

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT**

Marcelo Luiz Bertó

**ISOMETRIAS E HOMOTETIAS: TEORIA E APLICAÇÕES COM O
GEOGEBRA E MATERIAIS MANIPULATIVOS**

Santa Maria, RS

2021

Marcelo Luiz Bertó

**ISOMETRIAS E HOMOTETIAS: TEORIA E APLICAÇÕES COM O
GEOGEBRA E MATERIAIS MANIPULATIVOS**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Prof. Dr^a. Claudia Candida Pansonato

Santa Maria, RS

2021

Marcelo Luiz Bertó

**ISOMETRIAS E HOMOTETIAS: TEORIA E APLICAÇÕES COM O
GEOGEBRA E MATERIAIS MANIPULATIVOS**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 09 de novembro de 2021:

C. Pansonato.

Prof.^a. Dr.^a. Claudia Candida Pansonato (UFSM)
(Orientadora)

E. S. Figueiredo

Prof. Dr. Edson Sidney Figueiredo (UFSM)

Rosane Rossato Binotto

Prof.^a. Dr.^a. Rosane Rossato Binotto (UFFS)

C. M. Mathias

Prof.^a. Dr.^a. Carmen Vieira Mathias (UFSM)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por tudo.

Agradeço aos meus pais pelo apoio.

Agradeço à minha querida orientadora que não mediu esforços para me auxiliar em mais este trabalho juntos.

Agradeço à Dona Gilda Ravanello Mariosi que me acolheu com muito carinho e me abraçou quando eu estava longe da minha família. Obrigado pela amizade e pelas longas conversas que já estou com saudades.

Agradeço aos meus colegas do mestrado por todos momentos bons que passamos juntos, nas noites de estudos,...

Agradeço aos meus amigos e colegas que conheci na graduação na UFSM e que mesmo distantes fisicamente, estamos perto afetivamente.

Agradeço ao meu amigo Cristian Lovatto e família pela amizade e por toda ajuda que deles recebi.

Agradeço à UFSM e ao PROFMAT por disponibilizarem este ótimo curso.

RESUMO

ISOMETRIAS E HOMOTETIAS: TEORIA E APLICAÇÕES COM O GEOGEBRA E MATERIAIS MANIPULATIVOS

AUTOR: Marcelo Luiz Bertó
ORIENTADORA: Claudia Candida Pansonato

Este trabalho compreende uma pesquisa bibliográfica em livros e artigos científicos que tratam sobre o tema transformações geométricas isometria - reflexão, translação e rotação - e homotetia. Tem por objetivo apresentar um estudo sobre estes temas, mostrando definições e propriedades, bem como a utilização desses conceitos na resolução de problemas geométricos, principalmente de construções geométricas. Nesse trabalho foi utilizado o *software* GeoGebra para construções das figuras e também é feito um relato detalhando a forma como alguns problemas de construções geométricas foram solucionados com o auxílio deste *software*. Por fim, são apresentadas atividades com materiais manipuláveis, como por exemplo dobraduras, envolvendo o tema transformações geométricas que podem ser utilizadas em sala de aula com os alunos do Ensino Fundamental. Espera-se, assim, que este trabalho possa servir como fonte de pesquisa em assuntos envolvendo os temas citados, focando principalmente na motivação dos alunos, no ensino e aprendizagem com a possível utilização de tecnologias digitais, permitindo ao aluno interpretar, experimentar, visualizar, conjecturar e generalizar na perspectiva de uma aprendizagem mais agradável e inspiradora.

Palavras-chave: Transformações geométricas. Isometria. Homotetia.

ABSTRACT

ISOMETRIES AND HOMOTETIES: THEORY AND APPLICATIONS WITH THE GEOGEBRA AND MANIPULATIVE MATERIALS

AUTHOR: Marcelo Luiz Bertó

ADVISOR: Claudia Candida Pansonato

This work comprises a bibliographical research in books and scientific articles dealing with the theme geometric transformations isometry - reflection, translation and rotation - and homothety. It has for aim to present a study on these themes, showing definitions and properties, as well as the use of these concepts in solving geometric problems, especially geometric constructions. In this work, the GeoGebra software was used to construct the figures and it is also made a report detailing how some problems of geometric constructions were solved with the help of this software. Finally, activities with manipulable materials are presented, like for example folding, involving the theme geometric transformations that can be used in classroom with elementary school students. It is hoped that this work can serve as a source of research on issues involving the topics mentioned, focusing mainly on student motivation, teaching and learning with the possible use of technologies digital, allowing the student to interpret, to experiment, to visualize, to conjecture and to generalize in the perspective of a more pleasant and inspiring learning.

Keywords: Geometric transformations. Isometry. Homothety.

Lista de siglas, símbolos e notações

Siglas:

UFSM - Universidade Federal de Santa Maria

UFFS - Universidade Federal da Fronteira Sul

PROFMAT - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Símbolos e notações:

\in - Pertence

\notin - Não pertence

\neq - Diferente

\parallel - paralelo (a)(s)

\subset - está contido

A - Ponto A

AB - Segmento com extremidades nos pontos A e B

\overline{AB} - Medida do segmento AB

\overleftrightarrow{AB} - Reta que passa pelos pontos A e B

\widehat{AOB} - Ângulo com lados OA e OB e vértice em O

$AB \equiv CD$ - Segmento AB congruente com o segmento CD

A' - Imagem do ponto A obtido por uma transformação de isometria ou homotetia

$T(X) = X'$ - Transformação T aplicada no ponto X que leva no ponto X'

$H_{V,k}(X)$ - Homotetia de centro no ponto V , aplicada no ponto X e razão k , onde $k \in \mathbb{R}$

$C(O, r)$ - Circunferência com centro no ponto O e raio r

Sumário

1	Introdução	9
2	Transformações Geométricas no plano: Isometria	15
2.1	Reflexão	19
2.1.1	Reflexão em torno de um ponto	19
2.1.2	Reflexão em torno de uma reta	20
2.2	Translação	22
2.3	Rotação	23
3	Transformações Geométricas no plano: Homotetia	25
4	Aplicações de transformações geométricas na resolução de problemas de construções geométricas	31
4.1	Aplicações de Isometria	31
4.2	Aplicações de Homotetia	63
5	Métodos de resolução de problemas de Construções Geométricas	81
6	Sugestões de atividades envolvendo Transformações: Isometria e Homotetia	92
7	Conclusão	109

1 Introdução

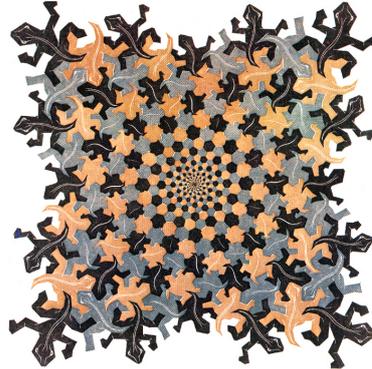
A origem da Geometria remete à origem da própria civilização humana. A história da Matemática diz que ela surgiu por uma necessidade de demarcar terras, particularidade esta que a denominou baseada no grego *Geo – Terra, Metria – Medir*. Mas hoje, a Geometria está muito além disso. Não só como área da matemática ensinada em todos os níveis de ensino, a Geometria possui muitas aplicações práticas, caracterizando-se pela sua abordagem ilustrativa.

Eves (1992) nos diz que o estudo da Geometria não se restringe apenas a estudar formas e medidas. Ela é uma parte da Matemática que se destaca pela sua elegância ao permitir uma abordagem ilustrativa, sem fugir ao rigor matemático. Sempre esteve atribuído à Geometria a capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos e com isso permitir percepções do seu espaço, desenvolvendo noções de grandezas, entre elas a de medida.

A Geometria pode se relacionar com diversas outras áreas do conhecimento, entre elas agrimensura, arquitetura, engenharia, artes plásticas, biologia e, claro, tem sua grande importância dentro da Matemática. Dentro da Geometria, um tema bastante importante são as transformações geométricas, isometria e homotetia.

O artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972) costumava representar suas obras com várias perspectivas, causando ilusão de ótica no observador. Em uma de suas fases, denominada “Período da Aproximação ao Infinito” (1956-1970), o artista busca retratar figuras que mantêm semelhanças mas que suas projeções tendem ao infinito conforme ilustra a Figura 1. Para isso, o artista utiliza, entre outras ferramentas, as transformações geométricas.

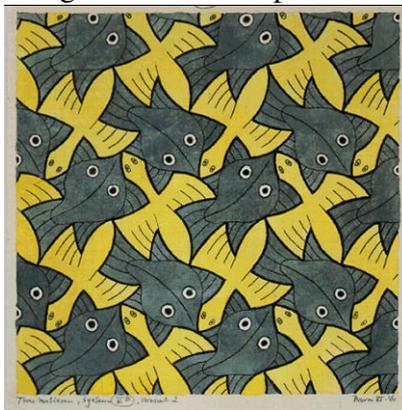
Figura 1: Obra de Escher denominada "Evolução II"(1939).



Fonte: ciencias.ulisboa ¹

Escher também costumava criar figuras com elementos que se encaixavam perfeitamente. É notável seu gosto por pássaros, peixes, lagartos entre outros. Na Figura 2, vemos a representação de peixes e pássaros que se entrelaçam em perfeita harmonia. Do ponto de vista geométrico, podemos perceber que a imagem é uma sequência de isometrias de translação e rotação.

Figura 2: Peixes e pássaros.



Fonte: olharesdarte ²

Já Christian Felix Klein (1849-1925), conhecido pela *Klein bottle* ou a garrafa de Klein, foi um matemático alemão que se dedicou, entre outros, à análise, teoria dos grupos e geometria. Sua data de nascimento, 25/04/1849, é curiosa pois $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{04} = 2$ e

¹Disponível em: <https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/escher/evol2.html>

²Disponível em: <http://olharesdarte.blogspot.com/2011/06/leitura-de-imagem-escher.html>

$\sqrt{1849} = 43$, ou seja, todos os números que formam a data são quadrados perfeitos de números primos. Klein tinha uma visão unificada da geometria como o estudo das propriedades de um espaço que são invariantes sob um determinado grupo de transformações. Esse estudo ficou conhecido como *Erlanger Programm* e teve bastante influência no desenvolvimento matemático (BRITANNICA, 2021).

Klein, em 1872, sugeriu uma aproximação da Álgebra e da Geometria, propondo que a teoria de grupos pudesse ser aplicada no contexto da geometria. Mais tarde, com estudos de geometria projetiva e geometrias não-euclidianas, Klein propôs que essas geometrias poderiam ser ordenadas num padrão hierárquico. Essa hierarquia geométrica explica quais transformações deixam as propriedades mais relevantes de uma geometria particular inalteradas. Descobriu-se que esses conjuntos de transformações eram mais bem compreendidos como formando um grupo. A ideia de Klein era que a hierarquia das geometrias poderia se refletir em uma hierarquia de grupos cujas propriedades seriam mais fáceis de entender (BRITANNICA, 2021).

Ainda, as pesquisas realizadas por Felix Klein impulsionaram o ensino de Geometria por meio de transformações, o que juntamente com outros fatores desencadearam a necessidade de reformulação da disciplina matemática nos programas curriculares das escolas secundárias no século XX. O ensino das transformações na geometria para os anos finais do ensino fundamental foi influenciado, entre outros, pelas ideias de Klein (SILVA E PIETROPAOLO, 2014).

Nota-se, assim, uma grande necessidade de dar à geometria uma atenção especial no ensino. Visando tratar deste assunto, Brasil (2018), destaca que a Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Desta forma a compreensão da geometria envolve uma série de abordagens importantes, entre eles, posição e deslocamento. Assim visa-se estimular e desenvolver ideias e pensamentos geométricos nos alunos. Ainda, esse pensamento geométrico é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. Do ponto de vista funcional no estudo da Geometria, um tema importante a ser citado são as transformações geométricas, principalmente as simetrias.

Ainda, segundo Brasil (2018), é esperado que nos Anos Iniciais os alunos identifiquem e estabeleçam pontos de referência para a localização e o deslocamento de objetos, ou seja,

consigam perceber a posição que um objeto está e a posição que ele estará depois de uma transformação ou movimento. Além disso, é necessário que construam representações de espaços conhecidos a sua volta, identificando linhas, formas e estimando medidas como distâncias.

Já Brasil (1998), diz que os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental. Isso se justifica pelo fato de que o aluno passa a desenvolver um tipo especial de pensamento. Com isso lhe é permitido a compreensão, a descrição e a representação, de forma organizada do mundo em que vive. A Geometria permite trabalhar com situações-problema, despertando um interesse natural do aluno. Ainda, que o trabalho com noções geométricas auxilia na aprendizagem de números e medidas, pois desperta a percepção de semelhanças, diferenças e padrões.

As construções geométricas com régua e compasso, além de solucionar problemas geométricos, estimulam no aluno o desenvolvimento do raciocínio e da criatividade. Mesmo problemas mais simples como desenhar um triângulo equilátero, encontrar a mediatriz de um segmento ou construir um ângulo reto, têm a intenção de levar o aluno a perceber de quais objetos ele precisará construir. Em grande parte das vezes, o objeto-chave da solução são pontos obtidos pela interseção de dois objetos, por exemplo duas circunferências. Ainda, segundo Brasil (1998), algumas construções geométricas com régua e compasso permitem a visualização e aplicação de propriedades de figuras, além da construção de outras relações. Esse assunto contempla não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas a posição, localização de Figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas.

Brasil (2018, p. 266) destaca que

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Quanto ao ensino das transformações geométricas, Brasil (1998, p. 51) diz que

Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes.

As transformações geométricas podem também ter aplicações em outras áreas. Na biologia, o conceito de simetria apresenta uma grande importância na classificação e identificação de organismos vivos. No Reino *Animalia*, os organismos que apresentam vários eixos de simetria passando pelo seu centro, são ditos de simetria radial, por exemplo, alguns cnidários (água-viva, hidra). Já os organismos que apresentam apenas um eixo de simetria, são ditos de simetria bilateral, por exemplo, artrópodes (insetos, aranhas, centopéias), cordados (peixes, anfíbios, répteis, aves e mamíferos). Os equinodermos (estrelas do mar) apresentam simetria pentarradial, ou seja, podem ser traçados cinco eixos de simetria no seu corpo.

Já no reino *Plantae* o conceito de simetria é muito utilizado no estudo dos verticilos florais (cálice e corola). No caso de a simetria ser bilateral a flor é chamada *zigomorfa* (do grego *zigos*=par; *morphos*=forma). Já as flores que possuem simetria radial são chamadas *actinomorfas* (do grego *aktinos*=raio; *morphos*=forma). A Figura 3 mostra uma flor zigomorfa e a Figura 4 mostra uma flor actinomorfa.

Figura 3: Flor zigomorfa com simetria bilateral de *Cymbidium sp.*



Foto: Marcelo Luiz Bertó.

Figura 4: Flor actinomorfa com simetria radial de *Ludwigia sp.*

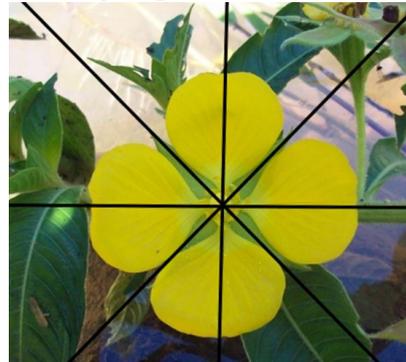


Foto: Marcelo Luiz Bertó.

Como podemos ver, muitas são as razões para estudar transformações geométricas e nos desafiamos na busca de soluções para os problemas geométricos, aplicados ou não, que podem ser resolvidos com a utilização da isometria e homotetia.

Neste trabalho iniciamos este capítulo 1 apresentando justificativas sobre a importância do estudo das transformações geométricas isometria e homotetia com aplicações em diferentes contextos. No capítulo 2 apresentamos um aporte teórico sobre a transformação geométrica isometria, abordando tipos, definições e propriedades. No capítulo 3 apresentamos a definição e propriedades da homotetia. No capítulo 4 são apresentados 20 problemas geométricos que podem ser resolvidos utilizando isometria e homotetia como ferramentas. No capítulo 5, também é feito um relato de métodos de resolução de problemas de construções geométricas e discutida a forma utilizada neste trabalho para resolver problemas do capítulo 4, com a utilização da ferramenta Rastro do *software* GeoGebra. No capítulo 6 são apresentadas sugestões de atividades, a serem trabalhadas em sala de aula, com materiais manipuláveis, como folhas e dobraduras, envolvendo o tema isometria e homotetia que podem ser utilizados no ensino de Geometria nas séries finais do ensino fundamental.

O produto oriundo deste trabalho é um Livro Virtual disponibilizado na página eletrônica do GeoGebra ³, que apresenta as soluções dos 20 problemas resolvidos neste trabalho, de forma a permitir a interação com alguns elementos construtivos das soluções.

³Livro Virtual disponível em no endereço eletrônico: <https://www.geogebra.org/m/ryg5s2x3>

2 Transformações Geométricas no plano: Isometria

A matemática é uma ciência que está envolvida com diversas situações do nosso dia-a-dia. Por vezes nem percebemos essa relação. As transformações geométricas podem estar presentes em várias situações como a imagem de uma paisagem às margens de um lago refletida na superfície do mesmo onde temos a isometria de reflexão, conforme pode ser observado na Figura 5. Quando puxamos uma gaveta estamos realizando uma translação desta e quando giramos uma maçaneta, estamos realizando uma rotação. Apesar destes exemplos serem de transformações no espaço, vamos realizar um estudo de transformações isométricas no plano. Para isso vamos utilizar como as principais referências LIMA (1996), MUNIZ NETO (2013), REZENDE (2008), WAGNER (1993).

Figura 5: Vegetação sendo refletida pela lâmina de água de um lago.



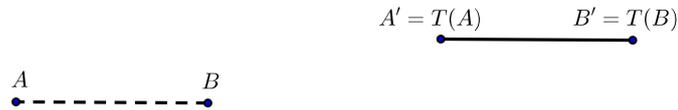
Foto: Marcelo Luiz Bertó (Ibarama, agosto de 2021).

Uma transformação T no plano é uma função bijetora do conjunto dos pontos do plano sobre si mesmo. A transformação inversa de T é a transformação T^{-1} no plano tal que $T^{-1}(Y)$ é o único ponto X do plano para o qual $T(X) = Y$.

Uma isometria é uma transformação no plano que preserva distância, isto é, se dois

pontos quaisquer A e B são transformados pela isometria T nos pontos $A' = T(A)$ e $B' = T(B)$, então vale a relação $\overline{A'B'} = \overline{AB}$. A Figura 6 ilustra um exemplo de isometria T .

Figura 6: Isometria T .

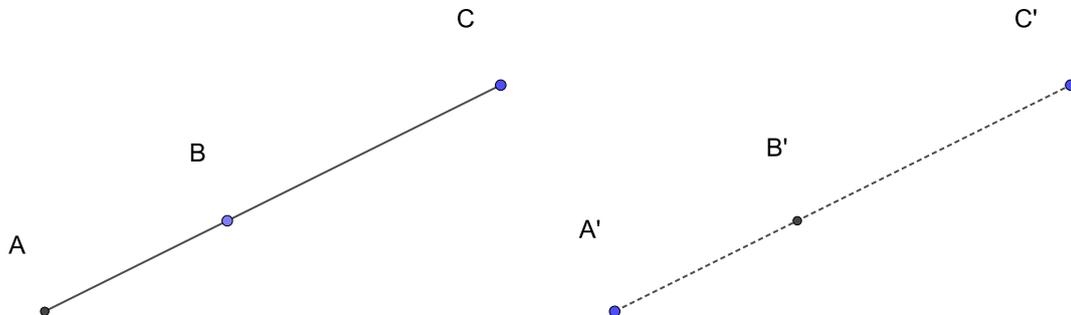


Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

A transformação inversa de uma isometria também é uma isometria, pois dados $A, B \in s$, temos $A = T(A_0)$ e $B = T(B_0)$, onde $A_0 = T^{-1}(A)$ e $B_0 = T^{-1}(B)$. Temos $d(A, B) = d(T(A_0), T(B_0)) = d(A_0, B_0) = d(T^{-1}(A), T^{-1}(B))$.

Uma isometria T possui as seguintes propriedades:

- a) Uma isometria T leva pontos colineares em pontos colineares. Ainda, se $A - B - C$, ou seja, se B está entre A e C , então $T(B)$ está entre $T(A)$ e $T(C)$. Em outras palavras, T preserva a relação estar entre, conforme ilustra a Figura 7;
- b) T leva retas em retas e segmentos em segmentos;
- c) T preserva medidas de ângulos;
- d) T preserva paralelismo entre retas;
- e) T leva circunferências em circunferências.

Figura 7: Isometria T .

Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Demonstrações:

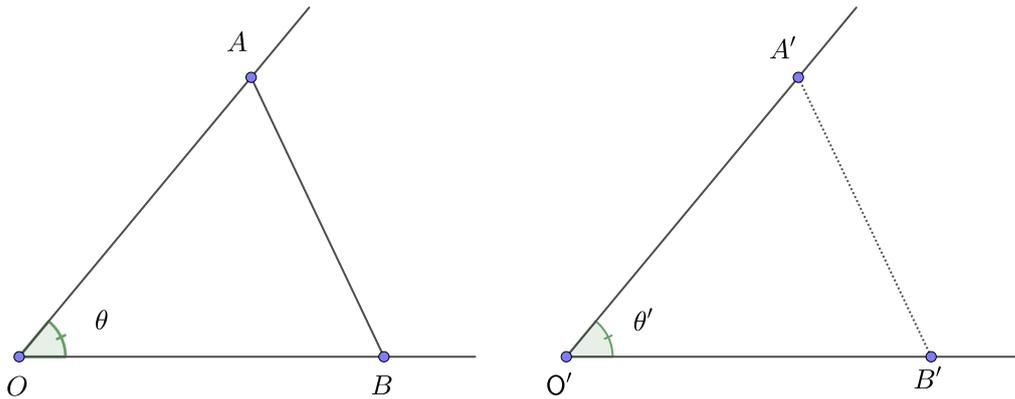
- a) Sejam colineares os pontos A, B, C tais que $A - B - C$ e sejam A', B', C' suas imagens pela isometria T . Como $A - B - C$, então $AB + BC = AC$. Por T ser uma isometria, temos $A'B' + B'C' = A'C'$. Assim B' está entre A' e C' e, com isso, A', B' e C' são colineares.
- b) T leva retas em retas. Seja a reta \overleftrightarrow{AB} . Temos que mostrar que $\overleftrightarrow{A'B'} \subset T(\overleftrightarrow{AB})$. Para isto consideramos $Y \in \overleftrightarrow{A'B'}$. Como T é uma bijeção, existe um único $X \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que $T(X) = Y$, isto é, $Y \in T(\overleftrightarrow{AB})$. Logo, $\overleftrightarrow{A'B'} \subset T(\overleftrightarrow{AB})$.

T leva segmentos em segmentos. Seja o segmento de reta $XY \subset r$ e uma isometria T tal que $T(r) = s$, sendo r e s duas retas. Vamos mostrar que $X'Y' \subset s$, onde $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$ é a imagem de XY . Tomemos $K \in r, K' = T(K)$. Como K pertence a XY , então $d(X, Y) = d(X, K) + d(K, Y)$. Logo $d(X', Y') = d(X', K') + d(K', Y')$, ou seja, $K' \in X'Y'$. Por outro lado se $K \notin XY, K' = T(K) \notin X'Y'$.

- c) Seja o ângulo θ com vértice O e sua imagem $\theta' = T(\theta)$ um ângulo com vértice O' . Consideramos os pontos A e B , um em cada lado de θ , tal que $OA = OB$. Assim, A' e

B' são as imagens de A e B pela isometria T e com isso $O'A' = O'B'$. Como a isometria T preserva distância, tem-se que $A'B' = AB$. Por fim, os triângulos AOB e $A'O'B'$ são congruentes pelo caso LLL. Concluimos assim que $\theta = \theta'$, conforme ilustra a Figura 8.

Figura 8: Isometria T preserva as medidas de ângulos.

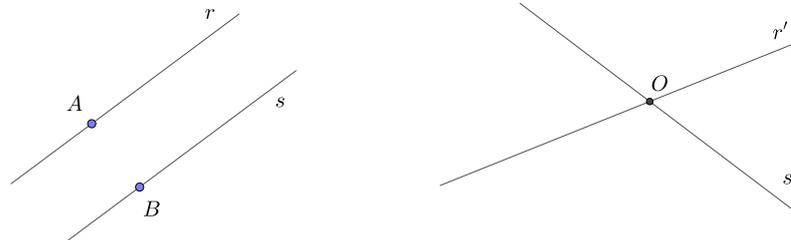


Fonte:

Marcelo Luiz Bertó.

- d) Sejam as retas paralelas r e s e suas imagens $r' = T(r)$ e $s' = T(s)$. Sejam também $A \in r$ e $B \in s$ e suponhamos que as retas r' e s' não sejam paralelas e sim concorrentes num ponto O ($O \in r' \cap s'$) com $O = T(A) = T(B)$. Mas isso é um absurdo porque A e B são pontos distintos no plano e eles teriam a mesma imagem. Logo r' e s' são paralelas, conforme ilustra a Figura 9.

Figura 9: T preserva paralelismo entre retas.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

- e) Seja a circunferência $C(O, r)$. Temos que $T(C(O, r)) \subset C(T(O), r)$, pela definição de isometria. Seja Q' um ponto de $C(T(O), r)$, ou seja, $\overleftrightarrow{T(O)Q'} = r$. Assim $T(O)T(Q) = r$ para algum Q . Logo, $\overleftrightarrow{OQ} = r$, ou seja, Q' é imagem do ponto Q , com Q em $C(O, r)$.

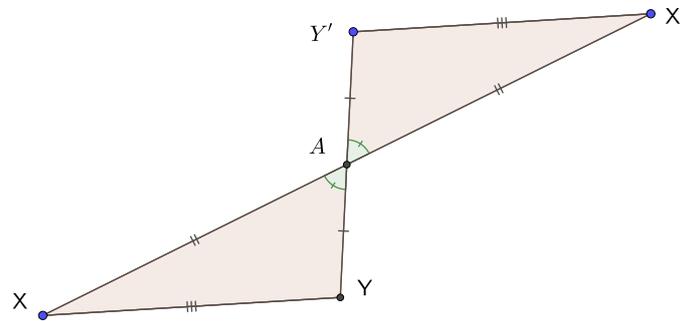
2.1 Reflexão

Nesta seção vamos estudar a isometria de reflexão, que pode ser em torno de um ponto ou de uma reta.

2.1.1 Reflexão em torno de um ponto

Seja um ponto A no plano π . A reflexão em torno do ponto A é a função $S_A : \pi \rightarrow \pi$ definida por $S_A(A) = A$ e para $X \neq A$, $S_A(X) = X'$ é o simétrico de X relativo a A . Assim A é ponto médio do segmento XX' . Vemos que S_A é uma isometria pois os triângulos XAY e $X'AY'$ são congruentes (LAL) e portanto $XY \equiv X'Y'$, conforme ilustra a Figura 10.

Figura 10: Reflexão de uma Figura em relação ao ponto A.

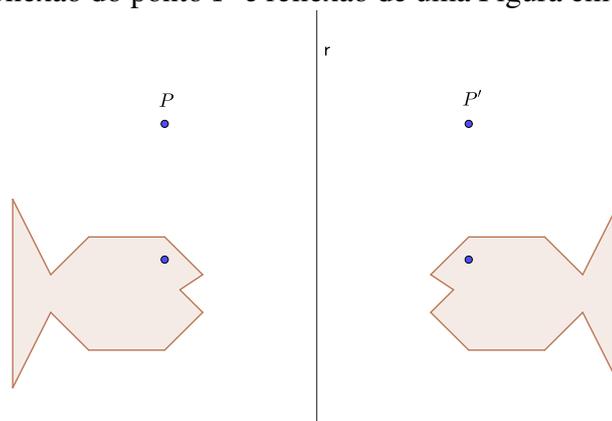


Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

2.1.2 Reflexão em torno de uma reta

Seja uma reta r . A isometria dada pela transformação, que leva cada ponto P do plano no seu simétrico P' em relação à reta r , é chamada *reflexão na reta r* ou simetria de reflexão na reta r , a qual denominamos R_r . A reta r é chamada *Eixo da reflexão* de R_r . De outra forma, a reflexão de um objeto em relação a uma reta pode ser visto como uma imagem espelhada desse objeto em relação a essa reta, chamada eixo de simetria, conforme Figura 11.

Figura 11: Reflexão do ponto P e reflexão de uma Figura em relação à reta r .



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

As seguintes propriedades da reflexão em retas são consequência da definição acima.:

- a) $R_r(P) = P$ se e somente se P é ponto de r .

b) Se s é uma reta perpendicular a r , então $R_r(s) = s$.

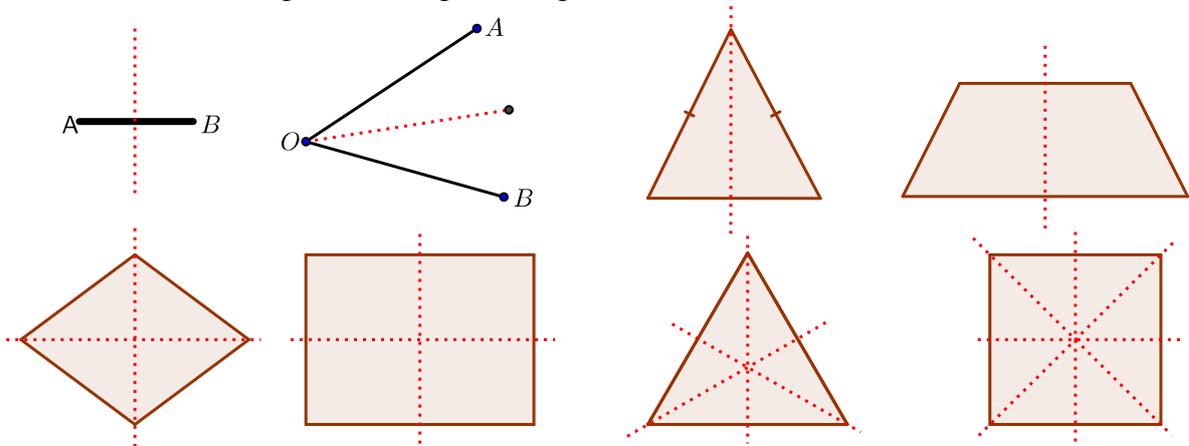
c) $R_r(R_r(P)) = P$, para todo ponto P do plano.

d) A transformação inversa de uma reflexão numa reta r é uma reflexão nessa mesma reta.

Há Figuras que coincidem com suas imagens pela reflexão em relação à uma reta r . Diz-se que estas Figuras são simétricas em relação à reta r ou que elas possuem simetria axial, sendo r chamada de eixo de simetria. Várias Figuras planas possuem eixo de simetria. Algumas delas estão ilustradas na Figura 12.

- Um segmento AB , cujo eixo de simetria é a sua mediatriz;
- Um ângulo $A\hat{O}B$, cuja bissetriz é o eixo de simetria;
- Triângulo isósceles, cujo eixo de simetria é a própria mediatriz da base;
- Trapézio isósceles, cujo eixo de simetria é a mediatriz das suas bases;
- O Losango e o retângulo possuem dois eixos de simetria;
- O triângulo equilátero possui três eixos de simetria;
- O quadrado possui quatro eixos de simetria;

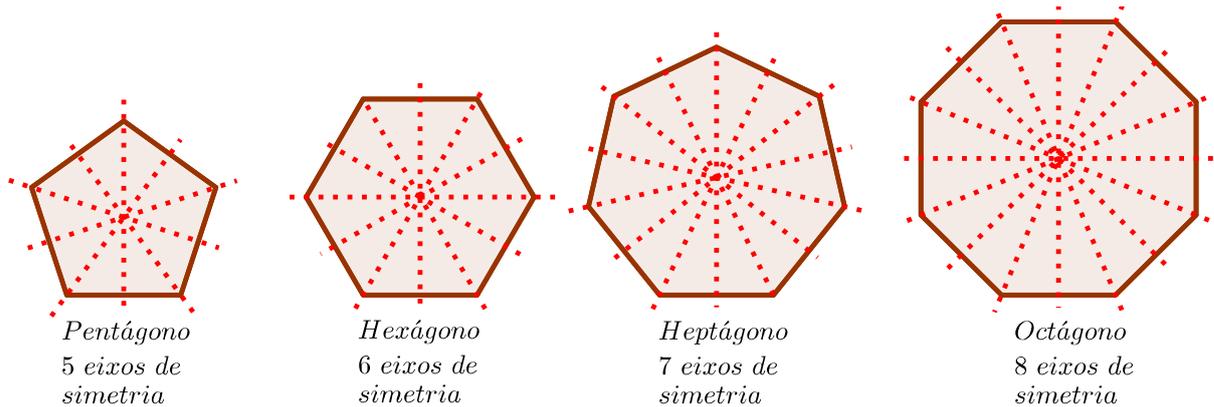
Figura 12: Algumas Figuras e seus eixos de simetrias.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

- De modo geral, um polígono regular de n lados possui n eixos de simetria pois cada mediatriz dos lados é um eixo de simetria que pode ou não passar pelo lado oposto (n par) ou por vértice (n ímpar). A Figura 13 ilustra alguns desses polígonos regulares e seus eixos de simetria.

Figura 13: Alguns polígonos regulares e seus eixos de simetria



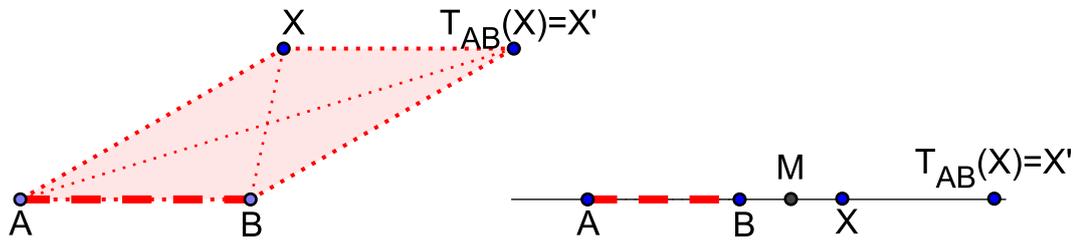
Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

- A circunferência possui infinitos eixos de simetria, ou seja, infinitas retas que passam pelo seu centro.

2.2 Translação

Sejam A , B e X pontos distintos do plano. Se A , B e X não são colineares então a translação T_{AB} é a isometria que leva um ponto X do plano ao ponto $T_{AB}(X) = X'$, tal que $ABX'X$ é um paralelogramo. Se A , B e X são colineares então a translação T_{AB} é tal que o segmento XX' está sobre a reta \overleftrightarrow{AB} e os segmentos AX' e BX têm o mesmo ponto médio. A Figura 14 ilustra respectivamente a translação T_{AB} se A , B , X não são colineares e se A , B , X são colineares.

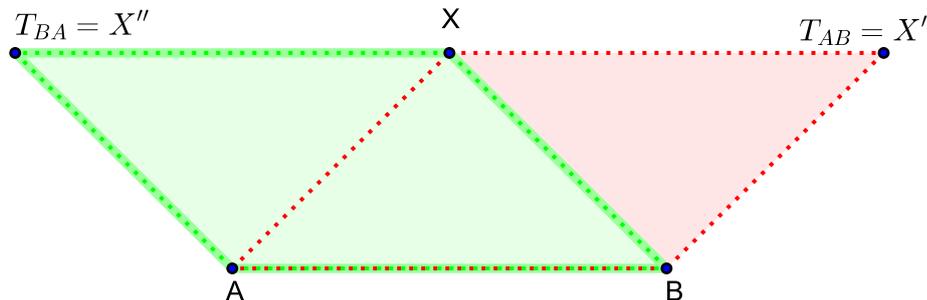
Figura 14: Translação $T_{AB}(X)$ se A, B, X não são colineares e se A, B, X são colineares, respectivamente.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Dados os pontos A e B podemos considerar também a translação T_{BA} definida de forma análoga que T_{AB} mas com sentido oposto ao sentido T_{AB} . A Figura 15 ilustra um exemplo com os pontos A, B e X não colineares, a translação T_{BA} e a translação T_{AB} .

Figura 15: Translação $T_{BA}(X) = X''$ e $T_{AB}(X) = X'$, respectivamente.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

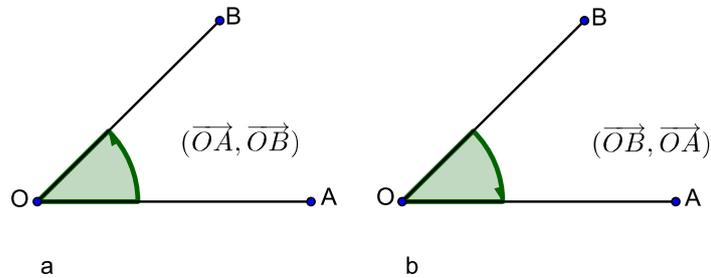
No caso em que A, B e X são pontos colineares, a transformação $T_{BA}(X) = X''$ e $T_{AB}(X) = X'$, temos então que os pontos A, B, X, X' e X'' são colineares. .

2.3 Rotação

Um *ângulo orientado* é aquele cujos lados inicial e final estão bem definidos, ou seja, são conhecidas a sua origem e a sua extremidade, respectivamente. Usamos a notação $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ para indicar que OA é o lado inicial e OB é o lado final do ângulo. Como exemplo, a Figura 16 a) ilustra o ângulo $\hat{A}OB$ com o lado OA como sendo o inicial e OB sendo o lado final e a

Figura 16 b) ilustra o ângulo $\hat{A}OB$ com o lado OB como sendo o inicial e OA sendo o lado final.

Figura 16: a) Ângulo (OA, OB) e b) ângulo (OB, OA) .

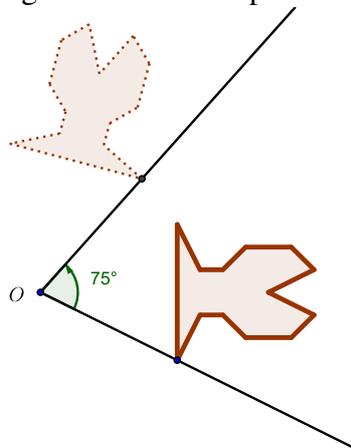


Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Ângulos orientados positivos são aqueles orientados no sentido anti-horário e ângulos orientados negativos são aqueles orientados no sentido horário.

Seja O um ponto do plano e θ um número real tal que $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$. A rotação de centro O e ângulo θ é a isometria $\Delta_{O,\theta}$ que deixa fixo o ponto O e leva o ponto X , $X \neq O$, no ponto $X' = \Delta_{O,\theta}(X)$, tal que $OX = OX'$ e a medida do ângulo orientado $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX'})$ é igual a θ , se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq 180^\circ$. Além disso, $OX' = OX$, sendo O o ponto médio de XX' , se $\theta = 180^\circ$; e $X' = X$ se $\theta = 0$. Podemos rotacionar um ponto, um segmento, um arco, uma figura, entre outros. A Figura 17 ilustra um exemplo de rotação de um objeto em torno do ponto O .

Figura 17: Rotação de uma Figura em torno do ponto O com $\theta = 75^\circ$ sentido anti-horário.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Estudamos, assim, os três casos de isometria: reflexão, translação e rotação.

3 Transformações Geométricas no plano: Homotetia

Estudamos no capítulo 2 as isometrias, as quais têm a característica principal de preservar medidas de distâncias entre os elementos transformados. Agora vamos estudar a homotetia, que tem como característica principal preservar a forma, mas não necessariamente as medidas de distância. A homotetia, por sua vez, também tem relação com situações práticas, por exemplo, a luz do sol incidindo sobre a copa de uma árvore, projeta sua sombra no solo. Um retroprojektor amplia a imagem contida em uma lâmina e a rebate num anteparo. Essas duas situações têm relação com homotetia no espaço. Neste capítulo vamos estudar a homotetia no plano. Para isso, as principais referências utilizadas foram COXETER (1967) e REZENDE (2008).

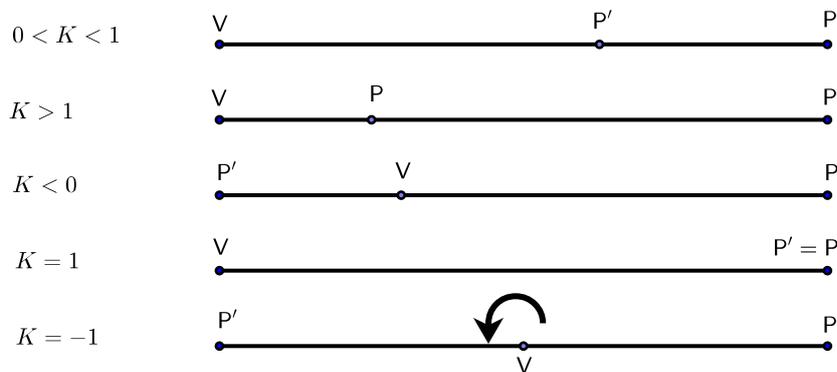
Fixado um ponto V do plano e um número real $k \neq 0$, a Homotetia de centro V e razão k é a transformação $H_{V,k}$, que associa a cada ponto P do plano, o ponto $P' = H_{V,k}(P)$ deste plano tal que:

a) $H_{V,k}(V) = V$;

b) $\overline{VP'} = |k|\overline{VP}$;

c) Os pontos V , P e P' são colineares. Se $k > 0$, P' está na semi-reta VP ; se $k < 0$, V está entre P e P' . O ponto P' é chamado de homotético de P na homotetia de centro V e razão de homotetia k . Os pontos P e P' são chamados de **Homólogos**. Se $k > 0$, a homotetia é chamada **homotetia direta**, e se $k < 0$, **homotetia inversa**. A razão k determina a posição dos pontos V , P e P' . Assim, temos as seguintes possibilidades para k , conforme ilustra a Figura 18:

Figura 18: Possibilidades para para a razão k e centro de homotetia V aplicado ao ponto P .



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

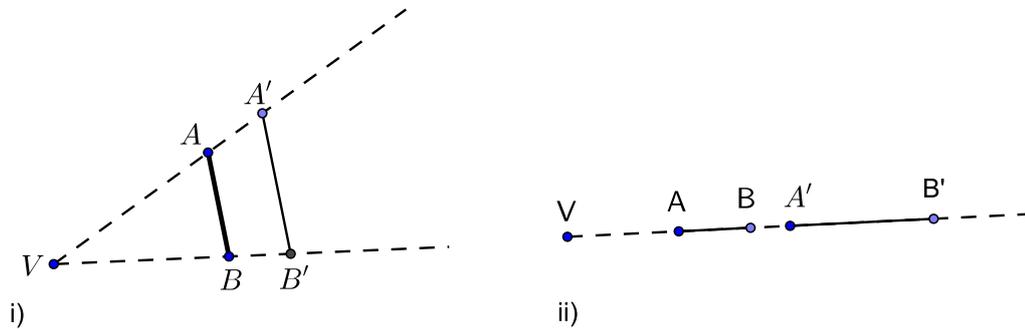
Dados um ponto V , um número real k e a homotetia $H_{V,k}$ são válidas as seguintes propriedades:

- a) Se V , A e B são pontos não colineares, então o segmento $A'B'$, homotético do segmento AB , é tal que $A'B' = |k|AB$ e é paralelo a AB se $k \neq 1$. Quando V , A e B forem colineares então o segmento $A'B'$ está contido na reta AB ;
- b) A homotetia $H_{V,k}$ transforma pontos colineares em pontos colineares. Ainda, se $A - C - B$, então $H_{V,k}(A) - H_{V,k}(C) - H_{V,k}(B)$, ou seja, homotetia preserva a relação "estar entre";
- c) $H_{V,k}$ leva retas em retas;
- d) A homotetia preserva medida de ângulos.

Demonstrações:

- a) Sejam o segmento AB e o ponto V não colinear a este segmento. Traçamos as retas \overleftrightarrow{VA} e \overleftrightarrow{VB} . Temos que $\overline{VA'} = |k|\overline{VA}$, \hat{V} é ângulo comum e $\overline{VB'} = |k|\overline{VB}$. Desta forma, os triângulos VAB e $VA'B'$ são semelhantes (LAL) com razão de semelhança k e, portanto, $\overline{A'B'} = |k|\overline{AB}$. Como os pares de ângulos $V\hat{A}B$, $V\hat{A}'B'$ e $V\hat{B}A$, $V\hat{B}'A'$ são congruentes respectivamente, então os segmentos AB e $A'B'$ são paralelos (Figura 63 i)). No caso que V , A e B são colineares, temos que V , A e A' são colineares por definição. Da mesma forma V , B e B' . Portanto, a reta que contém os pontos V , A e B também contém os pontos A' e B' , ou seja, contém o segmento $A'B'$, como ilustra a Figura 19.

Figura 19: item i) Pontos A , B e V não colineares e item ii) pontos A , B e V colineares.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

b) Sejam A , C e B pontos colineares e A' , C' e B' suas respectivas imagens homotéticas.

Temos 2 casos para analisar:

CASO 1: V pertence à reta r determinada por ABC .

Notamos que V , A e A' são colineares por definição. Logo A' pertence à reta $\overleftrightarrow{VA} = r$. Analogamente, B' e C' pertencem à reta r . Portanto A' , B' e C' são colineares.

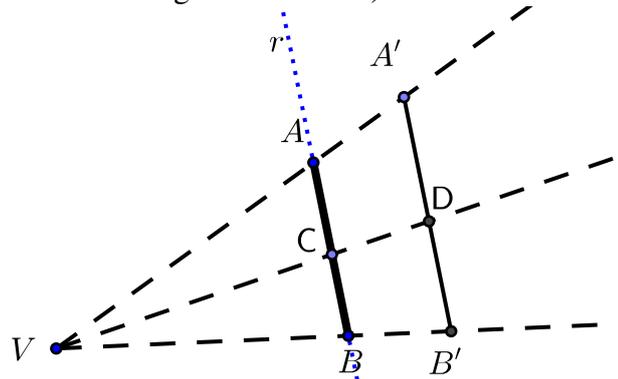
Vamos demonstrar a relação "estar entre":

Vimos que se V , X , Y são colineares, então $\overline{X'Y'} = |k|\overline{XY}$. Vamos supor que $A-C-B$. Então $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$. Queremos mostrar que $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} + \overline{C'B'}$. De fato, $\overline{A'B'} = |k|\overline{AB} = |k|(\overline{AC} + \overline{CB}) = |k|\overline{AC} + |k|\overline{CB} = \overline{A'C'} + \overline{C'B'}$, ou seja, C' está entre A' e B' .

CASO 2: V não pertence à reta r determinada por ACB .

Temos que $A-C-B$. Observe que o triângulo $VA'B'$ é semelhante ao triângulo VAB (LAL) com razão $|k|$ e, portanto, os segmentos $A'B'$ e AB são paralelos. Seja D o ponto de interseção do segmento $A'B'$ com a reta \overleftrightarrow{VC} . Então o triângulo $VA'D$ é semelhante ao triângulo VAC (AAA) com razão $|k|$. Assim, $\frac{\overline{VD}}{\overline{VC}} = |k|$, ou seja, $\overline{VD} = |k|\overline{VC}$. Logo $D = C'$ e com isso, o ponto C' está entre os pontos A' e B' , conforme ilustra a Figura 20.

Figura 20: item b) caso 2.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

c) Sejam a reta t e os pontos A, B, C sobre esta reta. Agora tomamos um ponto X qualquer nessa reta. Vamos supor, sem perda de generalidade, $A - B - C - X$. Sejam A', B', C' e X' as respectivas imagens homotéticas daqueles pontos. Pelo item anterior, temos que homotetia leva pontos colineares em pontos colineares e, portanto, $B' - C' - X'$, ou seja, B', C' e X' são colineares. Logo a homotetia leva retas em retas.

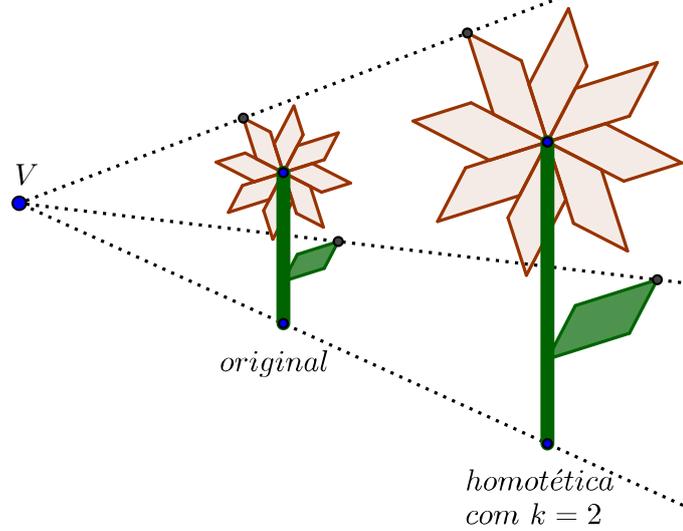
d) Isso se justifica diretamente pela semelhança de triângulos, onde Figuras semelhantes têm ângulos correspondentes congruentes.

Dito de forma simplificada, uma homotetia pode ser entendida com a redução ou ampliação de uma Figura, sob uma escala de constante k . Polígonos homotéticos possuem lados homólogos paralelos. Já a figura homotética de uma circunferência de raio r é também uma circunferência de raio r' onde $r' = |k|r$.

Dada uma figura e fixado o ponto V como o centro da homotetia, vamos analisar as possibilidades para a razão de homotetia k aplicado esta figura.

- Homotetia de centro V e $k > 0$, conforme a ilustra a Figura 21.

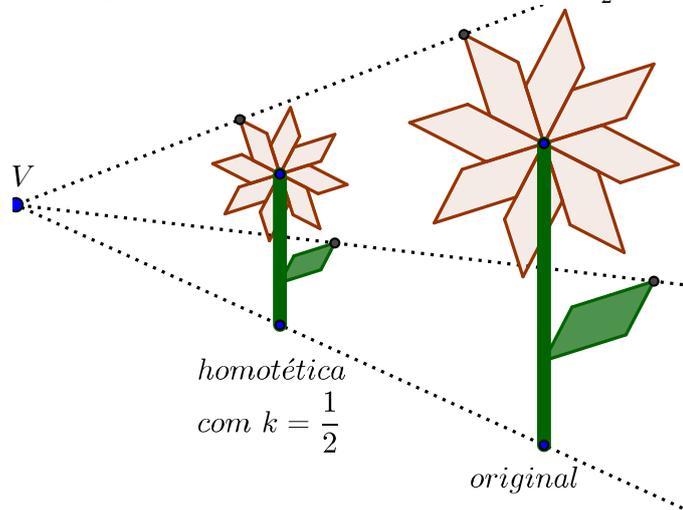
Figura 21: Homotetia de centro V e $k = 2$.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

- Homotetia de centro V e $0 < k < 1$, conforme ilustra a Figura 22.

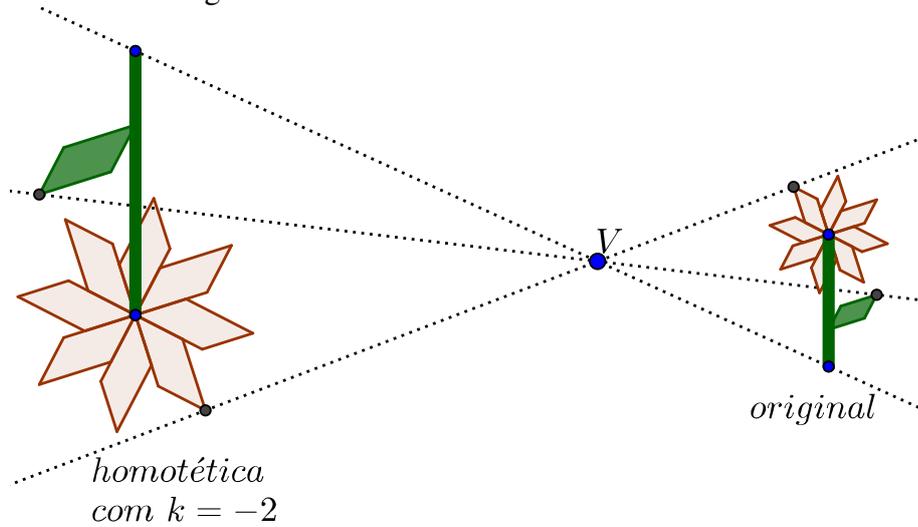
Figura 22: Homotetia de centro V e $k = \frac{1}{2}$.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

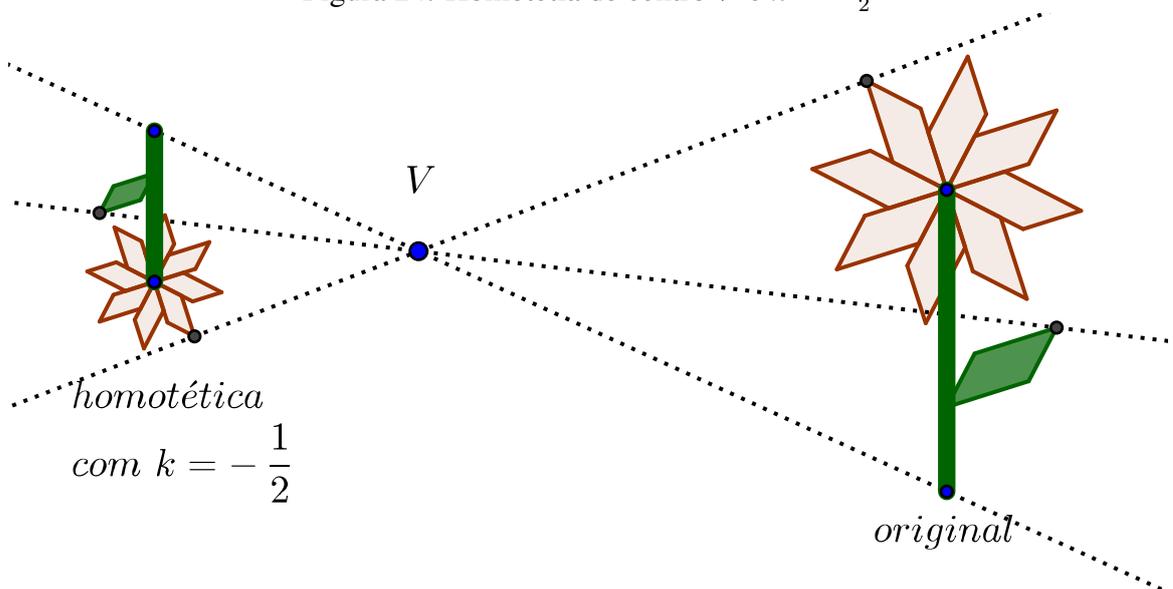
- Homotetia de centro V e $k < -1$, conforme ilustra a Figura 23.

Figura 23: Homotetia de centro V e $k = -2$.



- Homotetia de centro V e $-1 < k < 0$, conforme ilustra a Figura 24.

Figura 24: Homotetia de centro V e $k = -\frac{1}{2}$



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Estudamos, assim, definições e principais propriedades das transformações geométricas isometria e homotetia. Este assunto é bastante amplo e com inúmeras aplicações. Vamos, no capítulo seguinte, apresentar aplicações das transformações geométricas na resolução de problemas de construções geométricas.

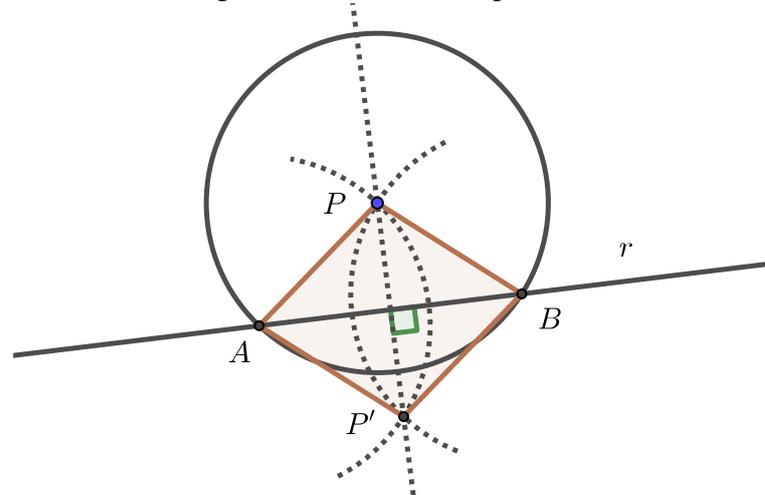
4 Aplicações de transformações geométricas na resolução de problemas de construções geométricas

Neste capítulo vamos apresentar vinte problemas geométricos, grande parte deles de construções geométricas, os quais foram resolvidos utilizando as transformações geométricas isometria e homotetia. Todos os passos construtivos são justificados matematicamente e são acompanhados de figuras ilustrativas geradas no *software* GeoGebra. Também são disponibilizadas estas soluções de forma interativa na forma de Livro Virtual do GeoGebra ⁴. Alguns desses problemas podem ser resolvidos por outros caminhos, mas com a aplicação de transformações geométricas, a solução se torna mais rápida e fácil. Neste capítulo, as principais referências utilizadas foram REZENDE (2008), LIMA (1996), MUNIZ NETO (2013)

4.1 Aplicações de Isometria

Vimos que a reflexão de um ponto P em relação a uma reta r é o ponto P' simétrico de P . Agora, vejamos como determinar graficamente isso ($P \notin r$). Traçamos uma circunferência com centro em P e raio maior que $d(P, r)$ que cortará r em A e B . Com mesmo raio traçamos duas circunferências com centros em A e B que se interceptarão em P e P' . Notamos que $APBP'$ é um losango e suas diagonais formam um ângulo reto. A Figura 25 ilustra essa situação.

⁴Livro Virtual disponível em no endereço eletrônico: <https://www.geogebra.org/m/ryg5s2x3>

Figura 25: Reflexão do ponto P .

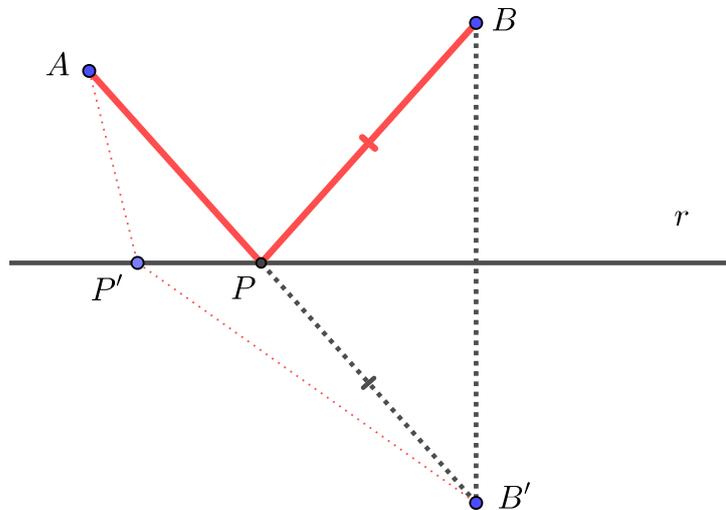
Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Agora que sabemos obter ponto P' simétrico de P , vamos resolver algumas situações-problema utilizando Isometrias como ferramenta.

Problema 1. Uma pessoa sai do ponto A e quer chegar ao ponto B que está no mesmo semiplano de A em relação à reta r , tocando uma vez nesta. Qual o percurso que ela deve fazer para que este caminho seja o menor possível?

Solução justificada. Traçamos o ponto B' simétrico de B em relação à reta r . Traçamos o segmento AB' que corta r no ponto P . Temos que $\overline{PB} = \overline{PB'}$, pois P está sobre r , que é mediatriz de BB' . Assim $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB'} = \overline{AB'}$. Supomos agora que existe outro ponto $P' \neq P$, com $P' \in r$. Pela desigualdade triangular, temos $\overline{AP'} + \overline{P'B'} > \overline{AB'} \Rightarrow \overline{AP'} + \overline{P'B} > \overline{AB'}$, pois $\overline{P'B'} = \overline{P'B}$. Portanto, o menor caminho para este problema é a poligonal $A - P - B$, conforme ilustra a Figura 26.

Figura 26: Solução do problema 1.

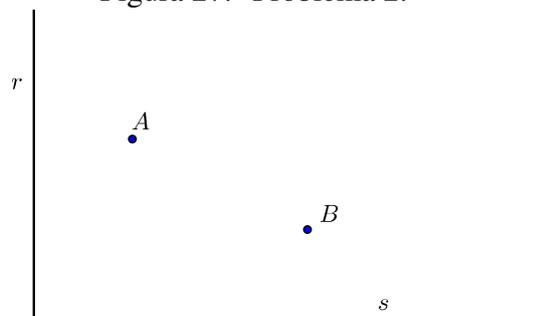


Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Este problema permite outras interpretações: digamos que queremos buscar água num rio e levar a outro ponto do mesmo lado do rio, qual o menor caminho a ser percorrido? Ou ainda, Um pássaro está sobre uma árvore e avista comida no chão. Próximo dela, há um gato (possível predador). Assim, ele tem que se deslocar de uma árvore a outra pegando comida no chão. Qual o menor caminho a ser percorrido e com isso diminuir a chance de ataque do predador?

Problema 2. Sejam duas semirretas perpendiculares r e s , e dois pontos A e B , conforme ilustra a Figura 27. Marque os pontos $R \in r$ e $S \in s$, tal que a soma $\overline{AR} + \overline{RS} + \overline{SB}$ seja a menor possível.

Figura 27: Problema 2.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Solução justificada. Refletimos o ponto A em relação à reta r , obtendo o ponto A' . Da mesma forma, refletimos o ponto B em relação à reta s , obtendo o ponto B' . Traçamos o segmento $A'B'$. Esse segmento corta a reta r no ponto R e a reta s no ponto S . Assim temos o caminho poligonal $A - R - S$. Tomamos agora um ponto $R' \in r$ e um ponto $S' \in s$, distintos de R e S . Disso temos que $\overline{A'R'} + \overline{R'X} > \overline{A'X}$. Ainda, $\overline{XS'} + \overline{S'B'} > \overline{XB'}$, ambos pela desigualdade triangular. Como $\overline{A'R'} = \overline{AR'}$ e $\overline{S'B'} = \overline{S'B}$ temos que

$$\overline{A'R'} + \overline{R'X} > \overline{A'X} \Rightarrow \overline{AR'} + \overline{R'X} > \overline{A'X} \quad (I)$$

$$\overline{XS'} + \overline{S'B'} > \overline{XB'} \Rightarrow \overline{XS'} + \overline{S'B} > \overline{XB'} \quad (II)$$

Somando (I) e (II), temos:

$$\overline{AR'} + \underbrace{\overline{R'X} + \overline{XS'}}_{\overline{R'S'}} + \overline{S'B} > \underbrace{\overline{A'X} + \overline{XB'}}_{\overline{A'B'}} \Rightarrow$$

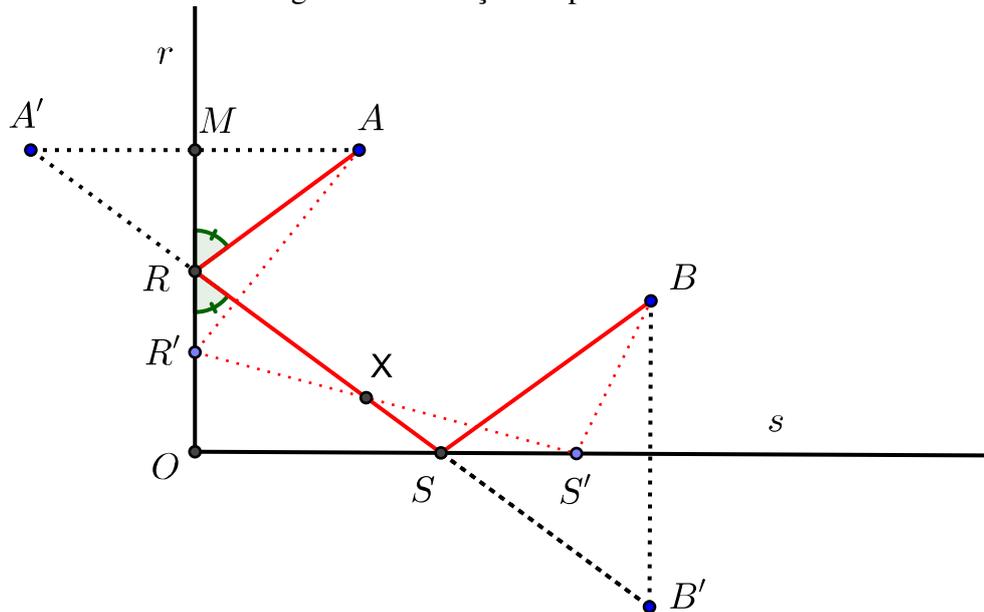
$$\overline{AR'} + \overline{R'S} + \overline{S'B} > \overline{A'B'} \Rightarrow$$

$$\overline{AR'} + \overline{R'S} + \overline{S'B} > \overline{AR} + \overline{RS} + \overline{SB'} \Rightarrow$$

$$\overline{AR'} + \overline{R'S} + \overline{S'B} > \overline{AR} + \overline{RS} + \overline{SB}$$

Portanto o caminho poligonal $A - R - S - B$ é o menor caminho que soluciona o problema, conforme ilustra a Figura 28.

Figura 28: Solução do problema 2.

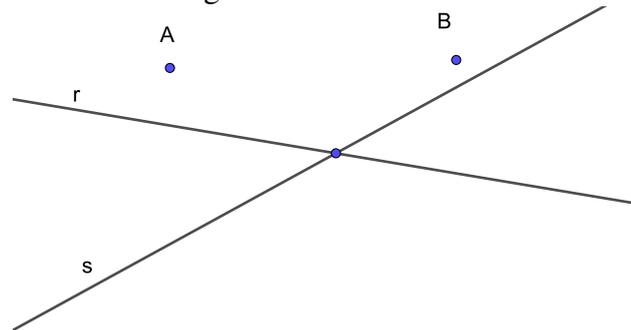


Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Além disso, um fato importante que destacamos nesta solução, é que os ângulos $M\hat{R}A$ e $O\hat{R}S$ têm a mesma medida, ou seja, o ângulo de incidência do segmento AR e o ângulo de saída do segmento RS são congruentes, conforme ilustra a Figura 16. De fato, $M\hat{R}A \equiv M\hat{R}A'$, pela propriedade da reflexão. Já $M\hat{R}A' \equiv O\hat{R}S$, pois são opostos pelo vértice. Logo, por transitividade, os ângulos $M\hat{R}A$ e $O\hat{R}S$ são congruentes.

Problema 3. Sejam dadas duas retas concorrentes r e s e dois pontos A e B , ambos do mesmo lado de r e do mesmo lado de s , conforme ilustra a Figura 29. Determine os pontos $X \in r$ e $Y \in s$, tal que o caminho poligonal $A - X - Y - B$ tenha o menor comprimento possível.

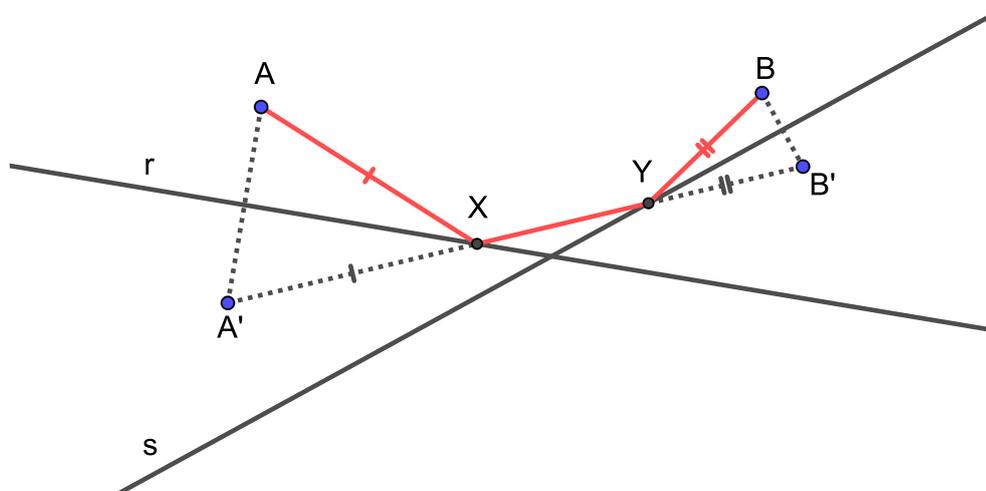
Figura 29: Problema 3.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Solução Justificada. Refletimos os pontos A em relação à reta r e B em relação à reta s , obtendo os pontos A' e B' , respectivamente. Traçamos o segmento $A'B'$ que cortará as retas r e s nos pontos X e Y , respectivamente. O caminho $A - X - Y - B$ é a solução procurada, conforme ilustra a Figura 30. A justificativa é análoga a do problema 2.

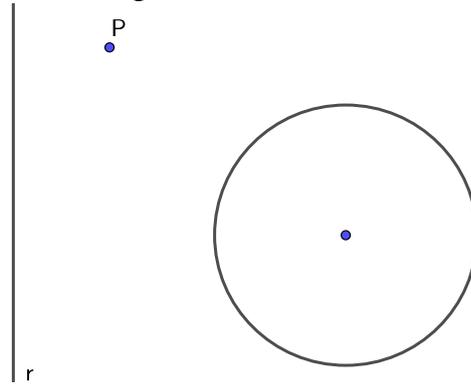
Figura 30: Solução do problema 3.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Problema 4. Sejam um ponto P e uma circunferência S do mesmo lado de uma reta r , conforme ilustra a Figura 31. Determine os pontos $R \in r$ e $Q \in S$, tais que o caminho poligonal $P - R - Q$ seja mínimo.

Figura 31: Problema 4.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

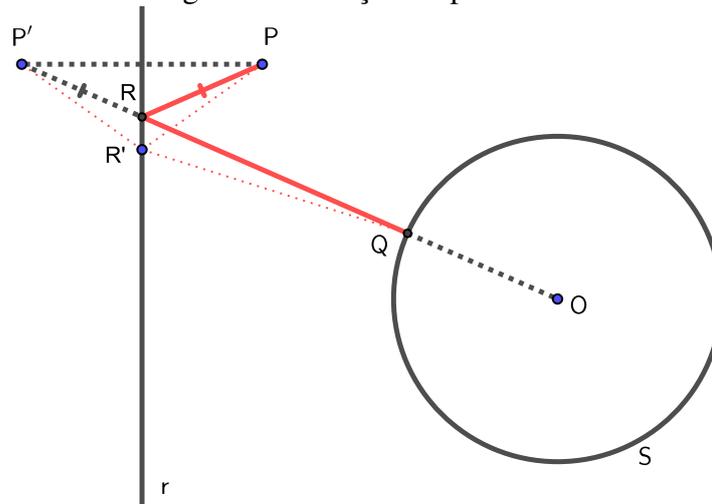
Solução justificada. Seja O o centro da circunferência S . Refletimos o ponto P em relação à reta r , obtendo o ponto P' . Traçamos o segmento $P'O$ que cortará a reta r no ponto R e a circunferência S no ponto Q . Temos, então, o caminho poligonal $P - R - Q$ que é a solução, conforme ilustra a Figura 32. Sejam $R' \in r$ e $R' \neq R$. Assim $\overline{P'R'} = \overline{PR'}$. Vamos mostrar que estes pontos minimizam a distância. Pela desigualdade triangular temos

$$\overline{P'R'} + \overline{R'Q} > \overline{P'Q} \Rightarrow$$

$$\overline{PR'} + \overline{R'Q} > \overline{P'R} + \overline{RQ} \Rightarrow$$

$$\overline{PR'} + \overline{R'Q} > \overline{PR} + \overline{RQ}$$

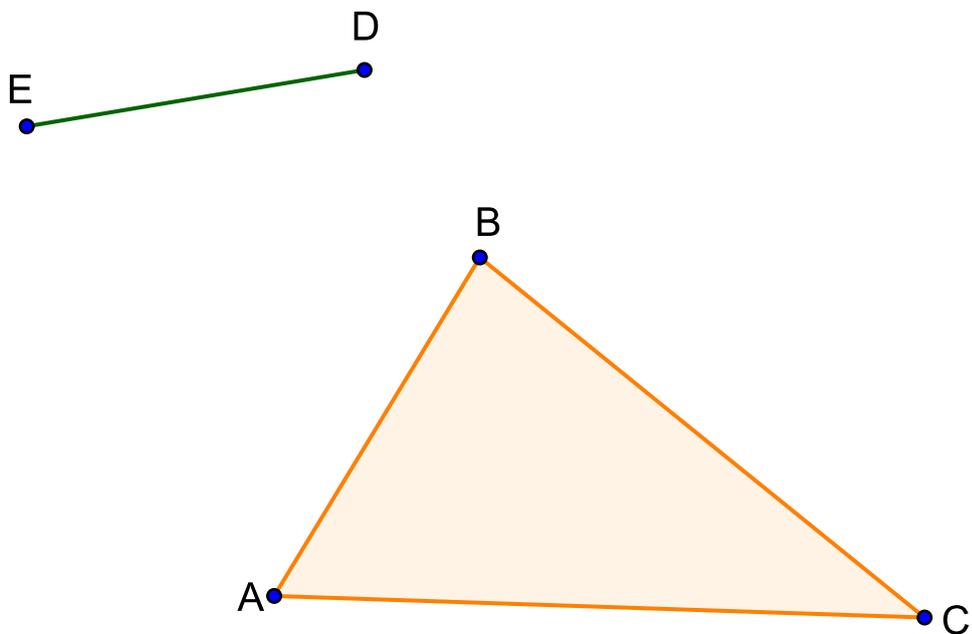
Figura 32: Solução do problema 4.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Problema 5. Dado um triângulo qualquer ABC e um segmento ED . Inscrever este segmento no triângulo dado através do movimento de translação do segmento ED (note que o segmento da solução deve ser paralelo ao segmento dado ED), conforme ilustra a Figura 33.

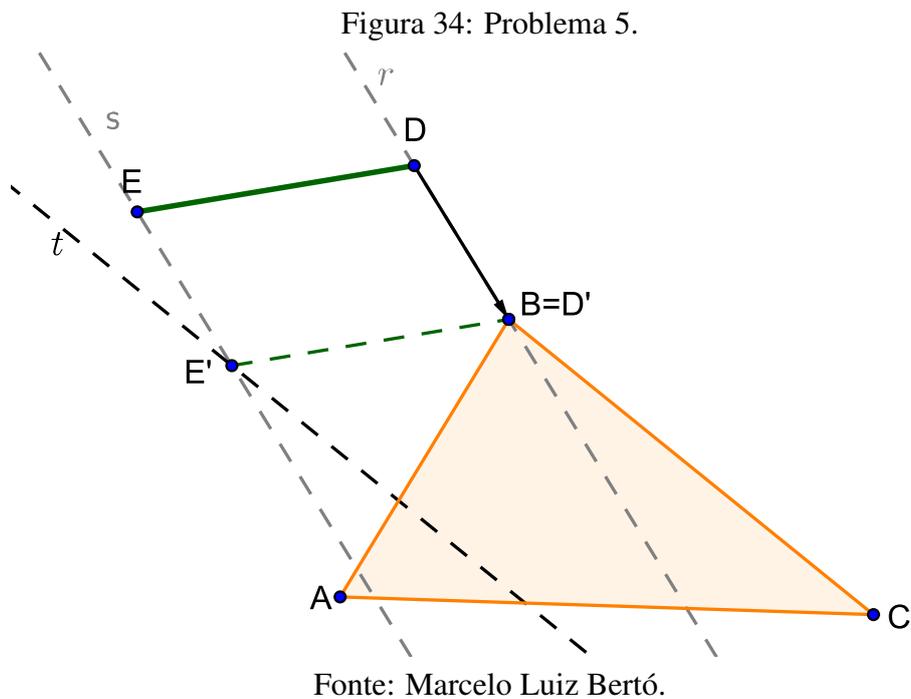
Figura 33: Problema 5.



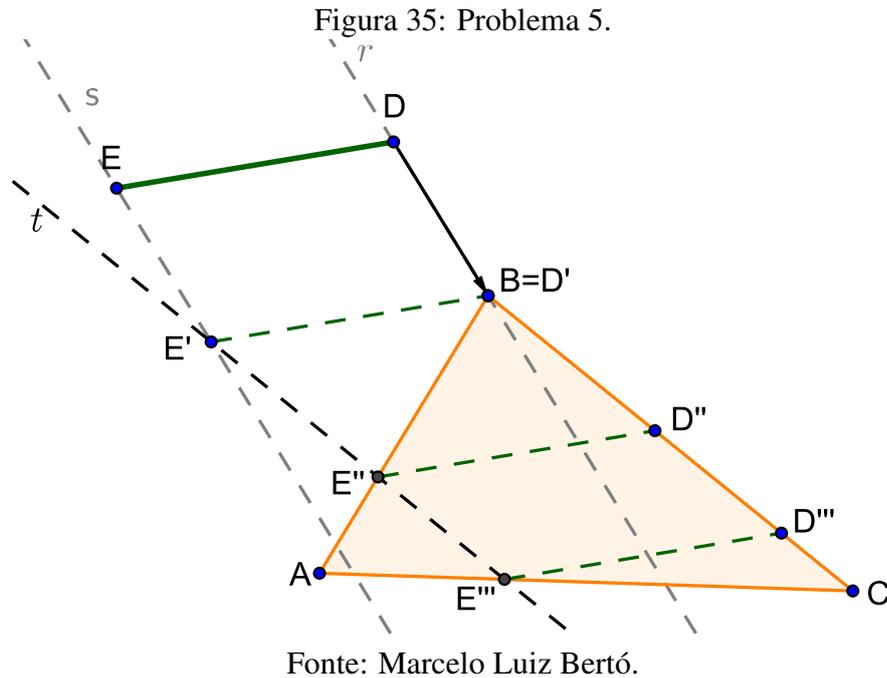
Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Solução justificada. Traçamos a reta r definida pelos pontos B, D . Traçamos a reta

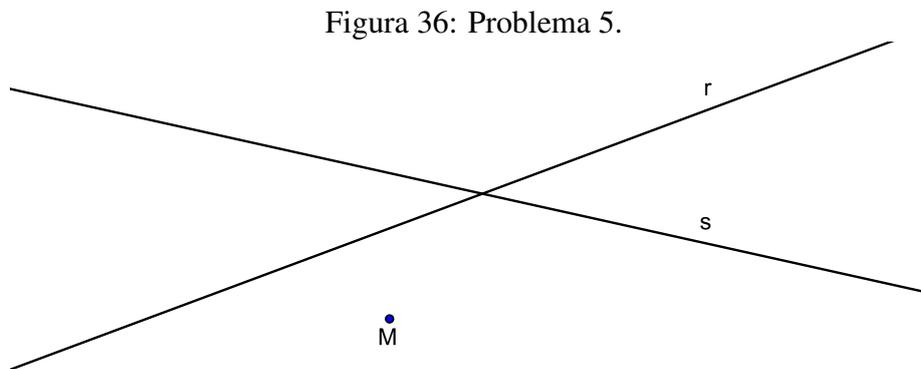
s paralela à r passando pelo ponto E . Transladamos o segmento ED tal que o ponto D' , transladado de D , coincida com o ponto B do triângulo dado. Obtemos também o ponto E' , transladado de E sobre a reta s . Pelo ponto E' , traçamos a reta t paralela ao lado BC do triângulo dado, conforme a Figura 34.



A reta t corta o lado AB em E'' e o lado AC em E''' . Transladamos o segmento $E'D'$ tal que E' coincida com E'' , obtendo o ponto D'' sobre o lado BC , sendo então o segmento $E''D''$ uma solução do problema. Transladando o segmento $E'D'$ tal que o ponto E' coincida com o ponto E''' , obtemos o ponto D''' , sendo então o segmento $E'''D'''$ a outra solução do problema. Notamos que as figuras $EDD'E'$, $E'D'D''E''$ e $E'D'D'''E'''$ são paralelogramos e, por transitividade, $E'''D''' \equiv E''D'' \equiv E'D' \equiv ED$, conforme ilustra a Figura 35.



Problema 6. Dadas duas retas concorrentes r e s e um ponto M não pertencente nem a r nem a s , conforme ilustra a Figura 36. Determine os pontos R sobre r e S sobre s , de forma que M seja o ponto médio do segmento RS .



Solução justificada. Seja O o ponto de interseção das retas r e s . Traçamos a reta t que passa por O e M . Refletimos o ponto O em relação a M sobre t , obtendo o ponto O' tal que $O - M - O'$. Por O' traçamos uma reta paralela a r , obtendo r' . da mesma forma, por O' traçamos uma reta paralela a s , obtendo s' . A interseção das retas r e s' determinam o ponto R . Já a interseção das retas s e r' determinam o ponto S . Assim os pontos R e S são a solução do

problema pois a figura $ORO'S$ é um paralelogramo por construção e por uma propriedade desta Figura, as suas diagonais se interceptam no seus pontos médios. Logo $\overline{RM} = \overline{MS}$, conforme ilustra a Figura 37.

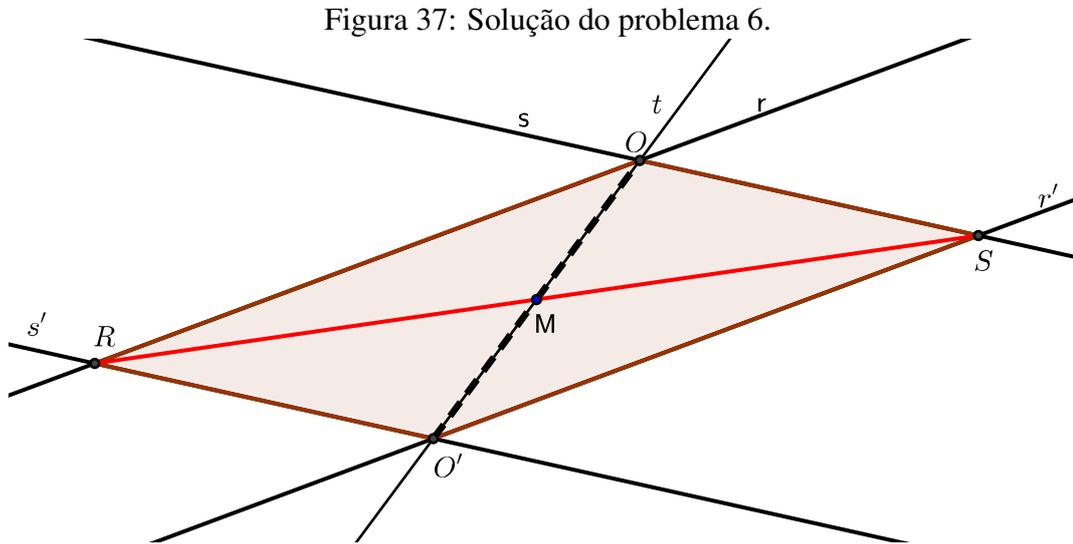


Figura 37: Solução do problema 6.

Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Problema 7. Um rio cujas margens são representadas por duas retas paralelas r e s , separa as duas cidades A e B conforme ilustra a Figura 38. Em quais pontos P e Q , com $P \in r$ e $Q \in s$, deve ser construída uma ponte PQ sobre o rio e perpendicular às margens, tal que o caminho da cidade A para a cidade B , passando pela ponte, tenha comprimento mínimo?

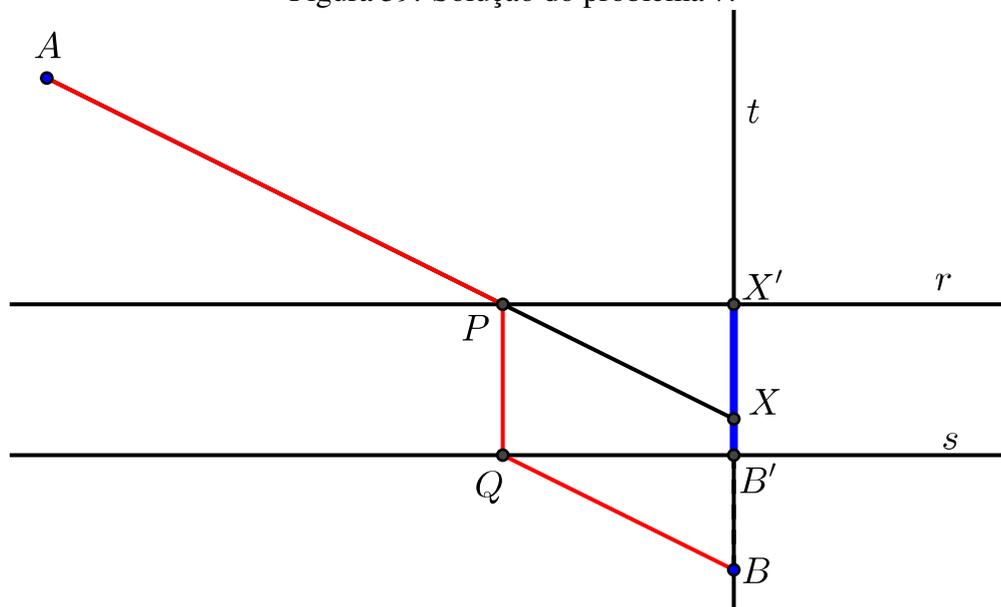
Figura 38: Problema 7.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Solução justificada. Traçamos por B uma reta t perpendicular a s e a interseção da reta t com a reta r determina o ponto X' e a interseção da reta t com a reta s determina o ponto B' . Transladamos o segmento $X'B'$ sobre a reta t de modo que o ponto B' coincida com o ponto B . Traçamos o segmento AX , que corta a reta r no ponto P . Pelo ponto P traçamos uma reta perpendicular a r que corta a reta s no ponto Q . O caminho poligonal $A - P - Q - B$ é a solução procurada, conforme ilustra a Figura 39. Vamos mostrar que este é o menor caminho entre as cidades, de acordo com o enunciado do problema.

Figura 39: Solução do problema 7.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Como $PQ \parallel XB$ e $\overline{PQ} = \overline{XB}$ por construção, a Figura $PQBX$ é um paralelogramo. Assim $\overline{AP} + \overline{QB} = \overline{AP} + \overline{PX} = \overline{AX}$, ou seja,

$$\overline{AP} + \overline{QB} = \overline{AX}$$

Seja o ponto $P' \in r$ distinto de P e, $Q' \in s$ o pé da perpendicular ($P'Q' \perp s$). Vamos avaliar $\overline{AP'} + \overline{Q'B}$. Temos que

$$\overline{P'Q'} = \overline{PQ} = \overline{XB}$$

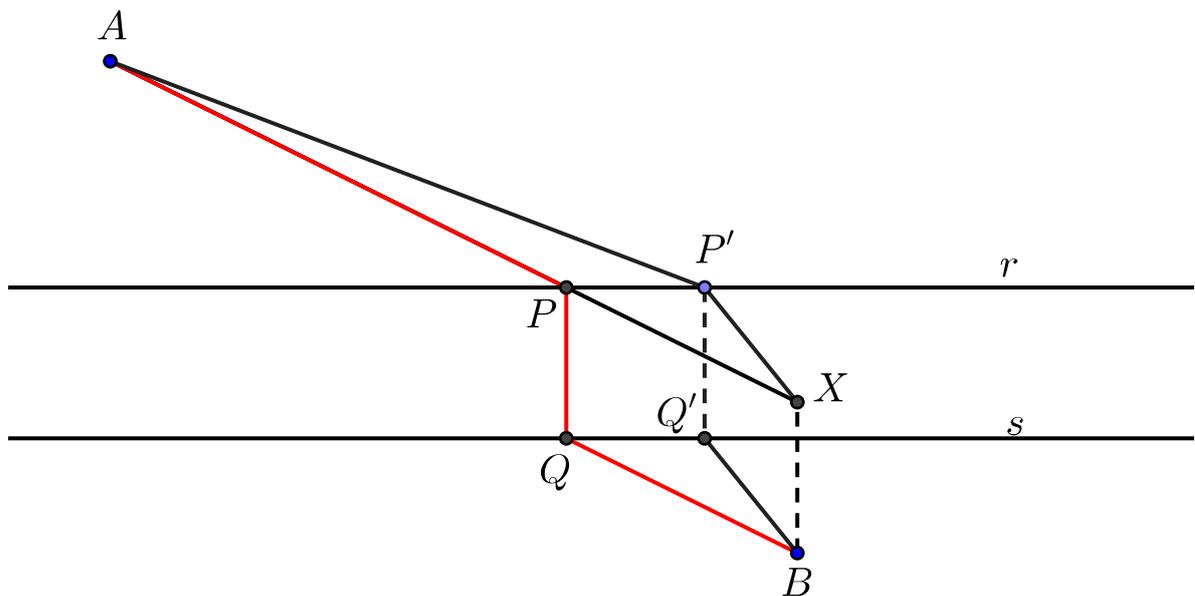
Como $P'Q' \parallel XB$, segue que $P'XBQ'$ é um paralelogramo. Logo $\overline{P'X} = \overline{Q'B}$.

Portanto

$$\overline{AP'} + \overline{Q'B} = \overline{AP'} + \overline{P'X} > \overline{AX}$$

Pela desigualdade triangular. Temos que $\overline{AP'} + \overline{Q'B} > \overline{AP} + \overline{QB}$. Conclui-se assim que o caminho $AP + PQ + QB$ é o menor caminho entre as cidades A e B que soluciona o problema dado, conforme ilustra a Figura 40.

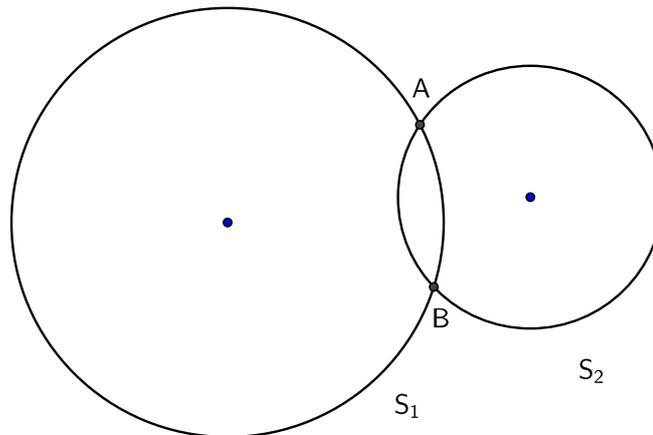
Figura 40: Solução do problema 7.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Problema 8. Dadas duas circunferências S_1 e S_2 que se interceptam nos pontos A e B , conforme ilustra a Figura 41. Construa uma reta r por A , tal que r intercepta S_1 e S_2 nos pontos M e N , respectivamente, e tal que A seja o ponto médio do segmento MN .

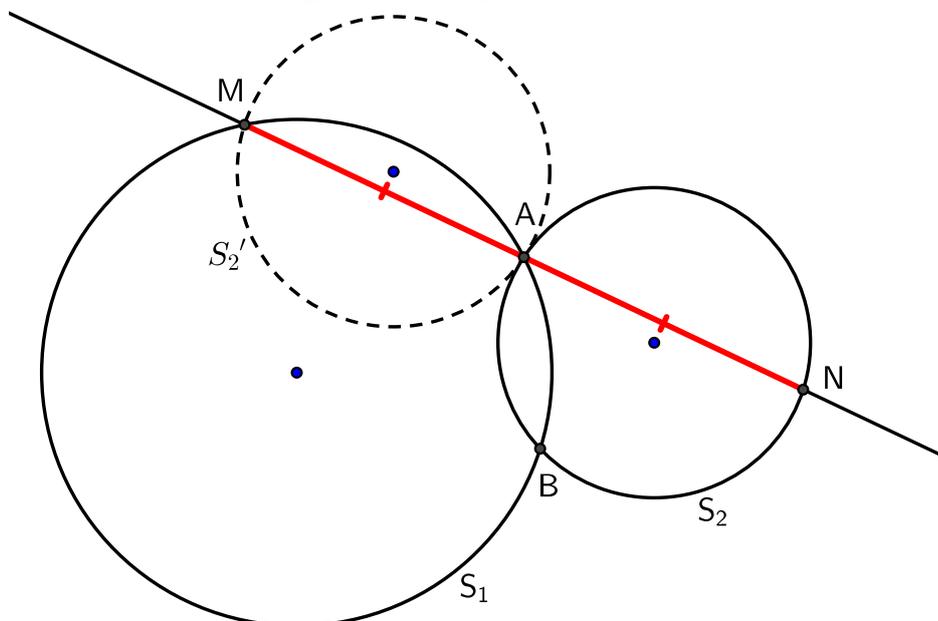
Figura 41: Problema 8.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Solução justificada. Refletimos a circunferência S_2 em relação ao ponto A , obtendo a circunferência S'_2 . Uma intersecção das circunferências S_1 e S'_2 determina o ponto M . Traçamos a reta MA que cortará a circunferência S_2 no ponto N . Assim os pontos M e N são a solução do problema, ou seja, $MA \equiv AN$, conforme ilustra a Figura 42.

Figura 42: Solução Problema 8.



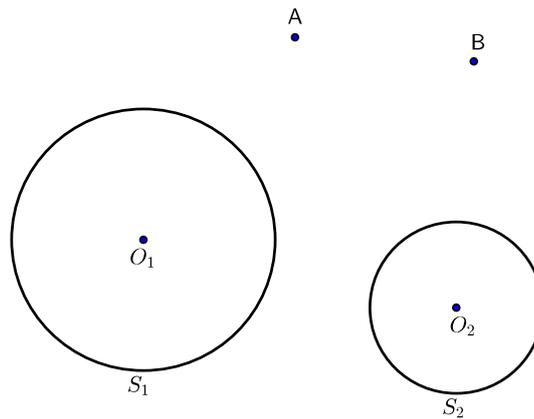
Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Para justificar que esta é a solução, notamos que, como S_2 e S'_2 são simétricas em relação ao ponto A , então os pontos $M \in S'_2$ e $N \in S_2$ também são simétricos em relação ao ponto

A. Portanto, $\overline{AM} = \overline{AN}$.

Problema 9. Dados os pontos A e B exteriores a duas circunferências S_1 e S_2 dadas, conforme ilustra a Figura 43. Construa o paralelogramo $ABCD$ com $C \in S_2$ e $D \in S_1$.

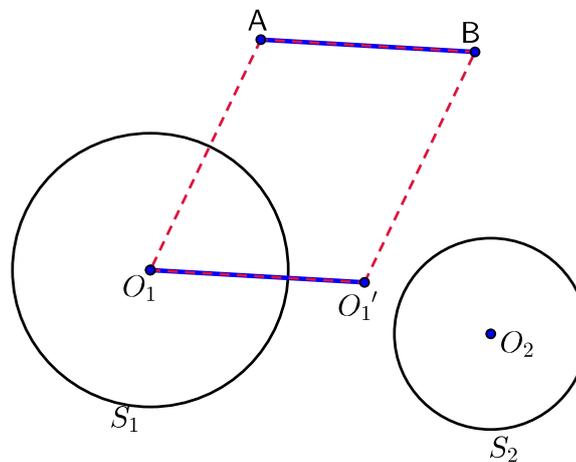
Figura 43: Problema 9.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Solução justificada. Sejam O_1 e O_2 os centros das circunferências S_1 e S_2 , respectivamente. Traçamos o segmento AB . Aplicamos a transformação $T_{AB}(O_1) = O'_1$, ou seja, transladamos o ponto O_1 , no sentido de AB , obtendo o ponto O'_1 . Pela definição de translação, a Figura ABO'_1O_1 é um paralelogramo, conforme ilustra a Figura 44.

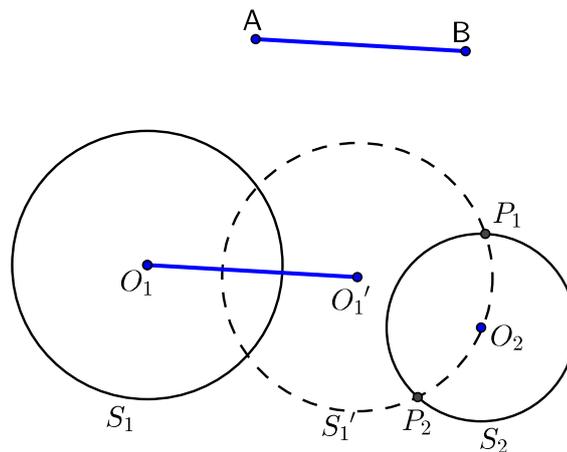
Figura 44: solução do problema 9.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Agora, com mesma medida de raio de S_1 traçamos a circunferência S'_1 com centro em O'_1 que corta a circunferência S_2 . Notamos que a interseção de S'_1 com S_2 pode ser um, dois ou nenhum ponto, dependendo das medidas dos raios dessas circunferências bem como da medida do segmento AB . Neste problema, a interseção de S'_1 com S_2 resulta nos pontos P_1 e P_2 , conforme ilustra a Figura 45. Portanto, haverá duas soluções.

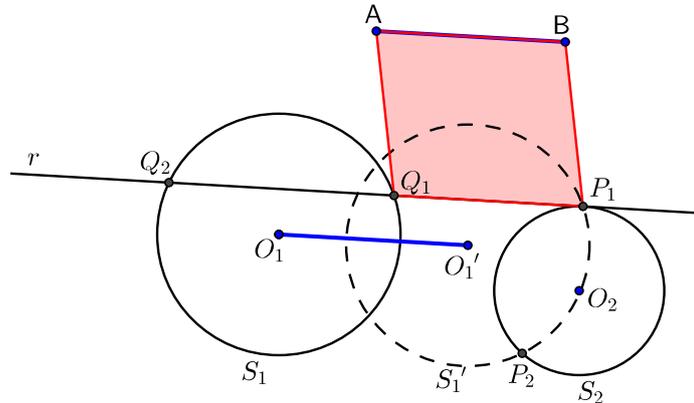
Figura 45: Solução do problema 9.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Para facilitar a visualização, vamos trabalhar na busca de uma solução. A outra se dá de forma análoga. Por P_1 , traçamos a reta r paralela ao segmento $O_1O'_1$, que cortará a circunferência S_1 nos pontos Q_1 e Q_2 . Temos assim o trapézio ABP_1Q_2 e o quadrilátero ABP_1Q_1 , conforme ilustra a Figura 46. Vamos mostrar que ABP_1Q_1 é um paralelogramo que soluciona o problema.

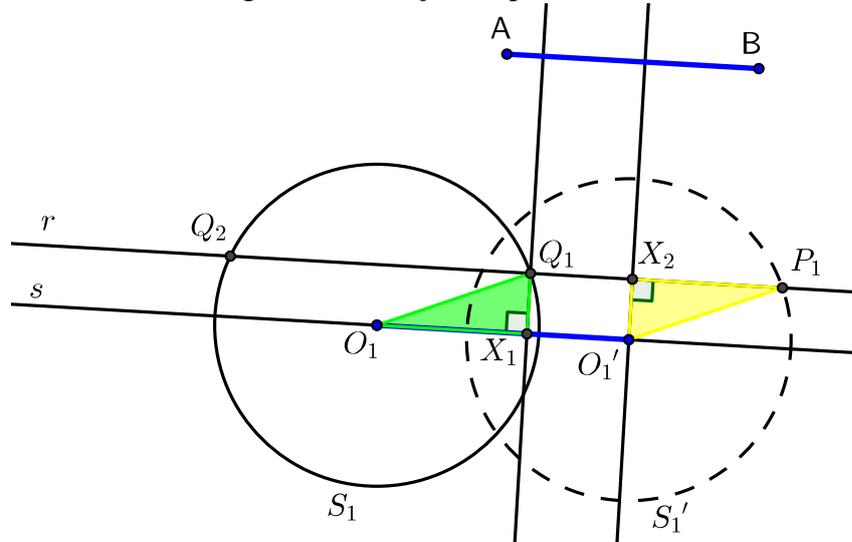
Figura 46: Solução do problema 9.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Para mostrar que ABP_1Q_1 é um paralelogramo precisamos mostrar que $\overline{Q_1P_1} = \overline{AB}$. Para isso, consideramos a reta s passando por O_1 e O_1' . Traçamos a perpendicular à reta r no ponto Q_1 e que corta a reta s no ponto X_1 . Por O_1' traçamos uma perpendicular à s que cortará a reta r no ponto X_2 . Temos assim os triângulos retângulos $O_1X_1Q_1$ e $P_1X_2O_1'$ que possuem mesma medida da hipotenusa (raio de S_1 e S_1') e os catetos X_1Q_1 e X_2O_1' também têm mesma medida. Pelo Teorema de Pitágoras esses triângulos possuem mesma medida do outro cateto, portanto são triângulos congruentes. Logo, $\overline{O_1X_1} = \overline{X_2P_1} \Rightarrow \overline{Q_1X_2} + \overline{X_2P_1} = \overline{O_1X_1} + \overline{X_1O_1'} \Rightarrow \overline{O_1O_1'} = \overline{Q_1P_1}$. Portanto, ABP_1Q_1 é um paralelogramo, conforme ilustra a Figura 47.

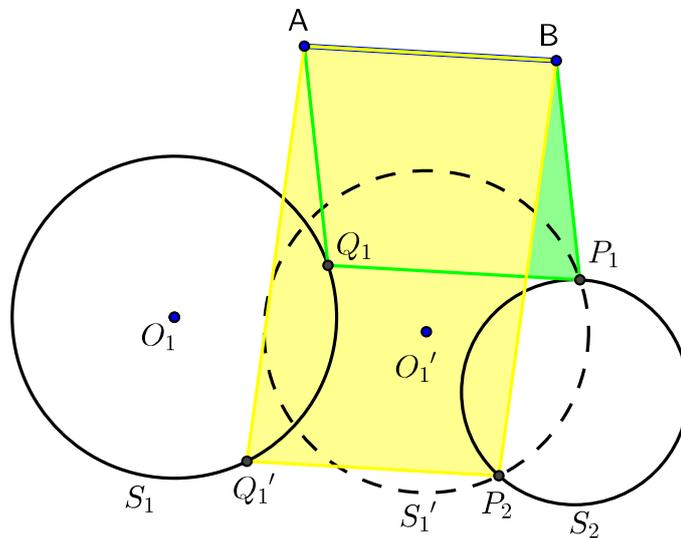
Figura 47: Solução do problema 9.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

A Figura 48 ilustra as duas soluções deste problema. A justificativa que ABP_2Q_1' é um paralelogramo, segue ideia análoga.

Figura 48: Solução do problema 9.

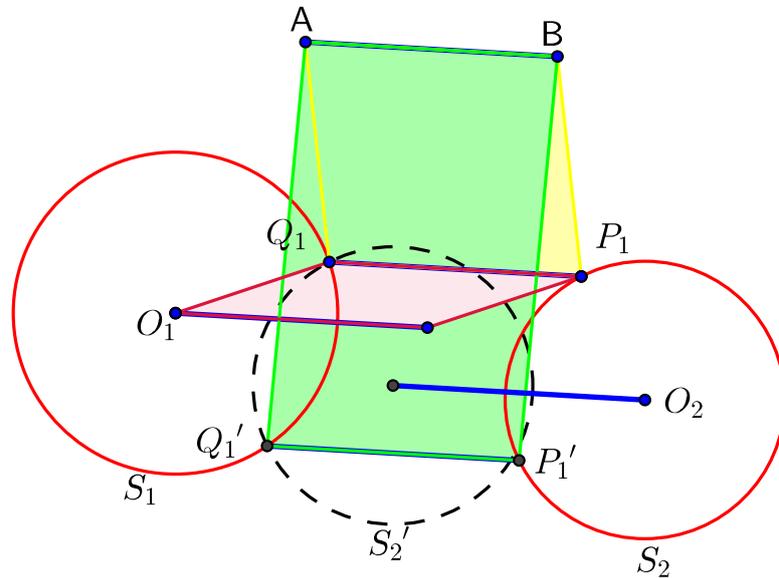


Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Notemos que utilizamos a circunferência S_1 como referência, ou seja, traçamos pelo seu centro uma paralela ao segmento AB e organizamos a construção como descrito acima. Se tivéssemos utilizado a circunferência S_2 como referência, traçado pelo seu centro um paralela

ao segmento AB e seguido ideia descrita com os devidos ajustes, teríamos chegado na mesma solução do problema, conforme ilustra a Figura 49.

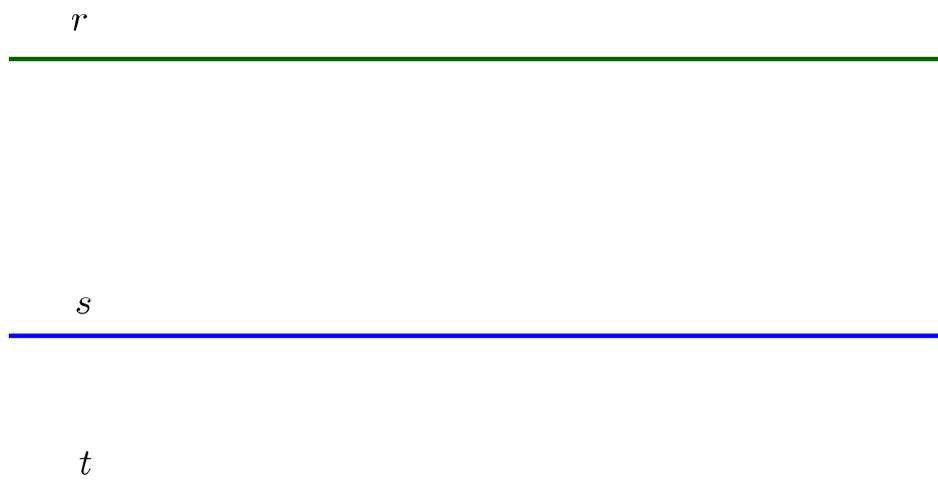
Figura 49: Solução do problema 9.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

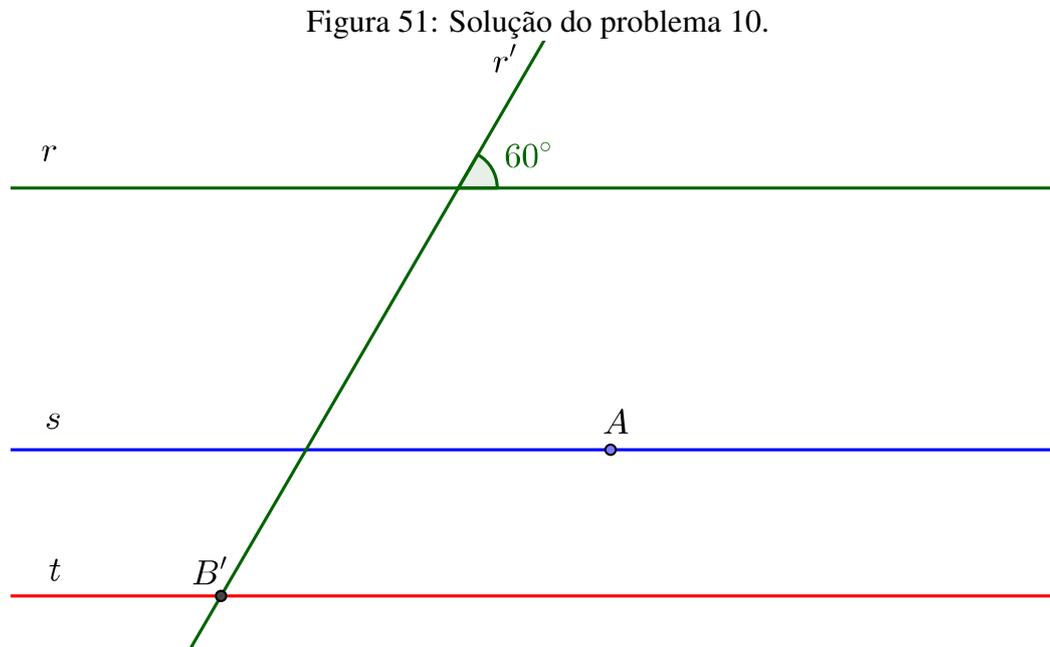
Problema 10. Dadas três retas paralelas r , s e t , conforme ilustra a Figura 50. Construa um triângulo equilátero cujos vértices estão um em cada uma das retas dadas.

Figura 50: Problema 10.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

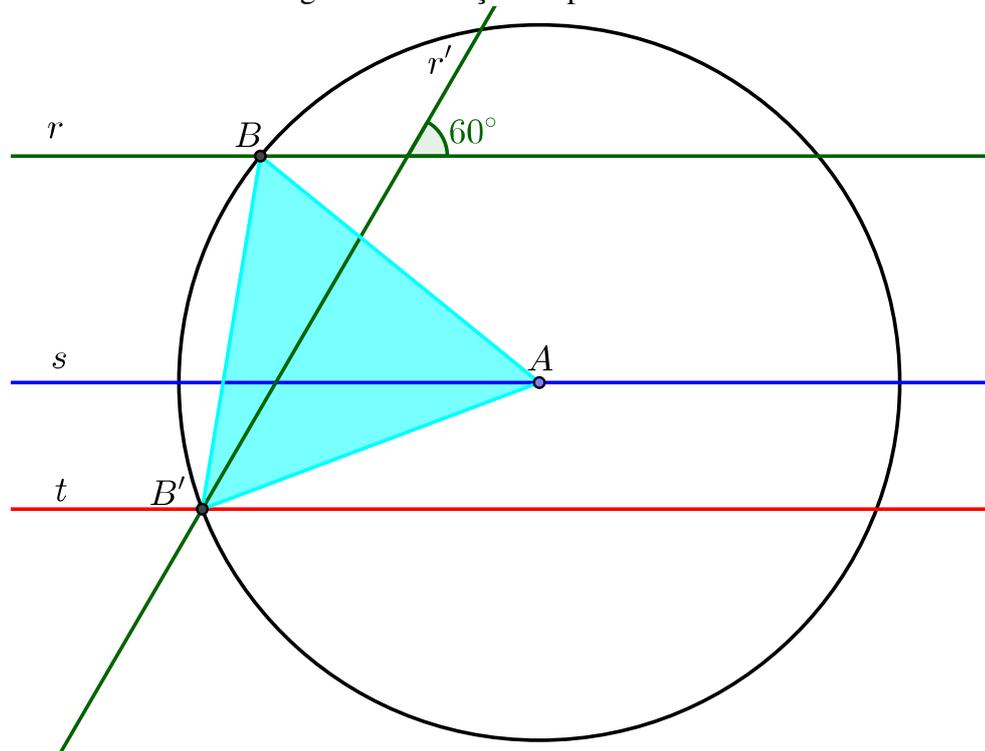
Solução justificada. Marcamos um ponto A sobre a reta s . Rotacionamos a reta r em torno do ponto A com um ângulo 60° , sentido anti-horário, obtendo a reta r' . A reta r' corta a reta t no ponto B' , conforme ilustra a Figura 51.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Como o ponto B' está sobre a reta r' , que é a rotação da reta r em torno do ponto A , existe um ponto B na reta r tal que a rotação desse ponto B em torno do ponto A com ângulo 60° , sentido anti-horário, coincida com o ponto B' . Para isso, basta traçar uma circunferência com centro em A e raio $\overline{AB'}$. Esta circunferência intercepta a reta r no ponto B . Temos que $\overline{AB'} = \overline{AB}$ e $\hat{B}AB' = 60^\circ$, então $\hat{A}BB' = \hat{A}B'B = 60^\circ$ e com isso o triângulo ABB' é equilátero, o que soluciona o problema, conforme ilustra a Figura 52.

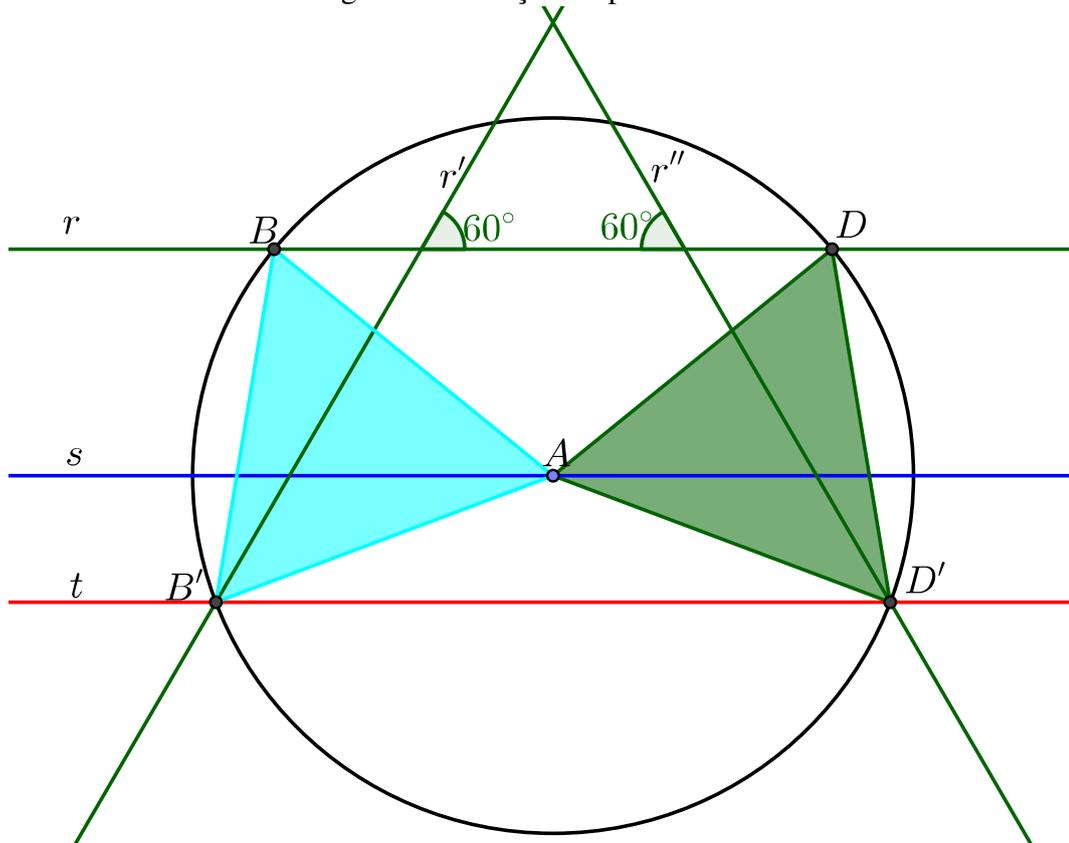
Figura 52: Solução do problema 10.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Notemos que se rotacionarmos a reta r também 60° , em torno do ponto A , mas no sentido horário, vamos obter a reta r'' que intercepta a reta t no ponto D' . De forma análoga à que obtemos o ponto B em relação ao ponto B' , obtemos o ponto D em relação ao ponto D' , ou seja, D' é uma rotação do ponto D com ângulo de 60° em torno do ponto A sentido horário. Assim obtemos o outro triângulo ADD' que também soluciona o problema, conforme ilustra a Figura 53.

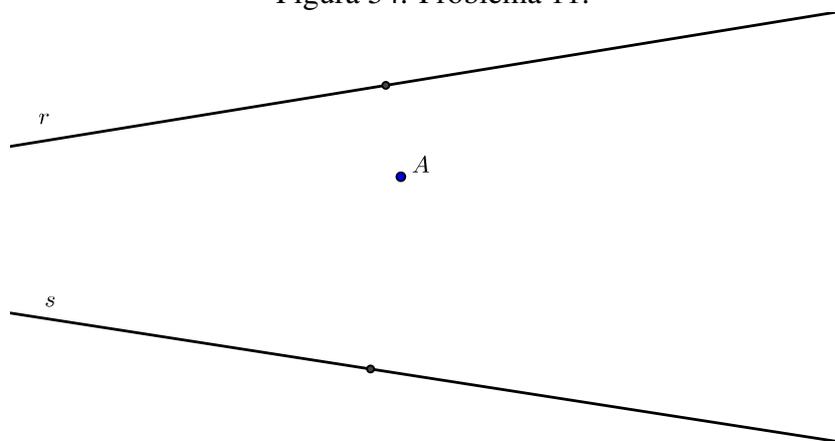
Figura 53: Solução do problema 10.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Problema 11. Dados um ponto A e duas retas r e s , conforme ilustra a Figura 54. Construa um quadrado $ABCD$ com os vértices B e D pertencentes às retas r e s , respectivamente.

Figura 54: Problema 11.

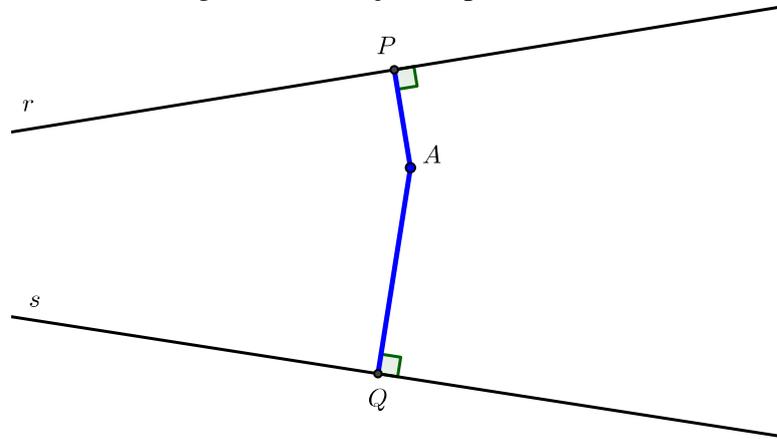


Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Solução justificada. Pelo ponto A traçamos um segmento perpendicular à reta r inter-

ceptando esta no ponto P . Da mesma forma, pelo ponto A traçamos um segmento perpendicular à reta s , interceptando esta no ponto Q , conforme ilustra a Figura 55.

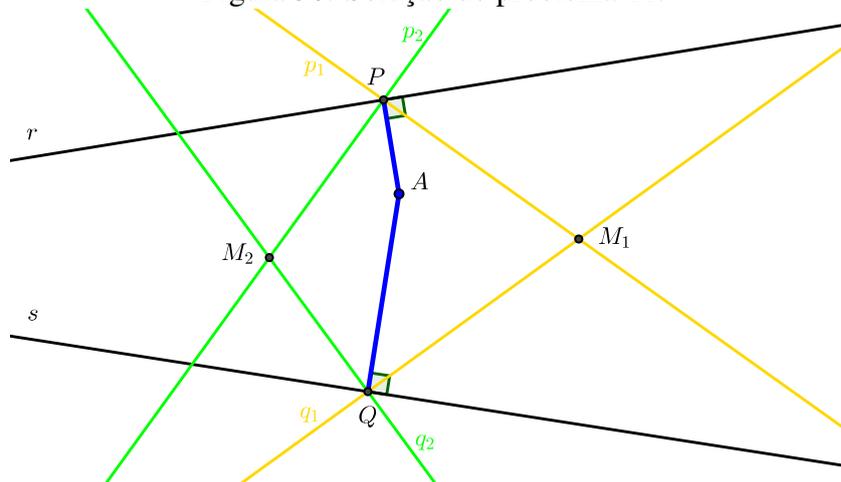
Figura 55: Solução do problema 11.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Traçamos as bissetrizes dos ângulos retos \hat{P} e \hat{Q} , obtendo as retas p_1, p_2, q_1 e q_2 . A interseção das retas p_1 e q_1 determinam o ponto M_1 e a interseção das retas p_2 e q_2 determina o ponto M_2 , conforme ilustra a Figura 56.

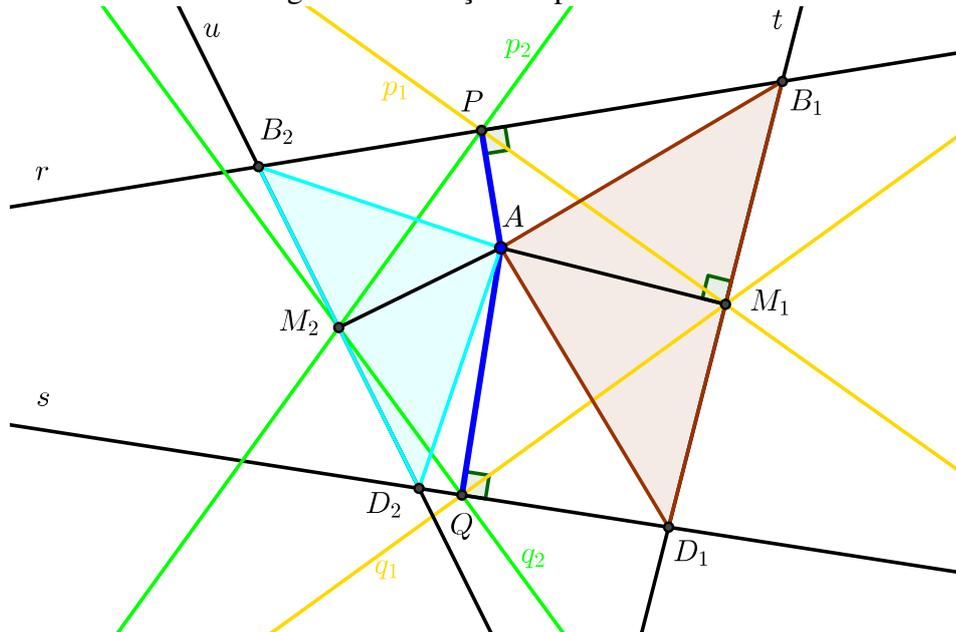
Figura 56: Solução do problema 11.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Por M_1 traçamos uma reta t perpendicular aos segmento AM_1 e que cortará a reta r no ponto B_1 e cortará a reta s no ponto D_1 . Da mesma forma, traçamos uma reta u perpendicular aos segmento AM_2 e que cortará a reta r no ponto B_2 e cortará a reta s no ponto D_2 . Assim temos os triângulos AB_1D_1 e AB_2D_2 , conforme ilustra a Figura 57.

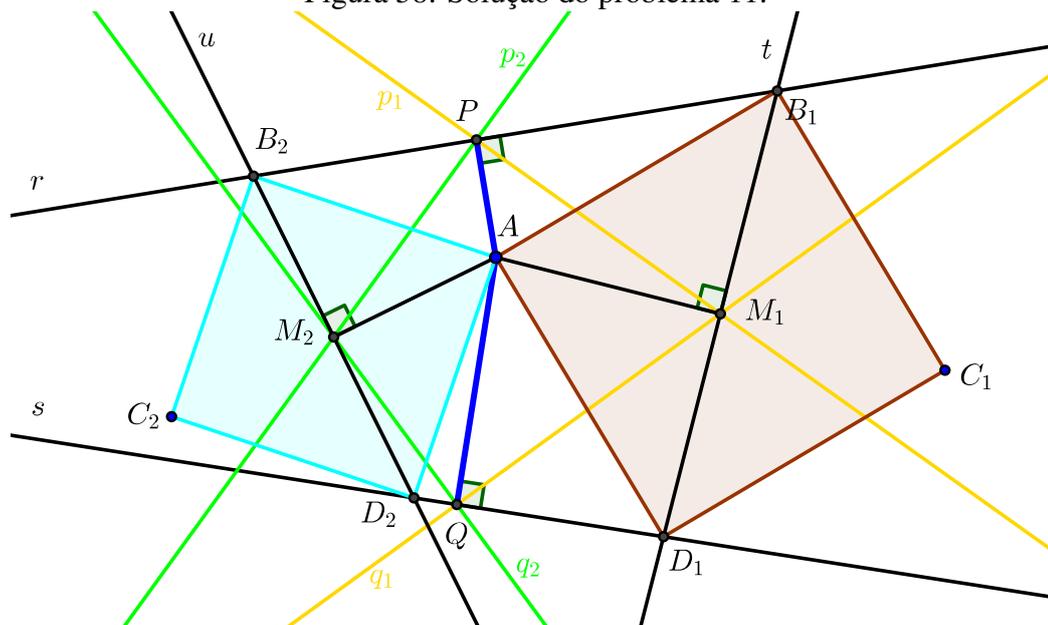
Figura 57: Solução do problema 11.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Agora refletimos o ponto A em torno da reta t , obtendo o ponto C_1 , ou seja, $R_t(A) = C_1$. Da mesma maneira refletimos o ponto A em torno da reta u , ou seja, $R_u(A) = C_2$. Assim, as Figuras $AB_1C_1D_1$ e $AB_2C_2D_2$, são quadrados que solucionam o problema, conforme ilustra a Figura 58.

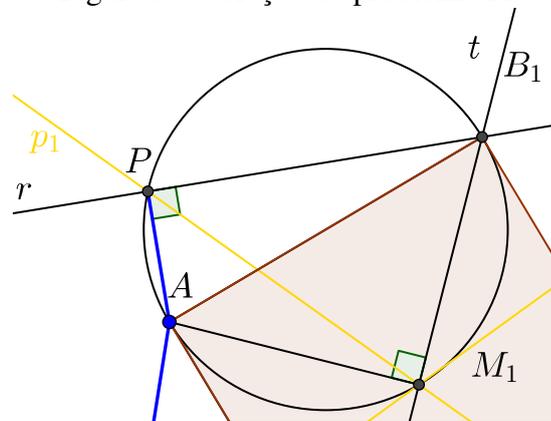
Figura 58: Solução do problema 11.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Por construção, o ângulo \widehat{APB}_1 bem como o ângulo \widehat{AM}_1B_1 são retos. Lembramos que um quadrilátero convexo qualquer é inscritível numa circunferência se, e somente se, ele possuir um par de ângulos internos opostos suplementares (esse resultado com sua demonstração podem ser encontrados em MUNIZ NETO (2013)). Portanto, o quadrilátero APB_1M_1 é inscritível. Com isso podemos concluir que os ângulos $M_1\widehat{B}_1A \equiv M_1\widehat{P}A = 45^\circ$ pois subentendem o mesmo arco M_1A . Da mesma forma, os ângulos $B_1\widehat{P}M_1 \equiv B_1\widehat{A}M_1 = 45^\circ$ pois subentendem o arco B_1M_1 . Temos assim que o triângulo AM_1B_1 é isósceles retângulo, conforme ilustra a Figura 59.

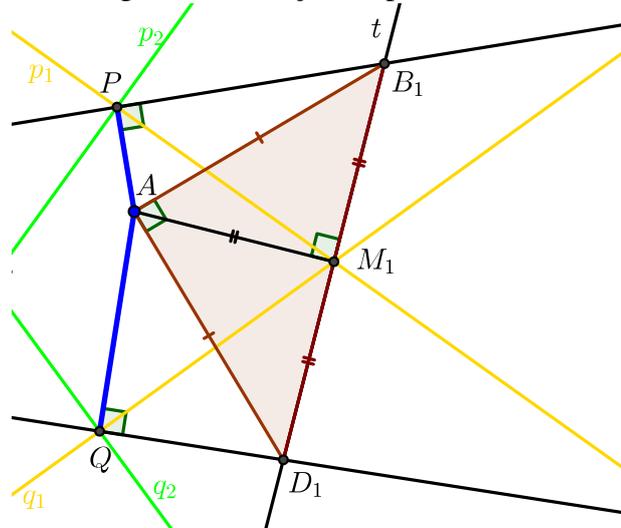
Figura 59: Solução do problema 11.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Seguindo ideia análoga, concluímos que o quadrilátero AM_1D_1Q é inscritível e o triângulo AM_1D_1 é isósceles retângulo. Ainda, os triângulos AM_1B_1 e AM_1D_1 são congruentes (ALA). Assim o ângulo $D_1\widehat{A}B_1 = 90^\circ$ e os segmentos $AB_1 \equiv AD_1$, conforme ilustra a Figura 60.

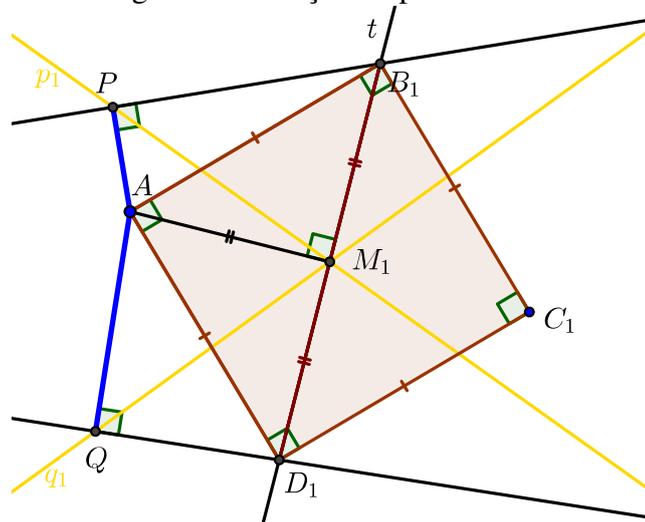
Figura 60: Solução do problema 11.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Por fim, a reflexão por uma reta preserva medidas de distância e ângulos, e a Figura $AB_1C_1D_1$ é de fato um quadrado, conforme ilustra a Figura 61. Para mostrar que a Figura $AB_2C_2D_2$ é também um quadrado, segue ideia análoga.

Figura 61: Solução do problema 11.



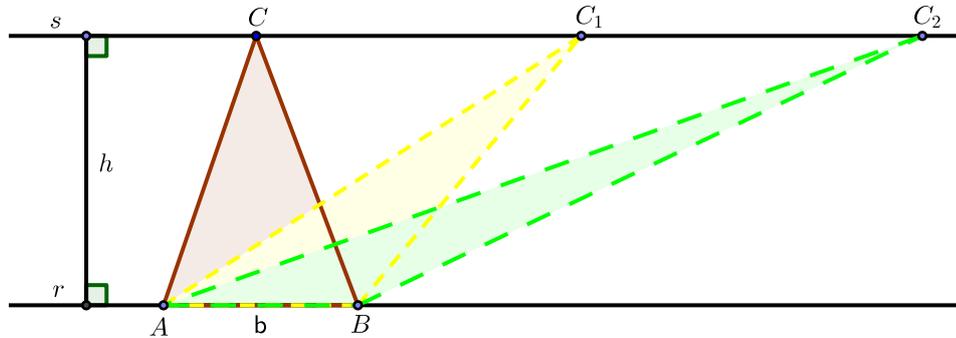
Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Problema 12. Triângulo isósceles. Mostre que, entre todos os triângulos de mesma base b e mesma altura relativa h , o triângulo isósceles é o que tem o menor perímetro.

Solução justificada. Sejam as retas paralelas r e s distando uma medida h entre elas e três triângulos ABC , ABC_1 e ABC_2 , com vértices sobre estas retas. Todos eles possuem a

mesma medida de área pois eles compartilham a mesma base e a mesma altura. Vamos mostrar que o triângulo isósceles ABC é o que possui menor perímetro, conforme ilustra a Figura 62 .

Figura 62: Solução do problema 12.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

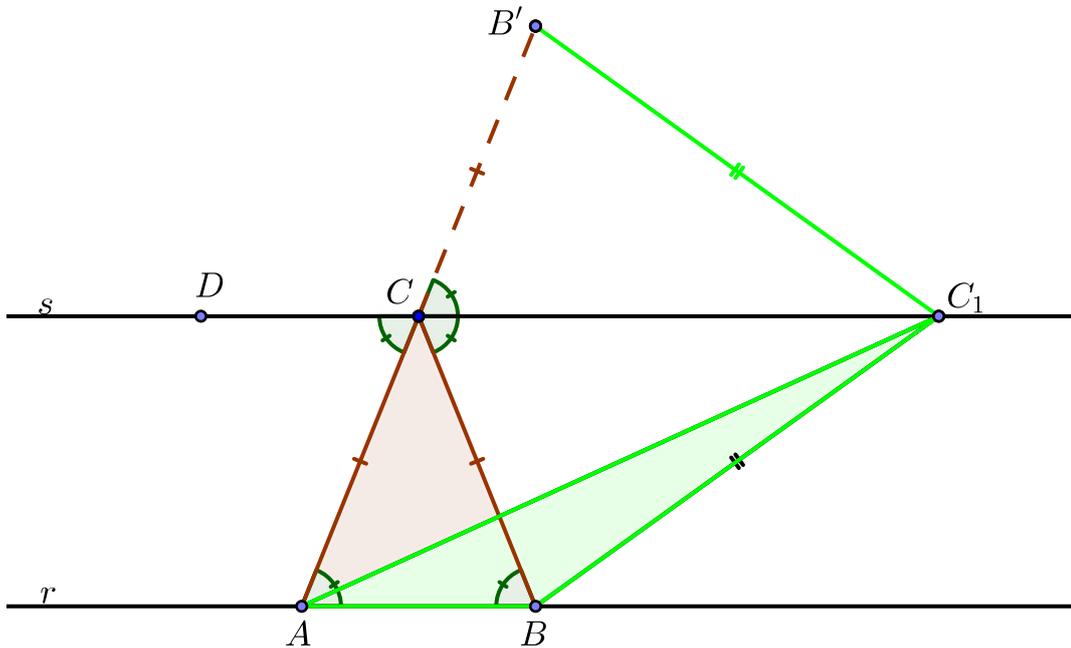
Sejam o triângulo isósceles ABC e o triângulo escaleno ABC_1 , conforme ilustra a Figura 63. Refletimos o ponto B em relação à reta s , obtendo o ponto B' . Temos assim $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{CB'}$. Seja o ponto D sobre a reta s tal que $D - C - C_1$. Temos que $D\hat{C}A \equiv C\hat{A}B$ pois $r \parallel s$ cortado pela reta \overleftrightarrow{AC} , $C\hat{A}B \equiv A\hat{B}C$, pois o triângulo ABC é isósceles e $B\hat{C}C_1 \equiv C_1\hat{C}B'$, pois a isometria preserva medidas de ângulos. Dessa forma temos que $A\hat{C}B' = 180^\circ$, ou seja, A, C e B' são colineares. Pela desigualdade triangular no triângulo AC_1B' temos que

$$\overline{AC_1} + \overline{C_1B'} > \overline{AB'} \Rightarrow$$

$$\overline{AC_1} + \overline{C_1B} > \overline{AC} + \overline{CB'} \Rightarrow$$

$$\overline{AC_1} + \overline{C_1B} > \overline{AC} + \overline{CB}$$

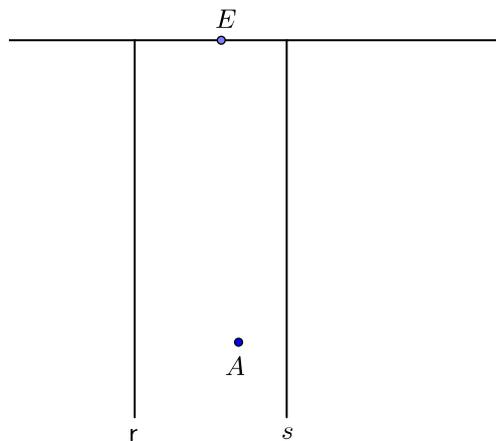
Figura 63: Solução do problema 12.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Problema 13. Espelhos. As retas paralelas r e s representam dois espelhos planos, voltados um para o outro, conforme ilustra a Figura 64. Construa a trajetória do raio visual que, emitido do ponto A , atinge o ponto E , sendo A e E pontos dados, após refletir-se duas vezes em r e uma vez em s .

Figura 64: Problema 13.

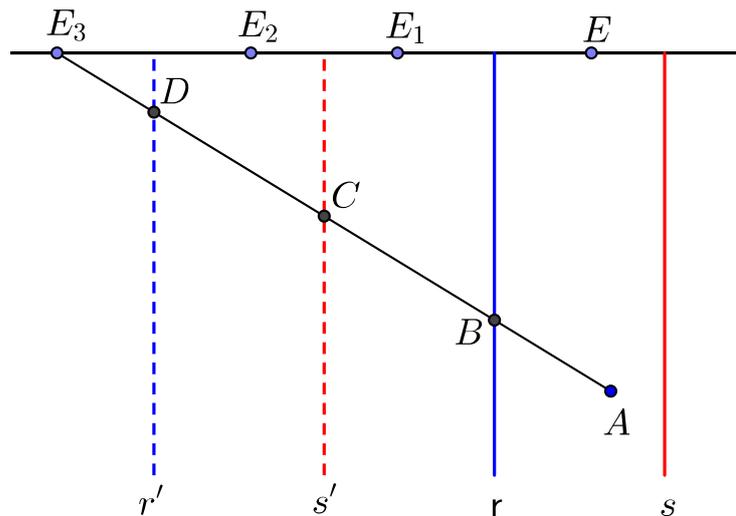


Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Solução justificada. Refletimos a reta s em relação à reta r , obtendo a reta s' e refletimos

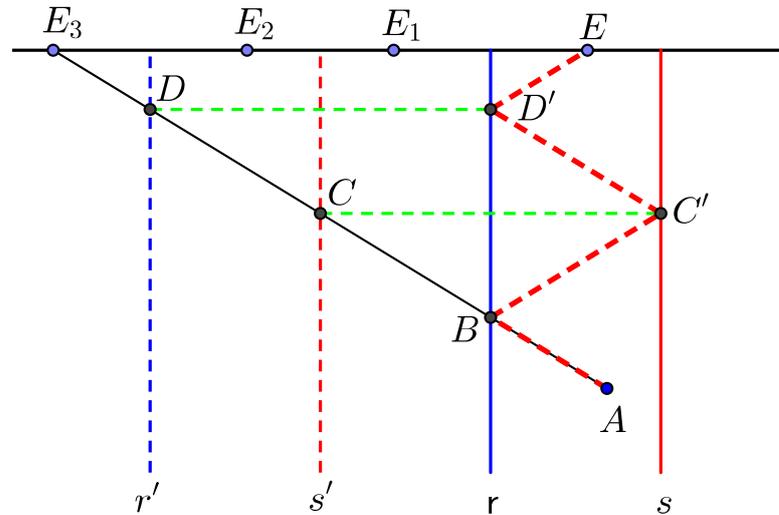
a reta r em relação à reta s' , obtendo a reta r' . Agora, refletimos o ponto E em relação à reta r , obtendo o ponto E_1 e refletimos o ponto E_1 em relação à reta s' , obtendo o ponto E_2 . Refletimos o ponto E_2 em relação à reta r' , obtendo o ponto E_3 . Traçamos o segmento E_3A , que corta a reta r no ponto D , a reta s' no ponto C e a reta r no ponto B , conforme ilustra a Figura 65.

Figura 65: Solução do problema 13.



Refletimos o ponto C em relação à reta r obtendo o ponto C' sobre a reta s . Refletimos o ponto D em relação à reta s' , obtendo o ponto D' sobre a reta r . O caminho poligonal $A - B - C' - D' - E$ soluciona o problema. A justificativa se dá de forma análoga a do problema 2, lembrando que os ângulos de incidência e saída do raio de luz em relação aos espelhos têm mesma medida. A Figura 66 ilustra a solução do problema .

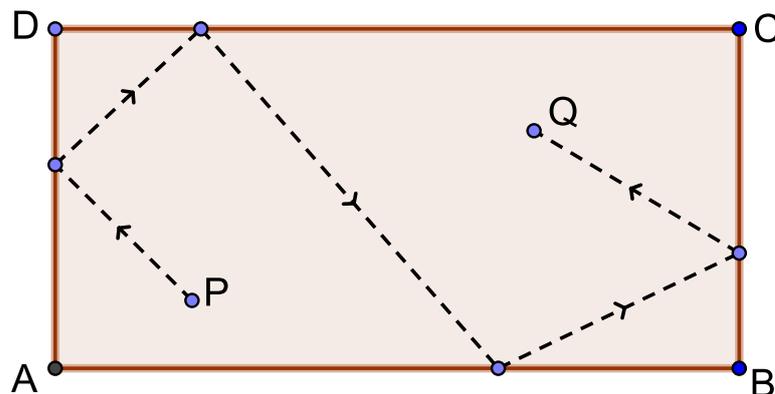
Figura 66: Problema dos espelhos paralelos.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Problema 14. Mesa de bilhar. O retângulo $ABCD$ representa uma mesa de bilhar, e os pontos P e Q , na diagonal AC , representam duas bolas. Desenhar a trajetória da bola P , que deve atingir a bola Q depois de chocar-se sucessivamente e ordenadamente com os lados AD , DC , AB , BC , lembrando que essa trajetória é o menor caminho por ela percorrido. A Figura 67 ilustra o problema.

Figura 67: Problema 14. Mesa de bilhar.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Solução justificada. Estamos diante de uma situação que devemos obedecer às leis da física, que diz que o ângulo de incidência deve ser igual ao ângulo de reflexão, ou seja, a traje-

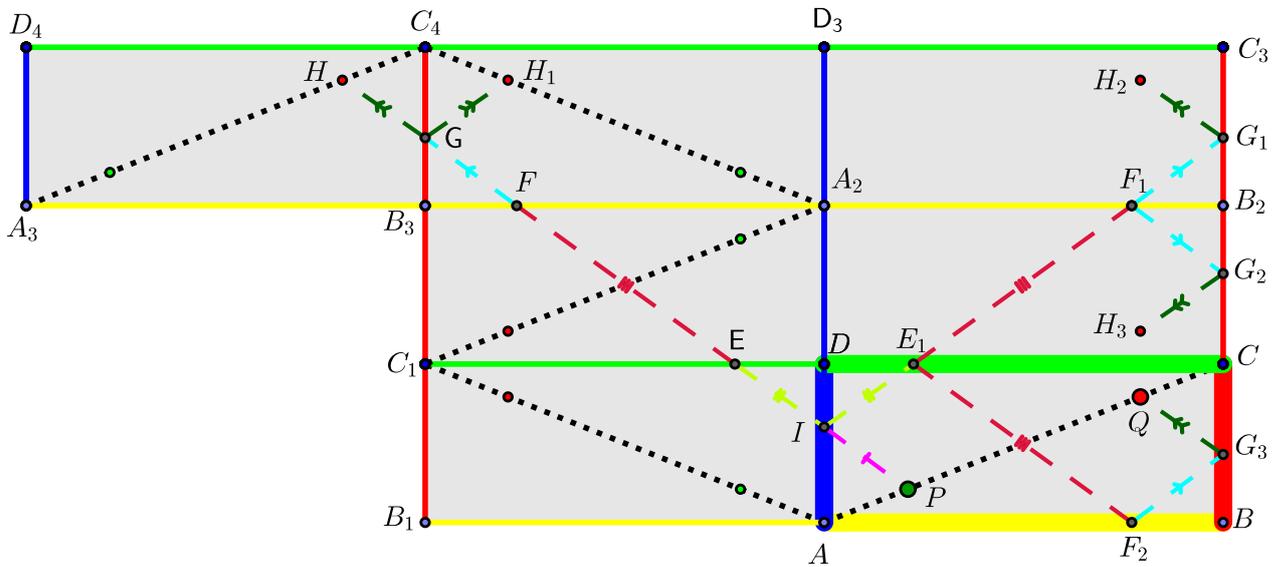
tória da bolinha ao chocar-se com a lateral da mesa determina com esta, ângulos congruentes. Temos também que justificar matematicamente que o caminho encontrado é o menor. Podemos resolver este problema utilizando transformações geométricas e para isso precisamos executar reflexões convenientes de modo a obter uma linha reta unindo o ponto P ao correspondente do ponto Q obtido através destas reflexões. Consideramos como eixos de simetria as retas que contêm os lados do retângulo que representa a mesa.

Tomando a reta \overleftrightarrow{AD} como eixo, refletimos o retângulo $ABCD$, obtendo o retângulo B_1ADC_1 . Agora refletimos o retângulo B_1ADC_1 e o retângulo $ABCD$ em relação à reta \overleftrightarrow{DC} , obtendo os retângulos $C_1DA_2B_3$ e DCB_2A_2 , respectivamente. Agora, refletimos os retângulos $C_1DA_2B_3$ e DCB_2A_2 em relação à reta $\overleftrightarrow{A_2B_2}$, obtendo os retângulos $B_3A_2D_3C_4$ e $A_2B_2C_3D_3$, respectivamente. Por fim, refletimos o retângulo $B_3A_2D_3C_4$ em relação à reta $\overleftrightarrow{B_1C_1}$, obtendo o retângulo $A_3B_3C_4D_4$. Assim nessa série de reflexões, o ponto Q foi transformado no ponto H do retângulo $A_3B_3C_4D_4$. Finalmente, traçamos o segmento PH cuja medida é a distância mínima que a bolinha percorre de acordo com o enunciado.

Precisamos agora determinar os pontos que a bolinha choca-se com a lateral da mesa. Notamos que o segmento PH corta o segmento AD no ponto I , corta C_1D no ponto E , corta o segmento A_2B_3 no ponto F e, por fim, corta o segmento B_3C_4 no ponto G . Transportamos os pontos E , F e G para o retângulo $ABCD$ por meio de reflexões.

Refletimos o ponto E em relação à reta \overleftrightarrow{AD} , obtendo o ponto E_1 sobre o segmento CD . Refletimos o ponto F em relação à reta \overleftrightarrow{AD} , obtendo o ponto F_1 . Refletimos este ponto F_1 em relação à reta CD , obtendo o ponto F_2 sobre o segmento AB . Por fim, refletimos o ponto G em relação à reta \overleftrightarrow{AD} , obtendo o ponto G_1 . Agora refletimos este ponto G_1 em relação à reta $\overleftrightarrow{A_2B_2}$, obtendo o ponto G_2 . Finalmente, refletimos o ponto G_2 em relação à reta CD , obtendo o ponto G_3 , sobre o segmento BC . Assim obtemos os pontos I sobre o segmento AD , E_1 sobre \overleftrightarrow{CD} , F_2 sobre AB e G_3 sobre BC que são os pontos onde a bolinha choca-se com a lateral da mesa, conforme descrito no enunciado, conforme ilustra a Figura 68.

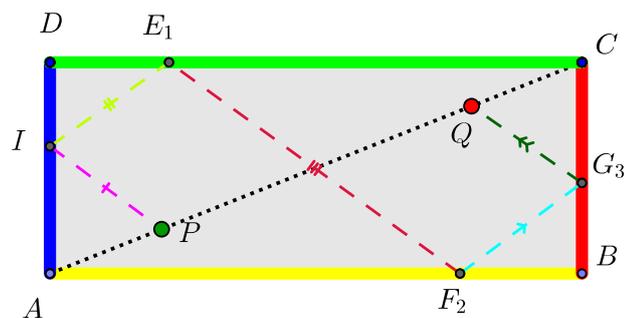
Figura 68: Solução do problema 14.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Assim, o caminho poligonal percorrido pela bolinha é $P - I - E_1 - F_2 - G_3 - Q$ conforme ilustra a Figura 69, lembrando que este é o menor caminho.

Figura 69: Solução do problema 14.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

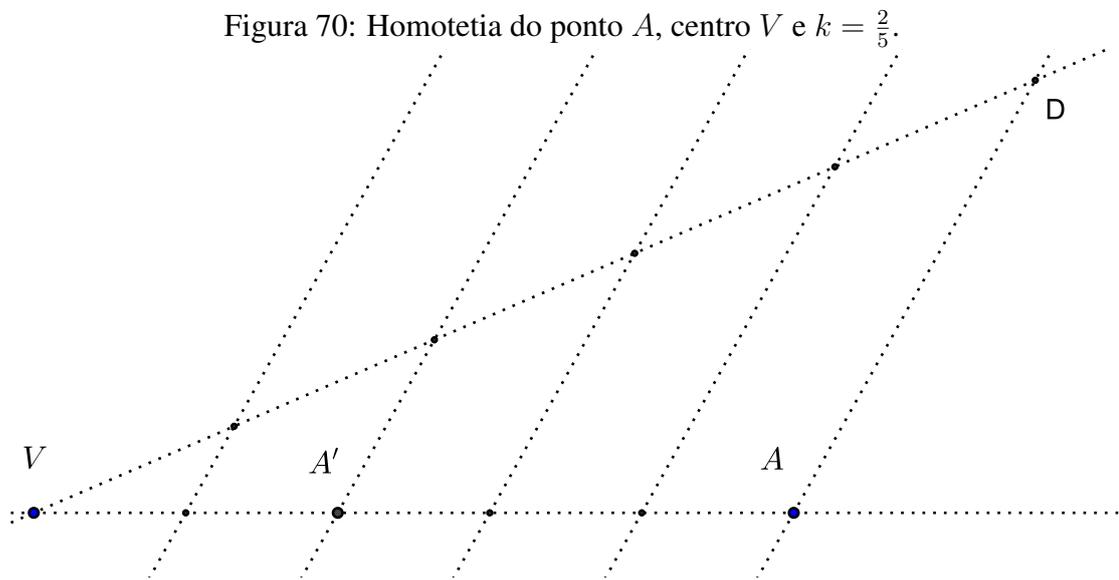
A justificativa de que o caminho encontrado é o menor caminho segue ideia análoga às dos problemas 1, 2, 3 e 4. Já a justificativa de que os ângulos de incidência e de saída são congruentes pode ser verificada no problema 2 deste capítulo.

Vimos, assim, catorze problemas geométricos, entre eles de construção, que podem ser resolvidos com a utilização de isometria. Esta ferramenta permite encontrar soluções rápidas e elegantes, além de facilitar bastante a justificativa matemática.

4.2 Aplicações de Homotetia

Assim como a Isometria, a Homotetia apresenta muitas aplicações na solução de problemas geométricos, inclusive de construções geométricas, principalmente envolvendo tangência. Vamos estudar a resolução justificada de seis desses problemas.

Vejam como obter a homotetia de alguns elementos como ponto, segmentos e figuras planas. Vamos obter inicialmente o ponto homotético do ponto A para $k = \frac{2}{5}$. Notamos que $0 < \frac{2}{5} < 1$, ou seja, o ponto A' homotético de A estará entre os pontos A e V . Traçamos uma reta pelo ponto V mas que não contenha o ponto A . Sobre essa reta, com o compasso, marcamos cinco pontos distanciados igualmente entre si a partir do ponto V . Pelo último ponto D traçamos uma reta DA . Traçamos retas paralelas a reta DA passando por cada um dos pontos obtidos. Assim dividimos o segmento VA em cinco partes iguais. Marcamos assim o ponto A' sobre a reta VA , tal que $\overline{VA'} = \frac{2}{5}\overline{VA}$, conforme ilustra a Figura 70. A justificativa se dá pela aplicação direta do teorema de Tales.

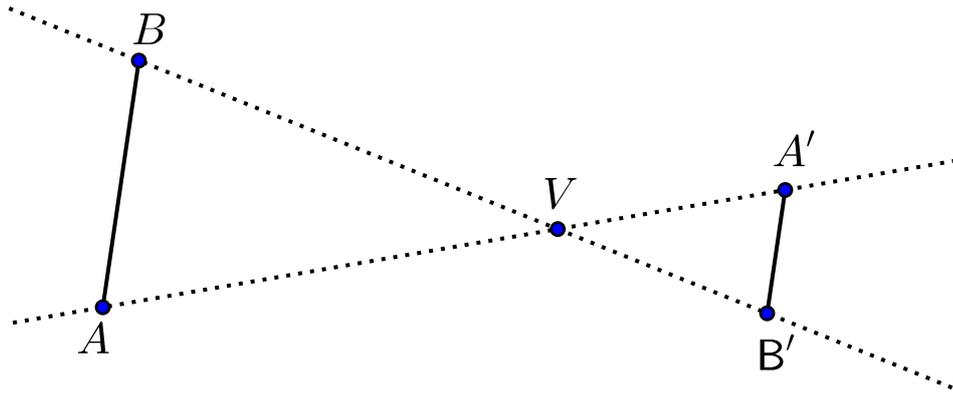


Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Dado um segmento AB e um centro de homotetia V , obter a Figura homotética desse segmento com $k = -\frac{1}{2}$. Notamos que $-\frac{1}{2} < 0$ e $0 < |-\frac{1}{2}| < 1$. Assim haverá uma inversão do segmento homotético $A'B'$ e uma redução de tamanho em relação ao segmento AB . Para isso, traçamos a reta AV e sobre ela o ponto A' tal que $\overline{A'V} = \frac{\overline{AV}}{2}$. Da mesma forma, traçamos a

reta BV e sobre ela o ponto B' tal que $\overline{B'V} = \frac{\overline{BV}}{2}$. Temos que os triângulos ABV e $A'B'V$ são semelhantes (LAL). Portanto o segmento $A'B'$ é paralelo ao segmento AB , conforme ilustra a Figura 71.

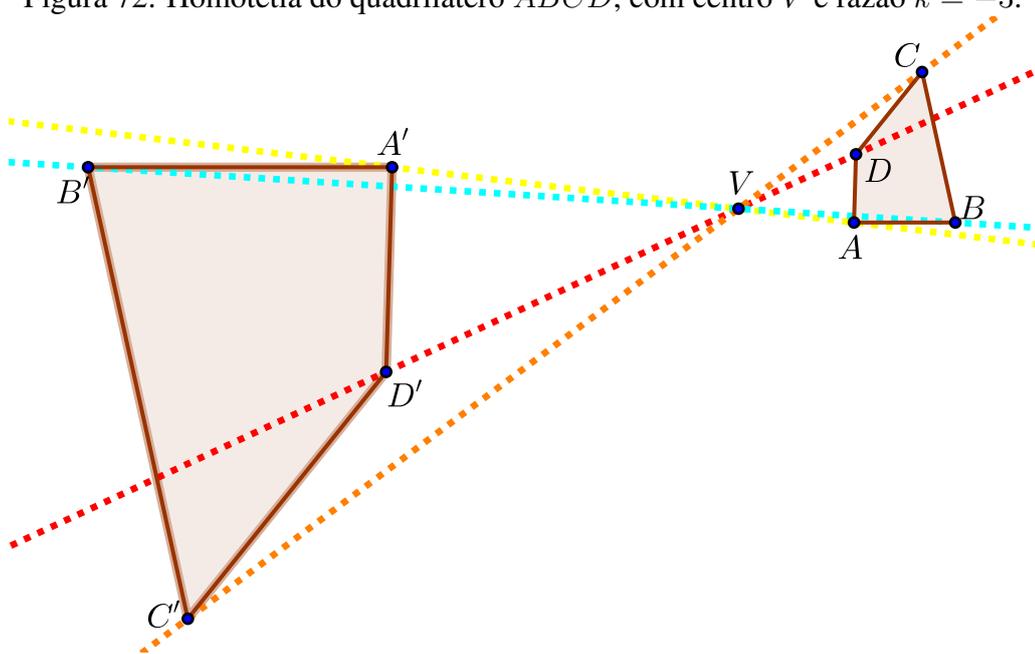
Figura 71: Homotetia do segmento AB com centro V e razão $k = -\frac{1}{2}$.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Dado um quadrilátero $ABCD$ qualquer, obter a sua Figura homotética com centro V e $k = -3$. Temos que $k < 0$ e $|k| > 1$. Assim a Figura será ampliada em relação a Figura dada. Ainda, ela será invertida em relação ao centro V . Traçamos, pelo ponto A dado, a reta passando pelo centro V . Sobre essa reta, marcamos o ponto A' tal que $A' - V - A$ e $\overline{A'V} = 3\overline{VA}$. Seguimos ideia análoga para os demais pontos. Assim obtemos o quadrilátero $A'B'C'D'$ homotético do quadrilátero $ABCD$ dado, conforme ilustra a Figura 72.

Figura 72: Homotetia do quadrilátero $ABCD$, com centro V e razão $k = -3$.



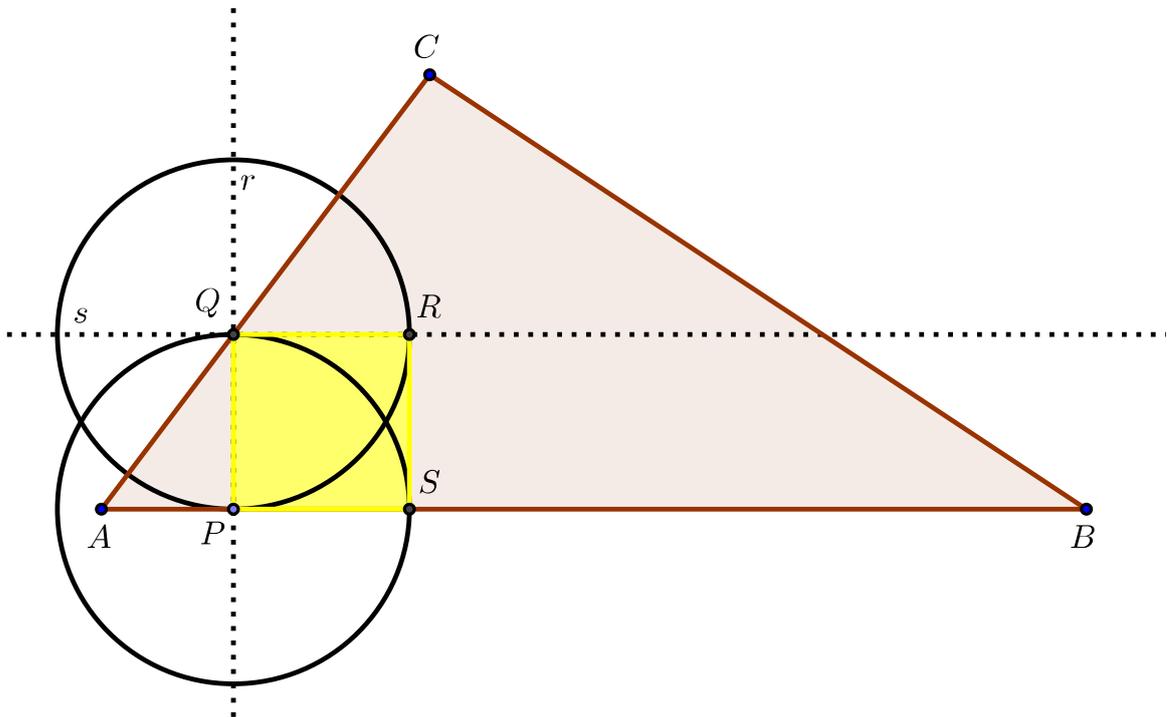
Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Vejam agora a resolução de seis problemas cuja solução pode ser obtida com uso de Homotetia.

Problema 15. Dado um triângulo ABC qualquer, inscrever nele um quadrado, tal que um dos lados do quadrado esteja sobre um dos lados do triângulo.

Solução justificada. Seja o triângulo ABC . Sobre o lado AB marcamos um ponto P e por ele traçamos uma reta r perpendicular ao segmento AB que corta o lado AC no ponto Q . Traçamos uma reta s perpendicular ao segmento PQ em Q . Construímos então um quadrado de lado PQ , da seguinte forma: com centro em Q e raio \overline{PQ} construímos uma circunferência que corta a reta s no ponto R . Construímos outra circunferência também de raio \overline{PQ} com centro em P e que corta o lado AB no ponto S . O quadrilátero $PQRS$ é um quadrado, conforme ilustra a Figura 73.

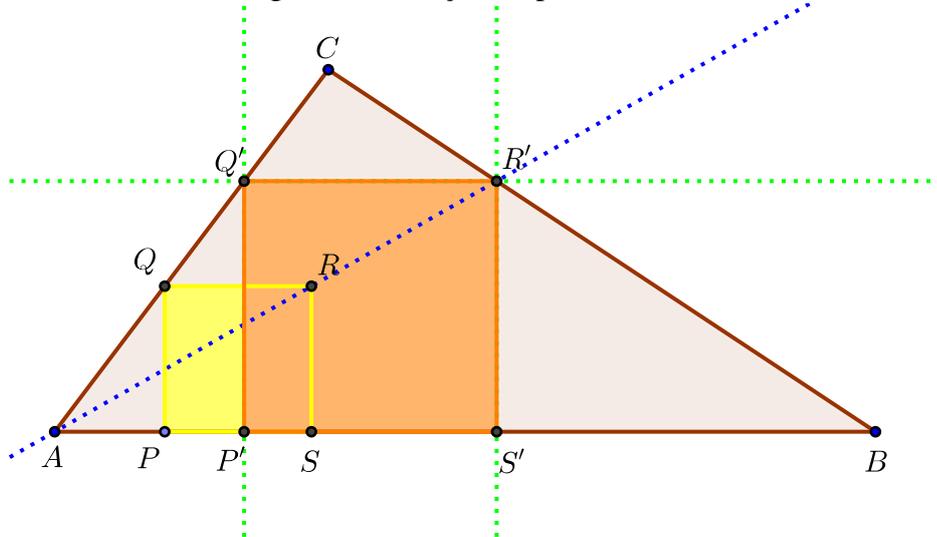
Figura 73: Solução do problema 15.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Agora, traçamos a reta \overleftrightarrow{AR} que corta o lado BC do triângulo no ponto R' . Seja S' , sobre o segmento AB , o pé da perpendicular este segmento passando pelo ponto R' . Temos que $R'S'$ é o lado do quadrado procurado. Então, pelo ponto R' traçamos uma paralela ao lado AB que corta o segmento AC no ponto Q' . Por Q' traçamos uma perpendicular que corta o segmento AB no ponto P' . O quadrilátero $P'Q'R'S'$ é a solução procurada, conforme ilustra a Figura 74. Isso se justifica pelo fato de que o quadrado $P'Q'R'S'$ é homotético do quadrado $PQRS$ com centro em A e $k = \frac{AR'}{AR}$.

Figura 74: Solução do problema 15.

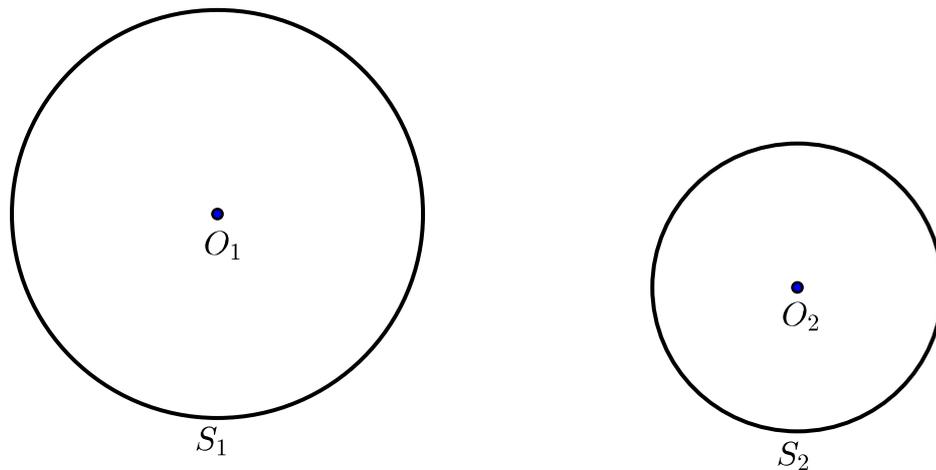


Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Notamos que se o triângulo for acutângulo, conseguimos inscrever o quadrado com um lado sobre qualquer um dos lados do triângulo. Já se o triângulo for obtusângulo, é possível apenas inscrever o quadrado com um lado sobre o lado oposto ao ângulo obtuso do triângulo.

Problema 16. Dadas duas circunferências S_1 e S_2 , conforme ilustra a Figura 75. Traçar as retas tangentes à S_1 e S_2 , concomitantemente.

Figura 75: Problema 16.

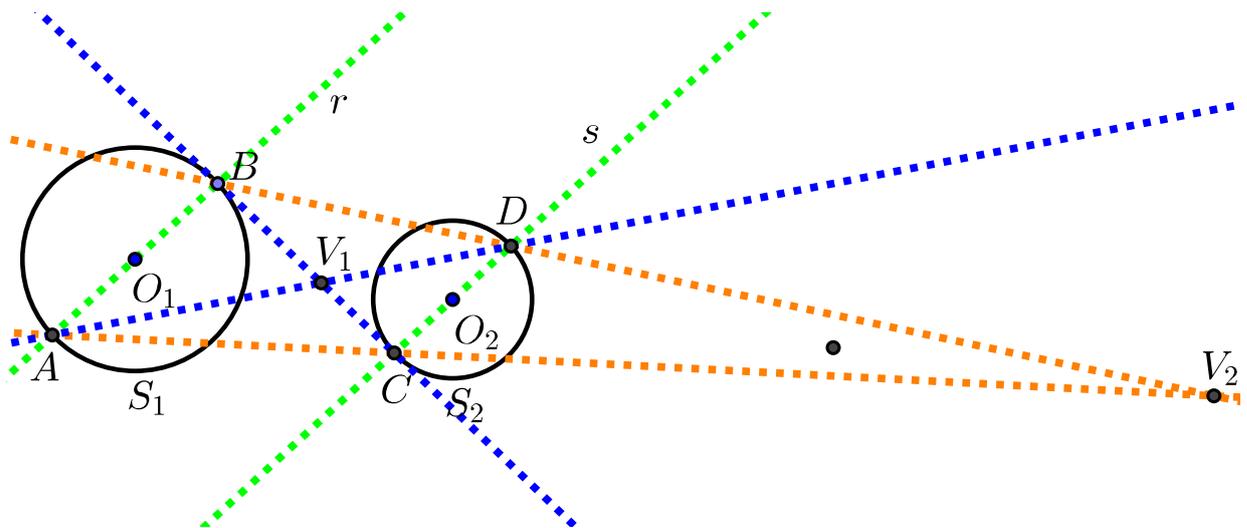


Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Solução justificada. Sejam O_1 e O_2 os centros de S_1 e S_2 , respectivamente. Traçamos

duas retas paralelas r e s , uma passando por O_1 e outra passando por O_2 , respectivamente. A interseção de R com S_1 determina os pontos A e B . Da mesma forma, a interseção da reta s com S_2 determina os pontos C e D . Traçamos as retas AD e BC que se interceptam no ponto V_1 . Traçamos também as retas BD e AC que se interceptam no ponto V_2 , conforme ilustra a Figura 76.

Figura 76: Problema 16.



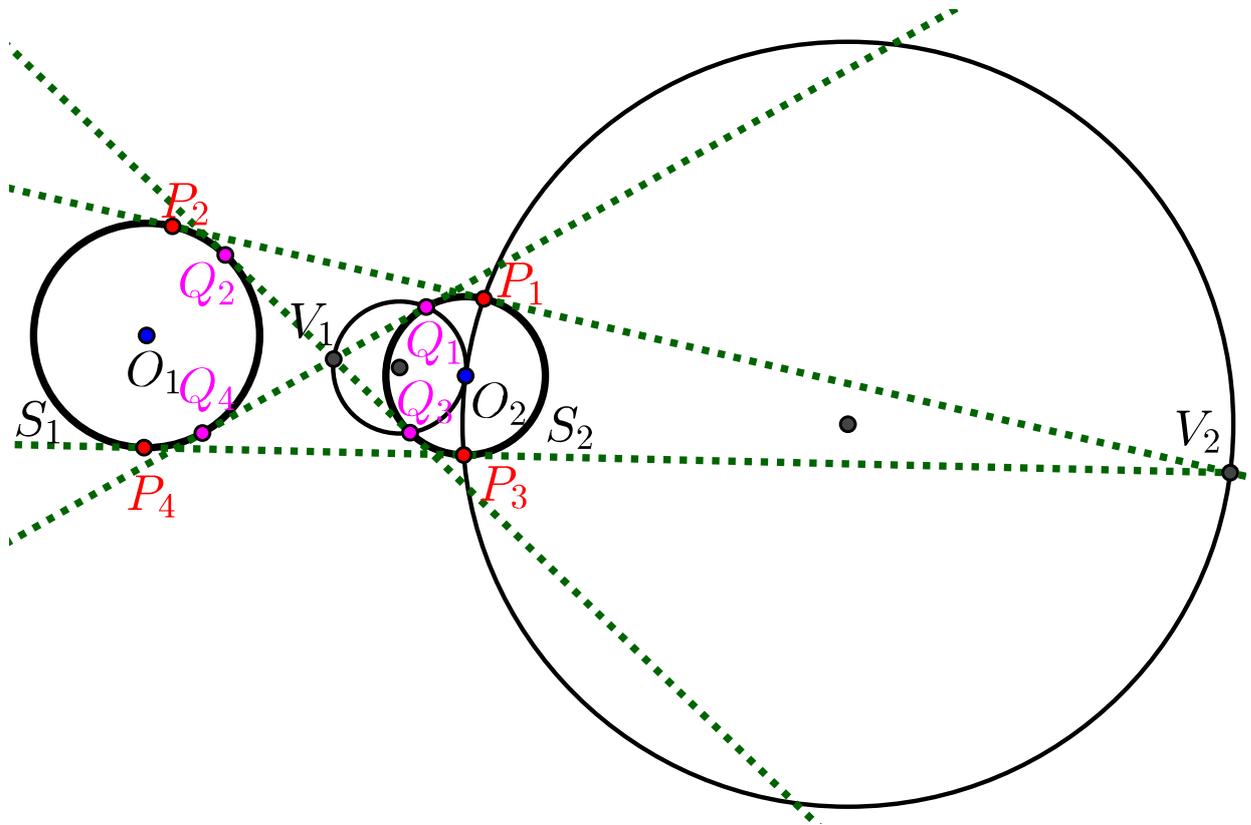
Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Temos que V_1 e V_2 são os centros de homotetias inversa e direta, respectivamente, das duas circunferências S_1 e S_2 . Notamos que os triângulos ABV_1 e DCV_1 são semelhantes (caso AAA). Também são semelhantes os triângulos ABV_2 e CDV_2 (caso AAA). Agora que temos os centros de homotetia, buscamos então as retas tangentes a ambas circunferências.

Traçamos a circunferência de diâmetro $\overline{O_2V_2}$. Essa circunferência corta S_2 no ponto P_1 e no ponto P_3 , que são pontos de tangência. Notamos que o ângulo $O_2\hat{P}_1V_2$ é reto pois mede metade do ângulo raso (diâmetro da circunferência). Traçamos a reta $\overleftrightarrow{V_2P_1}$ que cortará S_1 no ponto P_2 . Da mesma forma, traçamos a reta $\overleftrightarrow{V_2P_3}$ que corta S_1 no ponto P_4 .

Ainda, traçamos outra circunferência de diâmetro V_1O_2 que corta S_2 nos pontos Q_1 e Q_3 . Traçamos a reta $\overleftrightarrow{Q_1V_1}$ que corta S_1 no ponto Q_4 e a reta $\overleftrightarrow{Q_3V_1}$ que corta S_1 no ponto Q_3 . Assim obtemos as quatro retas tangentes às duas circunferências dadas S_1 e S_2 , conforme ilustra a Figura 77.

Figura 77: Solução do Problema 16.



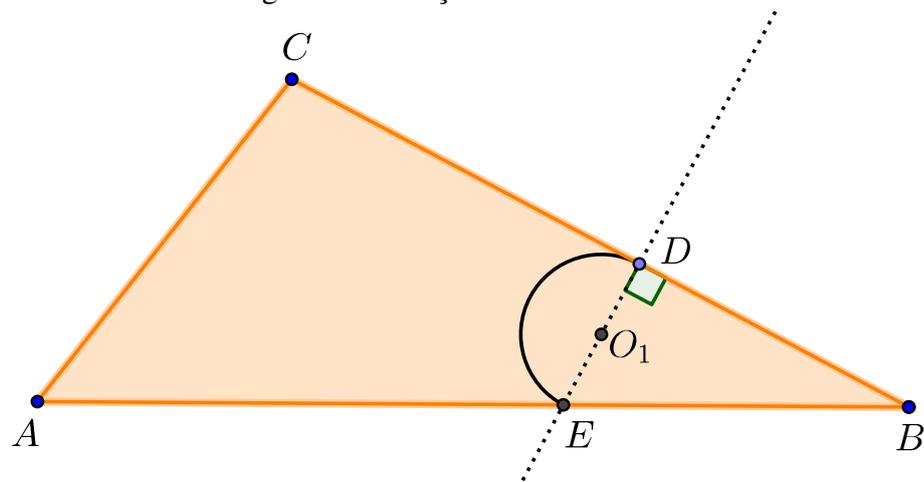
Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Notamos que, se as circunferências dadas fossem congruentes, não seria possível resolver o problema por este método porque as retas \overleftrightarrow{BD} e \overleftrightarrow{AC} seriam paralelas e não se interceptariam para determinar o centro de homotetia V_2 . Poderiam ser, então, construídas retas perpendiculares ao segmento O_1O_2 passando por estes pontos que cortariam S_1 e S_2 já nos pontos de tangência, bastando traçar assim as retas tangentes por estes pontos.

Problema 17. Dado um triângulo ABC , inscreva nele uma semicircunferência com o diâmetro perpendicular ao lado BC .

Solução justificada. Sobre o lado BC marcamos um ponto D e traçamos a perpendicular a esse segmento passando pelo ponto D , que corta o lado AB no ponto E . Traçamos uma semicircunferência de diâmetro \overline{DE} e centro O_1 , conforme ilustra a Figura 78.

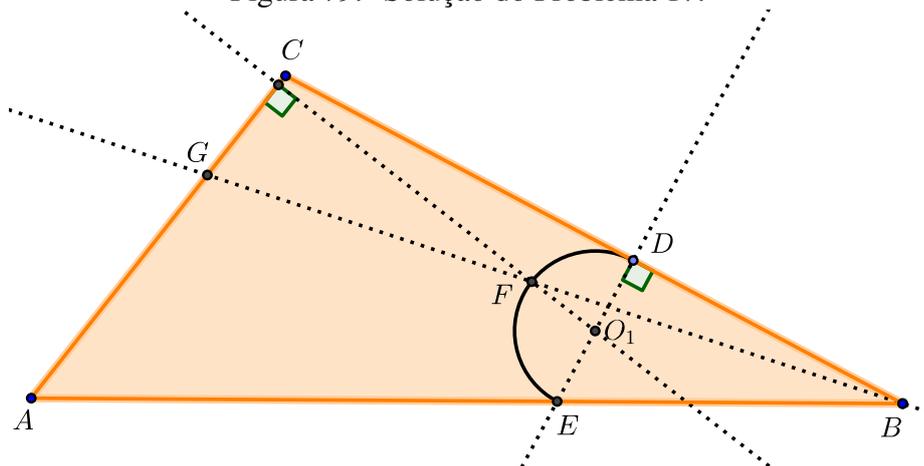
Figura 78: Solução do Problema 17.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Vamos utilizar o conceito de homotetia. Para isso, traçamos por O_1 a reta perpendicular à reta que contém o lado BC do triângulo dado. Essa reta corta a semicircunferência de diâmetro \overline{DE} no ponto F . Traçamos a reta \overleftrightarrow{BF} que corta o lado AC no ponto G , que será o ponto de tangência da semicircunferência que soluciona o problema com o lado AC , conforme ilustra a Figura 79.

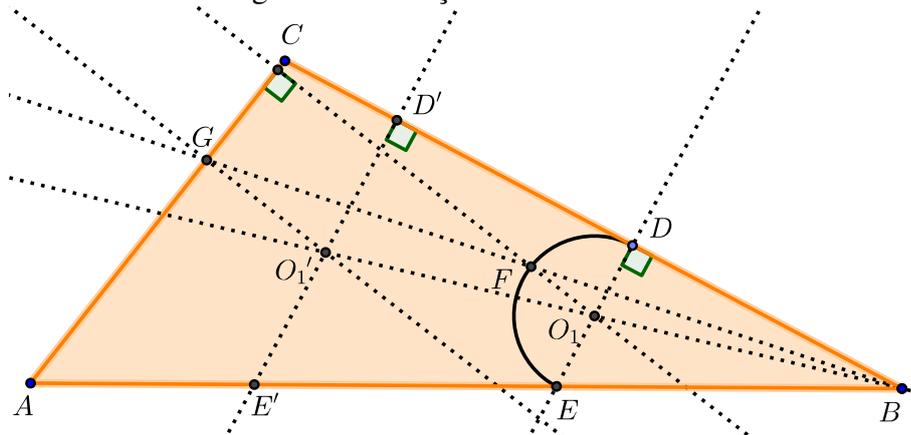
Figura 79: Solução do Problema 17.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Traçamos a reta $\overleftrightarrow{BO_1}$. Traçamos a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{O_1F}$ passando pelo ponto G que corta a reta $\overleftrightarrow{BO_1}$ no ponto O'_1 . Por O'_1 traçamos a perpendicular ao lado BC que corta este segmento no ponto D' e o segmento AB no ponto E' , conforme ilustra a Figura 80.

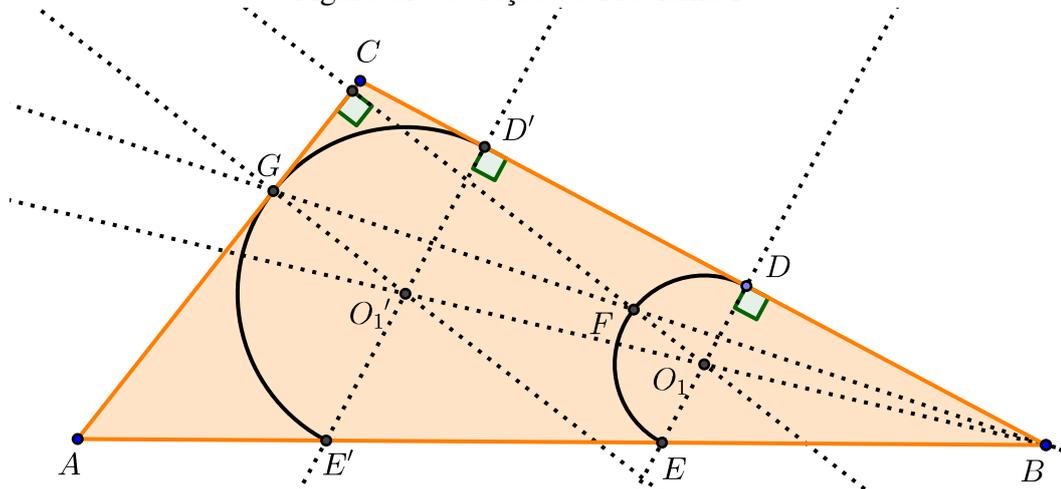
Figura 80: Solução do Problema 17.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Temos que o segmento $O_1'D'$ é homotético do segmento O_1D . Da mesma forma, temos que o segmento $O_1'E'$ é homotético do segmento O_1E . Ainda, o segmento $O_1'G$ é homotético do segmento O_1F , todas com centro de homotetia em B . Notamos que, como as retas FO_1 e GO_1' são paralelas, o ângulo $\widehat{AGO_1'}$ é reto. Cabe agora então desenhar a semicircunferência de centro O_1' e diâmetro $D'E'$, que soluciona o problema conforme ilustra a Figura 81.

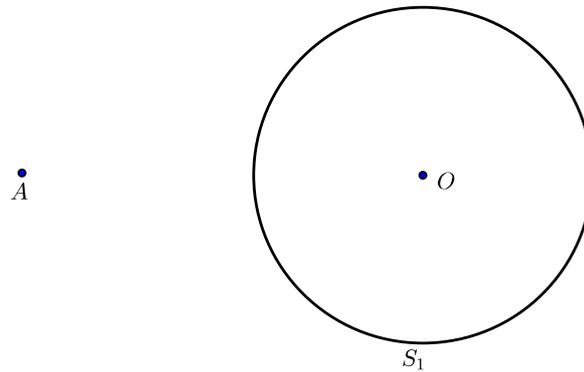
Figura 81: Solução do Problema 17.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Problema 18. São dados uma circunferência S_1 , de centro O e um ponto A fora dela, conforme ilustra a Figura 82. Construa uma reta cortando a circunferência em P e Q de modo que $\overline{AP} = \overline{PQ}$.

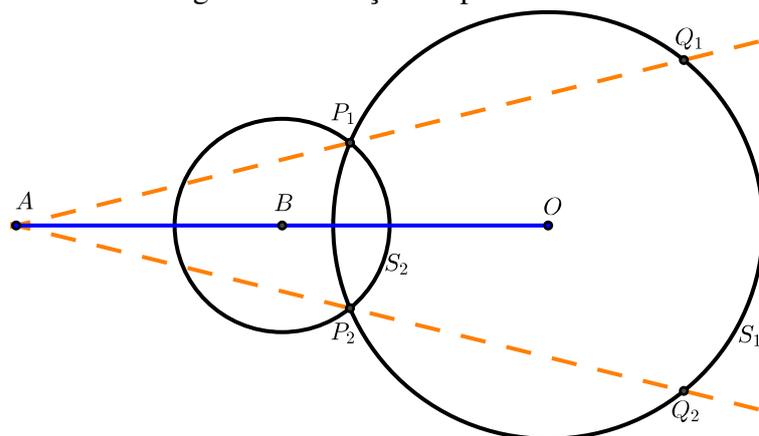
Figura 82: Problema 18.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Solução justificada. Precisamos construir uma circunferência S_2 , homotética de S_1 , com centro de homotetia em A . Para que $\overline{AP} = \overline{PQ}$, a razão de homotetia de S_1 para S_2 deve ser $\frac{1}{2}$. Para isso traçamos o segmento AO e marcamos seu ponto médio B . Traçamos agora a circunferência S_2 com centro em B e raio medindo metade do raio de S_1 . Temos, assim, a Figura homotética de S_1 , desejada. A intersecção de S_1 e S_2 determina os pontos P_1 e P_2 . Traçamos as retas AP_1 e AP_2 que também cortarão S_1 em Q_1 e Q_2 , respectivamente, solucionando o problema, ou seja, $AP_1 = P_1Q_1$ e $AP_2 = P_2Q_2$, conforme ilustra a Figura 83.

Figura 83: Solução do problema 18.

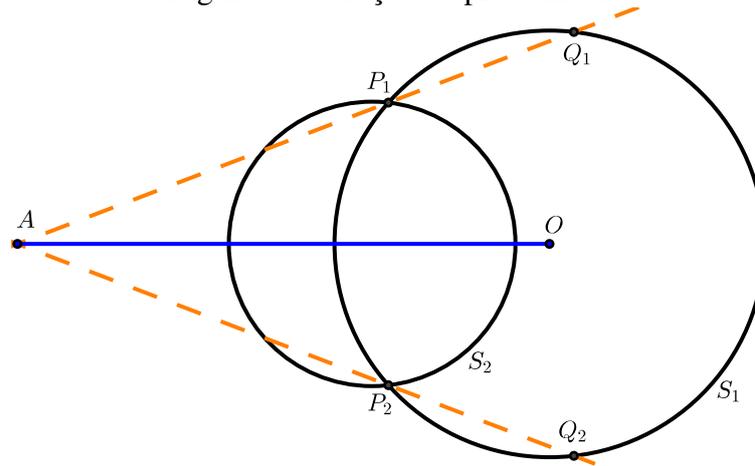


Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Notamos que os triângulos ABP_1 e AOQ_1 são semelhantes de razão $\frac{1}{2}$. Da mesma forma ABP_2 e AOQ_2 são semelhantes de mesma razão. Concluimos de fato que $\overline{AP_1} = \overline{P_1Q_1}$

e $\overline{AP_2} = \overline{P_2Q_2}$. Notamos que dependendo da distância entre A e O e o raio de S_1 , o problema pode não ter solução. Ainda, podemos generalizar a solução para outras proporções entre AP e PQ . Por exemplo, se desejássemos que $\overline{AP} = 2\overline{PQ}$, teríamos que construir a Figura homotética de S_1 com centro de homotetia em A e razão $\frac{2}{3}$ de S_1 para S_2 e seguiríamos processo análogo ao descrito acima, conforme ilustra a Figura 84.

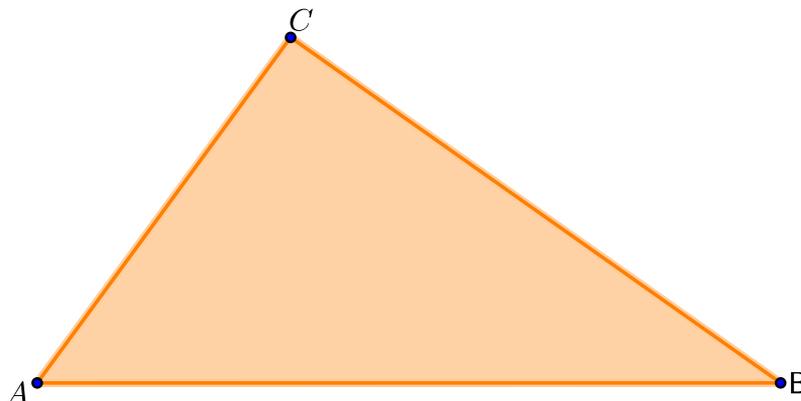
Figura 84: Solução do problema 18.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Problema 19. Dado o triângulo ABC , conforme ilustra a Figura 85. Determine os pontos X no lado AC e Y no lado BC de modo que $\overline{AX} = \overline{XY} = \overline{YB}$.

Figura 85: Problema 19.

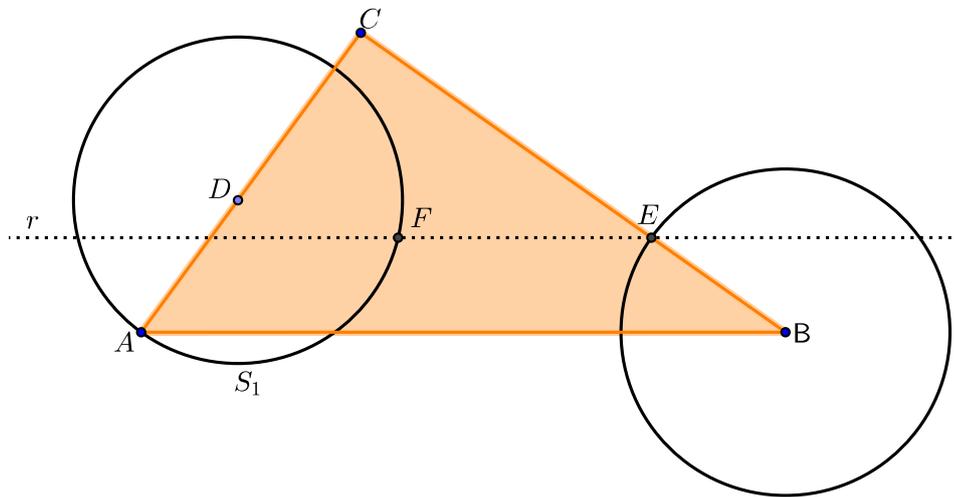


Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Solução justificada. Marcamos um ponto D arbitrário sobre o lado AC . Pelo ponto D , traçamos uma circunferência S_1 , de raio \overline{AD} . Traçamos outra circunferência também de raio

\overline{AD} e centro em B , que corta o lado BC no ponto E . Por E traçamos a reta r paralela ao lado AB , que cortará a circunferência S_1 no ponto F , conforme ilustra a Figura 86.

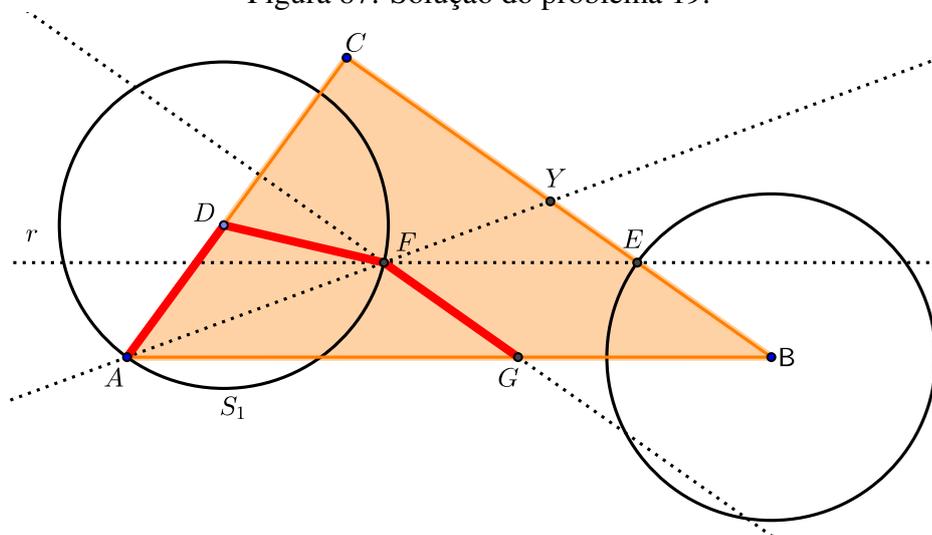
Figura 86: Solução do problema 19.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Pelo ponto F , traçamos uma paralela ao lado BC que corta o lado AB no ponto G . Traçamos os segmentos AD , DF e FG . Notemos que $\overline{AD} = \overline{DF}$, pois são raio da mesma circunferência S_1 . Ainda, $FGBE$ é um paralelogramo por construção. Logo $\overline{FG} = \overline{EB}$, onde $\overline{EB} = \overline{AD}$, também por construção. Temos assim que $\overline{AD} = \overline{DF} = \overline{FG}$, conforme ilustra a Figura 87.

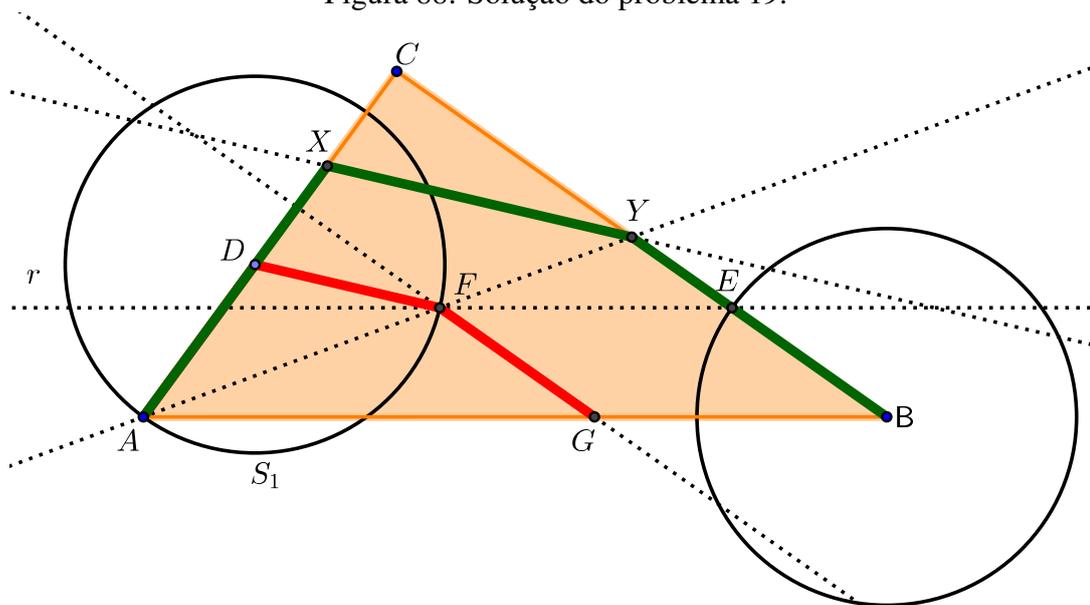
Figura 87: Solução do problema 19.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

A ideia agora é aplicar uma homotetia com centro em A para obtermos uma Figura homotética a $ADFG$, que será a solução do problema. Para isso, traçamos a reta AF que corta o lado CB no ponto Y . Também traçamos uma paralela ao segmento DF passando por Y , que cortará o lado AC no ponto X . Marcamos agora os segmentos AX , XY e YB que solucionam o problema conforme ilustra a Figura 88.

Figura 88: Solução do problema 19.

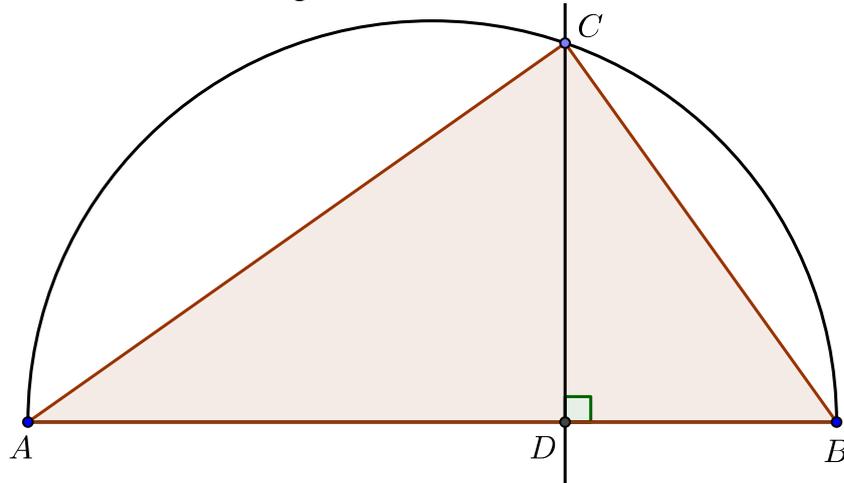


Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Notamos que foi aplicado agora o conceito de homotetia, onde o segmento BY é homotético do segmento GF com centro no ponto A , pois os triângulos AFG e AYB são semelhantes (AAA). Da mesma forma, o segmento XY é homotético do segmento DF com centro no ponto A , pois os triângulos ADF e AXY são semelhantes (AAA). Notemos, ainda, que em ambos casos de semelhança, a constante de proporcionalidade é a mesma pois os segmentos AF e AY são lados comuns. Logo $\overline{AX} = \overline{XY} = \overline{YB}$.

Problema 20. Dados uma semicircunferência de diâmetro \overline{AB} e um triângulo ABC inscrito nela conforme ilustra a Figura 89. Traçar duas circunferências tangentes à altura CD desse triângulo e a semicircunferência dada.

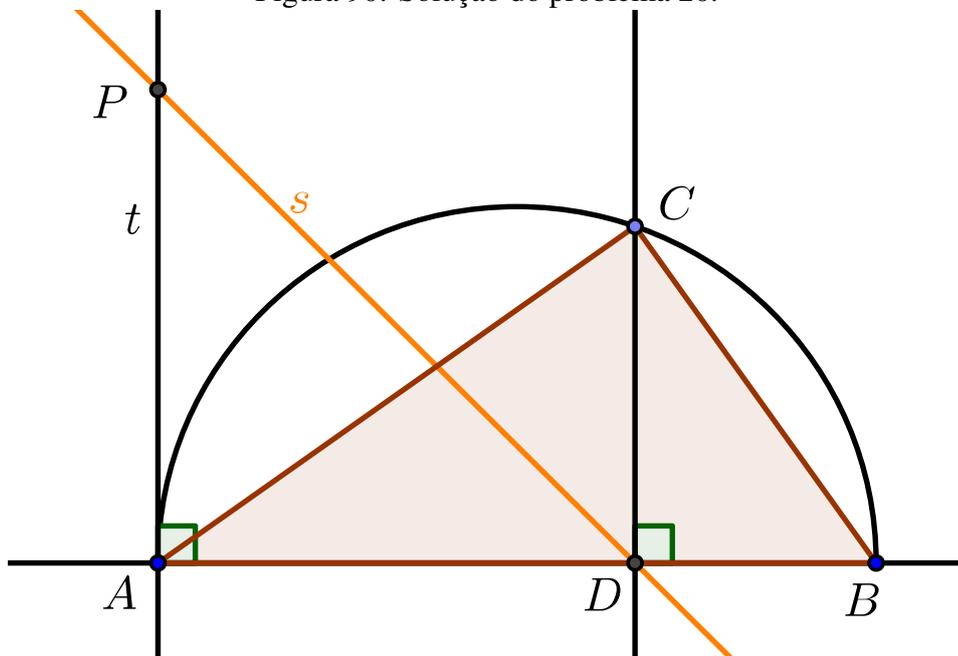
Figura 89: Problema 20.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Solução justificada. Notamos que o triângulo ABC é retângulo em C pois AB é um diâmetro. Traçamos a reta s bissetriz do ângulo $\hat{A}DC$. Pelo ponto A traçamos uma reta t perpendicular ao segmento AB , que corta a reta s no ponto P , conforme ilustra a Figura 90.

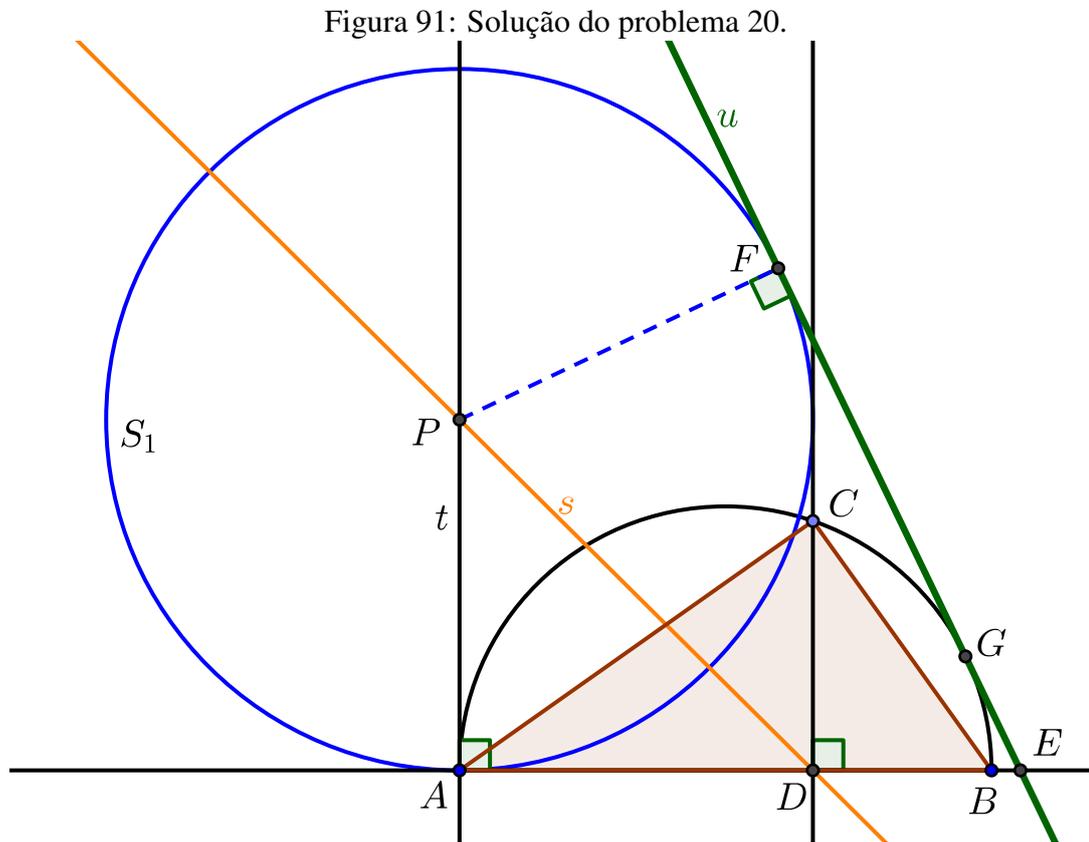
Figura 90: Solução do problema 20.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Traçamos a circunferência S_1 com centro em P e raio \overline{AP} que será tangente a reta \overleftrightarrow{DC} pois P está sobre a reta s bissetriz de $\hat{A}DC$. Traçamos a reta u tangente à circunferência S_1 e

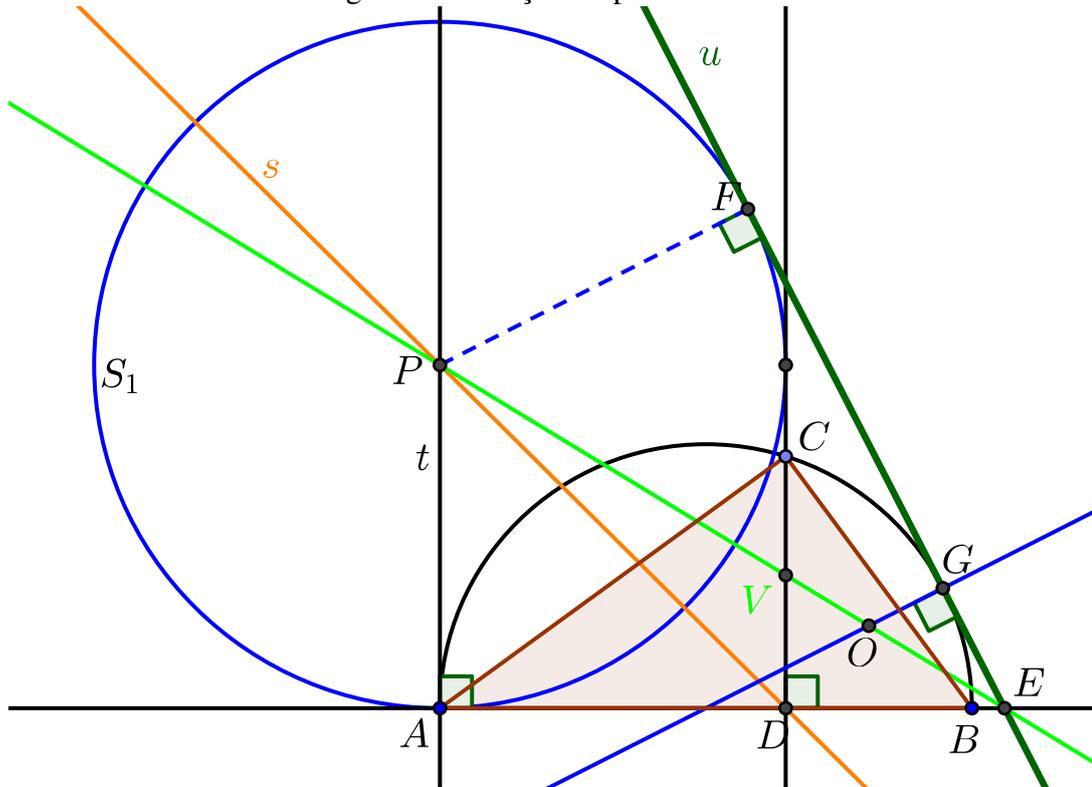
à semicircunferência dada, obtendo os pontos de tangência F e G , respectivamente. Já vimos esta construção das tangentes à circunferências no problema 14. A reta u intercepta a reta \overleftrightarrow{AB} no ponto E , conforme ilustra a Figura 91.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Traçamos a reta \overleftrightarrow{PE} que corta a reta \overleftrightarrow{CD} no ponto V . Para construirmos a circunferência S'_1 , homotética de S_1 , com centro de homotetia no ponto V e com razão $k < 0$, precisamos que o ponto G pertence a esta circunferência. Notamos que o centro de S'_1 está sobre a reta \overleftrightarrow{PE} para que S_1 e S'_1 sejam homotéticas. Como F é o ponto em que a reta u tangencia S_1 , G é o ponto de tangência entre a reta u e a circunferência S'_1 . Portanto, o centro O de S'_1 pertence à reta perpendicular a u através de G . Logo, O fica determinado pela intersecção desta reta com a reta \overleftrightarrow{PE} , conforme ilustra a Figura 92.

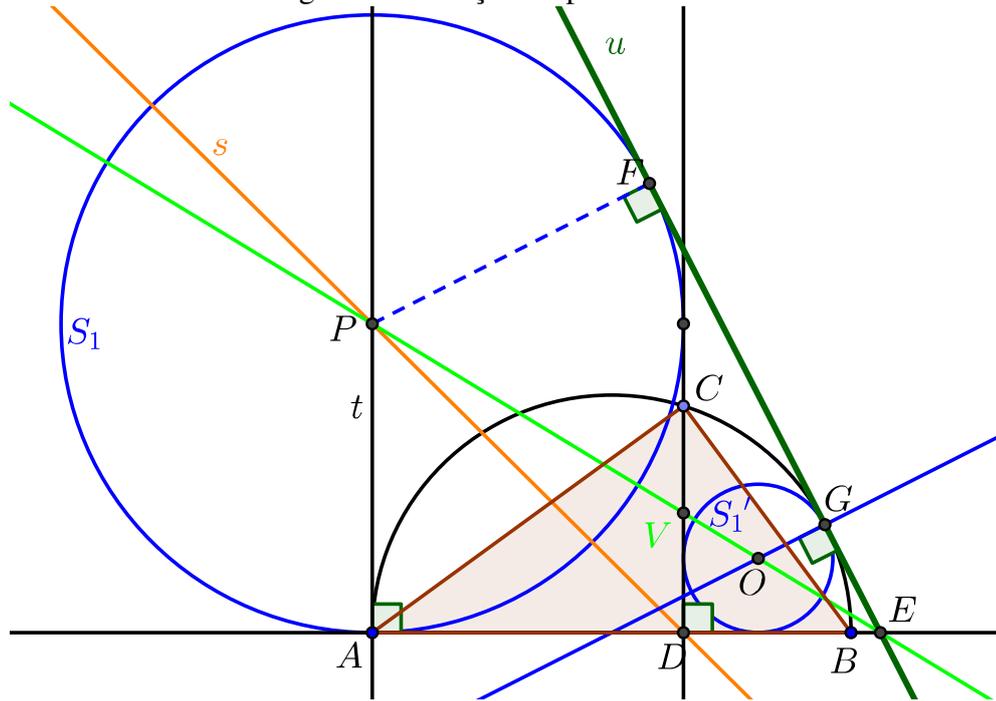
Figura 92: Solução do problema 20.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Com raio \overline{OG} e centro O traçamos, então, a circunferência S'_1 . Notamos que, como \overleftrightarrow{CD} é tangente a S_1 e S'_1 é homotética de S_1 , CD é tangente de S'_1 . Por fim, os triângulos APE e FPE são congruentes pois $\overline{AP} = \overline{FP}$ e $\overline{PE}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{FE}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AE}^2 \Rightarrow \overline{AE}^2 = \overline{FE}^2 \Rightarrow \overline{AE} = \overline{FE}$ e com isso, \overleftrightarrow{PE} é bissetriz do ângulo $A\hat{E}F$ e S'_1 é também tangente à reta AE , conforme ilustra a Figura 93

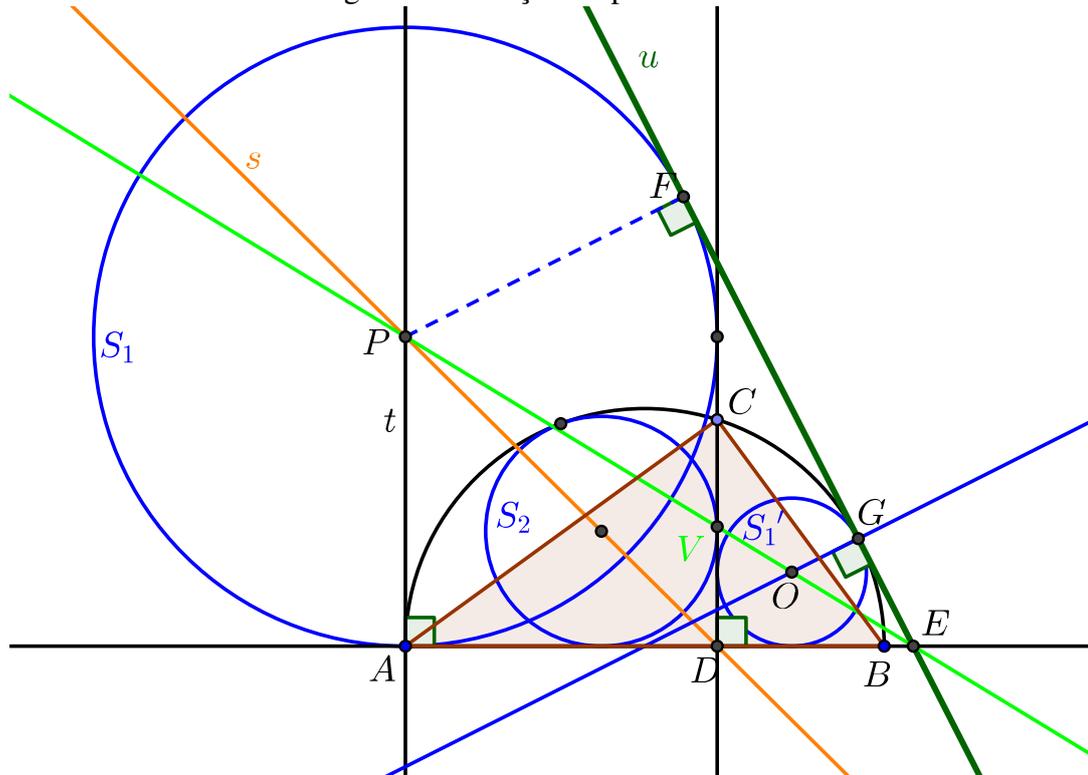
Figura 93: Solução do problema 20.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Para a construção da outra circunferência desejada, podemos seguir ideia análoga à descrita acima. A Figura 94 ilustra a solução completa desse problema. Observação: O ponto V não é necessariamente o ponto de tangência de S_2 e a reta CD .

Figura 94: Solução do problema 20.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Vimos assim, que utilizando homotetia, muitos problemas geométricos foram facilmente resolvidos e a solução justificada de forma clara. No caso de inscrever figuras geométricas em outras, a homotetia permite que, a partir de uma solução parcial, ampliamo-la ou reduzimo-la de modo conveniente, até solucionar o problema.

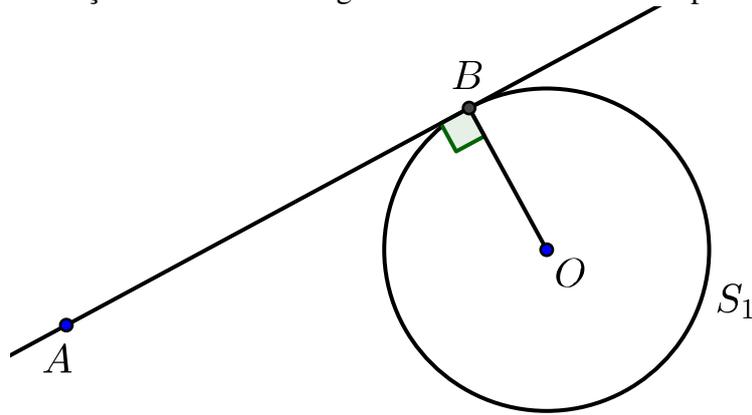
5 Métodos de resolução de problemas de Construções Geométricas

Isometria e homotetia são transformações geométricas no plano que auxiliam muito na resolução de problemas de construções geométricas. Enquanto a isometria tem a característica de manter medidas, formas e ângulos, a homotetia têm a característica de manter a forma e as medidas de ângulos, não necessariamente preservando distâncias. Assim, isometria está relacionada a congruência de Figuras, enquanto que homotetia está relacionada com a semelhança entre figuras.

Solucionar problemas de construções geométricas nem sempre é tarefa fácil. Além de um bom conhecimento de geometria, é fundamental ter criatividade na busca correta e elegante de soluções. Por vezes nos deparamos com problemas difíceis que nos fazem pensar muito. O que parece desafiador, após longas tentativas sem êxito, pode acabar gerando desânimo. O que chama atenção também é que problemas, a primeira vista semelhantes, podem ter soluções muito distintas, com uso de conceitos, ideias e argumentos diferentes.

Um método de resolução muito citado em livros, *sites* e materiais de desenho geométrico é *supor o problema resolvido*. Como o nome sugere, faz-se um esboço do problema já com a possível solução. Por vezes isso pode ser bastante útil, uma vez que nesse esboço podemos ver uma série de informações e propriedades importantes que podem ser utilizadas na busca da solução. Por exemplo, dados uma circunferência S_1 de centro O e um ponto A fora dela. Queremos traçar uma reta tangente a essa circunferência passando pelo ponto A . Podemos assim imaginar o problema resolvido, como ilustra a Figura 95. Nesse caso essa "imaginação" nos ajuda a perceber que precisamos de uma "ferramenta" que nos forneça um ângulo reto sem conhecermos ao certo o ponto do vértice desse ângulo (não sabemos ainda quem é o ponto B da figura).

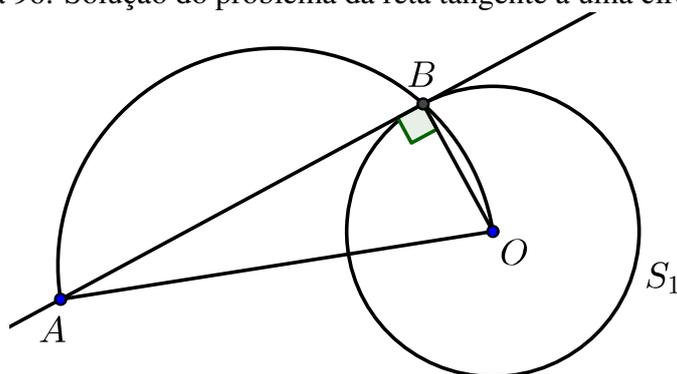
Figura 95: Construção de uma reta tangente à uma circunferência por um ponto fora dela.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Sem muito esforço, lembramos que um ângulo inscrito numa semicircunferência mede 90° . Vamos utilizar esta informação. Precisamos desenhar uma semicircunferência cujo diâmetro seja o segmento que liga o ponto O ao ponto A . Temos que qualquer ponto X distinto de A e B sobre essa semicircunferência determina um ângulo reto \hat{AXO} . Mas sabemos também que a reta tangente forma um ângulo reto com o raio da circunferência S_1 . De posse dessas informações valiosíssimas, é instintivo pensar em uma *Intersecção* de objetos geométricos. Para isso, marcamos o ponto de intersecção entre a semicircunferência e a circunferência S_1 e então obtemos o ponto B . Agora traçamos a reta \overleftrightarrow{AB} solucionando o problema, conforme ilustra a Figura 96. Notemos também que essa solução não é única. Podemos obter a outra reta tangente refletindo a semi-circunferência sobre o segmento AO (ou desenhando uma circunferência inteira) e seguindo ideia análoga a acima descrita.

Figura 96: Solução do problema da reta tangente à uma circunferência.



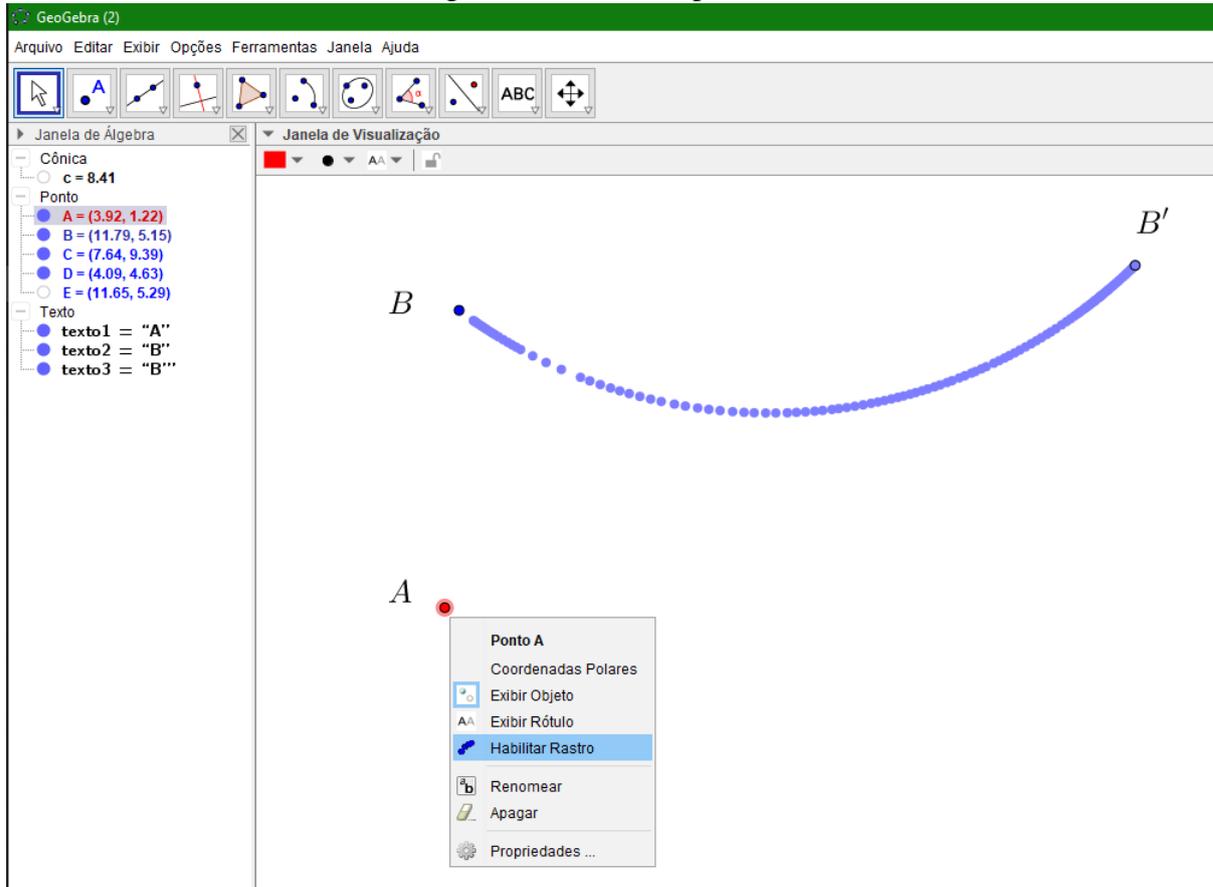
Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Não há dúvida que o *software* GeoGebra é uma ferramenta importantíssima na visualização geométrica e organização de ideias para resolver problemas de construções geométricas. São muitas as ferramentas prontas e as possibilidades de utilizar a tela como área de desenho com uso apenas de régua e compasso como ferramentas clássicas. Há ainda muitas outras ferramentas prontas que auxiliam para traçar bissetriz, retas perpendiculares, retas paralelas, reflexões, translações, rotações, homotetias, entre outras.

Contudo, o *software* oferece ainda uma ferramenta pouco utilizada, mas que pode contribuir muito para encontrar "objetos escondidos" tais como retas, circunferências, que podem tornar-se visíveis. Estamos falando da ferramenta *RASTRO*⁵. Esta ferramenta pode ser usada a partir de um ponto, de uma reta, de um segmento, de uma curva, etc. mostrando a trajetória percorrida quando movimentamos determinado elemento relacionado. A Figura 97 ilustra um exemplo com um ponto *A*. Clicando com o botão direito do *mouse* escolhemos a opção *habilitar rastro*. No ponto *B* já foi aplicada essa ferramenta percorrendo uma trajetória até chegar em *B'*. Essa trajetória pode ser qualquer, ou seja pode ser uma curva, uma reta, uma espiral, ou livre.

⁵O método do rastro acima descrito e utilizado neste trabalho, foi percebido durante a árdua tarefa de resolver estes problemas geométricos. Mesmo após pesquisas relacionadas ao estado da arte deste assunto, não foram encontrados materiais que informassem claramente se o método já era ou não conhecido e descrito na comunidade científica. Contudo, durante o processo de defesa deste trabalho, um membro da banca avaliadora fez uma menção sobre a existência já de estudos neste sentido. Assim citamos aqui este material, que até então era por mim desconhecido, para que também possa ser utilizado como fonte de pesquisa: Dragging and Making Sense of Invariants in Dynamic Geometry; Author(s): Anna E. Baccaglioni-Frank; Source: The Mathematics Teacher, Vol. 105, No. 8 (April 2012), pp. 616-620; Published by: National Council of Teachers of Mathematics; Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacher.105.8.0616>.

Figura 97: Rastro do ponto B.

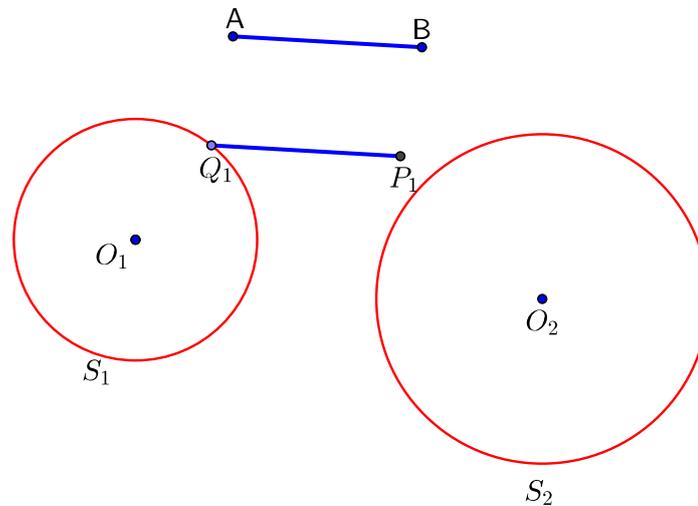


Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Vejamos agora como utilizar essa ferramenta como auxílio na busca de soluções de problemas de construções geométricas. No Problema 9, do capítulo 4, essa ferramenta foi fundamental para se ter uma ideia de qual elemento geométrico seria necessário construir e onde. Descrevemos a seguir o método seguido nesse problema.

Utilizamos na solução desse problema os dois métodos acima citados: O método de *suportar o problema resolvido* e o método do *rastro*. Primeiro imaginemos o problema parcialmente resolvido. Vamos desenhar um paralelogramo que soluciona parcialmente o problema, ou seja, marcamos um ponto Q_1 sobre a circunferência S_1 . Transladamos o segmento AB tal que o ponto A coincida com o ponto Q_1 e o ponto B transladado chamamos de P_1 . Temos assim o paralelogramo ABP_1Q_1 que não é a solução mas nos ajuda muito conforme ilustra a Figura 98.

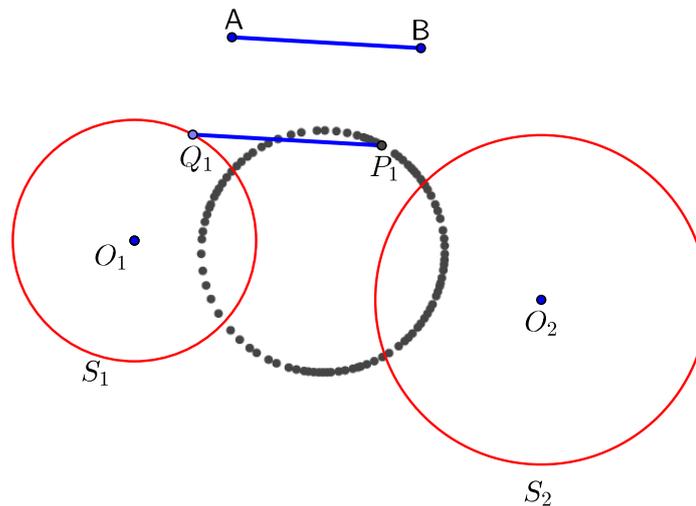
Figura 98: Construção do paralelogramo.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Com o cursor sobre o ponto P_1 , clicamos com o botão direito do *mouse* e vamos em *Habilitar Rastro*. Agora movemos o ponto Q_1 sobre a circunferência S_1 , conforme ilustra a Figura 99.

Figura 99: Construção do paralelogramo utilizando o método do rastro.



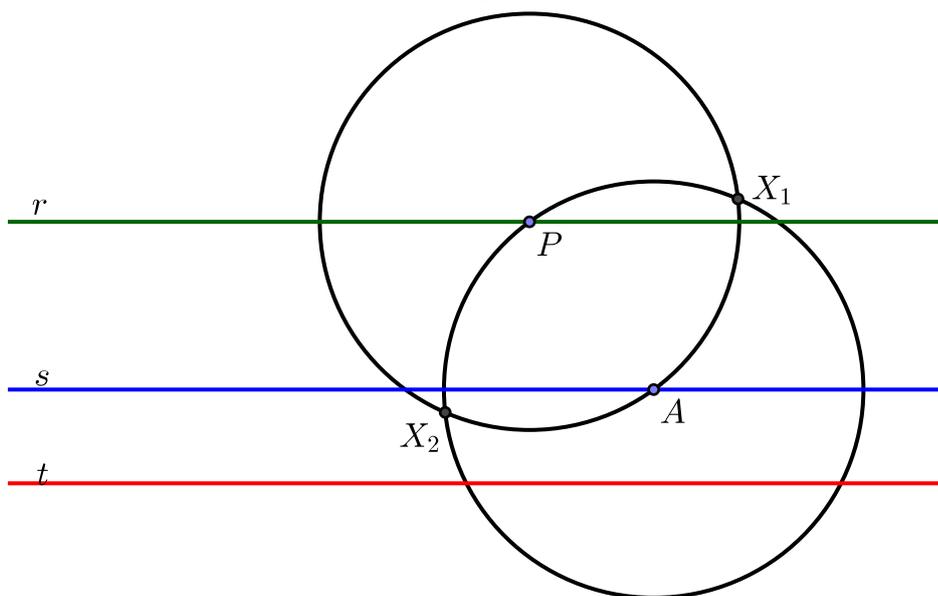
Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Notemos que quando o ponto P_1 passar sobre a circunferência S_2 temos a nossa "solução", ou seja, todos os critérios foram atendidos, e temos o paralelogramo ABP_1Q_1 com $Q_1 \in S_1$ e $P_1 \in S_2$. Percebemos em seguida que o rastro do ponto P_1 parece uma circunfe-

rência (ainda não temos certeza). Notamos que este método nos dá uma ideia intuitiva de quais elementos precisamos construir. Percebemos então, que temos que construir uma circunferência que intercepta a circunferência S_2 . Vemos que a circunferência procurada parece ser de mesma medida de raio que S_1 com centro trasladado com a medida do segmento AB a partir do centro O_1 . A partir desse momento, seguimos os passos descritos na solução do problema 8. Novamente salientamos que esse é um método auxiliar de resolução, que pode ser muito útil, como foi nesse caso. Contudo, todas as etapas e resultados na solução de fato precisam ser justificados sob o ponto de vista matemático. O método não prova que a construção está correta. Ele nos ajuda a encontrar um caminho a ser seguido.

Vejam os outros exemplos. No problema 10, do capítulo 4, foram dadas três retas paralelas e pedia-se para construir um triângulo equilátero com um vértice em cada uma dessas retas. Vejamos aqui os métodos que foram utilizados para buscar a solução desse problema. Primeiro imaginemos o problema *parcialmente resolvido*: Marcamos um ponto A sobre a reta s e um ponto P sobre a reta r . Traçamos duas circunferências de mesmo raio \overline{PA} , uma com centro em P e outra com centro em A . Notemos que este método é o utilizado para a construção de um triângulo equilátero, que é o que queremos futuramente. A interseção dessas duas circunferências determina os pontos X_1 e X_2 , conforme ilustra a Figura 100.

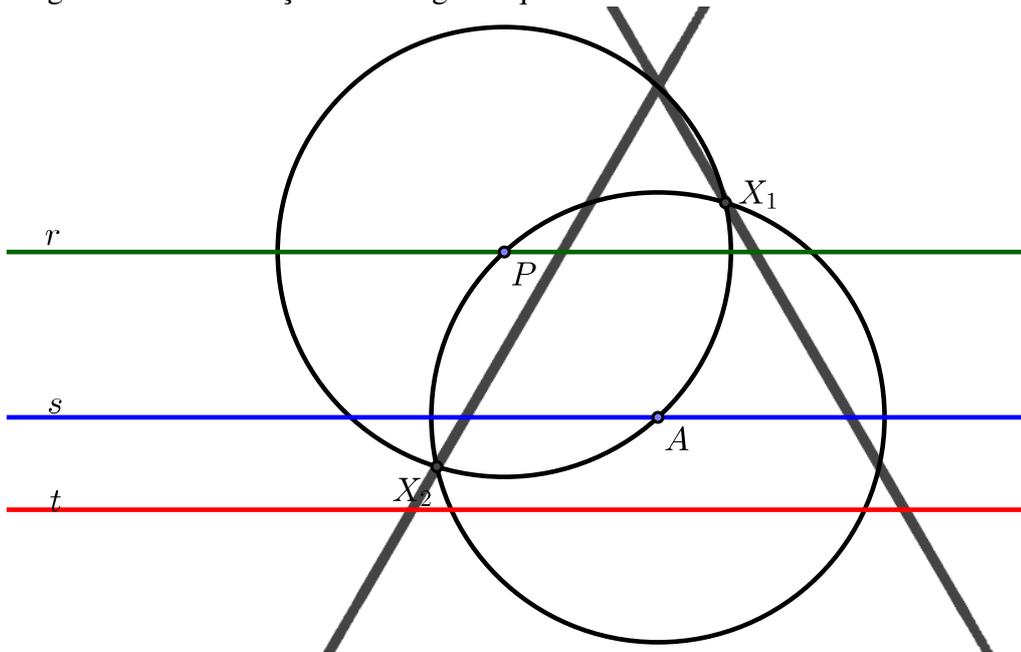
Figura 100: Construção do triângulo equilátero utilizando o método do rastro.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Habilitamos a ferramenta rastro do *software* GeoGebra para ambos os pontos X_1 e X_2 . Fazemos agora o ponto P deslizar sobre a reta r e veremos que o rastro de ambos pontos X_1 e X_2 também se movem descrevendo trajetórias retilíneas. Essas trajetórias retilíneas interceptam as retas paralelas r , s e t , conforme ilustra a Figura 101.

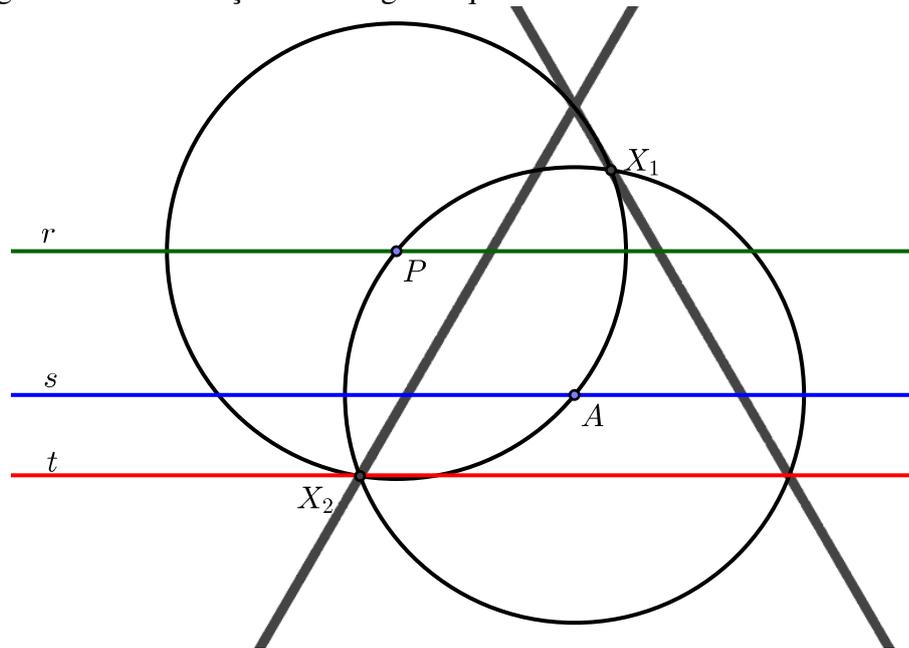
Figura 101: Construção do triângulo equilátero utilizando o método do rastro.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Notemos que quando movemos o ponto P tal que X_2 fique sobre a reta t temos um triângulo equilátero AX_2P , ou seja, temos uma solução do problema. Da mesma forma, quando X_1 está sobre essa mesma reta temos a outra solução com o triângulo AX_1P , conforme a Figura 102.

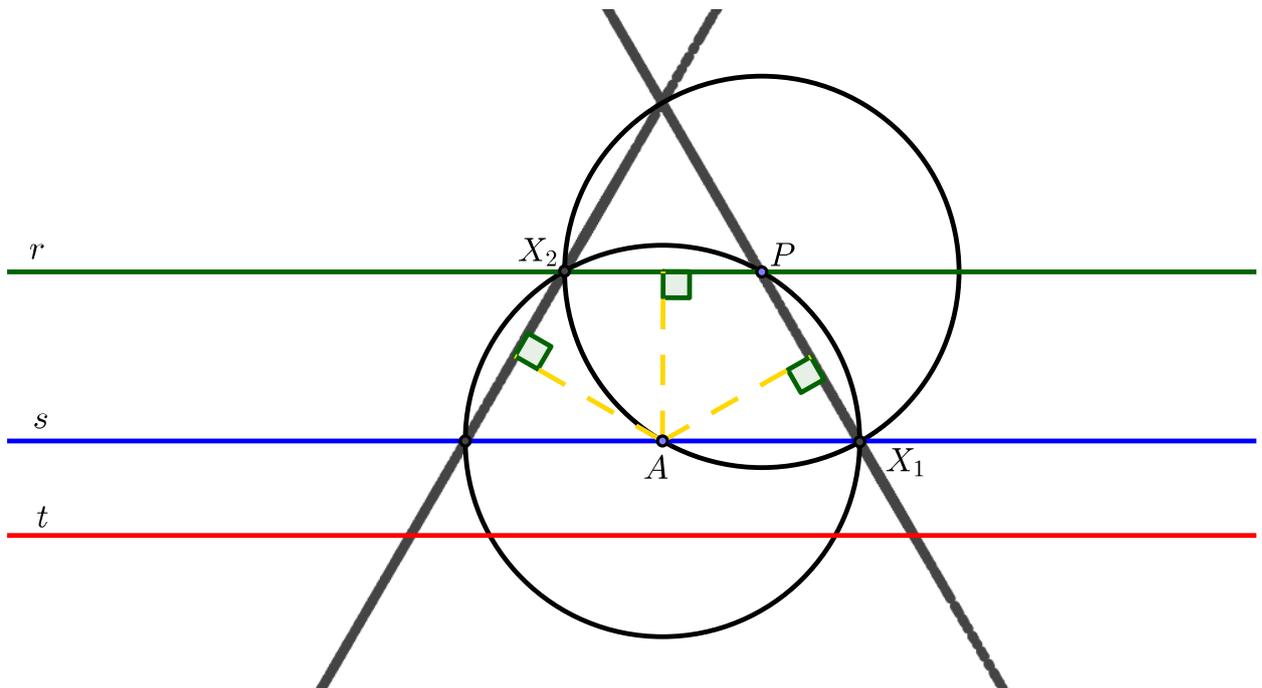
Figura 102: Construção do triângulo equilátero utilizando o método do rastro.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Vemos que os rastros deixados pelos pontos X_1 e X_2 , quando o ponto P é movimentado, e a reta t determinam um triângulo equilátero, ou seja, cada reta que descreve a trajetória desses pontos forma com a reta t um ângulo agudo de 60° . Precisamos agora descobrir mais sobre essas retas. Observando a Figura 103, podemos conjecturar que a distância entre as retas r e s é a mesma que entre o ponto A e as retas obtidas pela trajetória dos pontos X_1 e X_2 . Essa observação sugere que a reta r deve ser rotacionada 60° em torno do ponto A , (uma rotação com sentido horário e outra com sentido anti-horário), para obtermos as retas representadas pelas trajetórias dos pontos X_1 e X_2 . E assim procedeu-se, construindo as retas r' e r'' e seguindo o processo já descrito na solução justificada deste problema.

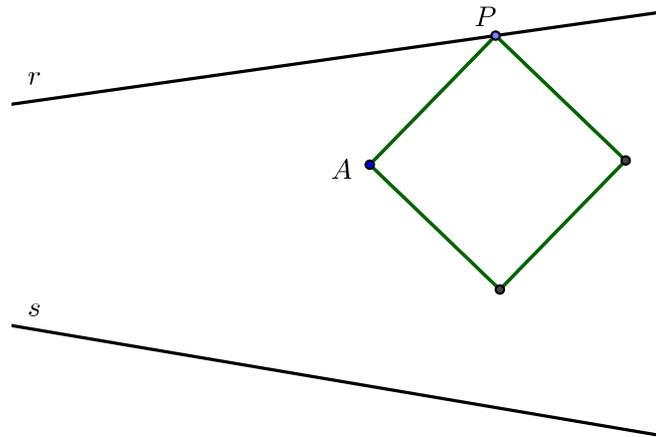
Figura 103: Construção do triângulo equilátero utilizando o método do rastro.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

No problema 11, do capítulo 4, foram dadas duas retas r e s e um ponto A e pedia-se para construir um quadrado com um vértice em A e outros dois vértices um em cada reta dada. A resolução desse problema também foi feita utilizando os métodos acima descritos. Primeiro, imaginamos o problema parcialmente resolvido, ou seja, marcamos um ponto P sobre a reta r e construímos um quadrado de lado \overline{AP} , na região entre as retas dadas, conforme ilustra a Figura 104.

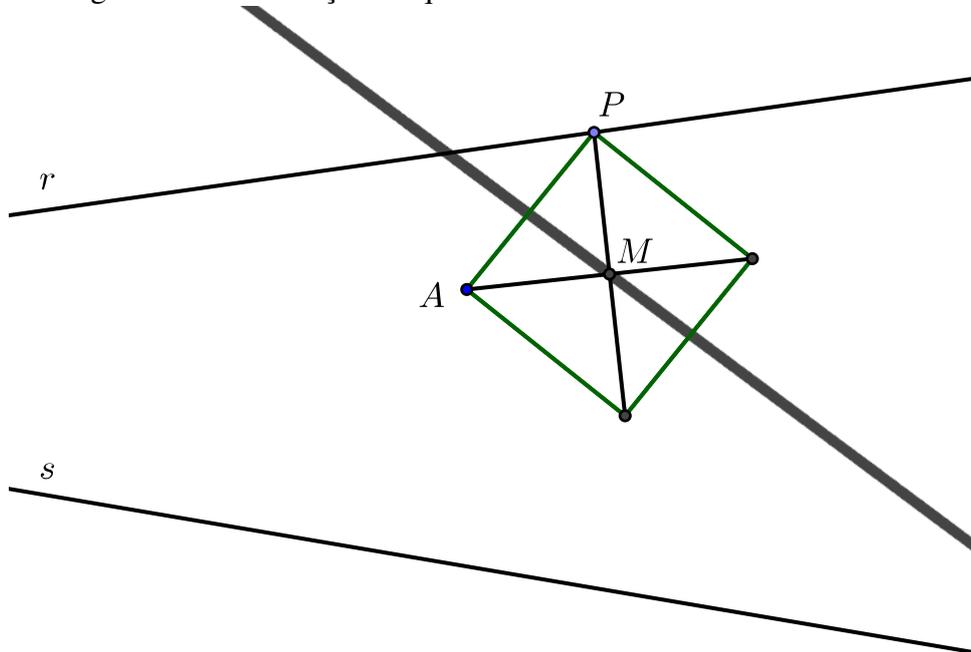
Figura 104: Construção do quadrado utilizando o método do rastro.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Traçamos as diagonais desse quadrado que se interceptam no ponto M . Habilitamos a ferramenta RASTRO do ponto M . Fazemos o ponto P deslizar sobre a reta r . A trajetória descrita pelo ponto M sugere uma reta a 45° com a reta r , conforme ilustra a Figura 105.

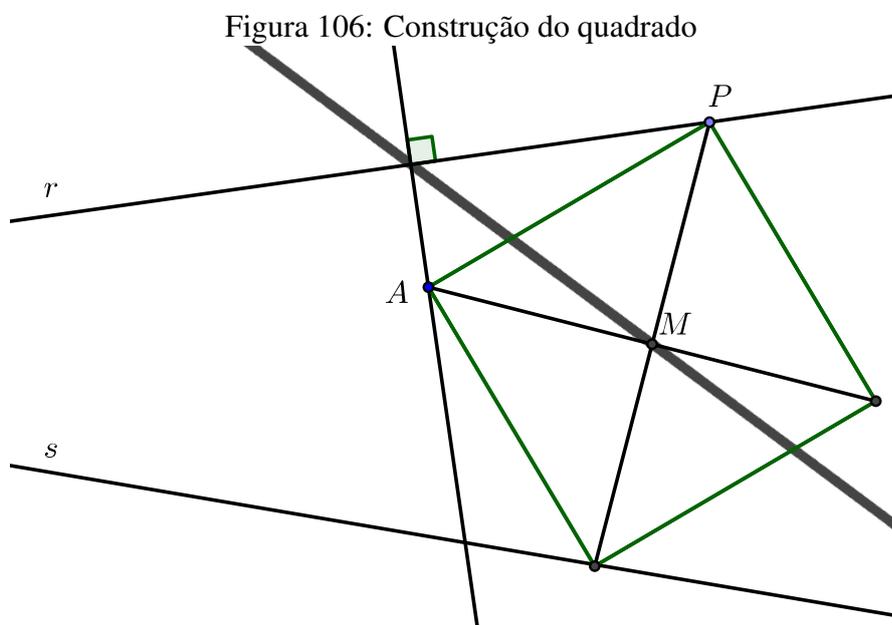
Figura 105: Construção do quadrado utilizando o método do rastro.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Precisamos ainda descobrir onde essa trajetória intercepta a reta r . Parece intuitivo pensar que é no pé da perpendicular a r passando pelo ponto A . De fato é. Notamos que, em

determinado momento do deslizamento do ponto P sobre a reta r , o vértice oposto ao ponto P do quadrado, situa-se sobre a reta s e assim temos uma solução parcial do problema, conforme ilustra a Figura 106.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Novamente lembramos que estamos tendo uma ideia intuitiva da solução, podemos estar certos ou não. Essa é uma ferramenta intuitiva. Depois de concluída, a solução precisa ser formalizado e justificada com o rigor matemático, como foi feito.

Vale lembrar também que algumas ideias, aqui chamadas intuitivas, são despertadas em nós com o passar do tempo. Quando começamos a estudar, raciocinar, e colher os primeiros resultados com construções geométricas, passamos a perceber mais facilmente alguns "elementos geométricos escondidos", como paralelismo entre segmentos, ângulos, lugares geométricos, entre outros. Contudo, por vezes cometemos erros, quando nossa intuição falha, conjecturamos assertivas errôneas e não conseguimos resolver dado problema. Ou ainda que resolvemos, não conseguimos justificar rigorosamente a construção obtida, podendo a construção não ser verdadeira ou não percebemos ainda a ferramenta certa para a demonstração.

Por fim, destacamos que alguns problemas permitem mais que uma forma de resolução. Podem ser utilizadas ferramentas diferentes, métodos mais complexos, caminhos mais longos, mas o importante é resolver o problema de forma clara e elegante.

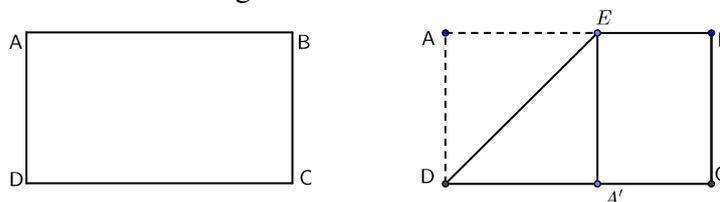
6 Sugestões de atividades envolvendo Transformações: Isometria e Homotetia

Neste capítulo são apresentadas sete atividades utilizando materiais manipulativos possíveis de serem aplicadas no ensino de Geometria nos anos finais do ensino fundamental envolvendo o tema de estudo deste trabalho, transformações geométricas. As principais referências utilizadas neste capítulo foram (RPM n°20), (RPM n°47) e (RPM n°61)

Atividade 1. Quadrado na folha de papel. Temos uma folha de papel retangular e queremos recortá-la pra formar um quadrado maior possível de forma prática. Como fazer?

Solução: Consideramos a Figura 107 que representa a folha de papel. Podemos dobrar a folha de forma que o lado AD fique sobre o lado DC , determinando o ponto A' . Teremos o novo segmento $A'E$. Os pontos $AEA'D$ são os vértices do quadrado.

Figura 107: Atividade 1.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

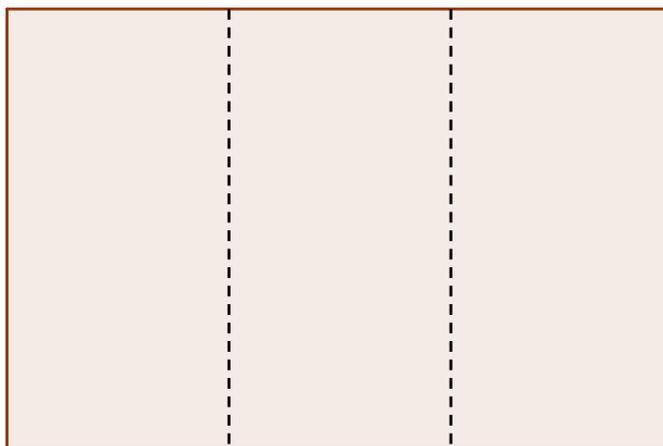
Justificativa. Quando dobramos o papel, criamos um eixo. Esse eixo é o eixo de simetria. Assim o segmento DA' é simétrico do segmento DA em relação ao eixo DE e, portanto, eles são congruentes. Da mesma forma, o segmento EA' é simétrico do segmento EA em relação ao mesmo eixo. Temos também que os ângulos DAE , ADA' , são retos pelo fato de a folha de papel ser retangular, e os ângulos $DA'E$ e DAE são congruentes pelas propriedades da reflexão. Logo pela soma dos ângulos internos AEA' também é reto. Como $AB \parallel DC$ e $EA' \parallel AD$ o segmento EA' é congruente com o segmento AD . Logo a figura $AEA'D$ é um quadrado.

Conteúdos envolvidos: Simetria, Congruência de segmentos, Congruência de ângulos, Paralelismo, Propriedades do quadrado e do retângulo, Soma dos ângulos internos de um polígono.

Resultados esperados: Espera-se que o aluno identifique o eixo de simetria e perceba que os segmentos e os ângulos refletidos por este eixo permanecem com a mesma medida após serem refletidos. Além disso é importante o aluno verificar que se ele tomar outro vértice para executar o processo descrito, o quadrado obtido terá a mesma medida do lado. Podem ainda, entre os alunos, compararem seus trabalhos para concluir a verificação.

Atividade 2. Temos uma folha de papel retangular e queremos dividi-la em 3 partes retangulares iguais utilizando dobradura, conforme ilustra a Figura 108.

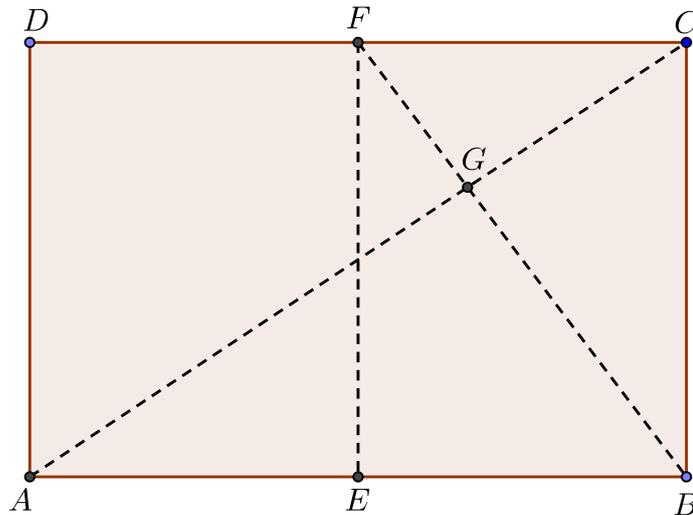
Figura 108: Atividade 2.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Solução: Podemos utilizar uma régua para auxiliar nas dobraduras, mas não para efetuar medidas, para não perder o objetivo da atividade. Representemos os vértices da folha pelos pontos A , B , C e D . Dobramos a folha ao meio no sentido do comprimento, criando um eixo de simetria EF . Abrimos a folha e novamente dobramos em uma das diagonais, por exemplo AC . Mas notemos que agora os pontos B e D não são simétricos em relação a esse eixo AC . Abrimos a folha e dobramos na diagonal BF . Essa diagonal BF intercepta a diagonal AC no ponto G conforme ilustra a Figura 109.

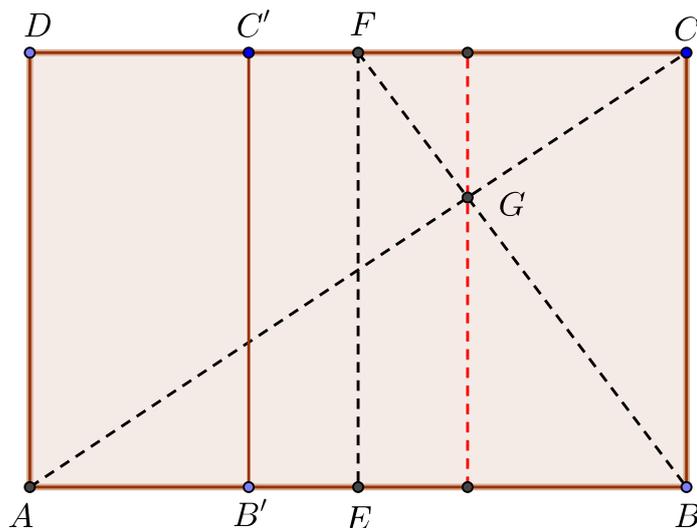
Figura 109: Atividade 2.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Traçamos um eixo passando pelo ponto G perpendicular ao lado AB . Dobramos a folha nesse eixo e com isso obtemos os pontos B' e C' , simétricos de B e C sobre os lados AB e CD , respectivamente, conforme ilustra a Figura 110. O eixo que passa pelo ponto G e o segmento $B'C'$ dividem a folha dada em três partes de mesmo tamanho.

Figura 110: Atividade 2.

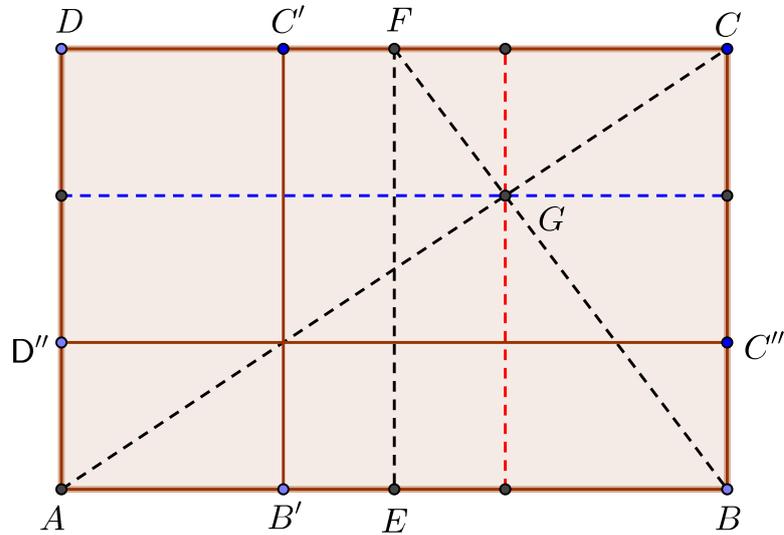


Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Se traçarmos uma perpendicular ao lado BC passando por G obtemos outro eixo e dobrando a folha nesse eixo, obtemos os pontos C'' e D'' , simétricos de C e D sobre os lados

BC e AD , respectivamente, como ilustra a Figura 111.

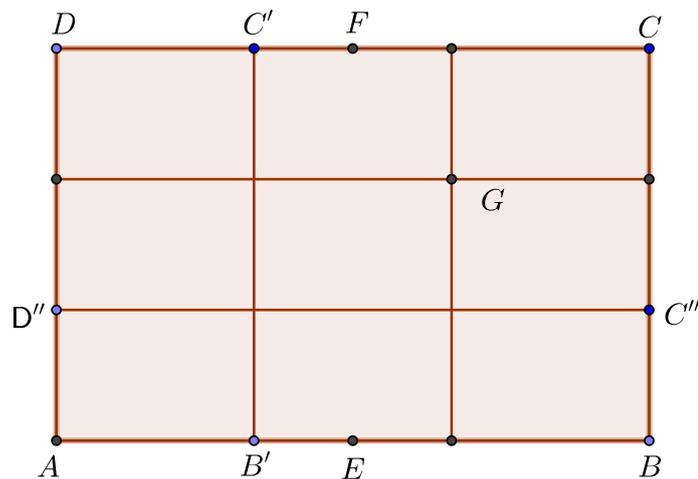
Figura 111: Atividade 2.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

A Figura 112 ilustra os quatro eixos obtidos por meio de dobraduras. Assim, dividimos a folha em 9 partes iguais.

Figura 112: Atividade 2.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Justificativa: Notemos que os triângulos ABG e CFG são semelhantes (AAA), conforme ilustra a Figura 113 .

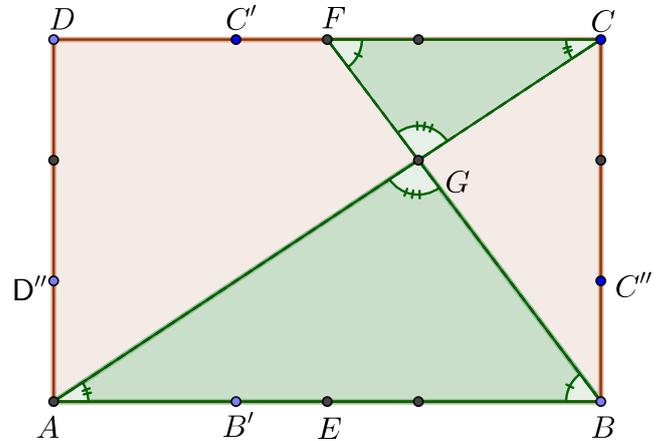
Figura 113: Atividade 2.

Disto temos:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{FC}} = 2$$

$$\overline{AG} = 2\overline{GC} \quad (I)$$

$$\overline{BG} = 2\overline{GF} \quad (II)$$



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Como $\overline{AC} = \overline{AG} + \overline{GC}$ e $\overline{BF} = \overline{BG} + \overline{GF}$, temos por (I) e (II) que $\overline{AC} = 3\overline{GC}$ e $\overline{BF} = 3\overline{GF}$. Portanto, dividimos os segmentos AC e BF em três partes iguais. Consequentemente, também os lados BC e CD .

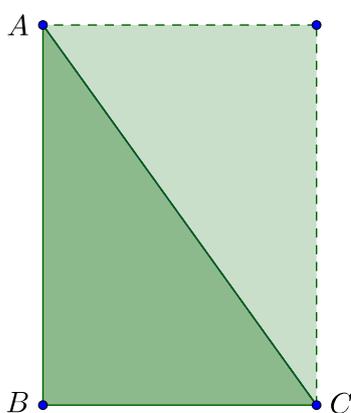
Conteúdos envolvidos: Simetria e seus eixos, Congruência de segmentos, Congruência de ângulos, Congruência de triângulos, Paralelismo, Propriedades do retângulo.

Resultados esperados: Espera-se que o aluno perceba que a cada vez que a folha é dobrada, é criado um eixo, que pode ser ou não de simetria de alguns elementos. Também, que o aluno perceba que simetria preserva distâncias, ou seja, a medida dos segmentos. Ainda, é importante que o aluno entenda a justificativa do porquê o processo é válido, relacionando semelhança de triângulos e proporção entre os seus lados, aliado ao desenvolvimento algébrico das expressões obtidas. Por fim, é importante fazer as dobraduras com boa precisão (por isso o uso da régua) para evitar erros grosseiros ao final, o que poderia gerar dúvidas da funcionalidade do processo.

Atividade 3. Dado um triângulo retângulo, inscrever nele um retângulo com os lados paralelos aos lados do triângulo de forma que esse retângulo tenha área máxima. Resolver este problema utilizando dobraduras.

Solução: Tomamos um folha de papel retangular, A4 por exemplo. Traçamos uma das diagonais para obtermos um triângulo retângulo e recortamos nessa linha para facilitar os passos seguintes. Vamos denominar os vértices desse triângulo por A , B e C , como ilustra a Figura 114.

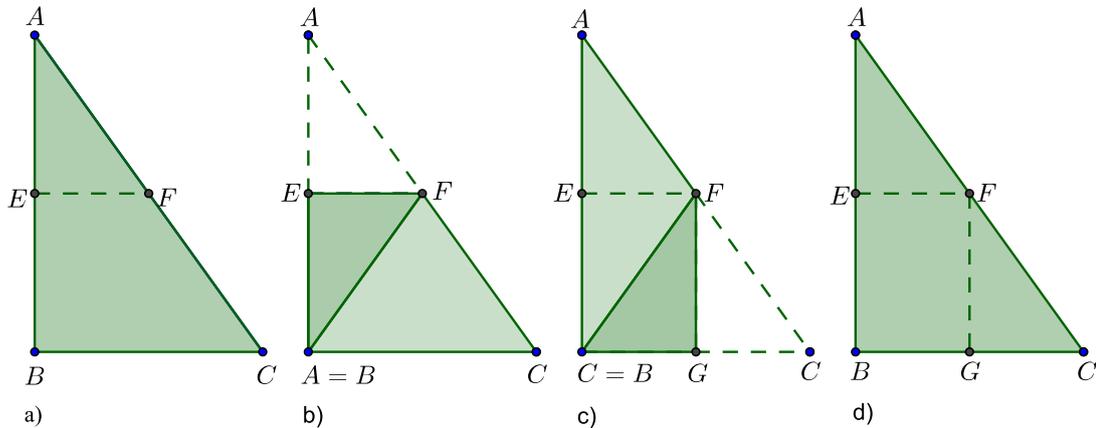
Figura 114: Atividade 3.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Dobramos a folha de modo que o ponto A coincida com o ponto B , obtendo e eixo EF perpendicular ao lado AB , conforme ilustram a Figura 115 a) e a Figura 115 b). Desdobramos a folha e, agora, dobramos a folha de modo que o ponto C coincida com o ponto B , obtendo eixo FG perpendicular ao lado BC , conforme ilustra a Figura 115 c). Desdobramos a folha e vemos que os pontos obtidos formam um retângulo $BGFE$, conforme ilustra a Figura 115 d), de área máxima que soluciona o problema.

Figura 115: Atividade 3.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Justificativa: Denotamos as medidas dos lados do triângulo e do retângulo da seguinte forma: $\overline{BA} = b$, $\overline{BC} = a$, $\overline{EF} = y$ e $\overline{FG} = x$. Notemos que os triângulos ABC e AEF são semelhantes (AAA). Disto temos que

$$\frac{b}{b-x} = \frac{a}{y}$$

$$b \cdot y = a \cdot b - a \cdot x$$

$$y = a - \frac{a}{b}x \quad (I)$$

A área do retângulo é dada por:

$$Area = x \cdot y \quad (II)$$

substituindo (I) em (II):

$$Area = x \cdot \left(a - \frac{a}{b}x\right)$$

$$Area = -\frac{a}{b}x^2 + a \cdot x$$

Para uma equação do segundo grau, o valor de x para que a área seja máxima é:

$$x = -\frac{a}{2\left(-\frac{a}{b}\right)} = -a \cdot \frac{-b}{2a} = \frac{b}{2}$$

ou seja, a área máxima do retângulo ocorre quando o ponto E é ponto médio do segmento AB .

Agora vamos verificar para y . De (I), temos:

$$y = a - \frac{a}{b}x$$

$$y = a - \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{2}$$

$$y = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

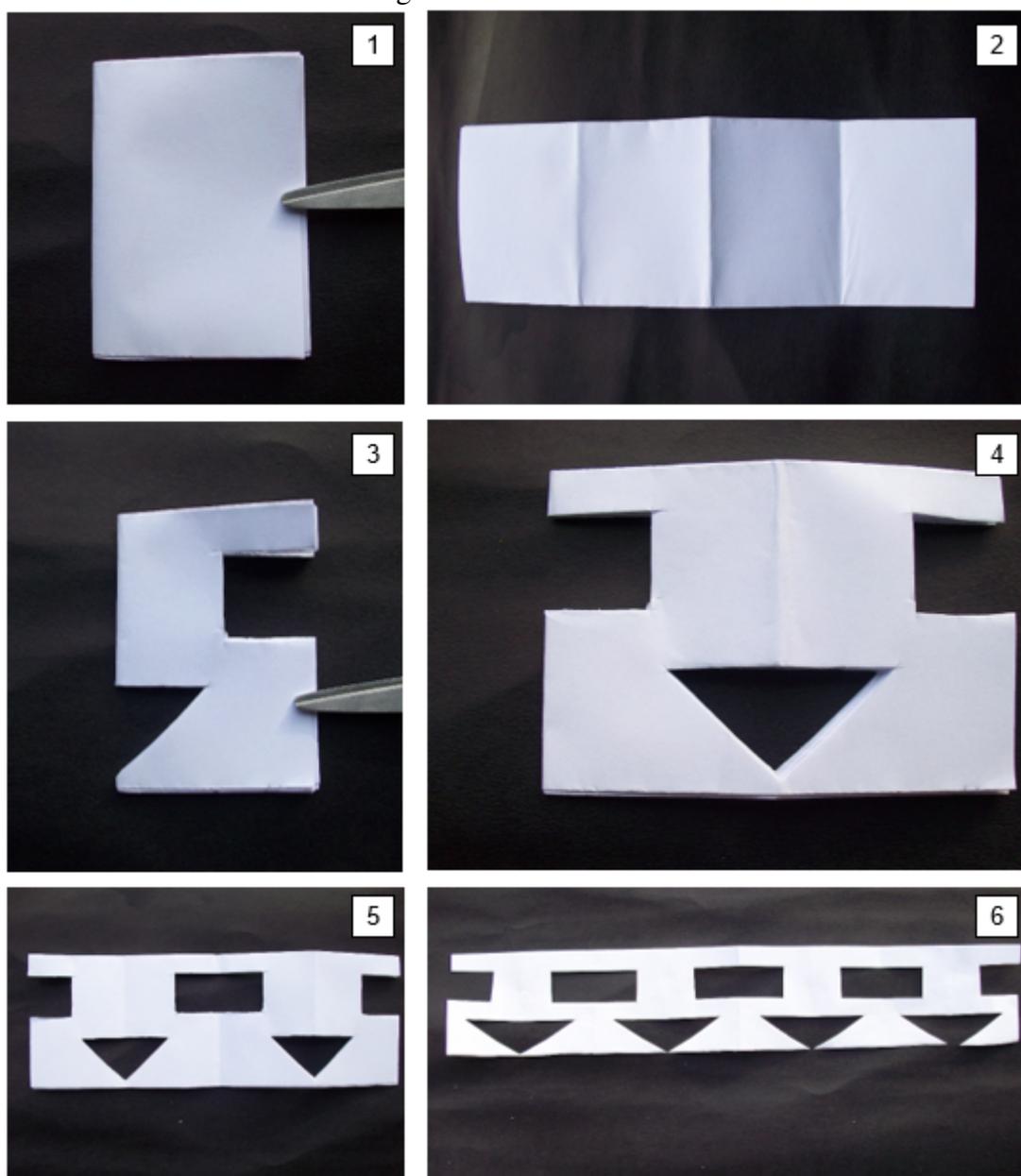
ou seja, a área máxima do retângulo ocorre quando o ponto G é ponto médio do segmento BC .

Conteúdos envolvidos: Simetria e seus eixos, Ponto médio, Congruência de segmentos, Congruência de ângulos, Congruência de triângulos, Paralelismo, Propriedades do retângulo, Cálculo da área do retângulo, Função do segundo grau, Ponto de máximo, Resolução de sistemas pelo método da substituição

Resultados esperados: Espera-se que o aluno perceba que quando a folha é dobrada, obtemos um eixo que contém o ponto médio do segmento. Esse eixo é perpendicular ao segmento, o que garante que a figura $BGFE$ é um retângulo. Ainda, é importante que o aluno consiga relacionar corretamente as ideias e informações, como a semelhança entre os triângulos, a fórmula da área do retângulo, a função do segundo grau e como obter seu ponto de máximo bem como o desenvolvimento algébrico dessas. Pode-se, em vez de medidas genéricas, utilizar medidas numéricas das dimensões da folha para facilitar os cálculos pelos alunos.

Atividade 4. Replicado Figuras. Vamos agora executar várias atividades de replicar figuras através de dobradura e recorte. Vamos precisar de uma tira de papel, que pode ser de folhas A4. Dobramos a tira ao meio e depois ao meio novamente. Ao final de duas dobraduras temos 4 faces. Recortamos um quadrado de um lado e um triângulo retângulo isósceles do outro. Depois de recortada, abrimos a tira para ver as figuras obtidas, conforme ilustra a Figura 116.

Figura 116: Atividade 4.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Conteúdos envolvidos: Ângulos raso, reto e de 45° , Simetria, Paralelismo, Propriedades de figuras planas, função exponencial, já que a cada dobradura, dobra o número de faces da tira de papel.

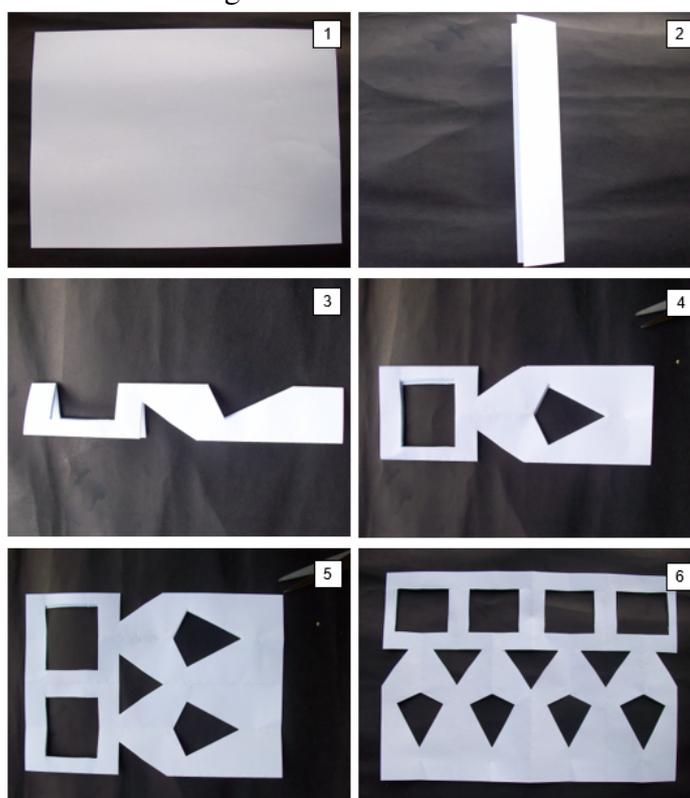
Resultados esperados: Espera-se que o aluno perceba quais são os eixos de simetria e relacione-os com os eixos das dobraduras e que estes, nesse caso, são paralelos. Ainda, que o quadrado por ele recortado, quando refletido pelo eixo de simetria, se transforma num retângulo e o triângulo retângulo isósceles continuou a ser retângulo isósceles, mas com alterações, pois antes tínhamos um ângulo de 45° , que ao ser refletido somou 90° . Pode-se fazer variações nos recortes, outras figuras, variar o número de dobraduras, variar o ângulo entre o corte e o eixo de dobradura. Vale lembrar que é importante não recortar totalmente os eixos de dobradura pois as faces se desprendem umas das outras.

Atividade 5: Replicando Figuras. Vamos precisar de uma folha de papel A4. Acompanhe a Figura 117. Dobramos-a ao meio no sentido do comprimento e ao meio novamente, obtendo 4 faces. Agora recortamos algumas figuras, de forma semelhante a atividade anterior e uma figura na qual nenhum lado forma ângulo reto com o eixo de dobradura. Após a folha recortada ser aberta aumentou o número de lados dessa figura.

Resultados esperados: Espera-se que o aluno identifique qual a figura que sofreu modificações no número de lados e entender o porquê. É importante para isso que na mesma atividade exista uma figura pelo menos que não sofre aumento e uma que sofre aumento no número de lados para que o aluno veja a diferença. Também pode ser explorado o conceito de bissetriz de um ângulo, já que o eixo de simetria também é a bissetriz do ângulo. Pode-se ainda como outra atividade, dobrar a folha de papel nos dois sentidos, explorando a simetria das figuras, a quantidade de faces obtidas, entre outras.

Conteúdos envolvidos: Ângulo reto, Simetria, Propriedades de figuras planas, Bissetriz de um ângulo.

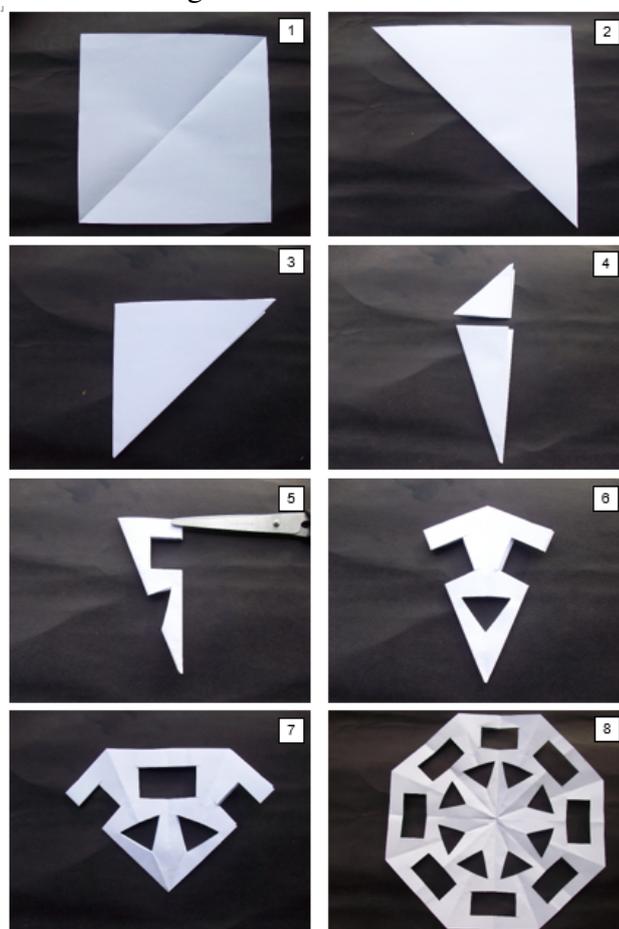
Figura 117: Atividade 5.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Atividade 6: Replicando Figuras: Simetria Radial. Já sabemos como obter um quadrado na folha de papel com dobradura. Agora vamos utilizá-lo nesse atividade. Dispondo então da folha quadrangular, dobramos-a ao meio, e agora no outro sentido dobramos-a ao meio de forma que os eixos de dobraduras se cruzem formando ângulo reto. Novamente, dobramos-a de forma a obtermos um ponto central e assim sucessivamente até obter 8 faces radiais. Podemos eliminar o "excesso" do papel. Agora recortamos figuras no papel dobrado, que nesse caso foram um quadrado e um triângulo, conforme ilustra a Figura 118.

Figura 118: Atividade 6.



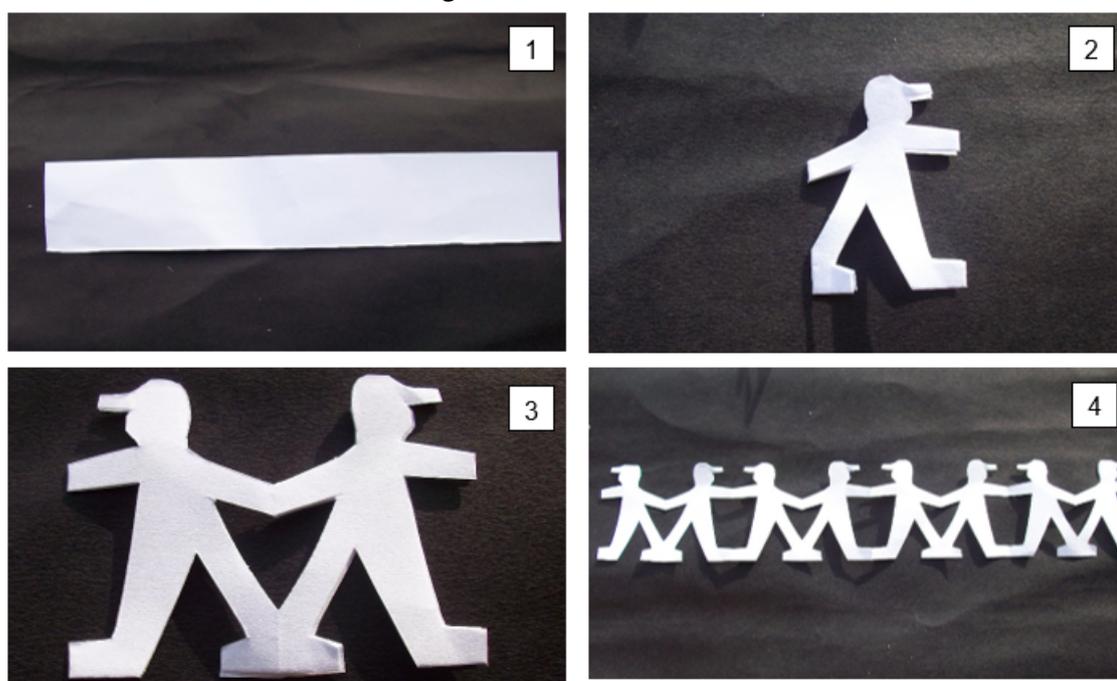
Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Resultados esperados: Espera-se que o aluno perceba, ao abrir o papel depois de recortado, que a Figura possui um ponto central onde todos os eixos de simetria se encontram. Também pode perceber que alguns resultados obtidos nas atividades anteriores também são válidos aqui.

Conteúdos envolvidos: Ângulos, Simetria radial, propriedades de figuras planas.

Atividade 7: Replicando Figuras: Verificando a simetria da simetria. Essa atividade é muito semelhante a atividade 2, com o diferencial de que agora vamos trabalhar com a figura, sua reflexão e a reflexão da reflexão. Para isso vamos utilizar uma tira de papel dobrada ao meio e ao meio novamente, totalizando 4 faces. Após, podemos recortá-la no formato de um boneco, uma pessoa, um animal, ou algo assim. Devemos nessa figura deixar bem diferente um lado do outro, conforme ilustra a Figura 119, onde foi recortado um boneco vestindo um boné bem como a posição dos seus pés. Isso é importante para que possamos verificar o que acontece quando essa figura for refletida.

Figura 119: Atividade 7.



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Resultados esperados: Espera-se que o aluno perceba, ao abrir a tira de papel depois de recortado, que o boneco foi refletido, como se tivesse sido espelhado. Por isso da importância de ele ter lados diferentes para facilitar essa percepção. Também é importante que ele veja que a reflexão dessa reflexão é igual ao recorte original. Ainda, que as figuras de ordem par são sempre iguais entre e as de ordem ímpar são sempre iguais entre si. Isso pode ser explorado com outros objetos, com a folha de papel inteira dobrada nos dois sentidos, entre outras formas.

Conteúdos envolvidos: Simetria, Reflexão, Paridade.

Atividade 7: Homotetia. Nessa atividade o objetivo é reproduzir uma versão simplificada de um retroprojektor de lâminas, relacionando com o tema homotetia e observando a relação entre as medidas das figuras original e projetada.

Materiais: Vamos precisar de uma caixa de papelão (caixa de sapato, por exemplo), que servirá de base da construção; uma fonte de luz, que pode ser a lanterna de um telefone celular; uma lâmina transparente, que pode ser a lateral planificada de uma garrafa PET de cor transparente, dois prendedores de roupa e canetas específicas (pode ser marcador permanente) para escrever nessa lâmina.

Metodologia: Cortar uma lâmina da garrafa PET, cuja medida da altura coincida aproximadamente com a altura da caixa e a largura seja a largura da caixa mais uns 4cm , para fazer uma borda de cada lado para prender a lâmina na parede da caixa com o prendedor. Nessa lâmina pode-se fazer figuras quaisquer, tanto geométricas quanto figuras livres.

O passo seguinte é fazer um orifício na parede frontal da caixa, para colocar a fonte luz (lanterna), de forma que a lâmina fique perpendicular à fonte de luz.

Coloca-se, então, a lâmina desenhada na caixa, prendendo-a com os prendedores e liga-se a fonte de luz. Observa-se a imagem projetada. Compara-se o tamanho da figura original e a imagem projetada. Modifica-se a distância entre a lâmina e a fonte de luz e observa-se o que acontece. É possível, dependendo da figura, medir a figura original e a figura projetada, comparando-as. Pode-se também, em vez de utilizar a caixa de papelão, utilizar um ambiente escuro e projetar a figura em uma parede. Dependendo da qualidade da fonte luminosa a imagem projetada pode ficar bem razoável, permitindo um maior variação entre a distância da figura original e o anteparo (parede).

Conteúdos envolvidos: Medidas, Projeção, Semelhança e Homotetia.

Resultados esperados: Espera-se que o aluno perceba a ideia de semelhança entre a figura original da lâmina e a figura projetada na parede da caixa, percebendo que todos os elementos mantêm a proporção nas medidas, podendo relacionar essa proporcionalidade com homotetia, identificando o centro de homotetia (fonte de luz). Também espera-se que, ao variar a distância entre a lâmina e a parede da caixa, o aluno perceba que a figura projetada tem seu tamanho modificado, mas que essa figura projetada sempre terá dimensões maiores que a figura

original da lâmina porque o fator de escala k , nesse caso, é maior que 1. A Figura 120 mostra mais detalhes dessa atividade.

Figura 120: Atividade com homotetia



Fonte: Marcelo Luiz Bertó.

Informações complementares: Apesar de trabalharmos geralmente com homotetia no plano, este caso é de homotetia no espaço, mas que segue mesma ideia. Pode-se perceber que quando aproximamos muito a lâmina da fonte de luz, ou seja, afastamos muito a lâmina do anteparo, a imagem projetada fica bem grande, mas, em contrapartida, vai perdendo nitidez. Isso se deve ao fato de a fonte de luz comum geralmente não emitir feixe de luz totalmente

paralelo. Nos retroprojetores comerciais, esse problema é solucionado com lentes e espelhos, onde o feixe luminoso é convertido em raios paralelos (ou muito próximo disso), e com isso pode-se projetar a uma distância maior, desde que se faça os ajustes de foco nas lentes.

7 Conclusão

Ao finalizar este trabalho, podemos perceber a importância que as transformações geométricas apresentam. Tanto na resolução de problemas aplicados ou não, quanto na resolução de problemas de construções geométricas, as isometrias e a homotetia se caracterizam por serem ferramentas muito úteis quando bem aplicadas. Muitas vezes elas não são utilizadas por serem pouco estudadas e suas aplicações pouco conhecidas. Além disso, as transformações geométricas têm relevante papel no ensino, uma vez que podem favorecer o entendimento e a compreensão da geometria.

Como vimos, a isometria preserva distâncias e, assim, está relacionada com congruência. Ela pode ser de reflexão, rotação ou translação. Pode-se perceber que a isometria da reflexão é bastante utilizada na resolução de diversos problemas quando se deseja obter o menor caminho entre dois pontos ou quando se busca uma solução para um problema físico no qual um elemento é refletido por um anteparo e os ângulos de incidência e reflexão são congruentes, como no caso da trajetória da bolinha na mesa de bilhar.

Na translação é importante observar que o paralelismo é mantido. Assim, no caso do problema do segmento a ser transladado até coincidir com dois lados do triângulo, mantêm-se os segmentos paralelos, além de congruentes. No caso da rotação em torno de um ponto, ela pode ser em ambos sentidos, horário e anti-horário. Como vimos no problema de construir triângulos equiláteros com vértices sobre três retas paralelas dadas, que essa rotação em ambos sentidos, deu origem a duas soluções distintas. Além disso, como foi rotacionada uma reta, todos os pontos da nova reta são imagem de algum ponto da reta original, percebendo-se assim a bijeção entre os pontos.

No caso da homotetia, por ser uma aplicação que preserva formas mas que permite a ampliação, redução e inversão, ela tem aplicação bastante ampla. Assim, ela está relacionada a semelhança de figuras. Pode-se utilizar homotetia em problemas variados onde se dispõe de algumas medidas e o fator de escala k e deseja-se se obter outras medidas. Mas a maior aplicação de homotetia parece ser em problemas de construções geométricas envolvendo tangência. No caso do problema de inscrever um quadrado num triângulo, a solução encontrada utilizando homotetia foi simples e fácil de justificar. Sem ela, acredita-se que seja bem mais complexa a

solução.

Durante o desenvolvimento desse trabalho, diversos problemas de construção geométrica pareciam, à primeira vista, difíceis de serem solucionados. Alguns problemas demandaram um tempo considerável no trabalho de busca de soluções. Muitos pareciam solucionados e lá no final percebiam-se erros. Nesse sentido o *software* GeoGebra foi de fundamental importância, uma vez que ele permite que movimentemos certos elementos, por exemplo, pontos e retas, possibilitando assim verificar se a "solução não desconfigura", ou seja, se ela não é válida apenas para aquele caso específico.

Nessa jornada de buscar soluções com o *software* GeoGebra, a confirmação da solução através do movimento desses elementos levou a perceber que esses elementos apresentavam trajetórias curiosas, por vezes retilíneas, por vezes curvilíneas e por vezes não identificadas. Foi então que percebemos que a ferramenta *RASTRO* do *software* GeoGebra poderia ser uma ferramenta importante na busca das soluções. Assim, podemos imaginar o problema parcialmente resolvido, utilizar a ferramenta rastro de algum elemento dependente, movimentar outros elementos construtivos, identificar a curva obtida e com isso conjecturar estratégias para a resolução do problema. Muitos problemas que tomaram muito tempo, já abandonados, foram solucionados em pouco tempo de forma clara com este raciocínio.

Como podemos perceber, as Construções Geométricas também podem ser utilizadas como ferramenta de ensino da Matemática uma vez que, buscando soluções, despertam-se a criatividade e o raciocínio lógico. A justificativa matemática, além de permitir maior familiaridade com demonstrações, constitui uma revisão geral de conteúdos dessa disciplina.

Como consequência deste trabalho sobre as transformações geométricas e suas aplicações na resolução de problemas geométricos com o *Software* GeoGebra, foi desenvolvido e disponibilizado um Livro Virtual na página eletrônica do GeoGebra ⁶, que apresenta as soluções dos 20 problemas resolvidos neste trabalho, de forma a permitir a interação com alguns elementos construtivos das soluções.

⁶Livro Virtual disponível em no endereço eletrônico: <https://www.geogebra.org/m/ryg5s2x3>

Referências

- [1] BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular (NBCC)**, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em 16/11/2020
- [2] _____. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)**, 1998. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/pcn/matematica.pdf>
- [3] BRITANICA, **The Editors of Encyclopaedia. "Felix Klein". Encyclopedia Britannica**. 18 June 2021, Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Felix-Klein>. Acessado em 22 de agosto de 2021.
- [4] _____. **The Editors of Encyclopaedia. "Klein bottle". Encyclopedia Britannica** 21 Oct. 2013. Disponível em: <https://www.britannica.com/science/Klein-bottle>. Acessado em 22 Agosto de 2021.
- [5] COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. **Geometry Revisited**. The Mathematical Association Of America. Vol 19. United States of America, 1967.
- [6] EVES, H. **Tópicos de História da matemática para uso em sala de aula: Geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. v3. São Paulo: Atual, 1992.
- [7] LIMA, E. L. **Isometrias**. Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática : SBM. 1996.
- [8] MUNIZ NETO, A. C. **Geometria: COLEÇÃO PROFMAT**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013
- [9] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de. **Geometria Euclidiana plana e construções geométricas**. 2ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.
- [10] S.B.M. **Revista do Professor de Matemática**. Nº 20. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, RJ: 1992.
- [11] _____. **Revista do Professor de Matemática**. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/61/8.html>. Acessado em 22/05/2021.

- [12] _____. **Revista do Professor de Matemática**. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/47/3.htm>. Acessado em 22/05/2021.
- [13] _____. **Revista do Professor de Matemática**. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/61/5.html>. Acessado em 22/05/2021.
- [14] SILVA, J. C. D. da, PIETROPAOLO, R. C. **Um Estudo sobre as Contribuições de Felix Klein para a Introdução das Transformações Geométricas nos Currículos Prescritos de Matemática do Ensino Fundamental**. Disponível em <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/886>. Acessado em 22/08/2021
- [15] WAGNER, E. **Construções Geométricas**. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: Gráfica Wagner. 1993.