CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

VIVIANE BUENO BIANCATTO

LIVRO DINÂMICO - ESTUDO DE GEOMETRIA PLANA ATRAVÉS DE DEMONSTRAÇÕES DINÂMICAS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

MARINGÁ
2021

VIVIANE BUENO BIANCATTO

LIVRO DINÂMICO - ESTUDO DE GEOMETRIA PLANA ATRAVÉS DE DEMONSTRAÇÕES DINÂMICAS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves

MARINGÁ

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Biancatto, Viviane Bueno
C991L Livro dinâmico : estudo de geometria plana através de demonstrações dinâmicas com o auxílio do software Geogebra / Viviane Bueno Biancatto. -- Maringá, 2021.
ix, 123 f. : il. color.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2021.

1. Demonstrações dinâmicas. 2. Geometria plana. 3. Congruência de triângulos. 4. Semelhança de triângulos. 5. Livro dinâmico. I. Neves, Eduardo de Amorim, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 516

Edilson Damasio CRB9-1.123

VIVIANE BUENO BIANCATTO

LIVRO DINÂMICO: ESTUDO DE GEOMETRIA PLANA ATRAVÉS DE DEMONSTRAÇÕES DINÂMICAS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves
UEM - Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Prof. Dr. João Roberto Gerônimo
UEM - Universidade Estadual de Maringá (Aposentado)

Fernanda D. M. Hernandez

Profa. Dra. Fernanda Diniz de Melo Hernandez
UEM - Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 26 de agosto de 2021
Local de defesa: Videoconferência pelo link https://meet.google.com/ess-pxpy-zcs

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de elaborar um material que possa auxiliar no processo de ensino aprendizagem de geometria plana e destina-se aos professores e alunos do Ensino Superior. Para isso, decidimos transformar algumas demonstrações do livro *Geometria Plana e Espacial um estudo axiomático* [6] dos autores João Roberto Gerônimo e Valdeni Soliani Franco em demonstrações dinâmicas, através do software GeoGebra. Focamos nos capítulos 4 e 7 do livro, que envolvem os casos de congruências de triângulos, semelhanças de triângulos e o Teorema de Tales. Desta forma, transformamos e disponibilizamos parte do livro em um e-book dinâmico no site do GeoGebra.

Além disso, fizemos um tutorial de como criar tais demonstrações e atividades dinâmicas no GeoGebra. Finalizamos o trabalho apresentando algumas propostas de atividades dinâmicas para serem trabalhadas em sala de aula através de fichas didáticas.

Palavras-chave: Demonstrações Dinâmicas, Geometria plana, Congruência de Triângulos, Semelhança de Triângulos, Livro Dinâmico.

Abstract

This work aims to develop a material that can help in the teaching process of learning plane geometry and is intended for teachers and students of higher education. For that, we decided to transform some demonstrations of the book "Plane and Spatial Geometry an axiomatic study" by the authors João Roberto Gerônimo and Valdeni Soliani Franco into dynamic demonstrations, through GeoGebra software. We focus on chapters 4 and 7 of the book, which involve the cases of triangle congruences, triangle similarities, and Thales' Theorem. In this way, we transform and make available part of the book in a dynamic e-book on the GeoGebra website.

In addition, we made a tutorial on how to create such dynamic demos and activities in GeoGebra. We finished the work by presenting some proposals for dynamic activities to be worked on in the classroom through didactic sheets.

Keywords: Dynamic Proofs, Plane Geometry, Triangle congruences, Triangle similarities, Dynamic Book.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por essa conquista. Creio que, sem ele, nada disso seria possível. É de Deus que veio a força, foco e a perseverança.

Agradeço ao meu marido Renato, pessoa que eu amo e admiro muito, e que nunca me deixa desistir. Meu companheiro e amigo, sempre me incentivando a continuar estudando.

A vida do meu filho Daniel, que mesmo tão pequeno e sem saber, é um dos motivos de não ter desanimado nos momentos de tristezas.

As amizades feitas durante o curso, em especial a amizade da Marcela de Oliveira, companheira durante esse período de estudos. À Renata Burguetti, que não era da mesma turma, mas sempre estava me ajudando, dando dicas em relação às matérias, ajudando com as resoluções de exercícios, emprestando livros - o apoio dela foi fundamental durante esse período.

Aos professores do programa PROFMAT da Universidade Estadual de Maringá, por todos os ensinamentos, que foram de grande valia e utilizo muito durante as minhas aulas.

Ao professor e meu orientador Eduardo de Amorim Neves, por ter aceitado me orientar, sou grata por todas as ideias, apoio e dedicação durante a elaboração da nossa dissertação. Pessoa muito paciente, educada e se mostrou disposto a auxiliar a todo momento.

A escola Fatecie Max e coordenadora Marielle Clotilde Prats Gonsalves Ribeiro,

por terem me apoiado durante esse período de estudos.

INTRODUÇÃO

O estudo de geometria plana está presente desde o início do Ensino Básico, mas somente durante o Ensino Fundamental e Médio são trabalhadas com um certo grau de formalismo, algumas definições, propriedades, construções e demonstrações.

Todavia, nossa experiência e o vasto número de trabalhos acadêmicos, tais como Soares (2012)[14], Queiroz (2020) [11], Caldato (2017) [11] e Rosale (2018) [12], mostram que demonstrações matemáticas de modo geral são pouco vistas durante o Ensino Básico. Soares (2012) [14] cita em seu trabalho que "no Brasil, o processo de demonstrações e provas no ensino de Matemática fica restrito, quase que completamente, aos cursos superiores de Matemática".

Essa ausência de contato com a argumentação matemática, leva muitos ingressantes no Ensino Superior a terem dificuldades nas disciplinas iniciais de matemática nos cursos de exatas. No curso de licenciatura em Matemática, por exemplo, o estudo da geometria plana tem maior profundidade e as demonstrações aparecem com maior frequência, mas isso não quer dizer que ela seja facilmente compreendida, pois, como mencionamos acima, para muitos alunos e até professores, demonstrações matemáticas são algo relativamente novo. Desta forma, a utilização das demonstrações dinâmicas e exercícios interativos no processo de ensino e aprendizagem é um caminho alternativo na tentativa de ajudar na compreensão das demonstrações matemáticas.

Com objetivo de mostrarmos como podemos transformar um livro tradicional de papel em um livro dinâmico eletrônico, e assim auxiliar no processo de compreensão de definições, corolários, proposições e teoremas da geometria plana, realizamos algumas apresentações e demonstrações dinâmicas que ficarão disponíveis online para alunos e professores. Para isso, foi utilizado como base o livro *Geometria plana e espacial um estudo axiomático* [6], escrito por João Roberto Gerônimo e Valdeni Soliani Franco, e para a realização das demonstrações dinâmicas, utilizamos o software GeoGebra 5.0 [5], que é um software de matemática dinâmica gratuito, que pode ser baixado ou utilizado online.

Com o auxílio dos softwares e suas animações, podemos fazer o passo a passo das demonstrações utilizando imagens e a escrita, sem deixar "carregado" ou faltando informações. Assim o estudante pode acompanhar cada etapa da explicação, diferente de um livro impresso, que as informações são apresentadas todas ao mesmo tempo de modo estático.

Importante ressaltar que as demonstrações e enunciados do livro *Geometria Plana e Espacial um estudo axiomático* [6] que foram utilizadas para realizarmos o livro digital não foram alteradas, apenas modificamos a maneira como elas são apresentadas.

Todo o material elaborado está disponível online na página do Geogebra, abaixo temos o link e o qr-code que direcionarão o leitor ao livro digital.

`https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb`

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma:

No primeiro capítulo, fizemos uma pesquisa na Base Nacional Comum Curricular (BNCC [3]), para sabermos em quais turmas do Ensino Fundamental devemos trabalhar os conteúdos relacionados a geometria plana e quais são as habilidades relacionadas a esses conteúdos. Além disso, apresentamos os conceitos, notações e resultados de geometria plana que foram utilizadas na elaboração do livro digital. Os tópicos abordados foram retirados fielmente dos capítulos 4 e 7 do livro *Geometria Plana e Espacial um estudo axiomático* (Gerônimo [6]), os conteúdos envolvidos são os casos de congruência de triângulos, semelhanças de triângulos e Teorema de Tales. Assim as demonstrações não foram colocadas no texto, refizemos todas elas de modo dinâmico e interativo no livro digital. Para facilitar a leitura adicionamos os qr-codes e links após cada enunciado, que direcionarão o leitor as nossas demonstrações dinâmicas que estão no e-book.

O segundo capítulo está dividido em duas seções, na primeira seção apresentamos detalhadamente um exemplo de demonstração dinâmica utilizando uma demonstração que está disponível no livro digital e na segunda seção desse capítulo fornecemos um tutorial detalhado de como realizar uma demonstração dinâmica no software Geogebra.

O terceiro capítulo está dividido em três seções, cada seção possui uma ficha didática como proposta de ensino. As fichas foram elaboradas para serem aplicadas para turmas de oitavos anos e o objetivo principal foi de elaborar atividades dinâmicas que envolvam os conteúdos que foram adicionados no livro digital. As fichas e as atividades também estão disponíveis no livro digital.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Na primeira seção deste capítulo destacamos as habilidades relacionadas a geometria plana que devem ser trabalhadas segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [3] no Ensino Fundamental. Nas outras duas seções temos os teoremas, definições, proposições corolários e axiomas que foram utilizados durante nosso trabalho.

Todos os enunciados da segunda e terceira seção foram retirados dos capítulos 4 e 7 do livro *Geometria Plana e Espacial um estudo axiomático* [6]. As demonstrações não foram adicionadas, mas colocamos os qr-codes e links que direcionarão o leitor às demonstrações dinâmicas que estão no livro digital. Para o leitor familiarizado com o conteúdo, levar em conta apenas o livro digital.

1.1 Base Nacional Comum Curricular/ BNCC

A geometria plana é um ramo da matemática que estuda as figuras planas, como ponto, retas, polígonos, ângulos, etc. Esses conceitos são vistos já nos primeiros anos do Ensino Fundamental e aprofundados de um ano para outro.

De acordo com a BNCC (2018) [3], estudar geometria nos ajuda a resolver problemas do nosso dia a dia, em diferentes áreas do conhecimento. Segundo ela, os conceitos de congruências e semelhanças deverão ser desenvolvidos no Ensino Fundamental – Anos Finais. É nessa fase que os conceitos trabalhados em anos anteriores são aprimorados.

> Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo (BRASIL, 2018, p. 272)

A seguir citaremos algumas habilidades relacionadas a geometria plana que devem ser trabalhadas no Ensino Fundamental nas séries iniciais e séries finais de acordo com a BNCC (2018) [3].

Focamos nas habilidades relacionadas aos conteúdos que foram utilizados em nosso trabalho, como congruência e semelhança de triângulos e também nas habilidades relacionadas a utilização de softwares de geometria.

Colocamos as habilidades do Ensino Fundamental/Anos inciais, para podermos perceber que estes conceitos devem ser trabalhados logo no início do Ensino Básico:

Ensino Fundamental/Séries Iniciais

2º ano		
Unidades Temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Geometria	Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características	(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos.

3º ano		
Unidades Temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Geometria	Figuras geométricas planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo): reconhecimento e análise de características	(EF03MA15) Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices.
Geometria	Congruência de figuras geométricas planas	(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.

4º ano		
Unidades Temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Geometria	Ângulos retos e não retos: uso de dobraduras, esquadros e softwares	(EF04MA18) Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria.
Geometria	Simetria de reflexão	(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria.

5º ano		
Unidades Temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Geometria	Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos	(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.
Geometria	Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes	(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.

Ensino Fundamental/Séries Finais

6º ano		
Unidades Temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Geometria	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados	(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
Geometria	Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas	(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
Geometria	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares	(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou *softwares* para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.

8º ano		
Unidades Temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Geometria	Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
Geometria	Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
Geometria	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas	(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
Geometria	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

9º ano		
Unidades Temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Geometria	Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
Geometria	Semelhança de triângulos	(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
Geometria	Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

1.2 Congruências de triângulos

Agora vamos fixar notações e apresentar os teoremas, corolários, proposições, axiomas e definições que foram transformados de modo dinâmico e que se encontra no nosso livro digital.

Antes de iniciarmos o estudo de congruências de triângulo, vamos reforçar que após o enunciado, colocamos qr-codes e os links que direcionarão o leitor as nossas apresentações e demonstrações dinâmicas. Os índices que estão na dissertação, não são os mesmos do livro digital, no livro digital colocamos o índice igual ao do livro *Geometria Plana e espacial um estudo axiomático* [6].

Na matemática, utilizamos a palavra congruentes no estudo de geometria plana para nos referirmos a ângulos e segmentos que possuem a mesma medida e para duas figuras que possuem a mesma forma e tamanho.

Na Definição 1.1, temos detalhadamente as condições para que dois triângulos sejam congruentes.

Definição 1.1 *: Dois triângulos ABC e DEF são ditos congruentes se existir uma função bijetora $f : \{A, B, C\} \longrightarrow \{D, E, F\}$, que leva os vértices de um nos vértices do outro, de tal modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes, ou seja,*

$$m(\hat{A}) = m(f(\hat{A})),\ m(\hat{B}) = m(f(\hat{B})) \text{ e } m(\hat{C}) = m(f(\hat{C})).$$

$$\overline{AB} = \overline{f(A)f(B)},\quad \overline{AC} = \overline{f(A)f(C)} \text{ e } \overline{BC} = \overline{f(B)f(C)}.$$

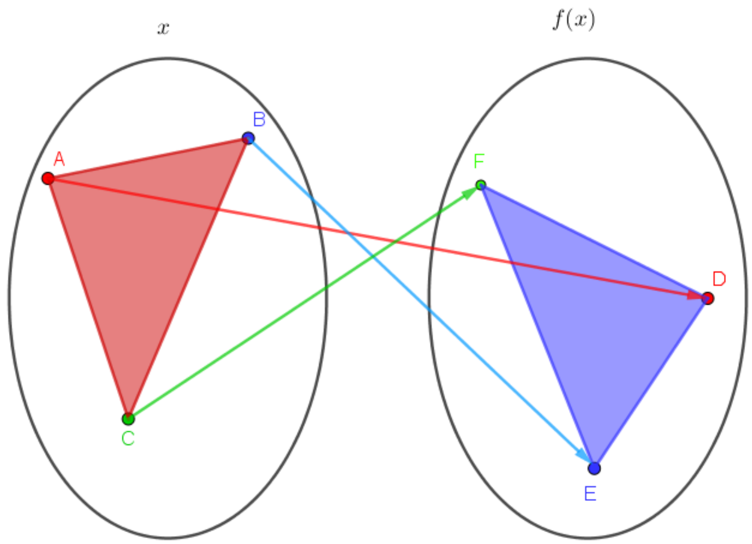
https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/q5mj5wut

Escreveremos $ABC \equiv DEF$ para dizer que os triângulos ABC e DEF são congruentes. Dessa forma, nota-se que para que dois triângulos sejam congruentes, é necessário que exista uma função que leve os vértices de um nos vértices do outro e que as medidas dos lados e dos ângulos correspondentes sejam iguais.

Um exemplo citado no livro [6] impresso é o seguinte: suponhamos que ABC seja congruente a DEF, então existe uma função bijetora $f : \{A, B, C\} \longrightarrow \{D, E, F\}$ que mantém inalteradas as medidas dos ângulos e lados correspondentes.

Para fixar a ideia, suponhamos $f(A) = D$, $f(B) = E$ e $f(C) = F$, representada geometricamente na Figura 1.1.

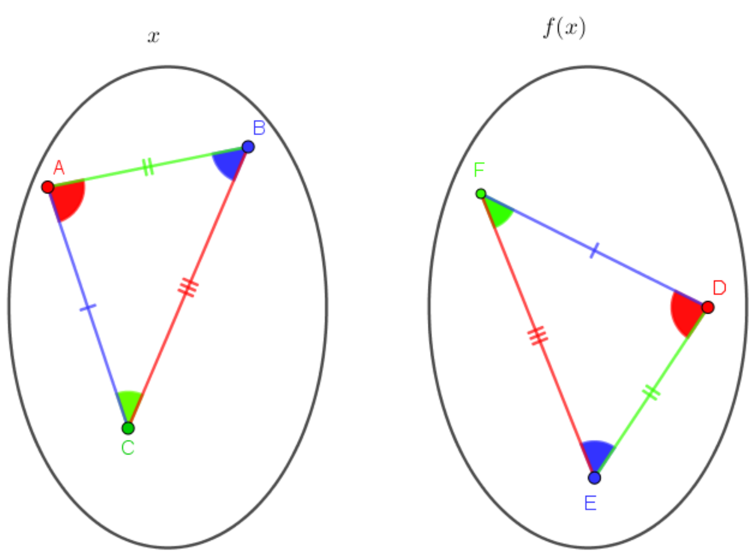
Figura 1.1: Função Bijetora.



Fonte: Elaborada pela autora.

Então devemos ter: $\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$, $\hat{C} \equiv \hat{F}$, $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ e $\overline{BC} = \overline{EF}$, ou seja, os lados e ângulos correspondentes são congruentes, representados na Figura 1.2.

Figura 1.2: Lados e ângulos correspondentes congruentes.



Fonte: Elaborada pela autora.

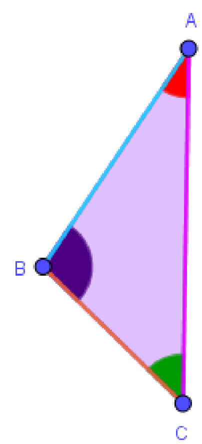
Proposição 1.2 *: A congruência entre triângulos é uma relação de equivalência no conjunto dos triângulos.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/q5mj5wut

Lembrando que para provarmos que é uma relação de equivalência, devemos provar que valem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Portanto, se vale a relação de equivalência, vale a propriedade reflexiva, então podemos afirmar que um triângulo qualquer é congruente a ele mesmo, ou seja, $ABC \equiv ABC$, representado na Figura 1.3.

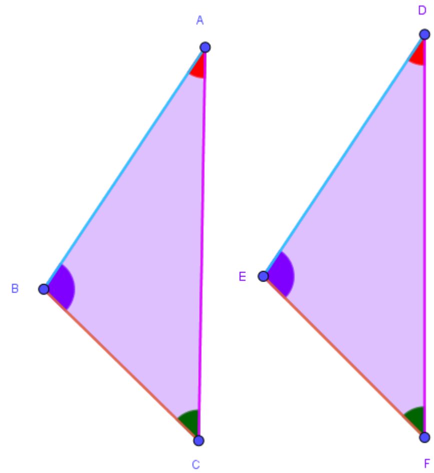
Figura 1.3: Reflexiva.



Fonte: Elaborada pela autora.

A propriedade simétrica, representada na Figura 1.4, nos garante que se tivermos um triângulo ABC congruente a um triângulo DEF, então o triângulo DEF é congruente ao triângulo ABC.

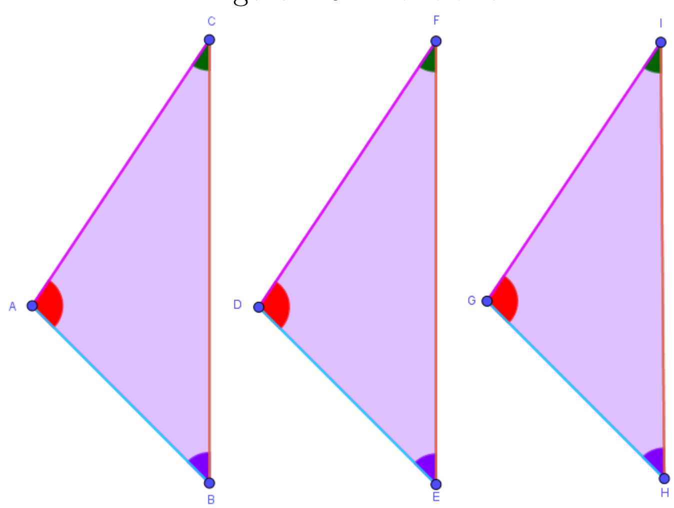
Figura 1.4: Simétrica.



Fonte: Elaborada pela autora.

Por último, temos a propriedade da transitividade, representada na Figura 1.5, que expressa que se um triângulo ABC for congruente a um triângulo DEF e o triângulo DEF for congruente a um triângulo GHI, então ABC é congruente a GHI.

Figura 1.5: Transitiva.



Fonte: Elaborada pela autora.

O Axioma 1.3, enunciado a seguir, será utilizado nas próximas demonstrações.

Axioma 1.3 *: Dados dois triângulos ABC e DEF, se $AB \equiv DE$, $AC \equiv DF$ e*

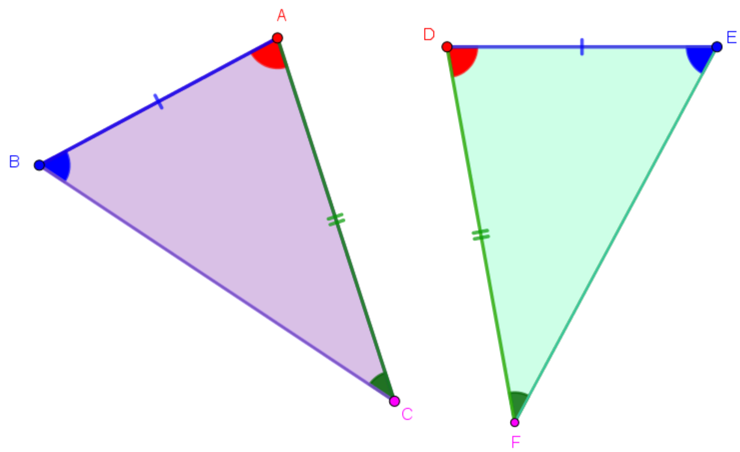
$\hat{A} \equiv \hat{D}$, *então* $\hat{B} \equiv \hat{E}$. *Por troca de símbolos podemos afirmar que* $\hat{B} \equiv \hat{E}$ *e* $\hat{C} \equiv \hat{F}$.

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/q5mj5wut

Dessa forma, se dois triângulos tiverem dois lados correspondentes com o mesmo comprimento e o ângulo formado por esses dois lados tiverem a mesma medida, os outros dois ângulos correspondentes também terão medidas iguais.

Como ilustrado na Figura 1.6 os triângulos ABC e DEF, onde $AB \equiv DE$, $AC \equiv DF$ e $\hat{A} \equiv \hat{D}$, pelo Axioma 1.3 podemos afirmar que $\hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\hat{C} \equiv \hat{F}$.

Figura 1.6: Representação do Axioma 1.3



Fonte: Elaborada pela autora.

Conseguimos verificar se dois triângulos são congruentes através dos casos de congruências. As congruências de triângulos são separadas em 4 casos, que são eles: Lado, Ângulo, Lado (LAL), Ângulo, Lado, Ângulo (ALA), Lado, Lado, Lado (LLL) e Lado, Ângulo e Ângulo Oposto (LAA_o).

Na sequência, apresentaremos detalhadamente cada caso de congruência de triângulos e algumas definições, corolários, teoremas que utilizamos para a realização do livro digital.

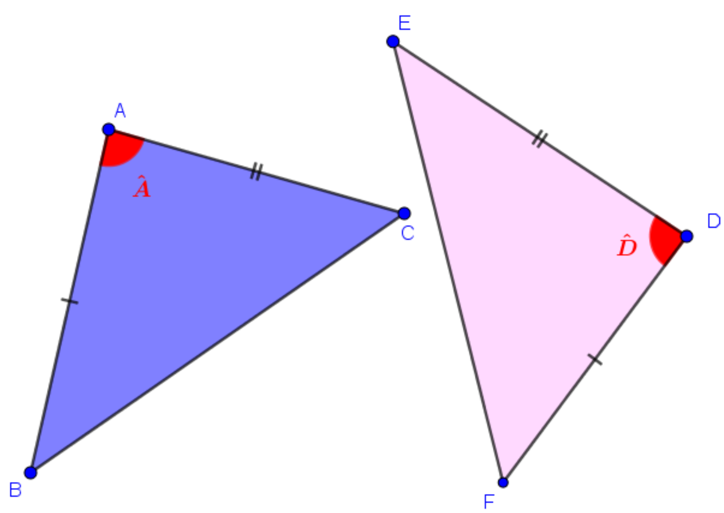
Teorema 1.4 ***(Caso LAL):*** *Dados dois triângulos* ABC *e* DEF, *se* $AB \equiv DE$, $AC \equiv DF$ *e* $\hat{A} \equiv \hat{D}$, *então* $ABC \equiv DEF$.

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/x3h8kzub

Esse teorema nos garante que se tivermos dois triângulos que tem dois lados correspondentes com os mesmos comprimentos e o ângulo compreendido por esses lados tiverem a mesma medida, podemos garantir que esses triângulos são congruentes.

Para melhor entendimento desse teorema temos, na Figura 1.7, dois triângulos, o triângulo ABC e o triângulo DEF. Temos ainda que $\overline{AC} = \overline{DE}$, $\overline{AB} = \overline{DF}$ e os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ formado por esses lados tem medidas iguais. Então, pelo Teorema 1.4, podemos garantir que $ABC \equiv DEF$.

Figura 1.7: Caso LAL.



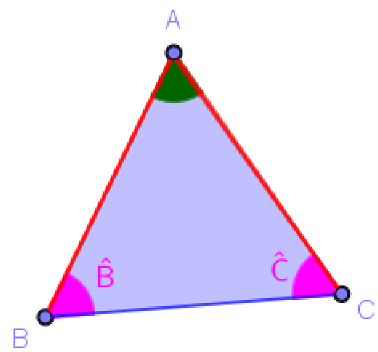
Fonte: Elaborada pela autora.

Corolário 1.5 *: Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/x3h8kzub

Dessa forma, se considerarmos um triângulo isósceles ABC, como na Figura 1.8, com base BC, podemos afirmar que os dois adjacentes a base desse triângulo terão as mesmas medidas, ou seja, $\hat{B} \equiv \hat{C}$.

Figura 1.8: Triângulo isósceles.

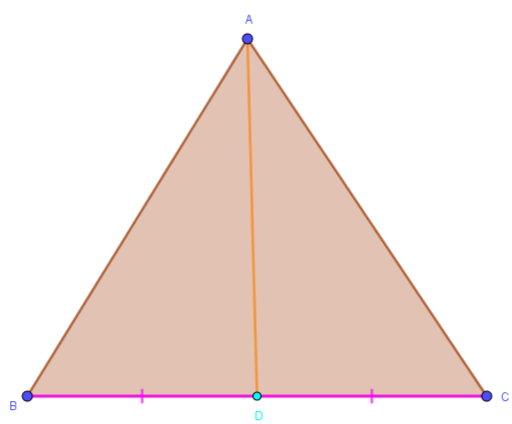


Fonte: Elaborada pela autora.

Definição 1.6 *: Seja ABC um triângulo qualquer e D um ponto na reta BC. O segmento AD, denomina-se:*

- *mediana do triângulo relativo ao lado BC se D é ponto médio de BC.*

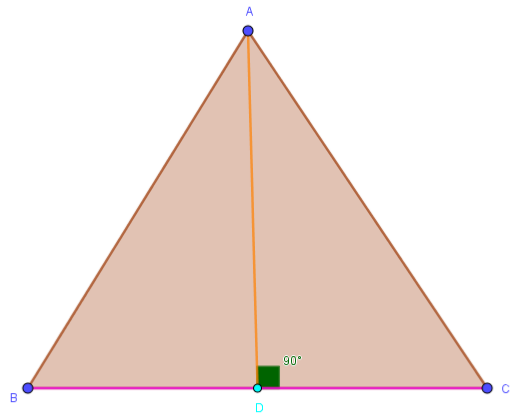
Figura 1.9: Mediana AD.



Fonte: Elaborada pela autora.

- *altura do triângulo relativo ao lado BC, se a reta AD é perpendicular à reta BC.*

Figura 1.10: Altura AD.

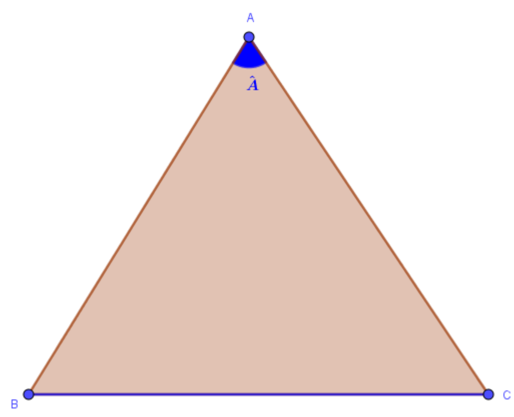


Fonte: Elaborada pela autora.

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/x3h8kzub

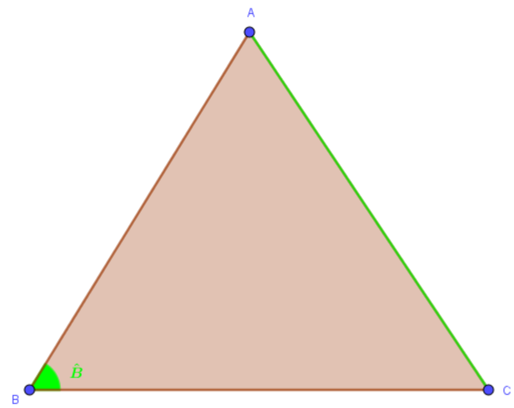
Os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são denominados opostos aos lados BC, AC e AB, respectivamente, como mostram as Figuras 1.11, 1.12 e 1.13.

Figura 1.11: Ângulo $\hat{A}$ oposto ao lado BC.



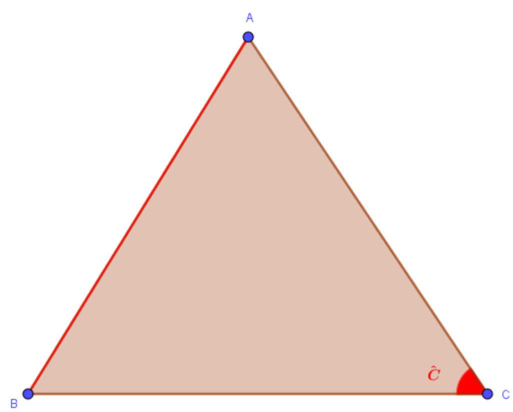
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 1.12: Ângulo $\hat{B}$ oposto ao lado AC.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 1.13: Ângulo $\hat{C}$ oposto ao lado AB.



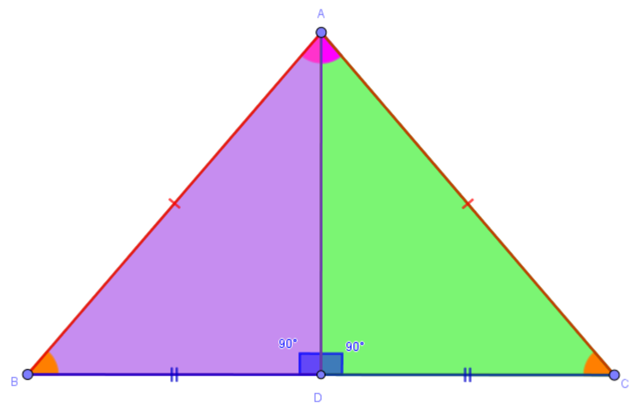
Fonte: Elaborada pela autora.

Teorema 1.7 *: Em um triângulo isósceles, a mediana relativa a uma base é também a altura relativa à base e está sobre a bissetriz do ângulo oposto a essa base.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/x3h8kzub

Com esse teorema, podemos garantir que se tivermos um triângulo isósceles ABC, de base BC, como na Figura 1.14, e considerarmos D o ponto médio do lado BC, então o segmento AD é mediana (por definição), AD também é altura do triângulo e bissetriz do ângulo $\hat{A}$, ou seja, AD será perpendicular ao lado BC e ainda divide o ângulo $\hat{A}$ ao meio.

Figura 1.14: Triângulo isósceles com mediana AD.



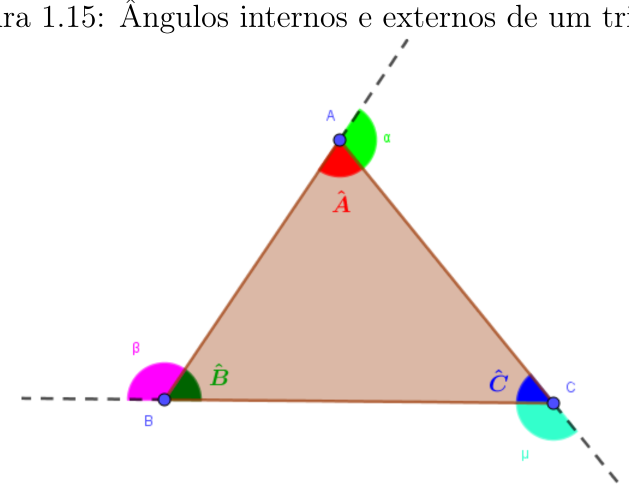
Fonte: Elaborada pela autora.

Definição 1.8 *: Em um triângulo ABC, os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são chamados ângulos internos do triângulo. Os suplementos desses ângulos são chamados de ângulos externos do triângulo .*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/x3h8kzub

Na Figura 1.15, temos a representação dos ângulos internos e externos do triângulo ABC. Os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos internos e os ângulos β, α e μ são ângulos externos.

Figura 1.15: Ângulos internos e externos de um triângulo.



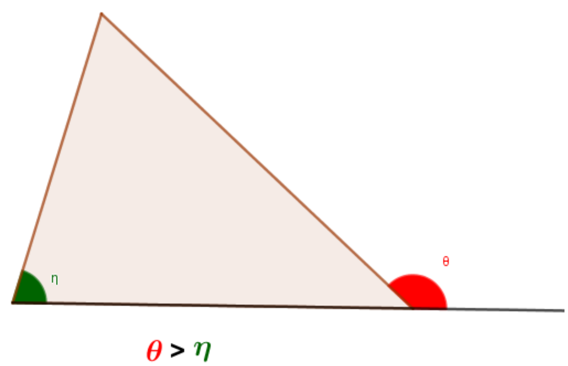
Fonte: Elaborada pela autora.

Teorema 1.9 ***(do Ângulo Externro):*** *Todo ângulo externo de um triângulo mede mais que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/x3h8kzub

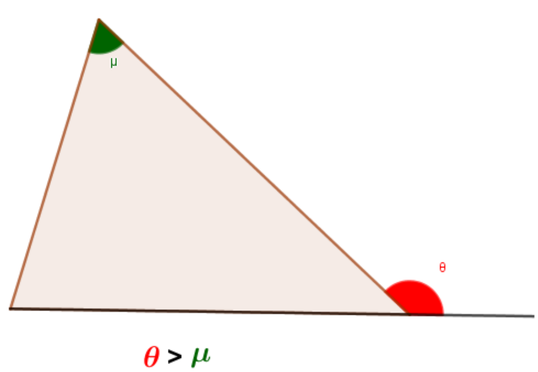
Nas Figuras 1.16 e 1.17 temos a representação do mesmo triângulo. Esse triângulo possui ângulo externo θ e ângulos internos η e μ que não são adjacentes a θ. O Teorema do Ângulo Externo nos garante que θ é maior do que η e μ.

Figura 1.16: Ângulo interno η e externo θ.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 1.17: Ângulo interno μ e externo θ.



Fonte: Elaborada pela autora.

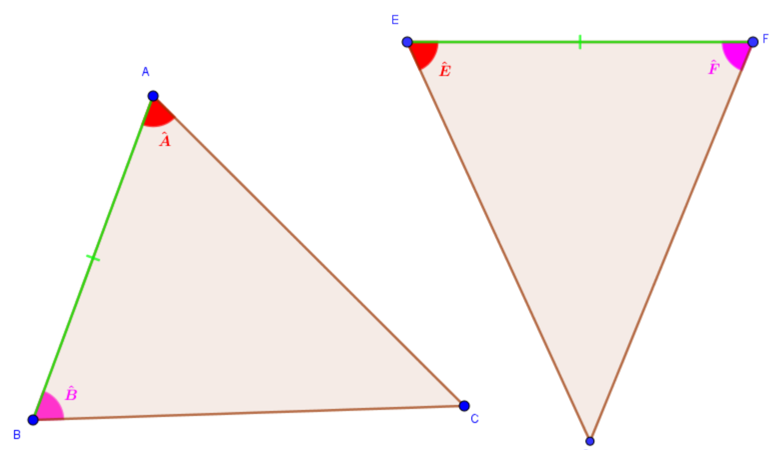
Teorema 1.10 ***(Caso ALA):*** *Dados dois triângulos ABC e EFG, se $AB \equiv EF$, $\hat{A} \equiv \hat{E}$ e $\hat{B} \equiv \hat{F}$, então $ABC \equiv EFG$.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/ce83qpun

Esse caso de congruência nos garante que se tivermos dois triângulos com dois ângulos com medidas iguais e o lado compreendido por esses ângulos também tiverem a mesma medida, esses triângulos serão congruentes.

Para ilustrar esse caso, temos a Figura 1.18 com os triângulos ABC e EFG. Se considerarmos o ângulo $\hat{A}$ congruente a $\hat{E}$ e o ângulo $\hat{B}$ congruente a $\hat{F}$ e os segmentos AB e EF possuem a mesma medida. Então pelo Teorema 1.10, podemos afirmar que os triângulos ABC e EFG são congruentes.

Figura 1.18: ALA.



Fonte: Elaborada pela autora.

Corolário 1.11 ***:*** *Em um triângulo ABC, se os ângulos relativos a um dos lados são congruentes, então o triângulo é isósceles.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/ce83qpun

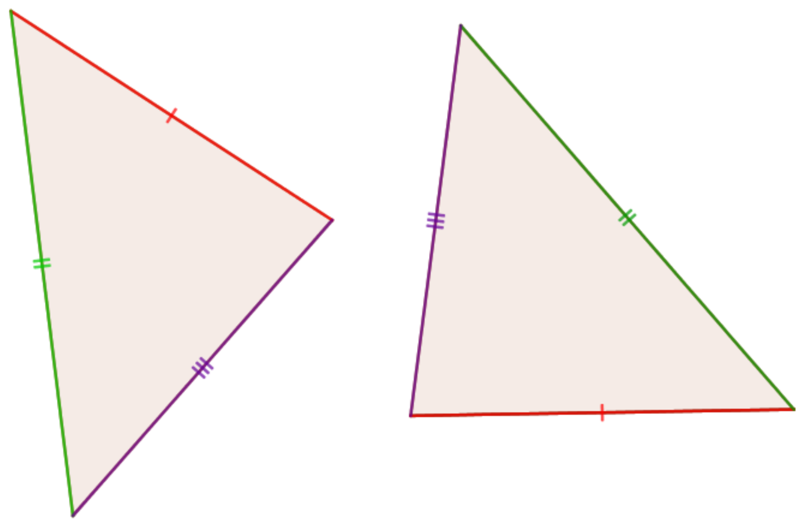
Esse corolário é recíproco do Corolário 1.5, ou seja, se tivermos um triângulo que possui dois ângulos internos com medidas iguais, podemos afirmar que esse triângulo é isósceles, ou seja, terá dois lados com medidas iguais.

Teorema 1.12 ***(Caso LLL):*** *Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes, então os triângulos são congruentes.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/zvavykqp

Na Figura 1.19 temos dois triângulos com lados correspondentes congruentes, então, pelo Teorema 1.12, podemos afirmar que os dois triângulos são congruentes.

Figura 1.19: LLL.



Fonte: Elaborada pela autora.

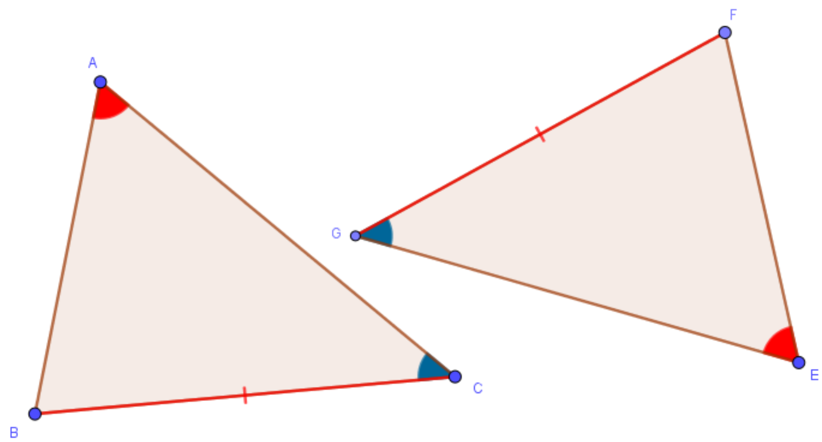
Teorema 1.13 ***(Caso*** LAA_O***):*** *Dados dois triângulos ABC e EFG, se $BC \equiv FG$, $\hat{A} \equiv \hat{E}$ e $\hat{C} \equiv \hat{G}$, então $ABC \equiv EFG$.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/ddymvrpw

Esse caso de congruência nos afirma o seguinte, se tivermos dois triângulos que possuem um lado, um ângulo e o ângulo oposto a esse lado congruente, então esses triângulos serão congruentes.

Como exemplo, temos os triângulos ABC e EFG na Figura 1.20. Os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{G}$ são congruentes, os lados BC e GF têm medidas iguais e os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{E}$, que são opostos aos lados BC e GF respectivamente, também são congruentes. Então teremos que $ABC \equiv AFG$.

Figura 1.20: LAA_o.



Fonte: Elaborada pela autora.

Teorema 1.14 *: A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor que 180°.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/tjaetdsg

Corolário 1.15 *: Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos. Consequentemente, todo triângulo tem pelo menos dois ângulos externos obtusos.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/tjaetdsg

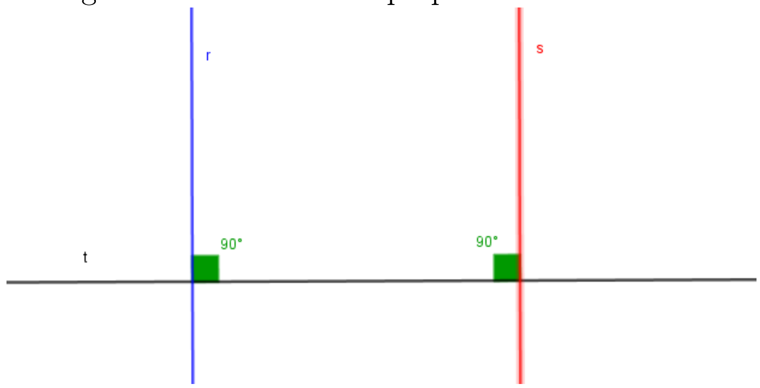
Esse corolário nos garante que em todo triângulo, teremos pelo menos dois ângulos internos com medidas menores do que 90° e como os ângulos internos e externos são suplementares, logo teremos pelo menos dois ângulos externos maiores que 90°.

Corolário 1.16 *]: Se duas retas distintas r e s são perpendiculares a uma terceira, então r e s não se interceptam.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/tjaetdsg

Para representar o Corolário 1.16, temos a Figura 1.21, com as retas r e s perpendiculares a reta t. Podemos observar que as retas r e s não são concorrentes.

Figura 1.21: Retas r e s perpendiculares a reta t.



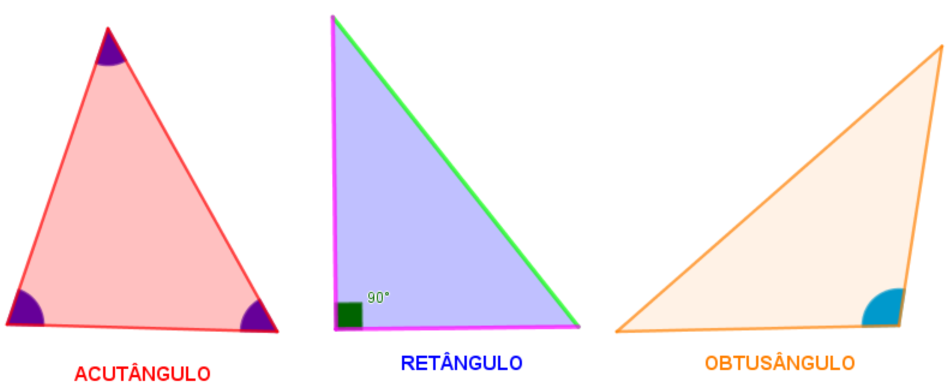
Fonte: Elaborada pela autora.

Definição 1.17 *: Diremos que um triângulo é* ***acutângulo*** *se ele possui os três ângulos agudos. Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado* ***retângulo****, nesse caso, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os outros dois lados de catetos. Se o triângulo possuir um ângulo obtuso, ele recebe o nome de* ***obtusângulo****.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/tjaetdsg

Na Figura 1.22 temos a representação desses triângulos.

Figura 1.22: Classificação dos triângulos de acordo com a medida de seus ângulos.



Fonte: Elaborada pela autora.

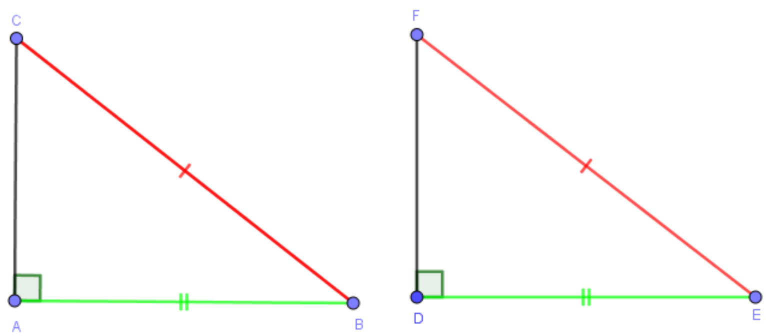
Vamos apresentar agora um caso de congruência especial, esse caso é aplicado apenas em triângulos retângulos.

Teorema 1.18 ***Caso*** *$LLA_{\square}$*: *Se dois triângulos retângulos possuem hipotenusas congruentes e um dos catetos congruentes, então os triângulos são congruentes.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/tjaetdsg

Na Figura 1.23 temos os triângulos retângulos ABC e DEF, com hipotenusas $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e catetos $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$. Então, temos pelo Teorema 1.18 que $ABC \equiv DEF$.

Figura 1.23: Caso $LLA_{\square}$.



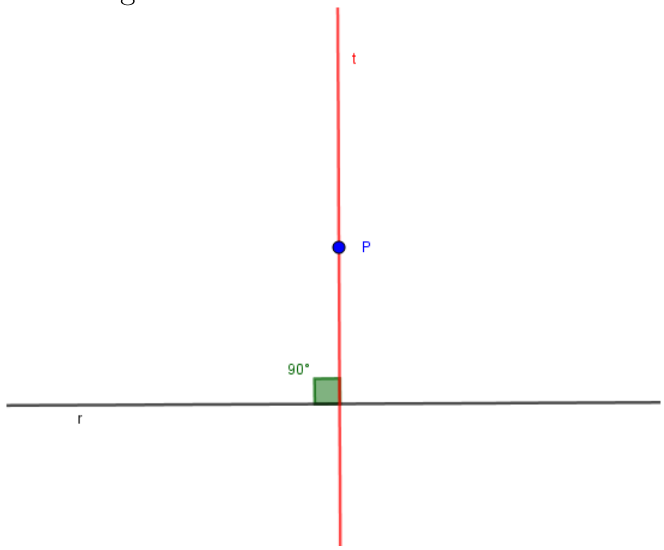
Fonte: Elaborada pela autora.

Teorema 1.19 **:** *Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta perpendicular à reta dada.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/buefbrpn

Para representarmos o Teorema 1.19, temos a Figura 1.24, onde o ponto P não pertence a reta r, e a reta t representa a única reta perpendicular a r e que passa pelo ponto P.

Figura 1.24: Ponto P fora da reta r.



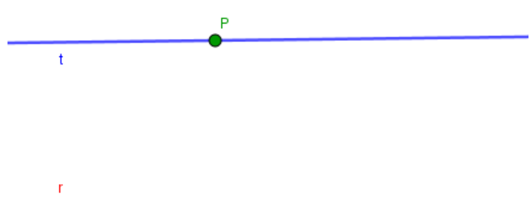
Fonte: Elaborada pela autora.

Corolário 1.20 *: Por um ponto fora de uma reta passa uma reta paralela à reta dada.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/buefbrpn

Na Figura 1.25, temos a reta r e um ponto P fora dela. A reta t representa a única reta paralela a r e que passa pelo ponto P.

Figura 1.25: Reta t passa pelo ponto P e é paralela a reta r.

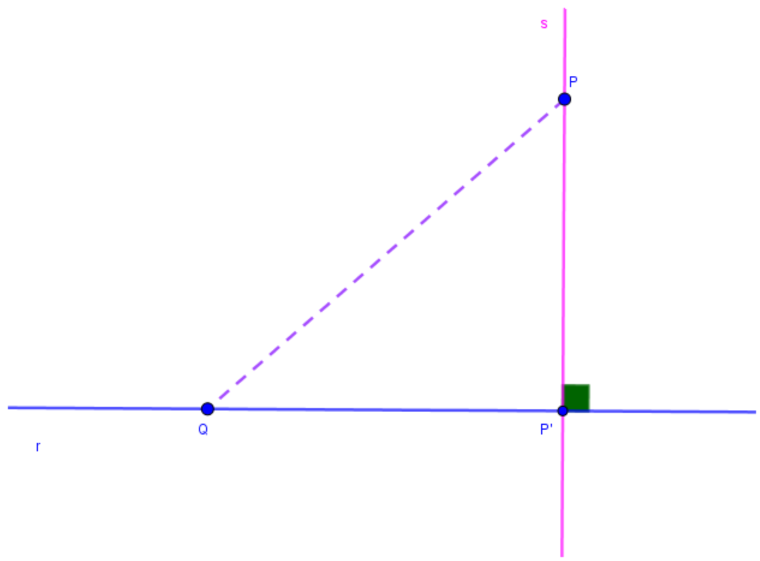


Fonte: Elaborada pela autora.

Definição 1.21 *: Dada uma reta r e um ponto P fora dela, traçamos a única reta s perpendicular a r passando por P. A interseção $r \cap s = P'$ é chamada* ***pé da perpendicular****. Se Q é um ponto qualquer de r distinto de P', o segmento PQ é* *dito **oblíquo**, relativo a r. Na Figura 1.26, o segmento QP' é chamado de **projeção do segmento** QP **sobre a reta** r. O comprimento do segmento PP' é definido como a **distância do ponto** P **a reta** r.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/mqaj4t56

Figura 1.26: Definição 1.21.



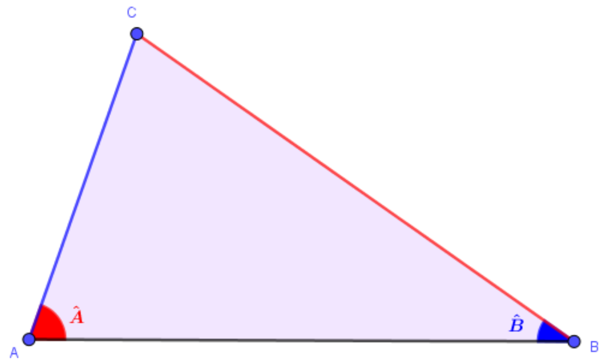
Fonte: Elaborada pela autora.

Proposição 1.22 *: Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então seus ângulos opostos não são congruentes e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/mqaj4t56

Na Figura 1.27 temos o triângulo ABC com lado $BC > AC$. A Proposição 1.22 nos afirma que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ não são congruentes e ainda $\hat{A}$ é maior do que $\hat{B}$, pois $\hat{A}$ é o ângulo oposto ao maior lado.

Figura 1.27: Proposição 4.21.



Fonte: Elaborada pela autora.

Proposição 1.23 *: Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados que se opõem a esses ângulos têm medidas distintas e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.*

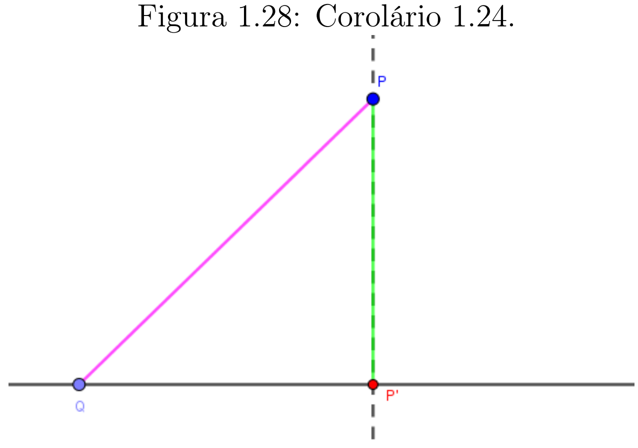
https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/mqaj4t56

Essa Proposição é a recíproca da Proposição 1.22.

Corolário 1.24 *: Se P' é o pé da perpendicular, traçada a partir de P, como visto no Teorema 1.19, então qualquer segmento oblíquo PQ tem comprimento maior que o comprimento de PP'. Veja a representação desse Corolário na Figura 1.28.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/mqaj4t56

Figura 1.28: Corolário 1.24.



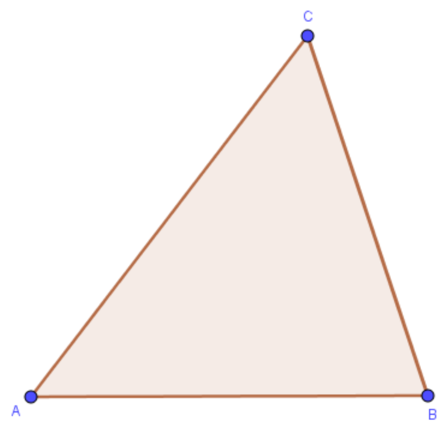
Fonte: Elaborada pela autora.

Teorema 1.25 : *Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior que o comprimento do terceiro lado.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/mqaj4t56

De acordo com o Teorema 1.25, se considerarmos o triângulo ABC representado na Figura 1.29, podemos afirmar que $\overline{AB}+\overline{AC} > \overline{BC}$, $\overline{CA}+\overline{CB} > \overline{AB}$ e $\overline{BC}+\overline{BA} > \overline{AC}$.

Figura 1.29: Teorema 1.25.



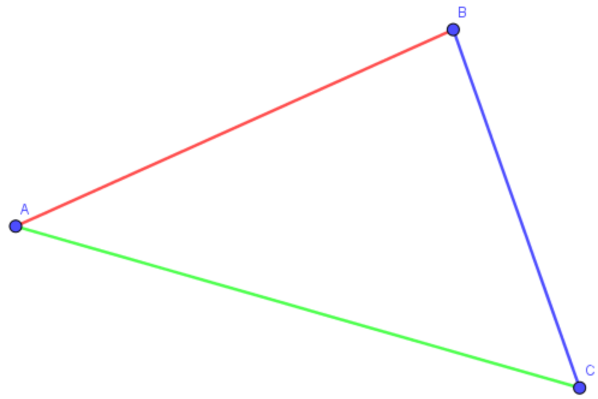
Fonte: Elaborada pela autora.

Teorema 1.26 ***(Desigualdade Triangular):*** *Dados três pontos quaisquer A, B e C no plano, temos que $AC \leqslant AB + BC$. A igualdade ocorre se, e somente se, B está no segmento AC.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/mqaj4t56

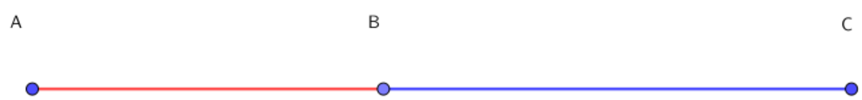
Nas Figuras 1.30 e 1.31, temos a representação do Teorema 1.26.

Figura 1.30: $AC < AB + BC$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 1.31: $AC = AB + BC$.



Fonte: Elaborada pela autora.

1.3 Semelhança de triângulos e o Teorema de Tales

Agora será apresentado a definição de semelhança de triângulos e o que é necessário para que dois triângulos sejam semelhantes, ou seja, estudaremos os casos de semelhanças, assim como feito para os casos de congruência. Também nessa seção, veremos o Teorema de Tales e algumas definições e proposições necessárias nesse estudo.

Todos os teoremas, proposições e definições dessa seção foram retirados do capítulo 7 do livro *Geometria Plana e Espacial um estudo axiomático* [6].

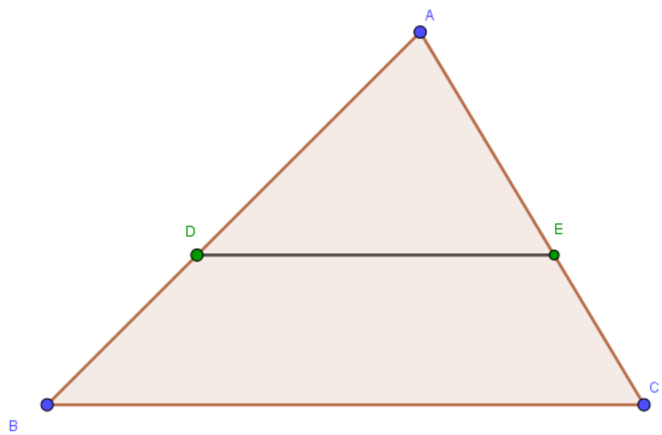
Teorema 1.27 : *Se uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a esses lados.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/v6s2gzmm

Re-enunciado: No triângulo ABC da Figura 1.32, sejam D e E pontos de AB e AC, respectivamente, tais que DE é paralelo a BC. Então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}.$$

Figura 1.32: Teorema 7.2.



Fonte: Elaborada pela autora.

Teorema 1.28 *: Se uma reta intercepta dois lados de um triângulo e determina segmentos proporcionais a esses dois lados, então ela é paralela ao terceiro lado.*

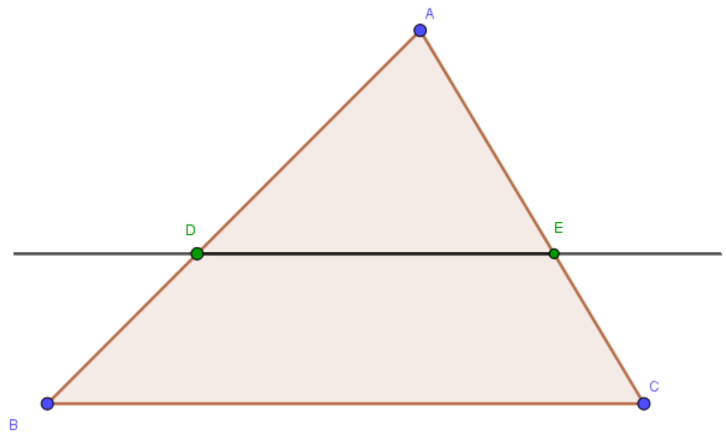
https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/v6s2gzmm

Re-enunciado: Sejam ABC um triângulo dado, como na Figura 1.33, D um ponto entre A e B, e E um ponto entre A e C.

Se $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$, então DE é paralelo a BC.

Esse teorema é recíproco ao Teorema 1.27.

Figura 1.33: Teorema 1.26.



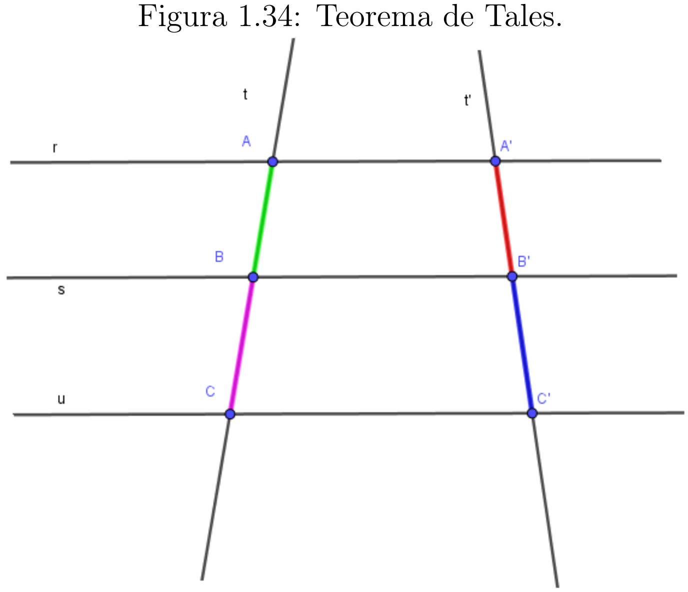
Fonte: Elaborada pela autora.

Teorema 1.29 ***(de Tales):*** *Se três ou mais paralelas são cortadas por duas transversais, os segmentos determinados nas duas transversais são proporcionais.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/wvcdw42y

Re-enunciado: Na Figura 1.34, se as transversais t e t' interceptam as paralelas r, s e u em A, B, C e A', B' e C', respectivamente, então $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

Figura 1.34: Teorema de Tales.



Fonte: Elaborada pela autora.

Teorema 1.30 ***(da Bissetriz Interna):*** *Em um triângulo qualquer, a bissetriz de um ângulo interno intercepta o lado oposto em um ponto tal que as medidas dos segmentos obtidos e as medidas dos lados adjacentes ao ângulo formam sequências proporcionais.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/wvcdw42y

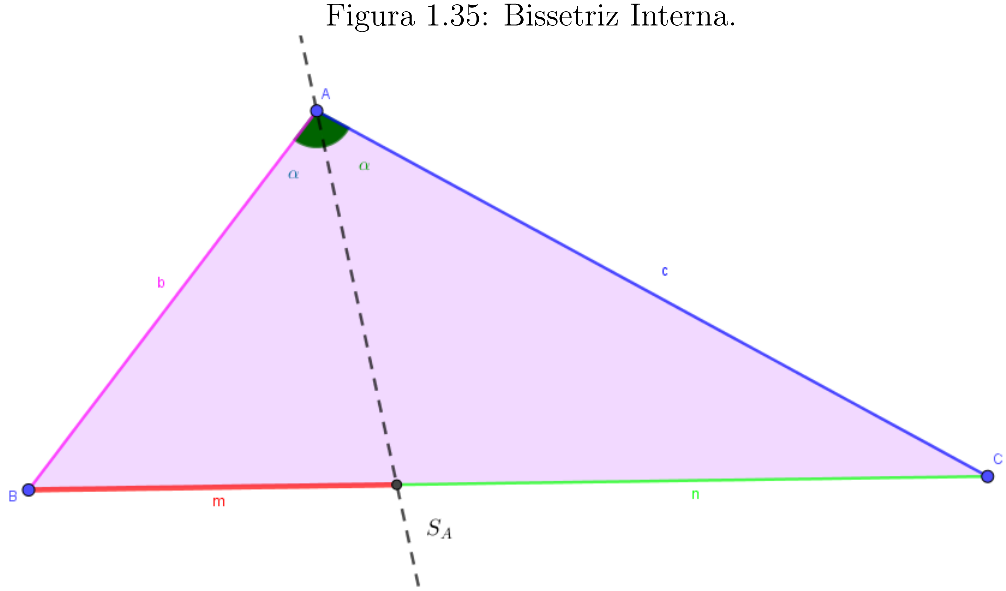
Re-enunciado: Na Figura 1.35, se ABC é um triângulo e S_A é a bissetriz do ângulo $\hat{A}$, então:

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{c}.$$

Figura 1.35: Bissetriz Interna.



Fonte: Elaborada pela autora.

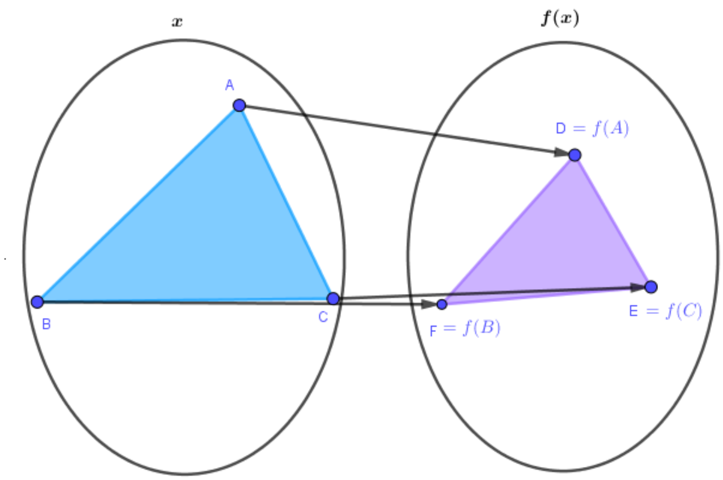
Definição 1.31 ***:*** *Dois triângulos ABC e DEF são ditos semelhantes se existir uma função bijetora $f : A, B, C \longrightarrow D, E, F$, que leva os vértices de um, nos vértices do outro, de tal modo que os ângulos correspondentes sejam congruentes e os lados correspondentes formem uma sequência proporcional, ou seja,*

$$m(\hat{A}) = m(f(\hat{A}), m(\hat{B}) = m(f(\hat{B}), m(\hat{C}) = m(f(\hat{C}),$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{f(A)f(B)}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{f(B)f(C)}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{f(A)f(C)}}.$$

Para ilustrar a Definição 1.31, temos a Figura 1.36, que contém a representação de uma função bijetora que leva vértices do triângulo ABC nos vértices do triângulo DEF.

Figura 1.36: Função bijetora.

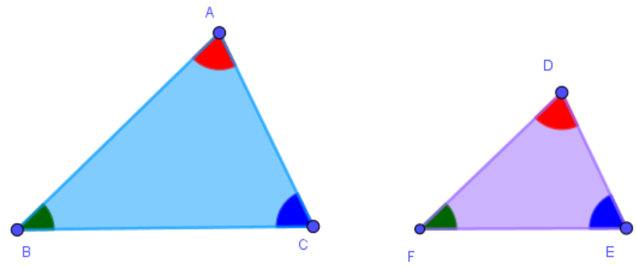


Fonte: Elaborada pela autora.

Nesse caso, denotaremos por $ABC \sim DEF$ onde se lê: o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF. As razões dadas pelas proporções acima são denominadas razão de semelhança. Na Figura 1.37, temos a representação de dois triângulos semelhantes.

`https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/srazbjje`

Figura 1.37: Triângulos Semelhantes.



Fonte: Elaborada pela autora.

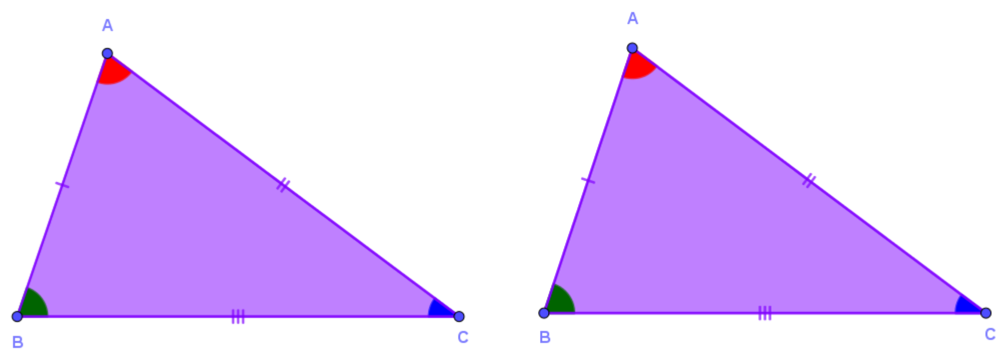
Proposição 1.32 *: A semelhança de triângulos é uma relação de equivalência.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/srazbjje

Assim como foi feito na congruência de triângulos, para provar que a semelhança de triângulos é uma relação de equivalência, é necessário provarmos que valem as propriedades simétrica, transitiva e reflexiva.

A propriedade simétrica nos garante que um triângulo ABC é semelhante a ele mesmo.

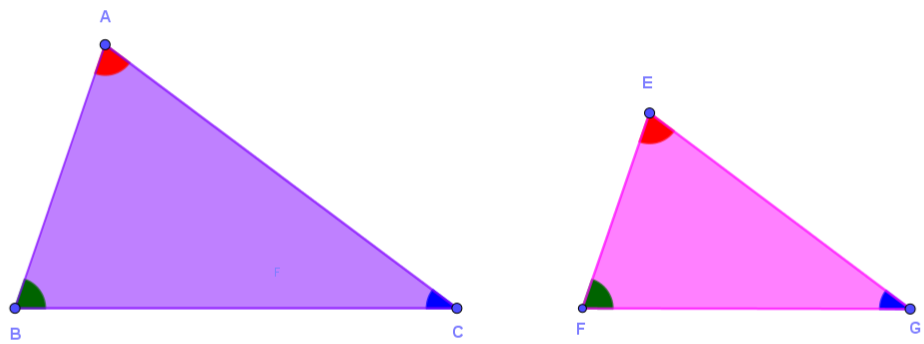
Figura 1.38: Reflexiva $ABC \sim ABC$.



Fonte: Elaborada pela autora.

A propriedade simétrica nos garante que se tivermos $ABC \sim EFG$, então $EFG \sim ABC$. Esta propriedade é representada na Figura 1.39.

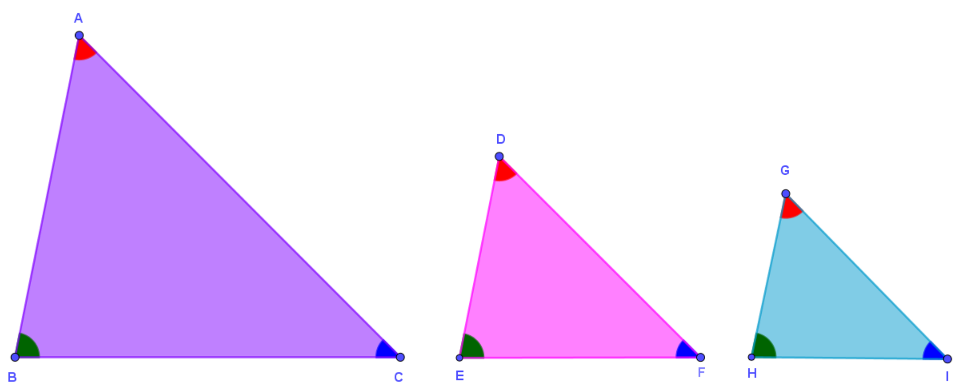
Figura 1.39: Simétrica $ABC \sim EFG$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Se vale a propriedade transitiva, isso significa que se $ABC \sim DEF$ e $DEF \sim GHI$, então $ABC \sim GHI$. Esta propriedade é representada na Figura 1.40.

Figura 1.40: Transitiva.



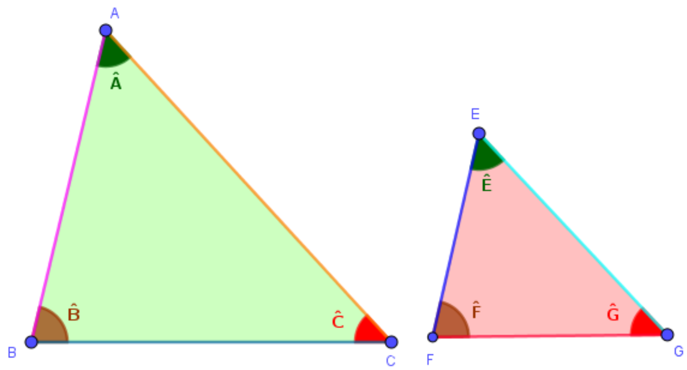
Fonte: Elaborada pela autora.

Teorema 1.33 *: Dada uma correspondência entre dois triângulos, se os ângulos correspondentes são congruentes, a correspondência é uma semelhança.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/srazbjje

Então se considerarmos os triângulos ABC e EFG, representados na Figura 1.41, onde $\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{B} = \hat{F}$ e $\hat{C} = \hat{D}$, podemos concluir que esses triângulos são semelhantes de acordo com o Teorema 1.33.

Figura 1.41: Triângulos com ângulos correspondentes congruentes.



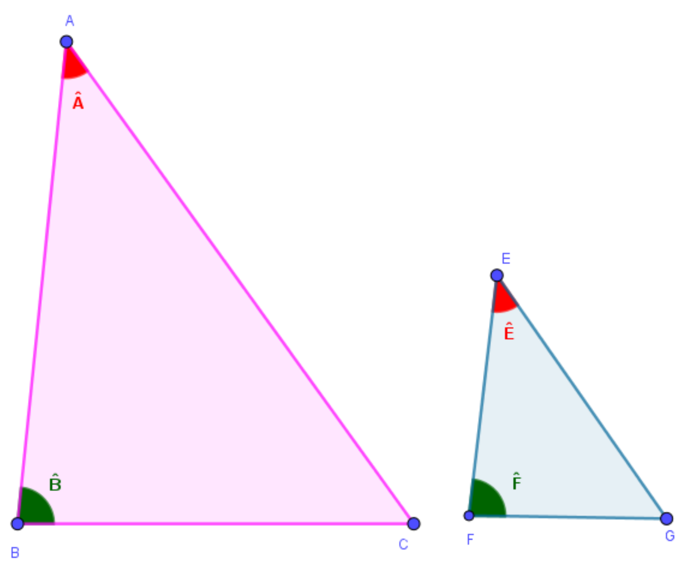
Fonte: Elaborada pela autora.

Corolário 1.34 *: Se existe uma correspondência entre dois triângulos tais que dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência é uma semelhança.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/srazbjje

Na Figura 1.42 temos os triângulos ABC e EFG, com os ângulos $\hat{A} \equiv \hat{E}$ e $\hat{B} \equiv \hat{F}$, então pelo Corolário 1.34, podemos afirmar que $ABC \equiv EFG$.

Figura 1.42: Triângulos com dois ângulos correspondentes com medidas iguais.



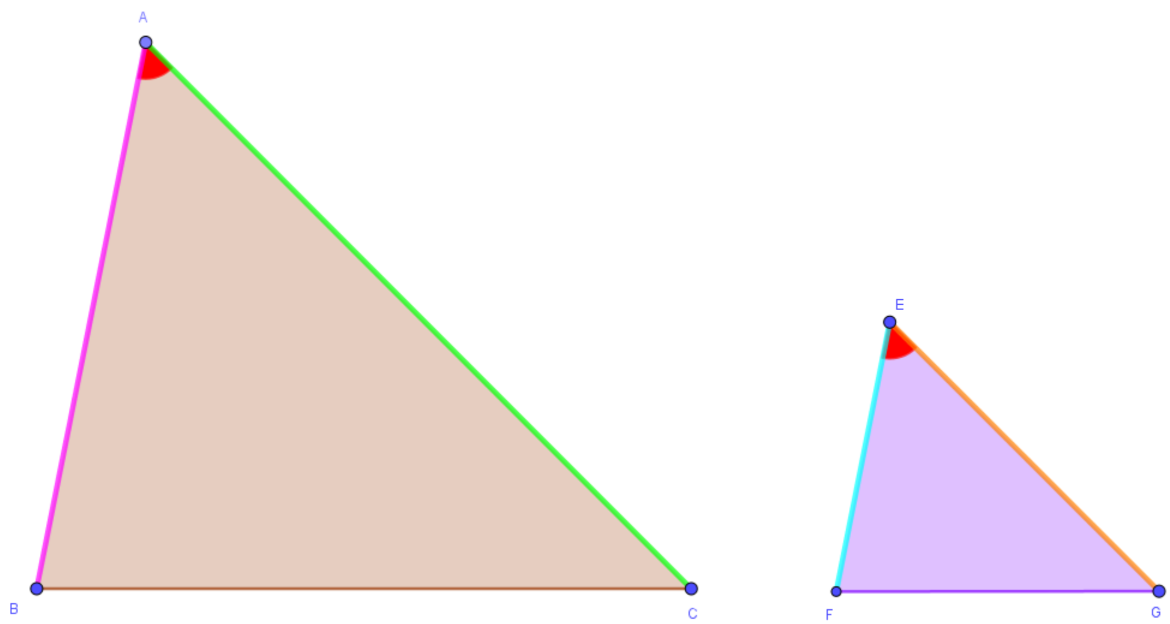
Fonte: Elaborada pela autora.

Teorema 1.35 *: Dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de lados correspondentes são proporcionais e os ângulos que eles determinam congruentes, então a correspondência é uma semelhança.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/srazbjje

Re-enunciado: Dados dois triângulos ABC e EFG, representados na Figura 1.43, e uma correspondência $ABC \Leftrightarrow EFG$, se $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}$ e $\hat{A} \equiv \hat{E}$, então $ABC \sim EFG$.

Figura 1.43: Teorema 1.35



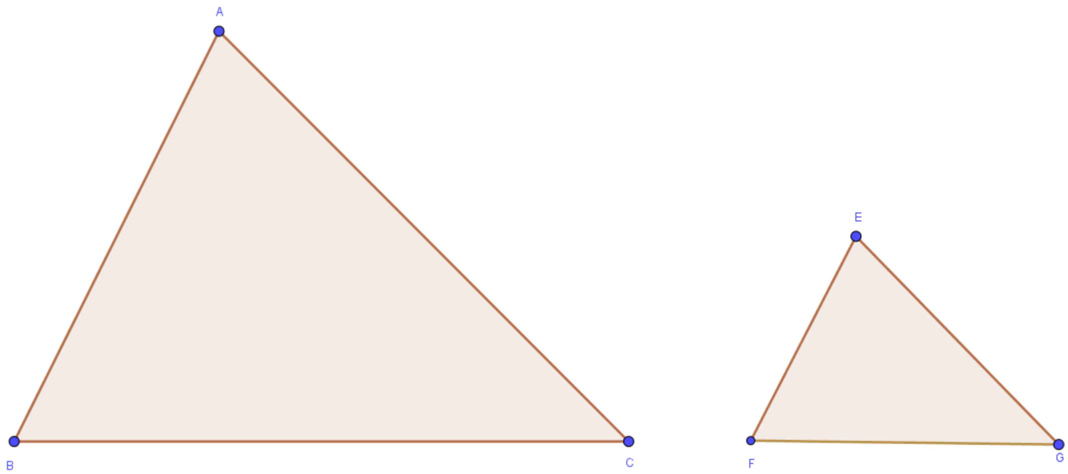
Fonte: Elaborada pela autora.

Teorema 1.36 *: Dada uma correspondência entre dois triângulos. Se os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência é uma semelhança.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/srazbjje

Re-enunciado: Dados dois triângulos, representados na Figura 1.44, ABC e EFG e uma correspondência $ABC \Leftrightarrow EFG$, se $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}$, então $ABC \sim EFG$.

Figura 1.44: $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}$.



Fonte: Elaborada pela autora.

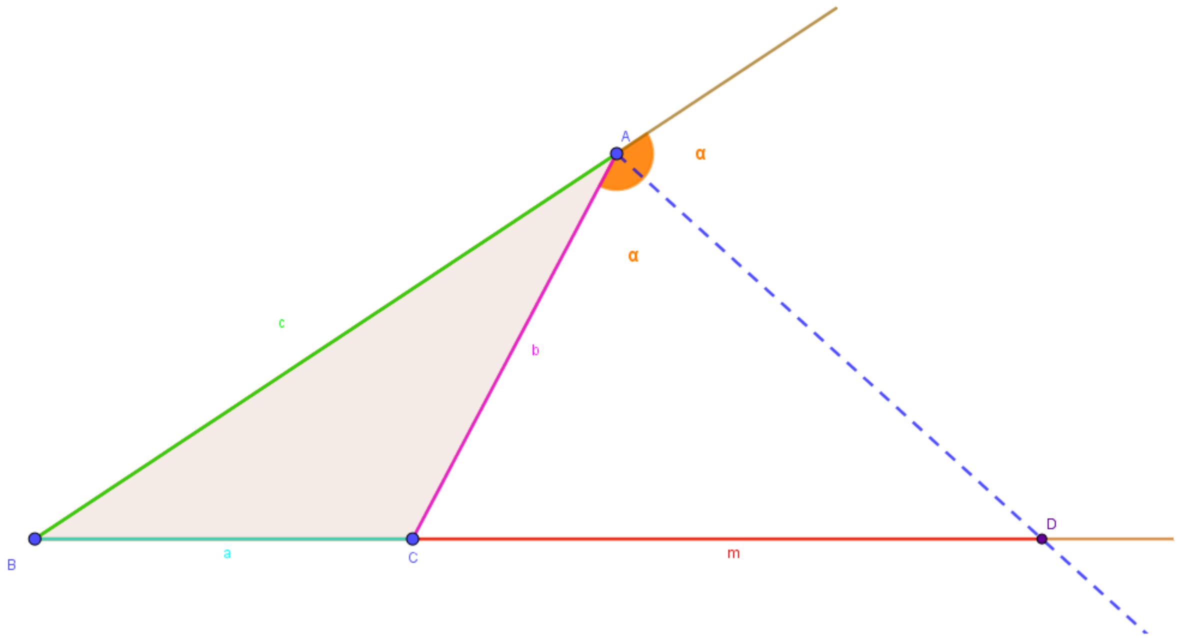
Teorema 1.37 ***(Bissetriz Externa):*** *Em um triângulo escaleno, a bissetriz de um ângulo externo intercepta o lado oposto em um ponto tal que as medidas dos segmentos obtidos e as medidas dos lados adjacentes ao ângulo formam sequências proporcionais.*

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/srazbjje

Re-enunciado: Na Figura 1.45 S_{AD} é bissetriz externa ao ângulo $\hat{A}$ do triângulo ABC, então:

$$\frac{a+m}{m} = \frac{c}{b}.$$

Figura 1.45: Representação da Bissetriz Externa AD.



Fonte: Elaborada pela autora.

CAPÍTULO 2

ATIVIDADES DINÂMICAS COM O AUXÍLIO DO APLICATIVO GEOGEBRA

2.1 Exemplo de uma demonstração dinâmica realizada no GeoGebra

De acordo com o dicionário, dinâmico é algo que se altera de modo contínuo, em que há movimento e mudança. Pensando nessa definição podemos relacionar a demonstração dinâmica, com um tipo de demonstração que sofre alterações e não são demonstrações estáticas.

Para Nóbrega (2019)

> Um Registro Linguístico Dinâmico é um registro em que o texto é alterado dinamicamente quando ele está associado a alguma característica de outra representação e ela sofre alguma modificação que altera alguma propriedade (NÓBREGA, 2019, p. 7)

Também destaca em seu trabalho que a demonstração dinâmica "não se trata de uma nova estratégia de demonstração, mas sim de como apresentá-la" (NÓBREGA, 2019 p. 14).

Como havíamos mencionado anteriormente e o leitor já deve ter percebido quando fizemos as demonstrações dinâmicas no capítulo anterior, o auxílio dos softwares e suas animações permite fazer o passo a passo as demonstrações utilizando imagens e a escrita, sem deixar "carregado" ou faltando informações. Assim o estudante pode acompanhar cada etapa da explicação, diferente de um livro impresso, que as informações são apresentadas todas ao mesmo tempo de modo estático. Veja por exemplo na Figura 2.1 retirada de Gerônimo [6], onde podemos observar que a imagem que está ilustrando a demonstração está com muitas informações.

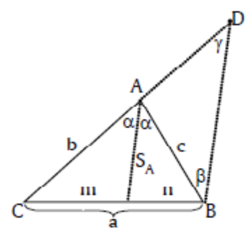
Figura 2.1: Exemplo de uma demostração realizada em um livro impresso.

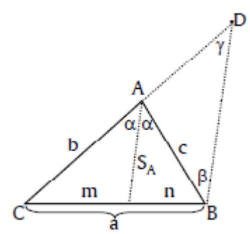
Teorema 7.5: **(da Bissetriz Interna):** Em um triângulo qualquer, a bissetriz de um ângulo interno intercepta o lado oposto em um ponto tal que as medidas dos segmentos obtidos e as medidas dos lados adjacentes ao ângulo formam sequências proporcionais.

122.

Re-enunciado: no desenho ao lado, se ABC é um triângulos e S_A é a bissetriz do ângulo A, então $\frac{m}{b} = \frac{n}{c}$ ou, equivalentemente, $\frac{m}{n} - \frac{b}{c}$.

Demonstração: tracemos por B, a reta paralela à bissetriz S_A, obtendo como interseção com a reta CA o ponto D. Teremos $\alpha=\beta$, porque são alternos internos e $\alpha = \gamma$, pois são correspondentes. Logo, $\beta = \gamma$ e o triângulo ABD é isósceles de base BD. Assim, $\overline{AD} = \overline{AB} = c$. Como a reta BD é paralela a S_A, por construção, aplicamos o Teorema 7.2, obtendo o resultado desejado.





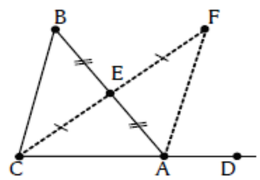
Fonte: Livro *Geometria Plana e Espacial um estudo axiomático* [6].

Por outro lado na Figura 2.2 retirada da mesma referência, podemos observar que o texto contém muitas informações, mas nas imagens não temos as representações de todos elementos que foram citados no texto.

Figura 2.2: Exemplo de uma demostração realizada em um livro impresso.

Teorema 4.8 (do Ângulo Externo): todo ângulo externo de um triângulo mede mais que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.

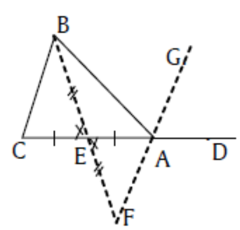
Demonstração: consideremos um triângulo ABC como no desenho ao lado. Sem perda de generalidade, vamos mostrar que o resultado é válido para o ângulo externo dado pelos lados CA e BA. Vamos utilizar o Axioma II.2 e escolher um ponto D tal que A esteja entre C e D. Queremos mostrar que $m(D\hat{A}B) > m(A\hat{B}C)$ e $m(D\hat{A}B) > m(A\hat{C}B)$. Mostremos inicialmente que $m(D\hat{A}B) > m(A\hat{B}C)$. Consideremos E o ponto médio de AB. Na reta CE, marque um ponto F tal que E esteja entre C e F, e de tal modo que $CE \equiv EF$. Tracemos AF. Notemos que $BE \equiv AE$, $CE \equiv EF$ (por construção) e $B\hat{E}C \equiv A\hat{E}F$ (opostos pelo vértice). Assim, pelo Teorema 4.3 (Caso LAL), $BEC \equiv AEF$. Consequentemente, $\hat{B} \equiv E\hat{A}F$. Como E está entre C e F, afirmamos que a reta AF não corta o segmento BC. De fato, se AF cortasse BC, então, por definição, AF dividiria o ângulo $C\hat{A}B$, e assim pelo Exercício 3.12, AF cortaria CE em um ponto Y, logo, teríamos que $Y \in AF$ e $Y \in CE = CF$ e portanto, por F e Y estariam passando as retas AF e CF que são distintas, pois $E \in CF$ e $E \notin AF$, o que é um absurdo. Assim, considerando o triângulo CBD e o Exercício 2.8, temos que AF corta BD e assim AF divide o ângulo $D\hat{A}B$. Pelo Axioma III.4, temos



62.

$$m(B\hat{A}D) = m(B\hat{A}F) + m(F\hat{A}D) > m(B\hat{A}F) = m(A\hat{B}C).$$

Para demonstrar que $m(D\hat{A}B) > m(A\hat{C}B)$, seja E o ponto médio de AC. Tracemos a semirreta S_{BE} e marcamos um ponto F em S_{BE} tal que $BE \equiv EF$ e E esteja entre B e F. Tracemos a semirreta S_{FA} e tomemos algum ponto G em S_{FA} tal que A esteja entre F e G como $BE \equiv EF$, $CE \equiv AE$ (por construção) e $B\hat{E}C \equiv F\hat{E}A$ (opostos pelo vértice), temos pelo Teorema 4.3 que $BEC \equiv FEA$ e, portanto, $B\hat{C}E \equiv F\hat{A}E$. Como $F\hat{A}E$ e $D\hat{A}G$ são opostos pelo vértice, pela Proposição 3.21, temos $F\hat{A}E \equiv D\hat{A}G$. Como $S_{FA} \neq S_{AB}$, e S_{FA} não intercepta BC, porque se esse fosse o caso teríamos que S_{FA} interceptaria BE em um ponto H e, portanto, FA e BF teriam os pontos H e F em comum, o que é absurdo. Logo, S_{FA} divide o ângulo $D\hat{A}B$ e portanto pelo Axioma III.4 $m(D\hat{A}B) > m(A\hat{C}B)$, pois $D\hat{A}G \equiv B\hat{C}E$.



❑

Fonte: Livro *Geometria Plana e Espacial um estudo axiomático* [6].

Com a ferramenta do software chamada "controle deslizante", foi possível realizar as animações, com ela é possível programar o aparecimento de cada elemento durante a demonstração.

As imagens e a demonstração escrita foram configuradas para aparecerem na mesma ordem, por exemplo, se na demostração escrita citar a construção de um ponto A, na imagem aparecerá a representação geométrica desse ponto. Durante a demonstração, os objetos que não forem mais necessários serão escondidos da janela de visualização, para que a imagem não fique com muitas informações.

Para melhor entendimento de como foi realizado o nosso trabalho, iremos mostrar através de algumas imagens e comentários uma das demonstrações que está disponível no livro digital.

Durante as demonstrações dinâmicas utilizamos duas janelas de visualizações, uma para a parte escrita e a outra para a representação geométrica. Foi construído também um controle deslizante, chamamos de “Etapa”. Quem acessar o livro digital, poderá mover esse controle e através desse movimento irá acompanhar o passo a passo de cada explicação.

Para que a representação geométrica não fique com muitas informações desnecessárias, terão objetos que serão programados para não aparecerem durante algumas etapas da demonstração, todo esse processo de programação acontece em função do controle deslizante.

A seguir vamos apresentar a demonstração do Teorema 1.25, se o leitor preferir ele poderá acessar o link ou o qr-code abaixo, que direcionarão a demostração no livro digital.

`https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/mqaj4t56`

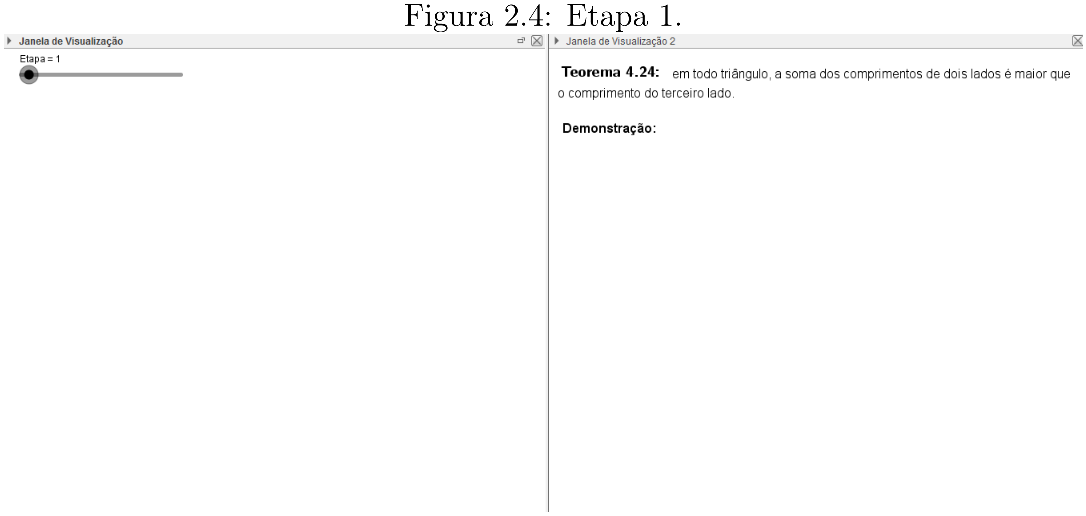
Na Figura 2.3 temos a imagem da tela inicial. Nessa tela, temos à esquerda a "Janela de Visualização", contendo nela o controle deslizante que está no modo "Etapa=0"e à direita, temos a "Janela de Visualização 2"contendo o enunciado do teorema. Lembrando que a numeração do teorema é a mesma do livro *Geometria Plana e Espacial um estudo axiomático* [6].

Figura 2.3: Apresentação do enunciado do Teorema.

Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 2.4, podemos observar que o controle deslizante foi movido para o modo "Etapa=1", em "Janela de Visualização 2"apareceu a palavra Demonstração, ou seja, nas próximas etapas iniciaremos a demonstração do teorema.

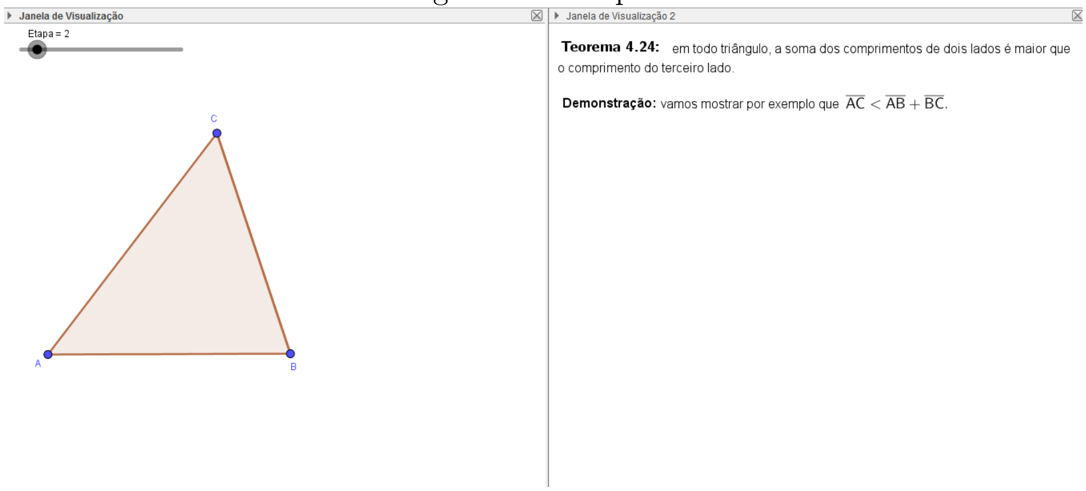
Figura 2.4: Etapa 1.



Fonte: Elaborada pela autora.

Movendo o controle deslizante para o modo "Etapa=2", como mostra a Figura 2.5, é possível observar que em "Janela de Visualização"apareceu a representação geométrica do triângulo ABC e na outra a tese da demonstração representada por escrito e em linguagem matemática.

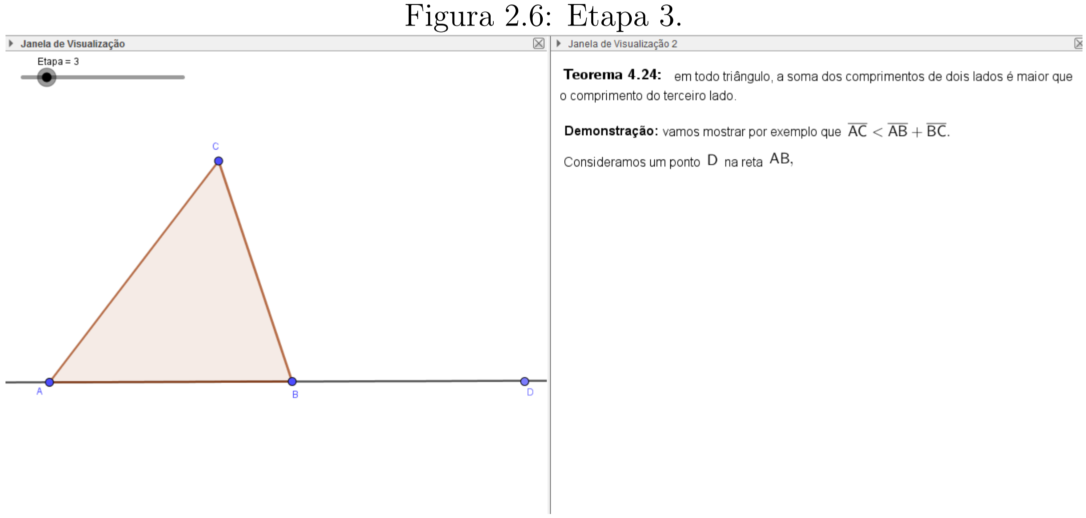
Figura 2.5: Etapa 2.



Fonte: Elaborada pela autora.

No modo "Etapa=3", como podemos ver na Figura 2.6, foi adicionado a representação geométrica da reta AB e do ponto D em "Janela de Visualização"e em "Janela de Visualização 2"apareceu escrito “Considere um ponto D na reta AB”.

Figura 2.6: Etapa 3.



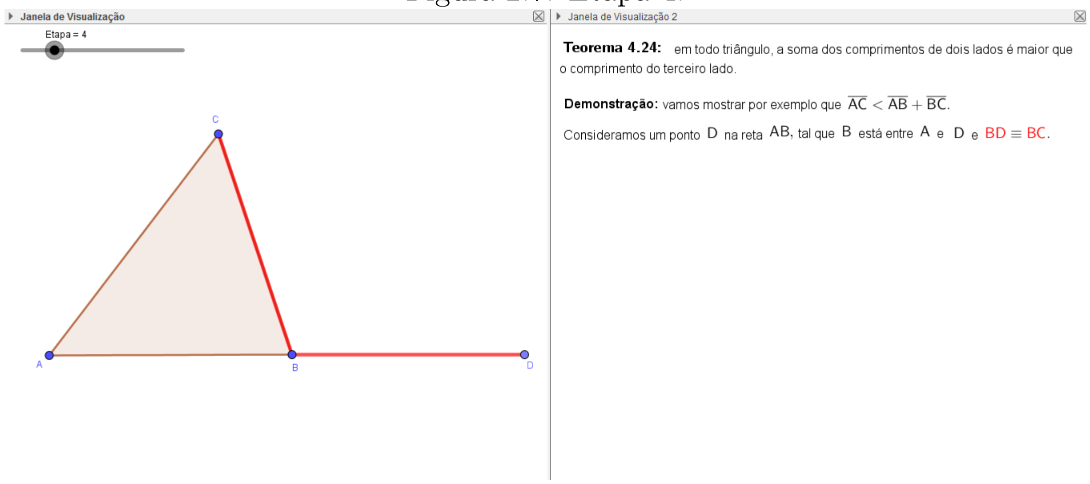
Fonte: Elaborada pela autora.

As próximas etapas do controle deslizante seguem da mesma maneira, cada objeto que é representado geometricamente em "Janela de Visualização"(a esquerda) é citado em "Janela de Visualização 2"(a direita) por escrito e feito todas as observações necessárias.

Outro método utilizado durante as demonstrações foi o de utilizar as cores para relacionar os objetos das duas janelas e para destacar objetos com medidas iguais.

Observe na Etapa=4, representada na Figura 2.7, os segmentos BC e BD foram construídos com a mesma cor, vermelho, pois $\overline{BC} \equiv \overline{BD}$ e em "Janela de Visualização 2"eles também aparecem representados com a mesma cor.

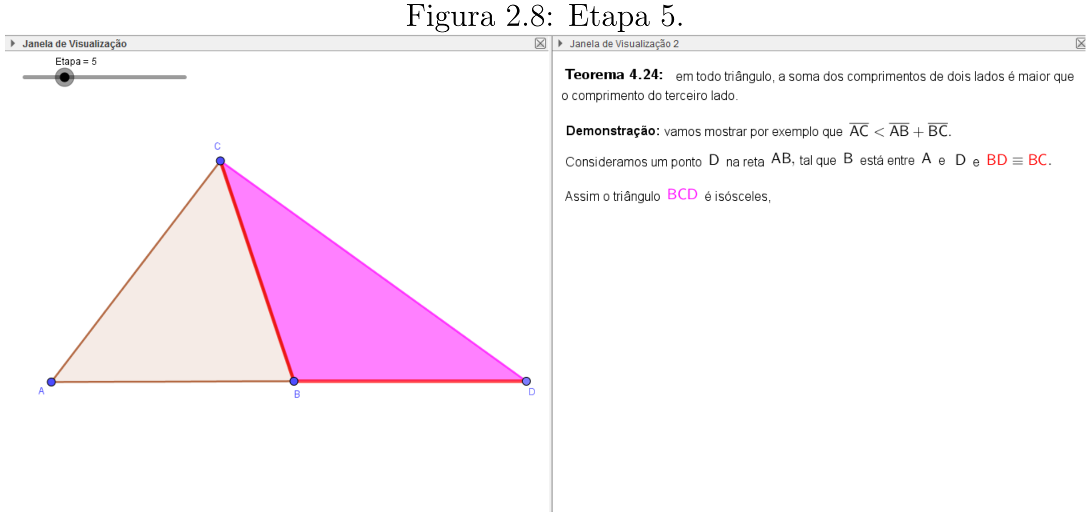
Figura 2.7: Etapa 4.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 2.8 temos a representação do modo "Etapa=5", onde foi realizada a construção do triângulo BCD. Os segmentos BC e BD continuam com mesma cor para destacar que o triângulo BCD é isósceles de base CD.

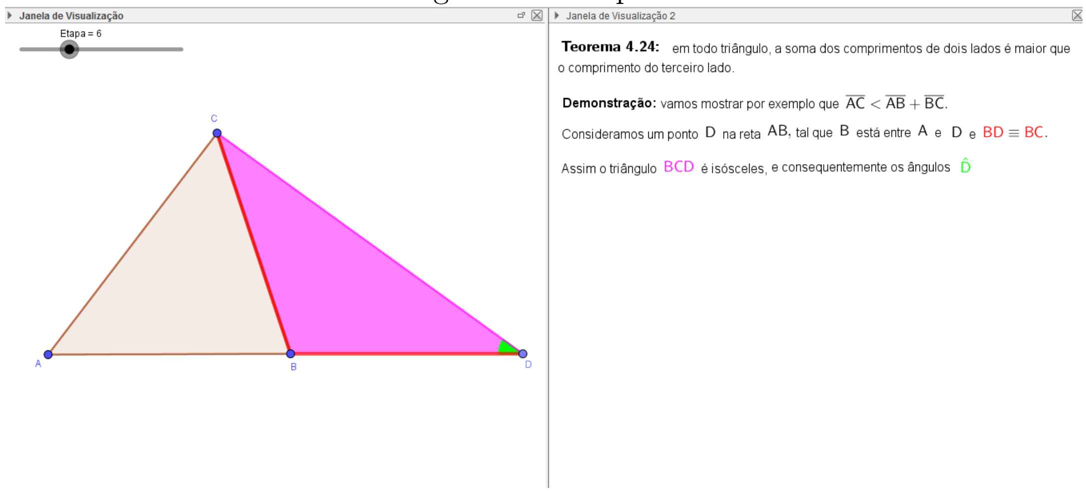
Figura 2.8: Etapa 5.



Fonte: Elaborada pela autora.

No modo "Etapa=6", representada na Figura 2.9, foi realizada a construção do ângulo $\hat{D}$, que é um ângulo que pertence a base do triângulo isósceles BCD.

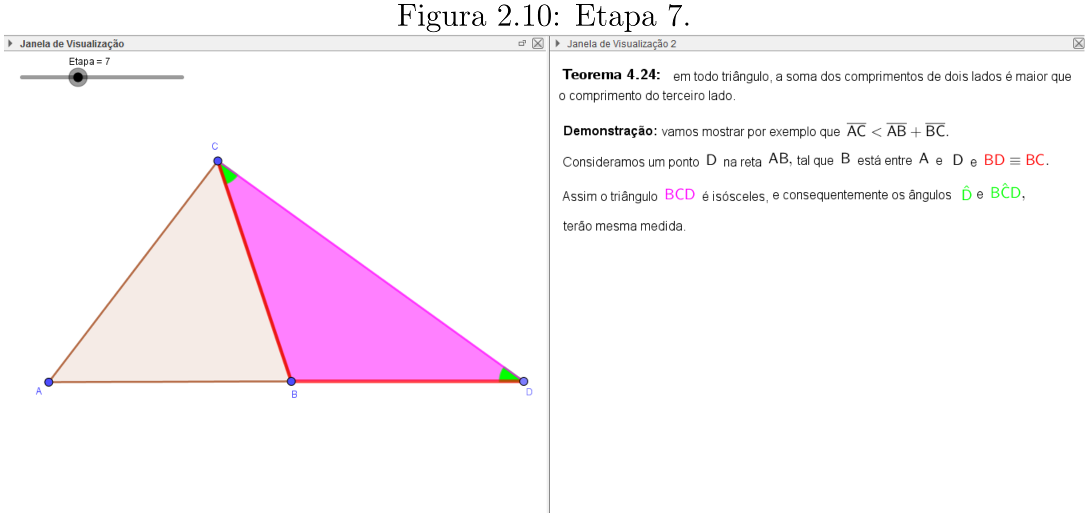
Figura 2.9: Etapa 6.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 2.10 temos a representação no modo "Etapa=7", que foi realizada a construção do ângulo $B\hat{C}D$, que também é ângulo da base do triângulo BCD, logo $B\hat{D}C \equiv B\hat{C}D$, por esse motivo os dois ângulos foram construídos com a mesma cor.

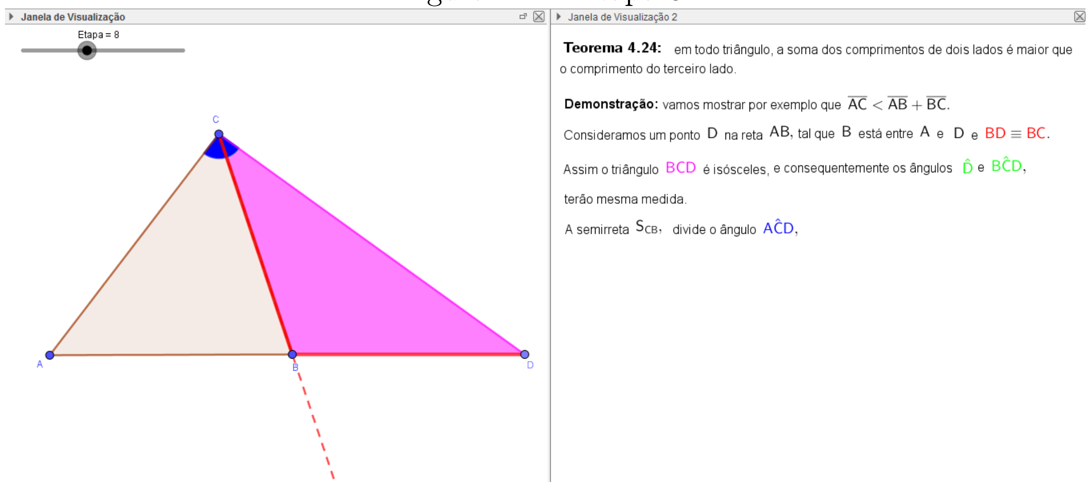
Figura 2.10: Etapa 7.



Fonte: Elaborada pela autora.

No modo "Etapa=8", representada na Figura 2.11, observe que os ângulos $B\hat{D}C$ e $B\hat{C}D$ foram programados para não aparecerem em "Janela de Visualização", pois eles não serão necessários nessa etapa da demonstração. Também foi realizada a construção da semirreta S_{CB} e do ângulo $A\hat{C}D$.

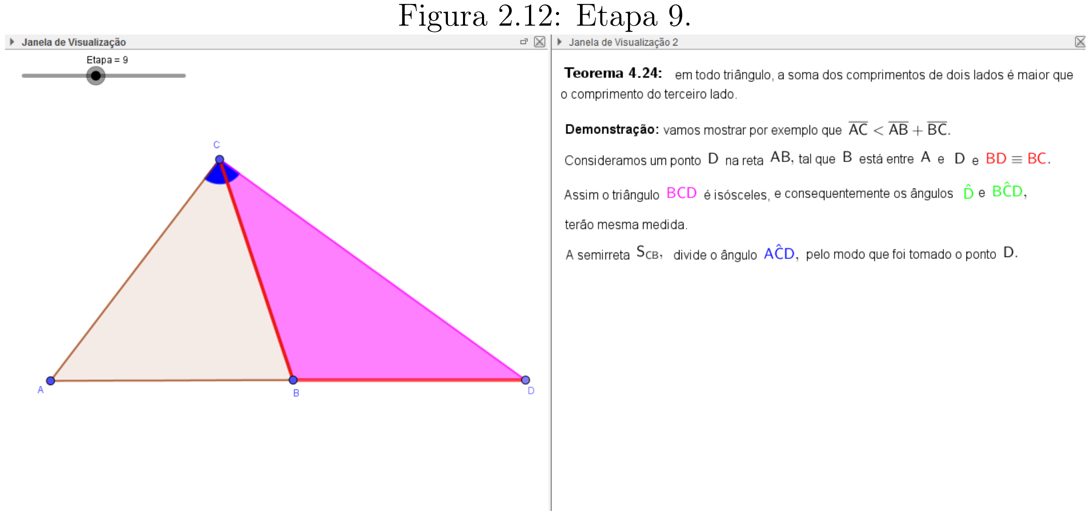
Figura 2.11: Etapa 8.



Fonte: Elaborada pela autora.

No modo "Etapa=9", representada na Figura 2.12, só foram adicionados comentários em "Janela de visualização 2"e a semirreta S_{CB} foi escondida em "Janela de Visualização".

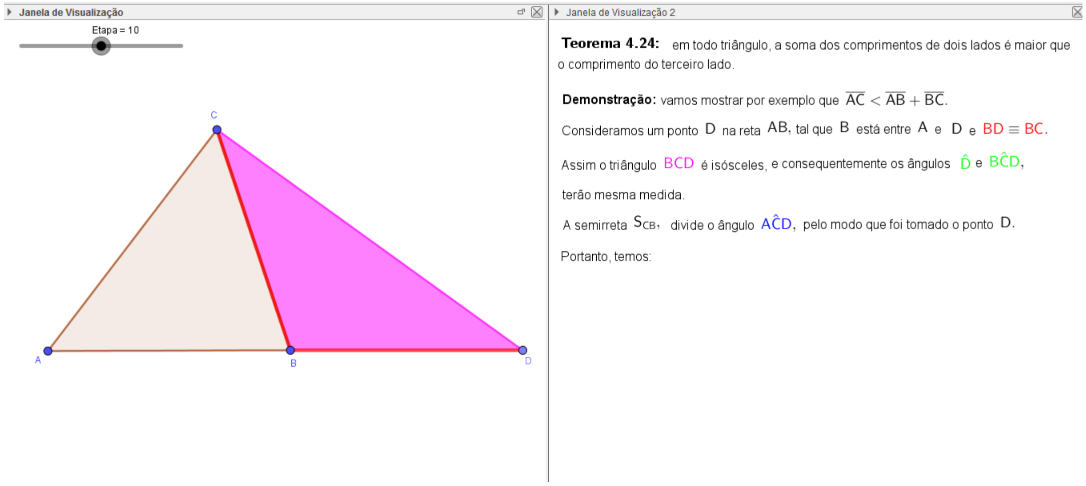
Figura 2.12: Etapa 9.



Fonte: Elaborada pela autora.

No modo "Etapa=10", representada na Figura 2.13, o ângulo $A\hat{C}D$ foi escondido e foram adicionados comentários em "Janela de visualização 2".

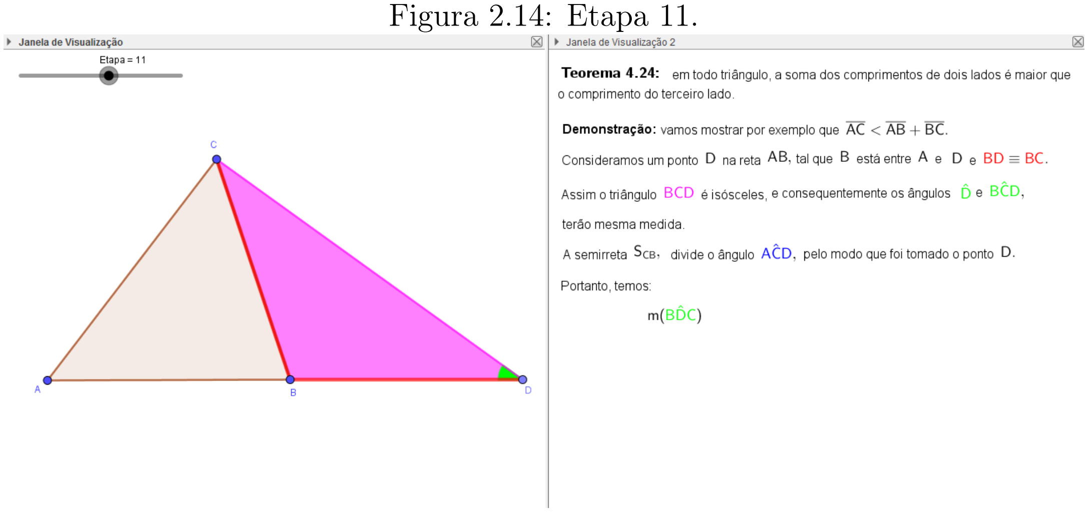
Figura 2.13: Etapa 10.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 2.14, temos a representação do modo "Etapa=11", onde o ângulo $B\hat{D}C$ voltou a aparecer nas duas janelas de visualizações.

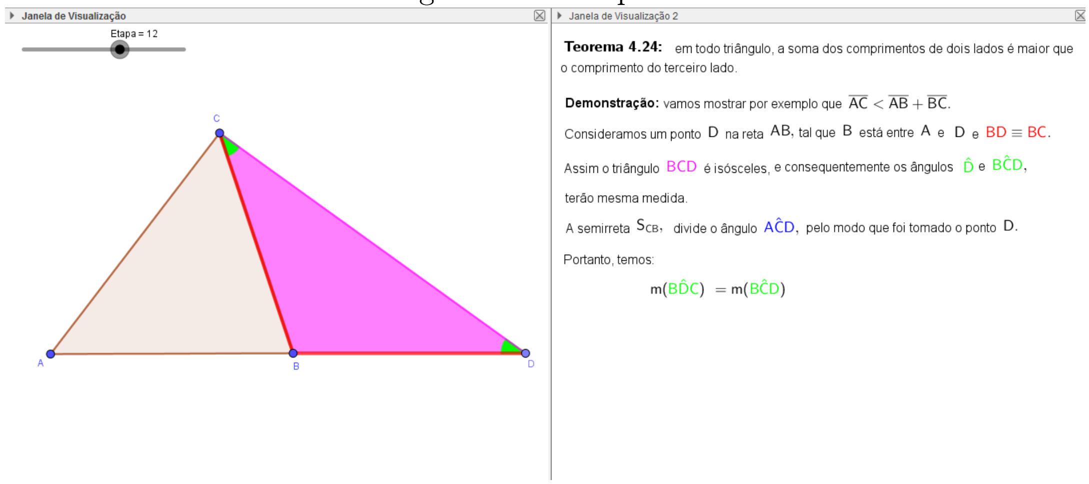
Figura 2.14: Etapa 11.



Fonte: Elaborada pela autora.

No modo "Etapa=12", representada na Figura 2.15, o ângulo $B\hat{C}D$ voltou a aparecer nas duas janelas de visualizações.

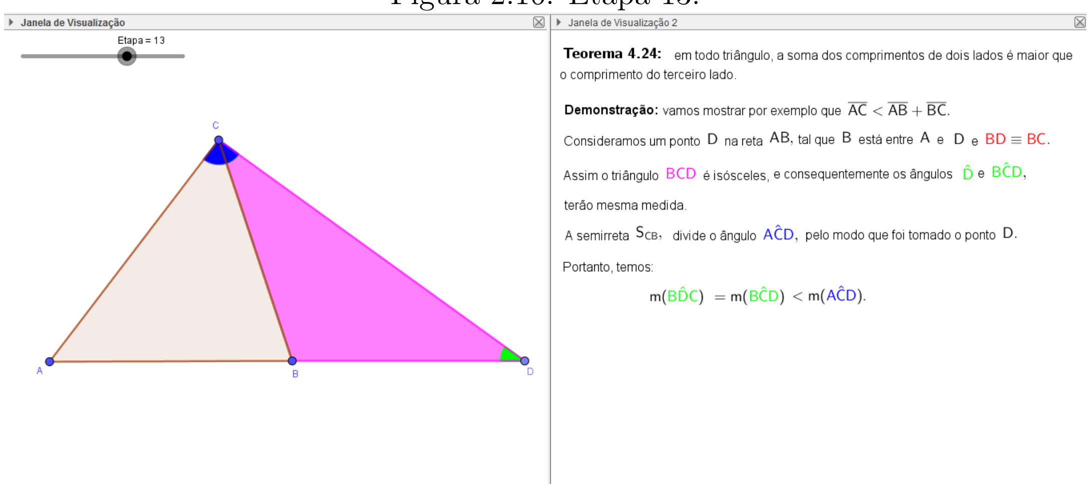
Figura 2.15: Etapa 12.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 2.16, temos a representação do modo "Etapa=13", onde o ângulo $A\hat{C}D$ voltou a aparecer nas duas janelas de visualizações.

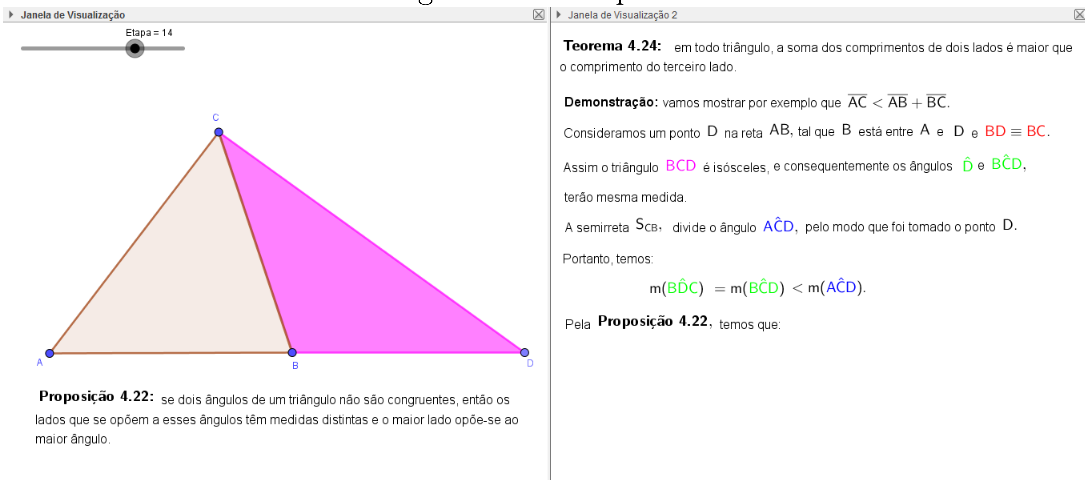
Figura 2.16: Etapa 13.



Fonte: Elaborada pela autora.

Os Teoremas, Proposições, Definições ou Axiomas utilizados durante a demonstração, foram adicionados na "Janela de Visualização". Observe na Figura 2.17, no modo "Etapa=14", durante a demonstração foi utilizado a Proposição 4.22.

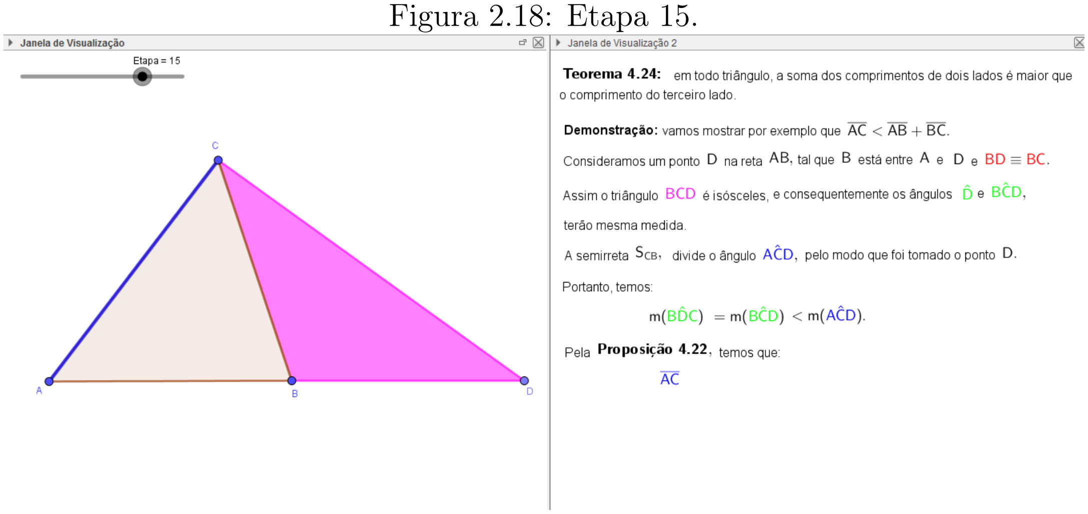
Figura 2.17: Etapa 14.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 2.18 temos a representação da Etapa=15, onde o segmento AC foi citado em "Janela de Visualização 2"e destacado com a cor azul em "Janela de Visualização".

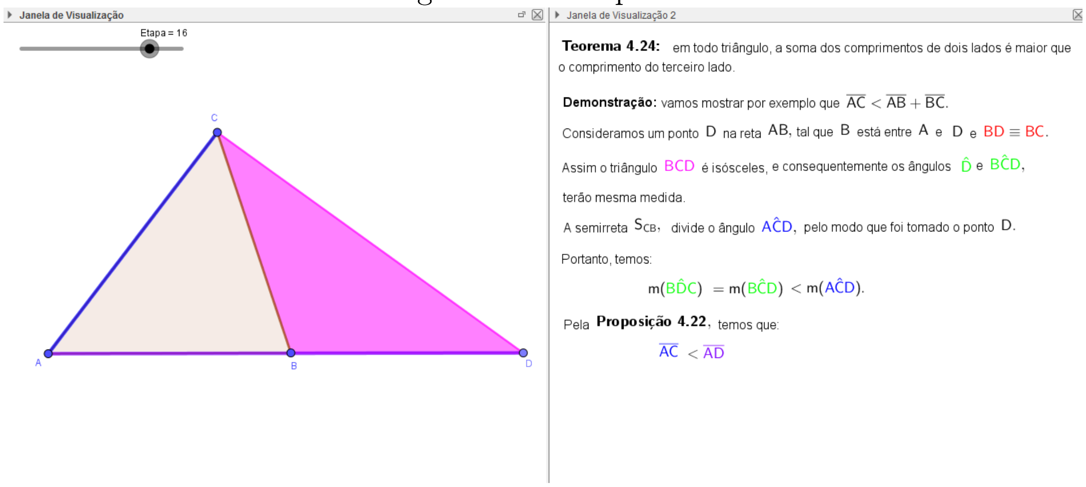
Figura 2.18: Etapa 15.



Fonte: Elaborada pela autora.

No modo "Etapa=16", representada na Figura 2.19, o segmento AD foi destacado com a cor roxa e citado em "Janela de Visualização 2".

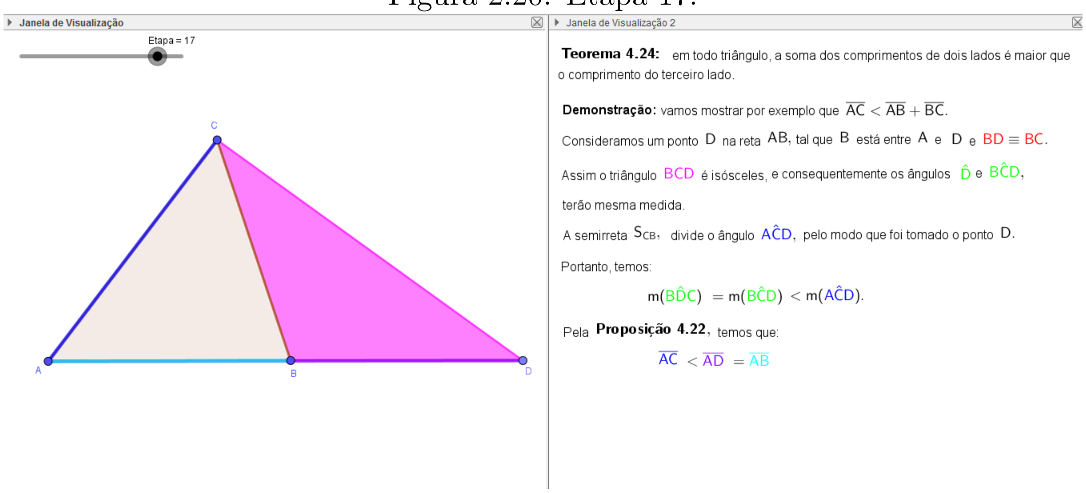
Figura 2.19: Etapa 16.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 2.20, temos a representação do modo "Etapa=17", onde em "Janela de Visualização"foi destacado o segmento AB com a cor azul clara e o segmento AB foi citado em "Janela de Visualização 2".

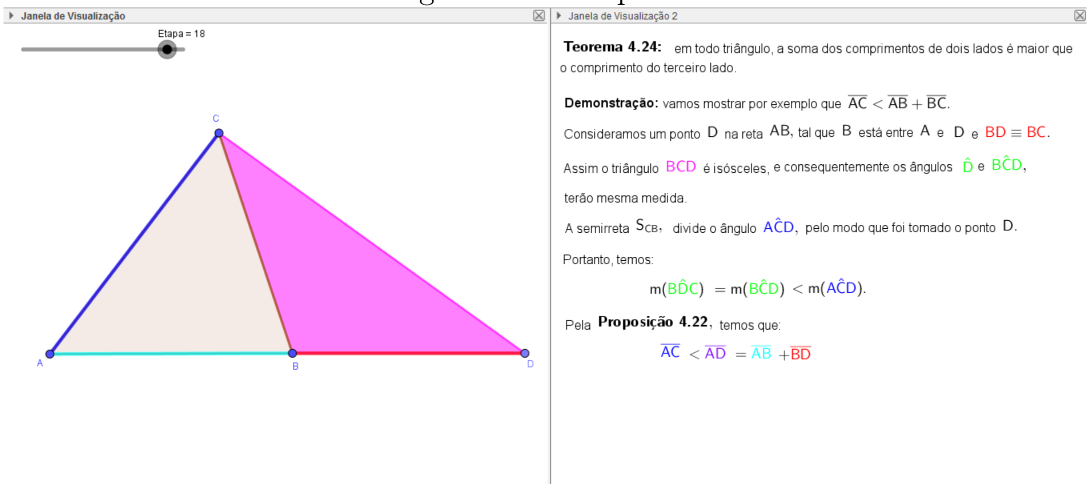
Figura 2.20: Etapa 17.



Fonte: Elaborada pela autora.

No modo "Etapa=18", representada na Figura 2.21, o segmento BD foi destacado com a cor vermelha em "Janela de Visualização"e citado em "Janela de Visualização 2".

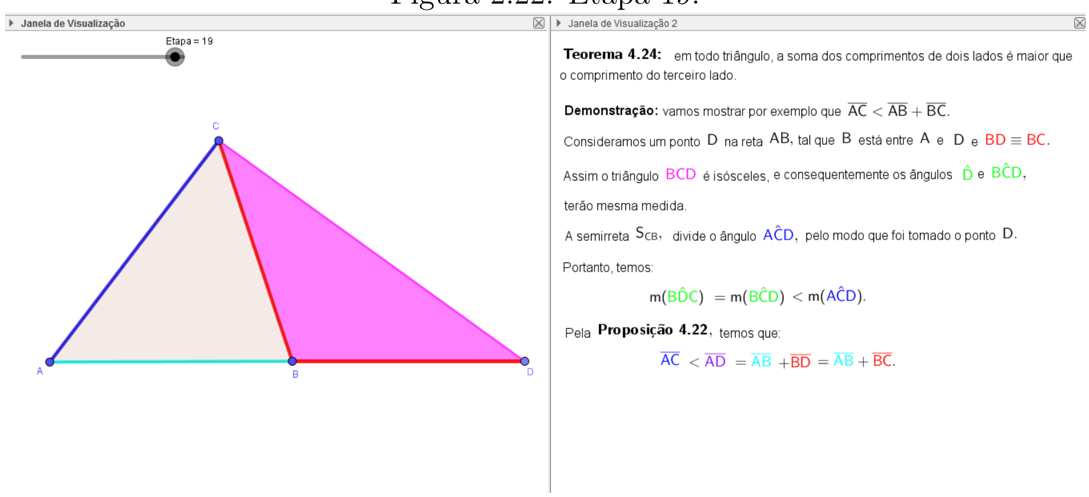
Figura 2.21: Etapa 18.



Fonte: Elaborada pela autora.

No modo "Etapa=19", representada na figura 2.22, o segmento CD foi destacado com a mesma cor do segmento BD, para ficar bem claro que os dois segmentos possuem medidas iguais.

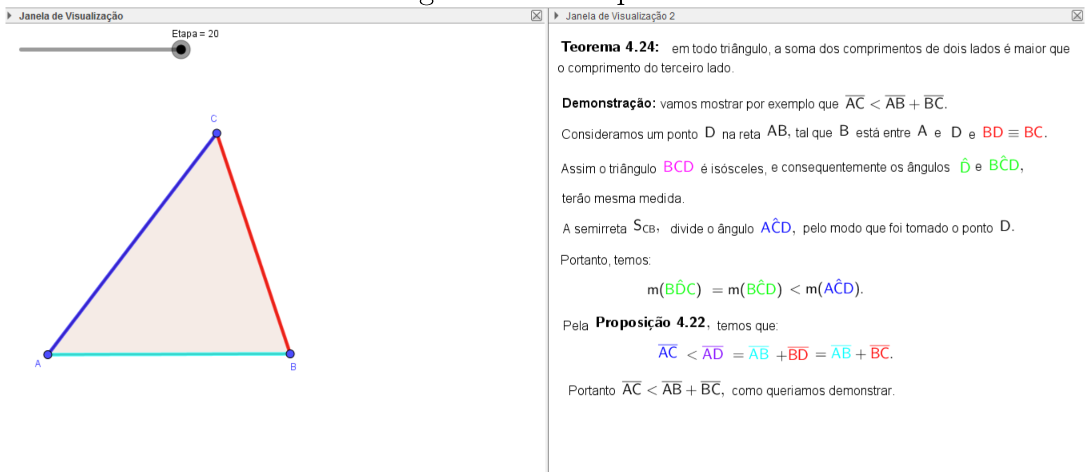
Figura 2.22: Etapa 19.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 2.23, temos a representação do modo "Etapa=20", onde concluímos a demonstração, chegando na tese citada no início da demonstração. Por esse motivo, os objetos que utilizamos durante a demonstração foram escondidos em "Janela de Visualização".

Figura 2.23: Etapa 20.



Fonte: Elaborada pela autora.

Assim finalizamos a explicação de como estão sendo apresentadas as demonstrações no livro digital. Tentamos trazer cada demonstração mais detalhada possível, para tentar facilitar a compreensão do leitor.

2.2 Tutorial de como realizar demonstrações dinâmicas no GeoGebra

Antes de iniciarmos a realização do livro digital, fizemos pesquisas no banco de dissertações do PROFMAT [2], para verificarmos dissertações que envolvam o mesmo tema e para termos materiais que nos auxiliassem em nossas construções. Caso o leitor tenha interesse, segue abaixo uma pequena síntese dos trabalhos encontrados:

Relacionado de forma direta a livro digital encontramos o trabalho do Eduardo Alejandro Flores Araya com o titulo *Livro Digital Interativo: Um Exemplo com Trigonometria* [1], aluno da Universidade Federal Do Espírito Santo/ UFES. O objetivo desse trabalho foi elaborar um livro digital interativo, produzido utilizando o NIPPES (Núcleo Interativo para Programas Educativos). O livro contém a explicação do conteúdo e exercícios interativos relacionados a trigonometria. Esse trabalho foi realizado no ano de 2021.

Relacionado a demonstrações dinâmicas, temos o trabalho do aluno Angelo Márcio de Souza, com título *Utilizando o Jogo Euclidea e Demonstrações Dinâmicas no*

GeoGebra para o Ensino de Construções Geométricas [15], realizado no ano de 2018 pela Universidade Estadual de Maringá/UEM. Um objetivos do trabalho foi de construir fases do jogo Euclídea no aplicativo GeoGebra. O material está disponível online pelo site do GeoGebra, basta acessar e jogar. Após cada fase o jogador pode verificar as construções e as justificativas que foram realizadas de uma forma dinâmica.

Pesquisando sobre e-book, encontramos o trabalho do aluno Renato Eugenio da Mota com o título *E-book Interativo Como uma Ferramenta / Estratégia no Ensino de Matemática* [8], realizado no ano de 2019 pela Universidade Estadual do Espírito Santo/UFES. Esse trabalho apresenta como proposta no processo de ensino aprendizagem a utilização de e-books interativos, contendo execícios interativos e vídeos.

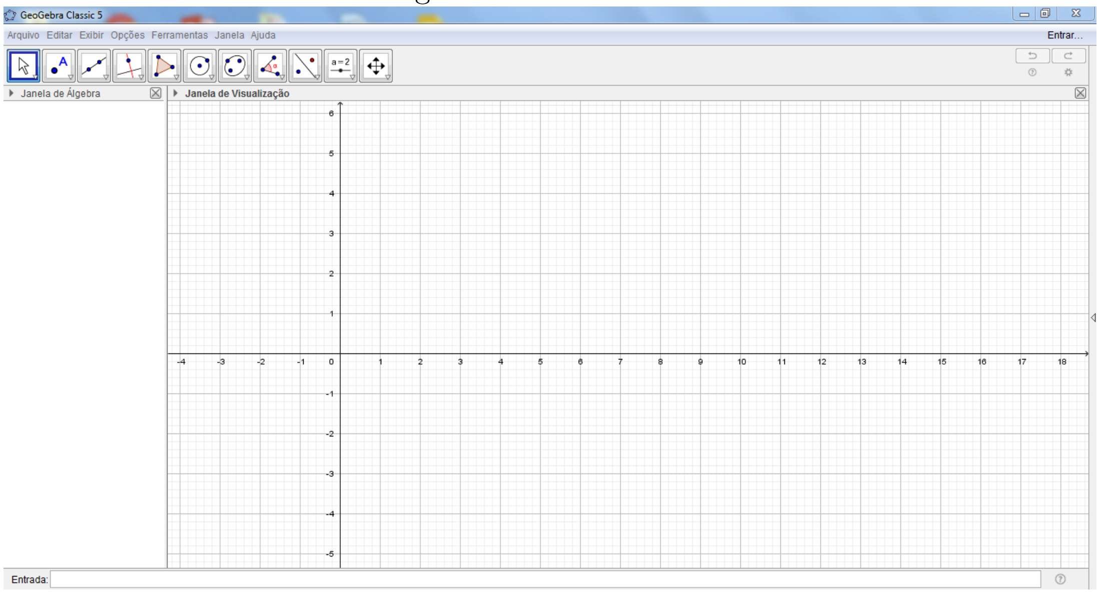
Durante nossas pesquisas encontramos outro trabalho que nos chamou a atenção com o titulo *Visualizações Dinâmicas na Geometria Plana do PROFMAT* [13], realizado em 2020 pelo aluno Mayco Sabóia, da Universidade de Brasília. O objetivo desta dissertação foi a criação de um e-book digital utilizando o software GeoGebra. Foi realizado demonstrações de teoremas fundamentais estudados na disciplina de Geometria plana MA13 - Geometria do Programa Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT). As demonstrações dinâmicas foram apresentadas a alunos do PROFMAT e depois ficaram disponíveis online no site do GeoGebra.

Com base em nossas leituras, estudos e experiências adquiridas durante a construção do livro digital, daremos algumas dicas de como realizar demonstrações dinâmicas com o auxílio do software GeoGebra. Para a realização das demonstrações, utilizamos o GeoGebra 5.0.[5], que é um software de geometria dinâmica que pode ser baixado gratuitamente, para isso basta acessar o link ou qr-code abaixo:

`https://www.geogebra.org/download?lang=pt`.

Na Figura 2.24, temos a imagem da tela inicial do Geogebra 5.0.

Figura 2.24: Tela inicia.

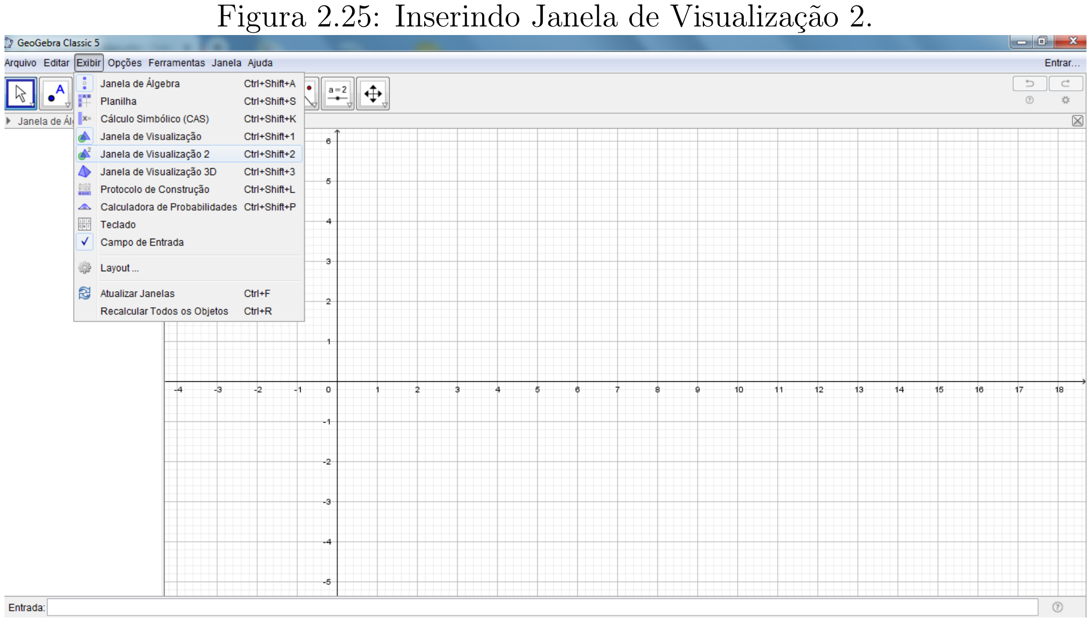


Fonte: Elaborada pela autora.

Durante as demonstrações, como já citamos nesse trabalho, utilizamos duas janelas de visualização, uma para a demonstração escrita e a outra para a representação geométrica.

O primeiro passo é abrir Janela de Visualização 2. Para isso selecione "Exibir" e em seguida selecione "Janela de Visualização 2", observe a Figura 2.25.

Figura 2.25: Inserindo Janela de Visualização 2.

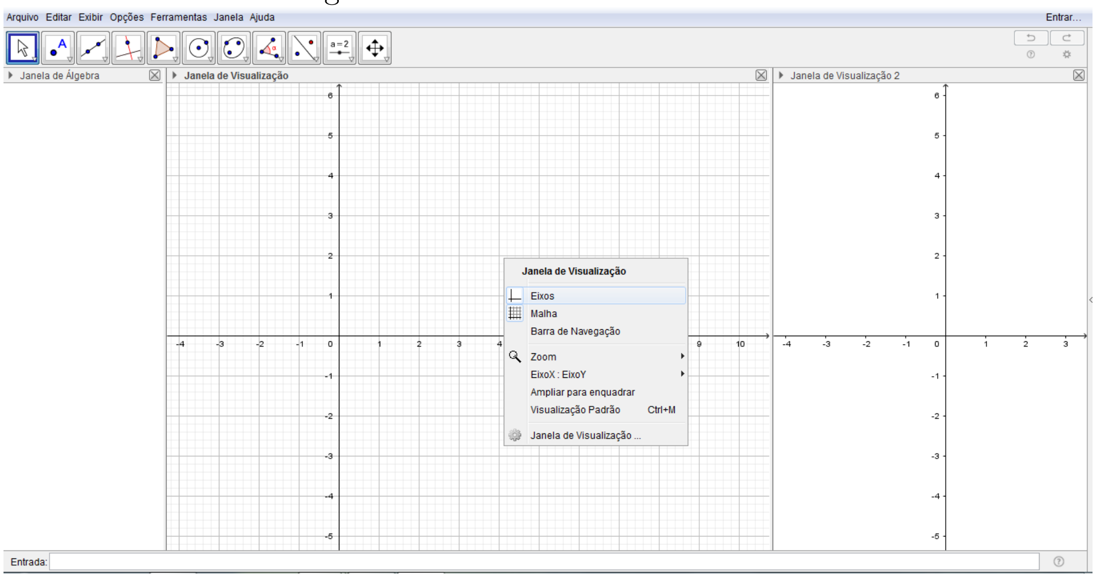


Fonte: Elaborada pela autora.

Na Janela de Visualização (a esquerda) iremos colocar as representações geométricas durante a demonstração.

Temos a opção de esconder a malha e o eixo. Para isso devemos selecionar com o botão direito dentro da Janela de Visualização e selecionar "Malha" e "Eixos", ilustrado na Figura 2.26.

Figura 2.26: Esconder malha e eixos.

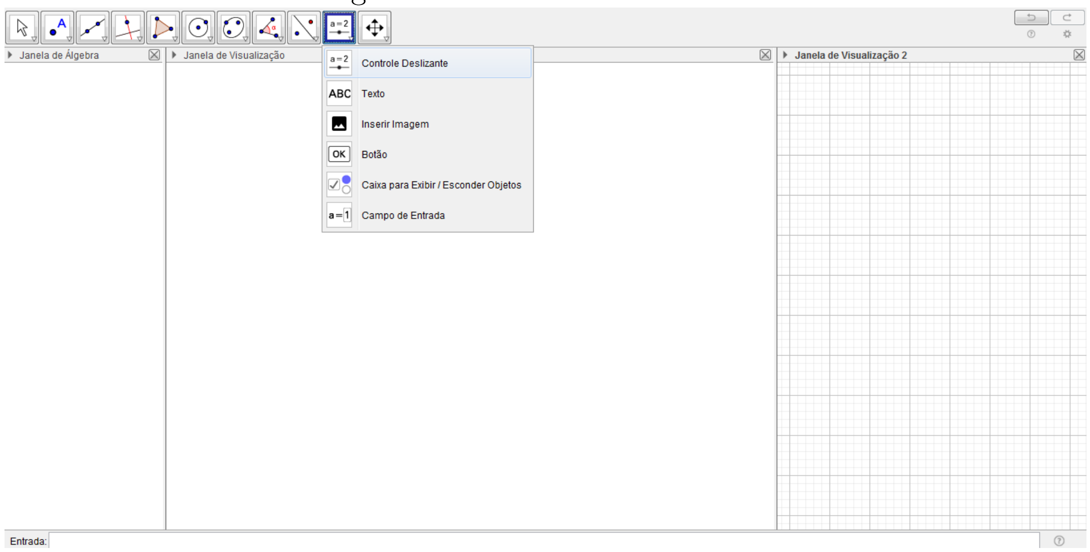


Fonte: Elaborada pela autora.

Da mesma maneira que podemos esconder o Eixo e a malha na Janela de Visualização, também podemos esconder esses objetos da Janela de Visualização 2. Uma dica é não esconder a malha, pois ela será útil na formatação, podemos utilizar ela como se fossem linhas, assim quando terminarmos de inserir toda a demonstração escrita a malha poderá ser escondida.

O próximo passo é construir um controle deslizante. Para isso, basta selecionar a ferramenta "Controle Deslizante", como mostra na Figura 2.27.

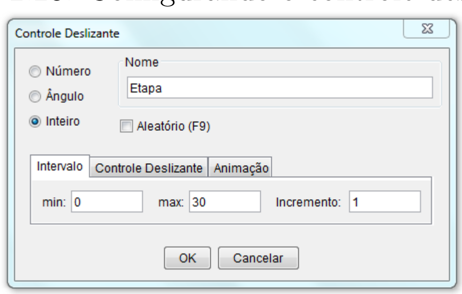
Figura 2.27: Controle deslizante.



Fonte: Elaborada pela autora.

Selecione com o botão esquerdo em algum local da Janela de Visualização. Aparecerá uma janela como na Figura 2.28, nessa Janela aparece algumas opções para configurar o controle deslizante. Selecione “Inteiro”, isso significa que o seu controle deslizante vai variar apenas com números que pertencem ao conjunto dos números inteiros. Dê um nome para o seu controle, nós nomeamos de “Etapa”. Defina um intervalo, o maior (max) e o menor (min) valor que esse controle irá chegar, esse intervalo depende da quantidade de etapas que terá a sua demonstração, em todo caso se o intervalo que você colocar no início não for suficiente, é possível alterá-lo durante a construção da demonstração.

Figura 2.28: Configurando o controle deslizante.

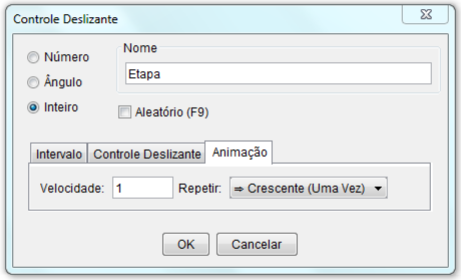


Fonte: Elaborada pela autora.

Para finalizar a configuração do controle deslizante selecione “Animação”. Configure a velocidade e a ordem que o controle deslizante irá seguir, representado na

Figura 2.29, depois é só selecionar "OK".

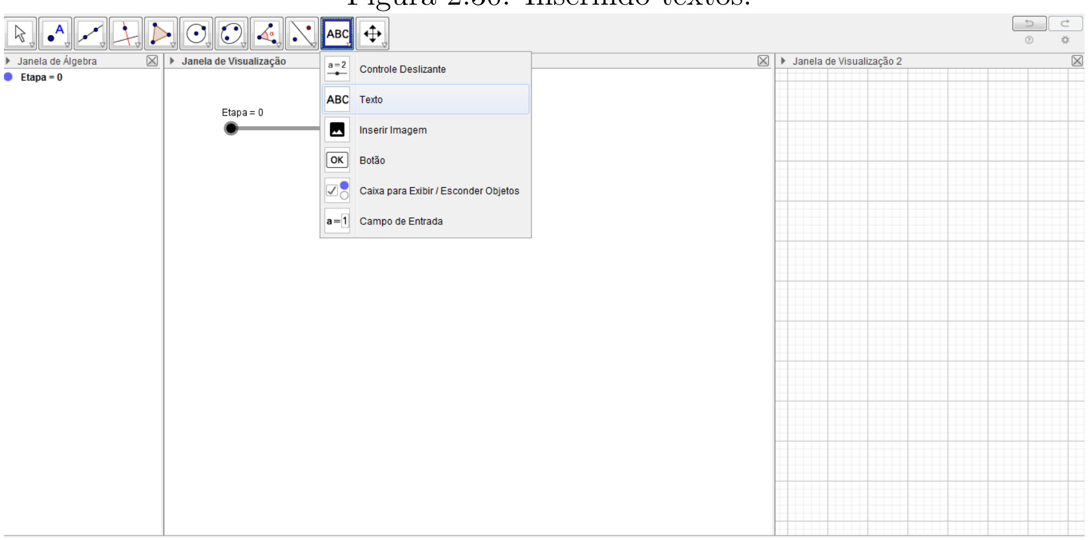
Figura 2.29: Configurando o controle deslizante.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para inserir textos, selecione “Textos”, como aparece na Figura 2.30, e selecione com o botão esquerdo do mouse dentro da Janela de Visualização 2.

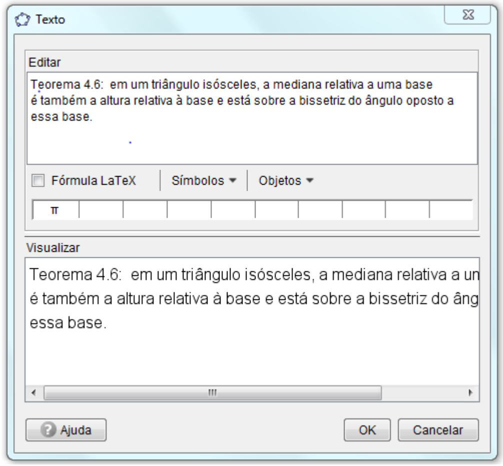
Figura 2.30: Inserindo textos.



Fonte: Elaborada pela autora.

Aparecerá uma janela como na Figura 2.31 onde será inserido o enunciado.

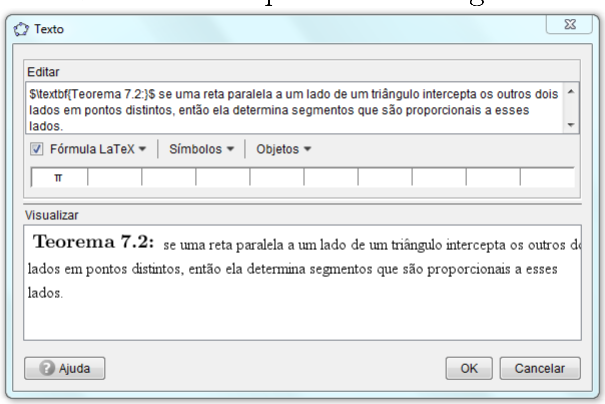
Figura 2.31: Inserindo textos.



Fonte: Elaborada pela autora.

Se desejar colocar em negrito algumas partes do texto, é necessário selecionar "Fórmula LaTex", colocar a palavra entre sifrões e usar o comando do LaTex para deixar em negrito, como mostra a Figura 2.32.

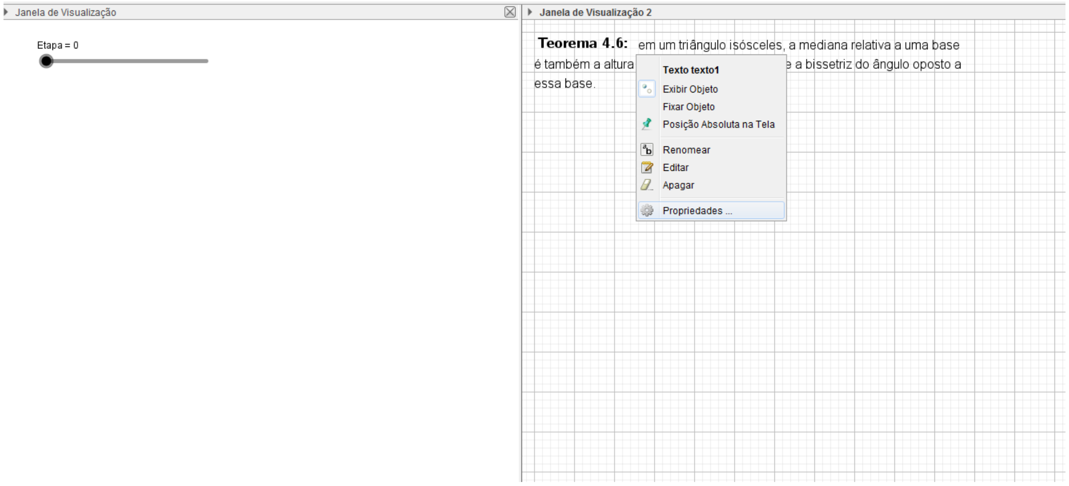
Figura 2.32: Inserindo palavras em negrito no texto.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para mais configurações do texto, basta selecionar com o botão direito em cima do texto e selecionar "Propriedades", como mostra na Figura 2.33.

Figura 2.33: Configurações do texto.



Fonte: Elaborada pela autora.

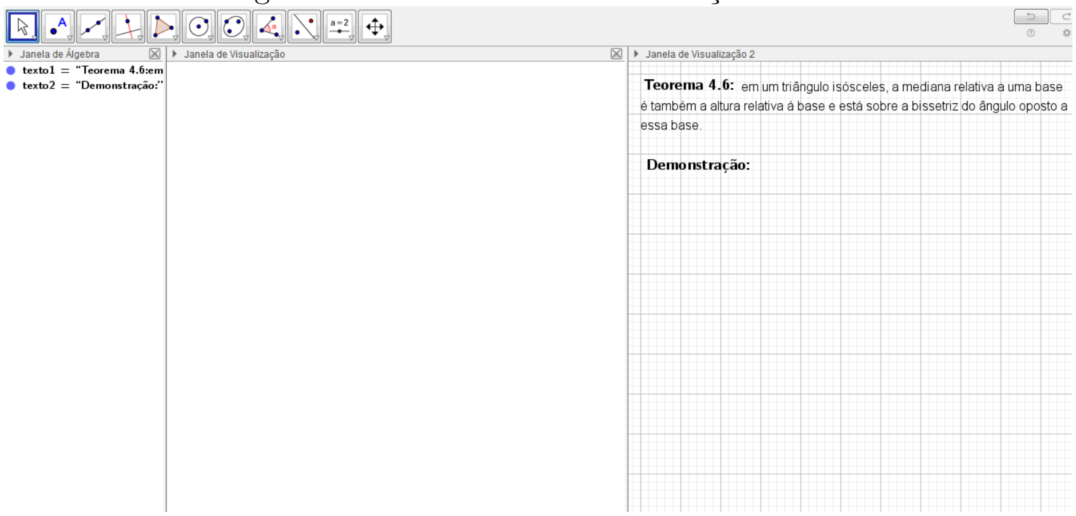
Abrirá uma janela à direita e, com ela, é possível alterar fonte, cor, entre outros detalhes do texto.

O próximo passo é inserir a demonstração. Uma dica é inserir primeiro a demonstração escrita, por partes, e depois inserir as representações geométricas, assim fica mais fácil quando for configurar o momento que cada objeto deverá aparecer.

É agora que a malha será útil, pois a demonstração escrita irá aparecer por partes, então a malha auxiliará na formatação, para que fique bem alinhado.

Na Figura 2.34 foi inserido a palavra **"Demonstração"** utilizando as mesmas ferramentas que utilizamos para inserir o enunciado.

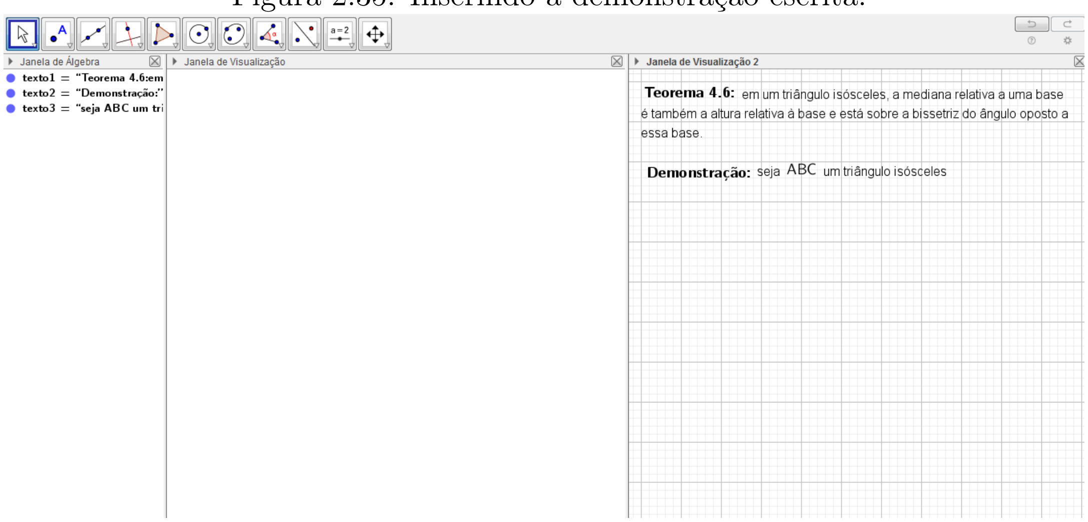
Figura 2.34: Inserindo a demonstração escrita.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 2.35 foi adicionado a primeira parte da demonstração. Observe que ABC, como está se referindo a um triângulo e foi utilizado uma linguagem matemática para representá-lo, ele foi digitado entre sifrões e selecionado "LaTex" (opcional).

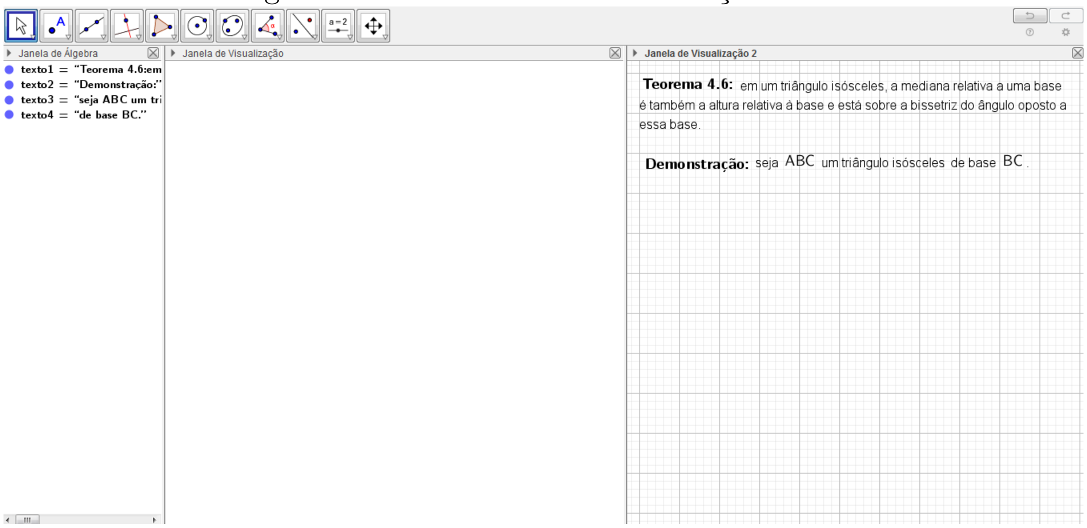
Figura 2.35: Inserindo a demonstração escrita.



Fonte: Elaborada pela autora.

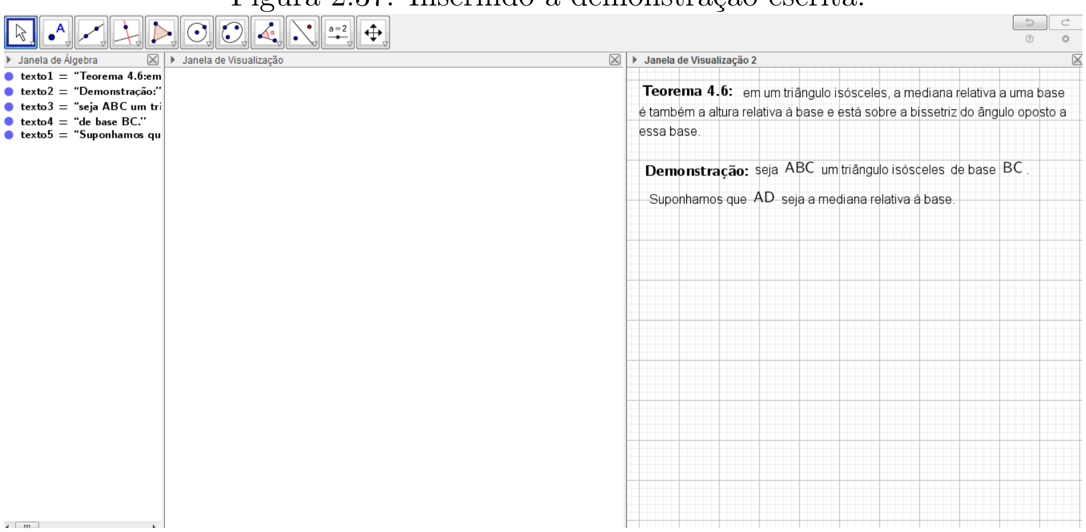
Mais partes da demonstração foram adicionadas na Figuras 2.36 e 2.37, utilizando as mesmas ferramentas anteriores de inserir textos.

Figura 2.36: Inserindo a demonstração escrita



Fonte: Elaborada pela autora.

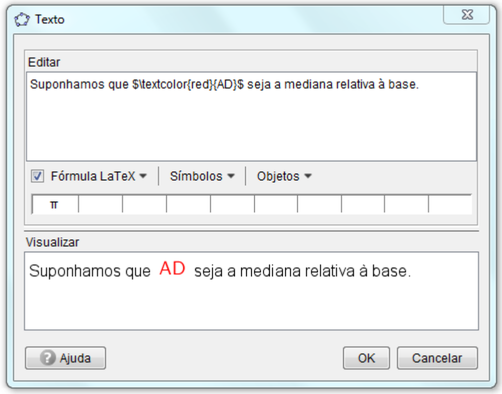
Figura 2.37: Inserindo a demonstração escrita.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para destacar os objetos, podemos utilizar os códigos do Latex para colorir partes do texto. Entre chaves colocamos o nome da cor em inglês e depois o objeto que deseja destacar, como na Figura 2.38 que foi destacado o segmento AD em vermelho. Observar na Figura 2.38 o código utilizado.

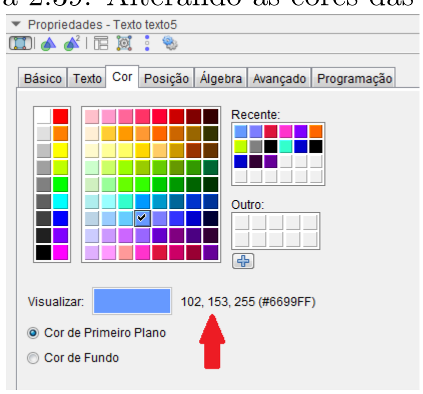
Figura 2.38: Alterando as cores das letras.



Fonte: Elaborada pela autora.

Outra maneira de escolher a cor, é ir em "Propriedade" do texto, "Cor", e verificar o código de cada cor. O código é formado por 3 números separados com vírgula, exemplo na Figura 2.39 que temos o código "102,153,255" como sendo de um tom de azul claro.

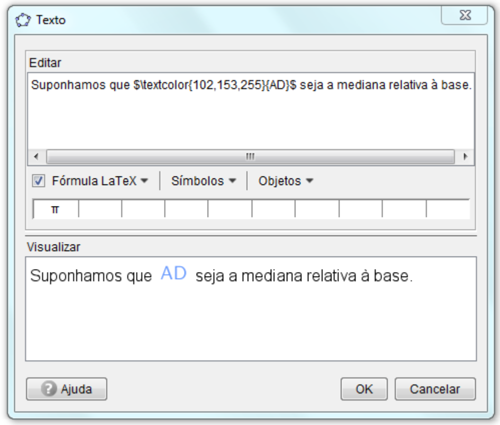
Figura 2.39: Alterando as cores das letras.



Fonte: Elaborada pela autora.

Então, ao digitar o texto, deve-se colocar esse código no lugar do nome da cor em inglês, como é possível conferir no exemplo na Figura 2.40.

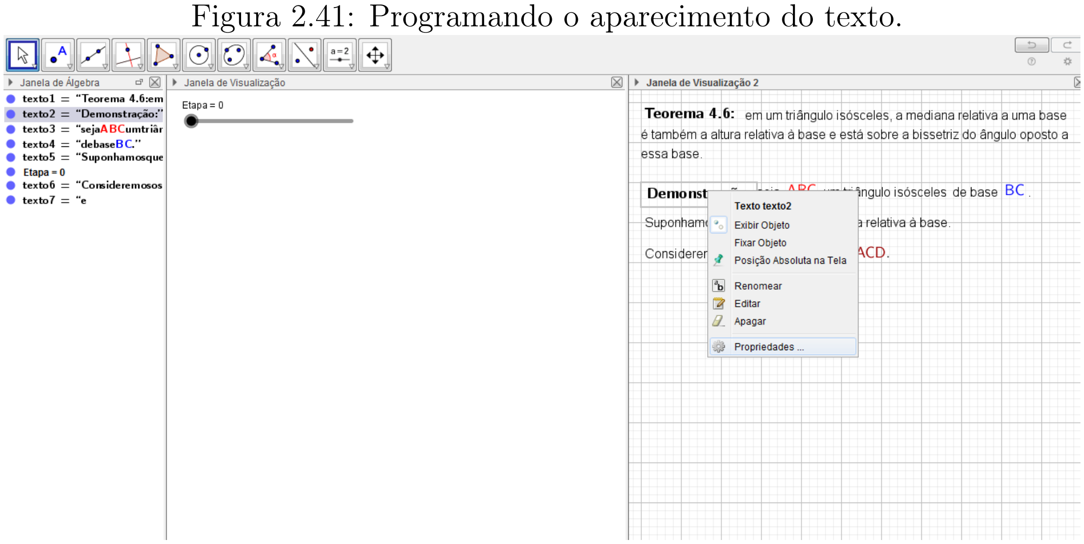
Figura 2.40: Alterando as cores das letras.



Fonte: Elaborada pela autora.

Ao terminar de inserir toda a demonstração escrita, pode-se programar como ela irá aparecer. Para isso, deve-se selecionar com o botão direito em cima do texto e depois “Propriedade”.

Figura 2.41: Programando o aparecimento do texto.

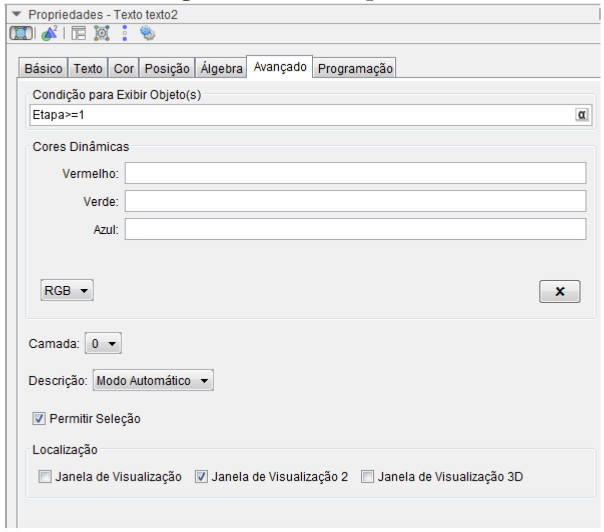


Fonte: Elaborada pela autora.

Em seguida selecione “Avançado” e preencha o espaço onde está escrito “Condição para Exibir Objeto(s)”, lembrando que deverá utilizar o nome dado ao controle deslizante.

Um exemplo temos na Figura 2.42 que é de digitar “Etapa>=1” e dar Enter, isso significa que o texto aparecerá quando o controle deslizante for maior ou igual a 1.

Figura 2.42: Programando o aparecimento do texto.



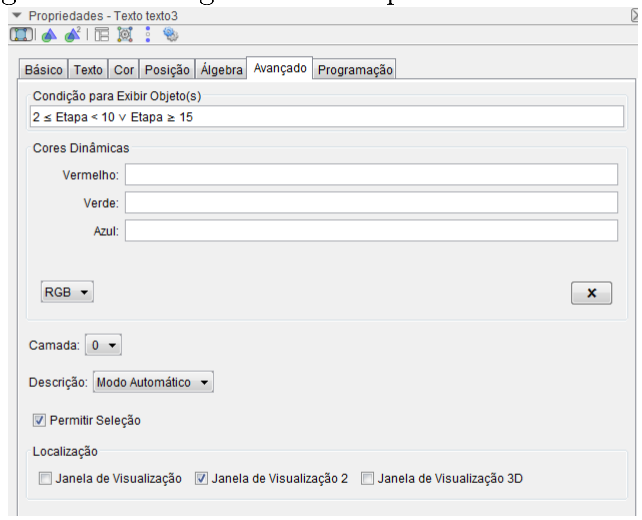
Fonte: Elaborada pela autora.

As próximas palavras do texto podemos colocar a condição de aparecimento como “Etapa>=2”, depois “Etapa>=3” e assim por diante.

Se a demonstração for muito grande e deseja que em algum momento algumas palavras não apareçam, é possível utilizar intervalos para a condição de aparecimento, como “2<=Etapa<10”, isso significa que o texto aparecerá quando o controle deslizante for maior ou igual a 2 e menor do que 10.

Podemos utilizar os símbolos $\vee$(ou) e $\wedge$(e), por exemplo, se digitarmos na condição de aparecimento “2<=Etapa<10 $\vee$ Etapa>=15”, o objeto aparecerá quando o Controle deslizante for igual a 2, esconderá quando for maior que 10 e aparecerá novamente quando for maior ou igual a 15. Exemplo representado na Figura 2.43.

Figura 2.43: Programando o aparecimento do texto.



Fonte: Elaborada pela autora.

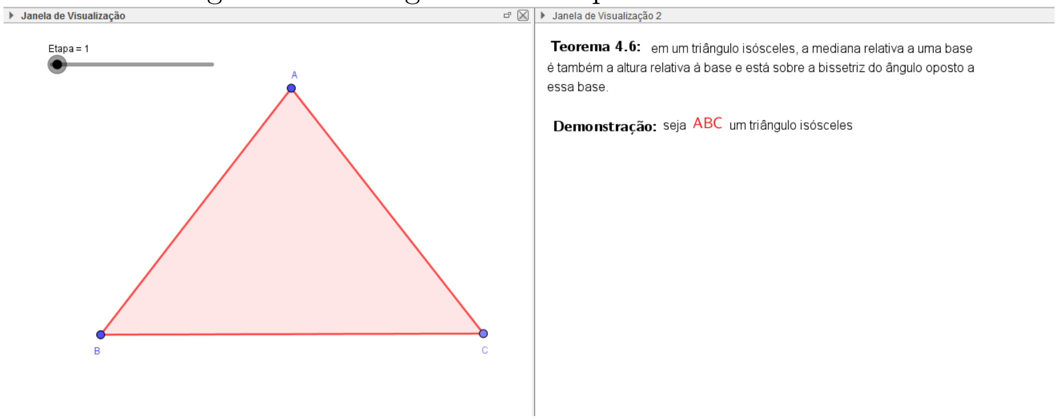
Depois de programado toda a demonstração escrita, podemos começar a construção dos objetos na Janela de Visualização, onde representaremos geometricamente cada objeto citado no texto. Para isso, devemos ir adicionando os objetos, seguindo a ordem da demonstração escrita e em seguida programar a condição de aparecimento da mesma maneira que foi feito com o texto.

Podemos utilizar nas imagens as mesmas cores que foram utilizadas no texto, para nos referirmos aos mesmos objetos representados de maneira diferente.

Temos como exemplo a Figura 2.44, que quando o controle deslizante ficou igual a 1, apareceu o texto na Janela de Visualização 2 escrito ABC em vermelho e na outra Janela de Visualização apareceu a imagem de um triângulo vermelho com vértices ABC.

Para isso acontecer foi configurado todas as condições de aparecimento dos objetos pertencentes ao triângulo, como lados, vértices e o próprio triângulo. O processo de configuração das condições de aparecimento é a mesma utilizada no texto. Selecione o objeto com o botão direito, depois “Propriedades”, “Avançado” e digitar a condição de aparecimento.

Figura 2.44: Programando o aparecimento do texto.

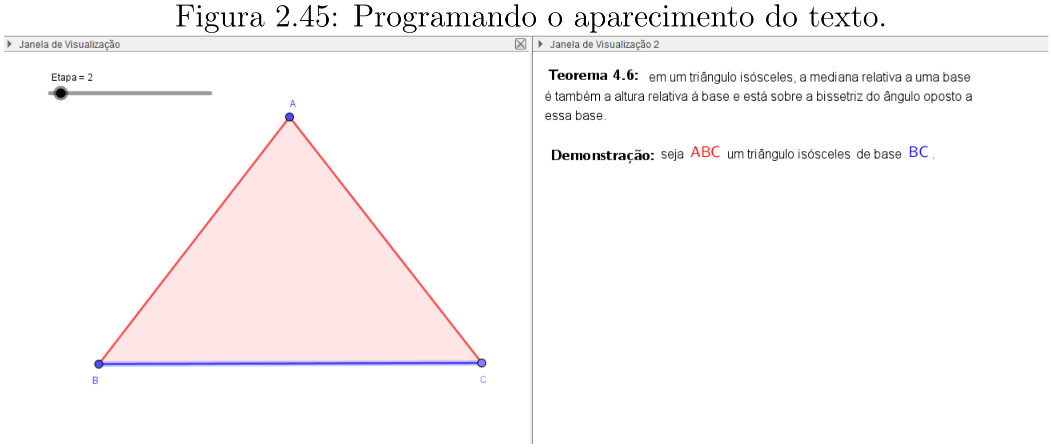


Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 2.45 podemos perceber que o controle deslizante mudou para "Etapa=2" e apareceu um texto na Janela de Visualização 2 destacando o segmento BC de azul e o segmento BC que estava em vermelho na Janela de Visualização foi escondido e apareceu agora com a cor azul.

Para isso a condição de aparecimento do segmento BC que está em vermelho foi configurado para aparecer "1<=Etapa<2" e o segmento BC em azul foi configurado para aparecer quando "Etapa>=2". Dessa forma, quando um segmento se escode o outro aparece de acordo com o que está sendo citado na Janela de Visualização 2.

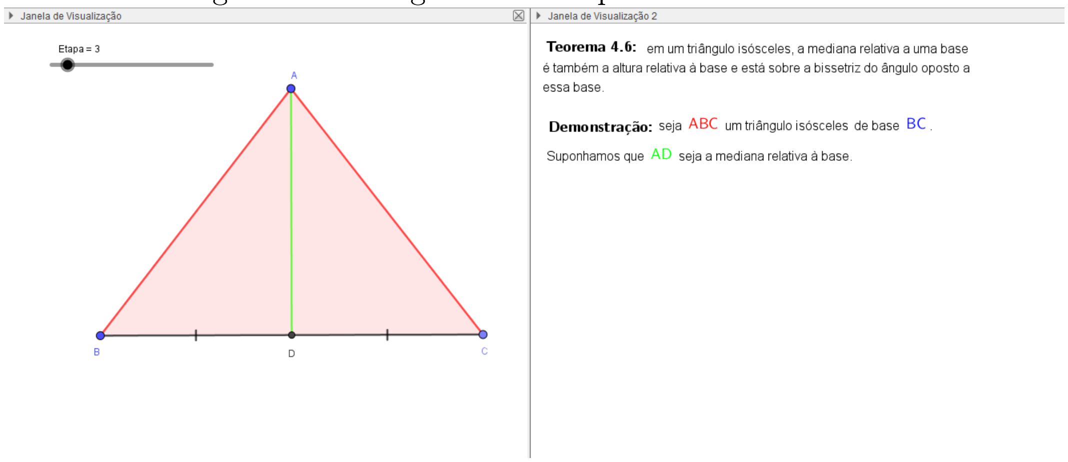
Figura 2.45: Programando o aparecimento do texto.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 2.46, onde o controle deslizante está na "Etapa=3", foi construído a mediana AD.

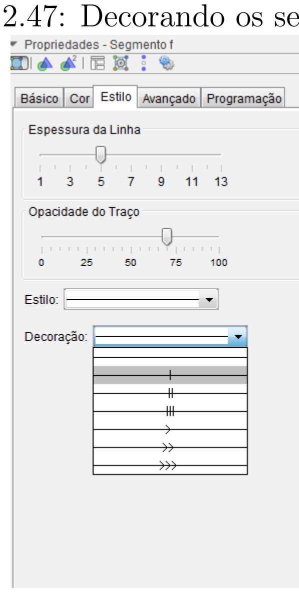
Figura 2.46: Programando o aparecimento do texto.



Fonte: Elaborada pela autora.

Observe na Figura 2.46 que para destacar que D é o ponto médio do lado BC, ou seja, que $\overline{BD} = \overline{DC}$, foi utilizado uma decoração nos segmento. Para essa configuração, selecione com o botão direito o segmento, depois selecione "Propriedades", na sequência selecione "Estilo" e e por fim escolha a "Decoração", observe a Figura 2.47.

Figura 2.47: Decorando os segmentos.

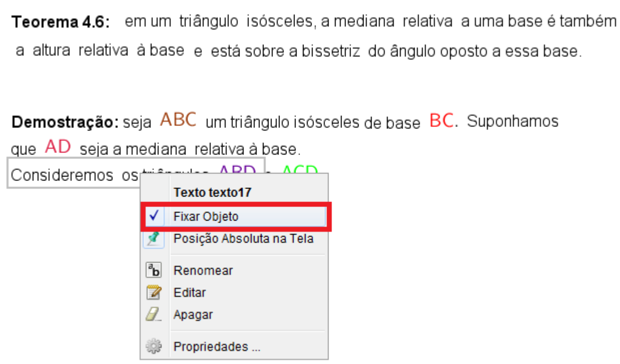


Fonte: Elaborada pela autora.

As próximas etapas seguem da mesma forma, os objetos da Janela de Visualização são programados para aparecerem de acordo com a ordem que eles aparecem na Janela de visualização 2. E quando possível, os objetos são programados para se esconderem, dessa forma as janelas de visualizações não ficam com muitas informações desnecessárias.

Uma dica importante é fixar os objetos que não devem ser movidos durante a demonstração. Para isso, basta selecionar com o botão direito em cima do objeto, que abrirá uma janela, como mostra a Figura 2.48, na sequência selecione a opção “Fixar Objeto”.

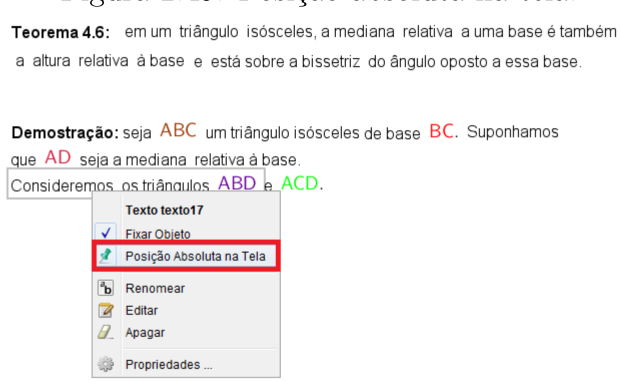
Figura 2.48: Fixando objeto.



Fonte: Elaborada pela autora.

Uma última dica, para finalizar, é selecionar a opção “Posição Absoluta na Tela”, como mostra a Figura 2.49. Quando essa opção é selecionada, por mais que a Janela de Visualização for movida ou der zoom, o objeto não se moverá.

Figura 2.49: Posição absoluta na tela.



Fonte: Elaborada pela autora.

CAPÍTULO 3
FICHAS DIDÁTICAS

Nesse capítulo iremos apresentar três fichas didáticas como proposta de ensino. O objetivo principal foi preparar atividades dinâmicas utilizando o software GeoGebra.

Cada ficha didática contém a ficha do aluno e a ficha do professor. O professor pode voltar ao primeiro capítulo segunda e terceira seções para revisar o conteúdo, se necessário.

3.1 Ficha 1 - Congruência de triângulos.

Essa é uma atividade proposta para turmas de oitavos anos envolvendo os casos de congruências de triângulo.

O objetivo dessa atividade é de revisar a definição de congruência de triângulos, comparar triângulos utilizando os casos de congruência e aplicar a propriedade em relação à soma dos ângulos internos de um triângulo através de exercícios e explicações dinâmicas elaborados no software GeGgebra.

As atividades podem ser realizadas em duplas. Primeiramente, os alunos relembrarão os quatro casos de congruências com o auxílio do software GeoGebra na Atividade 1. Na sequência, realizarão a Atividade 2, onde deverão aplicar os casos de congruências para compararem e justificarem se os grupos de triângulos são congruentes. E, para finalizar, os alunos irão realizar a Atividade 3, onde terão que comparar as justificativas que fizeram na Atividade 2 com as justificativas dinâmicas no software Geogebra.

O tempo previsto para a aplicação das três atividades é de duas aulas de 50 minutos. Dez minutos para a atividade 1, quarenta minutos para a atividade 2, trinta minutos para atividade 3 e o tempo restante para o professor fazer as observações que achar necessário.

Os materiais necessários para a aplicação são as fichas do aluno impressas, uma para cada aluno presente na aula e computadores ou smartphones com acesso à internet para cada dupla.

FICHA DO PROFESSOR

Turma: $8^{\underline{o}}$ ano

Conteúdo: Casos de congruências de triângulo.

Objetivos específicos:

Revisar a definição de congruência de triângulo;

Realizar a comparação de triângulos utilizando casos de congruência;

Aplicar a propriedade em relação à soma dos ângulos internos de um triângulo.

Habilidade BNCC (EF08MA14): Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.

Duração: Duas aulas de 50 minutos.

Recursos necessários: Ficha do aluno; Computadores ou smartphones com acesso à internet para cada dupla.

As atividades podem ser realizadas em duplas. Primeiramente, os alunos relembrarão os 4 casos de congruências com o auxílio do software GeoGebra. Na sequência, realizarão uma atividade que deverão aplicar os casos de congruências para comparar se os triângulos são congruentes. E, para finalizar, os alunos irão comparar as justificativas que eles realizaram com as justificativas no software GeoGebra.

Na sequência, apresentaremos detalhadamente cada atividade:

Atividade 1 (Tempo sugerido: 10 minutos).

Objetivo: Revisar a definição de congruência de triângulos e os casos de congruências de triângulos.

Os alunos terão que acessar o link ou qr-code abaixo que contém a explicação dos 4 casos de congruências (Caso LLL, LAL, ALA e LAA_o). Movendo o controle deslizante, eles irão verificar cada caso.

`https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/rh7upphv`

O professor deverá auxiliar caso os alunos tenham dificuldade em mover o controle deslizante. Importante o professor acessar antes o material, para estar preparado para auxiliar os alunos.

Atividade 2 (Tempo sugerido: 40 minutos).

Objetivo: Verificar a existência de congruências de triângulos, utilizando os casos de congruências e propriedade da soma dos ângulos internos dos triângulos.

Para a realização da atividade 2 os alunos terão que acessar o link ou o qr-code abaixo:

`https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/cvh6p7ma`

A atividade 2 está dividida em 11 exercícios. Cada exercício contém pares ou trios de triângulos. Os alunos terão que comparar os triângulos e verificar se é possível relacioná-los por meio de algum caso de congruência ou não.

Os alunos poderão utilizar a propriedade em relação a soma dos ângulos internos de um triângulo quando necessário.

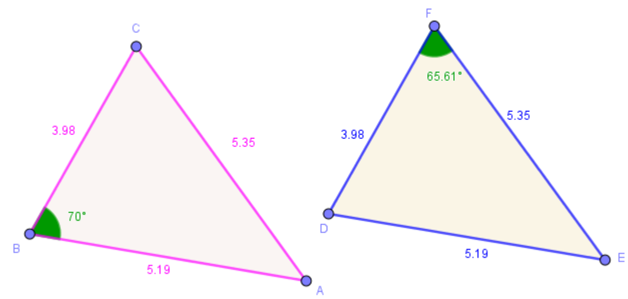
Em cada item eles irão realizar as justificativas e realizar as anotações necessárias na ficha do aluno.

É importante que o professor fique atento as justificativas realizadas pelos alunos, para que possa fazer as interversões necessárias.

A seguir apresentaremos o que se espera durante a resolução de cada exercício da Atividade 2:

a) Espera-se que os alunos apliquem o caso de congruência LLL, para justificarem que os triângulos ABC e DEF são congruentes.

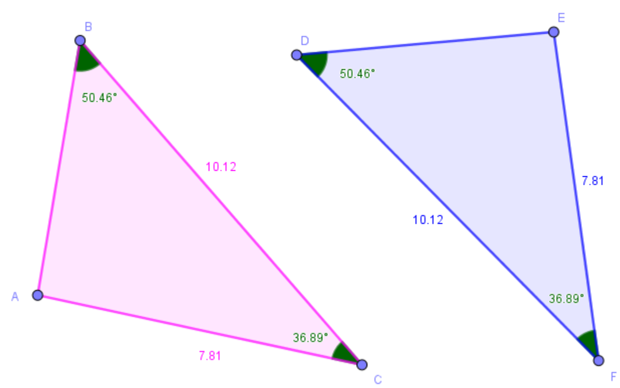
Figura 3.1: Item a).



Fonte: Elaborada pela autora.

b) Espera-se que os alunos apliquem o caso ALA, para justificarem que os triângulos ABC e DEF são congruentes.

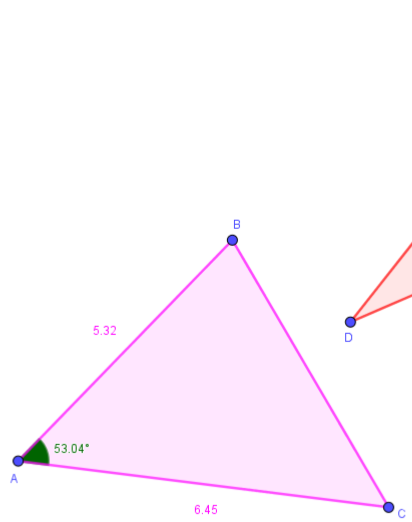
Figura 3.2: Item b).



Fonte: Elaborada pela autora.

c) Espera-se que os alunos percebam que os triângulos não são congruentes, pois apesar de terem os ângulos internos $\hat{A} \equiv \hat{F}$ e os lados $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$, no triângulo DEF o ângulo congruente, não está entre os lados congruentes. Importante o professor no momento da correção reforçar a importância de seguirem a ordem nos casos de congruências.

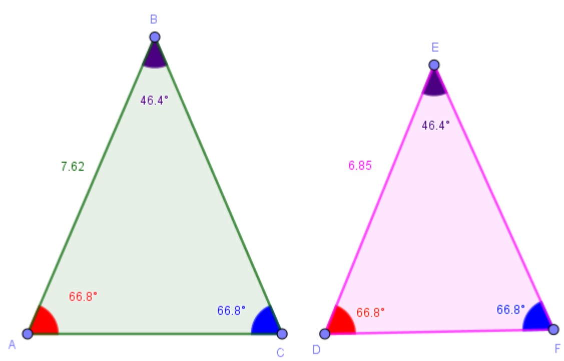
Figura 3.3: Item c).



Fonte: Elaborada pela autora.

d) Os triângulos ABC e DEF possuem todos os ângulos internos correspondentes congruentes, porém não tem nenhum caso de congruência que garante que triângulo com ângulos internos correspondentes congruentes sejam congruentes.

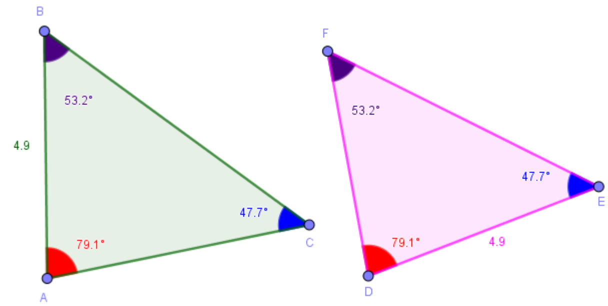
Figura 3.4: Item d).



Fonte: Elaborada pela autora.

e) Espera-se que os alunos percebam que os triângulos ABC e DEF não são congruentes, pois não basta que os triângulos possuam um lado e os três ângulos correspondentes congruentes para garantir que esses triângulos serão congruentes. Importante seguir a ordem correta.

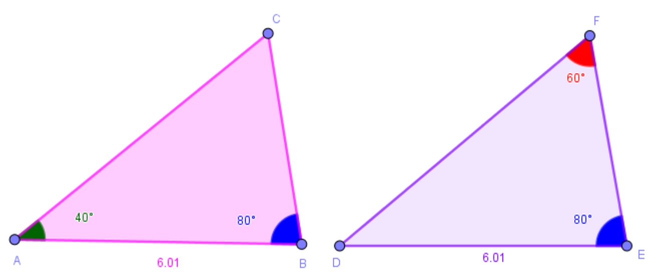
Figura 3.5: Item e).



Fonte: Elaborada pela autora.

f) Espera-se que os alunos apliquem a propriedade em relação a soma dos ângulos internos de um triângulo para descobrir a medida dos ângulos que estão faltando. E na sequencia percebam que é possível aplicar o caso de congruência ALA ou LAA_o para afirmar que os triângulos ABC e DEF são congruentes.

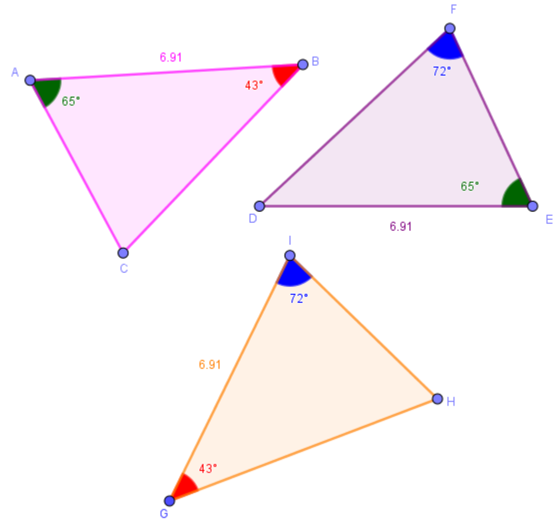
Figura 3.6: Item f).



Fonte: Elaborada pela autora.

g) Espera-se que os alunos apliquem a propriedade em relação a soma dos ângulos internos dos triângulos para encontrar a medida dos ângulos internos que estão faltando e, em seguida, percebam que os triângulos ABC e DEF são congruentes pelo cado ALA. E que o triângulo GHI não é congruente aos dois primeiros.

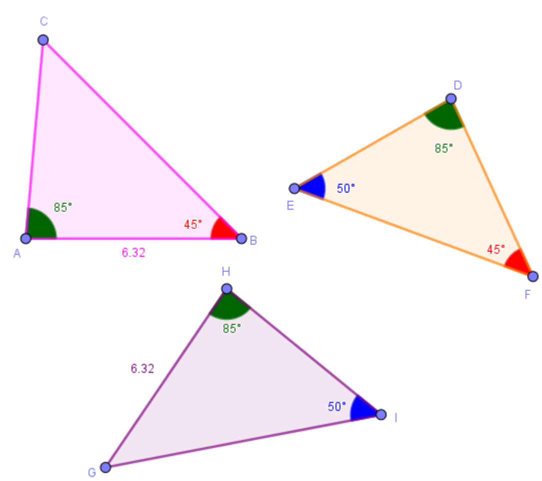
Figura 3.7: Item g).



Fonte: Elaborada pela autora.

h) Espera-se que os alunos apliquem a propriedade em relação a soma dos ângulos internos de um triângulo para encontrarem a medida dos ângulos internos que estão faltando. Na sequência, percebam que os triângulos ABC e DEF não são congruentes, pois apesar de terem todos os ângulos internos correspondentes com medidas iguais, isso não garante que eles sejam congruentes. Espera-se também que percebam que os triângulos ABC e GHI são congruentes, podemos justificar o utilizando o caso de congruência ALA ou LAA_o.

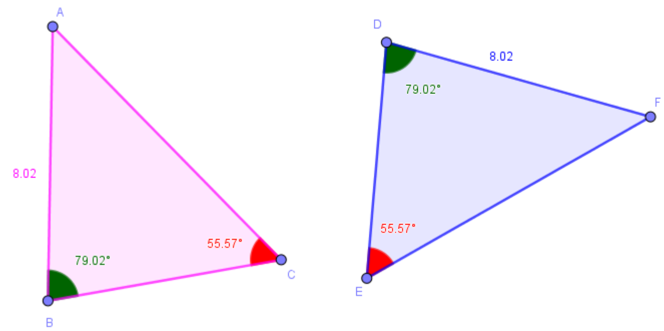
Figura 3.8: Item h).



Fonte: Elaborada pela autora.

i) Espera-se que os alunos apliquem o caso de congruência LAA_o para justificar que os triângulos ABC e DEF são congruentes.

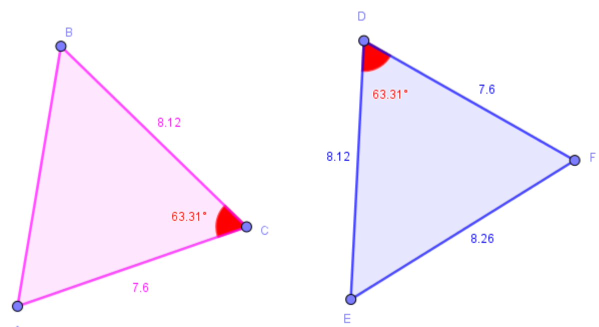
Figura 3.9: Item i).



Fonte: Elaborada pela autora.

j) Espera-se que percebam que os triângulos ABC e DEF são congruentes, podendo justificar a congruência pelo caso LAL.

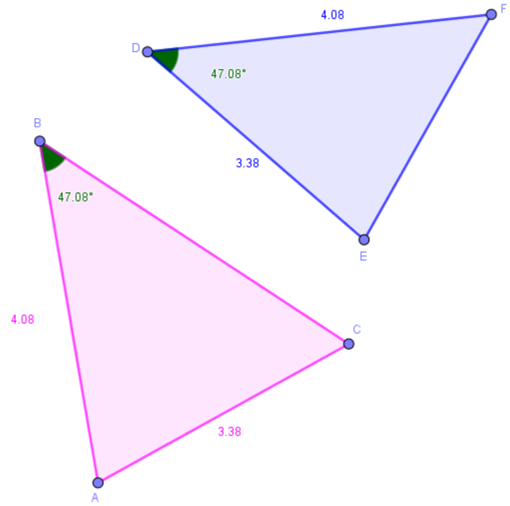
Figura 3.10: Item j).



Fonte: Elaborada pela autora.

k) Espera-se que percebam que não é possível aplicar nenhum acaso de congruência para afirmar que os triângulos ABC e DEF são congruentes. O professor sempre deve ficar atento e reforçar a importância de seguir a ordem correta.

Figura 3.11: Item k).



Fonte: Elaborada pela autora.

Atividade 3 (Tempo sugerido: 30 minutos).

Objetivo: Compreender como os casos de congruências podem ser utilizados para comparar triângulos.

Espera-se que os alunos compreendam que não basta que triângulos tenham um lado e dois ângulos em comum para serem congruentes, é necessário que o lado esteja entre os ângulos.

Espera-se também que percebam que não basta os triângulos terem dois lados e um ângulo em comum para serem congruentes, é necessário considerar que o ângulo esteja entre os lados.

Os alunos acessarão o link ou o qr code abaixo e irão conferir as justificativas dinâmicas da atividade 2 realizada no software Geogebra e compararão com as justificativas que foram feitas na ficha do aluno:

`https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/ve9zzmwa`

Em cada item os alunos irão mover o controle deslizante e acompanhar atentamente cada etapa das justificativas.

MATERIAIS COMPLEMENTARES:

Vídeos:

Congruência e Semelhança de Triângulos | Matemática do ENEM. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=hXTrs8KfdsI&t=116s

Casos de congruência de triângulos - Parte I. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=FG2sbF3IWGs

Livros Digitais:

Livro digital contendo as demonstrações dos casos de congruências. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#chapter/653662

Livro de geometria plana dinâmico do autor Jorge Cássio. Contém atividades envolvendo os casos de congruência de triângulo entre outros conteúdos. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/hsXHDRX7

Livros:

GERÔNIMO, João Roberto; BARROS, Rui Marcos de Oliveira; FRANCO, Valdeni Soliani. Geometria Euclidiana Plana um estudo com o software Geogebra.

Gerônimo, João R; Franco, Valdeni S., Geometria Plana um estudo axiomatico, Eduem, Maringá, 2010.

OBSERVAÇÃO: Para a realização dessa ficha didática foram utilizadas algumas ideias do plano de aula elaborado por Renata Akemi Maekawa. O plano de aula está disponível pelo link ou qr-code abaixo:

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1523/identificando-triangulos-congruentes#atividade

FICHA DO ALUNO

Atividade 1

O objetivo dessa atividades é relembrar os casos de congruências com o auxílio do software GeoGebra.

Acessem o link ou o qr-code abaixo para relembrar quais são os 4 casos de congruências:

`https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/rh7upphv`

Atividade 2

O objetivo dessa atividade é conseguir aplicar os casos de congruências para verificar se os triângulos são congruentes e quando necessário utilizar a propriedade em relação soma dos ângulos internos de um triângulo.

Acessem o link ou o qr-code abaixo que contém a atividade 2. Essa atividade está dividida em 11 exercícios. Em cada exercício, compare os triângulos e verifique quais triângulos são congruentes:

`https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/cvh6p7ma`

Caso os triângulos sejam congruentes, justifique aplicando um dos casos de congruências. Faça todas as justificativas e anotações que acharem importantes na folha de resposta.

Folha de resposta

a) Os triângulos são congruentes? Justifique:

b) Os triângulos são congruentes? Justifique:

c) Os triângulos são congruentes? Justifique:

d) Os triângulos são congruentes? Justifique:

e) Os triângulos são congruentes? Justifique:

f) Os triângulos são congruentes? Justifique:

g) Os triângulos são congruentes? Justifique:

h) Os triângulos são congruentes? Justifique:

i) Os triângulos são congruentes? Justifique:

j) Os triângulos são congruentes? Justifique:

k) Os triângulos são congruentes? Justifique:

Atividade 3

O objetivo dessa atividade é comparar e verificar as justificativas realizadas na Atividade 2.

Acessem o link ou o qr-code abaixo e verifiquem as justificativas de cada item da atividade 2. Comparem as justificativas do GeoGebra com as justificativas anotadas na ficha de respostas.

`https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/ve9zzmwa`

3.2 Ficha 2 - Propriedades do triângulo isósceles

Essa atividade foi preparada para ser aplicada em turmas de oitavos anos. O conteúdo envolvido são as propriedades em relação aos triângulo isósceles. O objetivo dessa atividade é explorar as propriedades dos triângulos isósceles através da geometria dinâmica, revisar as definições de elementos da geometria e explorar as construções geométricas no software GeoGebra.

As atividades propostas podem ser realizadas em duplas e aplicadas como forma de fixação do conteúdo ensinado. Outra sugestão é aplicar antes da explicação para que os alunos explorem as propriedades no triângulo isósceles.

Antes da realização das atividades os alunos precisam saber a definição de triângulo isósceles, mediana, ângulos internos, ponto médio, altura e bissetriz. Uma sugestão é utilizar o software GeoGebra para ensinar ou relembrar os alunos a definição de cada um desses elementos. É possível aproveitar esse momento para ensinar os alunos a utilizarem algumas ferramentas do software.

Dividimos esse planejamento em duas partes, na primeira os alunos relembram algumas definições da geometria e na segunda parte os alunos exploram as propriedades do triângulo isósceles.

A segunda parte foi dividida em três exercícios dinâmicos que estão disponível online. No primeiro exercício os alunos explorarão a propriedade em relação aos ângulos da base de um triângulo isósceles. No segundo e no terceiro exercício os alunos explorarão a propriedade em relação a mediana, bissetriz e altura de um triângulo isósceles.

O tempo previsto para a aplicação é de uma aula de 50 minutos. Para a aplicação é necessário que cada aluno ou cada dupla de alunos possuam um computador ou um smartphone com acesso à internet e fichas dos alunos impressas.

FICHA DO PROFESSOR

Turma: $8^{\underline{o}}$ ano

Conteúdo: Propriedades do triângulo isósceles.

Objetivos específicos:

Explorar as propriedades do triângulo isósceles através da geometria dinâmica;

Revisar a definição de elementos da geometria;

Explorar a construções geométricas no software GeoGebra.

Habilidade BNCC: (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

Duração: Uma aula de 50 minutos.

Recursos necessários:

Computador ou smartphone com acesso à internet para cada dupla e uma ficha do aluno impressa para cada aluno.

As atividades propostas podem ser realizadas em duplas e aplicadas como forma de fixação do conteúdo ensinado. Outra sugestão é aplicar antes da explicação para que os alunos explorem as propriedades no triângulo isósceles.

Antes da realização das atividades os alunos precisam saber a definição de triângulo isósceles, mediana, ângulos internos, ponto médio, altura e bissetriz. Uma sugestão é utilizar o software GeoGebra para ensinar ou relembrar os alunos a definição de cada um desses elementos. É possível aproveitar esse momento para ensinar os alunos a utilizarem algumas ferramentas do software.

Dividimos esse planejamento em duas partes, na primeira os alunos relembrarão algumas definições da geometria e na segunda parte os alunos explorarão as propriedades do triângulo isósceles.

A segunda parte foi dividida em três exercícios dinâmicos que estão disponível online. No primeiro exercício os alunos explorarão a propriedade em relação aos ângulos da base de um triângulo isósceles. No segundo e no terceiro exercício os alunos explorarão a propriedade em relação a mediana, bissetriz e altura de um triângulo isósceles.

Atividade 1 (Tempo sugerido: 10 minutos).

Objetivo: Revisar a definição elementos da geometria: triângulo isósceles, ponto médio, mediana, ângulos internos de um triângulo, altura e bissetriz.

Uma sugestão é utilizar o software GeoGebra para fazer a revisão. Após a explicação peça para os alunos responderem as seis perguntas abaixo com suas próprias palavras. Os alunos poderão responder na ficha do aluno onde já têm os enunciados e espaço para responderem.

Outra sugestão é aproveitar esse momento para que os alunos possam aprender a utilizar algumas ferramentas do software.

Abaixo temos as seis perguntas que os alunos terão que responder após a revisão. Essas perguntas estão disponíveis na ficha do aluno.

a) O que é um triângulo isósceles? O que é a base de um triângulo isósceles?

Triângulo isósceles é um triângulo que possui dois lados congruentes. A base de um triângulo isósceles é o lado com medida diferente.

b) O que é altura de um triângulo?

A altura é um segmento que parte do vértice formando um ângulo de 90º, isto é, perpendicular com o lado oposto a esse vértice.

c) O que é ponto médio de um segmento?

Ponto médio é o ponto que divide o segmento ao meio.

d) O que é a mediana de um triângulo?

É o segmento cujas extremidades são um dos vértices desse triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice.

e) O que é bissetriz de um ângulo?

Bissetriz é um segmento de reta que divide um ângulo em dois ângulos com medidas iguais.

f) O que são ângulos internos de um triângulo?

São os menores ângulos formados por dois lados dos triângulos.

Atividade 2 (Tempo sugerido: 40 minutos).

Objetivo: Explorar as propriedades de um triângulo isósceles através de atividades dinâmicas.

Essa segunda parte foi dividida em três exercícios, os alunos terão que acessar o link ou qr-code abaixo para poderem resolvê-los.

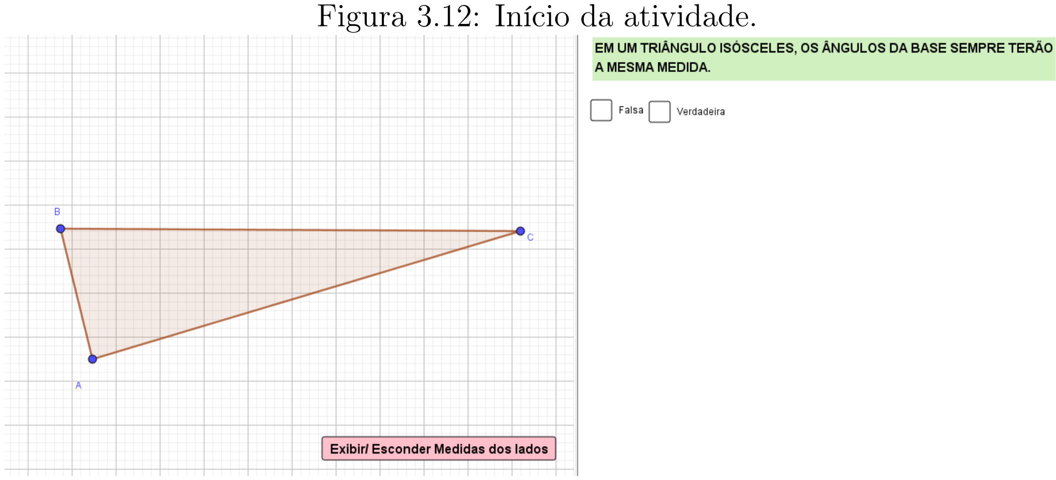
`https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/tvk92ea6`

A seguir temos uma explicação detalhada de como esperamos que os alunos resolvam os exercícios. Importante o professor ler antes as orientações, caso os alunos tenham dificuldades:

EXERCÍCIO 1: Nesse exercício os alunos explorarão a propriedade em relação a medida dos ângulos internos de um triângulo isósceles. Para isso, terão que verificar se a afirmação dada é verdadeira de acordo com seus conhecimentos e depois seguir 3 passos.

Primeiramente, deverão responder se a afirmação "EM UM TRIÂNGULO ISÓSCELES, OS ÂNGULOS DA BASE SEMPRE SERÃO CONGRUENTES" é verdadeira ou falsa, como mostra na Figura 3.12.

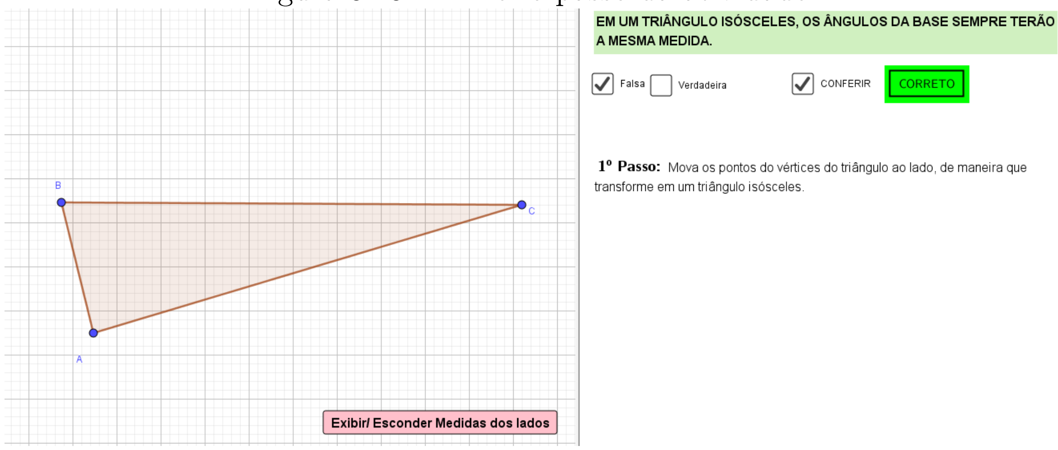
Figura 3.12: Início da atividade.



Fonte: Elaborada pela autora.

Em seguida, selecionarão o botão "CONFERIR", para conferirem as respostas. Assim que selecionarem esse botão, além de aparecer se a resposta está correta ou incorreta, também aparecerá o primeiro comando que todos deverão seguir, como mostra a Figura 3.13.

Figura 3.13: Primeiro passo da atividade.

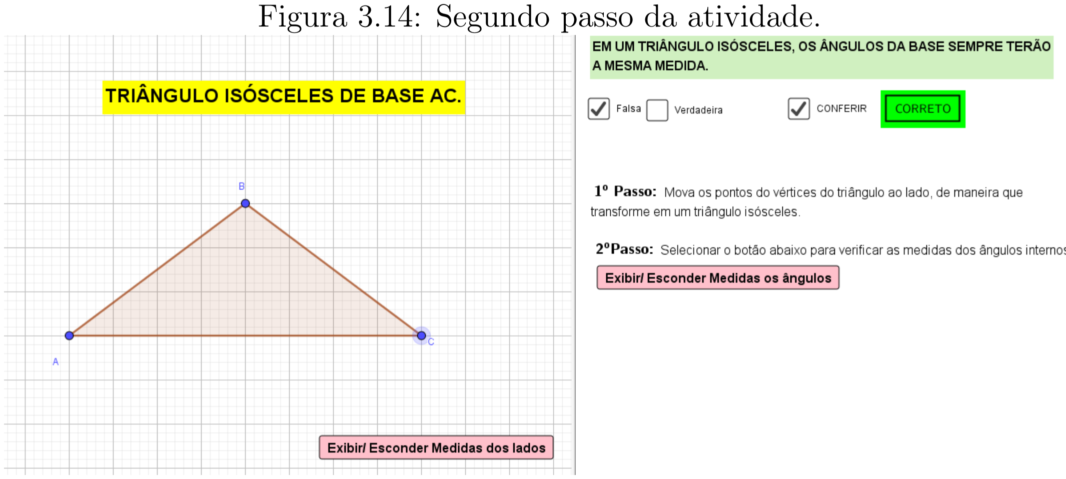


Fonte: Elaborada pela autora.

O primeiro passo os alunos terão que mover os vértices do triângulo ABC utilizando o mouse, com objetivo de transformar o triângulo ABC em um triângulo isósceles.

Eles terão a opção de selecionar o botão para exibir e esconder as medidas dos lados durante a atividade. Após concluírem o primeiro passo, aparecerá na janela de visualização o comando do segundo passo, como podemos observar na Figura 3.14.

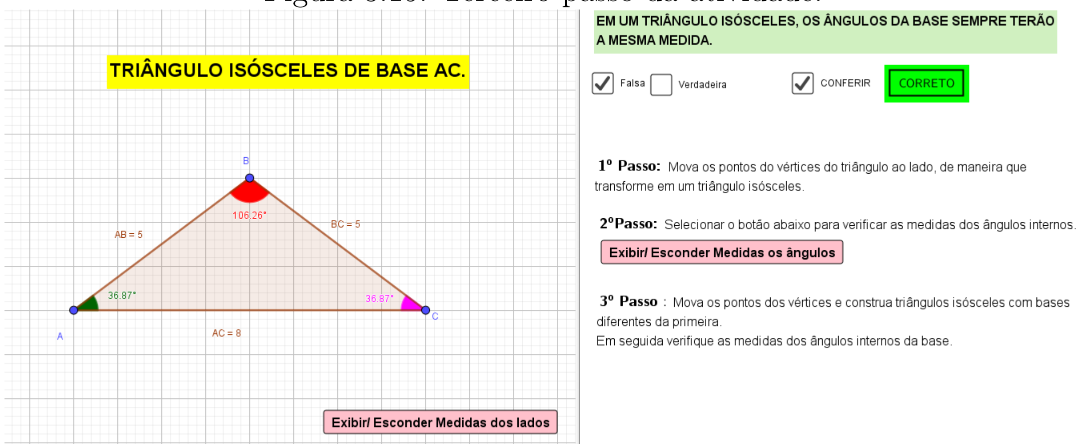
Figura 3.14: Segundo passo da atividade.



Fonte: Elaborada pela autora.

No segundo passo, todos devem selecionar o botão para exibir as medida dos ângulos e observar esses valores. Objetivo nesse momento é que os alunos percebam que os ângulos da base do triângulo isósceles construído por eles são congruentes entre si. Assim que selecionarem o botão, aparecerá o comando para o terceiro passo, observe a Figura 3.15.

Figura 3.15: Terceiro passo da atividade.



Fonte: Elaborada pela autora.

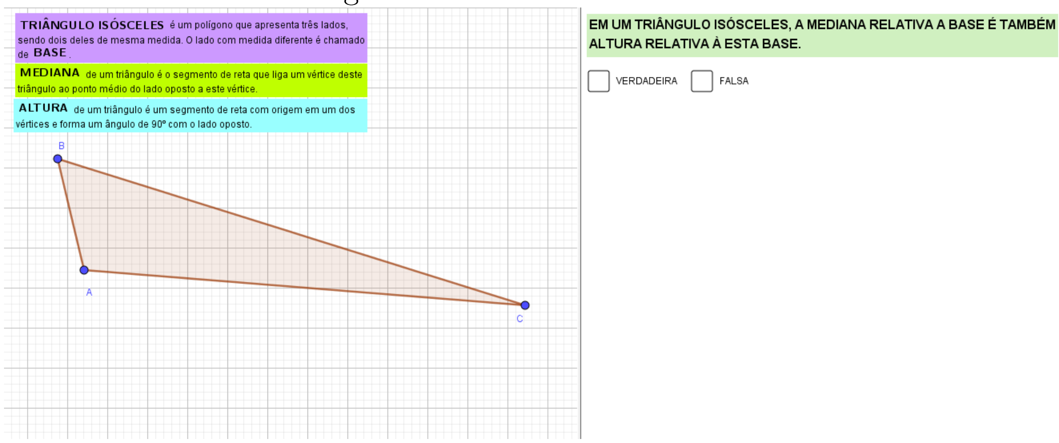
Para finalizar, os alunos moverão novamente os vértices, transformando o triângulo ABC em outros triângulos isósceles, com medidas e bases diferentes. O objetivo é que percebam que independente da base e das medidas dos lados, no triângulo isósceles a medida dos ângulos da base sempre serão congruentes.

EXERCÍCIO 2: Nesse exercício os alunos explorarão a propriedade em relação a mediana e a altura de um triângulo isósceles. Para isso terão que verificar se a afirmação dada é verdadeira de acordo com seus conhecimentos e depois terão que seguir 4 comandos.

Para finalizar, será realizado uma conclusão e a apresentação de um exemplo onde poderão mover os vértices do triângulo e explorar suas propriedades.

No início todos deverão verificar se a afirmação "EM UM TRIÂNGULO ISÓSCELES, A MEDIANA RELATIVA A BASE É TAMBÉM ALTURA RELATIVA À ESSA BASE." é verdadeira ou falsa, como mostra na Figura 3.16.

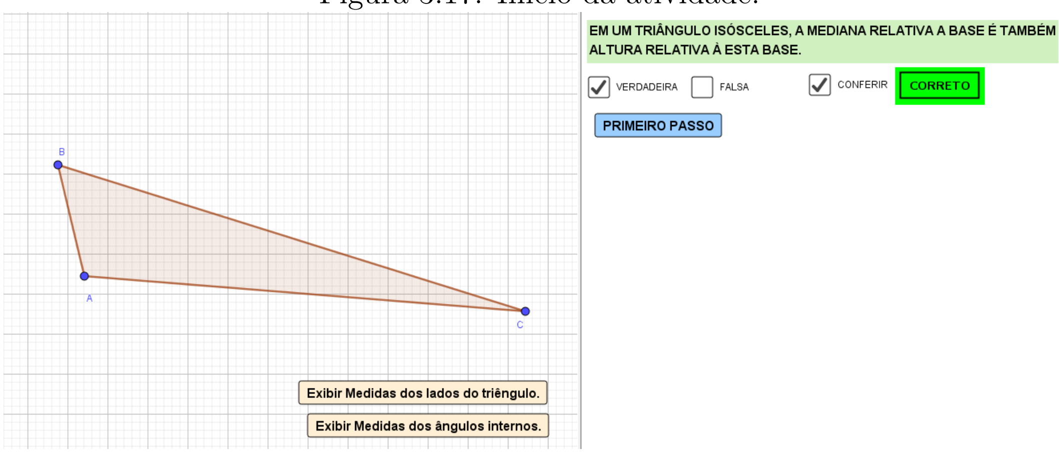
Figura 3.16: Início da atividade..



Fonte: Elaborada pela autora.

Em seguida conferir suas respostas selecionando o botão de "CONFERIR", como mostra a Figura 3.17.

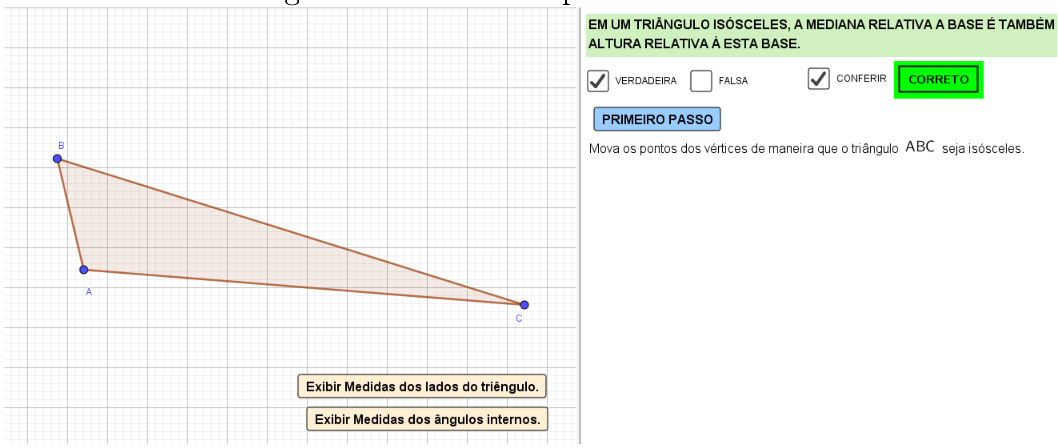
Figura 3.17: Início da atividade.



Fonte: Elaborada pela autora.

Após conferirem se respostas estão corretas ou incorretas, aparecerá um botão escrito "PRIMEIRO PASSO", basta que selecionem esse botão que aparecerá o primeiro comando que os alunos terão que seguir, como mostra a Figura 3.18.

Figura 3.18: Primeiro passo da atividade.

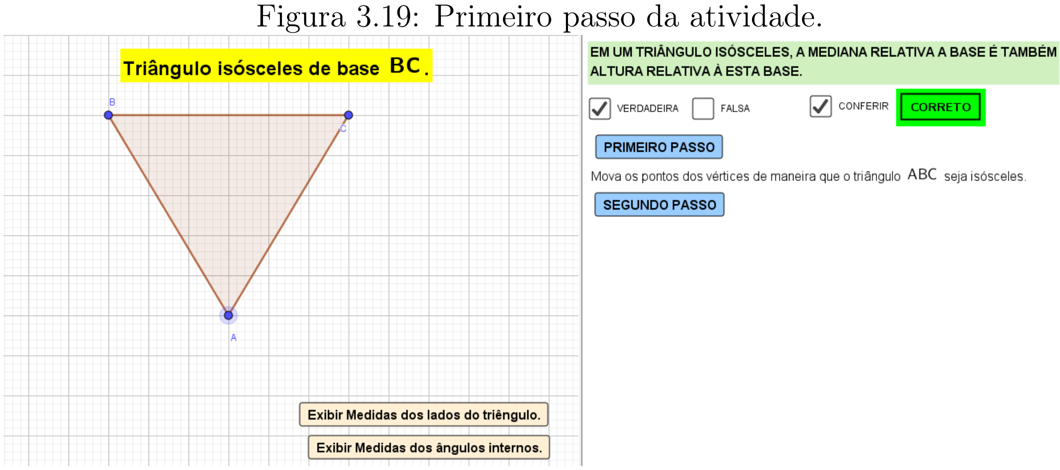


Fonte: Elaborada pela autora.

No primeiro passo, todos deverão mover os vértices do triângulo ABC de maneira que o triângulo ABC se transforme em um triângulo isósceles.

Os alunos terão a opção de selecionarem o botão para exibir e esconder as medidas dos lados durante a atividade. Após construído o triângulo isósceles aparecerá um botão escrito "SEGUNDO PASSO", como mostra na Figura 3.19, basta selecioná-lo e o próximo comando aparecerá.

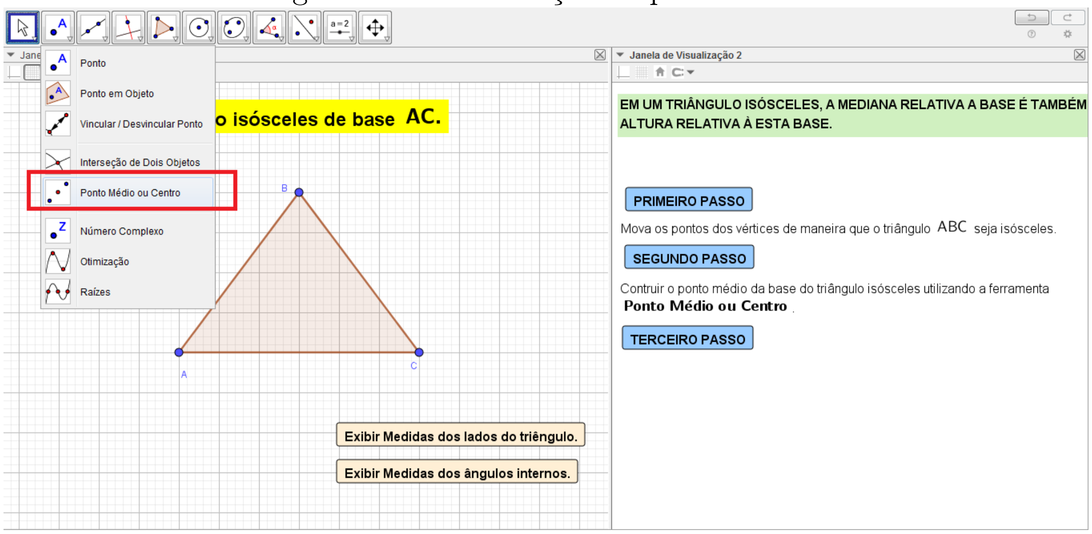
Figura 3.19: Primeiro passo da atividade.



Fonte: Elaborada pela autora.

No segundo passo, os alunos irão construir o ponto médio utilizando a ferramenta "Ponto Médio ou Centro". Essa ferramenta fica na segunda janela da esquerda para a direita, de ferramentas do GeoGebra, como podemos observar na Figura 3.20.

Figura 3.20: Construção do ponto médio.

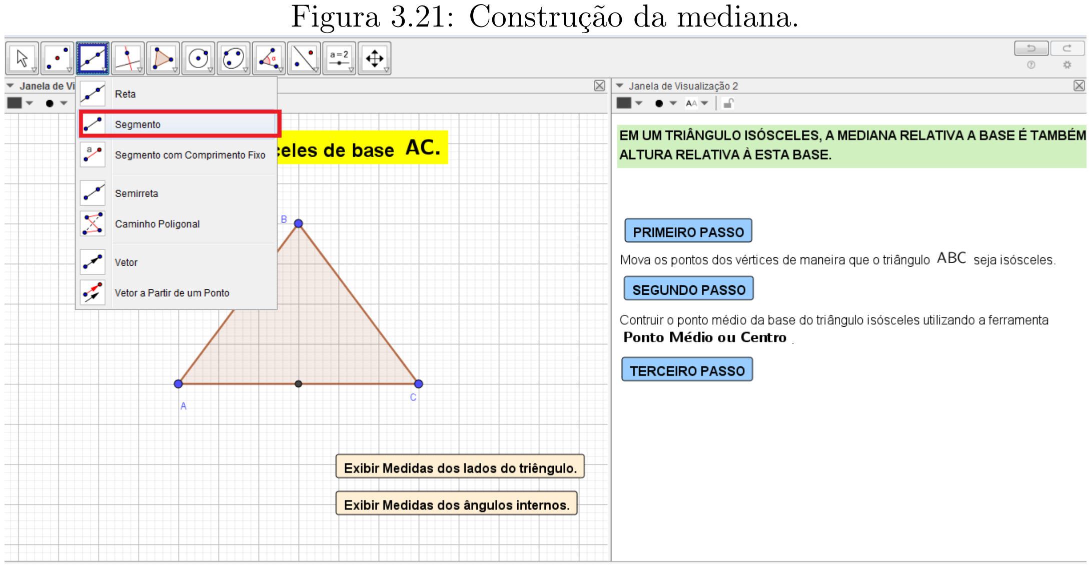


Fonte: Elaborada pela autora.

Importante auxiliá-los na construção se tiverem dificuldade. Para a construção, os alunos selecionarão essa ferramenta e em seguida selecionarão a base do triângulo, automaticamente o ponto médio será exibido na janela de visualização. Após a construção do ponto médio, eles deverão selecionar o botão “TERCEIRO PASSO”.

No terceiro passo é realizado a construção da mediana. Para isso, basta que selecionem a ferramenta “Segmento”, que fica na terceira janela de ferramentas, como podemos observar na Figura 3.21.

Figura 3.21: Construção da mediana.



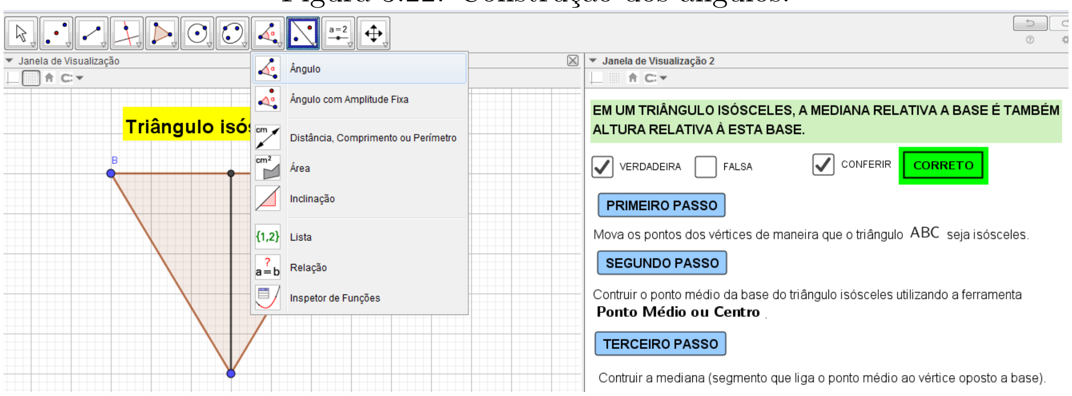
Fonte: Elaborada pela autora.

Na sequência, terão que selecionar as extremidades da mediana, ou seja, o ponto médio e o vértice oposto a base.

Após a construção da mediana, selecionarão o botão “QUARTO PASSO”.

No quarto passo será realizado a medição dos ângulos formados pela mediana e a base. Para isso, basta que selecionem a ferramenta “Ângulo” que fica na oitava janela de ferramentas, como mostra na Figura 3.22.

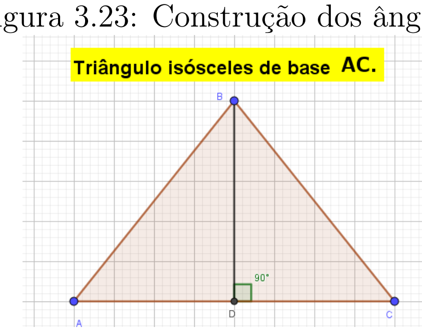
Figura 3.22: Construção dos ângulos.



Fonte: Elaborada pela autora.

Em seguida, deverão selecionar os pontos pertencentes aos lados e vértices do ângulo que desejam encontrar a medida. Importante quando forem medir os ângulos sempre selecionar os pontos no sentido horário, exemplo, para medir o ângulo $C\hat{D}B$ representado na Figura 3.23, foi selecionado primeiro o ponto C, depois o ponto D e por último o ponto B.

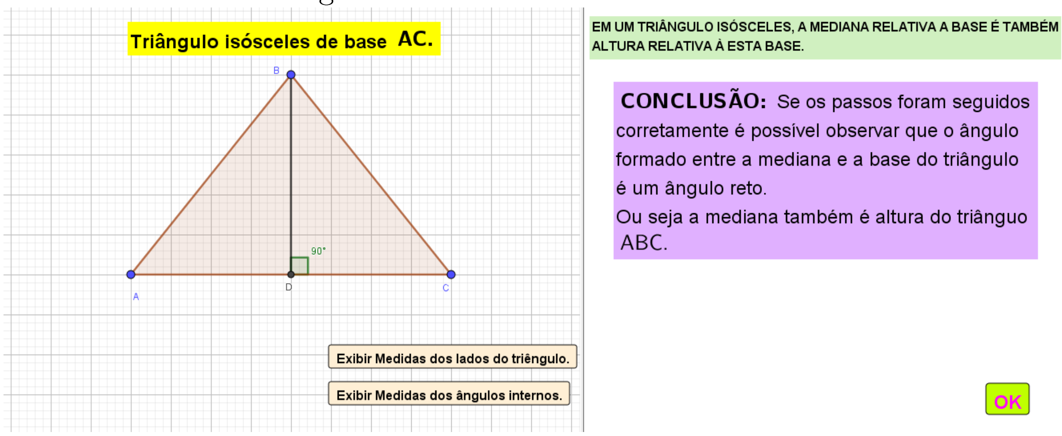
Figura 3.23: Construção dos ângulos.



Fonte: Elaborada pela autora.

Após terminarem os 4 passos, os alunos deverão selecionar o botão “OK” que aparecerá a conclusão do exercício, como mostra a Figura 3.24. Oriente que todos devem ler a conclusão com bastante atenção.

Figura 3.24: Conclusão do exercício.



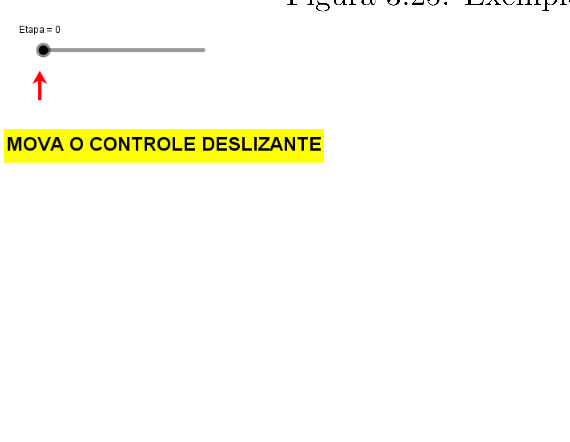
Fonte: Elaborada pela autora.

Assim que todos terminarem de verificar a conclusão, poderão observar um exemplo que tem na sequência.

No exemplo temos um triângulo isósceles ABC, com base BC e mediana AD que os alunos poderão mover os vértice e observar que sempre o ângulo formado entre a mediana e a base será um ângulo reto, independente da medida de seus lados e sua base, ou seja, de acordo com a definição de altura a mediana também é altura do triângulo isósceles.

Para os alunos acompanharem o exemplo foi construído um controle deslizante, como podemos observar na Figura 3.25. Todos devem mover o controle deslizante com o mouse e observar com bastante atenção cada elemento que irá aparecer nas janelas de visualizações.

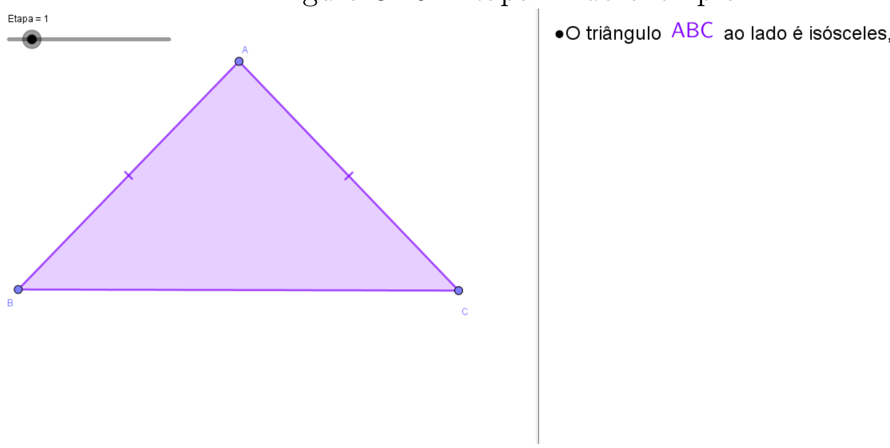
Figura 3.25: Exemplo do exercício 2.



Fonte: Elaborada pela autora.

Em cada etapa do controle deslizante aparecerá a representação geométrica na janela da esquerda e detalhes por escrito na janela da direita, como podemos observar na Figura 3.26, que está representado a Etapa=1 do controle deslizante.

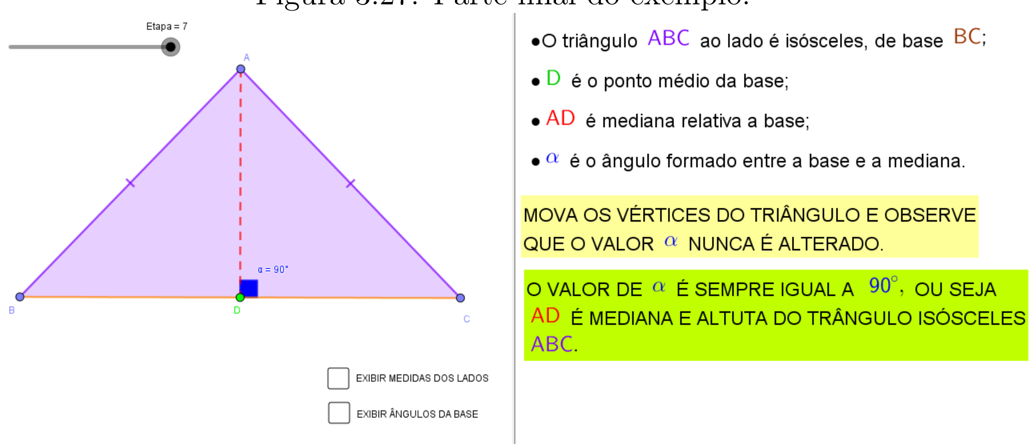
Figura 3.26: Etapa=1 do exemplo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para finalizar o exemplo, os alunos poderão mover os vértices do triângulo ABC. O objetivo dessa etapa é que eles fixem a ideia de que não importa a medida dos lados de um triângulo isósceles, sempre a mediana em relação a base também é altura do triângulo.

Figura 3.27: Parte final do exemplo.



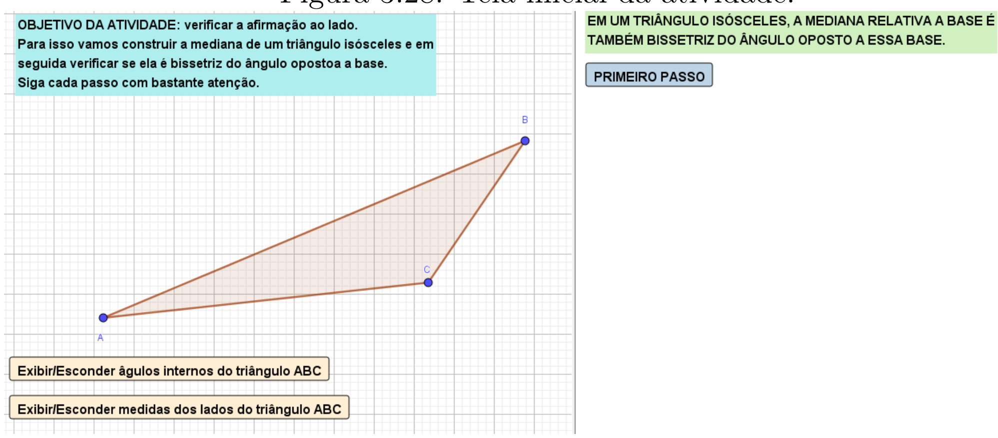
Fonte: Elaborada pela autora.

EXERCÍCIO 3: Os alunos explorarão a propriedade em relação a mediana e a bissetriz de um triângulo isósceles. Esse exercício é parecido com o Exercício

2. Da mesma forma do exercício anterior eles terão que seguir 4 passos com o objetivo de perceberem que sempre em um triângulo isósceles a mediana relativa a base é também bissetriz do ângulo oposto a base. E no final também temos um triângulo para eles poderem manipular.

Na tela inicial temos o objetivo da atividade e a afirmação "EM UM TRIÂNGULO ISÓSCELES, A MEDIANA RELATIVA A BASE É TAMBÉM BISSETRIZ DO ÂNGULO OPOSTO A ESSA BASE", como podemos ver na Figura 3.28.

Figura 3.28: Tela inicial da atividade.



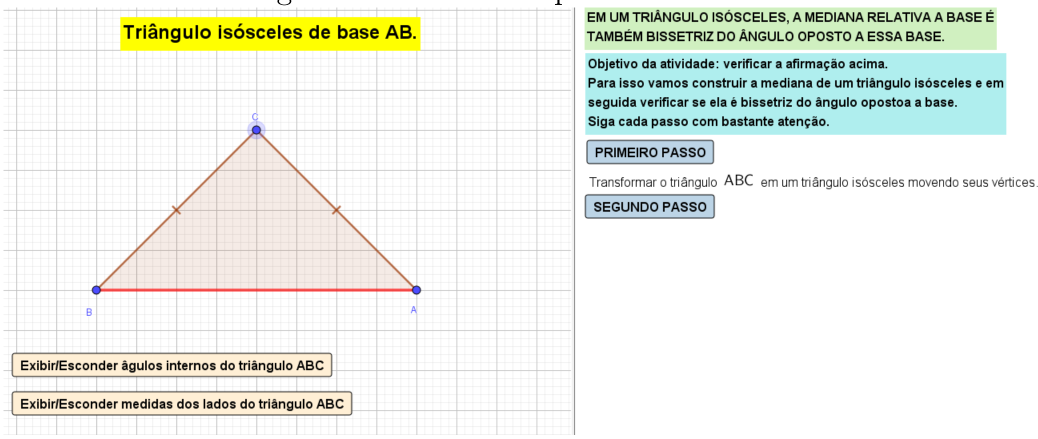
Fonte: Elaborada pela autora.

Os alunos terão a opção de exibir e esconder as medidas dos ângulos internos e dos lados a qualquer momento, para isso basta eles selecionarem os botões que estão na Janela de Visualização a esquerda.

Para visualizarem o primeiro comando, terão que selecionar o botão "PRIMEIRO PASSO".

No primeiro passo, todos terão que mover os vértices do triângulo ABC de maneira que ABC se torne um triângulo isósceles. A seguir, devem selecionar o botão "SEGUNDO PASSO", para visualizarem o segundo comando.

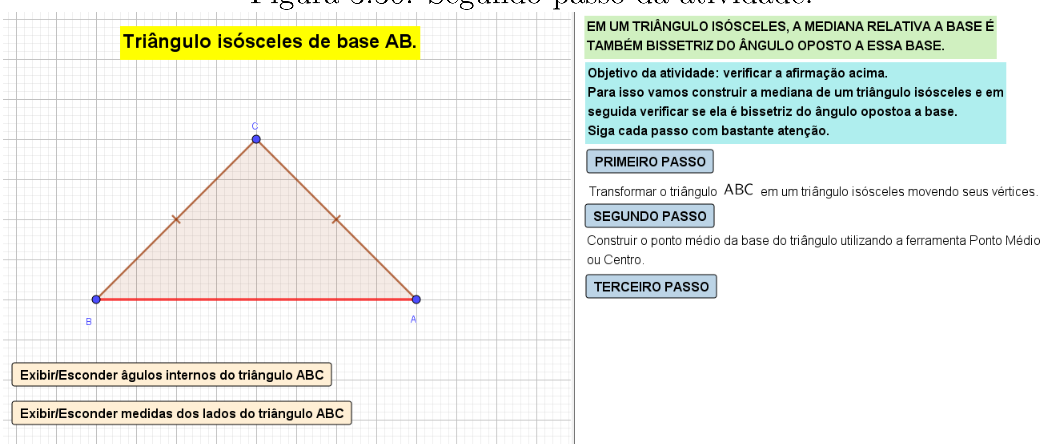
Figura 3.29: Primeiro passo da atividade.



Fonte: Elaborada pela autora.

No segundo passo, os alunos deverão construir o ponto médio utilizando a ferramenta “Ponto Médio ou Centro”.

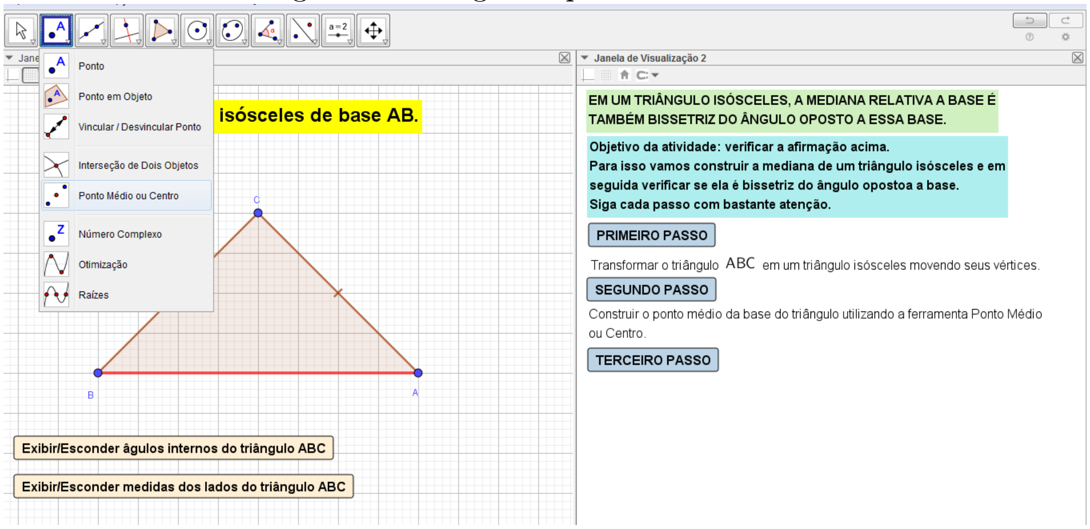
Figura 3.30: Segundo passo da atividade.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para isso, os alunos deverão selecionar essa ferramenta e em seguida selecionarão a base do triângulo, assim como fizeram na atividade 2.

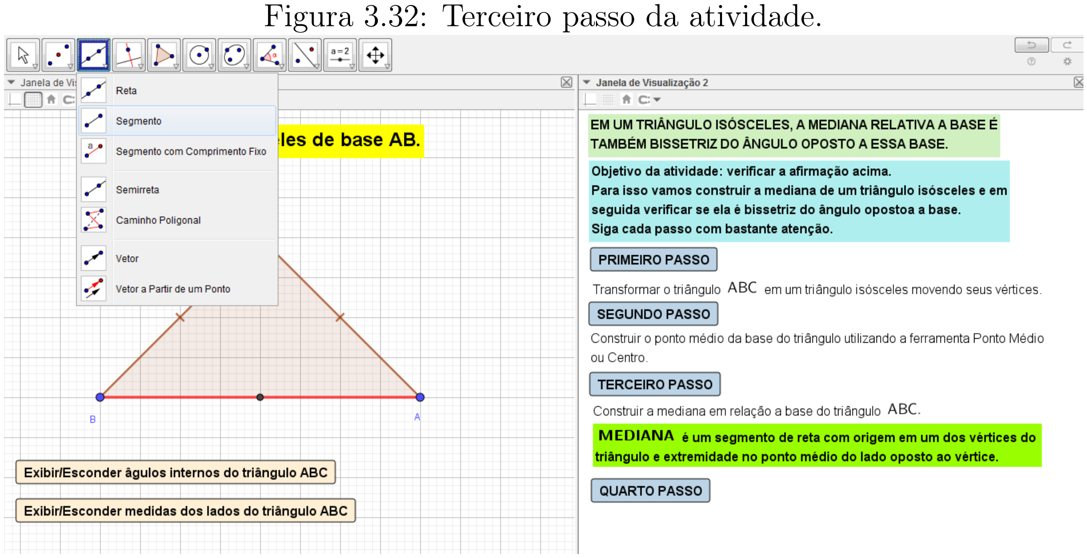
Figura 3.31: Segundo passo da atividade.



Fonte: Elaborada pela autora.

No terceiro passo é realizado a construção da mediana. Basta que selecionem a ferramenta "Segmento" e selecionem suas extremidades (o ponto médio e o vértice oposto a base).

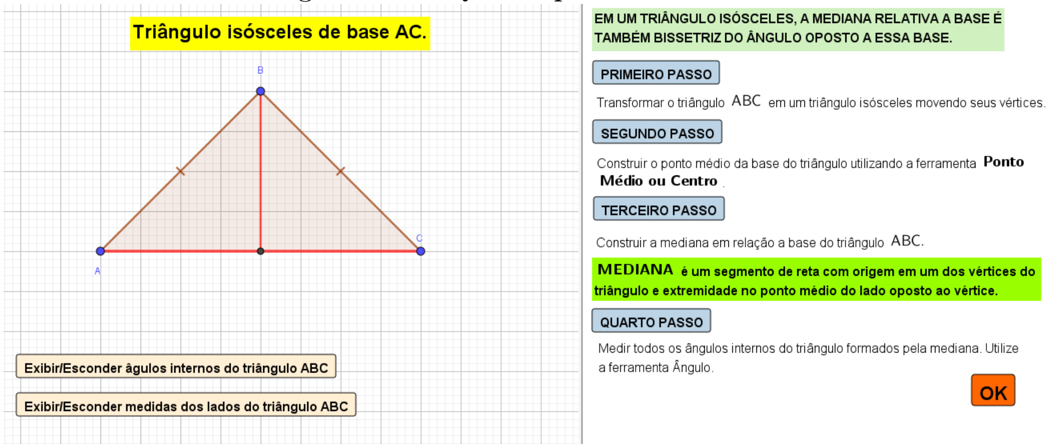
Figura 3.32: Terceiro passo da atividade.



Fonte: Elaborada pela autora.

Em seguida deverão selecionar o botão "QUARTO PASSO".

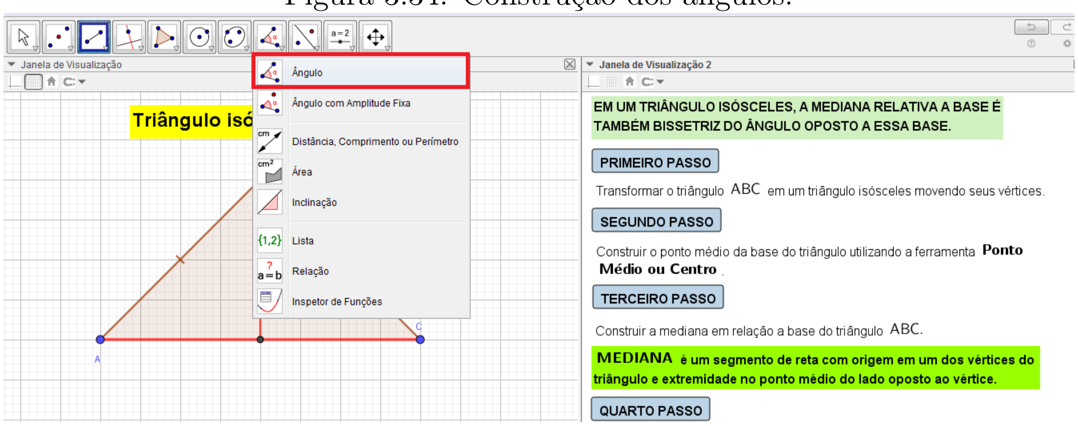
Figura 3.33: Quarto passo da atividade.



Fonte: Elaborada pela autora.

No quarto passo todos deverão medir os ângulos formados pela mediana e o vértices oposto a base. Para isso, basta que selecionem a ferramenta “Ângulo”, como mostra na Figura 3.34.

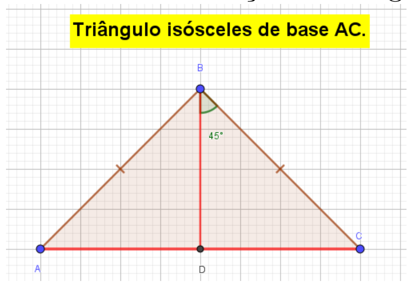
Figura 3.34: Construção dos ângulos.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na sequência selecionarão os pontos pertencentes aos lados e vértices do ângulo que desejam encontrar a medida, lembrando que devem seguir o sentido horário para realizar a medição. Por exemplo, para medir o ângulo $D\hat{B}C$ representado na Figura 3.35, foi selecionado primeiro o ponto D, depois ponto B e por último o ponto C.

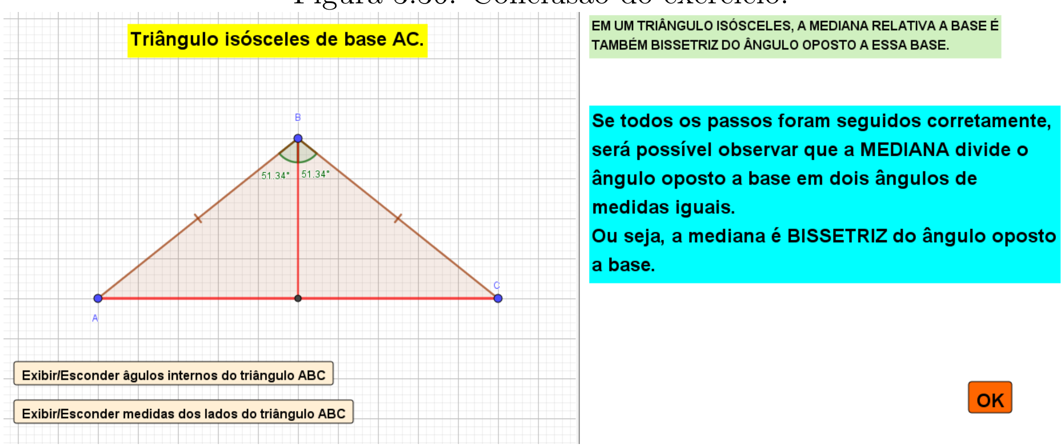
Figura 3.35: Construção dos ângulos.



Fonte: Elaborada pela autora.

Após terminarem os 4 passos, selecionarão o botão “OK” que aparecerá a conclusão do exercício, como podemos observar na Figura 3.36.

Figura 3.36: Conclusão do exercício.



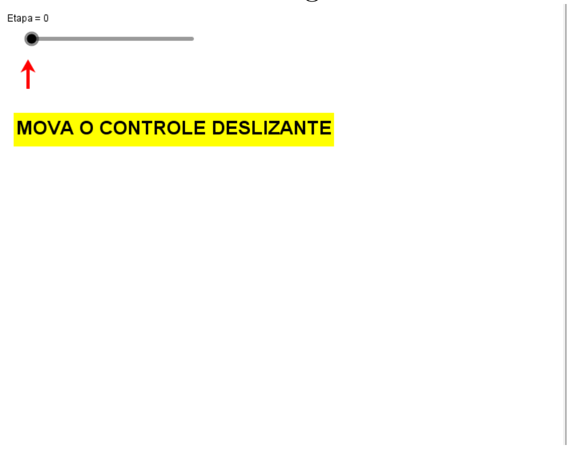
Fonte: Elaborada pela autora.

Todos devem ler a conclusão com bastante atenção.

Em seguida, foi preparado um exemplo parecido com o exemplo do exercício 2. Da mesma forma temos um triângulo isósceles ABC, com base BC e mediana AD. Os alunos poderão mover os vértice e observar que sempre a mediana estará dividindo o ângulo oposto a base em dois ângulos congruentes, ou seja, de acordo com a definição de bissetriz, a mediana também é bissetriz do triângulo isósceles.

Com o objetivo de deixar o exemplo bem dinâmico, foi construído um controle deslizante, como mostra na Figura 3.37.

Figura 3.37: Tela inicial do exemplo.

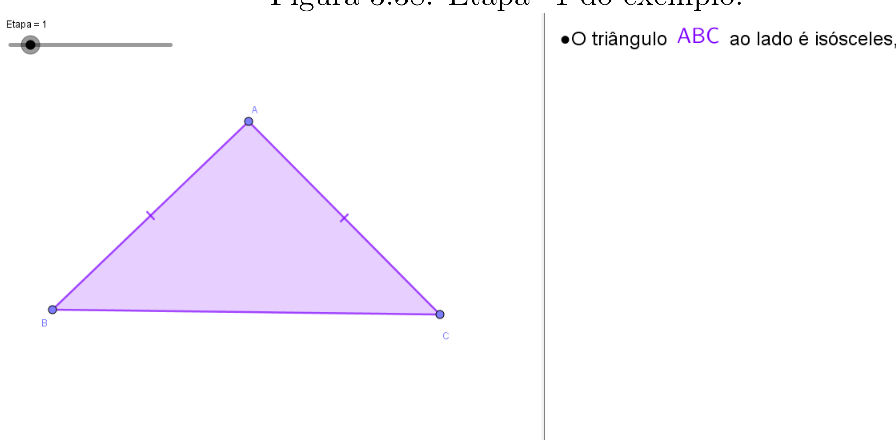


Fonte: Elaborada pela autora.

Os alunos terão que mover o controle deslizante, para poderem acompanhar o exemplo.

Em cada etapa do controle deslizante, aparecerá a representação geométrica do objeto na janela de visualização a esquerda e as observações por escrito na janela de visualização a direita. Observe que na Etapa=1, representada na Figura 3.38, apareceu o desenho do triângulo ABC em uma janela e na outra janela ele foi citado por escrito.

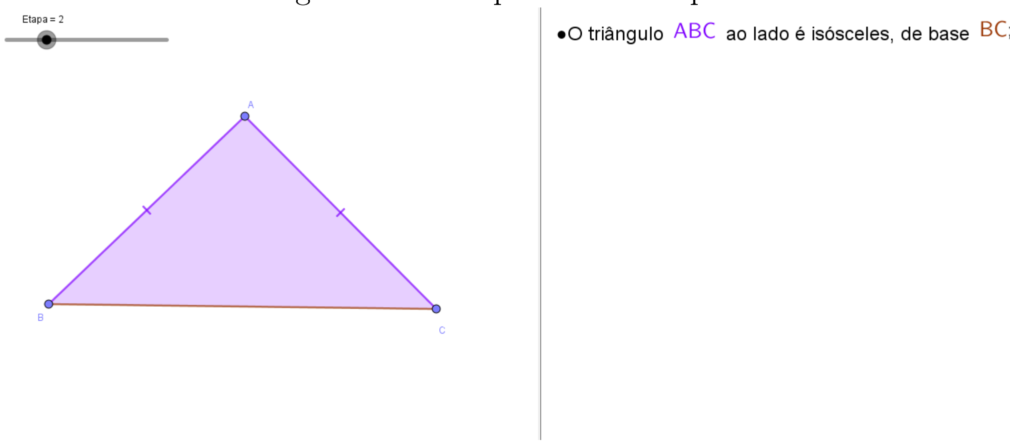
Figura 3.38: Etapa=1 do exemplo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na Etapa=2, representada na Figura 3.39, destacamos a construção da base BC do triângulo isósceles com uma com diferente (marrom).

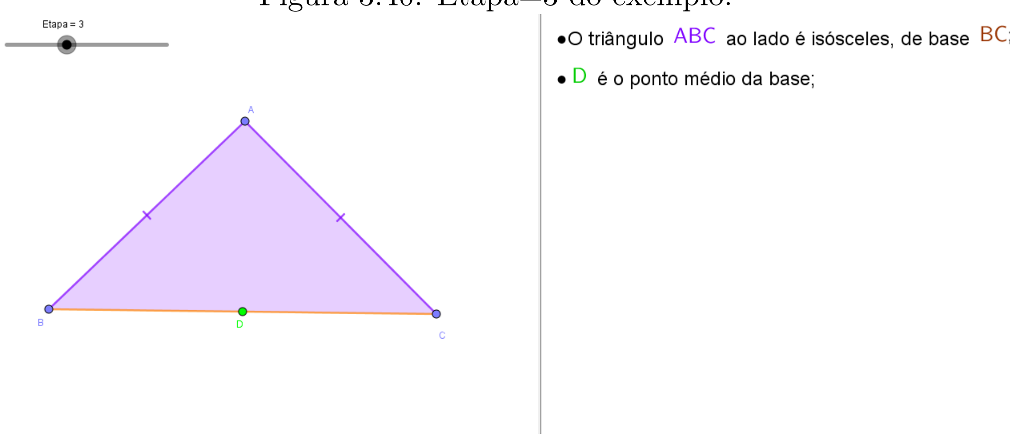
Figura 3.39: Etapa=2 do exemplo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na Etapa=3, representada na Figura 3.40, foi construído o ponto médio da base.

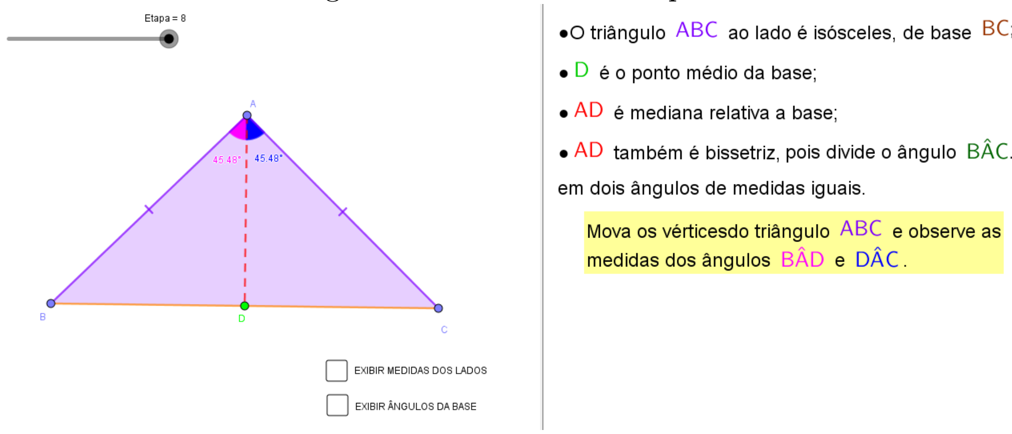
Figura 3.40: Etapa=3 do exemplo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Após acompanharem as oito etapas do controle deslizante, eles terão que mover os vértices do triângulo. O objetivo dessa atividade é que todos percebam que independente das medidas dos lados de um triângulo isósceles, sempre a mediana estará dividindo o ângulo oposto a base, em dois triângulos de medidas iguais.

Figura 3.41: Final do exemplo.



Fonte: Elaborada pela autora.

MATERIAIS COMPLEMENTARES:

Vídeos:

Propriedades do triângulo isósceles - Matemática – 8º ano – Ensino Fundamental. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=hcwPwzL0c5c.

Triângulo isósceles - Brasil Escola. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=KKulJYKf0oE.

Geometria Plana: Introdução aos Triângulos. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=TyyTOvjo3D0&t=846s..

Livros Digitais:

Livro digital contendo demonstrações dinâmicas em relação a congruências e semelhanças de triângulos. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb.
Livro de geometria plana dinâmico do autor Jorge Cássio. Contém atividades envolvendo os casos de congruência de triângulo entre outros conteúdos. Disponível em:https://www.geogebra.org/m/hsXHDRX7.

Livros

GERÔNIMO, João Roberto; BARROS, Rui Marcos de Oliveira; FRANCO, Valdeni Soliani. Geometria Euclidiana Plana um estudo com o software Geogebra.

Gerônimo, João R; Franco, Valdeni S., Geometria Plana um estudo axiomático, Eduem, Maringá, 2010.

FICHA DO ALUNO

CONTEÚDO: Propriedades do triângulo isósceles.

OBJETIVO: explorar as propriedades em relação ao triângulo isósceles através de atividades dinâmicas no software GeoGebra.

ATIVIDADE 1:

Após a explicação do(a) professor(a), responda as perguntas abaixo com suas palavras:

a) O que é um triângulo isósceles? O que é a base de um triângulo isósceles?

____

____

____

b) O que é altura de um triângulo?

____

____

____

c) O que é ponto médio de um segmento?

____

____

____

d) O que é mediana?

____

____

____

e) O que é bissetriz?

____

____

____

f) O que são os ângulos internos de um triângulo?

ATIVIDADE 2:

Acessem o link ou o qr-code abaixo e resolva os 3 exercícios. O professor irá auxiliar durante a resolução:

`https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/tvk92ea6`

3.3 Ficha 3 - Explorando as propriedades relacionadas as medidas dos lados e ângulos dos triângulos.

A atividade proposta foi preparada para turmas do oitavo ano, conteúdo abordado são triângulo. O objetivo dessa atividade é de explorar as propriedades relacionadas a medidas dos lados, ângulos internos e externos dos triângulos através da geometria dinâmica.

Essa atividade pode ser realizada em duplas e aplicada como forma de fixação do conteúdo ensinado. Outra sugestão é aplicar antes da explicação para que os alunos explorem as propriedades relacionadas a medida dos lados, ângulos internos e externos de um triângulo e no final pode ser formalizado o conteúdo.

O tempo previsto para a aplicação são 30 minutos e o recurso necessário para a aplicação são computadores ou smartphones com acesso a internet para cada dupla.

Os alunos apenas terão que acessar o link ou qr-code que o professor irá disponibilizar. Fazendo isso, os alunos serão direcionados a uma página do GeoGebra.

Os alunos resolverão 3 questões dinâmicas relacionadas a medida dos lados, ângulos internos e externos de um triângulo.

FICHA DO PROFESSOR

Turma: 8º ano

Conteúdo: Triângulos.

Objetivos específicos: Explorar as propriedades relacionadas a medidas dos lados, ângulos internos e externos dos triângulos através da geometria dinâmica.

Duração: 30 minutos.

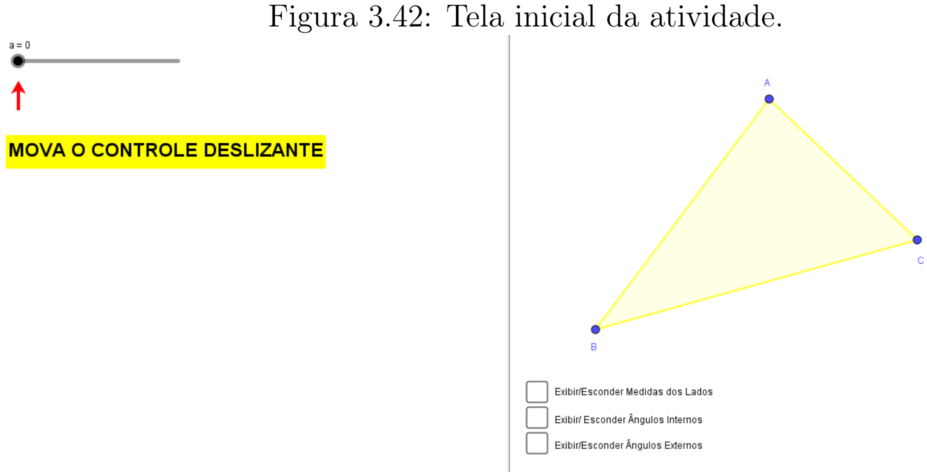
Recursos necessários: Computador com acesso à internet.

A atividade proposta pode ser realizada em duplas e aplicada como forma de fixação do conteúdo ensinado. Outra sugestão é aplicar antes da explicação para que os alunos explorem as propriedades relacionadas a medida dos lados, ângulos internos e externos de um triângulo e no final pode ser formalizado o conteúdo. Para realização das atividades os alunos terão que acessar o link ou o qr code abaixo que abrirá uma página do Geogebra.

`https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/xcnxxx3b`

A tela inicial da atividade, representada na Figura 3.42, podemos observar que possuem um controle deslizante. Primeiramente, os alunos moverão esse controle e durante cada etapa aparecerá alguns comentários importantes para a resolução dos exercícios.

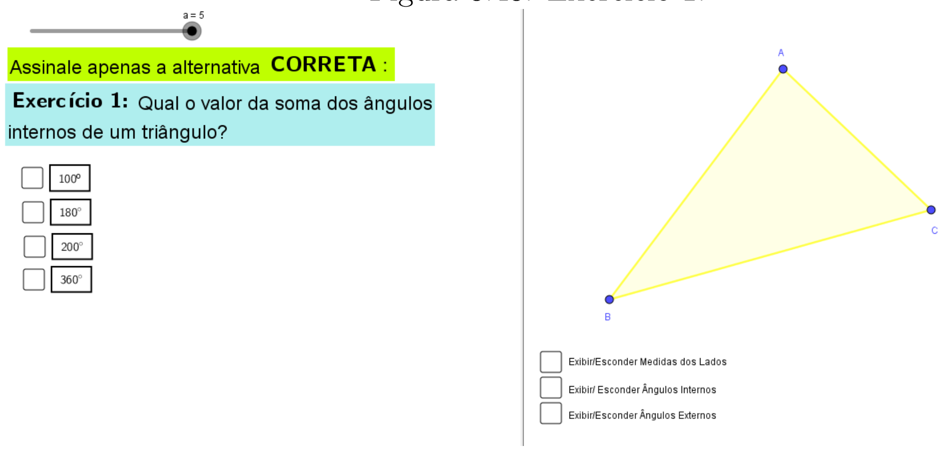
Figura 3.42: Tela inicial da atividade.



Fonte: Elaborada pela autora.

Durante a resolução de cada exercício a tela estará dividida em 2 partes, do lado esquerdo temos as perguntas e do lado direito um triângulo ABC representado geometricamente, como mostra na Figura 3.43.

Figura 3.43: Exercício 1.



Fonte: Elaborada pela autora.

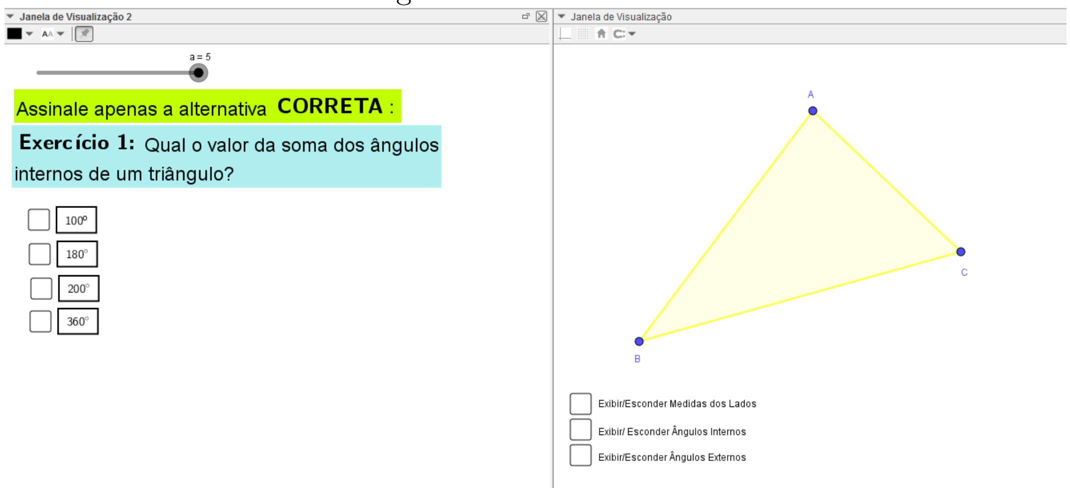
É importante que os alunos saibam que eles poderão mover os vértices do triângulo durante a resolução dos exercícios.

São 3 exercícios dinâmicas relacionadas a medida dos lados, ângulos internos e externos de um triângulo, eles irão assinalar as alternativas corretas e o professor irá auxiliar quando necessário.

Em seguida, adicionamos os objetivos, o que se espera durante a resolução de cada exercício e algumas orientações ao professor:

> **Exercício 1:** O objetivo dessa atividade é de explorar a propriedade relacionada a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.
>
> Os alunos terão que assinalar a alternativa que contém o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo, como mostra na Figura 3.44.

Figura 3.44: Exercício 1.



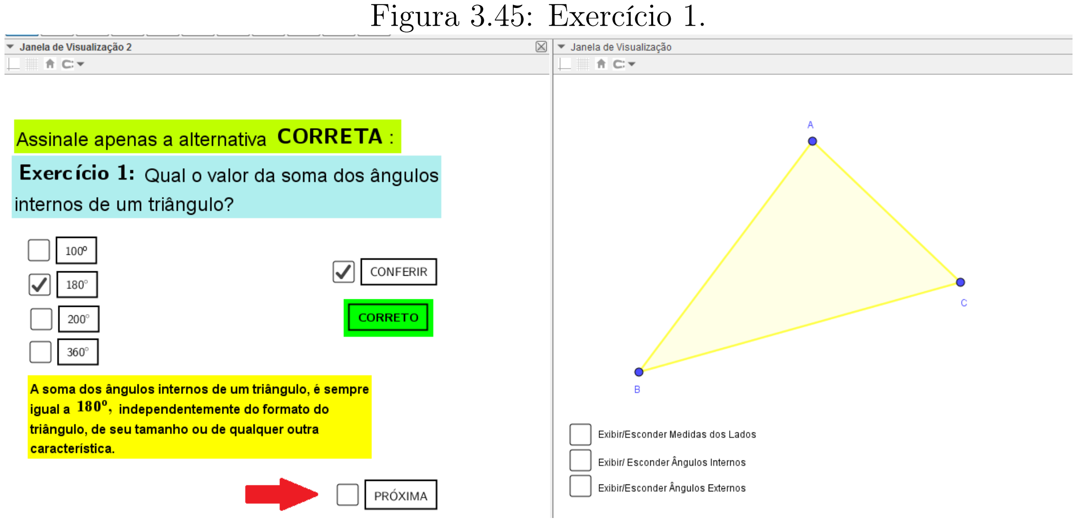
Fonte: Elaborada pela autora.

Espera-se que se os alunos tiverem dúvidas para responder, eles movam os vértices do triângulo ABC, selecionem a opção "Exibir as Medidas dos Ângulos Internos" e realizem as soma e percebam que essa soma sempre será igual a 180.

Após assinalarem a alternativa que acharem ser a correta, eles terão que selecionar a opção "CONFERIR" e verificar se a opção marcada está correta ou incorreta.

Na sequência terão que selecionar a opção "PRÓXIMA" para irem para a Exercício 2, como mostra a Figura 3.45.

Figura 3.45: Exercício 1.

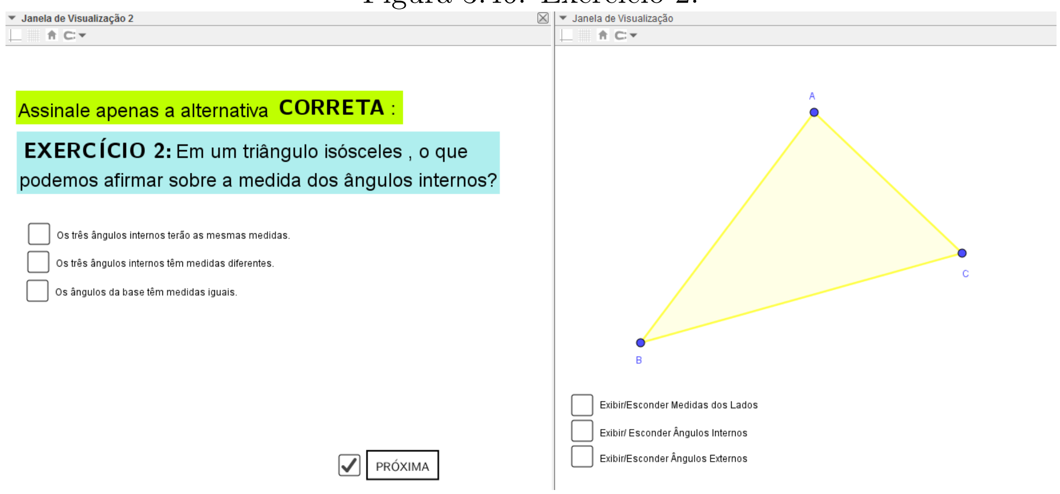


Fonte: Elaborada pela autora.

Exercício 2: O objetivo dessa atividade é de explorar a propriedade relacionada a medida dos ângulos internos de um triângulo isósceles.

No exercício 2 os alunos terão que assinalar a única alternativa correta em relação a medida dos ângulos da base de um triângulo isósceles, como mostra a Figura 3.46.

Figura 3.46: Exercício 2.



Fonte: Elaborada pela autora.

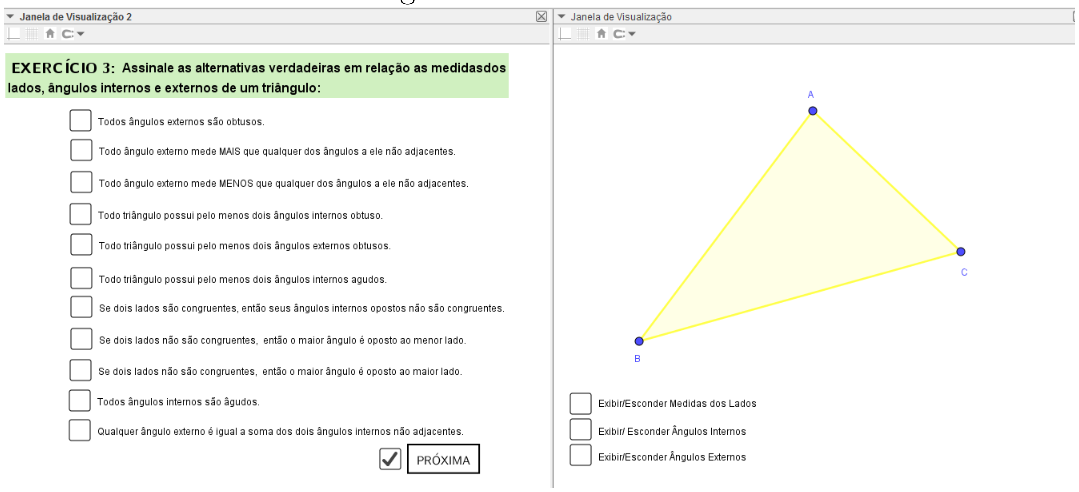
Espera-se que os alunos movam os vértices do triângulo ABC até transformalo em um triângulo isósceles e consigam perceber que os ângulos da base de um triângulo isósceles sempre terão medidas iguais.

No final, deverão fazer o mesmo processo da questão anterior, verificar a resposta e selecionar "PRÓXIMA" para irem para o próximo exercício.

Exercício 3: O objetivo desse exercício é de explorar as propriedades relacionadas a medidas dos lados, ângulos internos e ângulos externos de um triângulo.

Esse exercício contém onze afirmações, representadas na Figura 3.47.

Figura 3.47: Exercício 3.



Fonte: Elaborada pela autora.

Os alunos terão que assinalar todas as alternativas corretas relacionadas a medidas dos ângulos e lados de um triângulo.

Espera-se que os alunos movam os vértices do triângulo ABC e consigam identificar quais são as respostas corretas. Sempre que necessário eles podem Exibir ou Esconder as medidas dos ângulos e dos lados. É importante orientá-los em tudo que for necessário. No final, eles poderão verificar se as afirmações foram assinaladas corretamente.

A seguir apresentaremos todas as afirmações que possuem no exercício 3 respondidas e justificadas:

Afirmação 1: Todos ângulos externos são obtusos.

Falsa. Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos externos obtusos, mas não são os três ângulos externos obtusos, ou seja, são dois ângulos obtusos e um ângulo será reto ou agudo.

Afirmação 2: Todo ângulo externo mede mais que qualquer dos ângulos a ele não adjacentes.

Verdadeira.

Demonstração dinâmica disponível em:

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/x3h8kzub

Afirmação 3: Todo ângulo externo mede menos que qualquer dos ângulos a ele não adjacentes.

Falsa.

Essa afirmação contraria a afirmação 2.

Afirmação 4: Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos obtusos.

Falsa.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, se ele possuir dois ângulos medindo mais que 90°, significa que teremos o terceiro ângulo medindo 0°, o que é um absurdo.

Afirmação 5: Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos externos obtusos.

Verdadeira.

Como os ângulos internos e externos correspondentes são suplementares e um triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos, então consequentemente ele terá pelo menos dois ângulo externos obtusos.

Demonstração dinâmica disponível em:

`https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/tjaetdsg`

Afirmação 6: Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos.

Verdadeira.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, temos que todos ângulos internos podem ser agudos e se tivermos um ângulo interno obtuso ou reto, os outros dois ângulos serão agudos. Portanto, o sempre teremos pelo menos dois ângulos internos agudos.

`https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/tjaetdsg`

Afirmação 7: Se dois lados são congruentes, então seus ângulos internos opostos não são congruentes.

Falsa.

Essa afirmação contraria o Exercício 2, pois se um triângulo possui dois lados congruentes ele é um triângulo isósceles, e como vimos em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.

Afirmação 8: Se dois lados não são congruentes, então o maior ângulo é oposto ao menor lado.

Falsa.

Demonstração dinâmica disponível em:

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/mqaj4t56

Afirmação 9: Se dois lados não são congruentes, então o maior ângulo é oposto ao maior lado.

Verdadeira.

Demonstração dinâmica disponível em:

https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/mqaj4t56

Afirmação 10: Todos ângulos internos são agudos.

Falsa.

Em um triângulo podemos sim ter todos os ângulos agudos, mas não é sempre que isso acontece. É possível em um triângulo termos um ângulo reto ou obtuso.

Afirmação 11: Qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes.

Verdadeira.

Espera-se que os alunos somem as medidas de pares de ângulos internos e percebam que sempre a soma será igual a medida do ângulo externo que não é correspondente a esses ângulos somados.

MATERIAIS COMPLEMENTARES:

Vídeos:

Teorema do ângulo externo de um triângulo. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=9JpWist1u1U

Geometria Plana: Introdução aos Triângulos. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=TyyTOvjo3D

Propriedades do triângulo isósceles - Matemática – 8º ano – Ensino Fundamental. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=hcwPwzL0c5c

Livros Digitais:

Livro digital contendo as demonstrações dos casos de congruências. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#chapter/653662.

Livro de geometria plana dinâmico do autor Jorge Cássio. Contém atividades envolvendo os casos de congruência de triângulo entre outros conteúdos. Disponível em:https://www.geogebra.org/m/hsXHDRX7.

Livros:

GERÔNIMO, João Roberto; BARROS, Rui Marcos de Oliveira; FRANCO, Valdeni Soliani. Geometria Euclidiana Plana um estudo com o software Geogebra.

Gerônimo, João R; Franco, Valdeni S., Geometria Plana um estudo axiomatico, Eduem, Maringá, 2010.

FICHA DO ALUNO

CONTEÚDO: Triângulos.

OBJETIVO: Explorar as propriedades relacionadas a medidas dos lados, ângulos internos e externos dos triângulos através da geometria dinâmica.

Acessem o link ou o qr-code abaixo e resolvam os três exercícios propostos:

`https://www.geogebra.org/m/dnmvn6wb#material/xcnxxx3b`

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Espera-se que as demonstrações dinâmicas realizadas possam contribuir para a melhor compreensão das demonstrações envolvendo os casos de congruências de triângulos, semelhanças de triângulos e o Teorema de Tales, e que possam colaborar com os professores, deixando um material pronto e de fácil acesso, possibilitando o seu uso em sala de aula, dando suporte e que contribua de forma positiva no processo de ensino aprendizagem de geometria plana.

A utilização de novas tecnologias está cada vez mais presentes no dia a dia dos jovens e é muito importante trazer isso para as aulas de matemática, como é algo que eles já estão familiarizados, pode ser uma boa estratégia para estimulá-los.

Durante a pandemia do Covid-19, com a obrigatoriedade das aulas remotas, como medida de segurança, a maioria dos professores tiveram que se reinventar e essas ferramentas tecnológicas se tornaram ainda mais necessárias no processo de ensino aprendizagem. E uma ferramenta que pode auxiliar muito no processo de ensino aprendizagem de geometria, seja em aulas a distância ou presenciais, é o software GeoGebra.

Então, ao lerem esse trabalho, espera-se que mais professores se sintam motivados a prepararem mais atividades dinâmicas utilizando ferramentas tecnológicas.

Pretendemos dar continuação a esse trabalho, realizando a confecção de mais demonstrações dinâmicas e mais fichas didáticas para serem adicionadas no livro digital.

Não foi realizado a aplicação de nenhuma ficha didática. Mas vale apena ressaltar a importância do professor durante a aplicação. Não basta os alunos terem acesso as atividades, é importante a presença do professor para realizar todas as intervenções necessárias, para que realmente aconteça a aprendizagem.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARAYA, Eduardo Alejandro Flores. Livro digital interativo: um exemplo com trigonometria. Profmat, 2021.

[2] Banco de Dissertações do PROFMAT. Mestrado Profissional em Matemática da Rede Pública. Disponível em: `https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/`.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

[4] CALDATO, João; UTSUMI, Miriam Cardoso; NASSER, Lilian. Argumentação e demonstração em matemática: a visão de alunos e professores. Revista Triângulo. v. 10, n. 2 (2017). Disponível em: `http://seer.uftm.edu.br/revistaeletronica/index.php/revistatriangulo/article/view/2583/pdf`. Acesso em 16 de jul. 2021.

[5] GEOGEBRA 5.0. Disponível: `https://www.geogebra.org/download?lang=pt`.

[6] GERÔNIMO, João R; FRANCO, Valdeni S., Geometria Plana um estudo axiomatico, Eduem, Maringá, 2010.

[7] GERÔNIMO, João Roberto; BARROS, Rui Marcos de Oliveira; FRANCO, Valdeni Soliani. Geometria Euclidiana Plana um estudo com o software Geogebra.

[8] MOTA, Renato Eugênio da. E-book interativo como uma ferramenta/ estratégia no ensino de matemática. Profmat, 2019.

[9] NÓBRIGA, Jorge Costa; SIPLE, Ivanete Zuchi. Livros Dinâmicos de Matemática Dynamic Mathematics Books. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657, v. 9, n. 2, p. 78-102, 2020. Disponível: `https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/47318/33678`.

[10] NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. Demonstrações matemáticas dinâmicas. Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 14, n. 1, p. 1-21, 2019. Disponível: `https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2019.e61725/40047`.

[11] QUEIROZ, José Carlos Santana. Livros didáticos de Matemática do Ensino Médio: um estudo sobre as demonstrações. Revista Sertão Sustentável, v. 2, n. 1, p. 23-28, 2020.

[12] ROSALE, André Rodrigues. Argumentação e prova matemática na Educação Básica. 2018. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. Disponível em : `https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-13052019-130421/publico/Dissertacao_Andre_Rodrigues_Rosale.pdf`. Acesso em 13 de jul. 2021.

[13] SILVA, Mayco Sabóia. Visualizações dinâmicas na geometria plana do Profmat. Profmat, 2020.

[14] SOARES, Luís Havelange. et. al . Demonstrações matemáticas na educação básica: com a palavra os professores de matemática. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 3., 2012, Fortaleza-CE. Disponível em: `https://proativa.virtual.ufc.br/sipemat2012/papers/696/submission/director/696.pdf`. Acesso em 13 de jul. 2021.

[15] SOUZA, Ângelo Márcio de. Utilizando o jogo Euclídea e demonstrações dinâmicas no Geogebra para o ensino de construções dinâmicas. Profmat, 2018.