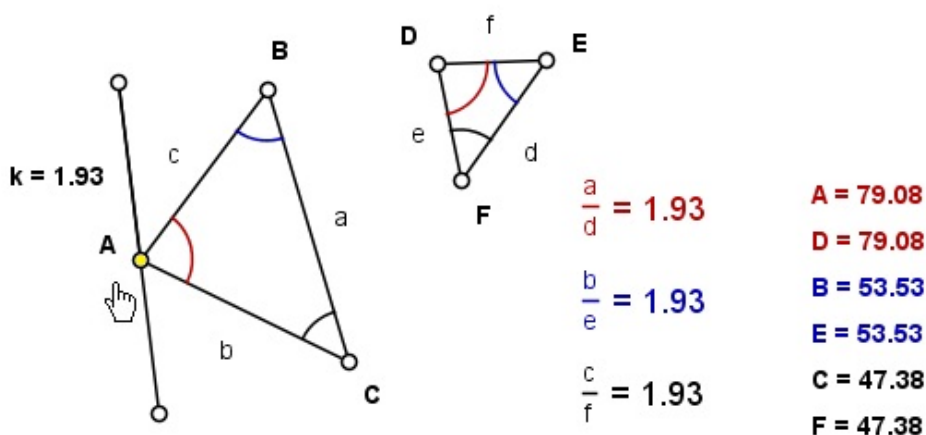




Figura 8.5: Caso LLL de Semelhança



Passo 1:

Construa os pontos A , B e C , identificando-os.

Clique sobre o ícone  e construa os três pontos. Para nomeá-los clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos A , B e C , nesta ordem.


Passo 2:

Construa os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} .

Clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos A e B , A e C e B e C . Para renomear os segmentos clique sobre o ícone  e depois sobre os segmentos \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , nesta ordem.



Passo 3:

Construa um segmento k tal que $k = \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$.

Clique sobre o ícone  e construa um segmento que contenha o ponto A . Construa um segundo segmento k sobre esse segmento tal que o ponto A se encontre na extremidade de k .


Passo 4:


Construa o segmento \overline{DE} , tal que $\overline{DE} = \frac{c}{k}$.

Clique sobre o ícone , clique sobre o ponto D e sobre um ponto qualquer. A janela de edição irá aparecer automaticamente. Digite “ $c \backslash k$ ” na caixa Comprimento e clique “OK”. Clique sobre o ícone , sobre o ponto D e sobre um ponto qualquer sobre a circunferência criando o segmento DE .



Passo 5:

Construa os segmentos \overline{DF} e \overline{EF} , tal que $\overline{DF} = \frac{b}{k}$ e $\overline{EF} = \frac{a}{k}$.

Clique sobre o ícone , clique sobre o ponto D e sobre um ponto qualquer. A janela de edição irá aparecer automaticamente. Digite “ $b \backslash k$ ” na caixa “Comprimento” e clique “OK”.


Clique sobre o ícone , clique sobre o ponto E e sobre um ponto qualquer. A janela de edição irá aparecer automaticamente. Digite “ $a \backslash k$ ” na caixa “Comprimento” e clique “OK”.

Clique sobre o ícone  e depois sobre a intersecção das duas circunferências.

Construa os segmentos clicando sobre o ícone  e sobre os pontos D e F e depois E e F . Para renomear os segmentos e os pontos, clique sobre o ícone  e depois sobre os segmentos \overline{EF} , \overline{DF} e \overline{DE} , nesta ordem e sobre os pontos D , E e F , nesta ordem.



Passo 6:

Esconda os objetos auxiliares.

Na *Tela de construções permanentes*, com a tecla “*ctrl*” pressionada, selecione as três circunferências, clique com o botão direito do mouse sobre um dos itens selecionados e depois em *Editar Objeto*, clique sobre o ícone  e em “*OK*”.

Passo 7:

Construa os $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ e $\angle F$.

Clique sobre o ícone , e depois sobre os três pontos que formam cada um dos ângulos (o vértice deve ser sempre o segundo ponto). Exemplo: O $\angle A$, pontos B , A e C , nesta ordem. O $\angle B$, pontos A , B e C , nesta ordem, etc. Após criar os ângulos você pode alterar o tamanho do arco abrindo a janela *Editar Objeto* e clicando sobre o ícone .


Passo 8:

Você pode alterar a visualização e a aparência dos objetos. Por exemplo: Para mover os nomes e os valores dos objetos basta clicar com o botão direito do mouse sobre os valores e arrastá-los para a posição que desejar.


Clicando com o botão direito do mouse sobre o objeto na *Tela de construções permanentes* e depois em *Editar Objeto*, ou clicando duas vezes sobre o objeto, você pode alterar as propriedades do objeto, como a cor, a espessura, etc. ou mostrar o nome ou o valor.

Passo 9:

Nesta construção garantimos que $a, b, c \sim d, e, f$. Para demonstrarmos o *Teorema LLL*, podemos acrescentar expressões algébricas que demonstrem que os triângulos são semelhantes.

Clique sobre o ícone  e no local da *Janela de construção* onde você quer que apareçam os dados. Na janela “*Editar expressão*” para cada objeto digite “ $\frac{a}{d}$ ” na caixa “*Explicação*” e digite “(a)/(d)” na caixa “*Expressão aritmética*”. Clique “*OK*”. Repita o processo para acrescentar as outras equações e acrescente os valores dos ângulos. Na janela “*Editar expressão*” para cada ângulo digite a letra correspondente (A , B , C , etc.) na caixa “*Explicação*” e digite o nome de cada ângulo (a_1 , a_2 , a_3 , etc.) na caixa “*Expressão aritmética*”. Clique “*OK*”.

Passo 10:


Clique sobre o ícone , e depois clique duas vezes sobre o ponto A e um clique sobre o segmento maior. O valor de k vai sendo alterado automaticamente e você pode verificar que a semelhança $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ se verifica para quaisquer valores k .


Isto é, as condições necessárias para a semelhança são satisfeitas:

$$k = \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \quad \text{e} \quad \angle A \cong \angle D, \quad \angle B \cong \angle E, \quad \angle C \cong \angle F.$$

Passo 11:

Definir Macro.

Clique sobre o ícone , Clique sobre os pontos A , B , C e D e sobre os dois pontos da

extremidade do segmento que contém k . Clique sobre o ícone . Clique sobre os segmentos AB , BC , AC , DE , DF e EF . Clique sobre os pontos E e F . Clique sobre os $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ e $\angle F$, no segmento que contém k e no segmento k . Clique sobre as expressões algébricas. Clique sobre

o ícone , digite “*Triângulos semelhantes LLL*” no campo “*Nome*” e clique “*OK*”.

8.6 Atividade 6: Criar Macro - Triângulos Semelhantes (LAL)

Nesta atividade iremos criar uma macro para exemplificar o Teorema 5.3: (LAL) que garante que dados dois triângulos cujos dois pares de lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes entre os lados são congruentes, então a correspondência é uma semelhança.

Teorema 5.3 (LAL). Dada uma correspondência entre dois triângulos, se dois pares de lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes entre os lados são congruentes, então a correspondência é uma semelhança.

Isto é, dados $\triangle ABC, \triangle DEF$ e uma correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$, se $\angle A \cong \angle D$ e $b, c \sim e, f$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

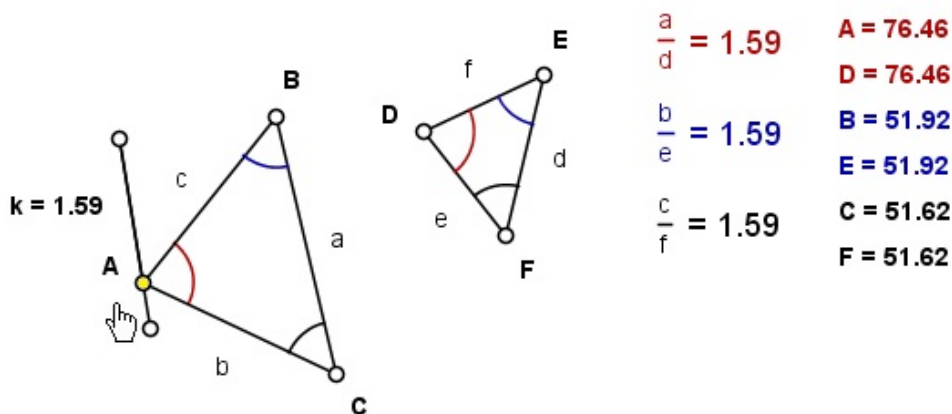




Figura 8.6: Caso LAL de Semelhança

Passo 1:











Construa os pontos A, B e C , identificando-os.

Clique sobre o ícone  e construa os três pontos, nomeie-os clicando sobre o ícone  e depois sobre os pontos A, B e C .

Passo 2:

Construa o $\angle A$.

Clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos C, A e B , nesta ordem.

<p>Passo 3:</p> <p>Construa os \overline{AB}, \overline{AC} e \overline{BC}.</p> <p>Clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos A e B, A e C e B e C. Para renomear os segmentos clique sobre o ícone  e depois sobre os segmentos \overline{BC}, \overline{AC} e \overline{AB}, nesta ordem.</p>
<p>Passo 4:</p> <p>Construa um segmento k tal que $k = \frac{a}{d}$.</p> <p>Clique sobre o ícone  e construa um segmento que contenha o ponto A. Construa um segundo segmento k sobre esse segmento tal que o ponto A se encontre na extremidade de k.</p>
<p>Passo 5:</p> <p>Construa o segmento \overline{DE}, tal que $\overline{DE} = \frac{c}{k}$.</p> <p>Clique sobre o ícone  , clique sobre o ponto D e sobre um ponto qualquer. A janela de edição irá aparecer automaticamente. Digite “$c \backslash k$” na caixa “Comprimento” e clique “OK”.</p> <p>Clique sobre o ícone  e construa \overline{DE} unindo o ponto D até um ponto qualquer sobre a circunferência.</p>
<p>Passo 6:</p> <p>Construa o $\angle D \cong \angle A$.</p> <p>Clique sobre o ícone  , clique sobre os pontos E e D, nesta ordem e depois sobre um ponto qualquer F'. A janela de edição irá aparecer automaticamente. Digite “a1” na caixa “amplitude” do ângulo e clique “OK”.</p>
<p>Passo 7:</p> <p>Construa os \overline{DF} e \overline{EF}.</p> <p>Clique sobre o ícone  e clique sobre o ponto D e sobre um ponto qualquer. A janela de edição irá aparecer automaticamente. Digite “$b \backslash k$” na caixa “Comprimento” e clique “OK”.</p> <p>Clique sobre o ícone  e sobre a intersecção entre a circunferência e a $\overrightarrow{DF'}$ criando o ponto F. Clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos D e F, E e F. Para renomear os segmentos clique sobre o ícone  e depois sobre os segmentos \overline{EF}, \overline{DF} e \overline{DE}, nesta ordem.</p>


Passo 8:


Esconda os objetos auxiliares.

Na *Tela de construções permanentes*, com a tecla “*ctrl*” pressionada, selecione as duas circunferências e o ângulo, clique com o botão direito do mouse sobre um dos itens selecionados e depois em *Esconder*.

Passo 9:

Construa os $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ e $\angle F$.

Clique sobre o ícone  e depois sobre os três pontos que formam cada um dos ângulos. Exemplo: O $\angle B$, pontos A , B e C , nesta ordem. Após criar os ângulos você pode alterar o tamanho do arco abrindo a janela *Editar Objeto*


e clicando sobre o ícone .

Passo 10:


Você pode alterar a visualização e a aparência dos objetos. Por exemplo: Para mover os nomes e os valores dos objetos basta clicar com o botão direito do mouse sobre os valores e arrastá-los para a posição que desejar. Clicando com o botão direito do mouse sobre o objeto na *Tela de construções permanentes* e depois em *Editar Objeto* você pode alterar as propriedades do objeto, como a cor, a espessura, etc.

Passo 11:

Nesta construção garantimos que $b, c \sim e, f$. Para demonstrarmos o *Teorema LAL* podemos acrescentar expressões algébricas que demonstrem que os triângulos são semelhantes.

Clique sobre o ícone  e no local da Janela de construção onde você quer que apareçam os dados. Na janela “*Editar expressão*” para cada objeto digite “ $\frac{a}{d}$ ” na caixa “*Explicação*” e digite “ $(a)/(d)$ ” na caixa “*Expressão aritmética*”. Clique “*OK*”. Repita o processo para acrescentar as outras equações conforme a Figura 8.6. Você pode acrescentar expressões com os valores dos ângulos ou colocar os valores no próprio triângulo.

Passo 12:




Clique sobre o ícone , e depois clique duas vezes sobre o ponto A e um clique sobre o segmento maior. O valor de k vai sendo alterado automaticamente e você pode verificar que a semelhança $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ se verifica para quaisquer valores de k .

Isto é, as condições necessárias para a semelhança são satisfeitas:

$$k = \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \quad \text{e} \quad \angle A \cong \angle D, \quad \angle B \cong \angle E, \quad \angle C \cong \angle F.$$

Passo 13:

Definir Macro.

Clique sobre o ícone , Clique sobre os pontos A, B, C . Clique sobre os dois pontos da extremidade do segmento que contém k . Clique sobre o ponto D . Clique sobre o ícone , Clique sobre os segmentos AB, BC, AC, DE, DF, EF , no segmento k e no segmento que o contém. Clique sobre os pontos F e E . Clique sobre os $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E$ e $\angle F$. Clique sobre as expressões algébricas. Clique sobre o ícone , digite “*Triângulos Semelhantes LAL*” no campo “*Nome*” e clique “*OK*”.

8.7 Atividade 7: Criar Macro - Demonstração do Teorema de Pitágoras

Teorema 5.4: (*Teorema de Pitágoras*). Em um triângulo retângulo qualquer, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Isto é, seja $\triangle ABC$ retângulo em C , então

$$c^2 = b^2 + a^2.$$

Primeiramente iremos utilizar o programa régua e compasso para provar o teorema e depois faremos uma atividade para verificar a validade do teorema.

8.7.1 Demonstração do Teorema de Pitágoras

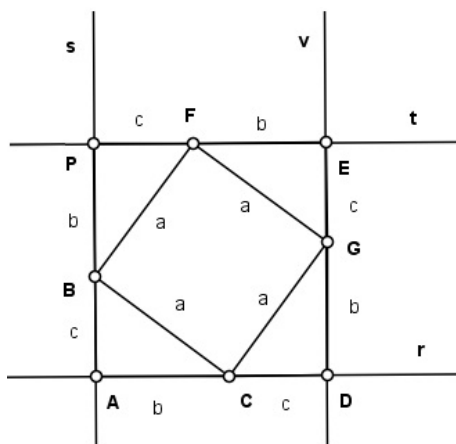



Figura 8.7: Teorema de Pitágoras

Passo 1:

Construa as retas r e s tal que $r \perp s$ e A seja a intersecção entre elas.


Clique sobre o ícone  e depois sobre dois pontos A e C criando a reta r .


Clique sobre o ícone , sobre a reta r e depois sobre o ponto A criando a reta $s \perp r$. Para renomear as retas, clique duas vezes sobre os objetos e altere seus nomes na janela *Editar Objeto*.

8.7. ATIVIDADE 7: CRIAR MACRO - DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS⁹⁵




Passo 2:

Construa o ponto B.

Clique sobre o ícone  e depois sobre um ponto qualquer sobre a reta s .

Para renomear os pontos clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos A , B e C , nesta ordem. Obs. O ponto C já se encontra sobre a reta r , basta renomeá-lo.

Passo 3:

Construa os pontos P e D tais que $C - B - P$ e $A - C - D$ e $\overline{PB} = \overline{AC}$ e $\overline{CD} = \overline{AB}$. Clique sobre o ícone compasso  e sobre os pontos A e B e depois sobre o ponto C . Clique sobre o ícone compasso  e sobre os pontos A e C e depois sobre o ponto B . Clique sobre o ícone  e depois sobre o ponto de intersecção entre a circunferência e a reta r criando o ponto D tal que $A - C - D$. Repita o procedimento na reta s criando o ponto P tal que $A - B - P$.



Passo 4:

Esconda os objetos auxiliares.

Na *Tela de construções permanentes*, com a tecla “*ctrl*” pressionada, selecione as duas circunferências, clique com o botão direito do mouse sobre um dos itens selecionados e depois em *Esconder*.

Passo 5:



Construa uma reta t paralela à reta r passando por P e uma reta v paralela à reta s passando por D cuja intersecção seja o ponto E .

Clique sobre o ícone , sobre a reta s e sobre o ponto D . Repita o procedimento com a reta r e o ponto P . Clique sobre o ícone  e depois sobre a intersecção das retas t e v . Para renomear as retas e o ponto E clique duas vezes sobre os objetos e altere seus nomes na janela *Editar Objeto*.

Passo 6:

Construa os pontos F e G tais que $P - F - E$ e $E - G - D$ e $\overline{PE} \cong \overline{AB}$ e $\overline{DG} \cong \overline{AC}$.

Clique sobre o ícone compasso  e sobre os pontos A e B e depois sobre o ponto P .

Clique sobre o ícone compasso  e sobre os pontos A e C e depois sobre o ponto D . Clique sobre o ícone  e depois sobre o ponto de intersecção entre a circunferência e a reta t criando o ponto F , tal que $P - F - E$. Repita o procedimento na reta v criando o ponto G tal que $E - G - D$.

Passo 7:

Esconda os objetos auxiliares.


Na *Tela de construções* permanentes, com a tecla “*ctrl*” pressionada, selecione as duas circunferências, clique com o botão direito do mouse sobre um dos itens selecionados e depois em *Esconder*.

Passo 8:

Construa o quadrado $\square ABEF$.

Por construção os triângulos ABC , BFP , FGE e GAD são congruentes, pois $\overline{AC} \cong \overline{BP}$, $\overline{FG} \cong \overline{DG}$, $\angle C \cong \angle P \cong \angle E \cong \angle D$ e $\overline{BC} \cong \overline{FP} \cong \overline{EG} \cong \overline{AD}$, caso de congruência *LAL*.

Portanto $\overline{BF} \cong \overline{FG} \cong \overline{GA} \cong \overline{AB}$ e como os triângulos são retângulos, então $m\angle CBA + m\angle BAC = 90$. Como $m\angle CBA + m\angle BAC + m\angle ABF = 180$, temos que $m\angle ABF = 90$. Analogamente $m\angle ABF = m\angle BFG = m\angle FGA = m\angle GAB = 90$. Portanto o quadrilátero $\square ABEF$ é um quadrado.

Clique sobre o ícone  e sobre os pontos $ABFG$.

Passo 9:

Você pode alterar a visualização e a aparência dos objetos. Por exemplo: Para mover os nomes e os valores dos objetos basta clicar com o botão direito do mouse sobre os valores e arrastá-los para a posição que desejar.

Clicando com o botão direito do mouse sobre o objeto na *Tela de construções permanentes* e depois em *Editar Objeto* você pode alterar as propriedades do objeto, como a cor, a espessura, etc.

8.7. ATIVIDADE 7: CRIAR MACRO - DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS97

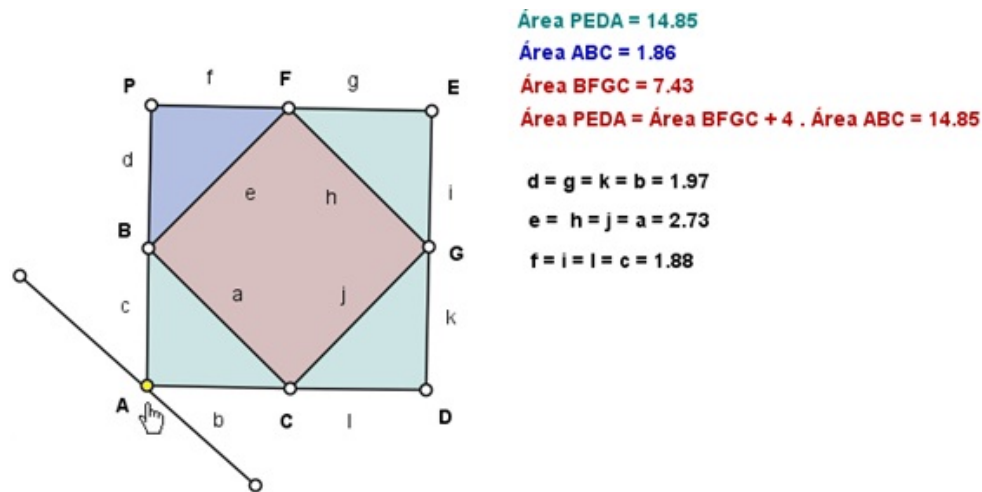


Figura 8.8: Demonstração do Teorema de Pitágoras

Demonstração.

$$\text{Área } \square PEDA = \text{área } \square BFGC + 4 \cdot \text{área } \triangle ABC.$$


Portanto,

$$\begin{aligned} (b+c)^2 &= a^2 + 4 \cdot \left(\frac{b \cdot c}{2}\right) \\ b^2 + c^2 + 2bc &= a^2 + 4 \cdot \left(\frac{bc}{2}\right) \\ b^2 + c^2 &= a^2 + 2bc - 2bc \\ b^2 + c^2 &= a^2. \end{aligned}$$

□


Passo 10:


Nesta construção garantimos que os triângulos ABC , BFP , FGE e GAD são congruentes.

Clique sobre o ícone  e no local da *Janela de construção* onde você quer que apareçam os dados. Na janela “Editar expressão” para cada objeto digite “BC” na caixa “Explicação” e digite “a” na caixa “Expressão aritmética”. Clique “OK”. Repita o processo para acrescentar as outras equações conforme a Figura 8.8.

Passo 11:

Animação.

Clique sobre o ícone  e construa um segmento que contenha o ponto A .

Clique sobre o ícone , e depois clique duas vezes sobre o ponto A e um clique sobre o segmento anterior.


Você irá verificar que a relação:



$$\text{Área } \square PED A = \text{área } \square BFGC + 4 \cdot \text{área } \triangle ABC.$$

se manterá quaisquer que sejam os valores de a , b e c o que é condição necessária e suficiente para demonstrar o *Teorema de Pitágoras*.

Passo 12:

Definir Macro.

Clique sobre o ícone , Clique sobre os pontos A e C . Clique sobre os dois pontos da extremidade do segmento externo ao quadrado $\square PED A$ que contém

A . Clique sobre o ícone , Clique em todos os outros objetos. Clique em , digite “*Demonstração Teorema de Pitágoras*” no campo “*Nome*” e clique “*OK*”.

8.8 Atividade 8: Criar Macro - Verificação do Teorema de Pitágoras.

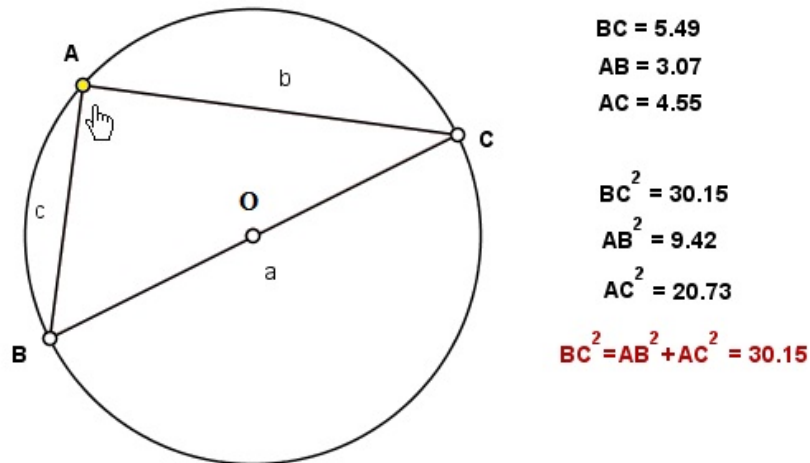



Figura 8.9: Verificação do Teorema de Pitágoras



Passo 1:


Construa uma circunferência de raio qualquer.








Clique sobre o ícone , clique sobre o ponto O e depois sobre o ponto C .

Passo 2:

Construa os pontos A , B e C .

Clique sobre o ícone , clique sobre o ponto C e O . Clique sobre o ícone  e depois sobre o ponto de intersecção entre a circunferência e a semirreta \overrightarrow{CO} e depois sobre um ponto qualquer da circunferência. Para renomear os

pontos clique sobre o ícone  e depois sobre os pontos A , B e C , nesta ordem. Obs. Para renomear o ponto O clique duas vezes sobre o ponto e altere seu nome na janela *Editar Objeto*.

<p>Passo 3: Esconda os objetos auxiliares. Na <i>Tela de construções permanentes</i> selecione a semirreta \overrightarrow{CO}, clique com o botão direito do mouse sobre um dos itens selecionados e depois em <i>Esconder</i>.</p>
<p>Passo 4: Construa o triângulo retângulo ABC. Clique sobre o ícone  e sobre os pontos B e C, A e C e A e B. Para renomear os segmentos clique sobre o ícone  e depois sobre os segmentos \overline{BC}, \overline{AC} e depois sobre \overline{AB}, nesta ordem.</p>
<p>Passo 5: Você pode alterar a visualização e a aparência dos objetos. Por exemplo: Para mover os nomes e os valores dos objetos basta clicar com o botão direito do mouse sobre os valores e arrastá-los para a posição que desejar. Clicando com o botão direito do mouse sobre o objeto na <i>Tela de construções permanentes</i> e depois em <i>Editar Objeto</i> você pode alterar as propriedades do objeto, como a cor, a espessura, etc.</p>
<p>Passo 6: Nesta construção garantimos que o triângulo ABC é retângulo em A, pois o ângulo interno $\angle A$ é a metade do central (180). Agora temos que mostrar que a relação $b^2 + c^2 = a^2$ se verifica para quaisquer valores de a, b e c. Clique sobre o ícone  e no local da Janela de construção onde você quer que apareçam os dados. Na janela “Editar expressão” para cada objeto digite “BC” na caixa “Explicação” e digite “a” na caixa “Expressão aritmética”. Clique “OK”. Repita o processo para acrescentar as outras equações conforme a Figura 8.9. Para que apareça potência, na janela “Editar expressão” para cada objeto digite “$\\$BC^2\\$” na caixa “Explicação” e digite “a^2” na caixa “Expressão aritmética”. Clique “OK”.</p>
<p>Passo 7: Animação. Clique sobre o ícone , e depois clique duas vezes sobre o ponto A e um clique sobre a circunferência. Você irá verificar que a relação $BC^2 = AB^2 + AC^2$ se manterá quaisquer que sejam os valores de BC, AB e AC.</p>
<p>Passo 8: Definir Macro. Clique sobre o ícone , Clique sobre os pontos O e A. Clique sobre o ícone . Clique em todos os outros objetos. Clique em , digite “<i>Verificação Teorema de Pitágoras</i>” no campo “<i>Nome</i>” e clique “OK”.</p>

Capítulo 9

Comentários Finais

Durante os dois anos de curso ouvimos muitos comentários por parte de alguns colegas dizendo que o conteúdo que estava sendo ministrado não poderia ser aproveitado profissionalmente e como o intuito do curso era o aperfeiçoamento do professor, o estudo estava sendo desperdiçado. Ao final do curso podemos ver que isso não é verdade, pois quanto maior o conhecimento adquirido pelo professor, mais segurança ele terá ao ministrar uma aula. Posso dizer isso por experiência própria e tenho certeza que outros colegas irão concordar comigo. Pensando nisso escolhemos um tema para a dissertação que pudesse ajudar, de alguma maneira, outros professores da rede pública. Há na rede pública uma carência muito grande de professores qualificados na área da informática, resultando num desperdício de softwares e hardwares disponibilizados às escolas pelo Governo do Estado de São Paulo. Neste trabalho escolhemos trabalhar com conceitos utilizados tanto no ensino fundamental como no ensino médio como congruências e semelhanças. Utilizando um software gratuito permitimos um alcance ainda maior. Escolhemos algumas atividades de congruências e semelhanças de triângulos e incluímos duas atividades sobre o Teorema de Pitágoras, que é um dos mais famosos teoremas da matemática e que os alunos têm grande familiaridade. Acreditamos que o objetivo deste trabalho tenha sido alcançado e esperamos que possa beneficiar o maior número de professores e alunos possível.

Referências Bibliográficas

- [1] AABOE, Asger. *Episódios da História Antiga da Matemática*, Ed. SBM, 1984.
- [2] ALVES, Sérgio. *A Geometria das Construções Fundamentais*. Em andamento.
- [3] COSTA, Mário Duarte da. *O desenho básico na área tecnológica*. In: CONGRESSO NACIONAL DE DESENHO, 2, Florianópolis, 1981. Anais... Florianópolis: UFSC, 1982. p.89-90.
- [4] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*, Ed. SBM. Rio de Janeiro, 1985.
- [5] EUCLIDES. *Os Elementos*, Tradução de Irineu Bicudo. Ed. Unesp - 1ª ed., São Paulo, 2009.
- [6] HILBERT, David. *The Foundations of Geometry*. Ed. Open Court, Illinois, EUA, 1999.
- [7]
- [8] MOISE, Edwin. *Elementary Geometry from an advanced standpoint*. Ed. ADDISON-WESLEY Publishing Company INC., Massachusetts, EUA, 1963.