



Universidade Federal do ABC

CLAUDIA PEREIRA CHAVES

**RIO TIETÊ: A RECUPERAÇÃO DO SEU PASSADO DE
GLÓRIA OU UM FUTURO INCERTO?**

Modelagem Matemática

Santo André, 2013.

Claudia Pereira Chaves

Rio Tietê: a recuperação do seu passado de glória ou um futuro incerto?

Dissertação apresentada ao curso PROFMAT da Universidade Federal do ABC, como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal do ABC

Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Santo André

2013

Agradecimentos

Primeiramente a DEUS por me conceder saúde e entusiasmo para desenvolver este trabalho.

Aos meus familiares pela compreensão da minha ausência e incentivo aos estudos. Ao Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi por compartilhar o seu vasto conhecimento e experiência bem como a sua dedicação e paciência na elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos de trabalho Juliana Jong, Alessandra Noeli, Jorge Aoki Costa, Fernando Oliveira, Eric Hajime e Richard Wagner Novickis que dedicaram parte de seus tempos no fornecimento de diversos materiais à execução deste trabalho.

Em especial a Rita de Cássia S. Escolano pelo incentivo na elaboração desta dissertação. A SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) pela inovação na criação do Profmat-Mestrado Profissional.

À Capes pelo apoio financeiro.

Sumário

Introdução	13
1 Rio Tietê	15
2 Modelagem matemática e alguns conceitos matemáticos	19
2.1 Modelagem Matemática	19
2.2 Proporcionalidade	20
2.3 Sequência	20
2.4 Recorrência	23
2.5 Variações	26
3 Modelagem matemática da poluição hídrica do rio Tietê na bacia do Alto Tietê	28
3.1 Poluição Industrial	29
3.2 Poluição Difusa Urbana	33
3.3 Poluição Doméstica	38
3.4 Sugestão de Atividade Didática em sala de aula	45
Conclusão	47
Referências Bibliográficas	49

Lista de ilustrações

Figura 1 – Rio Tietê: foto da autora.	15
Figura 2 – Mapa do rio Tietê. Fonte: DER.	16
Figura 3 – Bacia do Alto Tietê. Fonte: Sabesp.	16
Figura 4 – Mapa da bacia do Alto Tietê, escala 1:100000. Fonte: CEM/CEBRAP.	20
Figura 5 – Recorrência e Limite: número irracional	24
Figura 6 – Curva Tendência Poluição Industrial Rio Tietê	30
Figura 7 – Gráfico Curva de Estabilidade	31
Figura 8 – Curva Auxiliar	32
Figura 9 – Gráfico Curva Tendência Poluição Difusa	35
Figura 10 – Gráfico Curva de Tendência e Modelo Matemático Poluição Difusa	37
Figura 11 – Gráfico Curva de Tendência Poluição Doméstica	40
Figura 12 – Gráfico Cálculo x^*a	41
Figura 13 – Gráfico Curva Auxiliar	42
Figura 14 – Gráfico Curva Tendência Tratamento Esgoto	43
Figura 15 – Curva estabilidade no tratamento esgoto	44
Figura 16 – Gráfico Curva Auxiliar Tratamento Esgoto	44

Lista de tabelas

Tabela 1 – Carga Poluidora Industrial Orgânica e Inorgânica do Rio Tietê	29
Tabela 2 – Variáveis Carga Poluidora Industrial Orgânica e Inorgânica do Rio Tietê	30
Tabela 3 – Sequência (x_n, x_{n+1}) , com x_n : carga poluidora industrial Rio Tietê	31
Tabela 4 – Sequência $(n, x_n - x^*)$ e com x^* ponto estabilidade	32
Tabela 5 – Dados do Modelo de Poluição Industrial do Rio Tietê (Bacia Alto Tietê)	33
Tabela 6 – Volume de resíduo sólido das Usinas Traição e Pedreira. Fonte: EMAE	34
Tabela 7 – Volume utilizando potência de dez resíduo sólido Usinas Traição e Pedreira	34
Tabela 8 – Variáveis n e valores função tendência volume utilizando potência de dez resíduo sólido Usinas Traição e Pedreira	35
Tabela 9 – Valores variáveis n e y com acréscimo 2 unidades	36
Tabela 10 – Variáveis $n; x_n$, valores função tendência com acréscimo 2 e modelo	37
Tabela 11 – Relatório Saneamento Básico 2011 Alto Tietê. Fonte: CETESB	39
Tabela 12 – Relatório Saneamento Básico 2011 Alto Tietê. Fonte: CETESB	39
Tabela 13 – Variáveis n e x_n	40
Tabela 14 – Sequência (x_n, x_{n+1}) DBO doméstica.	41
Tabela 15 – Sequência n por $x^* - x_n$ DBO doméstica.	42
Tabela 16 – Modelos DBO doméstica.	42
Tabela 17 – Tratamento esgoto doméstico.	43
Tabela 18 – sequência (x_n, x_{n+1}) tratamento esgoto.	43
Tabela 19 – Sequência (x_n, x_{n+1}) tratamento esgoto.	44
Tabela 20 – Modelo de Tratamento de Esgoto.	45

Lista de abreviaturas e siglas

Cebrap	Centro Brasileiro de Análise e Planejamento
CETESB	Companhia de Saneamento Ambiental do Estado de São Paulo
CEM	Centro de Estudos da Metrópole
DER	Departamento de Estrada e Rodagem
DBO	Demanda Bioquímica de Oxigênio
EMAE	Empresa Metropolitana de Água e Energia S.A
EMPLASA	Empresa Paulista de Planejamento S.A
ETE	Estação de Tratamento de Esgoto
IMPA	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
IPEN	Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares
PCN +	Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PMSP	Prefeitura do Município de São Paulo
SABESP	Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo
SEMT	Secretaria de Educação Média e Tecnológica
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
UFABC	Universidade Federal do ABC
UFMA	Universidade Federal do Maranhão
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFSCAR	Universidade Federal de São Carlos
USP	Universidade de São Paulo

"...e o Tietê deu a São Paulo quanto possuía: o ouro das areias, a força das águas, a fertilidade das terras, a madeira das matas, os mitos do sertão. Despiu-se de todo encanto e de todo mistério; despoetizou-se e empobreceu por São Paulo e pelo Brasil."

Alcântara Machado

Resumo

Esta dissertação visa utilizar a Modelagem Matemática como um recurso de ensino-aprendizagem no Ensino Médio para o estudo da da problemática de recuperação do Rio Tietê e seus afluentes (Projeto Tietê) na região do Alto Tietê. O estudo consiste na modelagem matemática com a utilização de proporcionalidade , noções de limite, recorrência e método Ford-Walford para estabilidade em três tipos de poluição hídrica no Alto Tietê: industrial, doméstica e difusa urbana.

Palavras-chaves: Modelagem Matemática, Rio Tietê, Alto Tietê, ensino-aprendizagem no Ensino Médio.

Abstract

This thesis aims to use mathematical modeling as a resource to teaching and learning in high school for the study of dynamics and the problem of recovering the Tiete River and its affluents (Tiete Project) in the Upper Tiete. The study consisted of mathematical modeling with the use of proportionality, notions of limit, recurrence e and Ford-Walford method on three types of water pollution in the Upper Tiete: industrial, domestic and diffuse.

Keywords:Mathematical Modeling, Tiete River, Upper Tiete, teaching and learning in high school.

Introdução

Dentre os diversos papéis das instituições de ensino, o estudo e as soluções de problemas que afligem a sociedade contemporânea tanto na esfera global quanto na particular se fazem necessários, para aprendermos a regular nossas ações na busca e na obtenção de qualidade de vida. Os problemas ambientais relacionados à escassez, ao saneamento, à distribuição e ao uso de água sugerem uma necessidade de conscientização profunda de nossa sociedade para enfrentá-los.

Dentre as diversas fontes de poluição hídrica, destacam-se as cargas pontuais de origem industrial e doméstica e as cargas difusas de origem urbana e agrícola.

A bacia do Alto Tietê apresenta grande preocupação na poluição hídrica. Esta bacia abriga o maior contingente populacional e o maior polo de geração de renda e emprego do Brasil, sendo então uma região de conflitos pelo uso da água. É também lamentável que pelo desprovimento de conhecimento muitas pessoas encarem alguns elementos da natureza com desprezo. Na capital de São Paulo, por exemplo, o Rio Tietê é visto por muitas pessoas como um invasor do espaço. Já houve até projeto com a intenção de “envelopá-lo”, isto é, escondê-lo com concreto como foi feito com o rio Anhangabaú entre tantos outros.

Este cenário complexo possibilita a aprendizagem da Matemática conforme destacam os PCNEM(2002) e PCN+(2002) que recomendam o estudo da modelagem matemática em diversas áreas do conhecimento(interdisciplinaridade), construção de gráficos a partir de dados de uma tabela, proporcionalidade ,compreensão e comportamento de funções etc.

Ademais, há a necessidade ainda que de modo intuitivo a introdução no Ensino Básico do estudo de limite e do Método de Ford-Walford para estabilidade (PAULY,1984).

O desenvolvimento deste trabalho consiste no estudo da poluição industrial e doméstica do rio Tietê e seus afluentes inseridos na bacia do alto Tietê relacionando-as com o Projeto Tietê e da poluição difusa urbana influenciada pelo Programa Córrego Limpo.

A modelagem matemática da poluição doméstica e poluição industrial mediante ao Projeto Tietê fornece o modelo de função exponencial, enquanto a modelagem matemática da poluição difusa apresenta a aplicação da função trigonométrica e exponencial. Os dados de poluentes de origem industrial e doméstica do rio Tietê e seus afluentes foram obtidos a partir de relatórios da CETESB enquanto os dados da poluição de carga difusa urbana são provenientes de relatórios da EMAE.

A utilização da modelagem matemática nas questões da poluição do rio Tietê pode motivar o estudante ao aprendizado de algumas ferramentas matemáticas bem como à efetivação dos propósitos presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais (SEMT-PCN+,2002)

que destaca a formação do aluno crítico, reflexivo, capaz de resolver problemas reforçando que o ensino de Matemática deve estar a favor da cidadania.

Este trabalho também prima pelo processo de transposição didática interna do professor fazendo com que este possua um recurso complementar à elaboração de suas aulas.

1 Rio Tietê



Figura 1 – Rio Tietê: foto da autora.

O antigo nome do rio Tietê era Anhembi. Segundo (MELLO,1975), Anhembi é corruptela de i-em-bi, vocábulo referente a “não liso, altos e baixos, obstáculos” indicando um rio de leito acidentado com cachoeiras, corredeiras e gargantas.

Durante muitos anos, o rio também ficou conhecido como Rio Grande do Anhembi, o que levou ao surgimento do nome Tietê que quer dizer “grande rio”, onde ti significa água, e etê exprime o superlativo grande. Com o decorrer do tempo, a expressão Tietê passou a predominar.

O Rio Tietê é considerado o elemento central das mais importantes transformações ocorridas no Estado de São Paulo. Nasce limpo em Salesópolis, São Paulo, a 22 quilômetros do Oceano Atlântico. Ao contrário da maioria dos rios, o Rio Tietê com extensão de aproximadamente 1100 quilômetros nasce nas proximidades do mar, e corre para o interior de São Paulo.

O rio Tietê tem sofrido com a poluição na Bacia Alto Tietê, que é destaque devido a sua intensa industrialização e urbanização que contribuem para uma carga de poluentes acima de sua capacidade de assimilação. A Bacia Alto Tietê abrange parte superior do rio Tietê,



Figura 2 – Mapa do rio Tietê. Fonte: DER.

desde a sua cabeceira até a barragem do Reservatório de Pirapora, numa extensão de 133 km compreendendo 34 municípios: Arujá, Barueri, Biritiba-Mirim, Caieiras, Cajamar, Carapicuíba, Cotia, Diadema, Embu; Embu-Guaçu, Ferraz de Vasconcelos, Francisco Morato, Franco da Rocha, Guarulhos, Itapeverica da Serra, Itapevi, Itaquaquetuba, Jandira, Mairiporã, Mauá, Mogi das Cruzes, Osasco, Pirapora do Bom Jesus, Poá, Ribeirão Pires, Rio Grande da Serra, Salesópolis, Santana de Parnaíba, Santo André, São Bernardo do Campo, São Caetano do Sul, São Paulo, Suzano e Taboão da Serra.



Figura 3 – Bacia do Alto Tietê. Fonte: Sabesp.

Inicialmente o rio Tietê contribuiu para a atividade mineradora nas expedições a Cuiabá

e, posteriormente para o desenvolvimento das indústrias e expansão do comércio na cidade de São Paulo, levando a necessidade do incremento de energia elétrica. Diante deste quadro, a empresa canadense Light recebeu a concessão pioneira em 1899 para utilizar as águas dos rios Tietê e Pinheiros (afluente do rio Tietê) para a produção e distribuição de energia elétrica. Ainda que, no início do século XX, o patrono da engenharia sanitária nacional Francisco Rodrigues Saturnino de Brito tivesse apresentado relatório indicando os rios Tietê e Guarapiranga como futuros mananciais destinados ao abastecimento público, bem como a regularização de enchentes e a navegação, assim como nos rios europeus, Sena, Tâmis, Danúbio e outros, a concessionária Light optou apenas pela geração de energia elétrica, represando o rio Guarapiranga, afluente do rio Pinheiros e apresentando o Projeto Serra. Este projeto propiciou a construção das represas de Billings e Rio das Pedras, e a instalação da Usina Henry Borden I, em Cubatão. Posteriormente, houve a construção das Usinas Elevatórias de Traição e Pedreira, ambas localizadas no Rio Pinheiros na capital de São Paulo, que viabilizaram o aumento de produção de energia elétrica, bem como o controle das enchentes através do bombeamento das águas do Rio Tietê para a Represa de Billings.

A Bacia do Alto Tietê tem sido visto por todo o Brasil como uma referência para o gerenciamento dos recursos hídricos, bem como uma fonte de experiência na adoção de soluções que venham resolver esses conflitos relacionados ao gerenciamento de água. Uma das principais iniciativas que abrange os aspectos citados acima, e que pode ser empregada em outras regiões do Brasil é o Projeto Tietê .

O Projeto Tietê tem como meta a ampliação da coleta de esgoto doméstico e industrial da Região Metropolitana de São Paulo, de forma a reduzir o lançamento de poluentes nos rios e córregos e melhorar de forma gradativa a qualidade da água do Rio Tietê ,seus afluentes e Represa Billings. A questão relativa à despoluição dos efluentes de origem industrial está inserida dentro desse projeto e é uma atribuição da CETESB.

Durante a primeira etapa (Fase I -1992 a 1998) do Projeto Tietê, a CETESB ficou responsável pelo levantamento das principais indústrias poluidoras da capital. Além disso, houve a construção de três Estações de tratamento de Esgoto (ETE), São Miguel, Parque Novo Mundo e ABC e ampliação da ETE Barueri.

Para o desenvolvimento da Fase II (2000 a 2008), as atividades da CETESB foram direcionadas à consolidação dos resultados já obtidos na Fase I com a inclusão de novas indústrias que, mesmo não possuindo o mesmo potencial poluidor daquelas selecionadas na Fase I, deveriam ter seus lançamentos enquadrados nos padrões da legislação.

As empresas cujos efluentes passaram a atender aos padrões legais de emissão permaneceram sob controle da CETESB, e com a implementação do Plano Diretor de Esgoto pela SABESP, as indústrias localizadas em áreas que drenam para o sistema público de esgotos foram acionadas para efetuar seus descartes na sua rede de esgoto. A entrada em operação dos sistemas públicos de tratamento de esgoto produziu uma maior redução nas cargas poluidoras

que afluem aos corpos d'água da Bacia do Alto Tietê.

Nessa fase também foram investidos recursos no Rio Pinheiros, no entorno da represa Billings, para a execução de redes coletoras, de coletores-troncos e interceptores para o encaminhamento de esgoto à ETE de Barueri. A terceira fase terá vigência até 2015 tendo como objetivo o aumento do índice de coleta e tratamento de esgoto na capital São Paulo e 33 municípios da região do Alto Tietê.

Através do decreto federal 15969 de 04/07/58 houve a autorização para a captação da água da Represa Billings para o abastecimento público. Com o crescimento da cidade de São Paulo e a ausência de coleta e tratamento de esgoto, intensificou-se a poluição do Rio Tietê, seus afluentes e da Represa Billings. No ano de 1989 houve a inserção do artigo 46 das Disposições Transitórias na Constituição do Estado de São Paulo de 1989. Tal artigo proibia, a partir de 1992, o bombeamento de águas poluídas dos rios Tietê e Pinheiros para o reservatório Billings, restringindo a operação da Usina Henry Borden para menos de 15% de sua capacidade.

2 Modelagem matemática e alguns conceitos matemáticos

2.1 Modelagem Matemática

Várias circunstâncias do mundo real podem apresentar situações-problemas que requeiram soluções e decisões. Tais problemas podem ser abordados com a utilização de conceitos matemáticos do currículo regular do Ensino Básico bem como conceitos não pertencentes a aquele currículo, mas que podem ser abordados no Ensino Médio de modo intuitivo. A interação entre a Matemática e o mundo real pode ser feita através da modelagem matemática. Esta é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Mesmo que o termo “modelo” tenha a sua origem do latim *modellum*, do diminutivo *modus*, que significa ‘medidas em geral’, parece ser mais viável a caracterização apresentada no dicionário de (CUNHA,1989) como “representação de alguma coisa”. Podemos dizer que modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática que tem por finalidade a descrição ou explicação do comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este sistema. Os procedimentos para a elaboração de um modelo matemático são:

1. Interação com o tema que se pretende estudar a partir da pesquisa por meio de experiência em campo, livros, revistas especializadas, sites de instituições especializadas no assunto pretendido entre outros;
2. Matematização, que consiste na utilização da linguagem matemática para a descrição da situação problema;
3. Modelo matemático é a etapa da obtenção do modelo com a verificação do nível que ele se aproxima da situação – o problema apresentado. Caso o modelo não atenda às necessidades que o geraram, teremos que retornar à matematização;
4. Validação consiste no processo de aceitação ou não do modelo proposto. Caso o modelo proposto seja refutado,então é apresentado a etapa de modificação;
5. Modificação nesta etapa há a necessidade de revisão das etapas anteriores à identificação de elementos que devem ser mudados à melhora do modelo.

Nas seções a seguir há a apresentação de alguns conceitos matemáticos aplicados no desenvolvimento deste trabalho.

2.2 Proporcionalidade

Muitas situações problemas existentes em nossa sociedade estão relacionadas ao conceito de proporcionalidade. O estudante deve identificar a natureza da variação entre duas grandezas x e y , verificando a existência da proporcionalidade. Na elaboração de mapas, por exemplo, observa-se a presença da proporcionalidade quando utiliza-se a escala que correlaciona a unidade de distância do mapa à distância real. Na escala 1:1000000 (lê-se um por um milhão) com denominador 1000000 significa que 1 cm equivale a 1000000 cm, ou seja, 10000m ou 10km.

Para cada tipo de estudo há a necessidade da escolha de escala maior ou escala pequena.

As escalas maiores são aquelas que permitem o maior detalhamento dos elementos estudados e por isso o seu denominador é menor. Já as escalas menores são utilizadas na elaboração de mapas com superfície muito extensa possuem denominador maior.

A escala 1:500 cujo denominador é 500 é maior que a escala 1:50000 cujo denominador é 50000.

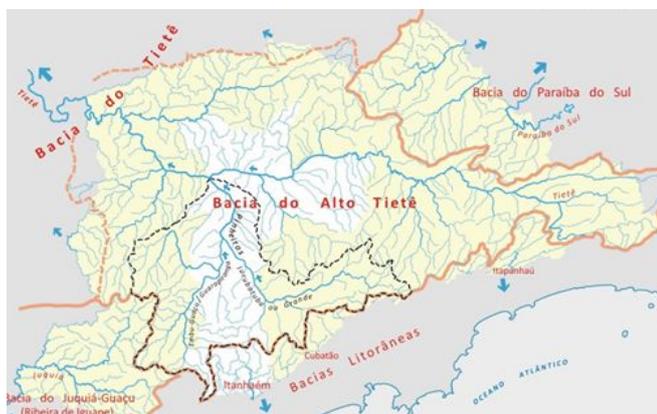


Figura 4 – Mapa da bacia do Alto Tietê, escala 1:100000. Fonte: CEM/CEBRAP.

2.3 Sequência

Definição 2.3.1. Uma sequência infinita de números reais é uma função $x : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$. O primeiro termo da sequência é x_1 , uma vez que foi escolhido \mathbb{N}^* . Deste modo, temos $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$.

As sequências mais frequentes no Ensino Médio são as progressões aritmética e geométrica.

À compreensão do método utilizado durante a modelagem matemática deste trabalho, é necessário avaliar, ainda que , de modo intuitivo o que ocorre com o termo x_n de uma sequência quando o valor de n é muito grande, ou seja, infinito.

Exemplo 1. Considere a progressão geométrica x_n em que $x_n = \frac{1}{2^n}$, ou ainda, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$.

x_n aproxima-se de algum valor numérico quando n assume valor muito grande?

Neste exemplo, conclui-se de modo intuitivo que a sequência $x_n = \frac{1}{2^n}$ tenderá a zero para valores muito grandes de n . Este tipo de sequência é chamada de sequência convergente

Definição 2.3.2. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita convergente se existir $x_0 \in \mathbb{R}$ de maneira que $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon$

Ou ainda, dada uma sequência real x_n , diz-se que o número real x_0 é o limite de x_n . Simbolicamente, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

De modo intuitivo, uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente para um número real L quando seus termos aproximam-se de x_0 quando n cresce.

Exemplo 2. Considere a sequência $x_n = \frac{1}{n}$, dado $\varepsilon > 0$, a fim de que $|x_n - x_0| < \varepsilon$ tomamos $n > \frac{1}{\varepsilon}$ e fixando n_0 tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, temos $|x_n - 0| < \varepsilon$ para $n > n_0$.

Exemplo 3. A progressão aritmética x_n definida por $x_n = 2n$ representada por: $(2, 4, 6, \dots, 2n, \dots)$ não é convergente, ou seja, é divergente. Intuitivamente, para valores muito grandes de n , os termos de x_n não se aproximam de determinado valor real.

Definição 2.3.3. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada se existirem números reais a e b tais que $a \leq x \leq b$.

Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada inferiormente se existir um número real a tal que $x_n \geq a$. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente se existir um número real b tal que $x_n \leq b$.

Definição 2.3.4. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente se $x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots$

Definição 2.3.5. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente se $x_1 > \dots > x_n > x_{n+1} > \dots$

Definição 2.3.6. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-decrescente se $x_1 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$

Definição 2.3.7. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente se $x_1 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots$

Definição 2.3.8. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona se ela for crescente, decrescente, não-decrescente ou não-crescente.

Teorema 2.3.1. Toda sequência convergente é limitada.

Prova. Seja $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = t$ com $t \in \mathbb{R}$. Tome $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (t - 1, t + 1)$. Sejam u o menor e v o maior elemento do conjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, t - 1, t + 1\}$, segue que todos os termos x_n da sequência são pertencentes ao intervalo $[u; v]$. Logo tal sequência é limitada.

Teorema 2.3.2 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Prova. suponha que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência monótona não decrescente e limitada, ou seja $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq L$ para algum $L > 0$ (os demais casos são análogos), segue que L é uma cota superior para o conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Para todo $\varepsilon > 0$ temos $L - \varepsilon < L$ e, conseqüentemente $L - \varepsilon$ não é cota superior de X .

Portanto, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < x_n < L$. A partir da utilização da monotonicidade da sequência, se $n > n_0$, então $x_{n_0} \leq x_n \leq L < L + \varepsilon$.

Logo para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq L < L + \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - L| < \varepsilon$, como desejado.

Definição 2.3.9. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ com $(a, +\infty) \subset X$ (resp. $(-\infty, b) \subset X$) e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$), dizemos que a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f .

Exemplo 4. Seja $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$, temos: Para todo $\varepsilon > 0$, existe x_0 dependendo de ε tal que $x > n$, então $|f(x) - 3| = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3 - 3\right| = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |2^x| > \frac{1}{\varepsilon} = x_0$ Logo para todo $\varepsilon > 0$ tomando $x_0 = \log_2^{1/\varepsilon}$ de maneira que $|x > x_0|$, então $|f(x) - 3| < \varepsilon$. Portanto a reta $y = 3$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$

Um dos métodos usado neste trabalho é o Método de Ford-Walford para o cálculo do valor de estabilidade (PAULY,1984) que permite a obtenção do ponto de estabilidade de uma coleção de dados a partir de certas condições descritas a seguir sem que se conheça a função que descreva o comportamento dos dados de determinada situação problema. Suponha que se tenha a tabela de censo demográfico de uma determinada região do período de 1950 a 2010 de certa população. Existe um valor limite para o valor da população a medida que o tempo avança. Neste cenário podemos construir uma sequência e estimar o ponto de estabilidade desta população com a aplicação do Método Ford-Walford para cálculo de valor de estabilidade, mencionado acima.

Este método (PAULY,1984) consiste em uma coleta de dados e, posteriormente, a obtenção do conjunto $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ e considerando a sequência $y_n = f(x_n)$ relacionada ao seu crescimento assintótico e sabendo antecipadamente que a sequência (y_n) converge quando x_n cresce. Isto ocorre se (y_n) for monótona e limitada pelas características

do fenômeno estudado. Nestas condições temos de determinar o valor limite y^* de modo que $y^* = \lim_{x_n \rightarrow \infty} y_n$.

O método Ford-Walford para estabilidade (PAULY,1984) consiste na determinação de uma função g que ajusta os pares (y_n, y_{n+1}) , ou seja, $y_{n+1} = g(y_n)$ que gera a curva ajustada. A seguir temos de encontrar o seu ponto fixo:

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} g(y_n) = \lim_{x_n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{x_n \rightarrow \infty} y^*$$

A partir do cálculo anterior concluímos que a sequência de pontos (y_n, y_{n+1}) converge para o ponto (y^*, y^*) se y^* é um ponto fixo de g : $y^* = g(y^*)$.

Logo y^* é tal que $y_{n+1} \approx y_n$.

Em resumo, y^* é o valor limite da sequência (y_n) quando

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n = y^* \\ y_{n+1} = g(y_n) \end{cases} \Leftrightarrow y_n = g(y_n) \Leftrightarrow y_n \text{ é um ponto fixo de } g$$

Agora, considerando o conjunto de pares ordenados (x_n, x_{n+1}) e considerando que $f(x_n)$ se estabilize a medida que n cresce, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^*$$

Logo o conjunto de pares ordenados (x_n, x_{n+1}) converge para um ponto (x^*, x^*) , isto é, $x^* = f(x^*) \rightarrow x_{n+1} \approx x_n$.

Faça agora um ajuste linear $f(x) = ax + b$, onde a e b são coeficientes reais.

Como $x^* = f(x^*) = ax^* + b$, segue que $x^* = \frac{b}{1-a}$

A determinação dos coeficientes a e b se dá por um ajuste exponencial entre x_k e $x^* - x_k$ sendo k número natural. Deste modo, temos:

$$x^* - x = a \cdot e^{-bn}$$

2.4 Recorrência

A evolução de vários sistemas físicos, biológicos, químicos, sociais, econômicos e computacionais pode ser modelada com o tempo medido em intervalos regulares, com a utilização de variável discreta, isto é, por recorrência. Esta consiste na obtenção de uma regra cujo objetivo é o cálculo de qualquer termo em função dos termos antecessores imediatos. A seguir citemos alguns exemplos de recorrência

Exemplo 5. Progressão Aritmética (PA).

Uma progressão aritmética é um tipo especial de sequência recorrente, em que a relação entre dois termos consecutivos é dada por: $a_n = a_{n-1} + r$ com $n \geq 1$, ou seja, qualquer termo de uma Progressão Aritmética é obtido como sendo o valor do termo anterior somado de uma constante r denominada razão.

Exemplo 6. Progressão Geométrica (PG)

Uma progressão geométrica é um tipo especial de sequência recorrente, em que a relação entre dois termos consecutivos é dada por: $a_n = qa_{n-1}$, isto é, qualquer termo de uma PG é obtido multiplicando o valor do termo anterior por uma constante q denominada razão.

Exemplo 7. No Ensino Básico, as expressões decimais aproximadas de números irracionais são frequentemente apresentadas de modo direto, sem quaisquer justificativas teóricas. A abordagem de números irracionais não pode ser estudada somente a partir de argumentos algébricos, necessitando da ideia de convergência, tornando a sua formulação teórica de difícil compreensão. Ainda que haja este obstáculo podemos tratar o assunto de forma intuitiva para que os estudantes do Ensino Básico compreendam a localização de números irracionais na reta real.

Podemos também recorrer ao uso de recorrência e planilhas no estudo de alguns números irracionais quando se cria uma sequência de números reais que convergem para o número citado anteriormente.

Digitando, por exemplo, o número 3 na célula A1 de uma planilha eletrônica e, posteriormente $= (A1 + 3/A1)/2$ na célula A2 e arrastando a célula ao longo da coluna A, obtém-se uma sequência de números reais que tende a $\sqrt{3}$, conforme tabela a seguir:

	A2		f _x	=(A1+3/A1)/2		
	A	B	C	D	E	F
1	3					
2	2					
3	1,75					
4	1,73214285714286					
5	1,73205081001473					
6	1,73205080756888					
7	1,73205080756888					
8	1,73205080756888					
9	1,73205080756888					
10	1,73205080756888					
11						
12						

Figura 5 – Recorrência e Limite: número irracional

Os valores presentes na coluna A correspondem aos termos da sequência (x_n) de

números reais definida recursivamente $\forall n \geq 1$ por:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_{n+1} = \frac{x_n + 3/x_n}{2} \end{cases}$$

Como os valores da coluna tendem a se aproximar de $\sqrt{3}$, buscaremos justificativa matemática com o emprego de operações aritméticas com limite, caso o limite da sequência (x_n) definida em exista, teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 3/x_n}{2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 3/\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{2}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ temos $x = \frac{x + 3/x}{2}$ que é equivalente a $x^2 = 3$.

Utilizando o Princípio de Indução Finita teremos a garantia que ao começarmos com um termo inicial $x_1 > 0$, segue que todos os termos seguintes da sequência (x_n) serão todos positivos e, conseqüentemente $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$.

A demonstração da existência do limite é realizada, considerando a função real $f(x) = \frac{x + 3/x}{2}$. A análise dos sinais da derivada primeira de f nos informa que a função possui um mínimo absoluto no ponto $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, ou seja, $f(x) \geq \sqrt{3}$ para todo número real positivo x . Como $x_{n+1} = f(x_n)$ e como $x_n > 0$ para todo número natural n , então $x_{n+1} \geq \sqrt{3}$.

Para todo número natural n , tal que $n \geq 1$, isto é, $x_n \geq \sqrt{3}$ para todo número natural $n \geq 2$. Como $x_1 = 3 > \sqrt{3}$, segue que para todo número natural $n \geq 1$

De um modo geral, dado um número $\varepsilon > 0$, é possível encontrar um número. Portanto a sequência (x_n) é limitada inferiormente por $\sqrt{3}$.

$$\text{Além disso, } x_n \geq \sqrt{3} \Rightarrow x_n^2 \geq 3 \Rightarrow x_n > \frac{3}{x_n}$$

Logo $x_{n+1} = \frac{x_n + 3/x_n}{2} \leq \frac{x_n + x_n}{2} = x_n$ para todo número natural n tal que $n \geq 1$ e, conseqüentemente (x_n) é monótona decrescente e, portanto a sequência é limitada inferiormente e monótona decrescente garantindo a convergência da sequência e por conseguinte a existência do limite.

Exemplo 8. Modelo Discreto de Malthus

Considerando que

1. a proporção de indivíduos reprodutores permanece constante durante o crescimento da população;
2. as taxas de natalidade n e de mortalidade m sejam constantes., então estas hipóteses representam a realidade de uma população grande em que todos os fatores inibidores

ao seu crescimento estão ausentes. Isto é, a espécie em questão tem recursos ilimitados e não interage com competidores ou predadores. Admitindo que a taxa de crescimento específico de uma população $P(t)$ é constante e dada por $\alpha = n - m$, temos:

$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = \alpha$, ou seja, a variação da população é proporcional à própria população em cada período de tempo.

O modelo discreto (tempo discreto) de Malthus é dado por: $P(t+1) - P(t) = \alpha P(t)$. Considerando dada a população inicial $P(0) = P_0$, a solução da equação anterior é obtida por recorrência de:

$$\begin{cases} P_{t+1} = (1 + \alpha)P_t \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

O processo recursivo fornece:

$$\begin{aligned} P_1 &= (1 + \alpha)P_0 \\ P_2 &= (1 + \alpha)P_1 = (1 + \alpha)^2 P_0 \\ P_3 &= (1 + \alpha)P_2 = (1 + \alpha)^3 P_0 \\ &\vdots \\ P_t &= (1 + \alpha)P_{t-1} = (1 + \alpha)^t P_0 \end{aligned}$$

Sendo $P_t = (1 + \alpha)^t P_0$, temos:

$$(1 + \alpha)^y = \frac{P_i}{P_0} \Rightarrow \alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1$$

Por exemplo: de acordo com Censo do IBGE de 2000 e 2010, a população de Santo André era 648.443 e 673.914, respectivamente. Assim, a taxa de crescimento populacional deste município neste período é dada por: $\alpha = \sqrt[10]{\frac{673914}{648443}} - 1 = 0,4\%$.

2.5 Variações

Seja uma variável dependendo quantitativamente de outra variável independente x . Muitas vezes é possível a construção de um modelo matemático ou estudar esta dependência a partir de características variacionais destas variáveis.

Definição 2.5.1. Variação simples: consiste na diferença da variável dependente em dois estágios da variável independente.

Exemplo 9. Variação da Posição: ΔS . É a diferença da variável dependente da posição S em dois estágios da variável independente tempo t , isto é $\Delta S = S(t_2) - S(t_1)$

Definição 2.5.2. Variação Média (taxa de variação média): é a proporção entre as variações da variável dependente e da variável independente.

Exemplo 10. Velocidade escalar média ν_m . É a proporção entre a variação da variável posição dependente e da variável tempo independente t , ou seja, $\nu_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$

Definição 2.5.3. Variação Instantânea ou derivada de uma função definida no intervalo aberto contido no conjunto dos números reais em um ponto x_0 é dada por:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Exemplo 11. Velocidade instantânea ν . O valor observado em um velocímetro é a velocidade do veículo no instante da observação denominada velocidade instantânea, dada por: $\nu =$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

3 Modelagem matemática da poluição hídrica do rio Tietê na bacia do Alto Tietê

A poluição que atinge os corpos hídricos pode ser classificada em poluição por fontes pontuais e por fontes difusas. As cargas pontuais estão relacionadas a efluentes industriais, esgoto doméstico e pluvial, podem ser coletadas e o seu tratamento geralmente é feito através de estações de tratamento de esgotos e outros métodos usuais. Já as cargas difusas estão relacionadas ao escoamento de resíduos por ação das águas de chuvas, oriundas do ambiente rural (agrotóxicos, fertilizantes, entre outras) ou urbano (bitucas de cigarros, pó, lixo orgânico, graxas e óleos de freio de automóveis e outros compostos presentes nas vias, ruas e calçadas), cujas fontes não são possíveis de identificar. Além disso, as cargas poluidoras são classificadas em matéria orgânica e matéria inorgânica. A matéria orgânica é constituída principalmente por:

- Compostos de proteínas (40% a 60%);
- Carboidratos (25% a 50%);
- Gorduras e óleos (10%);
- Uréia, surfactantes, fenóis, pesticidas (típicos de despejos industriais), entre outras.

As proteínas são produtoras de nitrogênio e contém carbono, hidrogênio, nitrogênio, oxigênio, algumas vezes fósforo, enxofre e ferro. O gás sulfídrico (cheiro de ovo podre) é proveniente do enxofre fornecido pelas proteínas. Os carboidratos contém carbono, hidrogênio e oxigênio. Os principais exemplos são açúcares, amido, celulose e a fibra da madeira. A gordura refere-se a matéria graxa, óleos e substâncias semelhantes provenientes de manteigas e óleos vegetais em cozinhas e óleos minerais derivados do petróleo. A matéria inorgânica é formada principalmente por areia e em uma quantidade menor por metais, derivados cianetos e fluoretos, entre outras.

Definição 3.0.4 (DBO - Demanda Bioquímica de Oxigênio). A Demanda Bioquímica de Oxigênio consiste no consumo de oxigênio dissolvido em água por organismos, bactérias, por exemplo, para a realização do processo de respiração. A DBO é diretamente proporcional à concentração de matérias orgânica (esgotos domésticos) assimiláveis por bactérias aeróbias.

Os esgotos municipais (domésticos) possuem uma DBO da ordem de 200 miligramas por litro, isto é, para cada litro de esgoto lançado em um rio há o consumo de 200 mg de oxigênio .

Para efeito de comparação, toma-se o tempo como período de cinco dias e uma temperatura padrão de 20°C cuja notação é $DBO_{5,20}$. No caso de esgotos sanitários, é tradicional no Brasil a adoção de uma contribuição per capita de $DBO_{5,20}$ de 54g/hab.dia.

3.1 Poluição Industrial

Para o controle da poluição de origem industrial foi realizado um processo de seleção, a partir do cadastro de empreendimentos da CETESB e de informações cadastrais fornecidas pela SABESP e pela EMLASA, somando-se 40000 indústrias instaladas na Região Metropolitana de São Paulo em 1991. Deste universo de indústrias, a CETESB elencou 1250 indústrias responsáveis por 90% da carga inorgânica bem como carga orgânica (dejetos humanos e matéria vegetal) lançadas na Bacia Alto Tietê objetivando ajustá-las aos padrões estabelecidos no Regulamento da Lei n 997/76 aprovado pelo Decreto n 8468/76 para o lançamento de seus efluentes líquidos na rede pública de esgotos. A partir de pesquisa no acervo da biblioteca da CETESB, obteve-se tabela a seguir. A carga total consiste na soma das cargas inorgânica e orgânica. Todas as cargas estão expressas em 1000kgDBO/dia:

data	carga inorgânica	carga orgânica	carga total
dez/91	4746	369,2	5115,2
dez/92	4015	368,7	4383,7
dez/93	2784	311,7	3095,7
dez/94	1412	231,3	1643,3
dez/95	1152	138,6	1290,6
dez/96	1166	146,9	1312,9
dez/97	1103	156,3	1259,3
dez/98	1070	144,6	1214,6
jun/02	501	134,8	635,8
dez/02	501	84,7	585,7
jun/03	565	76,1	641,1
dez/03	574	52,5	626,5
jun/04	456	46,8	502,8
dez/04	445	47	492
jun/05	433	46,7	479,7
dez/05	437	42,4	479,4
jun/06	444	42,1	486,1
dez/06	440	42,5	482,5
jun/08	307	26,4	333,4

Tabela 1 – Carga Poluidora Industrial Orgânica e Inorgânica do Rio Tietê

A partir dos dados da Tabela 1 foi utilizada proporcionalidade direta para uma escolha conveniente de unidade da variável tempo n , ou seja, em semestre. Assim, n indica o tempo em semestre e x_n expressa a soma da matéria orgânica e inorgânica na unidade 1000kg DBO/dia.

N	X_n
0	5115,2
2	4383,7
4	3095,7
6	1643,3
8	1290,6
10	1312,9
12	1259,3
14	1214,6
21	635,8
22	585,7
23	641,1
24	626,5
25	502,8
26	492
27	479,7
28	479,4
29	486,1
30	482,5
33	333,4

Tabela 2 – Variáveis Carga Poluidora Industrial Orgânica e Inorgânica do Rio Tietê

A partir dos dados da Tabela 2 construímos a curva de tendência a seguir:

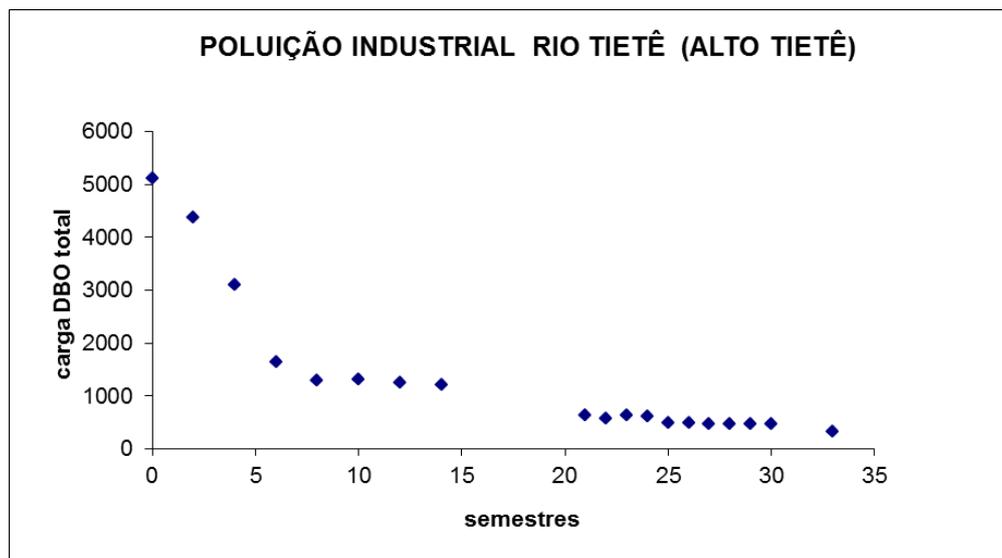


Figura 6 – Curva Tendência Poluição Industrial Rio Tietê

A partir da tabela e da curva de tendência citados acima, observamos que a carga DBO total tende a um ponto de estabilidade. Tal fato permite a aplicação Método Ford-Walford para estabilidade (PAULY,1984).

X_n	X_{n+1}
5115,2	4383,7
4383,7	3095,7
3095,7	1643,3
1643,3	1290,6
1290,6	1312,9
1312,9	1259,3
1259,3	1214,6
1214,6	635,8
635,8	585,7
585,7	641,1
641,1	626,5
626,5	502,8
502,8	492
492	479,7
479,7	479,4
479,4	486,1
486,1	482,5
482,5	333,4
333,4	

Tabela 3 – Sequência (x_n, x_{n+1}) , com x_n : carga poluidora industrial Rio Tietê

A partir da sequência da Tabela 3 faz-se a construção da curva de estabilidade à obtenção do ponto de estabilidade x^* .

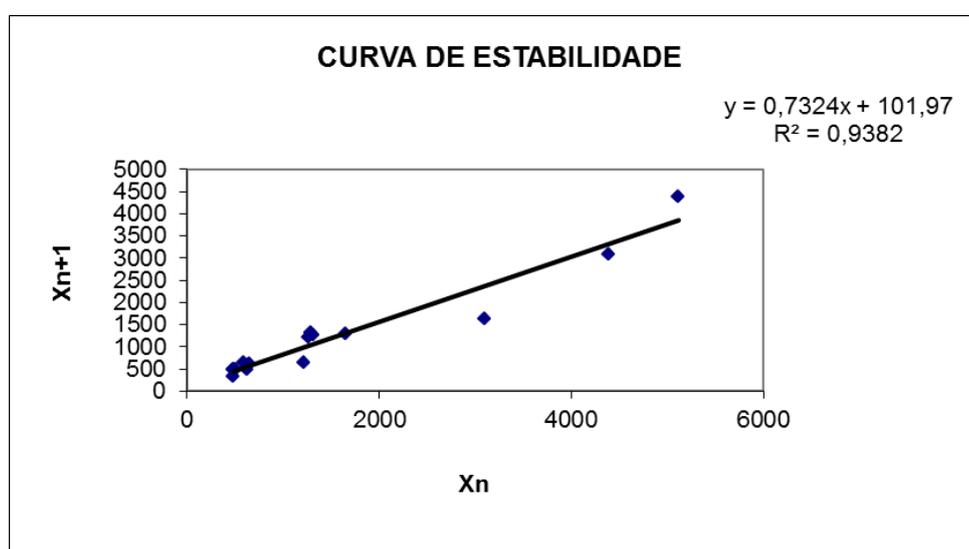


Figura 7 – Gráfico Curva de Estabilidade

A função $f(x) = 0,7324x + 101,97$ presente na curva de estabilidade é a que mais aproxima a disposição dos pontos no gráfico gerado pela curva tendência. Tomando a função identidade $g(x) = x$, o ponto de estabilidade x^* consiste no ponto de interseção das retas das funções f e g . À obtenção de x^* , fazemos: $x = 0,7324x + 101,97 \Leftrightarrow x = 381,05$. Logo o valor do ponto estabilidade é $x^* = 381,05$ (1000kg DBO/dia), ou seja, ponto de equilíbrio depoluição industrial do Rio Tietê no Alto Tietê.

A seguir, faz-se a tabela 5 com os dados da sequência $(n, x_n - x^*)$.

N	$x_n - x^*$
0	4734,15
2	4002,65
4	2714,65
6	1262,25
8	909,55
10	931,85
12	878,25
14	833,55
21	254,75
22	204,65
23	260,05
24	245,45
25	121,75
26	110,95
27	98,65
28	98,35
29	105,05
30	101,45

Tabela 4 – Sequência $(n, x_n - x^*)$ e com x^* ponto estabilidade

A seguir faz-se a construção da curva de auxiliar a partir dos dados da Tabela 4 , obtendo-se a função $y = 3959,4 \exp -0,129x$.

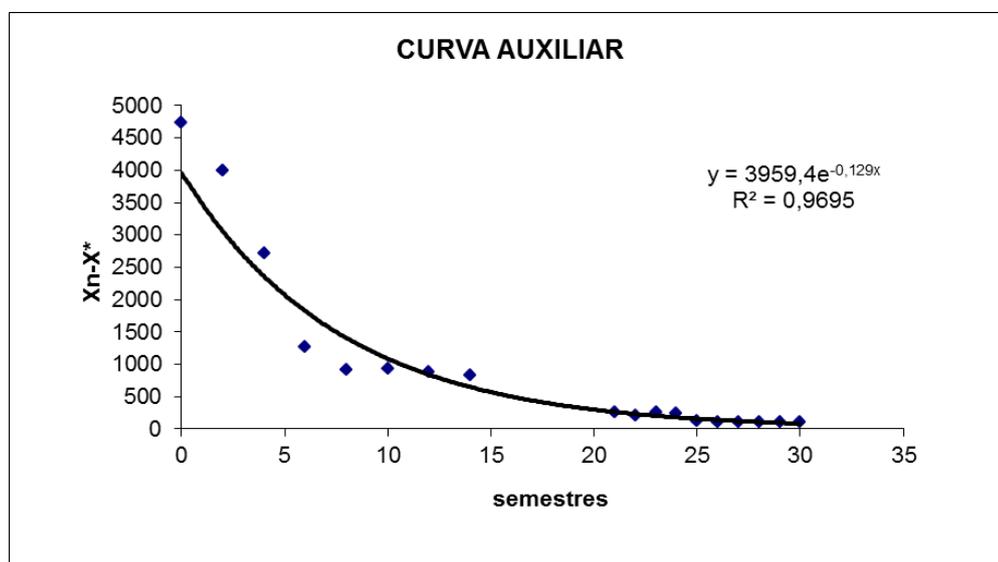


Figura 8 – Curva Auxiliar

Para finalizar, cria-se o MODELO cuja função f é dada por $f(n) = 381,05 + 3959,4 \exp -0,129$

N	modelo
0	4340,45
2	3437,006
4	2739,707
6	2201,516
8	1786,128
10	1465,521
12	1218,07
14	1027,081
21	642,0049
22	610,3079
23	582,461
24	557,9966
25	536,5037
26	517,6214
27	501,0327
28	486,459
29	473,6554
30	462,4071

Tabela 5 – Dados do Modelo de Poluição Industrial do Rio Tietê (Bacia Alto Tietê)

Durante a modelagem da poluição industrial no rio Tietê na região do Alto Tietê, observa-se o decaimento exponencial da poluição, pois grande parte das empresas adaptaram-se a legislação ambiental enquanto outras encerraram suas atividades na região estudada. O ponto de equilíbrio $x^* = 381,05$ (1000kg DBO/dia) refere-se às empresas que insistem no lançamento de carga poluidora no rio Tietê a partir de manobras na legislação ambiental.

3.2 Poluição Difusa Urbana

Poluição difusa é basicamente o tipo de poluição da qual não é possível identificar a fonte. Este tipo de poluição está diretamente ligada as águas da chuva e ao escoamento que dela resulta, pois a água que esco pelas ruas carrega vários poluentes para os rios.

Os dados abaixo representam o volume de lixo em metros cúbicos retidos nas usinas de Traição e Pedreira instaladas na capital de São Paulo provenientes da poluição difusa urbana obtidos a partir de relatórios anuais do site EMAE .

ANO	VOLUME(m ³)
1988	83121
1989	97675
1990	96000
1991	99922
1992	56764
1993	12096
1994	21304
1995	29711
1996	22926
1997	13629
1998	21777
1999	16258
2000	11547
2001	10735
2002	7401
2003	9799
2004	5376
2005	3021
2006	3960
2007	2955
2008	2190
2009	2835
2010	3780
2011	5124
2012	2604

Tabela 6 – Volume de resíduo sólido das Usinas Traição e Pedreira. Fonte: EMAE

Posteriormente, construímos a tabela 7, onde: n é a variável do tempo em ano, e x_n é a variável da poluição difusa cuja unidade de medida adotada é $10^3 m^3$ para facilitar o esboço da curva de tendência bem como os cálculos realizados neste estudo. A Poluição difusa urbana é constituída por lixo da construção civil, restos de animais, folhas, latas, plásticos, pneus, entre outras.

N	x_n ($10^3 m^3$)
0	83,121
1	97,675
2	96
3	99,922
4	56,764
5	12,096
6	21,304
7	29,711
8	22,926
9	13,629
10	21,777
11	16,258
12	11,547
13	10,735
14	7,401
15	9,799
16	5,376
17	3,021
18	3,96
19	2,955
20	2,19
21	2,835
21	3,78
22	5,124
23	2,604

Tabela 7 – Volume utilizando potência de dez resíduo sólido Usinas Traição e Pedreira

A Curva de Tendência dos dados da tabela 7 é dada por:

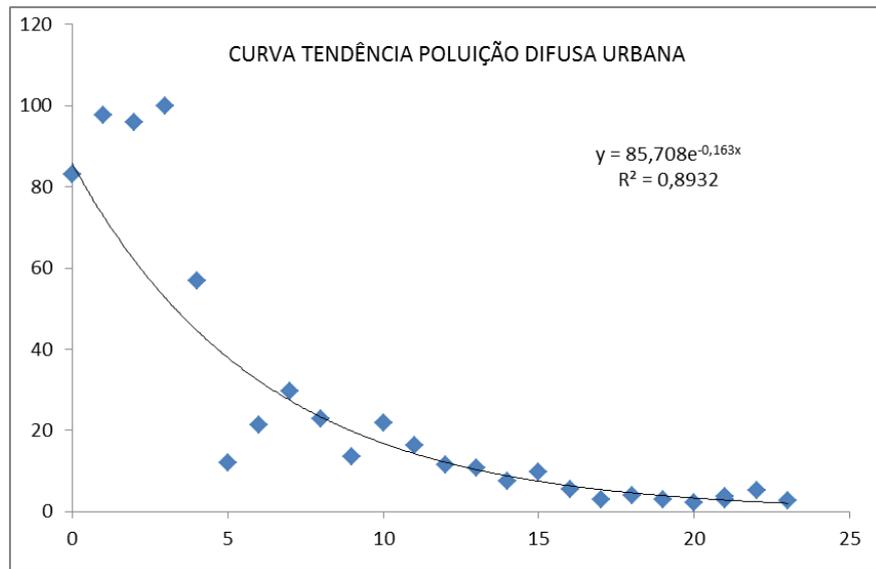


Figura 9 – Gráfico Curva Tendência Poluição Difusa

É interessante perceber que o gráfico anterior apresenta um comportamento de oscilação que é característico de função trigonométrica bem como um decaimento exponencial.

A tabela a seguir apresenta os valores da variável n que é o tempo e os valores da variável y cuja função tendência é $y = 85,708e^{-0.163n}$

n	y
0	85,708
1	72,81676
2	61,86448
3	52,55952
4	44,6541
5	37,93773
6	32,23156
7	27,38365
8	23,26491
9	19,76566
10	16,79273
11	14,26696
12	12,12108
13	10,29796
14	8,749059
15	7,433124
16	6,315116
17	5,365267
18	4,558284
19	3,872678
20	3,290193
21	2,795319
21	2,795319
22	2,374878
23	2,017676

Tabela 8 – Variáveis n e valores função tendêncialume utilizando potência de dez resíduo sólido Usinas Traição e Pedreira

Na tabela seguinte, temos os valores da variável n e os valores de y acrescidos de 2 unidades

n	$y+2$
0	87,708
1	74,81676
2	63,86448
3	54,55952
4	46,6541
5	39,93773
6	34,23156
7	29,38365
8	25,26491
9	21,76566
10	18,79273
11	16,26696
12	14,12108
13	12,29796
14	10,74906
15	9,433124
16	8,315116
17	7,365267
18	6,558284
19	5,872678
20	5,290193
21	4,795319
21	4,795319
22	4,374878
23	4,017676

Tabela 9 – Valores variáveis n e y com acréscimo 2 unidades

Analisando o comportamento da curva de tendência que tem decaimento exponencial e oscilatório, teremos de encontrar uma função f tal que $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, onde $g(x)$ é uma função exponencial relacionada ao decaimento dos valores da curva estudada e $h(x)$ é uma função trigonométrica responsável pela oscilação de valores da mesma curva. A obtenção de g é imediata, pois é a função tendência, isto é,

$$g(x) = 85,708e^{-0.163x} \quad (3.1)$$

De acordo com a disposição dos pontos da curva de tendência, conclui-se que a função que mais se aproxima do comportamento oscilatório dos pontos da figura 9 pela é uma função senóide com valores absolutos, amplitude 0,5, período de aproximadamente 6 unidades e deslocada para cima de 2 unidades, ou seja,

$$h(x) = |0,5\text{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right) + 2| \quad (3.2)$$

Lembrando que a função que se aproxima dos dados é $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ e de (3.1) e (3.2) temos

$$f(x) = 85,708e^{-0.163x} \cdot |0,5\text{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right) + 2| \quad (3.3)$$

Logo a função que mais se aproxima da descrição, ou seja, função que gera os valores do MODELO no estudo da poluição difusa urbana das Usinas Traição e Pedreira em função do

tempo em anos (n) , é dada por:

$$f(n) = 85,708e^{-0.163n} \cdot |0,5sen\left(\frac{\pi x}{3}\right) + 2| \tag{3.4}$$

Na Tabela 11, temos alguns valores gerados pela função (3.4)

n	Modelo
0	87,708
1	107,7805
2	94,27081
3	58,59093
4	28,16691
5	19,88533
6	29,22343
7	39,49155
8	38,35281
9	26,46236
10	13,43965
11	7,749682
12	10,15378
13	15,0035
14	16,32439
15	12,64501
16	7,061647
17	3,657691
18	3,979462
19	6,333539
20	7,818995
21	6,896013
21	6,896013
22	4,354603
23	2,237524

Tabela 10 – Variáveis $n; x_n$, valores função tendência com acréscimo 2 e modelo

O gráfico da figura 10 mostra a comparação entre os dados reais representados pela série 1 e os dados provenientes do modelo matemático com alguns valores apresentados na Tabela 11 pela série 2.

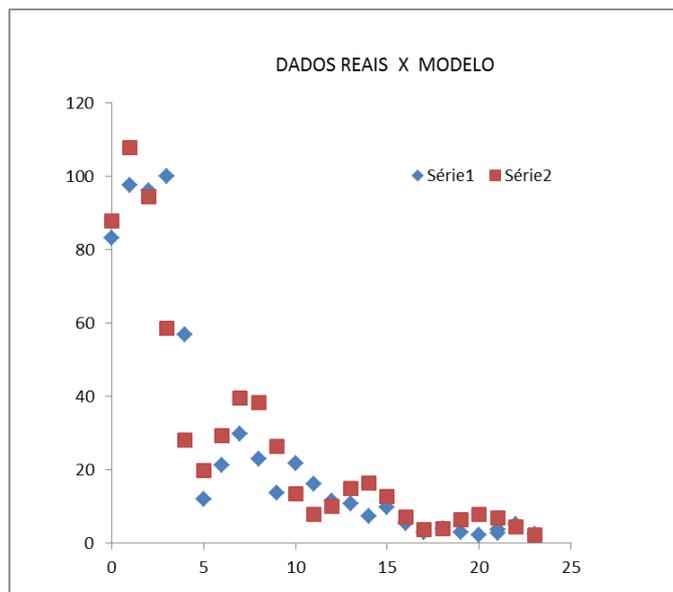


Figura 10 – Gráfico Curva de Tendência e Modelo Matemático Poluição Difusa

Na Figura 10, podemos comparar o gráfico cujos pontos são provenientes dos dados da Tabela 7 (série 1) Curva Tendência Poluição Difusa e o gráfico do Modelo Matemático da

Poluição Difusa cujos pontos tem origem da Tabela (série2) . No estudo deste tipo de poluição, constatamos que houve um decréscimo exponencial da carga poluidora difusa nas Usinas de Traição e Pedreira devido à melhora na limpeza das vias públicas bem como a manutenção do Projeto Córrego Limpo que consiste em uma parceria da Prefeitura de São Paulo e a Sabesp à limpeza e a manutenção dos córregos na capital de São Paulo.

Além disso, a evolução deste tipo de poluição é oscilatória tendendo ao valor 2, pois muitas pessoas não possuem educação ambiental e descartam diversos tipos de lixos(material construção civil, pets, latinhas, bitucas de cigarros, entre outros) nas vias públicas.

3.3 Poluição Doméstica

A poluição doméstica representa cerca de $\frac{2}{3}$ da carga poluidora do rio Tietê no Alto Tietê. O estudo deste tipo de poluição foi feito a partir da consulta de relatórios de águas interiores do ano de 2004 até 2012 no site de CETESB.

O valor da carga poluidora de cada município é obtida multiplicando 0,054 (valor DBO per capita em kg adotado no Brasil) pela quantidade da população urbana do município estudado.

A carga poluidora remanescente consiste na diferença entre carga orgânica gerada pela população urbana menos a carga orgânica tratada levando se em conta a eficiência do processo.

Na tabela 12, a carga poluidora remanescente do município de Arujá em 2012 foi 2123 (kgDBO por dia), pois o potencial da carga poluidora deste município foi 4006(kgDBO por dia) e como a porcentagem de coleta, tratamento e eficiência foram respectivamente,51%, 97% e 95%, o valor da carga orgânica tratada é dado pelo seguinte cálculo: $4006 \cdot 0,51 \cdot 0,97 \cdot 0,95 \approx 1883$ (kg DBO por dia) Logo o valor aproximado de carga poluidora remanescente é dado por: $4006 - 1883 = 2123$ (kg DBO por dia), valor apresentado na Tabela 13

UGRHI	Município	Concessão	População IBGE 2010		Atendimento (%)		Eficiência (%)	Carga Poluidora (kg DBO/dia)		ICTEM	Corpo Receptor
			População Total	População Urbana	Coleta	Tratamento		Potencial	Remanesc.		
6	Arujá	SABESP	76.112	73070	41	100	95,0	3.946	2.420	5,12	R.Baquirivu Guaçu
	Barueri	SABESP	243.241	243241	55	0		13.135	13.135	0,83	Rio Tietê
	Biritiba Mirim	SABESP	28.876	24790	97	100	74,0	1.339	378	7,82	Rio Tietê
	Caieiras	SABESP	87.704	85530	62	0		4.619	4.619	0,93	Rio Juqueri
	Cajamar	SABESP	65.139	63827	63	0		3.447	3.447	0,95	Rib.dos Cristais
	Carapicuíba	SABESP	371.502	371502	56	5	77,0	20.061	19.629	1,36	Rio Tietê
	Cotia	SABESP	205.154	205154	45	43	86,0	11.078	9.235	2,60	Rio Cotia
	Diadema	Saned	388.575	388575	93	13	98,0	20.983	18.510	2,35	Res.Billings
	Embu	SABESP	242.730	242730	50	100	77,0	13.107	8.061	4,75	
	Embu-Guaçu	SABESP	63.218	61542	24	100	50,0	3.323	2.928	2,93	R.Embu-Guaçu
	Ferraz de Vasconcelos	SABESP	170.296	162667	78	56	94,0	8.784	5.177	4,88	Rio Tietê
	Francisco Morato	SABESP	156.063	155746	23	0		8.410	8.410	0,35	Rio Juqueri
	Franco da Rocha	SABESP	133.406	122894	56	0		6.636	6.636	0,84	Rio Juqueri
	Guarulhos	SAEE	1.233.436	1233436	80	35	95,0	66.606	48.888	3,95	Rio Tietê
	Itapeverica da Serra	SABESP	154.374	153105	9	0		8.268	8.268	0,14	R.Embu Mirim
Itapevi	SABESP	203.712	203712	43	0		11.000	11.000	0,65	R.S.J.do Barueri	
Itaquaquecetuba	SABESP	325.518	325518	58	7	94,0	17.578	16.907	1,42	Rios Tietê (UGRHI 06) e Paratei (UGRHI 02)	
Jandira	SABESP	109.613	109613	57	0		5.919	5.919	0,86	R.S.J.do Barueri	
Mairiporã	SABESP	82.556	72088	57	62	85,0	3.853	2.723	3,94	Rio Juqueri	
Mauá	PM	421.184	421184	86	5	98,0	22.744	21.786	1,64	Parte Gualó	
Mogi das Cruzes	SEMAE	392.195	361865	88	43	80,6	19.541	13.652	4,12	Rio Tietê	
Osasco	SABESP	667.826	667826	61	28	77,0	36.063	31.320	2,39	Rio Tietê	
Pirapora do Bom Jesus	SABESP	15.989	15989	30	54	96,0	863	729	2,27	Rio Tietê	
Poá	SABESP	106.797	105167	88	93	94,0	5.676	1.309	7,92	Rio Tietê	
Ribeirão Pires	SABESP	113.725	113725	65	70	98,0	6.141	3.403	5,12	R.Rib.Pires	
Rio Grande da Serra	SABESP	44.502	44502	25	85	60,0	2.403	2.097	2,48	Res.Billings'	
Salesópolis	SABESP	15.733	10016	100	100	79,5	541	111	8,37	R.Paraitinga (ETE Sede) Infil. no Solo (D.de Remédios)	
Santana de Parnaíba	SABESP	111.422	111422	26	0		6.017	6.017	0,39	Rio Tietê	
Santo André	SEMASA	678.485	678485	96	40	98,0	36.638	22.851	4,49	R.Tamanduatei e Res.Billings	
São Bernardo do Campo	SABESP	770.253	757380	84	3	80,0	40.898	40.074	1,64	Rib.dos Meninos e Res.Billings	
São Caetano do Sul	SAEE	149.962	149962	100	100	98,0	8.058	162	10,00	R.Tamanduatei	
São Paulo	SABESP	11.316.145	11196363	97	71	81,9	604.598	263.630	6,69	Rio Tietê, Rio Pinheiros e Rio Tamanduatei	
Suzano	SABESP	265.074	255746	82	70	94,0	13.810	6.359	5,99	Rio Tietê	
Taboão da Serra	SABESP	248.127	248127	81	19	77,0	13.399	11.811	2,27	Rio Tietê	

Tabela 11 – Relatório Saneamento Básico 2011 Alto Tietê. Fonte: CETESB

UGRHI	Município	Concessão	População IBGE 2012		Atendimento (%)		Eficiência (%)	Carga Poluidora (kg DBO/dia)		ICTEM	Corpo Receptor
			População Total	População Urbana	Coleta	Tratamento		Potencial	Remanesc.		
6	Arujá	SABESP	77.279	74191	51	97	95,0	4.006	2.123	5,77	Rio Baquirivu Guaçu
	Barueri	SABESP	245.652	245652	75	30	55,0	13.265	11.624	2,88	Rio Tietê
	Biritiba Mirim	SABESP	29.168	25041	97	61	74,0	1.352	760	5,42	Rio Tietê
	Caieiras	SABESP	88.841	86639	75	0		4.679	4.679	1,13	Rio Juqueri
	Cajamar	ÁGUAS DE CAJAMAR	66.131	64799	81	0		3.499	3.499	1,22	Rib.dos Cristais
	Carapicuíba	SABESP	373.358	373358	69	42	55,0	20.161	16.948	3,20	Rio Tietê
	Cotia	SABESP	209.027	209027	45	43	86,0	11.287	9.409	2,60	Rio Cotia
	Diadema	Saned	390.980	390980	96	13	98,0	21.113	18.531	2,43	Res.Billings
	Embu	SABESP	245.148	245148	66	55	55,0	13.238	10.595	3,11	Rio Tietê
	Embu-Guaçu	SABESP	63.653	61966	31	100	50,0	3.346	2.827	3,27	R.Embu-Guaçu
	Ferraz de Vasconcelos	SABESP	172.222	164507	79	56	94,0	8.883	5.189	4,93	Rio Tietê
	Francisco Morato	SABESP	157.603	157283	37	0		8.493	8.493	0,56	Rio Juqueri
	Franco da Rocha	SABESP	135.150	124501	59	0		6.723	6.723	0,89	Rio Juqueri
	Guarulhos	SAEE	1.244.518	1244518	80	35	95,0	67.204	49.328	3,95	Rio Tietê
	Itapeverica da Serra	SABESP	156.077	154794	18	57	55,0	8.359	7.887	1,49	R.Embu Mirim
Itapevi	SABESP	206.558	206558	55	30	55,0	11.154	10.142	2,36	R.S.J.do Barueri	
Itaquaquecetuba	SABESP	329.144	329144	62	7	94,0	17.774	17.049	1,50	Rios Tietê (UGRHI 06) e Paratei (UGRHI 02)	
Jandira	SABESP	110.842	110842	65	10	55,0	5.985	5.771	1,86	R.S.J.do Barueri	
Mairiporã	SABESP	84.104	73439	57	62	85,0	3.966	2.774	3,94	Rio Juqueri	
Mauá	EMPRESA CONS. SANEAMENTO DE MAUÁ	425.169	425169	86	5	95,0	22.959	22.021	1,63	Parte Gualó	
Mogi das Cruzes	SEMAE	396.468	365807	89	43	80,9	19.754	13.637	4,19	Rio Tietê	
Osasco	SABESP	668.877	668877	75	41	55,0	36.119	30.011	3,34	Rio Tietê	
Pirapora do Bom Jesus	SABESP	16.238	16238	41	54	96,0	877	690	2,81	Rio Tietê	
Poá	SABESP	107.556	105854	97	93	94,0	5.716	869	9,55	Rio Tietê	
Ribeirão Pires	SABESP	114.361	114361	73	70	95,0	6.175	3.178	5,50	R.Rib.Pires	
Rio Grande da Serra	SABESP	45.014	45014	49	85	89,5	2.431	1.524	4,43	Res.Billings	
Salesópolis	SABESP	15.828	10076	100	90	79,4	544	155	7,69	R.Paraitinga (ETE Sede) Infil. no Solo (D.de Remédios)	
Santana de Parnaíba	SABESP	113.945	113945	31	0		6.153	6.153	1,04	Rio Tietê	
Santo André	SEMASA	680.496	680496	96	40	95,0	36.747	23.342	4,41	R.Tamanduatei e Res.Billings	
São Bernardo do Campo	SABESP	774.886	761935	89	26	93,3	41.144	32.264	3,33	Rib.dos Meninos e Res.Billings	
São Caetano do Sul	SAEE	150.638	150638	100	100	95,0	8.134	407	10,00	R.Tamanduatei	
São Paulo	SABESP	11.376.685	11256157	97	75	70,2	607.832	297.586	6,40	"Rio Tietê, Rio Pinheiros e Rio Tamanduatei"	
Suzano	SABESP	267.583	258167	84	70	94,0	13.941	6.236	6,10	Rio Tietê	
Taboão da Serra	SABESP	251.608	251608	87	34	55,0	13.587	11.376	2,87	Rio Tietê	

Tabela 12 – Relatório Saneamento Básico 2011 Alto Tietê. Fonte: CETESB

A tabela 13 foi obtida a partir de relatórios similares ao apresentado anteriormente. Para tanto realizou-se a soma da quantidade de DBO lançada pelos 34 municípios no rio Tietê.

Inicialmente, escolhe-se devidamente as variáveis para o estudo em questão, ou seja, n indica o tempo em anos e x_n indica a quantidade DBO diária em 10^5 kg.

	n	x_n
2005	0	9,74731
2006	1	9,88296
2007	2	9,96679
2008	3	10,07903
2009	4	10,16211
2010	5	10,41674
2011	6	10,49562
2012	7	10,56600

Tabela 13 – Variáveis n e x_n .

Na etapa seguinte, faz-se a curva de tendência associada a Tabela 13 :

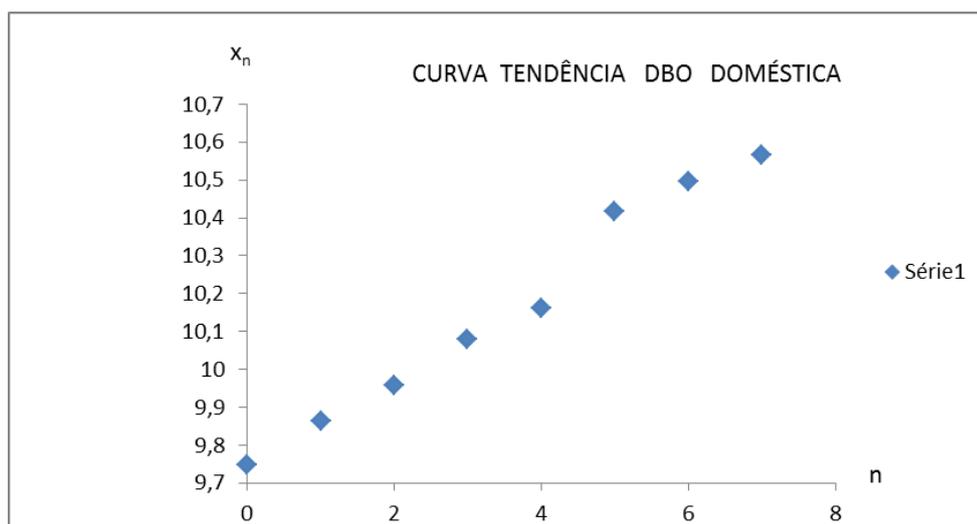


Figura 11 – Gráfico Curva de Tendência Poluição Doméstica

Observemos que existe uma tendência na estabilização do valor da DBO do esgoto doméstico, pois o mesmo está relacionado a população que por diversos fatores tende a estabilizar-se. Deste modo, deve-se aplicar o Modelo Exponencial Assintótico utilizando o Método Ford-Walford para estabilidade (PAULY,1984).

A seguir faz-se uma tabela à sequência (x_n, x_{n+1}) para a procura do ponto de estabilidade, isto é, $x^* = x_n = x_{n+1}$

x_n	x_{n+1}
9,74731	9,86295
9,86295	9,95679
9,95679	10,07903
10,07903	10,16211
10,16211	10,41674
10,41674	10,49562
10,49562	10,566
10,566	

Tabela 14 – Sequência (x_n, x_{n+1}) DBO doméstica.

Em posse da sequência anterior, faz-se a construção da curva de Estabilidade (Figura 12).

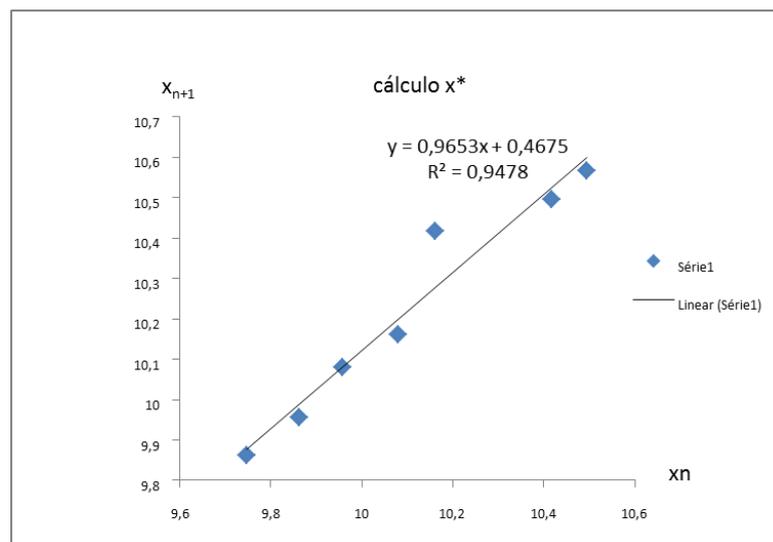


Figura 12 – Gráfico Cálculo x^* a

Como o coeficiente angular da função linear no quadro anterior é menor que 1, e observando que $y = x_{n+1}$ obteremos x^* . Para isso façamos $x^* = x_n = x_{n+1}$ e, conseqüentemente, $x^* = 0,9653x^* + 0,4675 \Leftrightarrow x^* \approx 13,473$.

Logo a produção de DBO diária (1000kg/dia) tende a $13,473 \cdot 10^5$ conforme modelo matemático realizado neste trabalho.

Como a maioria dos softwares presentes nas instituições de ensino não possuem a opção Curva exponencial assintótica, utilizamos uma curva auxiliar exponencial a partir dos dados da tabela a seguir calculando $x^* - x_n$ à obtenção de um ajuste exponencial entre n e $x^* - x_n$.

n	$x^* - x_n$
0	10,55904
1	10,52948
2	10,39993
3	10,41455
4	10,22747
5	9,96944
6	9,19339
7	9,345

Tabela 15 – Sequência n por $x^* - x_n$ DBO doméstica.

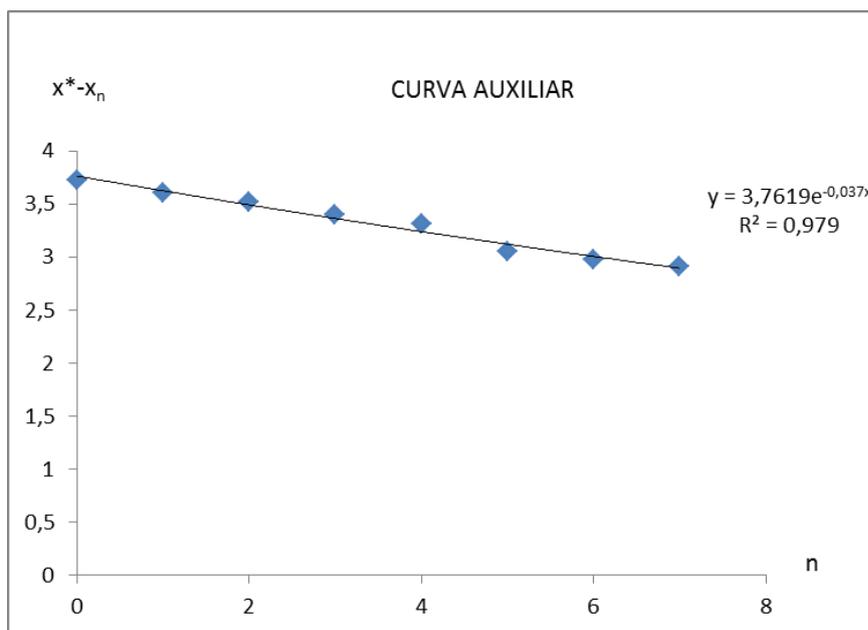


Figura 13 – Gráfico Curva Auxiliar

Na tabela 16 , é possível comparar os dados reais e o modelo matemático proposto à produção DBO diária doméstica na Bacia do Alto Tietê é dado por:

n	x_n	MODELO
0	9,74731	9,7111
1	9,86295	9,847747
2	9,95679	9,97943
3	10,07903	10,10633
4	10,16211	10,22862
5	10,41674	10,34647
6	10,49562	10,46004
7	10,566	10,56948

Tabela 16 – Modelos DBO doméstica.

A função que descreve este modelo é: $f(n) = 13,773 - 3,7619e^{0,037n}$ Para o estudo de evolução do tratamento de esgoto doméstico na Bacia do Alto Tietê (Projeto Tietê) utilizando a Modelagem Matemática , coletou-se dados dos relatórios de Saneamento Básico de 2005 a 2012 do Alto Tietê (CETESB) .

Em seguida, foi feita uma escolha devida de variáveis para o estudo de tal situação: sejam n e x_n as variáveis que indicam o tempo em anos e a DBO 10^5 kg diário.

ANO	n	x_n
2005	0	2,91396
2006	1	2,94352
2007	2	3,07307
2008	3	3,05845
2009	4	3,24553
2010	5	3,50356
2011	6	4,27961
2012	7	4,128

Tabela 17 – Tratamento esgoto doméstico.

A Curva de Tendência do Tratamento De Esgoto do Alto Tietê é representado na Figura 14

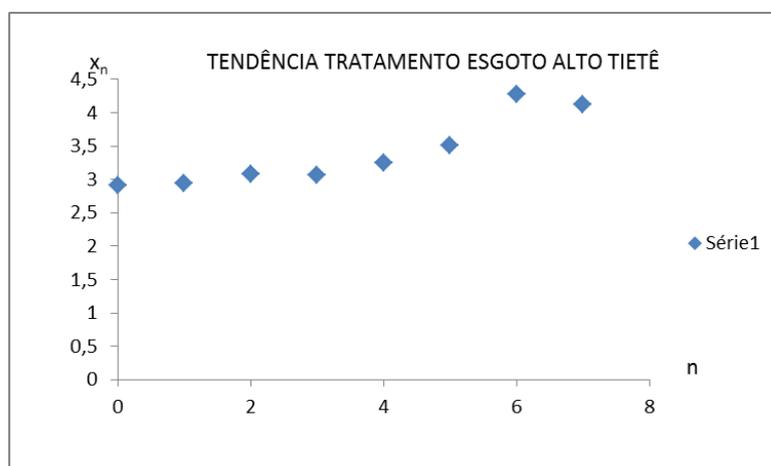


Figura 14 – Gráfico Curva Tendência Tratamento Esgoto

A partir da Tabela 17 e da curva de tendência Figura 14 citados acima, observamos que o tratamento de esgoto vinculado ao Projeto Tietê cujo estudo é feito pela carga DBO total tende a um ponto de estabilidade. Tal fato permite a aplicação Método Ford-Walford para estabilidade.

A seguir foi construída a Tabela 18

x_n	x_{n+1}
2,91396	2,94352
2,94352	3,07307
3,07307	3,05845
3,05845	3,24553
3,24553	3,50356
3,50356	4,27961
4,27961	4,128
4,128	

Tabela 18 – sequencia (x_n, x_{n+1}) tratamento esgoto.

A figura 15 a seguir retrata a a curva de estabilidade com dados provenientes da tabela 22

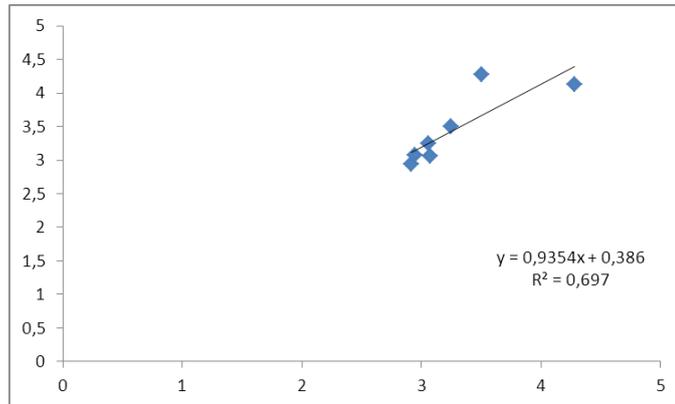


Figura 15 – Curva estabilidade no tratamento esgoto

Como o coeficiente angular da função linear no quadro anterior é menor que 1, e observando que $y = x_{n+1}$ obteremos x^* . Para isso, fazamos $x^* = x_n = x_{n+1}$ e, conseqüentemente $x^* = 0,9354x^* + 0,386 \Leftrightarrow x^* \approx 5,98$. Logo $x^* \approx 5,98$.

n	x^*-x_n
0	3,06604
1	3,03648
2	2,90693
3	2,92155
4	2,73447
5	2,47644
6	1,70039

Tabela 19 – Sequência (x_n, x_{n+1}) tratamento esgoto.

A Figura 16 construída a seguir é a curva auxiliar relacionada a função $y = 3,3641e^{-0,08n}$

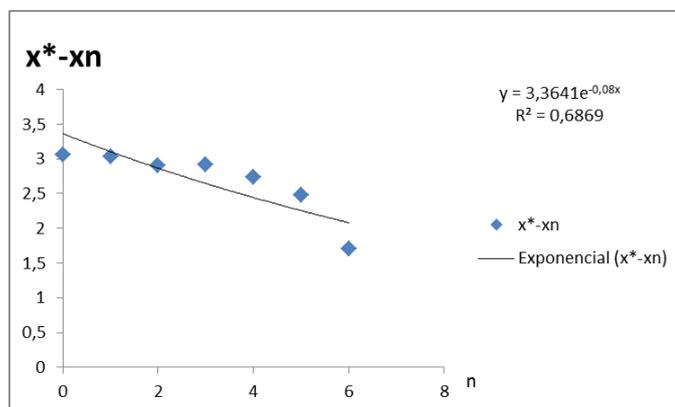


Figura 16 – Gráfico Curva Auxiliar Tratamento Esgoto

Logo o Modelo Matemático que descreve a evolução do tratamento de esgoto doméstico (Projeto Tietê) é dada pela função : $f(n) = 5,98 + 3,3641e^{-0,08n}$ com os valores apresentados na tabela 20.

MODELO
2,616
2,874637
3,113388
3,333784
3,537235
3,725043
3,898413

Tabela 20 – Modelo de Tratamento de Esgoto.

Quando se compara os modelos matemáticos da DBO doméstica produzida pela população urbana da bacia do Alto Tietê e o tratamento de esgoto doméstico (Projeto Tietê), constata-se a meta do Projeto Tietê que consiste na despoluição do rio Tietê nos próximos 12 anos (2025) estará longe de acontecer, pois o ponto de estabilidade da produção de esgoto doméstico (DBO) diário pela população urbana na Bacia do Alto Tietê é de $13,473 \cdot 10^5$ Kg, enquanto o ponto de estabilidade do tratamento do mesmo com as políticas vigentes é de apenas $5,98 \cdot 10^5$ kg diariamente.

3.4 Sugestão de Atividade Didática em sala de aula

1. Escolha 5 municípios no Relatório de Saneamento Básico 2012, avalie se existe proporcionalidade entre as grandezas População Urbana e Carga Poluidora (kg DBO/dia). Existe alguma relação com o valor da DBO g/hab dia adotada no Brasil?
2. Pesquise o Censo IBGE de 2000 e 2010 e calcule a taxa de crescimento populacional do seu município utilizando o modelo discreto de Malthus.
3. Desde 2000, os pontos de amostragem da CETESB vêm sendo georeferenciados com a utilização de aparelhos GPS. Estes aparelhos registram as coordenadas geográficas, latitude e longitude, necessárias para localizar um ponto na superfície, e também a altitude. A partir deste trabalho, estes dados foram transpostos para as nossas cartas topográficas em escalas 1:50.000, 1:250.000 e 1:1.000.000. Qual destas escalas tem como a finalidade apenas a representação de estruturas básicas sem o interesse do detalhamento das mesmas?
4. Consulte os Relatório de Saneamento Básico do Alto Tietê no site da CETESB desde 2006, faça uma tabela onde n é o tempo anual e x_n é a População Urbana e:

- a) Faça um modelo matemático da população Urbana do Alto Tietê
- b) Pesquise o consumo per capita de água adotado na bacia Alto do Tietê e faça um modelo matemático de demanda de água nesta bacia

Conclusão

A inserção da Modelagem Matemática no Ensino Básico visa melhorar a formação geral do estudante, pois pode ser um caminho eficiente na obtenção do conhecimento matemático na resolução de situação-problema, na modelagem de fenômenos em outras áreas do conhecimento bem como o interesse pelo processo investigativo para o auxílio da apropriação de conhecimento. Vale ressaltar que, de acordo com o PCN+, a modelagem matemática pode ser encarada como uma estratégia de ensino ante a uma situação-problema mobilizando o estudante a rol variado de competências como: estratégia de busca e utilização recursos à coleta de dados à modelagem matemática de um determinado tema, investigação do comportamento de uma coleção de dados com recursos matemáticos e formulação de hipóteses que expliquem o fenômeno estudado.

Ademais , a modelagem matemática pode permitir o desenvolvimento de projetos para o favorecimento de criação de estratégia de organização dos conhecimentos escolares bem como a articulação de diferentes saberes disciplinares. A adoção da metodologia de trabalho com projetos pode fazer com que a aula tenha um caráter investigativo, permitindo ao estudante o rompimento do estudo baseado em um currículo linear, de memorização e desarticulação de disciplinas(PCN+).

Além disso , a adoção da Modelagem Matemática propicia ao estudante o ato de aprender a fazer modelos e a adquirir conceitos matemáticos. Vale ressaltar que alguns conceitos matemáticos abordados durante a modelagem matemática podem não constar no currículo regular, como por exemplo, noções de limite, variação instantâneas, recorrência, entre outras abordagens. Cabe ao professor a disposição para relembrar e aprimorar tais conceitos estudados no curso superior e ensiná-los ao estudante do Ensino Médio. Outro aspecto importante durante a modelagem é o uso do computador, que sem dúvidas é uma ferramenta importante no processo, mas por si só não garante uma efetiva aprendizagem matemática. Deste modo, o professor deverá ensinar aos estudantes a interpretação de resultados oriundos de softwares a partir de argumentos matemáticos. Outra finalidade deste trabalho consiste na transformação de estudantes em cidadãos conscientes, que tenham compromisso e respeito ao meio ambiente, levando-os a repudiar atitudes como:

1. Descarte de lixo (bitucas de cigarro, latas, pets, móveis, entulhos da construção civil entre outras) nas vias públicas;
2. Ligações clandestinas de esgoto doméstico em redes pluviais;
3. Valorização da cooperação da sociedade civil em programas direcionados à preservação do meio ambiente, como o Córrego Limpo, que consiste em um convênio assinado Sabesp

e a PMSP, para a realização de ações de parceria com vistas à limpeza e despoluição de córregos urbanos, dentro das respectivas atribuições das duas instituições.

Além disso, os modelos matemáticos realizados neste trabalho demonstram que embora grande parte das empresas colaborem na legislação ambiental para a não degradação do rio Tietê, o valor estabilidade $381,05 \cdot 10^3$ kg DBO/dia poluição nos leva a concluir que muitas empresas insistem na degradação do rio. Diante disto, é necessária uma fiscalização mais eficaz na punição de empresas desrespeitadoras do meio ambiente.

No estudo da poluição difusa, observa-se um decaimento exponencial com aspecto oscilatório da carga poluidora difusa com ponto de estabilidade de aproximadamente $2000m^3$ diários pela falta de educação ambiental na maioria das pessoas. Cabe as instituições de ensino a inserção de habilidades e competências do estudante no tratamento do meio ambiente. Neste quesito, a Modelagem Matemática será de grande valia para tal objetivo. Já o estudo do esgoto doméstico nos mostra uma distância gigantesca entre a evolução da DBO populacional e tratamento de esgoto.

Referências Bibliográficas

- ARMELIN, LILIANE FROSINI (2011) Estudo do Comportamento dos Resíduos Sólidos Veiculados pelos Rios Urbanos juto aos vertedores de Entrada de Reservatórios de Controle de Cheias.
- ALMEIDA, L.W e SILVA,K.P. e VERTUAN,R.E (2012) Modelagem Matemática na educação básica.Editora contexto
- BASSANEZI, RODNEY C. (2012) Temas & Modelos. UFABC.
- BASSANEZI, RODNEY C. (2012) Equações Diferenciais Ordinárias: um curso introdutório. UFABC.
- BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA PCN + Ensino médio:orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (2002).
Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf Acesso em 17 abril 2013
- BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: MEC/PCNEM, 2002.
Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/cienciah.pdf> Acesso em 08 fev 2013
- BRANCO, MURGEL SAMUEL.(1983) Poluição: A morte de nossos rios. CETESB
CETESB (2005 a 2012) Relatório de Qualidade das Águas Interiores do Estado de São Paulo.
Disponível em: <http://www.cetesb.sp.gov.br/servicos/documentos-emitidos—publicacao/37-publicacoes-e-relatorios> Acesso em 17 mai 2013.
- CUNHA, ANTONIO GERALDO DA (1989) Dicionário Etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa. Editora Nova Fronteira
- DINIZ, LEANDRO DO NASCIMENTO (2007). O papel das tecnologias da informação e comunicação nos projetos de modelagem matemática.
- EMAE (1999 a 2012). Relatório Anual de Administração - Balanço Anual.
Disponível em: <http://www.emae.com.br/emae/arquivos.php?id=9> Acesso em 02 fev 2013
- FACALANZA ,ANA PAULA. (1993).Programa de Despoluição do Rio Tietê:análise de controle da poluição industrial a partir do conceito de desenvolvimento industrial sustentável UNICAMP.
- FRANKLIN, R. L. (2010). Determinação de mercúrio total e orgânico e avaliação dos processo de metilação e desmetilação em sedimentos do reservatório Rio Grande, Estado de Sao Paulo. Ipen.

- GIRALDO,V.,MATTOS, F. e CAETANO, P. (2012) Recursos Computacionais no Ensino de Matemática. Profmat.
- LIMA,ELON LAGES (2004) Análise Real: volume 1. Instituto Nacional de matemática Pura e Aplicada.
- LIMA,ELON LAGES (2004) Análise Real: volume 2. Instituto Nacional de matemática Pura e Aplicada.
- LIMA,ELON LAGES (2007) Matemática e Ensino. Instituto Nacional de matemática Pura e Aplicada.
- LIMA, E.L, CARVALHO,P.C.P,WAGNER,E.,MORGADO,A.C. (2006) A Matemática do Ensino Médio: volume 1. Instituto Nacional de matemática Pura e Aplicada.
- LIMA, E.L, CARVALHO, P.C.P,WAGNER,E.,MORGADO,A.C. (2006) A Matemática do Ensino Médio: volume 2. Instituto Nacional de matemática Pura e Aplicada.
- LUÍS, R.D.GARANITO (2006) Equações de diferenças e aplicações. Universidade da Madeira.
- MELLO, HUMBERTO NÓBREGA (1975) História do Rio Tietê .Governo São Paulo.
- NERI, CASSIO (2006) Curso de Análise Real. UFRJ.
- PAULY, DANIEL (1984) Fish Population Dynamics in Tropical Waters: A Manual for Use with Programmable Calculators. International Center for Living Aquatic Resources Managemente
- PEGORARO, LUIZ SÉRGIO, (1996) Projeto Tietê. Gráfica Estadão.
- ROCHA, ARISTIDES ALMEIDA (1991) Do lendário Anhembi ao Poluído Tietê. Edusp.