CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MARCELA DE OLIVEIRA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS COM USO DO APLICATIVO PYTHAGOREA

Maringá
2021

MARCELA DE OLIVEIRA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS COM USO DO APLICATIVO PYTHAGOREA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves

Maringá
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Oliveira, Marcela de
O482pr Uma proposta para o ensino do Teorema de Pitágoras com o uso do aplicativo Pythagorea / Marcela de Oliveira. -- Maringá, 2021.
x, 113 f. : il. color.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2021.

1. Geometria plana. 2. Teorema de Pitágoras. 3. Áreas de polígonos. 4. GeoGebra. 5. Pythagorea. I. Neves, Eduardo de Amorim, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 516.9
Edilson Damasio CRB9-1.123

MARCELA DE OLIVEIRA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS
COM USO DO APLICATIVO PYTHAGOREA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves
UEM - Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Luciana Y. Tsuchiya

Profa. Dra. Luciana Yoshie Tsuchiya
Instituto Federal do Paraná - Paranavaí

Sandra Regina D'Antonio Verrengia

Profa. Dra. Sandra Regina D Antonio Verrengia
UEM - Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 23 de agosto de 2021
Local de defesa: Videoconferência pelo link https://meet.google.com/hay-aovu-pfx

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de ensino de geometria para alunos do 9° ano do Ensino Fundamental com vistas a estimulá-los a compreender conceitos matemáticos relacionados ao comprimento e à área de figuras a partir do Teorema de Pitágoras. Para a obtenção desse objetivo, utilizaremos como estratégia metodológica o uso de recursos digitais, especificamente os aplicativos *Pythagorea* e *GeoGebra*, bem como, fichas de trabalho a serem utilizadas pelo professor tanto no ensino presencial quanto no remoto.

Palavras chave: Geometria Plana, Teorema de Pitágoras, Área de Polígonos, GeoGebra, Aplicativo Pythagorea.

Abstract

This paper aims to present a proposal for teaching geometry to students of the 9th grade of elementary school in order to stimulate them to understand mathematical concepts related to the length and area of figures from the Pythagoras Theorem. To achieve this objective, we will use as a methodological strategy the use of digital resources, specifically the *Pythagorea* and *GeoGebra* applications, as well as work forms to be used by the teacher both in face-to-face and remote teaching.

Keywords: Flat Geometry, Pythagoras Theorem, Polygon Area, GeoGebra, Pythagorea Application.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me proporcionado saúde e força de vontade em todo o caminho percorrido e por ter colocado em minha vida anjos que vieram em meu auxílio quando mais precisei. Também agradeço a Nossa Senhora por me cobrir com seu manto sagrado em todas as tempestades enfrentadas.

Em seguida agradeço imensamente à toda minha família pelo apoio, orações e compreensão de algumas ausências. Não posso definir o quão especial todos são para mim.

Aos meus pais, Sonia e Milton, à minha irmã Kátia e aos meus avós Maria Helena e Mauro, que sempre me incentivaram em toda minha vida. Obrigada por rezarem e por acreditarem em mim. Amo vocês.

Agradeço em especial ao meu esposo Carlos Eduardo dos Santos o qual não mediu esforços para me apoiar durante todo a realização do mestrado e da estruturação da dissertação. Obrigada pela ajuda dentro e fora de casa, pela compreensão em deixar muitas coisas por fazer para que esse mestrado pudesse ser concluído. Te amo muito. Você acreditou mais em mim do que eu mesma.

Agradeço muito aos amigos que me ajudaram a lidar com todas as situações vividas durante estes dois anos e meio, em especial à minha amiga Viviane Bueno Biancatto, amiga esta que me ajudou tanto nos estudos como na vida.

Meu enorme agradecimento ao professor Dr. Eduardo de Amorim Neves, que sempre me ouviu, me corrigiu e me estimulou a continuar. Obrigada por me guiar nesta jornada.

Por fim, e não menos importante, agradeço à instituição Universidade Estadual de Maringá que me acolheu no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT e a todos os professores que tive durante todo o curso. Minha formação se tornou muito melhor com vossos ensinamentos.

INTRODUÇÃO

Inúmeras são as etapas a serem vencidas em tempos de educação remota, híbrida e presencial, como acesso à internet, computadores e celulares, a presença de alguém que realmente saiba mostrar e ensinar como usar estas tecnologias, o desgaste emocional de permanecer em casa por longos períodos.

A pandemia da Covid-19 tem levado professores a buscarem formas mais dinâmicas de se aproximar do aluno, mesmo estando longe fisicamente. Essa busca se dá por meio das mídias sociais, do estudo e planejamento de tarefas que possam ser desenvolvidas em casa e ainda levando em conta os alunos que não possuam acesso a um dos meios de comunicação citados anteriormente. Nos atentamos também para o fato de os alunos estarem se distanciando cada vez mais da leitura. Na tentativa de reestabelecer uma parte desta conexão, utilizamos alguns recursos que consideramos significativos no processo de ensino e aprendizagem.

Grandes são também as barreiras a serem ultrapassadas em relação ao ensino de Geometria Plana no Ensino Fundamental e Médio, em particular o Teorema de Pitágoras. Barreiras essas como a dificuldade do aluno em visualizar as figuras planas, a falta de materiais concretos e dinâmicos dentro de sala de aula.

Tendo em mente os fatos e situações citados, este trabalho tem por objetivo criar algumas fichas didáticas, de tal forma que estas auxiliem no ensino e aprendizagem de maneira remota e presencial. Apresentando uma proposta de ensino de geometria para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Para estruturar nossa proposta utilizamos a Base Nacional Comum Curricular

(BNCC). Este documento contempla os conteúdos a serem utilizados neste trabalho como o Teorema de Pitágoras, áreas e medidas de comprimentos. Contando ainda com a citação da importante relação do uso de tecnologias como auxílio na estimulação do pensamento computacional e matemático.

Segundo a BNCC [1],

> "competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho." [1] (página 8).

Ainda na BNCC, dentre as competências gerais da Educação Básica que se relacionam e se estruturam com a construção de conhecimentos e desenvolvimento de habilidades nos termos da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB [8]), queremos destacar duas:

> "Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas." [1] (página 9)

> "Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva." [1] (página 9)

Cada pessoa cria estratégias diferentes para solucionar os problemas enfrentados, desenvolver conclusões e assimilar conceitos. Existem pessoas que precisam de mais estímulos visuais e imagens para que possam interpretar e estabelecer as relações de aprendizagem. Outras por sua vez precisam ouvir mais para conseguir organizar suas ideias e compreender os conceitos. Há ainda aquelas que tem a necessidade de que haja movimento no que esteja analisando para que sua compreensão seja mais completa.

Em Mazuroski [10] vemos que os vários estilos de aprendizagem são apresentados de diferentes formas e classificações. Dentre estas formas destacaremos o método VAC (VISUAL, AUDITIVO e CINESTÉSICO) que é baseado nos sentidos e responde com eficiência as expectativas e exigências da escola. A teoria VAC, foi desenvolvida por Fernald e Keller e Orton- Gilingham e traz que a aprendizagem ocorre por meio dos sentidos visual, auditivo e tátil.

a) Estilo visual: indivíduos que possuem habilidades de conhecer, interpretar e diferenciar os estímulos recebidos visualmente. A partir da visualização das imagens, é possível estabelecer relações entre ideias e abstrair conceitos.

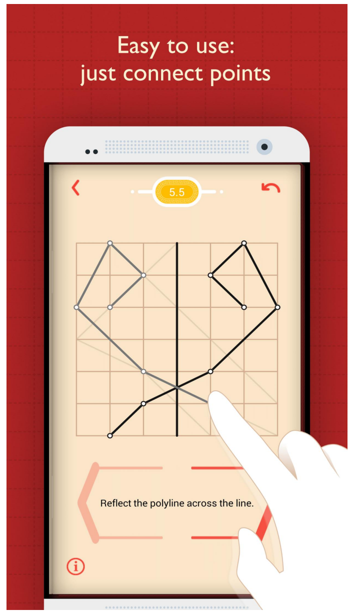
b) Estilo Auditivo: indivíduos que possuem habilidades de conhecer, interpretar e diferenciar os estímulos recebidos pela palavra falada, sons e ruídos, organizando suas ideias, conceitos e abstrações a partir da linguagem falada.

c) Estilo Cinestésico: indivíduos que possuem habilidades de conhecer, interpretar e diferenciar os estímulos recebidos pelo movimento corporal.

Pensando nos contextos citados na BNCC [1] e nos estilos de aprendizagem dos alunos, procuramos em nosso trabalho agregar ferramentas variadas de ensino, como o aplicativo Pythagorea para celular, demonstrações dinâmicas no programa GeoGebra para computador e, em alguns momentos, materiais manipuláveis e é claro o papel do professor como mediador entre os recursos tecnológicos e o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Falando sobre o aplicativo, o Pythagorea possui uma malha quadriculada onde você tenta resolver os diferentes problemas que aparecem em cada fase relacionados à geometria. O aplicativo contém alguns problemas básicos e alguns problemas mais complexos, permitindo assim que o participante de níveis distintos de conhecimentos matemáticos possam se divertir construindo. Além disso, ele permeia diversos conteúdos da geometria plana, desafiando o praticante por exemplo a encontrar pontos médios, retas paralelas, segmentos com medidas específicas, distâncias entre pontos, entre retas, etc. E claro que o Teorema de Pitágoras entra como protagonista do aplicativo, justificando o próprio nome, posto que se o praticante tem o conhecimento do teorema, a resolução de muitas fases tornam-se mais fáceis.

Figura 1: Jogo Pythagorea.



Fonte: https://sameapk.com/pythagorea/

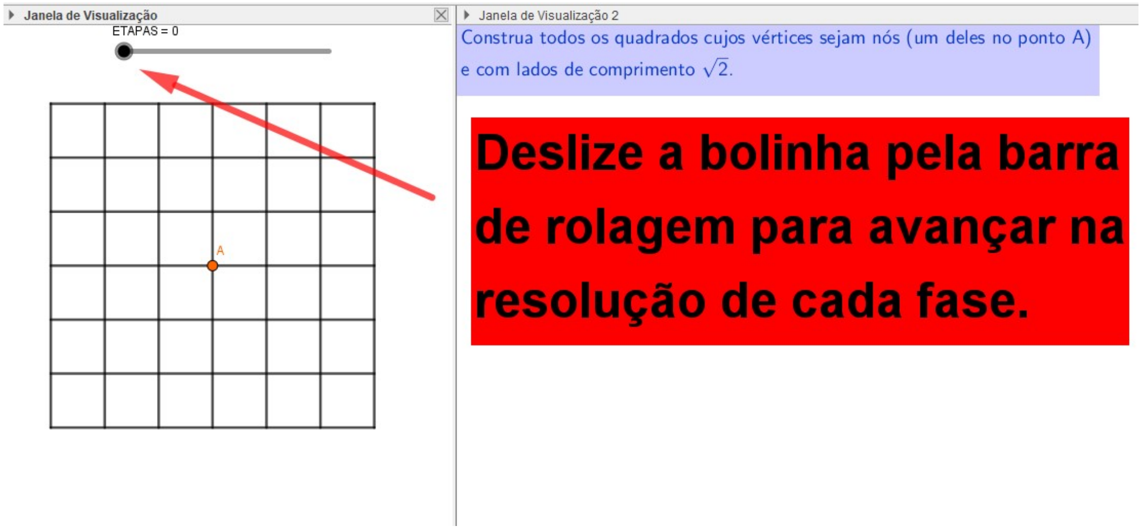
Por outro lado, quando o professor for organizar e sistematizar os conteúdos incluídos no aplicativo Pythagorea, um recurso que pode ser utilizado é o software Geogebra. Em nosso trabalho utilizamos este programa para apresentar resoluções dinâmicas de determinadas fases do aplicativo Pythagorea com as explicações acerca da geometria plana. O programa, que também conta com uma malha quadriculada, possibilita que o aluno visualize e analise a atividade passo a passo com conceito e imagem integrados. O professor pode indicar que os alunos explorem o programa Geogebra antes de trabalhá-lo em sala de aula, tentando assim ampliar o entendimento dos mesmos ou ainda após o desenvolvimento da atividade proposta, pensando em incentivá-los a realizarem mais construções.

Mesmo que o leitor não conheça o software Geogebra e o aplicativo Pythagorea, é fácil seguir o passo a passo de como usar. Estas ferramentas tornam os alunos protagonistas do aprendizado.

Abaixo temos alguns exemplos de como aparecem as demonstrações dinâmicas que fizemos no Geogebra.

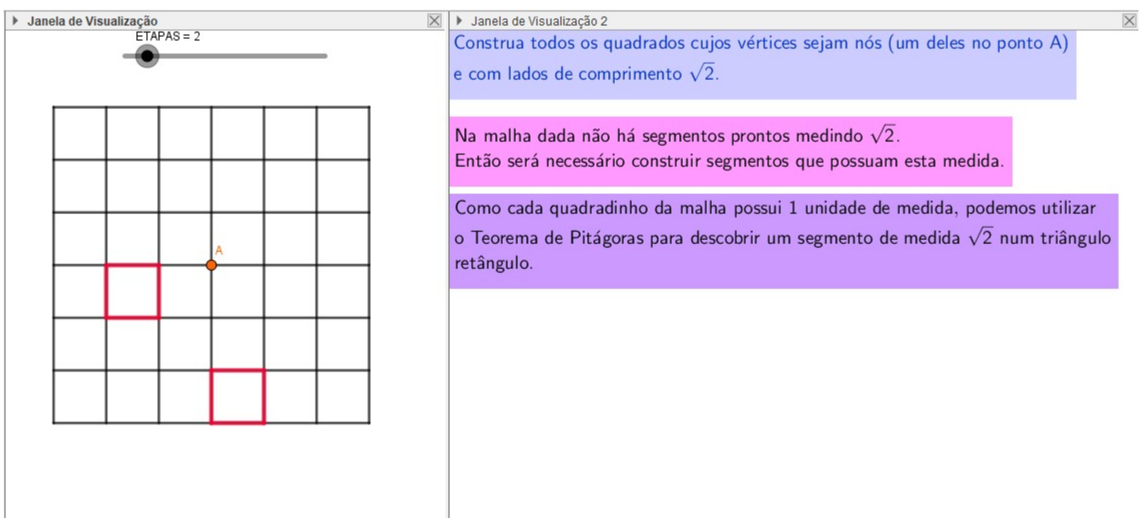
`https://www.geogebra.org/m/qqrxvs49#material/zybscfev`

Figura 2: Demonstração dinâmica 1



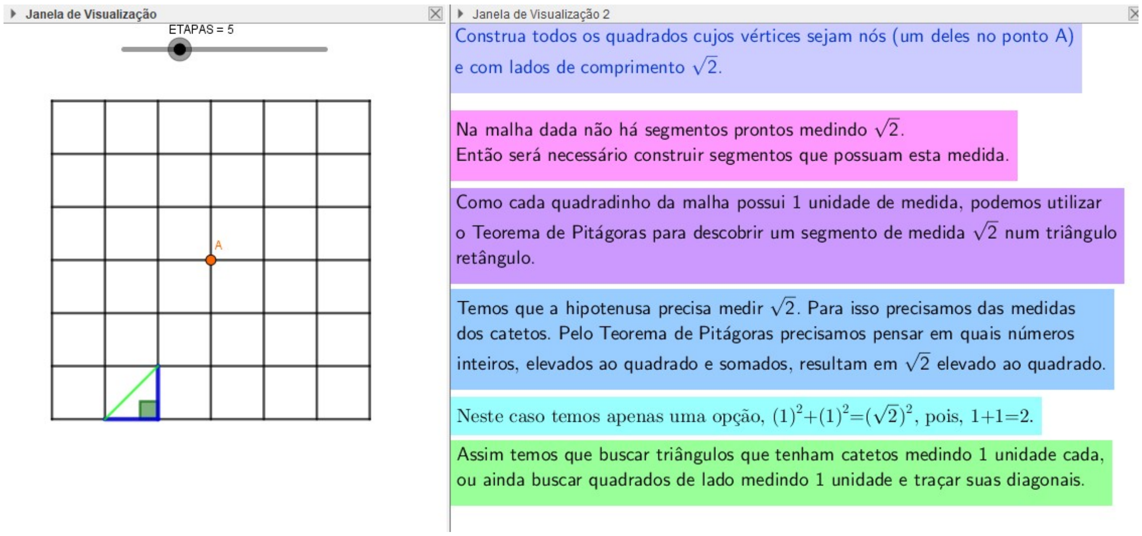
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3: Demonstração dinâmica 2



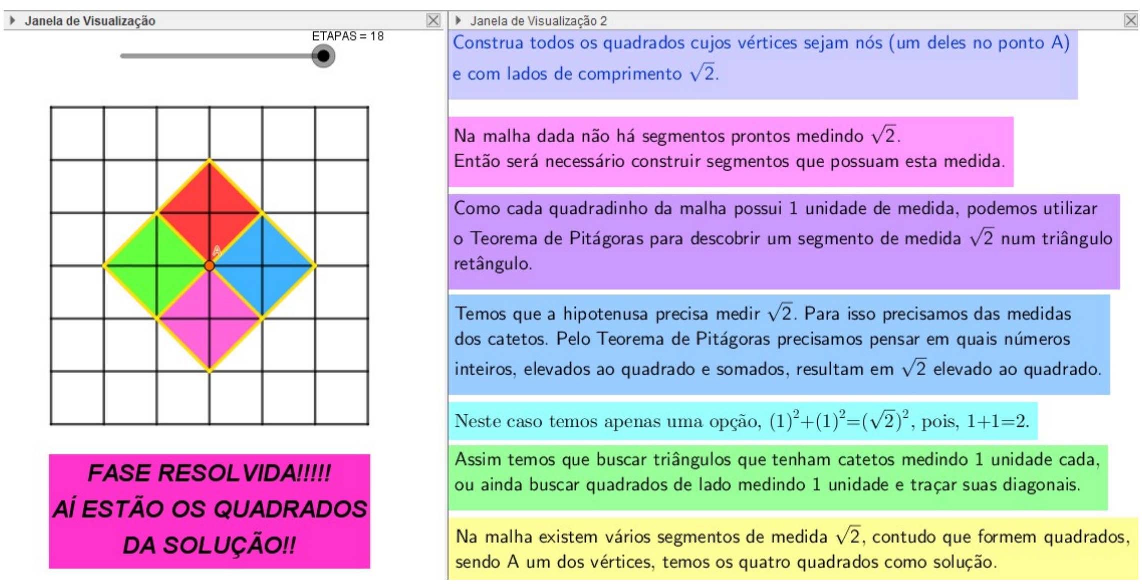
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 4: Demonstração dinâmica 3



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5: Demonstração dinâmica 4



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim nossa tentativa é de usar diferentes ferramentas, com abordagens específicas, de modo a corroborar com a compreensão dos estudantes com relação a conceitos da Geometria plana envolvendo o Teorema de Pitágoras.

Falando um pouco da autora, sou nascida e criada na cidade de Colorado -

Paraná, formada em Matemática, Licenciatura Plena, pela Faculdade Estadual de Educação, Ciências e Letras de Paranavaí (FAFIPA). Sempre busquei introduzir em minhas aulas, além dos conceitos formais, o contexto histórico, as curiosidades de alguns assuntos e sempre tento estimular a leitura dos meus alunos utilizando fatos do dia-a-dia para mostrar que a matemática não é uma ciência fora da realidade.

Em meu pouco tempo de docência sempre tento buscar mais e mais conhecimento, por esse fato busquei o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Como já trabalho na educação, vi que seria uma oportunidade ímpar para aprofundação do conhecimento matemático.

A motivação da escolha do tema foi tanto pessoal como profissional. Pessoal pois tenho uma grande afinidade pelo Teorema de Pitágoras, pois o mesmo permeia o final do ensino fundamental e todo o ensino médio. Profissional pois percebi que, compreendendo este teorema, o aluno conseguirá assimilar várias outros conteúdos matemáticos e de outras disciplinas.

Pensando na alternância que está havendo entre aulas remotas, híbridas e presenciais, tentamos montar algumas fichas de trabalho para auxiliar o professor a conciliar essas variações de ensino. Como nossos alunos estão cada vez mais imersos nas mídias, pensamos no aplicativo de celular Pythagorea para realmente trazer o lado lúdico da matemática para a vida escolar.

Dentre as disciplinas escolares, a matemática é ainda a mais conservadora. Então, trazendo mais ideias para os professores e mostrando detalhadamente como algumas mídias funcionam, fica mais tangível a possibilidade de variação nas aulas.

O aplicativo, o software e os materiais concretos que utilizamos neste trabalho, tem como objetivo a busca por exercitar a curiosidade intelectual do aluno, a investigação e análise crítica e a formulação de soluções.

Deste modo a presente dissertação foi organizada em quatro capítulos.

No primeiro capítulo trazemos algumas questões à cerca do uso das tecnologias, alguns desafios e possibilidades, no ensino como um todo.

No Capítulo 2 falaremos sobre as definições e os conceitos da Geometria Plana e como estes conceitos são abordados na Base Nacional Comum Curricular (BNCC - Brasil) [1].

O terceiro capítulo traz algumas, dentre as várias, demonstrações do Teorema de Pitágoras, bem como apresenta aplicações e a generalização deste teorema.

No quarto capítulo mostraremos inicialmente o funcionamento do aplicativo Pythagorea, suas configurações e botões disponíveis e, em seguida, apresentaremos algumas das ferramentas disponíveis nesse aplicativo que podem ser utilizadas para introduzir ou até mesmo relembrar conceitos da geometria plana.

E o último capítulo contém propostas de fichas didáticas para serem colocadas em prática em aulas presenciais ou remotas.

CAPÍTULO 1

O USO DAS TECNOLOGIAS, SEUS DESAFIOS E POSSIBILIDADES

No dicionário, um dos significados do termo *tecnologia* é: ciência ou tratado das artes e ofícios em geral; aplicação dos conhecimentos científicos à produção em geral. A incorporação das tecnologias no ensino se dá desde quando o giz, a lousa, o papel, foram criados. Desde quando um indivíduo reunia outros para explicar algo descoberto.

Em Costa [2] encontramos que

> "A interação estabelecida entre alunos e professores via meios de comunicação – utilizados não apenas na sala de aula, mas em qualquer ambiente relacional – sempre envolve tecnologia, uma vez que a voz e os gestos são também tecnologias. ... O desenvolvimento das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) cada vez mais encurta distâncias e possibilita o intercâmbio rápido de ideias, projetos e atividades conjuntas em tempo real. Mais recentemente com o acesso às tecnologias móveis digitais, conectadas à internet, se torna possível romper os limites de tempo e de espaço, aproximando as pessoas e viabilizando o compartilhamento de experiências e conhecimentos." [2]

Incorporar as tecnologias digitais na educação é um grande desafio para o aluno, contudo o desafio é maior ainda para o professor. Esse desafio, além de grande, é constante. Toda a reestruturação de conceitos, a aprendizagem para o ensino através de mídias, as mudanças nas práticas didáticas, fazem com que o profissional da educação sinta-se com receios em relação à essas tecnologias.

Segundo Costa [2], para que aconteça o processo de apropriação da tecnologia, o professor deve estar disposto a estudar sobre o assunto e vivenciar todas as fases, desde as iniciais, mais técnicas operacionais, até as intermediárias, envolvendo a aplicação. O conhecimento não é imediato e requer tempo e prática.

Frente a tudo que estamos vivenciando com a pandemia do COVID-19, notamos que a educação precisou mudar muito rápido. Com o distanciamento social tivemos que trocar a sala de aula física pela sala de aula virtual. Contudo a realidade é um pouco diferente da teoria.

Em Pantoja Corrêa [14] vemos que

> "No contexto brasileiro, acreditar que a simples implementação da transição do ensino presencial para o ensino remoto resolverá os problemas é uma grande ilusão, uma vez que mesmo nos deparando com um leque de possibilidades, estaremos diante de grandes desafios...." [14]

Alguns dentre vários desafios temos o acesso à internet por parte de todos os alunos, a disponibilidade de celulares ou computadores durante os horários de aulas, a desestabilização na vida do professor em relação a horários e particularidades, a não garantia de internet eficaz que comporte o trabalho do professor, a falta de experiência do professor em trabalhar com mídias.

Diante de todas as mudanças, o professor vem buscando se aperfeiçoar sempre que possível e ainda fazemos a seguinte afirmação, que o professor precisou se reinventar e reinventar a maneira de aplicar as práticas pedagógicas em tempo recorde e da melhor maneira que foi possível para o momento. O trabalho vem sendo aprimorado dia-a-dia, experiência por experiência, aprendizado por aprendizado.

Tendo em vista o enorme número de informações disponíveis, cabe ao professor criar encaminhamentos metodológicos que tornem o ensino e aprendizagem possíveis e que proporcionem a mediação entre tecnologias digitais e os conteúdos da disciplina.

O uso das tecnologias exige planejamento, tempo e recursos, sendo assim não é algo imediato. Infelizmente há muita propaganda que nunca se concretizará, ou se vir a acontecer, levará muito mais tempo do que o prometido.

CAPÍTULO 2

CONCEITOS ELEMENTARES DA GEOMETRIA PLANA E SUAS COMPETÊNCIAS E HABILIDADES NA BNCC

A Geometria Plana é uma Unidade Temática que faz parte dos ciclos do Ensino Básico Fundamental e Médio (contemplada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil) [1]). Considerada a ciência do espaço por trabalhar com medições e formas, ela proporciona ao indivíduo um olhar lógico-dedutivo, além de aperfeiçoar a noção de espaço, sentido de localização, reconhecimento de figuras do dia-a-dia, dentre outros.

Em Gerônimo [7], encontramos que

> "A geometria surgiu há aproximadamente 4.000 anos no Egito e na Babilônia, sem dúvida de uma maneira intuitiva, e portanto, não sistemática, com uma série de regras práticas sugeridas pela experiência, cujo objetivo principal era aplicações às medições.
>
> De fato, as relações dessa sociedade, baseadas na propriedade, impuseram a necessidade de medir.
>
> Já a geometria com um caráter dedutivo, apoiado em proposições gerais, podemos afirmar que teve seu início na antiga Grécia, com Tales de Mileto e Pitágoras. Mas foi Euclides, na sua famosa obra *Elementos*, o primeiro a apresentar um sistema axiomático para a geometria, ou seja, um sistema formado por noções primitivas, definições, axiomas e teoremas evidentemente aproveitando o conhecimento que já havia na época." [7] (página 11).

A obra de Euclides, *Elementos* representa a maior síntese dos conhecimentos de Geometria Plana de seu tempo (por isso a Geometria Plana também é denominada Geometria Euclidiana).

Na Geometria Plana utilizamos vários conceitos primitivos, definições e características específicas. Sendo assim, elencamos apenas os tópicos que serão usados no decorrer de nosso trabalho. Para nossas notações, definições e resultados utilizamos as bibliografias [7] e [11].

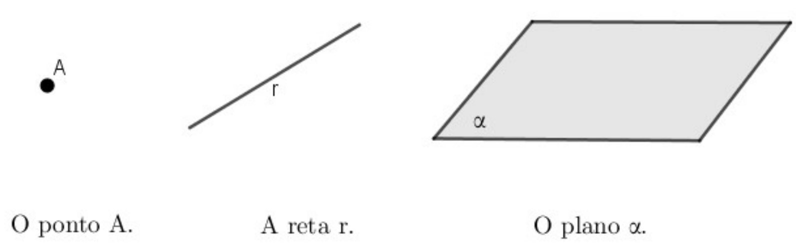
Caso o leitor já tenha familiaridade com estas nomenclaturas e definições, a leitura dessa seção pode ser omitida.

2.1 Conceitos elementares da Geometria Plana

Os conceitos geométricos são estabelecidos por meio de definições. Os *conceitos primitivos* da Geometria, são adotados sem definição.

Os conceitos de: PONTO, RETA e PLANO, adotaremos sem definir.

Figura 2.1: Ponto, reta e plano



Fonte: Elaborado pela autora.

Através da observação e análise, temos um conhecimento intuitivo sobre ponto, reta e plano, e ainda sobre o *espaço* (sendo o conjunto de todos os pontos).

As *proposições (propriedades)* geométricas são aceitas mediante *demonstrações*. No entanto, as *proposições primitivas* ou *postulados* são aceitas sem demonstração.

Para nosso estudo utilizaremos alguns *postulados* que relacionam ponto, reta e plano. Segundo Dolce [3], temos

- Postulado da existência

a) Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.

b) Num plano há infinitos pontos.

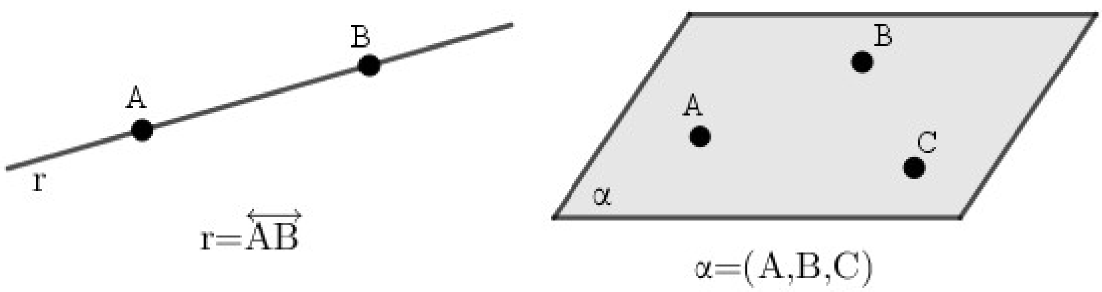
- Postulado da determinação

a) Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles.

b) Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

Figura 2.2: Postulado da determinação

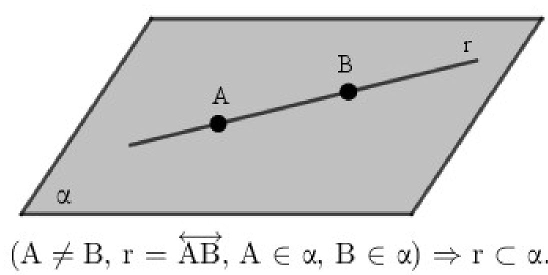
(a) Determinação de reta (b) Determinação de plano



Fonte: Elaborado pela autora.

- Postulado da inclusão: Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.

Figura 2.3: Inclusão de reta no plano



Fonte: Elaborado pela autora.

Quando falamos de polígonos, devemos ter claramente a definição de ângulos. Segundo Muniz Neto [11],

Definição 2.1 *Dadas, no plano, duas semirretas* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$, *um* ***ângulo*** *(ou* ***região angular****) de* ***vértice*** *O e lados* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$ *é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$.

Ver definição e demonstração em Muniz Neto [11], páginas 10 e 11.

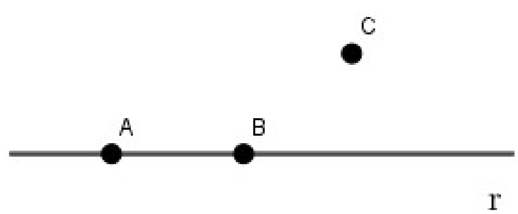
Com isso é possível definir polígonos.

Definição 2.2 *Sejam* $n \geq 3$ *um natural e* $A_1, A_2, ..., A_n$ *pontos distintos do plano. Dizemos que* $A_1A_2...A_n$ *é um* ***polígono (convexo)*** *se, para* $1 \leq i \leq n$, *a reta* $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ *não contém nenhum outro ponto* A_j, *mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui e no que segue,* $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1$ *e* $A_{n+2} = A_2$*).*

Ver Muniz Neto [11], páginas 17 e 18.

Como em nosso estudo utilizaremos vários conceitos sobre os triângulos, ainda em Muniz Neto, considerando três pontos A, B e C no plano, se C estiver sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, diremos que A, B e C são **colineares**, caso contrário, diremos que A, B e C são **não colineares** (Figura 2.4).

Figura 2.4: Três pontos não colineares



Fonte: Elaborado pela autora.

Três pontos não colineares formam um **triângulo** e este pode ser classificado quanto à medida dos seus lados ou quanto à medida dos seus ângulos internos.

Em relação à classificação quanto à medida dos seus lados temos:

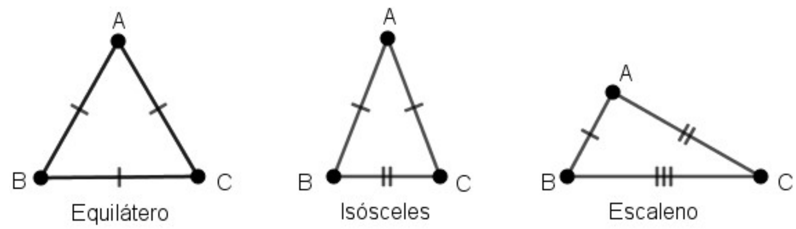
Definição 2.3 *Um triângulo* $\triangle ABC$ *é denominado:*

a) ***Equilátero****, se* $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$.

b) ***Isósceles****, se ao menos dois dentre* $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ *forem iguais.*

c) ***Escaleno***, *se* $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC} \neq \overline{AB}$.

Figura 2.5: Tipos de triângulos quanto aos lados



Fonte: Elaborado pela autora.

Em relação à classificação quanto à medida dos seus ângulos internos temos:

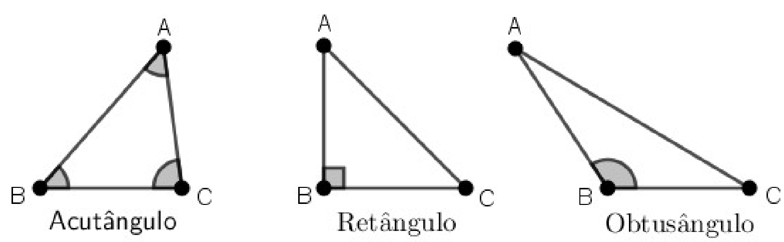
Definição 2.4 *Um triângulo* $\triangle ABC$ *é denominado:*

a) ***Acutângulo***, *se* $\hat{A}, \hat{B}$ *e* $\hat{C}$, *forem menores do que* $90°$.

b) ***Retângulo***, *se, dentre* $\hat{A}, \hat{B}$ *e* $\hat{C}$ *, houver um, e somente um, ângulo igual a* $90°$.

c) ***Obtusângulo***, *se, dentre* $\hat{A}, \hat{B}$ *e* $\hat{C}$ *, houver um, e somente um, ângulo maior do que* $90°$.

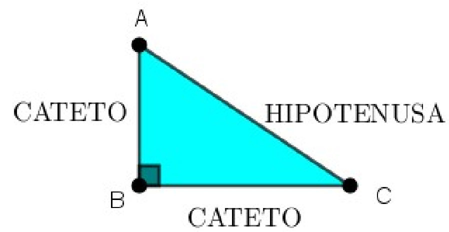
Figura 2.6: Tipos de triângulos quanto aos ângulos



Fonte: Elaborado pela autora.

No caso do triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa** e os outros dois lados chamados de **catetos**.

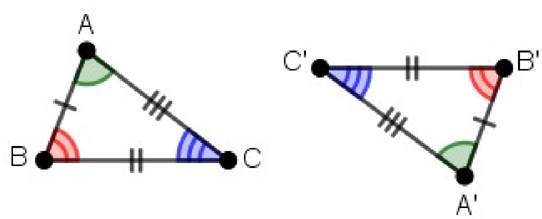
Figura 2.7: Triângulo retângulo



Fonte: Elaborado pela autora.

Definição 2.5 *Dois triângulos são chamados **congruentes** quando os lados e os ângulos correspondentes são congruentes.*

Figura 2.8: Triângulos congruentes



Fonte: Elaborado pela autora.

Se

$$\hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}'$$
$$\overline{AB} = \overline{A'B'}; \overline{AC} = \overline{A'C'}; \overline{BC} = \overline{B'C'}$$

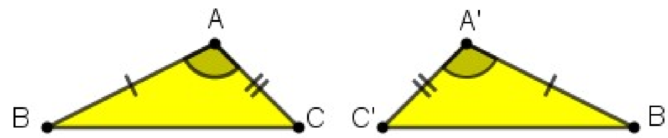
então os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes.

Ainda dizemos que dois triângulos são **congruentes** se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro.

Para verificar se dois triângulos são congruentes ou não, temos os chamados **casos de congruência de triângulos**.

- Caso LAL (Caso lado, ângulo e lado): Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

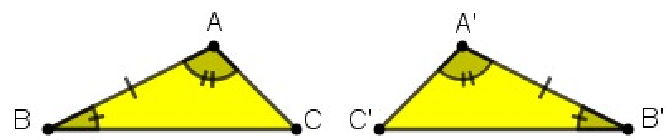
Figura 2.9: Congruência Caso LAL



Fonte: Elaborado pela autora.

- Caso ALA (Caso ângulo, lado e ângulo): Se dois ângulos de um triângulo e o lado entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.

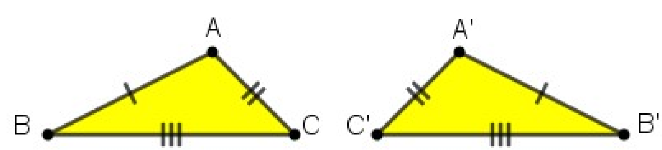
Figura 2.10: Congruência Caso ALA



Fonte: Elaborado pela autora.

- Caso LLL (Caso lado, lado e lado): Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

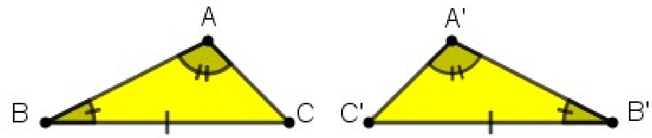
Figura 2.11: Congruência Caso LLL



Fonte: Elaborado pela autora.

- Caso LAA_o (Caso lado, ângulo e ângulo oposto): Se um lado, um ângulo adjacente a esse lado e o ângulo oposto a esse lado forem congruentes, respectivamente, a um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado de um outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

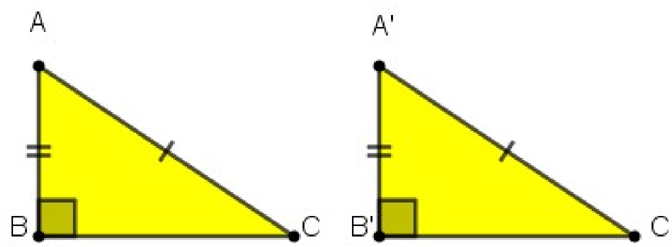
Figura 2.12: Congruência Caso LAA$_o$



Fonte: Elaborado pela autora.

- Caso LLA$_\square$ (Caso lado, lado e ângulo reto): Se dois triângulos retângulos possuem hipotenusas congruentes e um dos catetos congruentes, então os triângulos são congruentes.

Figura 2.13: Congruência Caso LLA$_\square$



Fonte: Elaborado pela autora.

Fixaremos agora as definições, notações e resultados de semelhança de triângulo, utilizaremos esses conceitos para mostrarmos uma aplicação muito interessante do Teorema de Pitágoras, em que provaremos que se construirmos polígonos regulares sobre os lados de um triângulo retângulo, então a soma das áreas dos polígonos regulares construídos sobre os catetos é igual a área do polígono regular construído sobre a hipotenusa.

Definição 2.6 *Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são ditos semelhantes se existir uma função bijetora $f : A, B, C \longrightarrow D, E, F$, que leva os vértices de um, nos vértices do outro, de tal modo que os ângulos correspondentes sejam congruentes e os lados correspondentes formem uma sequência proporcional, ou seja,*

$$m(\hat{A}) = m(f(\hat{A})), m(\hat{B}) = m(f(\hat{B})), m(\hat{C}) = m(f(\hat{C})),$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{f(A)f(B)}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{f(B)f(C)}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{f(A)f(C)}}.$$

Neste caso usaremos a notação $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, *para indicar a semelhança entre dois triângulos.*

Proposição 2.7 *A semelhança de triângulos é uma relação de equivalência. Isto é, se* T_1, T_2 *e* T_3 *são triângulos então vale as seguintes propriedades:*

1. *Refexiva: Todo triângulo é semelhante a ele mesmo;*
2. *Simétrica: Se* $T_1 \sim T_2$, *então* $T_2 \sim T_1$;
3. *Transitiva: Se* $T_1 \sim T_2$ *e* $T_2 \sim T_3$, *então* $T_1 \sim T_3$;

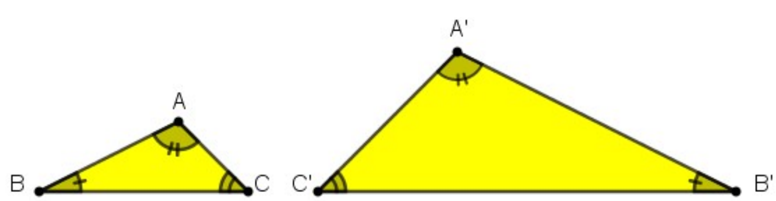
Da mesma forma que os casos de congruências de triângulo, nos auxiliam na verificação de quando dois triângulos são congruentes, temos casos para para semelhança de triângulos. Todos esses casos decorrem do Teorema de Tales.

Teorema 2.8 ***(de Tales):*** *Se três ou mais retas paralelas são cortadas por duas retas transversais, os segmentos determinados nas duas transversais são proporcionais.*

O primeiro caso de semelhança, é conhecido como (AAA) ângulo-ângulo-ângulo, ou seja, não há necessidade de recorrer a correspondências dos lados para verificar se dois triângulos são semelhantes, basta olharmos para os três ângulos correspondentes.

- **Caso AAA (ângulo-ângulo-ângulo).** Dada uma correspondência entre dois triângulos, se os ângulos correspondentes são congruentes, a correspondência é uma semelhança.

Figura 2.14: Semelhança Caso AAA

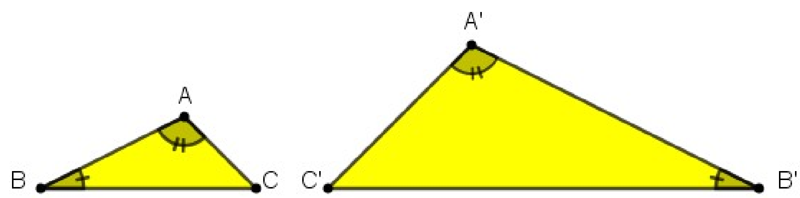


Fonte: Elaborado pela autora.

Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180, pode-se simplesmente verificar a congruência de dois ângulos correspondentes destes triângulos.

- **Caso AA (ângulo-ângulo).** Se existe uma correspondência entre dois triângulos tais que dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência é uma semelhança.

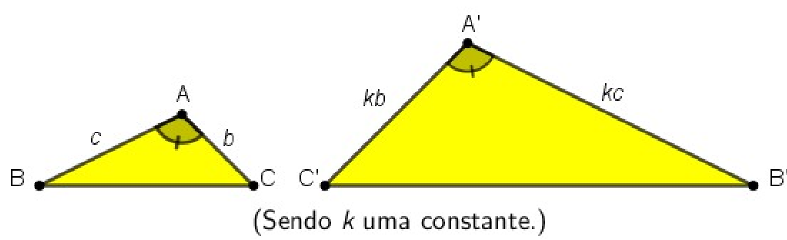
Figura 2.15: Semelhança Caso AA



Fonte: Elaborado pela autora.

- **Caso LAL (lado-ângulo-lado)** Dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de lados correspondentes são proporcionais e os ângulos que eles determinam congruentes, então a correspondência é uma semelhança.

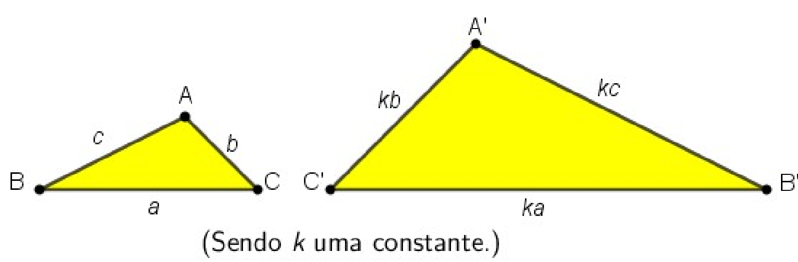
Figura 2.16: Semelhança Caso LAL



Fonte: Elaborado pela autora.

- **Caso LLL (lado-lado-lado)** Dada uma correspondência entre dois triângulos. Se os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência é uma semelhança.

Figura 2.17: Semelhança Caso LLL



Fonte: Elaborado pela autora.

A **área** é a medida de uma superfície. Quando falamos em áreas de polígonos, necessitamos de alguns *postulados*. Em Muniz Neto [11] (página 180):

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais. (Ainda que não foi definido formalmente a noção de congruência de polígonos, a ideia é a mesma que para triângulos dois triângulos: se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro.)

2. Se um polígono convexo é *particionado* em um número finito de outros polígonos convexos, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.

3. Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.

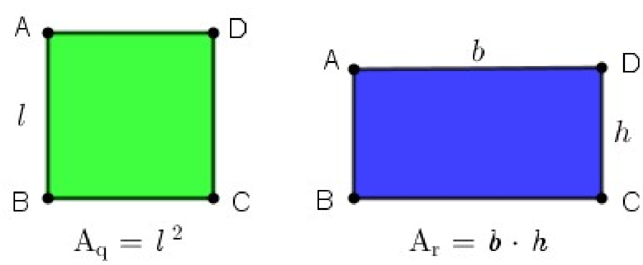
4. A área de um quadrado de lado $1cm$ é igual a $1cm^2$.

Proposição 2.9 *Todo polígono com n lados determina n triângulos isósceles e congruentes entre si, tais que dois quaisquer desses triângulos não possuem pontos interiores em comum e dois de seus vértices são os vértices do polígono e o outro vértice é o centro da circunferência circunscrita.*

Demonstração: Ver Gerônimo [7]. □

Sabe-se que a área de um quadrado é o quadrado da medida de um lado e ainda que a área de um retângulo é o produto do comprimento pela largura. No retângulo, costuma-se chamar um dos lados de **base (b)** e o outro de **altura (h)**.

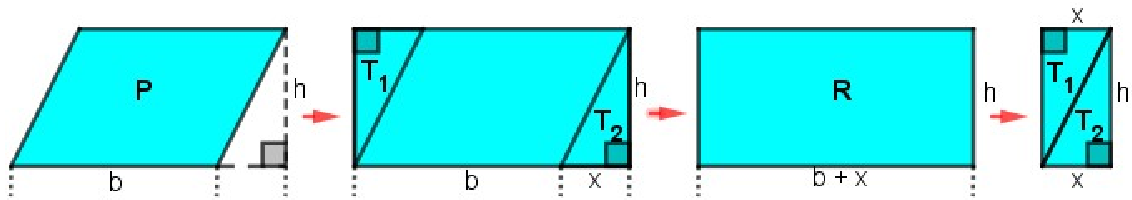
Figura 2.18: Áreas do quadrado e do retângulo



Fonte: Elaborado pela autora.

Considerando um paralelogramo de base **b** e altura **h**, podemos ”completá-lo” para obter um retângulo.

Figura 2.19: Área do paralelogramo



Fonte: Elaborado pela autora.

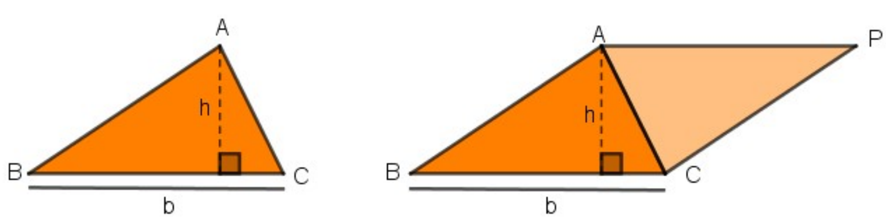
- A área de R é $(b+x).h$.
- Como os dois triângulos T_1 e T_2 formam um retângulo, a área dos dois juntos é $x \cdot h$.
- A área de P é igual à área de R menos as áreas de T_1 e T_2.
- Assim, temos:

$$A_p = (b+x)\cdot h - x\cdot h = b\cdot h + x\cdot h - x\cdot h = b\cdot h$$
$$A_p = b\cdot h$$

Agora considere um triângulo qualquer $\triangle ABC$, de base **b** e altura **h**.

Traçando por A a paralela a $\overline{BC}$, e por C, a paralela $\overline{AB}$, obteremos um paralelogramo.

Figura 2.20: Área do triângulo



Fonte: Elaborado pela autora.

Como esse paralelogramo é formado pelos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACP$, que são triângulos congruentes pelo Caso LLL, por exemplo, temos:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCP} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$
$$A_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Lema 2.10 *Se dois triângulos são semelhantes, então a razão entre as suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança, isto é, a razão entre os comprimentos de dois lados correspondentes quaisquer.*

Demonstração: Dados dois triângulos semelhantes $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ cuja razão de semelhança seja k. Então por definição de semelhança de triângulo temos

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k.$$

o mesmo ocorre para a razão das alturas correspondentes dos triângulos.

$$\frac{h}{h'} = k.$$

Portanto a razão entre as áreas dos triângulos será

$$\begin{aligned} \frac{A(ABC)}{A(A'B'C')} &= \frac{\frac{a \cdot h}{2}}{\frac{a' \cdot h'}{2}} = \frac{a \cdot h}{a \cdot h'} \\ &= \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k \\ &= k^2. \end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{A(ABC)}{A(A'B'C')} = k^2 = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 = \left(\frac{b}{b'}\right)^2 = \left(\frac{c}{c'}\right)^2 \tag{2.1}$$

□

2.2 Geometria Plana na BNCC

Durante nossa pesquisa utilizamos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [1] por ser um documento que procura agrupar todas as considerações a serem feitas no ensino básico.

Na BNCC (BRASIL) [1] consta que:

> "Na BNCC de Matemática do Ensino Fundamental, as habilidades estão organizadas segundo unidades de conhecimento da própria área (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística). (...) Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos."

Dentre as Competências específicas de Matemática dentro da BNCC para o Ensino Fundamental (anos finais) gostaríamos de citar duas competências:

> "Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados."

> "Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados)." (página 269)

Ainda no Ensino Fundamental (anos finais) temos algumas divisões que focam em contextos a serem trabalhados nesta pesquisa. De acordo com a BNCC (Brasil) [1], nas páginas de 312 até a 319 encontramos as divisões citadas abaixo.

8º ano		
Unidades Temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Geometria	Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
Grandezas e Medidas	Área de figuras planas	(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

9º ano		
Unidades Temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Números	Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta	(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).
Geometria	Semelhança de triângulos	(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
Geometria	Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
Geometria	Polígonos regulares	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

Ainda segundo a BNCC (BRASIL) [1] o ensino deve propiciar aos estudantes o desenvolvimento de habilidades e competências que os tornem capazes de analisar dados, interpretá-los, entende-los ao ponto de conseguir explicar para outras pessoas o contexto envolvido e ainda argumentar sobre o raciocínio desenvolvido.

Dentre as Competências específicas de Matemática e suas tecnologias dentro da BNCC para o Ensino Médio, gostaríamos de citar as competências 1, 3 e 5. E juntamente com estas competências temos algumas divisões que focam em contextos a serem trabalhados nesta pesquisa.

Na BNCC (Brasil) [1], nas páginas de 531 a 545 encontramos competências e as divisões citadas abaixo.

ENSINO MÉDIO		
Unidade Temática	Competência específica	Habilidades
Geometrias e medidas	1- Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
	3- Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
	5- Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

Com base nas competências e habilidades contidas na BNCC (BRASIL) [1], nosso trabalho trata de alguns dos conceitos relacionados à Geometria Plana na tentativa de diversificar a maneira com que estes conceitos cheguem ao aluno. Levando-se em conta que, cada dia mais, nossos estudantes estão mais e mais conectados à celulares e computadores.

O mundo cada vez mais digital, a pandemia, a busca por acesso rápido e prático à informação, são alguns dos acontecimentos que levaram à grande conectividade de todos. Pertinentemente, hoje, para que as aulas acontecessem, nos vimos obrigados a apreender mais a respeito dessas tecnologias e a cobrar dos nossos alunos, buscando sempre instruí-los a utilizarem de maneira consciente tudo o que é ofertado.

CAPÍTULO 3

TEOREMA DE PITÁGORAS

Discutir aspectos relacionados ao tema abordado neste trabalho, a partir da história de sua constituição, pode despertar no estudante maior interesse a respeito dos conceitos que serão trabalhados em sala de aula bem como, fazê-lo perceber que a matemática é uma ciência humana que se consolida a partir da busca de soluções para problemas que surgiram ao longo da história da humanidade.

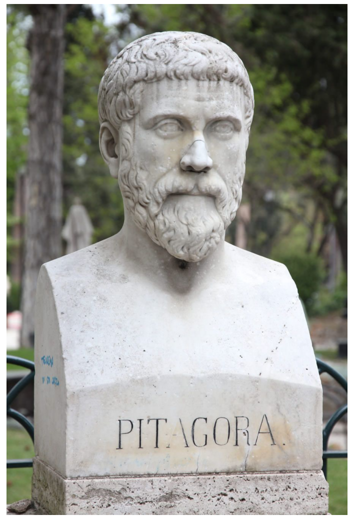
Dessa forma, com o intuito de mostrar algumas das curiosidades históricas a respeito dos conhecimentos aqui tratados, especificamente do Teorema de Pitágoras, optamos por apresentar algumas das demonstrações históricas desse teorema de forma dinâmica com vistas a colaborar com a compreensão das mesmas por parte do leitor.

3.1 Um pouco da vida de Pitágoras

Sobre a vida de Pitágoras encontramos em Eves [5] e Nascimento [12] encontramos algumas informações.

Pitágoras de Samos nasceu por volta de 569 a.C. em Samos (ilha grega no leste do mar Egeu), Ionia , e morreu por volta de 475 a.C. Samos era uma rica cidade-estado mercantil. Esse detalhe unido ao duro regime político sob o qual Samos vivia, pode ser um dos motivos que levou Pitágoras, a deixar a cidade.

Figura 3.1: Busto de Pitágoras



Fonte: https://www.greekboston.com/culture/ancient-history/pythagoras/

Quando tinha entre 18 e 20 anos, Pitágoras estudou filosofia na ilha de Lesbos e depois viajou a Mileto onde encontrou Tales (mais velho que Pitágoras por volta de cinquenta anos), que exerceu uma forte impressão no jovem Pitágoras, despertando nele o interesse por matemática e astronomia.

Seguindo os conselhos de Tales, viajou ao Egito para se aperfeiçoar e aprender mais sobre essas ciências. No Egito, visitou templos e participou de discussões com sacerdotes, iniciando-se nos rituais e crenças que posteriormente colocaria em prática na sociedade que fundaria na Itália.

Após difíceis provas, foi aceito como aluno em Tebas, na Grécia, e permaneceu aí por volta de vinte anos. Depois disso voltou para Samos, onde não obteve êxito em encontrar quem queria se dedicar ao ensino. O primeiro aluno e depois discípulo de Pitágoras, foi pago pelo mesmo para assistir às suas aulas. Contudo isso foi apenas no começo, pois notando que a cada dia o interesse do aluno pelo conhecimento aumentava, ele fingiu não ter mais condições de pagar ao menino e este, por sua vez, se ofereceu para pagar por sua educação.

Em suas idas e vindas de país em país em busca de conhecimento, Pitágoras fundou em Crotona a Escola Pitagórica, escola politicamente conservadora e de princípio de conduta muito rígido. Nenhum dos seus discípulos nunca violaram as regras até mesmo depois da morte de Pitágoras e do fim da escola. Uma das questões envolvidas era o fato da escola ser totalmente vegetariana, sendo assim aceita a doutrina da metempsicose, ou seja, transmigração das almas. A escola além de ter os estudos de Matemática, Astronomia e Música, também se dedicava à questões espirituais.

Pitágoras também foi o responsável pela formalização da escala musical que usamos hoje. Os músicos da época já haviam percebido condições especiais em algumas notas musicais, no entanto não conseguiam compreender o fenômeno. Ele notou que havia uma harmonia no som, quando os comprimentos das cordas estavam em algumas proporções. Uma corda produzia uma nota qualquer e oura corda com o dobro do tamanho produzia a mesma nota mas uma oitava abaixo. O que é usado até hoje em harpas e pianos.

Ao passar do tempo e com a solução de questões, a Escola Pitagórica ganhou bastante destaque. No entanto, atrelado à fama, temos a inveja que também era grande. Houveram ataques aos pitagóricos na tentativa de acabar com Pitágoras e com a escola.

Em 508 a.C. sua Escola Pitagórica foi violentamente atacada e Pitágoras teve que fugir para Metaponto. Quanto à sua morte, em Metaponto, alguns autores afirmam que suicidou-se após a queda de sua sociedade.

Pitágoras e seus discípulos deixaram grandes descobertas para a matemática e a filosofia, contudo, várias, envolvidas por muitas lendas, ficaram em segredo e se perderam em documentos. Comenta-se também que no ataque aos pitagóricos, a casa onde se reuniam foi incendiada com todos os registros. As descobertas feitas, os discípulos sempre conferiam ao mestre, então, não se sabe ao certo o que Pitágoras realmente fez ou o que outros seguidores fizeram.

Para os pitagóricos e seu mestre, a natureza era constituída de relações e proporções matemáticas. Eles diziam que "tudo é número". Fenômenos musicais, periodicidade dos movimentos celestes, fenômenos da vida, enfim elementos da realidade eram tidos como elementos numéricos. Os estudos feitos pela Escola Pitagórica rondaram a aritmética, a música, a astronomia e a geometria.

Existem documentos históricos que mostram que os egípcios e os babilônios, antes dos gregos, conheciam alguns casos particulares do Teorema de Pitágoras.

Alguns historiadores, até meados do século XX, afirmavam que, no Egito antigo, época da construção das pirâmides, era utilizada uma corda com nós pelos agrimensores para fazer ângulos retos.

Arqueólogos que estudaram a Babilônia encontraram vários documentos em placas de argila com datas de 1800 a 1600 a.C., que após decifrados se encontram em museus. A Plimpton 322 é uma dessas placas e se encontra na Universidade de Columbia.

Figura 3.2: Plimpton 322

Fonte: https://www.thetrumpet.com/16554-astronomy-mathematics-and-abraham

Após a tradução dessa placa, descobriram que havia inscrições sobre ternos pitagóricos, valores de lados de triângulos. Não se sabe ao certo quais os cálculos feitos para encontrar estes valores, uma vez que esta placa é possivelmente uma dentre várias de uma sequência.

No Museu Britânico se encontra guardada uma pista de que os babilônicos sabiam como encontrar esses números, uma placa que contém a seguinte inscrição:

4 é o comprimento

5 é a diagonal

Qual é a altura?

4 vezes 4 dá 16

5 vezes 5 dá 25

Tirando 16 de 25 o resto é 9

Quanto vezes quanto devo tomar para ter 9?

3 vezes 3 dá 9

3 é a altura

Pitágoras foi um filósofo grego que fez importantes descobertas na matemática, astronomia e na teoria musical. Considerado um dos mais importantes filósofos da época, o teorema hoje conhecido como Teorema de Pitágoras era conhecido pelos Babilônios 1000 anos antes de Pitágoras enunciá-lo, mas ele foi o primeiro a demonstrá-lo.

3.2 O Teorema de Pitágoras e suas demonstrações

Este teorema faz uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Triângulo este que possui um lado chamado hipotenusa, lado maior oposto ao ângulo reto, e os outros dois lados chamados de catetos.

Enunciando o Teorema de Pitágoras temos:

Teorema 3.1 *Num triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.*

O professor de matemática Elisha Scott Loomis [9], apaixonado pelo Teorema de Pitágoras, era do estado de Ohio nos Estados Unidos, e reuniu, durante 20 anos, 230 demonstrações do Teorema de Pitágoras e as publicou num livro chamado "The Pythagorean Proposition" (A Proposição de Pitágoras), publicado em 1927. A segunda edição desse livro, de 1940, ampliou para 370 demonstrações. O livro foi reimpresso, em 1968 e 1972, pelo "National Council of Teachers of Mathematics" daquele país, após o falecimento do autor. Portanto caso o leitor queira, pode buscar e trabalhar outras demonstrações do teorema.

O professor Loomis organizou as demonstrações do Teorema de Pitágoras em algébricas, com base nas relações métricas nos triângulos retângulos e em geométricas, com base em comparações de áreas. Ele ainda cita que não é possível demonstrar o Teorema de Pitágoras utilizando as justificativas da trigonometria pois a igualdade fundamental da Trigonometria já é um caso particular daquele teorema: $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$.

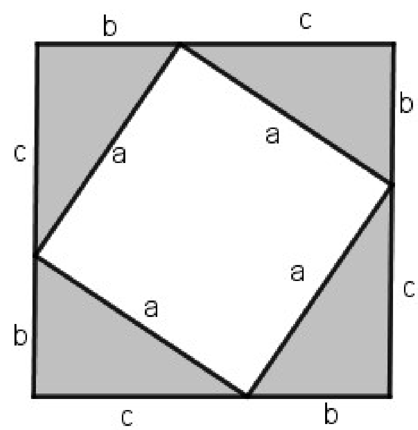
Dentre as várias demonstrações do Teorema de Pitágoras, destacamos algumas que você encontra em João Gerônimo [7], Dolce [3], Muniz Neto [11] e Nascimento [12]. Demonstrações onde constam conceitos de geometria como: áreas, semelhança de triângulos, dissecção, entre outros.

3.2.1 Demonstração atribuída aos Pitagóricos

Esta demonstração do teorema é atribuída aos Pitagóricos.

Na Figura 3.3, temos um quadrado de lado $b + c$. Destaquemos quatro triângulos retângulos de lados a, b e c, assim restando um quadrado de lado a. Note que os lados do quadrado de lado a são hipotenusas dos triângulos retângulos sombreados.

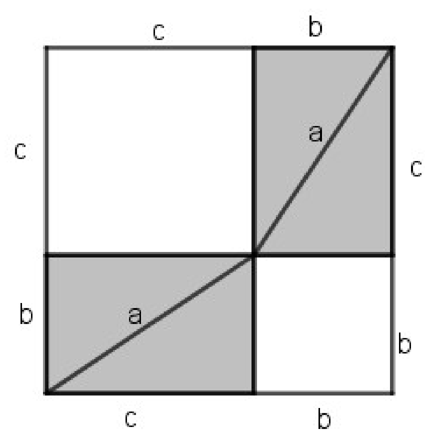
Figura 3.3: Quadrado b+c



Fonte: Elaborado pela autora.

Na Figura 3.4, temos também um quadrado de lado $b + c$. Destaquemos os mesmos quatro triângulos retângulos da Figura 3.3 mas de uma forma que restem apenas dois quadrados, um de lado b e outro de lado c.

Figura 3.4: Quadrado b+c diferente



Fonte: Elaborado pela autora.

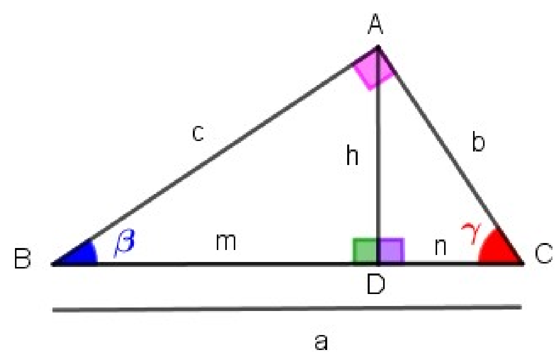
Observe que, se retirarmos os quatro triângulos da Figura 3.3 e também da Figura 3.4, as áreas restantes ainda serão iguais, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

3.2.2 Demonstração segundo as relações métricas

Considerando as relações métricas que existem no triângulo retângulo, pode-se demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Veja o triângulo retângulo $\triangle ABC$, retângulo em A, conforme a Figura 3.5.

Figura 3.5: Demonstração 1 Teorema de Pitágoras



Fonte: Elaborado pela autora.

Considere os seguintes elementos:
$\overline{BC} = a$: hipotenusa,
$\overline{AC} = b$: cateto,
$\overline{AB} = c$: cateto,
$\overline{BD} = m$: projeção do cateto c sobre a hipotenusa,
$\overline{CD} = n$: projeção do cateto b sobre a hipotenusa,
$\overline{AD} = h$: altura relativa à hipotenusa.

(Quando dizemos que a é a hipotenusa, deve-se entender que a é a *medida* da hipotenusa.)

Os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle DAC$ e $\triangle DAB$ são semelhantes, pois o ângulo $B\hat{A}D \equiv B\hat{C}A$ e o ângulo $C\hat{A}D \equiv C\hat{B}A$, isto é, a semelhança é verificada pelo caso ângulo-ângulo (AA). Assim com base nas semelhanças de triângulos as razões de semelhança são transformadas nas seguintes relações métricas:

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Leftrightarrow b^2 = a \cdot n. \tag{3.1}$$
$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Leftrightarrow c^2 = a \cdot m \tag{3.2}$$
$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Leftrightarrow h^2 = m \cdot n \tag{3.3}$$
$$\frac{b}{h} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow b \cdot c = a \cdot h \tag{3.4}$$
$$\frac{b}{c} = \frac{n}{h} \Leftrightarrow b \cdot h = c \cdot n \tag{3.5}$$
$$\frac{c}{b} = \frac{h}{m} \Leftrightarrow c \cdot h = b \cdot m \tag{3.6}$$

Somando (3.1) e (3.2) temos:

$$\begin{aligned}
& b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m \\
\Leftrightarrow \quad & b^2 + c^2 = a \cdot (n + m) \\
\Leftrightarrow \quad & b^2 + c^2 = a \cdot a \\
\Leftrightarrow \quad & b^2 + c^2 = a^2.
\end{aligned}$$

3.2.3 Demonstração segundo o cálculo de áreas

Com as informações sobre áreas é possível demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em A, com catetos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{CH} = m$, $\overline{BH} = n$ e $\overline{AH} = h$, provemos, mediante o cálculo de áreas, as relações métricas

(a) $a \cdot h = b \cdot c$.

(b) $c^2 = a \cdot n$ e $b^2 = a \cdot m$.

(c) $a^2 = b^2 + c^2$

a) Basta ver que ambos ah e bc medem o dobro da área de $\triangle ABC$. De fato,

$$A(ABC) = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{ah}{2}$$

e

$$A(ABC) = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{AB} = \frac{bc}{2}.$$

b) Construa, exteriormente a $\triangle ABC$, os quadrados $ABDE$, $BCFG$ e $ACJK$ (conforme figura 3.6) e seja I o ponto de interseção da semirreta $\overrightarrow{AH}$ com FG. A partir de um corolário que diz que, sendo $\triangle ABC$ e $\triangle A'BC$ triângulos tais que $\overleftrightarrow{AA'} \| \overleftrightarrow{BC}$, então $A(\triangle ABC) = A(\triangle A'BC)$, temos que, como $\overleftrightarrow{AI} \| \overleftrightarrow{BG}$, segue que

$$A(BGA) = A(BGH) = \frac{1}{2}\overline{BG} \cdot \overline{BH} = \frac{an}{2}.$$

Por outro lado, como $\overline{BD} = \overline{AB}$, $\overline{BC} = \overline{BG}$ e $D\hat{B}C = 90° + \hat{B} = A\hat{B}G$, os triângulos BCD e BGA são congruentes por LAL. Portanto

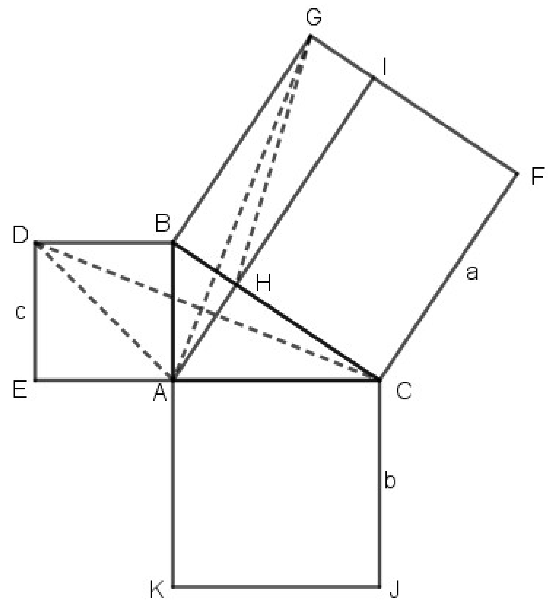
$$A(BCD) = A(BGA) = \frac{an}{2}. \tag{3.7}$$

Mas, uma vez que $\overleftrightarrow{AC} \| \overleftrightarrow{BD}$, aplicando novamente o corolário citado obtemos

$$A(BCD) = A(ABD) = \frac{c^2}{2} \tag{3.8}$$

Segue, pois, de (3.7) e (3.8) que $c^2 = an$. Provar que $b^2 = am$ é análogo.

Figura 3.6: Demonstração (área) Teorema de Pitágoras



Fonte: Elaborado pela autora.

c) O argumento da prova de (b) garante que

$$c^2 = A(ABDE) = 2A(ABD) = 2A(BGH) = A(BGIH);$$

por outro lado, raciocinando de maneira análoga, obtemos

$$\begin{aligned} b^2 &= A(ACJK) = 2A(ACJ) = 2A(BCJ) \\ &= 2A(FCA) = 2A(FCH) = A(FCHI), \end{aligned}$$

de sorte que

$$b^2 + c^2 = A(BGIH) + A(FCHI) = A(BCFG) = a^2.$$

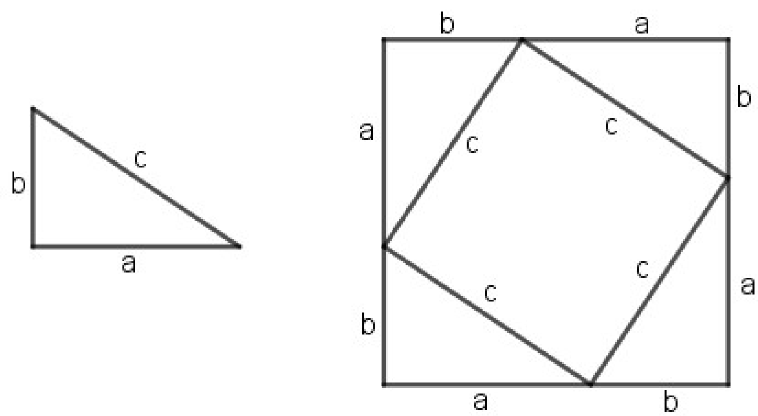
3.2.4 Outra demonstração segundo o cálculo de áreas

Ainda utilizando as informações sobre área é possível demonstrar o Teorema de Pitágoras de outra forma. Caso o leitor queira ver a demonstração desse teorema, de forma dinâmica, basta acessar o link abaixo:

`https://www.geogebra.org/m/qqrxvs49#material/rqt3zvhx`

Consideremos um triângulo retângulo de catetos medindo a e b, e hipotenusa medindo c (Figura 3.7). Tomemos um quadrado de lado $a + b$ (Figura 3.7). Em seu interior traçamos quatro triângulos retângulos com catetos a e b sobre os lados do quadrado. Pelo Teorema de Congruência (Caso LAL), cada um desses quatro triângulos é congruente ao triângulo dado, ou seja, todos têm hipotenusa com medida igual a c.

Figura 3.7: Quadrado $a+b$



Fonte: Elaborado pela autora.

O quadrilátero formado pelas quatro hipotenusas é um quadrado, visto que os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.

Tomando um dos axiomas de medidas que diz: se uma região plana é a união de duas ou mais regiões planas tais que duas a duas não têm pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas dessas regiões, a área do quadrado maior é igual à área do quadrado menor mais a soma das áreas dos quatro triângulos congruentes. Isto nos dá

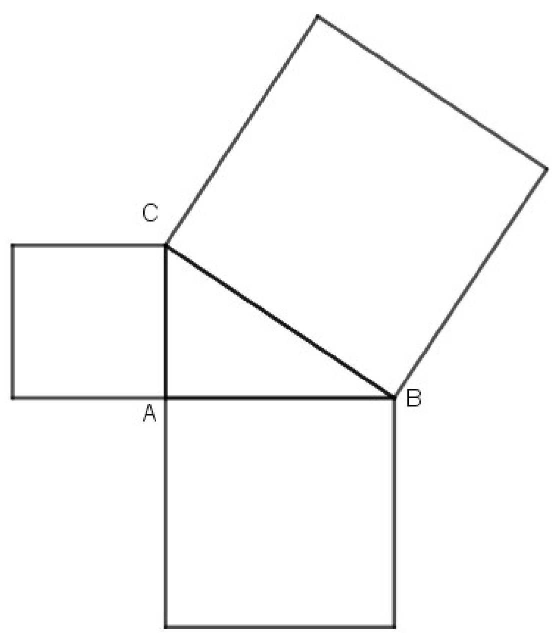
$$
\begin{aligned}
& (a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot a \cdot b \\
\Leftrightarrow \quad & a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = c^2 + 2 \cdot a \cdot b \\
\Leftrightarrow \quad & a^2 + b^2 = c^2
\end{aligned}
$$

3.2.5 Demonstração por dissecção

Considere um triângulo retângulo $\triangle ABC$ retângulo em A e faça algumas construções.

(a) Construa quadrados sobre os lados deste triângulo.

Figura 3.8: Demonstração por dissecção - parte 1



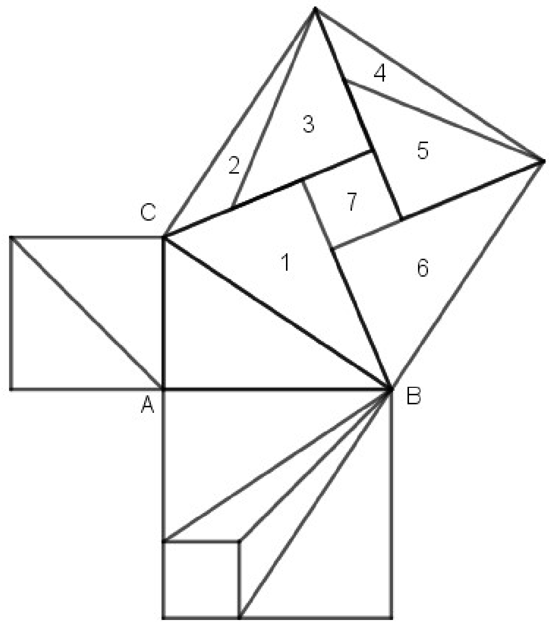
Fonte: Elaborado pela autora.

(b) Considere agora o quadrado maior, de lado BC, reflita o triângulo $\triangle ABC$ em torno do lado BC, de modo que o triângulo refletido fique dentro do quadrado maior.

(c) Construa mais três triângulos retângulos congruentes ao inicial sobre os lados do quadrado maior, como sugere a Figura 3.9.

(d) Divida dois destes triângulos em outros dois triângulos, de modo que um destes triângulos seja retângulo isósceles.

Figura 3.9: Demonstração por dissecção - parte 2



Fonte: Elaborado pela autora.

Observe que os triângulos isósceles 3 e 5 tem catetos de medida AC por construção logo, encaixam-se no quadrado de lado AC. Os triângulos 1 e 6 possuem um dos catetos com medida AB e outro com medida AC e sua hipotenusa mede BC, pois são congruentes ao triângulo $\triangle ABC$. Os triângulos 2 e 4 são congruentes, seus lados maiores medem BC e os lados menores medem $AB - AC$. A peça 7 é um quadrado, pois todos os seus ângulos são retos e seus lados medem $AB - AC$. Considerando as afirmações acima concluímos que as peças 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 encaixam-se no quadrado de lado BC, como mostra a Figura 3.9.

Assim, está provado que a área do quadrado maior pode ser decomposta na área dos dois quadrados menores.

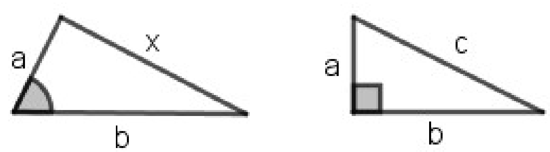
3.2.6 Recíproca do Teorema de Pitágoras

A recíproca do Teorema de Pitágoras também é verdadeira e é apresentada a seguir.

Teorema 3.2 *Se o quadrado da medida de um lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo, com o ângulo reto oposto ao maior lado.*

Demonstração: Consideremos um triângulo qualquer de lados a, b e x tal que $x^2 = a^2 + b^2$. Tomemos um triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c.

Figura 3.10: Recíproca Teorema de Pitágoras



Fonte: Elaborado pela autora.

Pelo Teorema de Pitágoras temos que $c^2 = a^2 + b^2$ e, portanto, $c = x$. Logo os triângulos são congruentes pelo **Caso LLL** e assim o primeiro triângulo é retângulo.

$\square$

3.3 Aplicação e Generalização do Teorema de Pitágoras

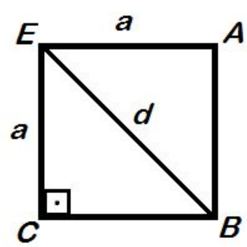
Nesta seção vamos mostrar que dado qualquer triângulo retângulo com hipotenusa a e catetos b e c, a relação algébrica $a^2 = b^2 + c^2$ que como mencionamos anteriormente pode ser vista como uma relação geométrica de áreas de quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, na verdade pode ser estendida para qualquer polígono regular construído sobre os lados do triângulo. Na verdade, o artigo de Silva [15] mostra ainda generalizações destas relações para figuras planas, tal generalização é conhecida como "A generalização de Polya do Teorema de Pitágoras".

Antes de provarmos para o caso geral de polígonos regulares, vamos fixar as ideias demonstrando para o caso particular de triângulos equiláteros. Para tanto vamos primeiramente fazer duas aplicações simples porém muito úteis do Teorema de Pitágoras:

a) **Diagonal do quadrado**

Considere um quadrado com lado de medida a e diagonal de medida d.

Figura 3.11: Diagonal do quadrado



Fonte: Elaborado pela autora.

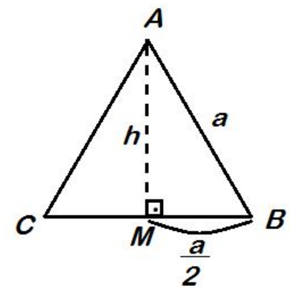
Para calcular o valor da medida da diagonal d, aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $\triangle BCE$:

$$\begin{aligned} & d^2 = a^2 + a^2 \\ \Leftrightarrow \quad & d^2 = 2a^2 \\ \Leftrightarrow \quad & d = a\sqrt{2} \end{aligned}$$

b) **Altura do triângulo equilátero**

Considere um triângulo equilátero $\triangle ABC$ de lado de medida a e altura de medida h.

Figura 3.12: Altura triângulo equilátero



Fonte: Elaborado pela autora.

Sendo M o ponto médio do lado $\overline{BC}$, para calcularmos a medida h usaremos o Teorema de Pitágoras:

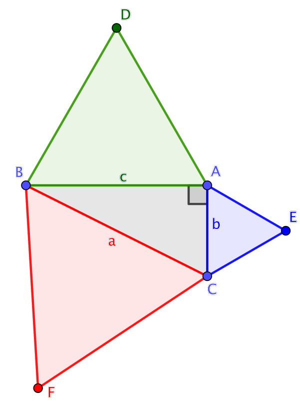
$$
\begin{aligned}
& a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \\
\Leftrightarrow \quad & h^2 = \frac{3a^2}{4} \\
\Leftrightarrow \quad & h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

Agora que temos as ferramentas estabelecidas, vamos estudar a relação pitagórica para área de polígonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo.

Teorema 3.3 ***(Relação Pitagórica visto como área de triângulos equiláteros).*** *A área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos desse triângulo.*

Demonstração: Considere um triângulo retângulo $\triangle ABC$, com hipotenusa a e catetos b e c. Construa sobre os lados desse triângulo, triângulos equiláteros.

Figura 3.13: Relação pitagórica para triângulos equiláteros.



Fonte: Elaborado pela autora.

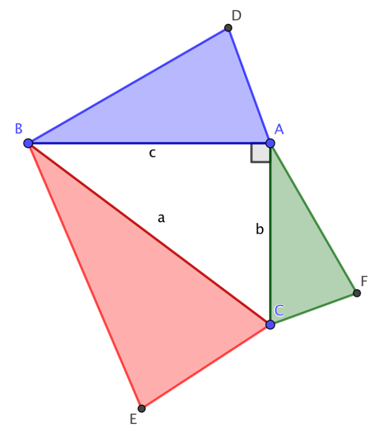
Assim as respectivas áreas desses triângulos serão $S_a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $S_b = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$ e $S_c = \dfrac{c^2\sqrt{3}}{4}$. Logo pelo Teorema de Pitágoras temos

$$\begin{aligned} S_b + S_c &= \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{c^2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{(b^2+c^2)\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ &= S_a. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.4 ***(Relação Pitagórica visto como área de triângulos semelhantes).*** *Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo. Se construirmos triângulos semelhantes sobre os lados desse de $\triangle ABC$, então a área do triângulo construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos.*

Figura 3.14: Relação pitagórica para triângulos semelhantes.



Fonte: Elaborado pela autora.

Demonstração: Denote por T_a, T_b e T_c, as áreas dos triângulos construídos respectivamente sobre a hipotenusa a, cateto b e cateto c, de modo que os três triângulos sejam semelhantes dois a dois, com razão de semelhança k_{ab}, k_{ac} e k_{bc}. Assim tem-se

$$\frac{a}{b} = k_{ab}.$$

$$\frac{a}{c} = k_{ac}.$$

$$\frac{b}{c} = k_{bc}.$$

Pelo Lema 1, temos que

$$\frac{T_b}{T_a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = k_{ab}^2.$$

$$\frac{T_c}{T_a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = k_{ac}^2.$$

ou ainda

$$T_b = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot T_a$$

$$T_c = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot T_a$$

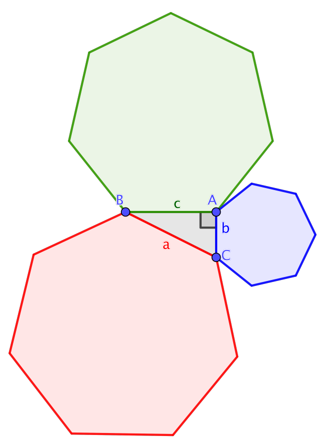
Logo, pelo Teorema de Pitágoras temos

$$
\begin{aligned}
T_b + T_c &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot T_a + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot T_a \\
&= \frac{b^2 + c^2}{a^2} \cdot T_a \\
&= \frac{a^2}{a^2} \cdot T_a \\
&= T_a.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 3.5 ***(Relação Pitagórica visto como área de polígonos regulares).*** *A área do polígono regular de n lados construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos polígonos regulares também de n lados construídos sobre seus catetos.*

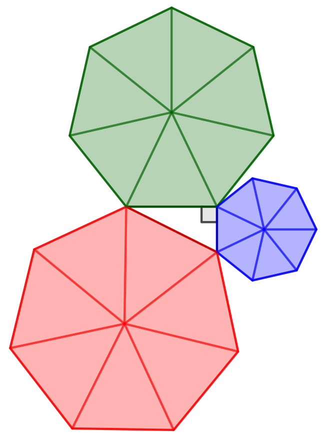
Figura 3.15: Relação pitagórica para polígonos regulares.



Fonte: Elaborado pela autora.

Demonstração: Considere um triângulo retângulo $\triangle ABC$, com hipotenusa a e catetos b e c. Construa sobre os lados desse triângulo, polígonos regulares. Assim pela proposição anterior, podemos dividir cada um desses polígonos em n triângulos isósceles.

Figura 3.16: Triangularização de polígonos regulares.



Fonte: Elaborado pela autora.

Agora note que os triângulos de cada um dos três polígonos regular são semelhantes, pois o ângulo central tem a mesma medida para todos triângulos de cada um dos polígonos e como os triângulos são isósceles, os ângulos da base são iguais.

Denotando P_a, P_b e P_c as áreas dos polígonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo e T_a, T_b e T_c as áreas dos triângulos dos construídos respectivamente sobre a hipotenusa e os catetos b e c. Teremos pelo teorema acima

$$\begin{aligned} S_b + S_c &= nT_b + nT_c \\ &= n(T_b + T_c) \\ &= nT_a \\ &= S_a. \end{aligned}$$

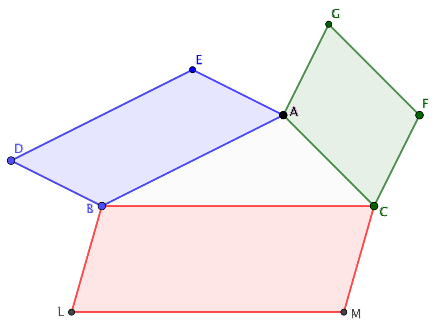
□

O próximo resultado foi demonstrado por Pappus de Alexandria e é uma generalização do Teorema de Pitágoras, está generalização não é tão extensa como a de Polya, porém é bem simples, engenhosa e elegante, além disso, não demanda de novas definições e resultado para verificar sua demonstração. Por essa razão escolhemos esta generalização ao invés da de Polya, pois está pode ser utilizada em sala de aula para alunos do ensino básico.

Teorema 3.6 ***(Teorema de Pappus de Alexandria).*** *Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer e sobre dois de seus lados construa dois paralelogramos quaisquer $ABDE$*

e $ACFG$. Então existe um paralelogramo $BCLM$ sobre o outro lado do triângulo de modo que a área desse paralelogramo é igual a soma das áreas dos paralelogramos outros dois paralelogramos.

Figura 3.17: Teorema de Pappus de Alexandria.

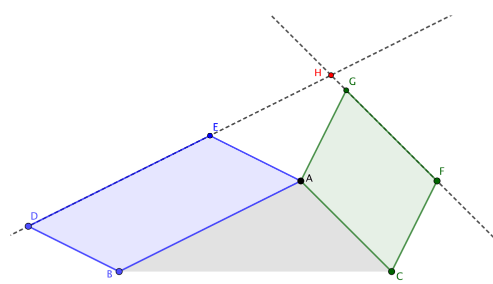


Fonte: Elaborado pela autora.

Demonstração: Para realizar essa demonstração, vamos primeiramente construir um determinado paralelogramo sobre a hipotenusa do triângulo retângulo e em seguida mostrar que a área dele é a soma das áreas dos outros dois paralelogramos.

Seja H a interseção das retas determinadas pelos pontos $\{D, E\}$ e $\{F, G\}$.

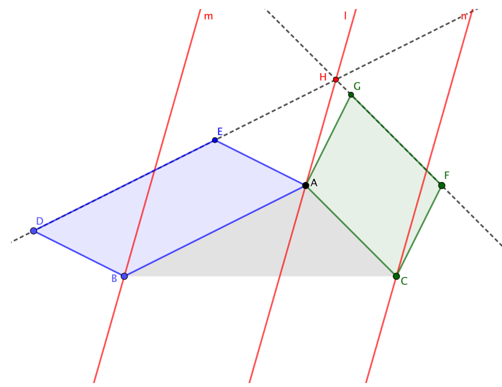
Figura 3.18: Teorema de Pappus de Alexandria.



Fonte: Elaborado pela autora.

Agora construa a reta AH e em seguida, trace reta paralelas a reta determinada por AH, passando pelos ponto B e C.

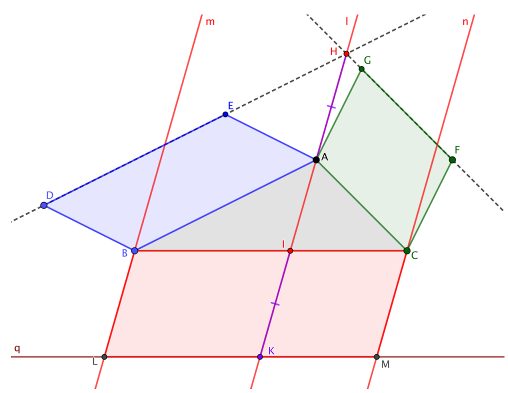
Figura 3.19: Teorema de Pappus de Alexandria.



Fonte: Elaborado pela autora.

Denote por I a interseção da reta AH com o lado BC do triângulo e seja K o ponto sobre essa reta, oposto a A com relação a I e de modo que $\overline{IK} = \overline{AH}$. Por fim, trace uma reta paralela ao lado BC passando pelo ponto k, obtendo assim o paralelogramo $BCML$.

Figura 3.20: Teorema de Pappus de Alexandria.

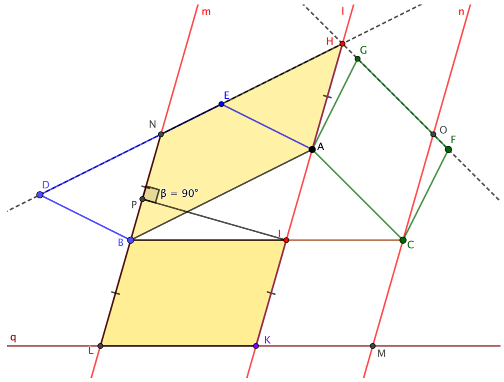


Fonte: Elaborado pela autora.

Vamos caminhar na direção de mostrar que a área do paralelogramo $BCML$ é igual a soma das áreas dos paralelogramos $ABCE$ e $ACFG$. Para isso, primeiramente observe que, os paralelogramos $ABNH$ e $IKLB$ tem a mesma altura, posto que dois de seus lados estão sob a mesma reta, e além disso, o lado $\overline{AH} = \overline{IK}$, logo

$$A(BIKL) = A(ABNH) \tag{3.9}$$

Figura 3.21: Teorema de Pappus de Alexandria.

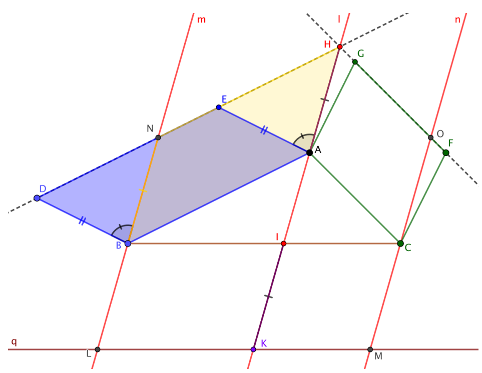


Fonte: Elaborado pela autora.

Agora note que pelo fato de $ABDE$ e $ABNH$ serem paralelogramos temos $\overline{BN} \equiv \overline{AH}$, $\overline{BD} \equiv \overline{AE}$ e $D\hat{B}N = E\hat{A}H$. Portanto pelo caso LAL os triângulos $\triangle BDN \equiv \triangle BEH$. Desses, fatos podemos concluir que a área dos paralelogramos

$$A(ABDE) = A(ABNH) \tag{3.10}$$

Figura 3.22: Teorema de Pappus de Alexandria.

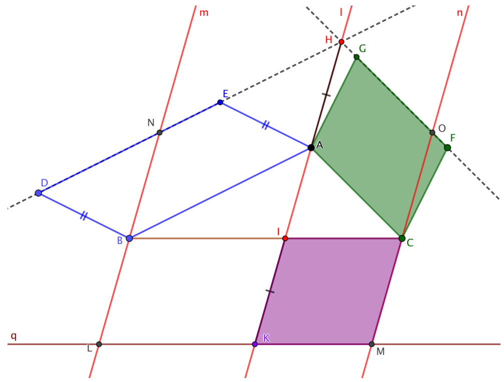


Fonte: Elaborado pela autora.

Portanto de (3.9) e (3.10) concluímos que os paralelogramos $ABDE$ e $IKLB$ tem mesma área.

De modo análogo mostra-se que os paralelogramos $ACFG$ e $IKMC$ tem áreas iguais,

Figura 3.23: Teorema de Pappus de Alexandria.



Fonte: Elaborado pela autora.

logo

$$\begin{aligned} A(BCML) &= A(IKLB) + A(IKMC) \\ &= A(ABDE) + A(ACFG). \end{aligned}$$

□

Assim como consequência do Teorema de Pappus, teremos o Teorema de Pitágoras.

Corolário 3.7 *(Teorema de Pitágoras) Se o triângulo for retângulo e os paralelogramos construídos sobre os lados do triângulo forem quadrados, teremos que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo.*

CAPÍTULO 4

GEOMETRIA E O APLICATIVO PYTHAGOREA

Quando trata-se de geometria plana, a visualização clara é essencial para o entendimento de todo contexto teórico. A geometria plana associada ao aplicativo Pythagorea trás para o aluno a forma lúdica e interativa de compreender melhor todo o conteúdo envolvido.

Neste capítulo apresentaremos inicialmente o aplicativo, suas configurações e botões disponíveis e em seguida vamos comentar através de algumas fases como o Pythagorea pode ser uma ferramenta para introduzir o estudo de conteúdos de geometria plana.

4.1 Sobre o Aplicativo Pythagorea

O aplicativo Pythagorea v2.18 com classificação livre, foi lançado em 30 de junho de 2016 e é disponibilizado gratuitamente na loja de aplicativos de cada celular.

Figura 4.1: Logo do Aplicativo Pythagorea

Fonte: https://www.techwikies.com/apps-for-pc/pythagorea-for-pc-windows-mac/

Segue o link para baixar o Aplicativo Pythagorea pelo Sistema Operacional ANDROID:

`https://play.google.com/store/apps/details?id=com.hil_hk.pythagorea`

Segue o link para baixar o Aplicativo Pythagorea pelo Sistema Operacional IOS:

`https://apps.apple.com/br/app/pythagorea/id994864779`

Sabemos que a melhor forma de aprender um aplicativo é usando, todavia, por questões meramente burocráticas, vamos mostrar o passo a passo do funcionamento deste aplicativo.

Figura 4.2: Pythagorea 01

Fonte: A autora.

A Figura 4.2 apresenta a tela inicial do aplicativo depois de baixado no celular.

Dentre os três botões localizados na parte inferior da tela: o botão da esquerda mostra as estatísticas do aplicativo, os níveis resolvidos, os pacotes concluídos e o tempo de permanência no aplicativo; o botão do meio, botão Play, dá início à jornada pelo programa, onde abre todas as possibilidades das fases; e o botão da direita apresenta as configurações, a escolha do idioma, opção para reiniciar o progresso, comentários, opção para avaliar o aplicativo, informações sobre os criadores e ainda uma opção caso queira fazer um agradecimento em dinheiro aos desenvolvedores do programa.

Quando clicamos no Play (botão do meio), aparecem todas as seções a serem desenvolvidas. A Figura 4.3 mostra todas as seções disponíveis.

Figura 4.3: Pythagorea

(a) Pythagorea 02 (b) Pythagorea 03 (c) Pythagorea 04

Fonte: A autora.

Escolhe-se uma das opções para dar início às fases do aplicativo. Escolhida, por exemplo, a opção 16 - Bissetrizes, nota-se, na Figura 4.3, que ao redor do título Bissetrizes há um contorno branco, o que indica que ainda não havia sido escolhida essa opção nenhuma vez.

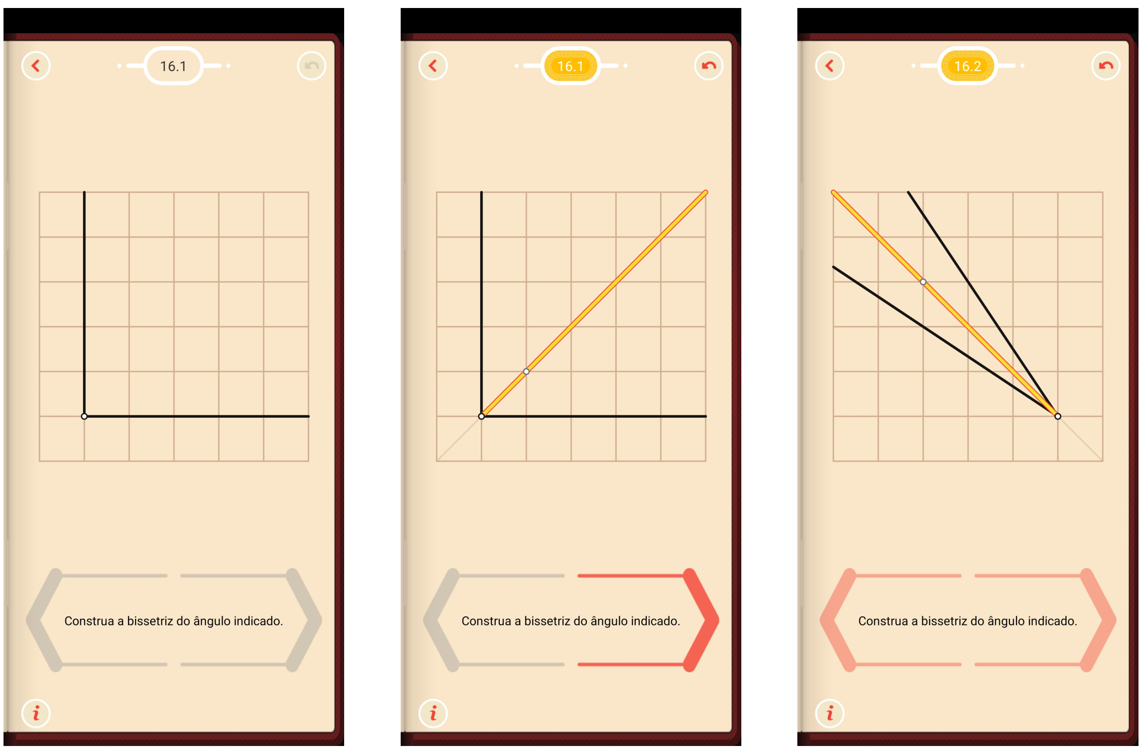
Quando escolhida a opção, clica-se sobre o nome e aparecerá a primeira fase daquele contexto, como na Figura 4.4 (a).

Quando a fase é resolvida de maneira correta e completa, o aplicativo muda a cor do objeto construído na malha quadriculada, altera também a cor da numeração da fase em que o programa está e disponibiliza a nova fase a ser resolvida, como na Figura 4.4 (b). Depois que a fase é resolvida, sempre que o praticante retornar para essa fase, basta o praticante manter pressionado por alguns segundos o número da fase que o aplicativo mostra a resolução feita pelo praticante.

Conforme as fase de cada seção são resolvidas, o aplicativo mostra qual próxima fase disponível para o praticante e dá a possibilidade de retornar para a fase anterior, como consta na Figura 4.4 (c).

Figura 4.4: Pythagorea

(a) Pythagorea 05 (b) Pythagorea 06 (c) Pythagorea 07



Fonte: A autora.

Quando retornar para a lista de seções, o praticante poderá ver seu progresso em cada seção trabalhada. A seção 16 - Bissetrizes, antes com o contorno em branco, depois de resolvidas algumas fases, mostra a evolução com outra cor em destaque - Figura 4.5.

Figura 4.5: Pythagorea 10

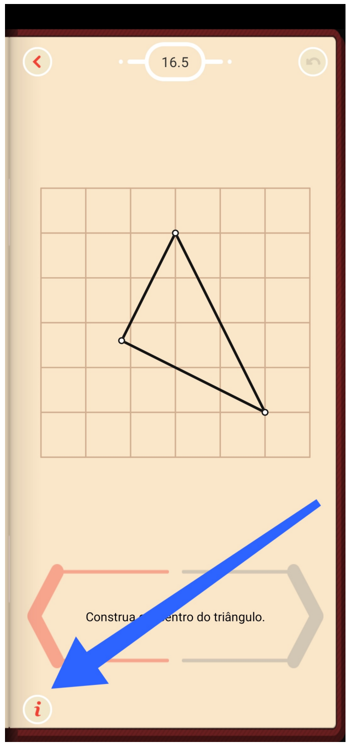
Fonte: A autora.

Dentro de cada fase aparecem algumas opções de botões. O botão indicado na Figura 4.6(a) é o botão que contém algumas Informações sobre a fase em que o praticante está.

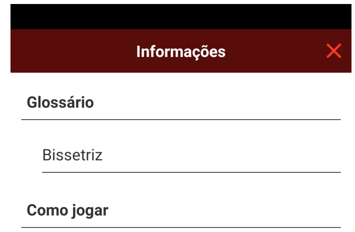
Clicando nesse botão, é possível saber pelo Glossário, qual conteúdo está sendo trabalhado na fase em questão e ainda um tutorial de Como jogar (tutorial este que é mostrado quando a pessoa vai utilizar pela primeira vez o aplicativo), Figura 4.6 (b).

Figura 4.6: Pythagorea

(a) Pythagorea 11



(b) Pythagorea 12



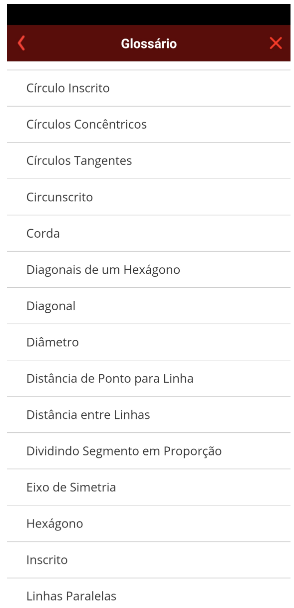
Fonte: A autora.

Dentro do Glossário há vários conteúdos estruturantes que são trabalhados no decorrer das fases. Os conteúdos trabalhados ficam descritos em cada fase. Nas Figuras 4.6 e 4.7 estão todos os títulos que são trabalhados no aplicativo todo e que aparecem se a pessoa clicar sobre o nome Glossário (Figura 4.6 (b)).

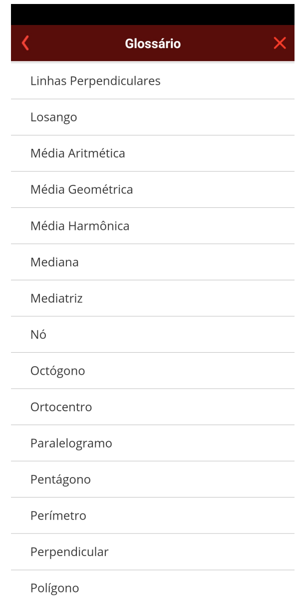
Figura 4.7: Pythagorea

(a) Pythagorea 13

(b) Pythagorea 14

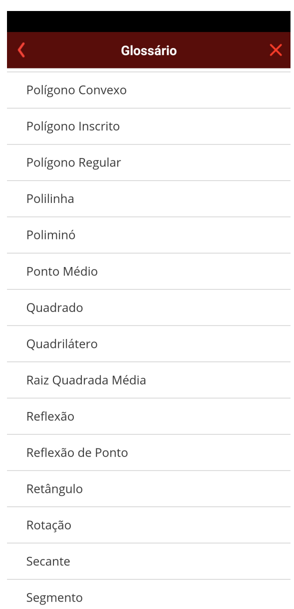


(c) Pythagorea 15



Fonte: A autora.

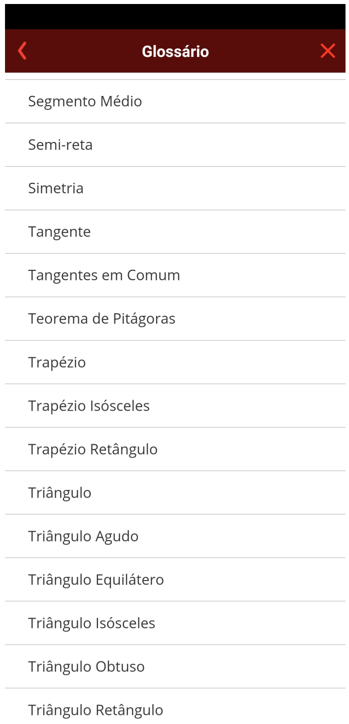
Figura 4.8: Pythagorea 16



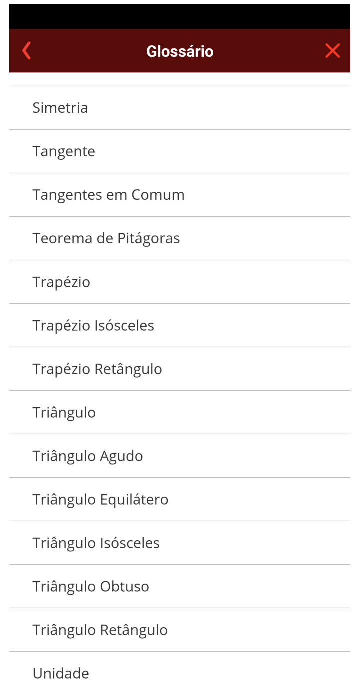
Fonte: A autora.

Figura 4.9: Pythagorea

(a) Pythagorea 17



(b) Pythagorea 18



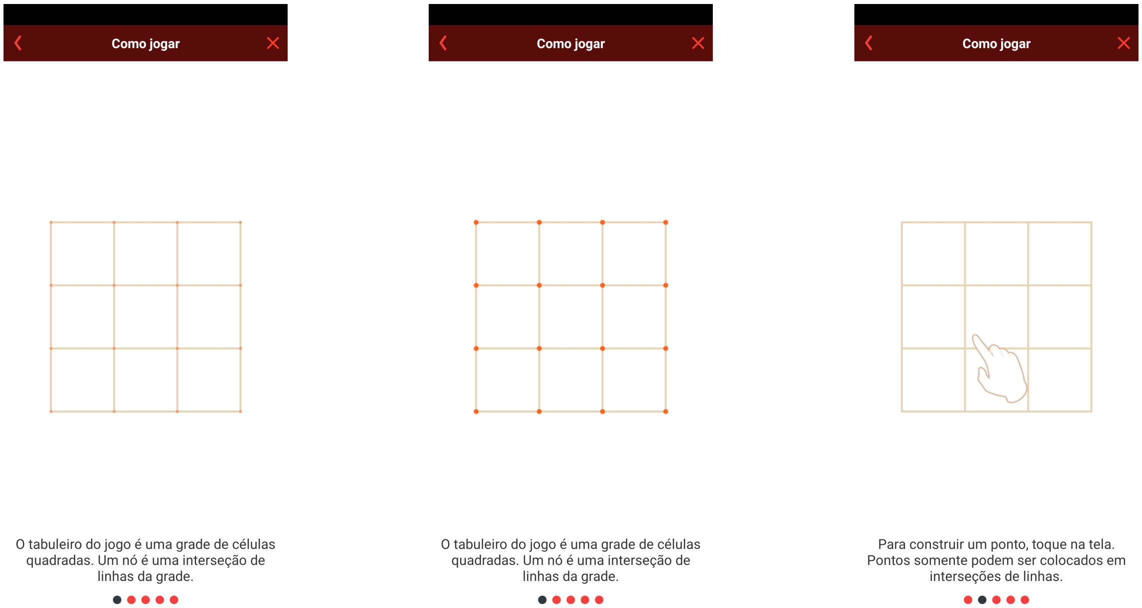
Fonte: A autora.

Ainda sobre a Figura 4.5 (b), quando clica-se sobre a opção Como jogar, o aplicativo apresenta uma sequência de vídeos curtos explicando o funcionamento do programa. Como já citado, este tutorial de como jogar aparece para o praticante quando o mesmo utiliza pela primeira vez o aplicativo.

Dentro da opção Como jogar, constam as seguintes informações apresentadas nas Figuras de 4.10 a 4.16.

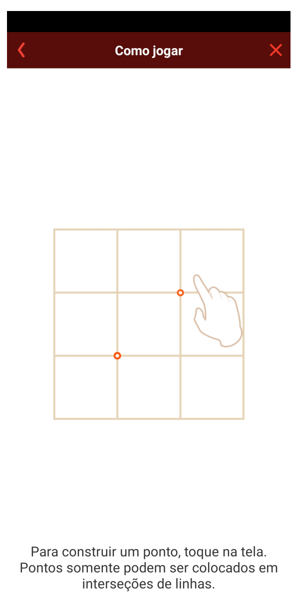
Figura 4.10: Pythagorea

(a) Pythagorea 19 (b) Pythagorea 20 (c) Pythagorea 21



Fonte: A autora.

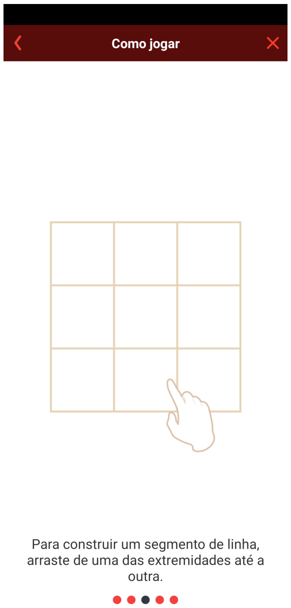
Figura 4.11: Pythagorea 22



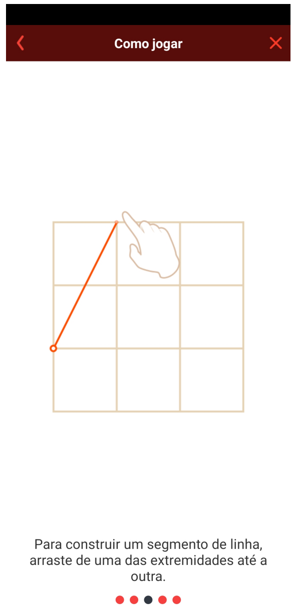
Fonte: A autora.

Figura 4.12: Pythagorea

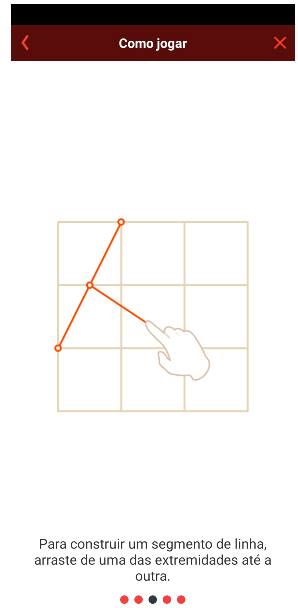
(a) Pythagorea 23



(b) Pythagorea 24

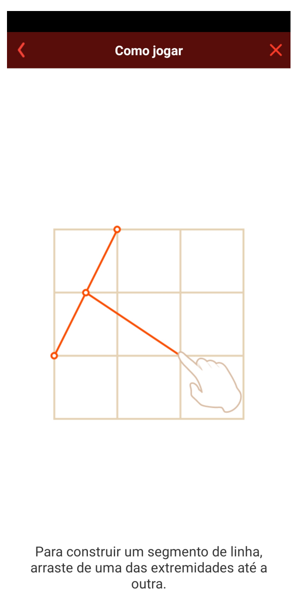


(c) Pythagorea 25



Fonte: A autora.

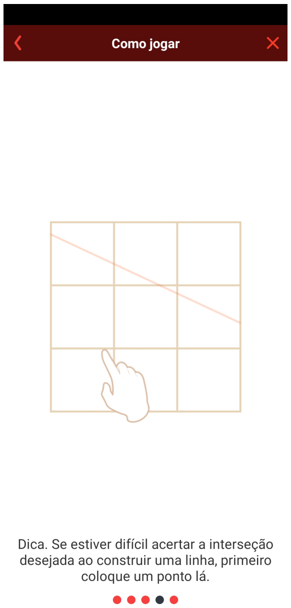
Figura 4.13: Pythagorea 26



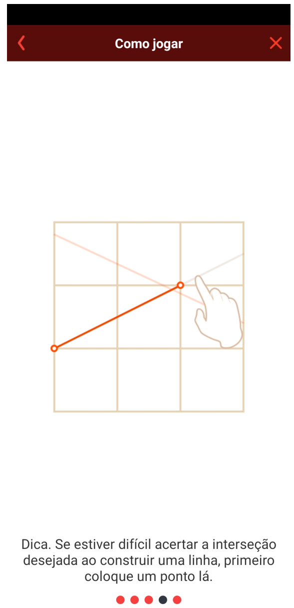
Fonte: A autora.

Figura 4.14: Pythagorea

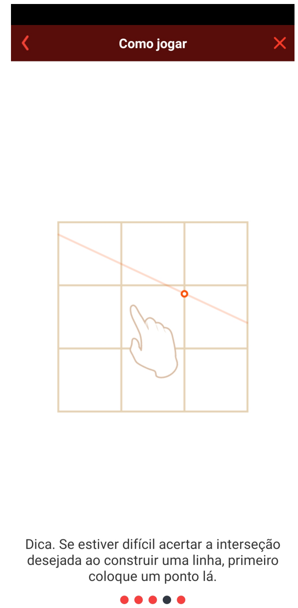
(a) Pythagorea 27



(b) Pythagorea 28

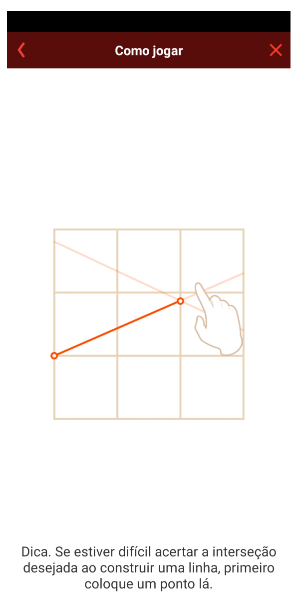


(c) Pythagorea 29



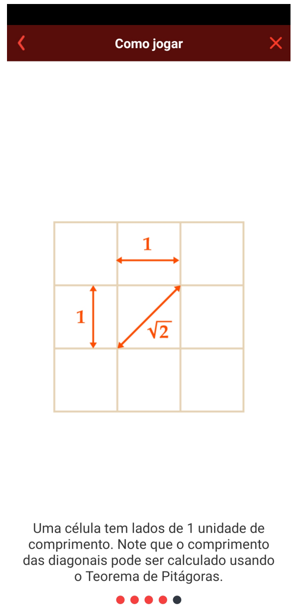
Fonte: A autora.

Figura 4.15: Pythagorea 30



Fonte: A autora.

Figura 4.16: Pythagorea 31

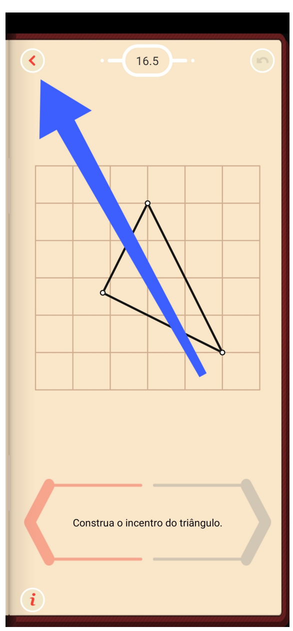


Fonte: A autora.

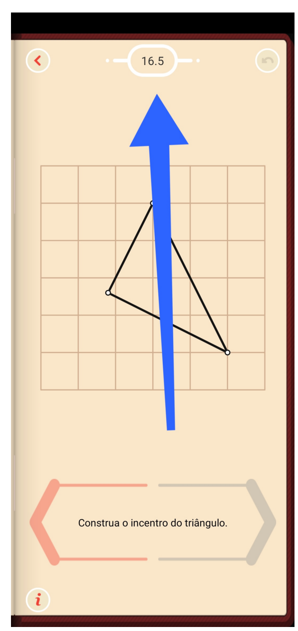
A opção destacada na Figura 4.17 (a) permite que o praticante retorne ao Menu das 28 seções disponíveis. Já o destaque da Figura 4.17 (b) permite a visualização da seção e fase que o praticante se encontra.

Figura 4.17: Pythagorea

(a) Pythagorea 32



(b) Pythagorea 33

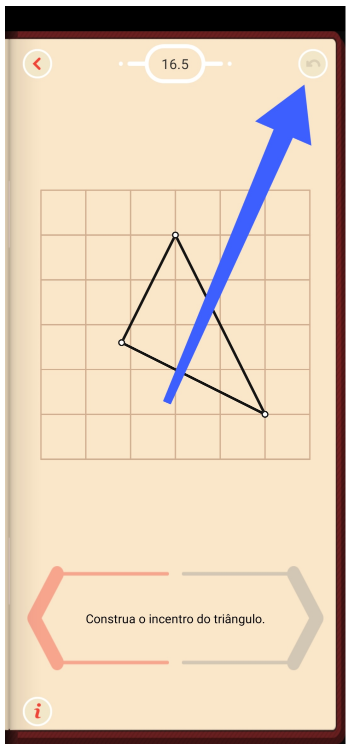


Fonte: A autora.

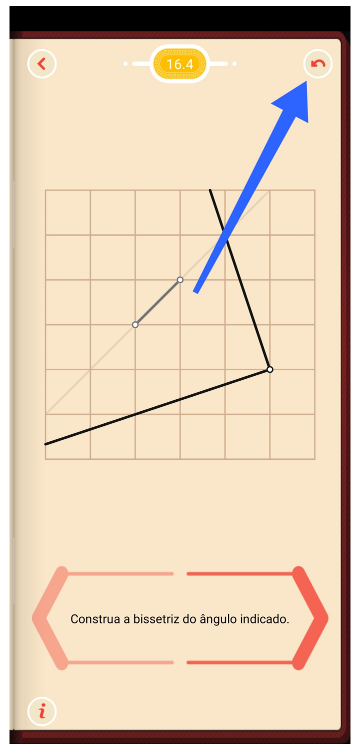
A opção em destaque na Figura 4.18 (a) dá a opção de desfazer o último movimento. Note que na primeira imagem, como não foi realizado nenhum movimento, o botão permanece inerte, sem funcionamento. Já na segunda figura Figura 4.18 (b), como já foi feito um movimento, certo ou errado, o botão aparece sobressalente e fornece a opção de ser clicado.

Figura 4.18: Pythagorea

(a) Pythagorea 35



(b) Pythagorea 36



Fonte: A autora.

Como relato de experiência, os aplicativos, jogos e brincadeiras, chamam muito a atenção da maior parte dos alunos. Os aplicativos abrem novas portas para o aprendizado, para novas percepções e desponta potencialidades muitas vezes estagnadas em maneiras mais convencionais.

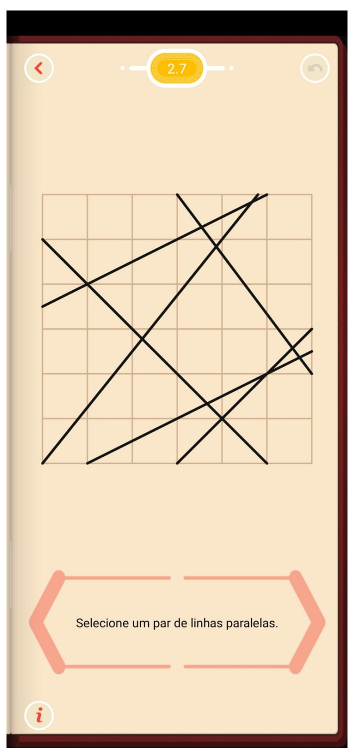
4.2 Comentários sobre algumas fases

Nesta seção vamos comentar algumas fases do aplicativo Pythagorea, no intuito de exemplificar como o programa pode introduzir de forma intuitiva a noção dos objetos geométricos. Para facilitar nossa exposição fizemos algumas demonstrações dinâmicas de quatro fases do tópico Teorema de Pitágoras do aplicativo. Essas demonstrações dinâmicas estão no link abaixo:

`https://www.geogebra.org/m/qqrxvs49`

Por exemplo na fase das PARALELAS, é fácil perceber que a ideia geométrica do que são retas paralelas é explorada mesmo sem saber a definição formal, deixando para a sala de aula a sistematização e formalização do conceito. Ainda pensando em distância entre retas é possível discutir mais a fundo com algumas séries usando esta fase, a relação de ângulo de inclinação das retas paralelas.

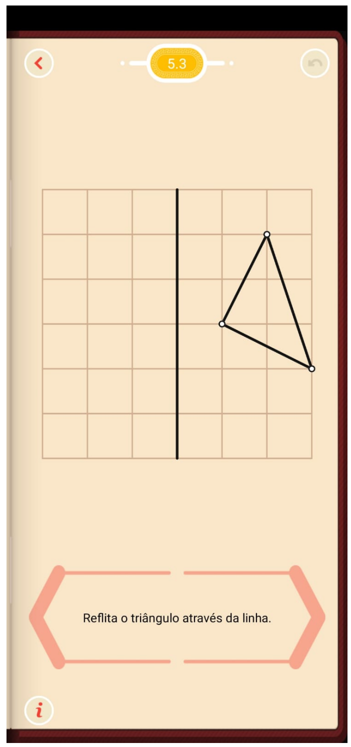
Figura 4.19: Fase das PARALELAS



Fonte: A autora.

Na fase de REFLEXÃO, é totalmente possível explorar o conceito intuitivo do aluno sem que ele conheça a definição formal de reflexão. Já é do entendimento do indivíduo ter um significado para reflexão relacionado ao espelho, objeto diariamente usado por todos. Com algumas tentativas os alunos de várias idades são capazes de resolver o que se pede em algumas fases.

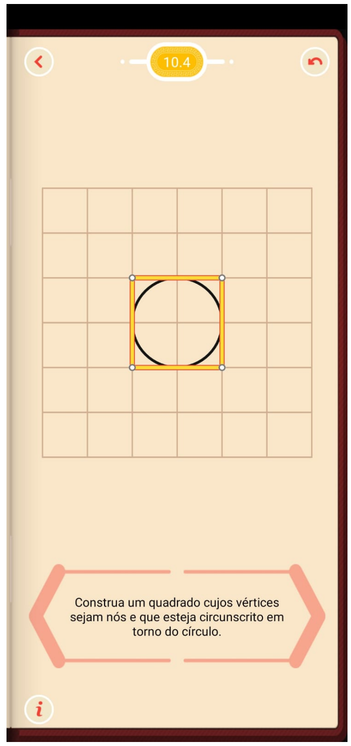
Figura 4.20: Fase da REFLEXÃO



Fonte: A autora.

Outro exemplo é na fase CÍRCULOS, onde é possível trabalhar inscrição e circunscrição de figuras planas nas séries do Ensino Médio. No entanto é também viável trabalhar com os anos final do Ensino Fundamental de maneira mais informal, para só então no Ensino Médio receberem as informações mais estruturadas. Os alunos do Ensino Fundamental possuem conceitos primitivos a respeito de círculo, centro de círculo, quadrado, assim é plausível a utilização desta fase nestas etapas da Educação Básica.

Figura 4.21: Fase da CÍRCULOS

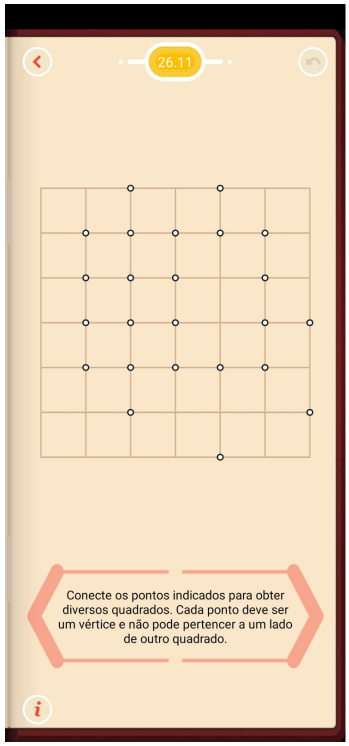


Fonte: A autora.

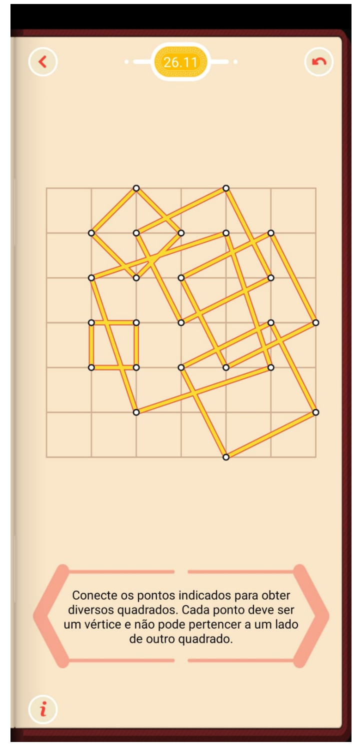
Uma fase que notamos ser instigante é a fase QUADRADOS DE JANE. Esta fase visa a seguinte meta: formar quadrados com todos os vértices dados, sem que os lados de um quadrado contenha o vértice de outro quadrado. Esta fase inspira a criatividade e a busca de estratégias para resolução do problema dado. É uma fase que pode ser usada no Ensino Fundamental e Médio, basta que o aluno conheça e saiba caracterizar os quadrados, mesmo que não utilize os conceitos formais desta figura.

Figura 4.22: Fase QUADRADOS DE JANE

(a) Quadrado de Jane 1



(b) Quadrado de Jane 2



Fonte: A autora.

Conhecendo um pouco das inúmeras oportunidades de aplicações do aplicativo Pythagorea, no capítulo seguinte criamos algumas fichas didáticas que tem por objetivo mostrar algumas ferramentas que possam ser úteis durante as aulas sobre Teorema de Pitágoras, medida de comprimento e relações de áreas. Nas fichas buscamos utilizar fases do aplicativo somadas a outros elementos educacionais. Lembrando que a experimentação do aluno no ato de tentar resolver um problema por um programa, esse contato com o lúdico, pode trazer um olhar mais amigável e com mais sede de conhecimento.

CAPÍTULO 5

FICHAS DIDÁTICAS

A seguir trazemos algumas fichas didáticas com o intuito de auxiliar o professor em algumas aulas. Nelas são utilizadas material concreto, o Aplicativo Pythagorea e o software Geogebra.

Pensamos em materiais manipuláveis juntamente com a tecnologia numa tentativa de fortalecer a aprendizagem, a autoconfiança e a intuição do aluno.

Algumas fichas trazem uma base do que se pode trabalhar com algumas ferramentas, podendo ser aperfeiçoadas o quanto o leitor encontrar necessidade. Pois cada turma, cada escola, cada professor possui uma particularidade.

A organização desse capítulo foi pensada e formatada de modo que o professor possa imprimir as fichas didáticas e aplicá-las em sala de aula.

5.1 Ficha A – Teorema de Pitágoras e distâncias

5.1.1 Ficha do Professor

9ºANO - ENSINO FUNDAMENTAL
Objetivos:

- Revisar e aplicar o Teorema de Pitágoras;
- Calcular distâncias numa malha quadriculada através do Teorema de Pitágoras.

Conteúdo: Teorema de Pitágoras

Duração: 3 aulas de 50 minutos cada. (Se for em aulas remotas uma sugestão é que seja realizado 3 ou 4 aulas.)

Sinopse: Reunidos em grupos, os alunos irão explorar algumas fases do Aplicativo Pythagorea (baixado nos celulares antecipadamente [Pythagorea - Versão: 2.18]) e fazendo também o registro das soluções encontradas em cada fase (todo o processo que usaram para resolver cada fase). Depois disso farão uso do software GeoGebra para comparar as análises realizadas em cada fase com as anotações que fizeram. E, por fim, construirão uma malha quadriculada em madeira utilizando pregos, para que desenvolvam as habilidades de construção e aprimorem o sentido do tato. (Se for em aulas remotas, cada aluno desenvolve os procedimentos das atividades em sua casa, sendo assim não fariam grupos.)

INTRODUÇÃO

O conteúdo de geometria está amplamente envolvido em várias situações do cotidiano. Para isso essa ficha foi desenvolvida com a intenção de aprimorar estes conceitos através de algumas ferramentas.

Pensamos em utilizar mídias e também material concreto, tentando possibilitar uma gama maior de resultados.

Para "passar as fases"do aplicativo Pythagorea, os alunos poderão aplicar o Teorema de Pitágoras, para encontrar as distâncias.

Para que esta ficha seja utilizada, os alunos já devem ter aprendido o que é e como funciona o Teorema de Pitágoras.

CURIOSIDADES

Pitágoras de Samos nasceu por volta de 569 a.C. em Samos, Ionia, e morreu por volta de 475 a.C. Pitágoras foi um filósofo grego que fez importantes descobertas na matemática, astronomia e na teoria musical.

Nos materiais de apoio há um link para um vídeo sobre Pitágoras e a Música: "Donald no país da Matemágica".

O teorema hoje conhecido como Teorema de Pitágoras era conhecido pelos Babilônios 1000 anos antes de Pitágoras enunciá-lo, mas ele foi o primeiro a demonstrá-lo.

O primeiro aluno e depois discípulo de Pitágoras, foi pago pelo mesmo para assistir às suas aulas. Contudo isso foi apenas no começo, pois notando que a cada dia o interesse do aluno pelo conhecimento aumentava, ele fingiu não ter mais condições de pagar ao menino e este, por sua vez, se ofereceu para pagar por sua educação.

Para os pitagóricos e seu mestre, a natureza era constituída de relações e proporções matemáticas. Eles diziam que "tudo é número". Fenômenos musicais, periodicidade dos movimentos celestes, fenômenos da vida, enfim elementos da realidade eram tidos como elementos numéricos. Os estudos feitos pela escola pitagórica rondaram a aritmética, a música, a astronomia e a geometria.

O professor de matemática Elisha Scott Loomis [9], do estado de Ohio nos Estados Unidos, reuniu 230 demonstrações do Teorema de Pitágoras num livro publicado em 1927. E a segunda edição desse livro, de 1940, ampliou para 370 demonstrações. Portanto professor, caso queira trabalhar outras demonstrações do teorema, existem várias que possa usar.

COMENTÁRIOS PRÉ INICIAIS

Esta proposta didática possui três etapas.

Na primeira etapa o aluno é direcionado ao Aplicativo Pythagorea (previamente instalado no celular do aluno) para que, com o auxílio do professor, se familiarize com o jogo e a malha quadriculada, e que após isso possa ter condições de resolver as fases propostas.

Na segunda etapa o aluno é levado a comparar as resoluções por ele feitas com uma demonstração dinâmica no software Geogebra de cada fase, fazendo com que o mesmo aprimore seus conceitos formais a respeito do conteúdo e ainda que faça um pequeno resgate na leitura.

Na terceira etapa, para que o aluno tenha algo concreto, o mesmo irá confeccionar (em grupo e com o auxílio do professor - caso esteja em casa, individualmente e com o auxílio do responsável e do professor) um geoplano feito com madeira e pregos.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Antecipadamente é necessário que você professor providencie alguns materiais. Se as aulas forem presenciais você professor pode levar, pedir para que cada aluno leve ou ainda pedir que a escola providencie, se as aulas forem remotas ou híbridas peça para que os alunos providenciem ou que a escola providencie e monte um kit para que os alunos possam retirar com antecedência na escola.

Materiais:

- 2 ou 3 folha de papel quadriculado para cada grupo a ser formado (se for individual nas aulas remotas sugerimos a mesma quantidade para cada aluno);

- divida a turma de 3 a 5 grupos e peça para que os alunos levem seus celulares no dia da atividade programada (um por grupo, mais de um por grupo ou toda a sala - você decide) (em aulas remotas cada aluno fará individualmente, contudo trocarão informações no decorrer das atividades);

- computadores com acesso à internet para que os alunos utilizem o software Geogebra (nas aulas remotas o aluno também precisa dispor de um computador);

- placas de madeira (uma por grupo - tamanho 20cm x 20cm no mínimo), 49 pregos para CADA placa de madeira, lápis, um martelo por grupo e régua para cada grupo (nas aulas remotas cada aluno deve ter todos os materiais contidos neste item - como sugestão, estes materiais devem ser pedidos para que cada aluno providencie o seu) (o tamanho dos pregos usados eram de 2,2 centímetros - é interessante que o prego não seja muito grande);

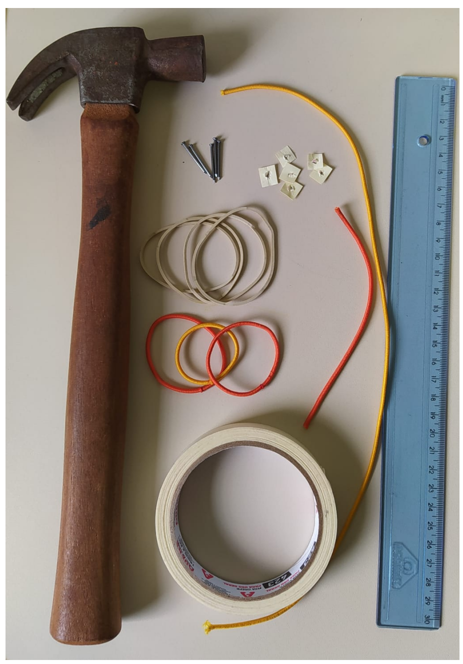
- elásticos coloridos (2 ou 3 cores);

- fita adesiva;

- barbante de cor ou outra linha de cor, de mais ou menos 30 centímetros;

- pedacinhos de papel colorido ou branco (para colocar no geoplano como se fossem pontos) (faça um furinho no meio do papelzinho para facilitar o encaixe).

Figura 5.1: Materiais geoplano



Fonte: Elaborado pela autora.

Em relação aos celulares, antecipadamente e em casa, peça para que seus alunos baixem o aplicativo Pythagorea (Versão: 2.18 – gratuita).

Figura 5.2: Logo do Aplicativo Pythagorea

Fonte: https://www.techwikies.com/apps-for-pc/pythagorea-for-pc-windows-mac/

Link para baixar o Aplicativo Pythagorea pelo Sistema Operacional ANDROID:

https://play.google.com/store/apps/details?id=com.hil_hk.pythagorea

Link para baixar o Aplicativo Pythagorea pelo Sistema Operacional IOS:

https://apps.apple.com/br/app/pythagorea/id994864779

Em relação a atividade com a placa de madeira temos algumas sugestões:

1ª: Nas aulas presenciais ou híbridas: Escolha o aluno mais responsável de cada grupo. Junte-os em uma única mesa e vá instruindo-os a como riscar e pregar os pregos para formar a malha quadriculada. Depois do Geoplano (placa quadriculada) pronta, cada aluno volta para seu grupo para realizarem a tarefa proposta. No decorrer da montagem os demais alunos podem ficar ao redor observando como a produção é feita.

2ª: Nas aulas presenciais ou híbridas: Monte todos os Geoplanos antecipadamente. Leve para a sala um Geoplano a mais para ser montado, faça na sala de aula mostrando o passo a passo de como fazer. Depois entregue para cada grupo os Geoplanos já prontos para que possam realizar a tarefa proposta.

3ª: Nas aulas presenciais, híbridas ou remotas: Peça para que cada grupo monte seu Geoplano em casa (estando em casa, cada aluno deve montar o seu Geoplano). Você pode fornecer para cada grupo os materiais ou ainda pode pedir para que cada grupo providencie seus próprios materiais. Avise apenas o dia que os grupos deverão levar o Geoplano pronto para a sala.

Como sugestão do tempo, temos para as ATIVIDADE ZERO e UM a primeira aula de 50 minutos, e para a ATIVIDADE DOIS e TRÊS a segunda e a terceira aula de 50 minutos. Caso sinta a necessidade o professor pode ainda redistribuir estas atividades como achar mais conveniente em cada turma.

ATIVIDADE ZERO: Sugestão de duração: 5 a 10 minutos.

Verifique se os alunos baixaram o programa correto. Para que os alunos se familiarizem com o aplicativo, peça para que abram o Aplicativo Pythagorea, deem o Play e abram as seguintes opções:

- Opção 1 – COMPRIMENTO E DISTÂNCIA. E resolvam as fases de 1.1 até a 1.7.

- Opção 3 – TRIÂNGULO ISÓSCELES. E resolvam a fase 3.1.

Estas fases propostas é para que aprendam a manipular o aplicativo.

Como já citado, você professor, escolhe se será usado apenas um celular por grupo, ou alguns celulares por grupo ou que todos utilizem seu próprio celular (nas aulas remotas cada aluno usa seu próprio celular).

Incentive-os a realmente traçarem no aplicativo as retas, a criarem os pontos sobre os nós e também a criarem novos nós e consequentemente novos pontos.

Depois de feita a familiarização com o aplicativo, é hora de ir para a próxima atividade.

ATIVIDADE UM: Sugestão de duração: 30 a 40 minutos.

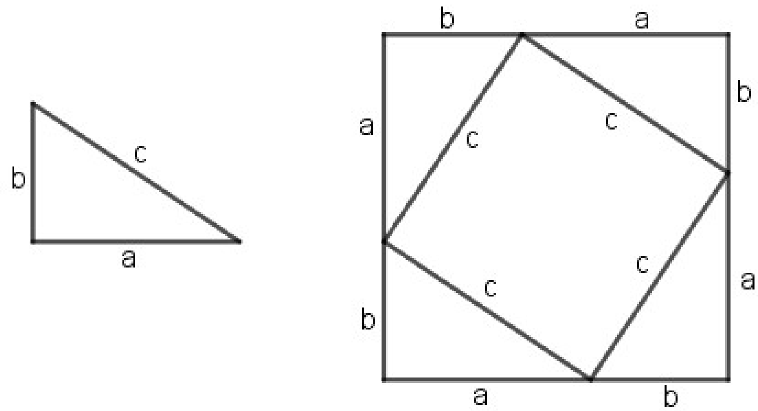
Para que os alunos consigam desenvolver as fases do aplicativo, o professor pode relembrar o Teorema de Pitágoras, realizar a demonstração e resolver alguns exemplos com eles. Existem várias demonstrações do teorema proposto, uma delas trouxemos abaixo:

Teorema de Pitágoras: em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Demonstração: Consideremos um triângulo retângulo de catetos medindo a e b, e hipotenusa medindo c. Tomemos um quadrado de lado $a + b$. Em seu interior traçamos quatro triângulos retângulos com catetos a e b sobre os lados do quadrado. Pelo Teorema de Congruência (Caso LAL), cada um desses quatro triângulos é congruente ao triângulo dado, ou seja, todos têm hipotenusa com medida igual a c.

O quadrilátero formado pelas quatro hipotenusas é um quadrado, visto que os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.

Figura 5.3: Quadrado de lado $a+b$



Fonte: Elaborado pela autora.

Tomando um dos axiomas de medidas que diz: se uma região plana é a união de duas ou mais regiões planas tais que duas a duas não têm pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas dessas regiões, a área do quadrado maior é igual à área do quadrado menor mais a soma das áreas dos quatro triângulos congruentes. Isto nos dá

$$\begin{aligned} & (a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot a \cdot b \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = c^2 + 2 \cdot a \cdot b \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 + b^2 = c^2 \end{aligned}$$

$\square$

Professor, caso queira utilizar a demonstração dinâmica do Teorema de Pitágoras no software Geogebra, utilize o link abaixo ou o QR Code ao lado.

`https://www.geogebra.org/m/qqrxvs49#material/rqt3zvhx`

Alguns exemplos de resolução do Teorema de Pitágoras:

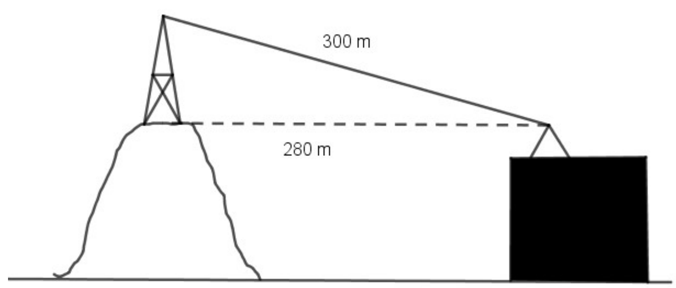
a) Dado um triângulo retângulo de catetos medindo 6cm e 7cm, qual o valor da hipotenusa?

RESOLUÇÃO: De acordo com o Teorema de Pitágoras temos:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$6^2 + 7^2 = c^2$$
$$c \cong 9,2cm.$$

b) Durante um passeio turístico, um turista teve a curiosidade de saber quantos metros de altura tinha a torre que sustentava os cabos da tirolesa que ele iria usar. O guia não sabia dizer ao turista qual a altura da torre, contudo ele sabia de outras duas informações. Ele disse que ajudou na construção da tirolesa, e sabe que foram usados exatamente 300 metros de cabo para a descida e que a distância, no chão (na horizontal), de onde a pessoa sai até onde ela chega é de 280 metros. Com estas informações e com o auxílio do desenho abaixo, calcule quantos metros de altura aproximadamente tem a torre.

Figura 5.4: Exercício tirolesa



Fonte: Elaborado pela autora.

RESOLUÇÃO: No triângulo retângulo formado temos:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$280^2 + b^2 = 300^2$$
$$b \cong 107,7m.$$

Então, 107,7 + 3 = 110,7 metros é a altura aproximada da torre.

Neste momento, você professor, pode pedir para que os alunos, ainda no Aplicativo Pythagorea, abram a opção 13 - TEOREMA DE PITÁGORAS e resolvam as fases mencionadas a seguir.

Fases: 13.1, 13.2, 13.3 e 13.4.

Para cada fase, peça para que anotem detalhadamente na folha quadriculada que você entregou a eles (ou que eles tenham providenciado), todas as etapas de resolução por eles usadas. Peça para que façam as construções geométricas correspondentes a cada fase, que descrevam suas formas de resolução e, caso seja pertinente, que organizem as informações em forma de lista.

A intenção dessa atividade é de que os estudantes façam as construções geométricas e explicitem a forma de resolução de cada tarefa por meio de explicações escritas e do uso de desenhos e/ou representações.

Observe se os alunos estão fazendo as devidas anotações e se estão resolvendo as fases pedidas.

Eles devem responder às perguntas abaixo.

Aqui, faça um momento de bate-papo, de discussão e de troca de experiências entre todos da turma que que seu feedback seja o melhor possível.

Vamos compartilhar o que aconteceu:

a) Vocês conseguiram resolver as fases na primeira tentativa?

____

____

b) Vocês usaram alguma técnica para resolver cada fase?

____

____

c) Foi necessário o uso do Teorema de Pitágoras?

____

____

Resolvendo as fases no celular vocês tiveram um pouco de contato com mídia para construção geométrica. Agora vamos avançar e trabalhar melhor os conceitos geométricos mais formalmente.

ATIVIDADE DOIS: Sugestão de duração: 25 a 30 minutos.

Para esta tarefa, é necessário que os alunos tenham computadores com acesso à internet (na escola ou em casa nas aulas remotas).

Depois de ter manipulado o aplicativo Pythagorea no celular, peça para que seus alunos abram o software Geogebra pelo link abaixo, ou usando o QR Code, e analise cada fase do jogo descrita na resolução dinâmica. Nas aulas remotas compartilhe o link ou o QR Code e nas aulas presenciais passe para os alunos o link ou o QR Code.

`https://www.geogebra.org/m/qqrxvs49`

Levando em conta que os alunos estão se distanciando da leitura cada vez mais, a explicação dinâmica busca resgatar um pouco este hábito para a vida escolar do aluno.

Peça para eles que comparem as explicações dadas com as resoluções deles e para que respondam a pergunta a seguir.

a) Citem as principais diferenças entre a vossa resolução e a resolução proposta no Geogebra.

Como eles resolveram as fases do jogo e estruturaram os conteúdos formais através do Geogebra, você trabalhará com eles utilizando material concreto.

ATIVIDADE TRÊS: Sugestão de duração: 30 a 60 minutos.

Você entregará aos alunos uma placa de madeira, alguns pregos e um martelo (ou ainda fará alguma das outras sugestões dadas anteriormente). Com esse material os alunos conseguirão manusear a própria malha quadriculada.

Peça para que, usando a régua, risquem uma malha quadriculada na placa e madeira. (Observação: a placa contida nas imagens explicativas é maior que o tamanho indicado na ficha, contudo o tamanho fornecido na ficha é suficiente para a realização do trabalho.)

A malha deve ter 6 unidades por 6 unidades, onde cada unidade deverá medir 3 centímetros. Você pode pedir para que os alunos deixem uma margem de 1 centímetro em todos os lados (Figura 5.5. (Como a placa da imagem era um pouco maior do que 20 centímetros, foi deixado uma margem maior.)

Figura 5.5: Montagem Geoplano 1

Fonte: Elaborado pela autora.

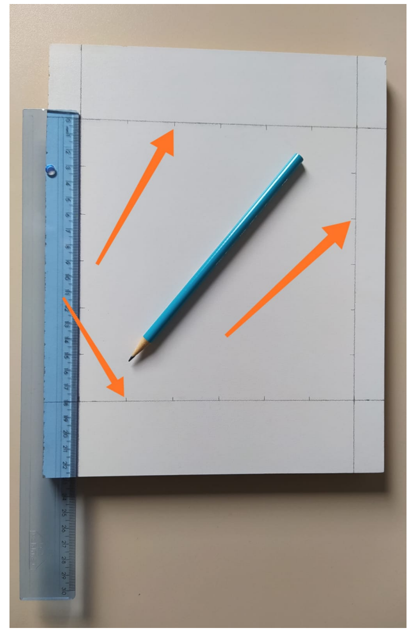
Faça as marcações de 3 em 3 centímetros em todas as margens para que a malha fique alinhada (Figura 5.6).

Após feitas as marcações, ligue-as para desenhar a malha quadriculada que receberá os pregos (Figura 5.7).

Figura 5.6: Montagem Geoplano 2 e 3

(a) Montagem Geoplano 2

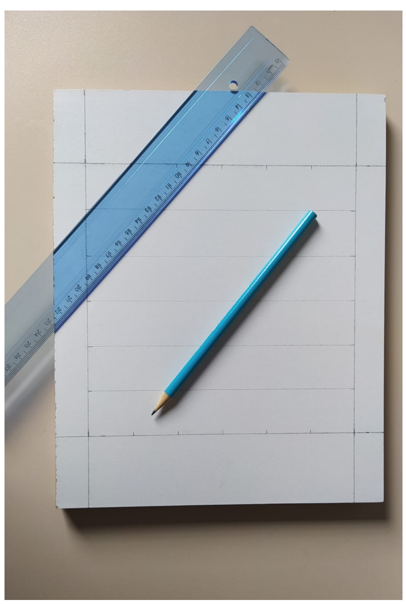
(b) Montagem Geoplano 3



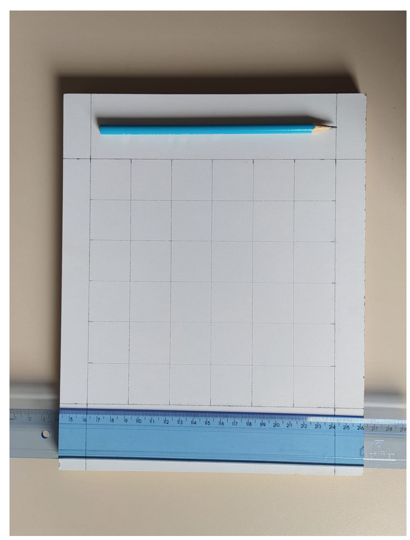
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.7: Montagem Geoplano 4 e 5

(a) Montagem Geoplano 4



(b) Montagem Geoplano 5

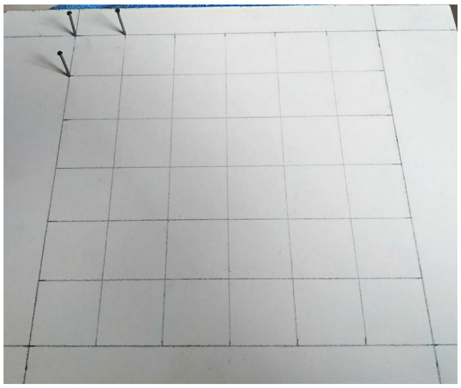


Fonte: Elaborado pela autora.

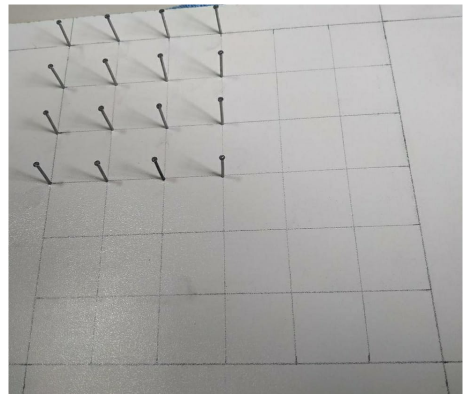
Depois da malha pronta, martele os pregos nos nós formados pelos encontros dos segmentos de reta. (Nas aulas remotas, lembre os alunos que neste momento é recomendado que tenha um adulto por perto para auxiliar) (Figura 5.8).

Figura 5.8: Montagem Geoplano 6 e 7

(a) Montagem Geoplano 6

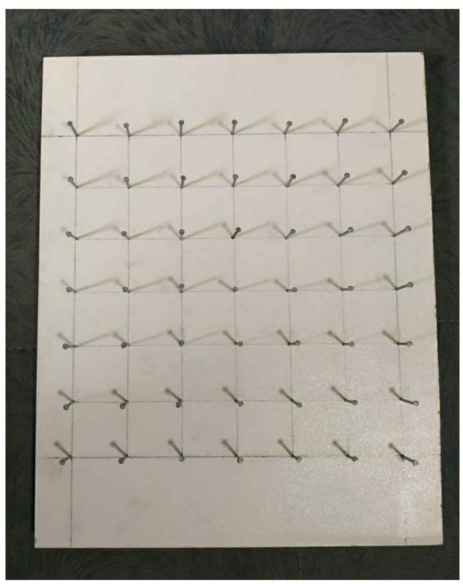


(b) Montagem Geoplano 7



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.9: Montagem Geoplano 8



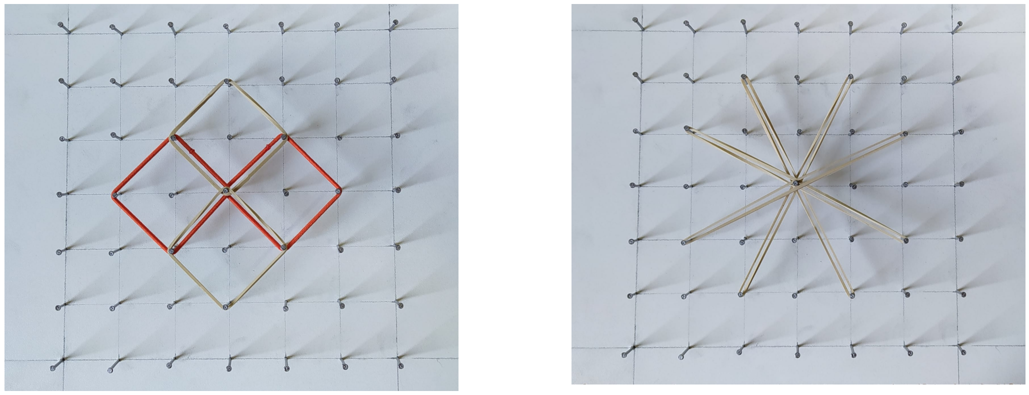
Fonte: Elaborado pela autora.

Pronto! Agora nessa placa, chamada de Geoplano, peça para que os alunos montem as fases do jogo que eles resolveram para que fique mais palpável cada imagem encontrada, utilizando os elásticos coloridos e os pedacinhos de papel.

Você professor, pode pedir para que seus alunos tirem foto para registrar as etapas de resolução.

Figura 5.10: Fases resolvidas

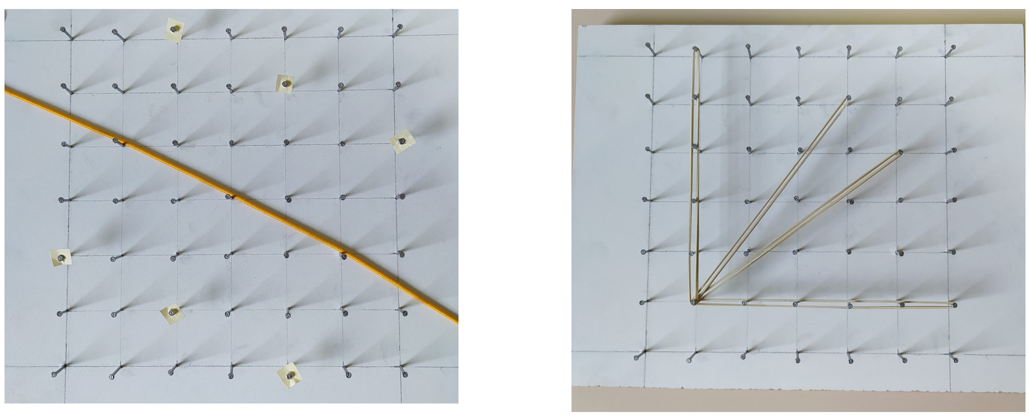
(a) Fase 13.1 resolvida (b) Fase 13.2 resolvida



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.11: Fases resolvidas

(a) Fase 13.3 resolvida (b) Fase 13.4 resolvida



Fonte: Elaborado pela autora.

Você professor, poderá neste momento indicar alguns comandos, caso queira, para que os alunos construam algumas distâncias e algumas figuras no geoplano.

Explore ao máximo este Geoplano e induza a curiosidade e criatividade de seus alunos.

Pós ficha didática: Seu trabalho professor não acaba aqui, sabemos disso. Levando em conta isso pensamos que algo que possa ocorrer após o término da aplicação desta ficha é de que você consiga um feedback com os alunos tentando responder alguma questão que talvez tenha ficado sem resposta para você. Por exemplo:

a) A quantidade de exemplos dados antes da aplicação da ficha foi suficiente?

b) É possível utilizar alguma outra ferramenta lúdica para auxiliar o processo de apreensão do conhecimento?

c) O aluno se sentiu "acolhido"por estas estruturas apresentadas?

d) Alguma particularidade em algum momento ou com algum aluno que deve ser revista para uma nova aplicação desta ficha?

e) Esta ficha foi útil para seu aluno realmente compreender o assunto?

Materiais de apoio:

- Música: Teorema de Pitágoras.

  Disponível em: `https://www.youtube.com/watch?v=qjvy2jcbv8w`

- Vídeo com uma das curiosidades sobre Pitágoras e a Música. “Donald no país da Matemágica”.

  Disponível em: `https://www.youtube.com/watch?v=66l6MBQgcRg`

- Vídeo com uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

  Disponível em: `https://www.youtube.com/watch?v=lGsjhPKv1Z8&t=9s`

5.1.2 Ficha do aluno

(9ºANO - ENSINO FUNDAMENTAL)

Objetivos:

- Revisar e aplicar o Teorema de Pitágoras;
- Calcular distâncias numa malha quadriculada através do Teorema de Pitágoras.

Conteúdo: Teorema de Pitágoras

Duração: 3 aulas de 50 minutos cada. (Se for em aulas remotas uma sugestão é que seja realizado 3 ou 4 aulas.)

Sinopse: Reunidos em grupos, os alunos irão explorar algumas fases do Aplicativo Pythagorea (baixado nos celulares antecipadamente [Pythagorea - Versão: 2.18]) e fazendo também o registro das soluções encontradas em cada fase (todo o processo que usaram para resolver cada fase). Depois disso farão uso do software GeoGebra para comparar as análises realizadas em cada fase com as anotações que fizeram. E, por fim, construirão uma malha quadriculada em madeira utilizando pregos, para que desenvolvam as habilidades de construção e aprimorem o sentido do tato. (Se for em aulas remotas, cada aluno desenvolve os procedimentos das atividades em sua casa, sendo assim não fariam grupos.)

Comentários: Durante todo o desenvolvimento desta atividade, vocês trabalharão com um aplicativo de celular, um software e na sequência com material concreto com o intuito de se trabalhar as possibilidades de aplicação do Teorema de Pitágoras e aprimorar os conhecimentos de geometria plana.

ATIVIDADE ZERO: Para que vocês se familiarizem com o Aplicativo Pythagorea, abram-no e deem o Play. Aparecerá uma lista com todos os conteúdos contemplados no jogo. Vocês poderiam escolher qualquer opção, contudo para o desenvolver esta atividade escolham a Opção 1 - COMPRIMENTO E DISTÂNCIA clicando sobre o nome. Nesse momento aparecerá um tutorial de como funciona os botões do aplicativo. Quando terminarem de observar tudo cliquem no X que está no canto superior direito para dar início às fases. Sigam a seguinte sequência:

1) Opção 1 - COMPRIMENTO E DISTÂNCIA. Resolvam as fases de 1.1 até a 1.7.

2) Opção 3 - TRIÂNGULO ISÓSCELES. Resolvam a fase 3.1.

Agora que vocês já sabem utilizar o aplicativo, vamos para a próxima tarefa.

ATIVIDADE UM: Ainda no Aplicativo Pythagorea, abram na opção 13 - TEOREMA DE PITÁGORAS.
Nesta opção resolvam as seguintes fases: 13.1, 13.2, 13.3 e 13.4. Mas ATENÇÃO, para cada fase, anotem na folha quadriculada recebida, todas as etapas de resolução da mesma. Façam os desenhos referente a cada fase e descrevam a maneira que conseguiram resolver a fase.

Vamos compartilhar o que aconteceu:

a) Vocês conseguiram resolver as fases na primeira tentativa?

____

____

b) Vocês usaram alguma técnica para resolver cada fase?

____

____

____

c) Foi necessário o uso do Teorema de Pitágoras?

____

____

____

Resolvendo as fases no celular vocês tiveram um pouco de contato com mídia para construção geométrica. Agora vamos avançar e trabalhar melhor os conceitos geométricos mais formalmente.

ATIVIDADE DOIS: Abram o software Geogebra pelo link ou pelo QR Code que o professor compartilhar e analisem cada fase descrita e comentada.

a) Comparem cada descrição e comentário com a vossa resolução.

b) Citem as diferenças entre a vossa resolução e a resolução proposta no Geogebra.

Como vocês resolveram as fases do jogo e estruturaram os conteúdos formais através do Geogebra, vamos agora trabalhar com material concreto.

ATIVIDADE TRÊS: Vocês receberão uma placa de madeira, alguns pregos e um martelo. Com esse material vocês vão montar a vossa própria malha quadriculada, um Geoplano. Usando a régua, risquem uma malha de 6 unidades por 6 unidades, onde cada unidade deverá medir 3 centímetros. Peçam ajuda ao professor caso necessário e tomem muito cuidado ao manusear esses materiais. Nessa placa, chamada de Geoplano, monte as fases do jogo que vocês resolveram para que fique mais palpável cada imagem encontrada. Ainda vocês poderão receber comandos do professor para construir outras distâncias e figuras.

Compartilhando experiências:

a) Você gostou do processo de construção e montagem do Geoplano?

b) A visualização da fase do jogo montada no Geoplano te ajudou a compreender um pouco mais a geometria envolvida?

5.1.3 Ficha do aluno - Aula Remota

(9º ANO - ENSINO FUNDAMENTAL)

Objetivos:

- Revisar e aplicar o Teorema de Pitágoras;
- Calcular distâncias numa malha quadriculada através do Teorema de Pitágoras.

Conteúdo: Teorema de Pitágoras

Duração: 3 aulas de 50 minutos cada. (Se for em aulas remotas uma sugestão é que seja realizado 3 ou 4 aulas.)

Sinopse: Reunidos em grupos, os alunos irão explorar algumas fases do Aplicativo Pythagorea (baixado nos celulares antecipadamente [Pythagorea - Versão: 2.18]) e fazendo também o registro das soluções encontradas em cada fase (todo o processo que usaram para resolver cada fase). Depois disso farão uso do software GeoGebra para comparar as análises realizadas em cada fase com as anotações que fizeram. E, por fim, construirão uma malha quadriculada em madeira utilizando pregos, para que desenvolvam as habilidades de construção e aprimorem o sentido do tato. (Se for em aulas remotas, cada aluno desenvolve os procedimentos das atividades em sua casa, sendo assim não fariam grupos.)

Comentários: Durante todo o desenvolvimento desta atividade, você trabalhará com um aplicativo de celular, um software e na sequência com material concreto com o intuito de se trabalhar as possibilidades de aplicação do Teorema de Pitágoras e aprimorar os conhecimentos de geometria plana.

ATIVIDADE ZERO: Para que você se familiarize com o Aplicativo Pythagorea, abra e dê o Play. Aparecerá uma lista com todos os conteúdos contemplados no jogo. Você poderia escolher qualquer opção, contudo, para o desenvolver esta atividade escolha a Opção 1 - COMPRIMENTO E DISTÂNCIA clicando sobre o nome. Nesse momento aparecerá um tutorial de como funciona os botões do aplicativo. Quando terminar de observar tudo clique no X que está no canto superior direito para dar início às fases. Siga a seguinte sequência:

1) Opção 1 - COMPRIMENTO E DISTÂNCIA. Resolva as fases de 1.1 até a 1.7.

2) Opção 3 - TRIÂNGULO ISÓSCELES. Resolva a fase 3.1.

Agora que você já sabe utilizar o aplicativo, vamos para a próxima tarefa.

ATIVIDADE UM: Ainda no Aplicativo Pythagorea, abra na opção 13 - TEOREMA DE PITÁGORAS.
Nesta opção resolva as seguintes fases: 13.1, 13.2, 13.3 e 13.4. Mas ATENÇÃO, para cada fase, anote na folha quadriculada todas as etapas de resolução da mesma. Faça os desenhos referente a cada fase e descreva a maneira que conseguiu resolver a fase. Caso seja necessário converse com os outros colegas para saber como estão desenvolvendo a fase.

Vamos compartilhar o que aconteceu:

a) Vocês conseguiram resolver as fases na primeira tentativa?

____

____

____

b) Vocês usaram alguma técnica para resolver cada fase?

____

____

____

c) Foi necessário o uso do Teorema de Pitágoras?

____

____

____

Resolvendo as fases no celular vocês tiveram um pouco de contato com mídia para construção geométrica. Agora vamos avançar e trabalhar melhor os conceitos geométricos mais formalmente.

ATIVIDADE DOIS: Abram o software Geogebra pelo link ou pelo QR Code que o professor compartilhar e analisem cada fase descrita e comentada.

a) Comparem cada descrição e comentário com a vossa resolução.

b) Citem as diferenças entre a vossa resolução e a resolução proposta no Geogebra.

Como vocês resolveram as fases do aplicativo e estruturaram os conteúdos formais através do Geogebra, vamos agora trabalhar com material concreto.

ATIVIDADE TRÊS: Vocês utilizarão a placa de madeira, os pregos e o martelo que já deixaram separados. Com esse material vocês vão montar a vossa própria malha quadriculada, um Geoplano. Usando a régua, risquem uma malha de 6 unidades por 6 unidades, onde cada unidade deverá medir 3 centímetros (se precisar peça ajuda aos seus responsáveis). Peçam ajuda ao professor caso necessário e tomem muito cuidado ao manusear esses materiais. Nessa placa, chamada de Geoplano, monte as fases do jogo que vocês resolveram para que fique mais palpável cada imagem encontrada. Ainda vocês poderão receber comandos do professor para construir outras distâncias e figuras.

Compartilhando experiências:

a) Você gostou do processo de construção e montagem do Geoplano?

b) A visualização da fase do jogo montada no Geoplano te ajudou a compreender um pouco mais a geometria envolvida?

5.2 Ficha B - Área de figuras planas e Teorema de Pitágoras

5.2.1 Ficha do aluno

(9º ANO - ENSINO FUNDAMENTAL E 1ª SÉRIE - ENSINO MÉDIO)

Objetivos:

- Calcular e comparar áreas de figuras planas;
- Calcular distâncias numa malha quadriculada.

Conteúdo: Área de figuras planas e Teorema de Pitágoras

Duração: 2 aulas de 50 minutos cada. (Se for em aulas remotas uma sugestão é que seja realizado 3 ou 4 aulas.)

Sinopse: Reunidos em grupos, os alunos jogarão algumas fases do Aplicativo Pythagorea (baixado nos celulares antecipadamente [Pythagorea - Versão 2.18] e anotarão as soluções encontradas por eles para cada fase. Após esse contato com o aplicativo (jogo) os alunos construirão algumas peças em papel, para visualizarem melhor a comparação de áreas e tentarão provar o Teorema de Pitágoras. (Se for em aulas remotas, cada aluno desenvolve os procedimentos das atividades em sua casa, sendo assim não fariam grupos.)

Comentários: Durante todo o desenvolvimento desta atividade, vocês trabalharão com um aplicativo de celular e com material concreto com o intuito de aprimorar alguns dos vossos conhecimentos de geometria plana, como o cálculo e a comparação de áreas.

ATIVIDADE ZERO: Para que vocês se familiarizem com o Aplicativo Pythagorea, abram-no e deem o Play. Aparecerá uma lista com todos os conteúdos contemplados no jogo. Vocês poderiam escolher qualquer opção, contudo, para o desenvolver desta atividade escolham a Opção 9 - QUADRADOS clicando sobre o nome. Nesse momento aparecerá um tutorial de como funciona os botões do aplicativo. Quando terminarem de observar tudo cliquem no X que está no canto superior direito para dar início às fases. Sigam a seguinte sequência:

1) Opção 9 - QUADRADOS. Resolvam as fases de 9.1 até a 9.4.

2) Opção 11 - RETÂNGULOS. Resolvam as fases de 11.1 até a 11.4.

Pronto, agora que vocês já sabem utilizar o aplicativo, vamos para a próxima tarefa.

ATIVIDADE UM: Ainda no Aplicativo Pythagorea, abram a opção 18 - ÁREA.

Nesta opção resolvam as seguintes fases: 18.1, 18.2, 18.7 e 18.12. Mas ATENÇÃO, para cada fase, anotem na folha quadriculada, todas as etapas de resolução da mesma. Façam os desenhos referentes a cada fase e descrevam a maneira que conseguiram resolver.

Compartilhando informações:

1. Qual das fases você levou mais tempo para resolver? Essa foi a fase considerada por você a mais complicada?

   ____

   ____

   ____

2. Vocês utilizaram algum conceito matemático já estudado, para resolver alguma fase?

   ____

   ____

   ____

3. Foi encontrada mais de uma maneira para descobrir a solução?

   ____

   ____

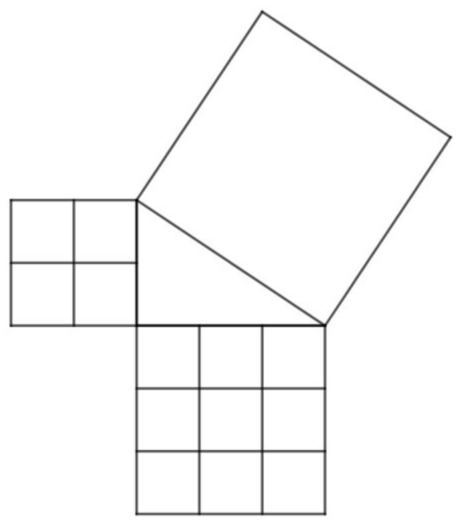
   ____

Como vocês desenvolveram muito bem esta atividade, pensamos que vocês poderiam neste momento trabalhar com materiais concretos, para otimizarem vossos conceitos mais formais.

ATIVIDADE DOIS: Vocês receberão alguns moldes em papéis. Com esse material vocês tentarão provar o Teorema de Pitágoras utilizando o conceito de comparação de áreas. O professor conduzirá vocês em como desenvolver esta atividade.

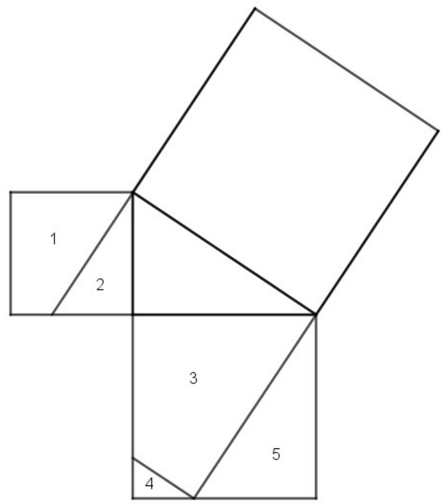
E após montado os quebra-cabeças, você pode desenhar e pintar nas figuras abaixo a solução encontrada.

Figura 5.12: Quebra-cabeça 1



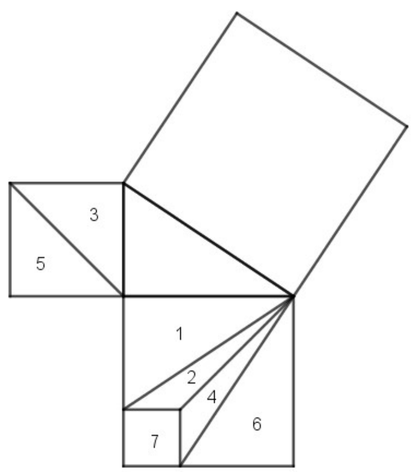
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.13: Quebra-cabeça 2



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.14: Quebra-cabeça 3



Fonte: Elaborado pela autora.

5.2.2 Ficha do professor

($9^{\underline{o}}$ ANO - ENSINO FUNDAMENTAL E $1^{\underline{a}}$ SÉRIE - ENSINO MÉDIO)

Objetivos:

- Calcular e comparar áreas de figuras planas;
- Calcular distâncias numa malha quadriculada.

Conteúdo: Área de figuras planas e Teorema de Pitágoras

Duração: 2 aulas de 50 minutos cada. (Se for em aulas remotas uma sugestão é que seja realizado 3 ou 4 aulas.)

Sinopse: Reunidos em grupos, os alunos jogarão algumas fases do Aplicativo Pythagorea (baixado nos celulares antecipadamente [Pythagorea - Versão 2.18] e anotarão as soluções encontradas por eles para cada fase. Após esse contato com o aplicativo (jogo) os alunos construirão algumas peças em papel, para visualizarem melhor a comparação de áreas e tentarão provar o Teorema de Pitágoras. (Se for em aulas remotas, cada aluno desenvolve os procedimentos das atividades em sua casa, sendo assim não fariam grupos.)

INTRODUÇÃO

O conteúdo de geometria está amplamente envolvido em várias situações do cotidiano. Para isso essa ficha foi desenvolvida com a intenção de aprimorar estes conceitos através de algumas ferramentas.

Pensamos que, utilizando mídia juntamente com material concreto, a possibilidade de bons resultados seja maior.

Para "passar as fases"do aplicativo Pythagorea, os alunos poderão utilizar o Teorema de Pitágoras, para encontrar o valor das alturas e das bases dos triângulos e também farão cálculos das áreas de triângulos e retângulos.

Para que esta ficha seja utilizada, os alunos já devem ter aprendido o Teorema de Pitágoras e também as áreas de figuras planas (pelo menos área do quadrado, retângulo e triângulo).

CURIOSIDADES

Historicamente falando, a maior obra já publicada no ramo da Geometria plana (ou ainda Geometria Euclidiana) é a obra intitulada Os Elementos, do geômetra Euclides de Alexandria, em 300 a.C.

Séculos antes do nascimento de Cristo, os encarregados de arrecadar os impostos sobre a terra calculavam a extensão dos campos através de um valor aproximado de acordo com sua visão. Depois os conceitos foram aprimorados através da observação e necessidade de algo fixo para se medir. Observando a pavimentação de mosaicos quadrados em superfícies retangulares, os encarregados notaram que, para saber o total de mosaicos, bastava contar quantas fileiras haviam, quantos mosaicos por fileira haviam e depois somar esta quantidade quantas vezes fosse necessário. Assim nasceu a fórmula da área do retângulo: multiplicar a base pela altura.

Para descobrirem as demais áreas utilizaram a observação e seguiram o raciocínio geométrico.

Quando a superfície era irregular, eles faziam a triangulação da terra, dividindo todo o território em triângulos, até que conseguissem cobrir a superfície toda. Esse método, ainda usado até hoje, produz pequenos erros quando o terreno não é plano.

Pitágoras de Samos nasceu por volta de 569 a.C. em Samos, Ionia, e morreu por volta de 475 a.C. Pitágoras foi um filósofo grego que fez importantes descobertas na matemática, astronomia e na teoria musical. O teorema hoje conhecido como Teorema de Pitágoras era conhecido pelos Babilônios 1000 anos antes de Pitágoras enunciá-lo, mas ele foi o primeiro a demonstrá-lo.

O professor de matemática Elisha Scott Loomis, do estado de Ohio nos Estados Unidos, reuniu 230 demonstrações do Teorema de Pitágoras num livro publicado em 1927. E a segunda edição desse livro, de 1940, ampliou para 370 demonstrações.

COMENTÁRIOS PRÉ INICIAIS

Esta proposta didática possui duas etapas.

Na primeira etapa o aluno é direcionado ao Aplicativo Pythagorea (previamente instalado no celular do aluno) para que, com o auxílio do professor, se familiarize com o aplicativo e a malha quadriculada, e que após isso possa ter condições de resolver as fases propostas.

Na segunda etapa o aluno é levado a fazer comparações de áreas e é induzido a utilizar seus conhecimentos lógicos no momento da prova do Teorema de Pitágoras. Essa tentativa é realizada através da manipulação do quebra-cabeças pitagórico.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Antecipadamente é necessário que você professor providencie alguns materiais e faça algumas organizações. Se as aulas forem presenciais você professor deve levar ou pedir que a escola providencie, se as aulas forem remotas ou híbridas peça para que os alunos providenciem ou que a escola providencie e monte um kit para que o aluno possa retirar com antecedência na escola.

Materiais:

- divida a turma de 3 a 5 grupos e peça para que os alunos levem seus celulares no dia da atividade programada (um por grupo, mais de um por grupo ou toda a sala - você decide) (nas aulas remotas não haverá grupos, no entanto os alunos podem trocar informações pertinentes para a resolução das atividades);

- 2 ou 3 folhas de papel quadriculado para cada grupo a ser formado (então de 6 a 15 folhas no total) (nas aulas remotas sugerimos que cada alunos tenha a mesma quantidade indicada no item);

- no mínimo duas tesouras por grupo (então de 6 a 10 tesouras no total);

- os kits de moldes impressos para cada grupo (de 3 a 5 kits), disponíveis neste material (peça para que os alunos pintem com lápis de cor diferente cada peça para que a demonstração fique mais chamativa) (nas aulas remotas os alunos retiram estes kits com antecedência);

- uma cartolina por grupo (de 3 a 5 cartolinas comuns de 65x50cm no total) para que possam colar (depois de conseguido montar o quebra-cabeças) (nas aulas remotas cada aluno deve ter todo material descrito no item);

- de 3 a 5 rolos de fita adesiva branca para que as peças do quebra-cabeças possam ser movimentadas (nas aulas remotas apenas um rolo de fita colante é necessário);

- caso o professor queira que os alunos tentem montar seu próprio quebra-cabeças, será necessário mais folhas sulfites para que os alunos façam as tentativas.

Em relação aos celulares,peça para que seus alunos, antecipadamente e em casa, baixem o aplicativo Pythagorea (Versão: 2.18 – gratuita).

A respeito da atividade com o papel temos como sugestão alguns moldes de quebra-cabeças diferentes, contudo, você professor, pode ainda instigar seus alunos a tentarem montar o seu próprio quebra-cabeças. Dessa maneira ele verá que há outras possibilidades de peças. (existem inúmeros modelos de peças para os Quebra-cabeças pitagóricos, aqui trouxemos apenas alguns para que o trabalho não fique muito extenso).

Como sugestão do tempo, temos para as ATIVIDADES ZERO e UM a primeira aula de 50 minutos, e para a ATIVIDADE DOIS a segunda aula de 50 minutos. Caso sinta a necessidade o professor pode ainda redistribuir estas atividades como achar mais conveniente em cada turma.

ATIVIDADE ZERO: Sugestão de duração: 5 a 10 minutos.

Verifique se os alunos baixaram o programa correto.

Para que os alunos se familiarizem com o Aplicativo Pythagorea, peça para que abram-no e deem o Play. Fale que aparecerá uma lista com todos os conteúdos contemplados no jogo e que eles poderiam escolher qualquer opção, contudo para o desenvolver desta atividade eles devem escolher a Opção 9 - QUADRADOS clicando sobre o nome. Diga que nesse momento aparecerá um tutorial de como funciona os botões do aplicativo e que quando terminarem de observar tudo, cliquem no **x** que está no canto superior direito para dar início às fases (você ainda pode dizer à eles que, sempre que quiserem rever esse tutorial, ele estará disponível no ícone Informações, localizado no canto inferior esquerdo em cada fase).

Peça para que sigam a seguinte sequência:

1) Na opção 9 - QUADRADOS, que resolvam as fases de 9.1 até a 9.4.

2) Na opção 11 - RETÂNGULOS,que resolvam as fases de 11.1 até a 11.4.

Estas fases propostas é para que aprendam a manipular o aplicativo.

Como já citado, você professor, escolhe se será usado apenas um celular por grupo, ou alguns celulares por grupo ou que todos utilizem seu próprio celular.

Incentive-os a realmente traçarem no aplicativo tudo o que for proposto, pois assim conseguirão resolver as fases com melhor desempenho.

Depois de feita a familiarização com o aplicativo, é hora de ir para a próxima atividade.

ATIVIDADE UM: Sugestão de duração: 30 a 40 minutos.

Para que os alunos consigam desenvolver as fases do jogo, o professor pode relembrar o Teorema de Pitágoras, realizar a demonstração e resolver alguns exemplos com eles. Existem várias demonstrações do teorema proposto, uma delas trouxemos abaixo:

Teorema de Pitágoras: em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Demonstração:

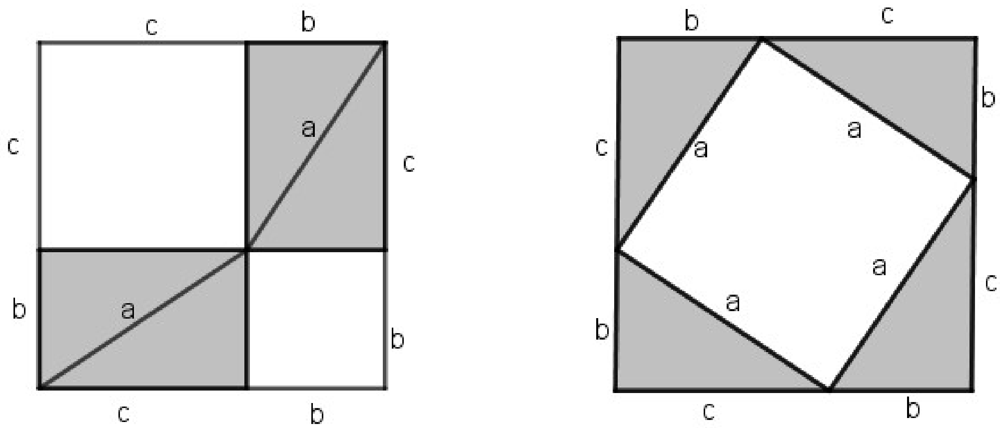
Consideremos um quadrado de lado $b + c$.

Vamos subdividir este quadrado em quatro retângulos, sendo dois deles quadrados de lados, respectivamente, b e c, traçando dois segmentos de reta paralelos a dois lados consecutivos do quadrado, sendo cada um deles interno ao quadrado e com o mesmo comprimento que o lado do quadrado.

Dividimos cada um destes dois retângulos em dois triângulos retângulos, traçando-se as diagonais de medida a. A área da região que resta ao retirar-se os quatro triângulos retângulos é igual a $b^2 + c^2$.

Figura 5.15: Quadrado lado $b + c$

(a) Quadrado de lado b+c (1) (b) Quadrado de lado b+c (2)



Desenhamos agora o mesmo quadrado de lado $b+c$, contudo colocando os quatro triângulos retângulos noutra posição dentro do quadrado. Desta maneira formamos uma região que é um quadrado de lado a. Assim, a área da região formada quando os quatro triângulos retângulos são retirados é igual a a^2.

Como $b^2 + c^2$ representa a área do quadrado maior subtraída da soma das áreas dos triângulos retângulos, e a^2 representa a mesma área, então $b^2+c^2 = a^2$. Ou seja: num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. $\square$

Professor, caso queira utilizar uma outra demonstração do Teorema de Pitágoras no software Geogebra como uma demonstração dinâmica, utilize o link abaixo ou o QR Code ao lado.

`https://www.geogebra.org/m/qqrxvs49#material/depcsy2s`

Alguns exemplos de resolução do Teorema de Pitágoras:

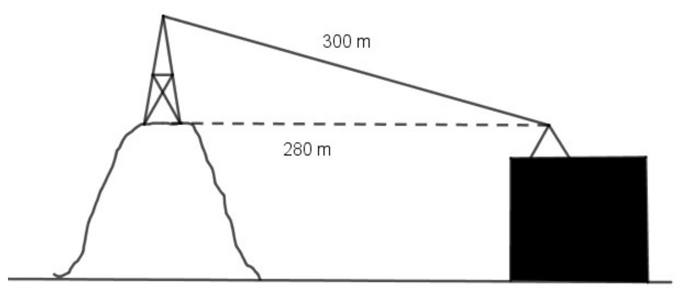
a) Dado um triângulo retângulo de catetos medindo 8 cm e 6 cm, qual o valor da hipotenusa?

RESOLUÇÃO: De acordo com o Teorema de Pitágoras temos:

$$b^2 + c^2 = a^2$$
$$6^2 + 8^2 = a^2$$
$$a = 10cm.$$

b) Durante um passeio turístico, um turista teve a curiosidade de saber quantos metros de altura tinha a torre que sustentava os cabos da tirolesa que ele iria usar. O guia não sabia dizer ao turista qual a altura da torre, contudo ele sabia de outras duas informações. Ele disse que ajudou na construção da tirolesa, e sabe que foram usados exatamente 300 metros de cabo para a descida e que a distância, no chão (na horizontal), de onde a pessoa sai até onde ela chega é de 280 metros. Com estas informações e com o auxílio do desenho abaixo, calcule quantos metros de altura aproximadamente tem a torre.

Figura 5.16: Exercício tirolesa



Fonte: Elaborado pela autora.

RESOLUÇÃO: no triângulo retângulo formado temos:

$$b^2 + c^2 = a^2$$
$$280^2 + c^2 = 300^2$$
$$c \cong 107,7m.$$

Então, 107,7 + 3 = 110,7 metros é a altura aproximada da torre.

Neste momento, você professor, pode pedir para que os alunos, ainda no Aplicativo Pythagorea, abram a opção 18 - ÁREA e resolvam as fases mencionadas a seguir.

Fases: 18.1, 18.2, 18.7 e 18.12.

Para cada fase, peça para que anotem detalhadamente na folha quadriculada que você entregou a eles (ou que eles tenham providenciado), todas as etapas de resolução por eles usadas. Peça para que façam as construções geométricas correspondentes a cada fase, que descrevam suas formas de resolução e, caso seja pertinente, que organizem as informações em forma de lista.

A intenção dessa atividade é de que os estudantes façam as construções geométricas e explicitem a forma de resolução de cada tarefa por meio de explicações escritas e do uso de desenhos e/ou representações.

Observe se os alunos estão fazendo as devidas anotações e se estão resolvendo as fases pedidas.

Eles devem responder às perguntas abaixo.

Faça uma roda de discussões para a troca de experiências.

Compartilhando informações:

1. Qual fase vocês acharam mais complicada? E foi essa mesma fase que vocês demoraram mais tempo para resolver?

   ____

   ____

2. Vocês utilizaram algum conceito matemático já estudado, para resolver a fase?

   ____

   ____

3. Foi encontrada mais de uma maneira para descobrir a solução?

   ____

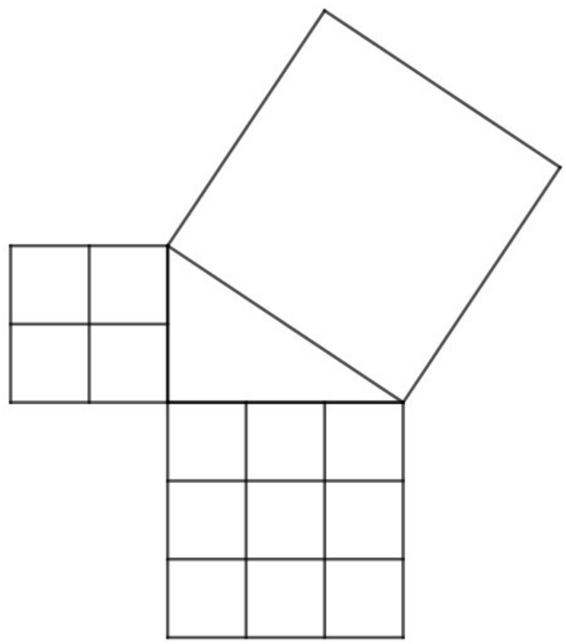
   ____

Como vocês desenvolveram muito bem esta atividade, pensamos que vocês poderiam neste momento trabalhar com materiais concretos, para otimizarem vossos conceitos mais formais.

ATIVIDADE DOIS: Sugestão de duração: 30 a 50 minutos.

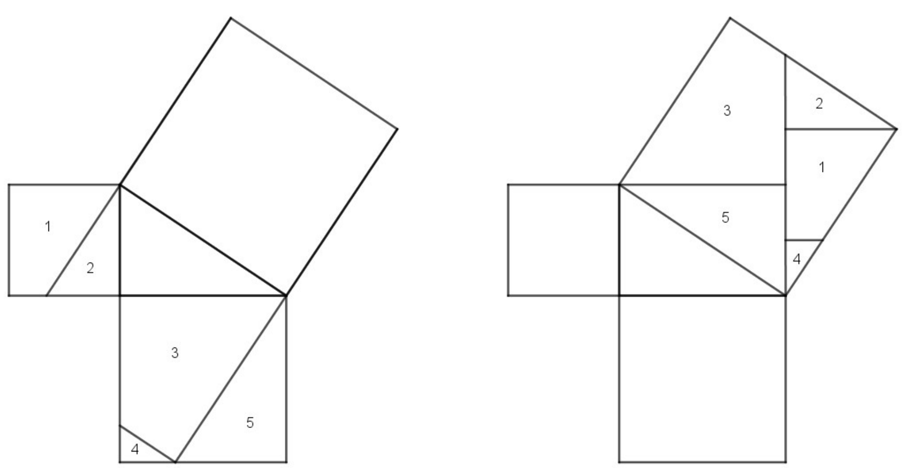
Você entregará para os alunos os moldes em papéis. Com esse material você deverá instruí-los a tentarem provar o Teorema de Pitágoras utilizando o conceito de comparação de áreas.

Figura 5.17: Quebra-cabeça 1



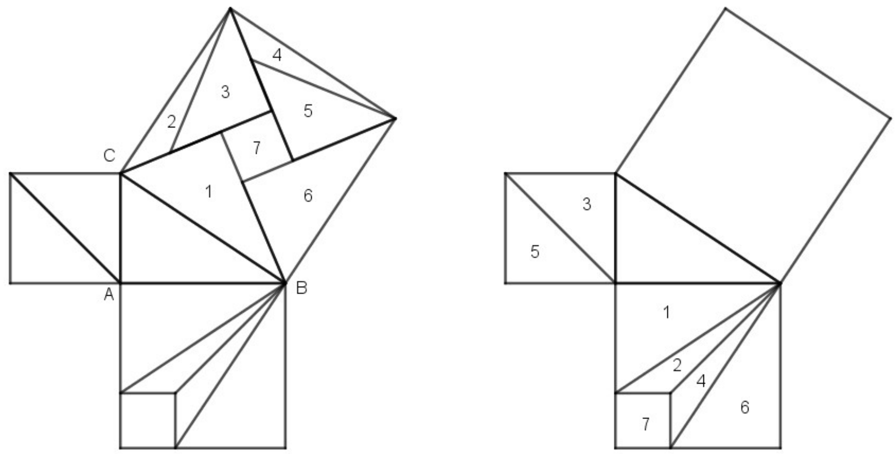
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.18: Quebra-cabeça 2 - Solução



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.19: Quebra-cabeça 3 - Solução



Fonte: Elaborado pela autora.

Após montado os quebra-cabeças, peça para que os alunos desenhem e pintem nas figuras contidas nas fichas por eles recebidas a solução encontrada.

Como já citado professor, caso queira, você pode procurar outros formatos de quebra-cabeças ou ainda instigá-los a tentarem montar o próprio deles.

Pós ficha didática: Seu trabalho professor não acaba aqui, sabemos disso. Levando em conta isso pensamos que algo que possa ocorrer após o término da aplicação desta ficha é de que você consiga um feedback com os alunos tentando responder alguma questão que talvez tenha ficado sem resposta para você. Por exemplo:

a) A quantidade de exemplos dados antes da aplicação da ficha foi suficiente?

b) É possível utilizar alguma outra ferramenta lúdica para auxiliar o processo de apreensão do conhecimento?

c) O aluno se sentiu "acolhido"por estas estruturas apresentadas?

d) Alguma particularidade em algum momento ou com algum aluno que deve ser revista para uma nova aplicação desta ficha?

e) Esta ficha foi útil para seu aluno realmente compreender o assunto?

Materiais de apoio:

- Música: Teorema de Pitágoras.

  Disponível em:

  https://www.youtube.com/watch?v=qjvy2jcbv8w

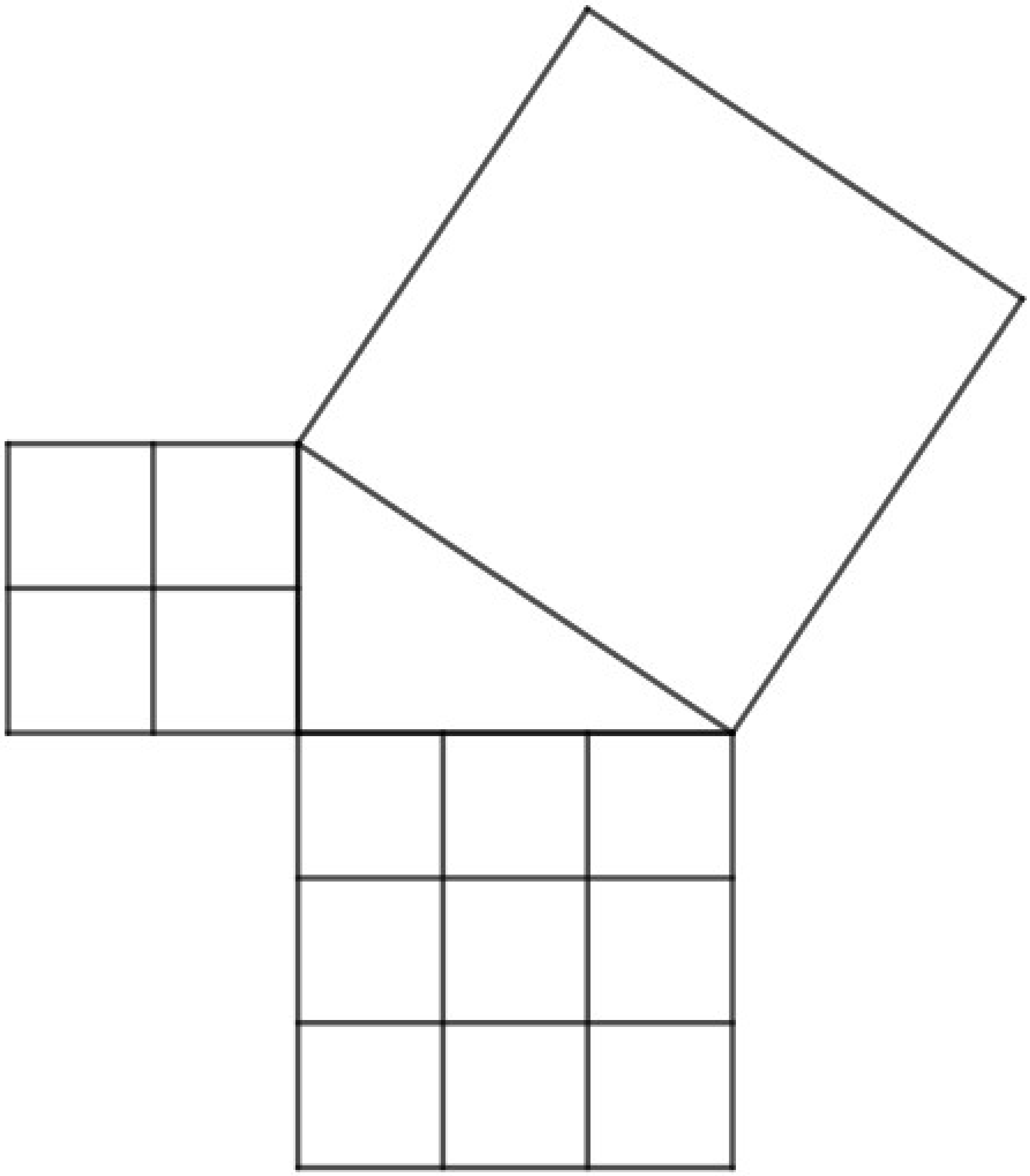
- Vídeo com uma das curiosidades sobre Pitágoras e a Música. "Donald no país da Matemágica".

  Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=66l6MBQgcRg

- Vídeo com uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

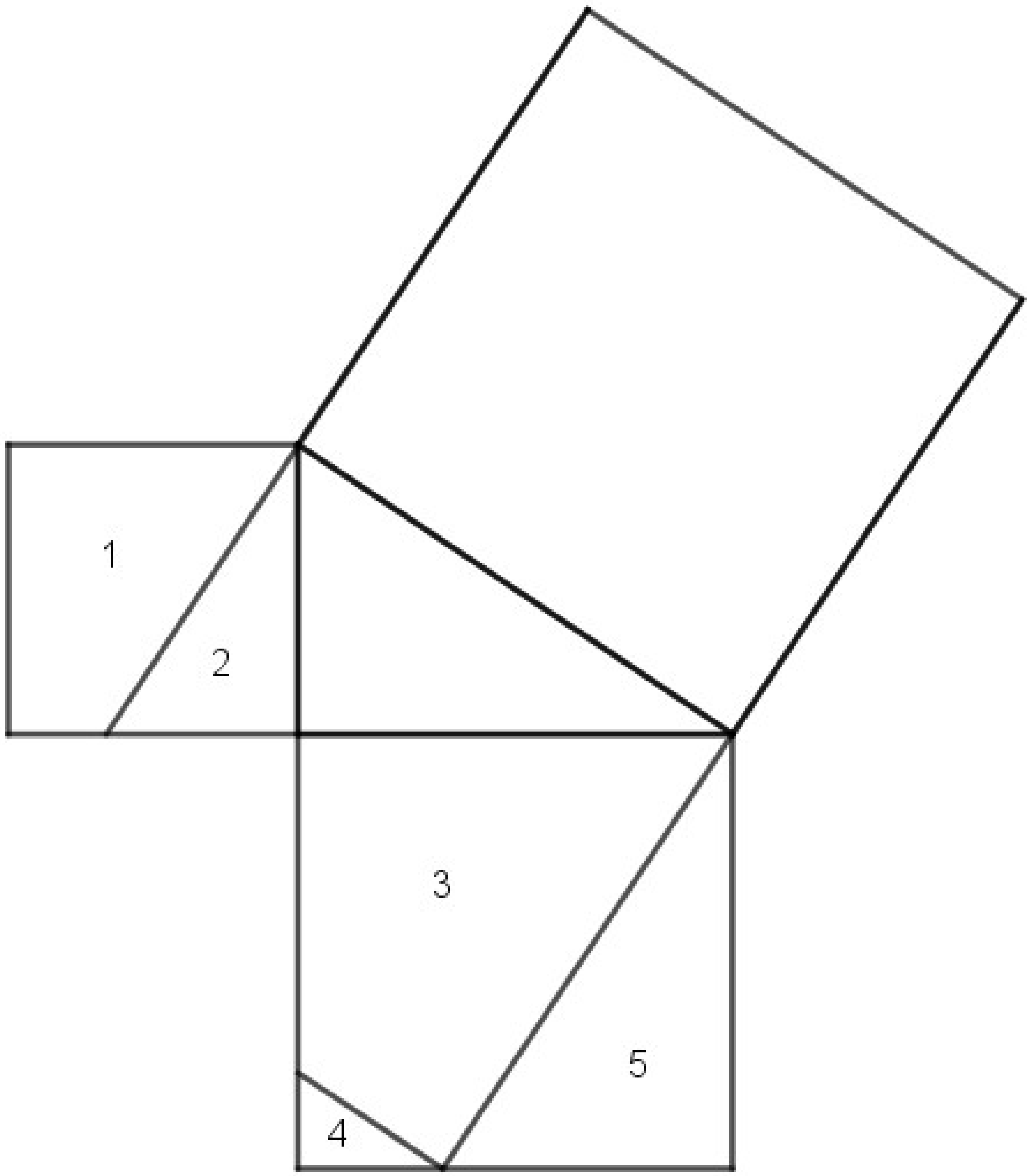
  Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=lGsjhPKv1Z8&t=9s

Figura 5.20: Quebra-cabeça 1



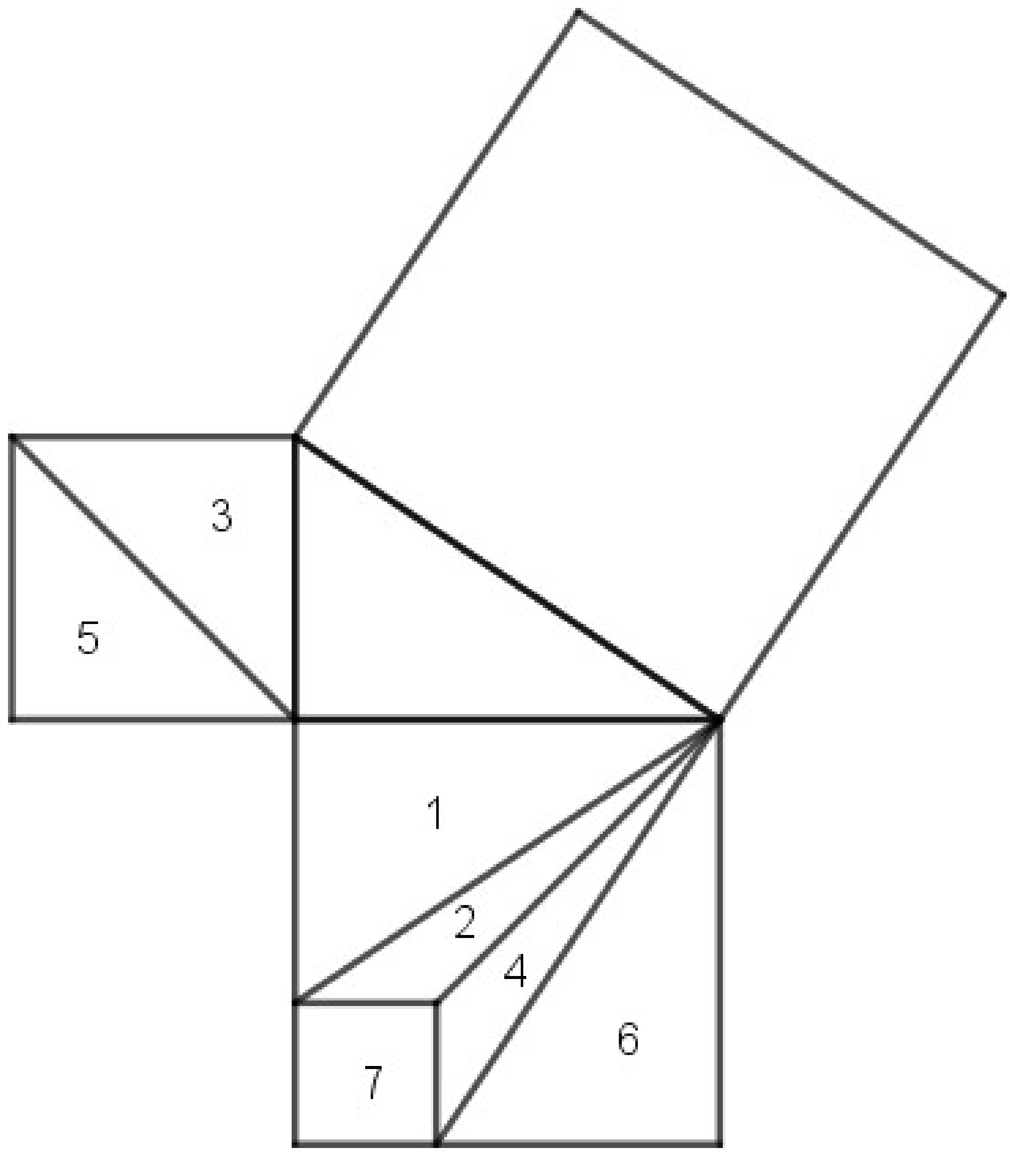
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.21: Quebra-cabeça 2



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.22: Quebra-cabeça 3



Fonte: Elaborado pela autora.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando começamos nossa pesquisa para nossa dissertação sobre o Aplicativo Pythagorea e o software Geogebra (sobre o qual trabalhamos as demonstrações dinâmicas), mostramos a outros colegas professores que não conheciam estes recursos ou, no caso do Geogebra, conheciam mas não usavam com receio de não ter condições de usar em sala de aula, de não serem capazes de trabalhar com os alunos, a receptividade foi muito boa e os mesmos relataram que esta abordagem pode surtir muito efeito para o aluno receber um incentivo a mais no momento de estudar.

Neste tempo de pandemia, de aulas remotas, tanto nós professores estamos um pouquinho mais dentro da casa dos nossos alunos como eles também estão dentro dos nossos lares. Acreditamos que o cuidado no trato do nosso aluno, no acolhimento deles, deve ser muito maior, pois vemos que isso é uma necessidade.

As fichas didáticas contidas em nossa dissertação não foram aplicadas por inteiro por nós devido à incompatibilidade de turmas disponíveis, contudo algumas partes foram aplicadas e o retorno foi rápido e muito interessante. Os questionamentos produzidos levaram à discussões muito sadias dentro da matemática e ativou praticamente em sua totalidade a curiosidade dos alunos em criar estratégias de resoluções.

Trabalhar nessa dissertação nos fez perceber o quanto podemos melhorar como profissionais, o quanto temos a aprender cada dia mais, e quando estamos abertos a esse aprendizado, todo trabalho desempenhado não é em vão.

BIBLIOGRAFIA

[1] Base Nacional Comum Curricular, Ministério da Educação, Brasil.

[2] Costa, N. M. L. DA; PRADO, M. E. B. B. A Integração das Tecnologias Digitais ao Ensino de Matemática: desafio constante no cotidiano escolar do professor. Perspectivas da Educação Matemática, v. 8, n. 16, 6 nov. 2015. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1392.

[3] Dolce, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau., Fundamentos de Matemática Elementar Vol. 9: Geometria plana, Atual, São Paulo, 1993.

[4] Dolce, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau., Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 10: Geometria espacial posição e métrica, Atual, São Paulo, 2005.

[5] Eves, Howard., Introdução à história da matemática. Unicamp, Campinas, 2004.

[6] Gerônimo, João R; Barros, Rui Marcos de Oliveira; Franco, Valdeni S., Geometria Euclidiana Plana um estudo com o software Geogebra, Eduem, Maringá, 2009.

[7] Gerônimo, João R; Franco, Valdeni S., Geometria Plana um estudo axiomatico, Eduem, Maringá, 2010.

[8] LDB : Lei de diretrizes e bases da educação nacional. – Brasília : Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2017.58 p. Conteúdo: Leis de diretrizes e bases da educação nacional – Lei no 9.394/1996 – Lei no 4.024/1961. ISBN:

978-85-7018-787-1 1. Educação, legislação, Brasil. 2. Educação e Estado, Brasil. 3. Política educacional, Brasil.

[9] Loomis, Elisha Scott, The Pythagorean Proposition, Publication of the National Council of Teachers, 2nd printing 1972.

[10] MAZUROSKI Jr., A.; AMATO, L. J. D.; JASINSKI, L.; SAITO, M. Variação nos estilos de aprendizagem: investigando as diferenças individuais na sala de aula. ReVEL. Vol. 6, n. 11, agosto de 2008. ISSN 1678-8931 [www.revel.inf.br].

[11] Muniz Neto, Antonio Caminha, Geometria, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[12] Nascimento, Van Eudes Farias do., Demonstrações do Teorema de Pitágoras /Van Eudes Farias do Nascimento. – 2018. 64 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.

[13] Pais, Luiz Carlos, Didática da Matemática, Autêntica, Belo Horizonte, 2001.

[14] PANTOJA CORRÊA, J. N.; BRANDEMBERG, J. C. TECNOLOGIAS DIGITAIS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA EM TEMPOS DE PANDEMIA: DESAFIOS E POSSIBILIDADES. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, [S. l.], v. 8, n. 22, p. 34–54, 2020. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/4176.

[15] Silva, J.E.B; Fanti, E.L.C; Pedroso, H.A. Teorema de Pitágoras: extensões e generallizações, C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, V.6, p.21-47, 2016.

[16] Souza, Angelo M. Utilizando o jogo Euclidea e Demonstrações dinâmicas no Geogebra para o ensino de construções geométricas/ Angelo Márcio de Souza. – Maringá, 2018. xiii, 94 f. : il., color. Fotos.