



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E  
TECNOLÓGICAS - DCET

COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

GILSIMAR BATISTA DOS SANTOS

METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO REMOTO EMERGENCIAL (ERE).  
EXEMPLO DE APLICAÇÃO PARA O ESTUDO DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO.

ILHÉUS-BA  
2021

GILSIMAR BATISTA DOS SANTOS

**METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO REMOTO  
EMERGENCIAL (ERE). EXEMPLO DE APLICAÇÃO PARA  
O ESTUDO DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO.**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz

Orientador: Prof. Dr. Germán Ignacio Gomero Ferrer

ILHÉUS-BA  
2021

S237

Santos, Gilsimar Batista dos.

Metodologias ativas no ensino remoto emergencial (ERE). Exemplo de aplicação para o estudo de matrizes no ensino médio / Gilsimar Batista dos Santos. – Ilhéus, BA: UESC, 2021.

53 f. : il.

Orientador: Germán Ignacio Gomero Ferrer.

Dissertação (mestrado) –Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Inclui referências e apêndices.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Aprendizagem ativa. 3. Ensino – Metodologia. 4. Ensino remoto. 5. Matrizes.  
I. Título.

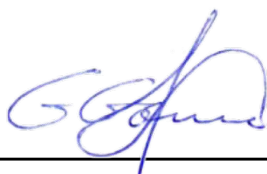
CDD 510.7

GILSIMAR BATISTA DOS SANTOS

**METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO REMOTO  
EMERGENCIAL (ERE). EXEMPLO DE APLICAÇÃO PARA  
O ESTUDO DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO.**

Ilhéus-BA, 31/08/2021

Comissão Examinadora



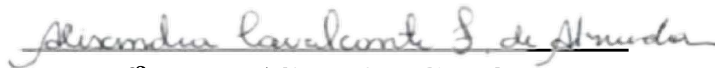
---

**Prof. Dr. Germán Ignacio Gomero  
Ferrer  
UESC  
(Orientador)**

*Flaviana dos Santos Silva*

---

**Prof<sup>ª</sup>. Dra. Flaviana dos Santos Silva  
UESC**



---

**Prof<sup>ª</sup>. Dra. Alisandra Cavalcante  
Fernandes de Almeida  
IFCE**

À minha Vó, Cesária de Jesus (In memoriam); a minha Esposa Luana ; aos meus filhos Nicolay, Gabriel e Natália.

## Agradecimentos

– Primeiramente, quero agradecer a Deus que sempre esteve ao meu lado durante este tão sonhado mestrado pois ele que me deu a vida, a capacidade de aprender e por estar comigo durante todo o processo me sustentando. Foi nele que encontrei forças pra não desistir em meio as dificuldades.

Agradeço a minha preciosa família, em especial minha esposa Luana que sempre me incentivou e acreditou mais em mim do que eu. Nos momentos de grande dificuldade ela me deu forças para continuar no curso e compreendeu a minha ausência para estudar.

Aos meus amados filhos carinhosos, Nicolay, Gabriel e Natália, que trouxeram alegria e incentivo para que eu nunca desistisse.

À minha tia Edna Viana que sempre me ajudou nas orações e me incentivou desde a época da preparação do ENA(Exame Nacional) a realização do Exame Nacional de Qualificação.

Aos meus colegas do PROFMAT-UESC, com quem criei laços de amizade, em especial a Odair José pela companhia na estrada; nas idas e nas vindas compartilhamos conhecimento, alegrias e frustrações. Ao meu colega Junot Borges, que sempre me ajudou como um pai de diversas formas, financeiramente, com conselhos, companheirismo, um verdadeiro incentivador. Essa conquista eu divido junto com ele e com sua esposa Arlet que sempre me abraçou nas dificuldades.

Ao meu colega de turma Robson por me ajudar e também se mostrar uma pessoa que sempre esteve disposto a ajudar a turma.

Aos meus queridos professores do PROFMAT-UESC, que tanto se esforçaram para nos ajudar. Em especial gostaria de agradecer ao meu orientador Germán Ignacio Gomero por me ajudar a entender o mundo acadêmico e por se mostrar uma pessoa solícita, humana e paciente comigo em toda jornada.

À professora Fernanda por ajudar a turma nas dificuldades, conselhos etc. Sou muito grato a ti.

Ao professor Nestor Castañeda, por acreditar em mim e me encorajar. Meu muito obrigado.

Aos professores Claudemir, Karina e Vinícius por compartilhar seus conhecimentos conosco e por nos encorajar.

À minha querida turma do 3º ano do Colégio Estadual Polivalente de Gandu que está comigo desde o 1º ano do Ensino Médio e fez parte deste trabalho durante um momento muito difícil na Pandemia do Covid-19. Obrigado por confiar no meu trabalho.

*Uma pessoa que nunca cometeu um erro,  
nunca tentou nada novo.  
Albert Einstein*

## Resumo

Este trabalho relata a aplicação de metodologias ativas de aprendizagem de uma turma de matemática do ensino médio na modalidade de Ensino Remoto Emergencial (ERE) no contexto da pandemia do Covid-19, que teve o propósito de amenizar as dificuldades criadas pelo isolamento social. O objetivo deste trabalho é desenvolver uma intervenção de ensino a partir da aplicação das metodologias ativas com suporte nas TDIC para promover a aprendizagem de matrizes com uma sequência didática na modalidade do ERE que possa permitir aos alunos maior autonomia para realizar as atividades escolares em outros ambientes e em horários alternativos. Além disso, esta sequência didática tem o objetivo de fazer com que os alunos aprendem conteúdos matemáticos contextualizados de maneira investigativa, sem usar regras prontas e fazer os estudantes construïrem seus próprios conhecimentos. Esta intervenção didática foi aplicada entre os meses de Junho e julho de 2020, quando as atividades letivas não eram obrigatórias nas escolas, e o ensino remoto ainda não havia sido aprovado na Rede Estadual. A intervenção consistiu em 8 dias de atividade distribuídas ao longo de 3 semanas, e foi realizada em uma turma do 3º ano do ensino médio do Colégio Estadual Polivalente de Gandu que oportunizou um trabalho voltado para encarar os desafios e possibilidades do ERE durante este período de crise. O tema objeto de estudo nestas atividades foi o conceito de matriz e operações entre elas, usando exemplos concretos e finalizando com uma aplicação em criptografia. Dos oito dias de atividade apenas um deles consistiu em uma aula expositiva; o resto do tempo foi preenchido usando metodologias ativas de aprendizado. Adicionalmente, dos oito momentos em que as atividades foram realizadas, apenas três deles foram momentos síncronos. Os resultados obtidos nesta intervenção foram muito encorajadores pois em todo momento houve participação significativa dos alunos. Tanto na participação quanto na aprendizagem de matrizes foi percebido que ao longo do processo os alunos atingiram as expectativas de aprendizagens. No decorrer do processo alguns alunos tiveram dificuldades mas estas foram superadas pela intensa comunicação com o professor através do WhatsApp por meio de mensagens de áudio. Foram gerados momentos de debate nas plataformas usadas para as aulas assíncronas (Whatsapp e Google Classroom), vários dos problemas propostos foram resolvidos usando caminhos criados pelos próprios alunos, houve momentos de descontração e brincadeira, e sugestões por parte deles para estudar tópicos relacionados adicionais.

**Palavras-chave:** Ensino Remoto Emergencial, Metodologias ativas, Intervenção didática, Matrizes.



# Abstract

This monograph reports on the performance of a mathematics teaching strategy within the Emergency Remote Teaching (ERT) approach in the context of the Covid-19 pandemics, which had the purpose of alleviating some problems due to social isolation. The objective of this work is to develop a teaching intervention from the application of active methodologies supported by TDIC to promote the learning of matrices with a didactic sequence in the ERE modality that can allow students greater autonomy to carry out school activities in other environments and at alternative times. In addition, this didactic sequence aims to make students learn mathematical content contextualized in an investigative way, without using ready-made rules and making students build their own knowledge. This didactical intervention was performed in 2020, a time when school activities were not any more mandatory, and when remote teaching had not yet been approved by the state government. These activities were performed at the Colégio Estadual Polivalente of Gandu which gave the opportunity to deal with the challenge and possibilities of ERT during this crisis epoch. The topic studied in these activities was the concept of a matrix and operations with matrices, using concrete examples and culminating with an application in cryptography. The activities were performed during eight days, and only one of them was dedicated to a conventional lecture session; in all the other sessions we used active learning strategies. Additionally, only three sessions were synchronous moments. The results observed working with the students were very encouraging, because they had a very significant participation. There were ample debates in the forums created in the platforms used for the asynchronous sessions (Whatsapp and Google Classroom), several of the proposed problems were solved using pathways developed by the own students, there were playful moments and time for jokes, and suggestions coming from them to study other related topics.

**Keywords:** Emergency Remote Teaching, Active Learning, Didactic Intervention, Matrices.

## Lista de figuras

Figura 1 – Whatsapp . . . . .	13
Figura 2 – Google Classroom . . . . .	14
Figura 3 – Google Meet . . . . .	14
Figura 4 – Snaptube . . . . .	15
Figura 5 – Inshot . . . . .	15
Figura 6 – Zoom . . . . .	16
Figura 7 – Portal da Matemática OBMEP . . . . .	16
Figura 8 – Portal Multimídia Unicamp . . . . .	17
Figura 9 – Página do vídeo original usada na Atividade 1. . . . .	29
Figura 10 – Tabelas de Classificação do Campeonato Brasileiro de 2019 . . . . .	30
Figura 11 – Página do módulo "Determinante como áreas - Parte 1"no site Portal da OBMEP. . . . .	31
Figura 12 – Mapa de localização das fazendas de cooperativa de leite. . . . .	32
Figura 13 – Mensagem de resposta de uma aluna à postagem da primeira atividade. . . . .	36
Figura 14 – Resolução da Atividade 1 usando os elementos da matriz de distâncias. . . . .	37
Figura 15 – Resolução da Atividade 1 usando a matriz de distâncias. . . . .	38
Figura 16 – Exemplo dos cálculos feitos durante a atividade 4. . . . .	39
Figura 17 – Extensão das propriedades do determinantes de ordem 2 para ordem 3 feita por uma aluna por iniciativa própria. . . . .	40

# Sumário

<b>1 – Introdução</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 – Fundamentação Teórica</b> . . . . .	<b>4</b>
2.1 Educação a Distância e Ensino Remoto . . . . .	4
2.1.1 Educação a Distância . . . . .	5
2.1.2 Ensino Remoto de Emergência . . . . .	6
2.1.3 Avaliação no Ensino Remoto de Emergência . . . . .	6
2.2 Metodologias Ativas de Aprendizagem . . . . .	8
2.2.1 Contribuições de Paulo Freire e Dewey para metodologias ativas . . . . .	8
2.2.2 Sala de aula invertida. . . . .	9
2.2.3 A Aprendizagem Cooperativa. . . . .	10
2.3 Recursos para o ensino remoto . . . . .	12
2.3.1 Recursos analógicos . . . . .	12
2.3.2 Recursos digitais . . . . .	13
2.3.3 Como a interação com as tecnologias poderão propiciar a construção do conhecimento. . . . .	16
2.4 Competências segundo a BNCC . . . . .	18
2.5 Planejamento pedagógico das aulas remotas . . . . .	19
<b>3 – Conteúdo Matemático</b> . . . . .	<b>20</b>
3.1 Definições Gerais e Exemplos Básicos . . . . .	20
3.1.1 Operações com matrizes . . . . .	21
3.2 Criptografia através de Matrizes . . . . .	25
3.2.1 Descrição do método . . . . .	25
<b>4 – Descrição da Intervenção</b> . . . . .	<b>27</b>
4.1 O contexto da intervenção . . . . .	27
4.2 Planejamento Preliminar . . . . .	28
4.3 Descrição das Atividades . . . . .	28
4.4 Roteiros das Atividades . . . . .	31
4.4.1 Semana 1 - O conceito de matriz. . . . .	31
4.4.2 Semana 2 - Operações com matrizes. Determinantes . . . . .	33
4.4.3 Semana 3 - Criptografia . . . . .	34
4.5 Relato de Experiência . . . . .	35
4.5.1 Primeira Atividade . . . . .	35
4.5.2 Segunda Atividade . . . . .	36

4.5.3	Terceira Atividade . . . . .	38
4.5.4	Quarta Atividade . . . . .	38
4.5.5	Quinta Atividade . . . . .	38
4.5.6	Sexta Atividade . . . . .	39
4.5.7	Sétima Atividade . . . . .	40
4.5.8	Oitava Atividade . . . . .	40
<b>5</b>	<b>– Considerações Finais . . . . .</b>	<b>41</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>44</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>46</b>
	<b>APÊNDICE A – Atividades . . . . .</b>	<b>47</b>
	<b>APÊNDICE B – Resolução das Atividades . . . . .</b>	<b>51</b>

# 1 Introdução

Em 2020, o cenário da pandemia decretada pela Organização Mundial da Saúde, devido à disseminação do Novo Coronavírus levou ao fechamento das escolas no mundo todo. A necessidade de estabelecer novas possibilidades para que os estudantes continuassem o seu processo de aprendizagem se tornou um grande desafio para os educadores. Com isso surgiu o ensino remoto em tempos de pandemia tornando o trabalho docente mais desafiador, pois, os professores tiveram que estudar novas ferramentas digitais em curto período. Além disso, tiveram que buscar novas tendências metodológicas, no intuito de motivar os alunos e estimular o engajamento deles, nas aulas.

Neste contexto, esta dissertação vem relatar uma intervenção didática sobre matrizes e algumas aplicações no "Ensino Remoto Emergencial" (ERE), entre os meses de junho e julho do ano de 2020, com uma turma do (3°) ano do ensino médio, da Escola Estadual Polivalente de Gandu-BA. O trabalho foi organizado na forma de uma sequência de atividades embasada em algumas metodologias ativas, que colocam o aluno em uma postura de investigador e de construtor dos seus conhecimentos, tornando-o protagonista de sua aprendizagem. Em consequência, para os efeitos desta dissertação, o conteúdo de matrizes aqui trabalhado deixa de ser um fim em si mesmo, e passa a ser apenas um meio para ilustrar uma proposta de atividades durante o ERE que visa estimular nos alunos o desenvolvimento de processos mentais, tais como: dedução, generalização, abstração, argumentação, motivação, etc.

A sequência didática foi organizada em 8 seções, nas quais a fase seguinte depende do desenvolvimento do estágio anterior. A sequência constitui numa série de atividades que confrontou os alunos com aspectos teóricos e práticos de matrizes, determinantes, operações, algumas aplicações simples, dentre elas, uma em criptografia. Esta intervenção didática foi mais centrada no pensar que na automatização, porém, foi necessário a utilização de algoritmos em alguns casos. Outra ênfase do trabalho, foi a valorização do processo de resolução em lugar de apenas conferir os resultados dos problemas propostos.

O objetivo desta sequência didática é desenvolver uma intervenção de ensino a partir da aplicação das metodologias ativas com suporte nas TDIC's para promover a aprendizagem de matrizes com um roteiro de aulas no ERE que possa permitir aos alunos um gerenciamento do seu tempo de maneira mais eficiente, aumentar sua autonomia nos estudos e muito mais. Além disso, esta sequência didática tem o objetivo de fazer com que os alunos aprendem conteúdos matemáticos contextualizados de maneira investigativa. Já para o professor, serve de material de apoio podendo ele fazer uma adaptação do mesmo.

Após declarado o isolamento social no estado, em março de 2020, as aulas esco-

lares foram oficialmente suspensas. Em nossa escola houve a decisão de continuar dando aulas remotas de modo extraoficial, portanto, os alunos não eram obrigados a assisti-las. Observamos que gradualmente os alunos iam deixando de participar das aulas, e inclusive começaram a desistir delas, e foi na intenção de contornar essa situação que resolvemos realizar atividades que estimulassem uma maior participação dos estudantes. Percebemos que, devido a restrições ao acesso à ‘internet’, neste tipo de aulas deveríamos usar tanto momentos síncronos como assíncronos, com maior ênfase neste último. Isso porque as aulas assíncronas demandam menos custos e recursos, como celulares com ‘internet’ de alta velocidade e com configurações que permitam o acesso a videoconferências.

As aulas síncronas são aquelas que acontecem em tempo real, com alunos e professores interagindo através de recursos digitais. Já nas aulas assíncronas, que são as desconectadas de tempo-espço, faz-se uso de alguma plataforma como repositório do material didático. A necessidade de ter mais momentos assíncronos casou muito bem com o nosso desejo de estimular a participação dos estudantes nas atividades didáticas. Em particular, as atividades descritas nesta dissertação fazem usos das chamadas ”Metodologias Ativas de Aprendizagem”. Tais metodologias são sustentadas em princípios propostos pelo psicólogo Seymour Bruner, o filósofo John Dewey e o patrono da educação brasileira, Paulo Freire.

Um aspecto importante no desenvolvimento destas atividades foi o estabelecimento dos canais de comunicação que seriam usados para manter a turma coesa. Em vista das dificuldades de acesso à ‘internet’ que alguns de nossos alunos têm, o mais eficiente foi adotar plataformas que já eram familiares para os estudantes. Por esse motivo usamos intensivamente o WhatsApp, e as plataformas Google Meet e Google Classroom. No último encontro usamos também a plataforma, Zoom, pois, embora não seja familiar para os alunos, permite o envio de mensagens personalizadas, o que foi essencial para a realização da atividade realizada em equipes.

Das 8 seções que consistiu a intervenção didática apenas três foram momentos síncronos, dos quais apenas um foi uma aula expositiva. Dos outros dois momentos síncronos um deles foi uma seção de discussão de problemas e o outro foi uma atividade realizada em equipes. Nos cinco momentos assíncronos os alunos realizaram atividade de pesquisa, resolução de problemas e assistiram vídeos. Esta diversificação de atividades para tratar um tema abstrato como matrizes teve uma resposta extremamente positiva por parte de todos os estudantes, pois, devemos destacar que não houve nenhuma desistência e nenhum momento foi registrada a ausência dos alunos.

Com este relato de experiência esperamos estimular a realização de pesquisas que visem determinar em que medida os resultados que observamos não são atípicos; ou seja, em que eles são representativos. Outros aspectos que pensamos que devem ser estudados são a eficácia das plataformas escolhidas como canais de comunicação e o papel que as

metodologias ativas utilizadas tiveram no engajamento dos alunos durante as atividades.

## Organização do trabalho

A estrutura deste trabalho é bastante simples. No Capítulo 2 se discute a fundamentação teórica que embasa este trabalho. Após fazer a distinção entre a modalidade de Educação a Distância (EAD) e o Ensino Remoto Emergencial (ERE) se descrevem algumas metodologias ativas de aprendizagens e os recursos digitais que usamos em nossa intervenção didática.

O Capítulo 3 apresenta o conteúdo matemático objeto de estudo da sequência de atividades relatada neste trabalho. Se discutem o conceito de matriz, as operações aritméticas entre matrizes, determinante, e por último a Cifra de Hill, um método de criptografia que utiliza matrizes.

O Capítulo 4 é o mais importante desta dissertação, pois, discute todos os detalhes da intervenção didática, desde o planejamento até o relato de experiência. Este capítulo também contém uma descrição detalhada do roteiro de atividades. Por último, no Capítulo 5 fazemos as considerações finais.

## 2 Fundamentação Teórica

Neste capítulo se discutem alguns aspectos teóricos e práticos que podem ajudar a contextualizar melhor o Ensino Remoto Emergencial, assim como auxiliar a compreender e elaborar atividades similares as relatadas nesta dissertação. Na Seção 1.1 discute-se a diferença entre a Educação à Distância (EAD) e o Ensino Remoto Emergencial (ERE) e na Seção 1.2 se descrevem algumas metodologias ativas de aprendizagem. Em seguida, na Seção 1.3 se faz uma breve descrição sobre alguns recursos que podem ser utilizados na implementação de aulas na modalidade ERE, e na Seção 1.4 se mencionam as competências recomendadas pela BNCC e que precisam ser estimuladas no ERE usando metodologias ativas com suporte das TDIC's (Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação). Por último na seção 1.5 se recomendam alguns cuidados que se devem ter no planejamento pedagógico durante o ERE.

É importante ressaltar que, salvo os recursos digitais utilizados neste trabalho, o conteúdo deste capítulo era desconhecido quando foi feita a intervenção com os alunos. Os princípios que guiaram a idealização e a implementação destas atividades foram puramente empíricos, baseados na experiência docente minha e do meu orientador, assim como em ideias pré-concebidas que temos sobre o tipo de tarefas que tem potencial de estimular os alunos. Assim, a primeira parte deste capítulo foi escrita com a intenção de fornecer algum embasamento teórico que sustente e permita compreender melhor a grande aceitação que estas atividades tiveram pelos alunos.

### 2.1 Educação a Distância e Ensino Remoto

Muitas pessoas pensam que o Ensino Remoto Emergencial (ERE) é o mesmo que a Educação à Distância (EAD). No entanto, é importante destacar as diferenças entre estas duas modalidades de ensino. No livro "Debates em Educação em Ciências: desafios e possibilidades" os autores deixam bem claro que

Uma das maiores características do ensino EAD, é que ele dispõe do AVA (Ambiente Virtual de Aprendizagem), com todas as ferramentas necessárias ao aprendizado do aluno. O AVA conta com videoaulas, exercícios de fixação e comentados, material didático, fóruns, avaliações, etc., toda uma metodologia pensada e preparada para atender ao aluno de maneira mais completa possível. (Pastorio; Ferreira, Tadiello, 2020, p.230)

Diferentemente da EAD, conforme Hodges et al. (2020), o ERE age na necessidade do momento, não sendo o objetivo o trabalho com aulas 'online' de forma permanente. No ERE o currículo, calendário e metodologia não podem e não devem ser estruturados



como na EAD. Ainda esclarece que experiências de aprendizagem bem planejadas são significativamente diferentes dos cursos oferecidos de modo remoto em resposta a uma crise ou desastre. Faculdades e universidades trabalhando para manter as atividades letivas, devem compreender essas diferenças quando forem avaliar adequadamente este ensino remoto de emergência. As atividades não presenciais podem acontecer por meios digitais (videoaulas, conteúdos organizados em plataformas virtuais de ensino e aprendizagem, redes sociais, correio eletrônico, ‘blogs’, entre outros); através de programas de televisão ou rádio; pela adoção de material didático impresso (com orientações pedagógicas) distribuído aos alunos e seus responsáveis. As tarefas devem contemplar leituras, projetos, pesquisas, e exercícios indicados nos materiais didáticos.

Com a pandemia causada pelo Covid-19 professores e alunos tiveram que manter o distanciamento social. Para que o ensino escolar continuasse, foi necessário a implantação do ERE em que professores e alunos tivessem que ficar a distância para preservarem sua saúde. Neste contexto, é importante que as instituições saibam diferenciar entre as modalidades EAD e ERE apesar do termo remoto se referir à distância geográfica entre alunos e professores. A modalidade de ensino EAD está bem consolidada, pois, é bem planejada e tem todas as estruturas e suporte para o professor ensinar. O ERE é uma mudança temporária de ensino devido ao contexto da crise. No cenário atual, o ERE não possui apoio de profissionais que trabalham em conjunto com o professor como no EAD. Cabe ao docente improvisar soluções e tentar criar possibilidades. As ações e intervenções de professores ainda são embrionárias carecendo de mais estudo e compartilhamento de experiências para que esse processo seja amadurecido de modo a amenizar impactos negativos na educação. O objetivo principal do ERE não é recriar um ambiente de interações entre diferentes sujeitos de toda a comunidade educacional de forma grandiosa, mas fornecer acesso temporário ao ensino de uma maneira rápida e confiável durante uma emergência ou crise.

Assim, de acordo com Hodges et al. (2020) o ERE é diferente da modalidade EAD. O ensino remoto não é nada novo. Em muitas ocasiões de conflitos em diversos países como no Oriente Médio adotou-se uma medida de emergência temporária para que os alunos não ficassem sem aulas. Todavia, vale destacar que momentos de ação emergenciais causadas por crises como esta do covid-19, são oportunidades para criar possibilidades e pesquisar práticas pedagógicas que possam atender as necessidades dos alunos e comunidades escolares de modo a amenizar os efeitos negativos na educação devido a um eventual prejuízo.

### 2.1.1 Educação a Distância

Sobre o ensino à distância, Hodges et al. (2020) destaca nove dimensões de aprendizagem ‘online’. As nove dimensões são modalidades, ritmo, proporção aluno-instrutor,

pedagogia, função do instrutor ‘online’, função do aluno, sincronia de comunicação ‘online’, função das avaliações ‘online’ e fonte de feedback. A Educação a Distância está bem consolidada e foi estudada há muito tempo. Vários estudos científicos discutem o aprendizado ‘online’ com eficiência. Os resultados destas pesquisas apontam que o aprendizado ‘online’ eficaz resulta de um planejamento, estruturação e desenvolvimento de conteúdo educativo. E esses resultados estão ausentes no ERE. Após a pandemia do COVID-19, é provável que não retornemos às práticas antigas. Nesta crise adquirimos novas experiências que irão nos ajudar em futuras situações análogas. Devemos aproveitar as lições desta experiência para preparar nós e nossos alunos para lidar melhor nesse tipo de situação caso venha a acontecer novamente.

### 2.1.2 Ensino Remoto de Emergência

Em contraste com a EAD, o ERE é uma mudança temporária para um modo de ensino alternativo devido a circunstâncias de crise. Envolve o uso de aulas totalmente remotas para dar continuidade à educação que, de outra forma, seriam ministradas presencialmente ou como híbridas e que retornarão a esse formato assim que a crise estiver superada. O objetivo principal nessas circunstâncias não é recriar um ecossistema educacional robusto, mas fornecer acesso ao andamento das aulas com suporte educacional de uma maneira que seja rápida de configurar e esteja disponível de forma confiável durante uma emergência ou crise. Quando entendemos o ERE dessa maneira, podemos começar a separá-la do EAD.

Segundo Hodges et al.(2020) existem muitos exemplos de outros países respondendo ao fechamento de escolas e universidades em tempos de crise, implementando modelos como aprendizagem móvel, rádio, aprendizagem combinada ou outras soluções que sejam contextualmente mais viáveis. Por exemplo, em um estudo sobre o papel da educação em situações de fragilidade e emergência, a Rede Interinstitucional para Educação em Emergências examinou quatro estudos de caso. Um desses casos foi o Afeganistão, onde a educação foi interrompida por conflito bélico onde as próprias escolas foram alvos. Para tirar as crianças das ruas e mantê-las seguras, foram usados DVDs e o rádio para manter e expandir o acesso à educação.

### 2.1.3 Avaliação no Ensino Remoto de Emergência

O processo de avaliação sempre foi um tema delicado e no período de pandemia, como os professores e alunos estão em um cenário que não é familiar, ela requer alguns cuidados mais específicos que detalhamos mais adiante. Além disso, devemos compreender como os alunos estão lidando com essa crise, pois, fatores externos tem trazido impactos negativos na aprendizagem, como mostra a “Pesquisa Juventudes e a Pandemia do Coro-

navírus” realizada pela Conjuve (Conselho da Juventude do Brasil). Esta pesquisa ouviu 33 000 jovens em todo Brasil. Entre muitos dados revelados há três que nos interessam.

1. 80% dos entrevistados teve o emocional abalado (medo, ansiedade, estresse, etc.) o que dificultou os estudos.
2. 80% sentiu dificuldades de tirar dúvidas com professores devido à falta de contato presencial, o que acabou dificultando o processo avaliativo.
3. 63% dos entrevistados não tiveram um ambiente tranquilo para estudar.

Assim, diante desses números, vale perguntar como avaliar a aprendizagem dos alunos na pandemia e como melhorar este instrumento valioso. O processo avaliativo tem objetivos que não diferem entre o ensino presencial e o remoto. Dentre os tipos de avaliação, três merecem destaque. Avaliação diagnóstica, formativa e somativa.

**Avaliação diagnóstica.** Este tipo de avaliação acontece no começo do período letivo escolar ou no início de uma nova abordagem de um objeto de conhecimento (conteúdo). O objetivo é identificar o grau de proficiência dos alunos como conhecimento adquirido, dificuldade ou ausência de pré-requisitos necessários para o prosseguimento do processo de aprendizagem de conteúdos novos.

**Avaliação formativa.** Esta avaliação acontece ao longo de um período letivo. Ela é processual e contínua, isto é, caracteriza-se pelo acompanhamento progressivo do aluno de modo que ele possa desenvolver os objetivos e as expectativas de aprendizagem. Esta forma de avaliar fornece dados da evolução de aprendizagem do aluno.

**Avaliação somativa.** Tem a função de classificar quantitativamente o aluno ao final de um ciclo. É organizada na forma de um conceito e na maioria das escolas brasileiras é apresentada no modelo de nota.

O tipo de avaliação mais afetado ao adotar o ERE é a formativa, e é sobre ele que fazemos a seguir algumas recomendações práticas que podem ajudar neste processo.

1. Diversificar os meios de avaliação formativa. O professor pode criar vários meios para acompanhar o progresso dos estudantes e vale destacar algumas como Autoavaliação, testes tradicionais, simulados, seminários e trabalhos em equipes.
2. Avaliar através de ferramentas digitais como o Google Forms que é disponibilizado no Google Classroom. Esta ferramenta é muito importante por que ela gera várias informações quantitativas e permite o professor analisar o progresso do aluno através de dados estatísticos em forma de gráficos.

3. Mapas mentais podem ser explorados como instrumentos para avaliar o andamento da aprendizagem dos alunos. Esta ferramenta pode possibilitar ao aluno, flexibilidade de raciocínio e liberdade de fazer a transposição da síntese do conteúdo. Além disso, permite o professor fazer juízo de valor ao grau de detalhamento das informações organizadas no mapa. Contudo, é importante que o professor ensine aos alunos construírem mapas mentais por se tratar de uma ferramenta que exige dos estudantes organizações do conteúdo, leitura para resumir e capacidade de síntese.

## 2.2 Metodologias Ativas de Aprendizagem

A palavra metodologia vem do grego *méthodos*, que significa *meta* (objetivo, finalidade) e *hodos* (caminho, intermediação), isto é caminho para se atingir um objetivo. Por sua vez, *logia* quer dizer estudo. Assim, *metodologia* significaria o estudo dos métodos, dos caminhos a percorrer, tendo em vista o alcance de um objetivo ou meta. Entende-se por metodologias de ensino a aplicação de diferentes métodos no processo de ensino-aprendizagem.

As metodologias ativas são modelos de ensino que visam desenvolver a autonomia e a participação dos alunos de forma integral. São formas de ensinar onde o aluno desenvolve sua autonomia no decorrer da escolaridade. Vários teóricos enfatizam, há muito tempo, a necessidade de se pautar o aprendizado no aluno de maneira a envolvê-lo e dialogar com ele. Os estudos de John Dewey (1959), pautados pelo aprender fazendo em experiências com potencial educacional, convergem com as ideias de Paulo Freire (1996), cuja aprendizagem devem despertar a curiosidade do aluno, permitindo que, ao pensar o concreto, conscientize-se da realidade, possa questioná-la construindo conhecimentos que possam gerar transformação. Nesta subseção, descrevemos as metodologias ativas usadas nas atividades descritas na dissertação.

### 2.2.1 Contribuições de Paulo Freire e Dewey para metodologias ativas

Historicamente, o processo de ensino tem-se centrado na figura do professor como detentor do conhecimento, devendo o aluno ter apenas o papel de memorizar e reproduzir o que é ensinado. Os questionamentos em relação às limitações do ensino tradicional ganharam força no século XVIII, com as tendências pedagógicas que elevou o reconhecimento do estudante como portador de direitos influenciados pela Universalização das conquistas sociais e das liberdades individuais. Nesse contexto histórico, a Revolução Francesa influenciou a educação no tocante aos marcos dos direitos em gerais. Essa Revolução foi um movimento social e político ocorrido no final do século XVIII que teve por objetivo principal derrubar o Antigo Regime e instaurar um Estado democrático que representasse e assegurasse os direitos de todos os cidadãos.

Nesse contexto, várias tendências pedagógicas sugeriram para democratizar os direitos de aprender. A partir daí surgem ideias pedagógicas que procuraram colocar o estudante como sujeito ativo do processo de ensino-aprendizagem. Dentre alguns pensamentos pedagógicos cabem destacar John Dewey. Sua visão enxergava a educação baseada no processo ativo de busca do conhecimento com liberdade. Para Dewey, a educação deveria formar cidadãos criativos com autonomia de gerenciar sua própria liberdade. Esta concepção pedagógica é construtivista, pois, há uma reconstrução do conhecimento a partir da vivência do educando. Apesar de um novo olhar para a educação no século XVIII, as práticas tradicionais não deixaram de existir.

Assim como a revolução francesa trouxe a ideia de liberdade, fraternidade e de igualdade, no século XX no Brasil nos anos 70 surgem resistências contra a repressão da ditadura militar. As ideias desse regime sustentavam ainda mais uma educação tradicional. É nesse contexto que surgem questionamentos contra um ensino verticalizado na (relação) professor-aluno. A partir daí o Patrono da educação do Brasil Paulo Freire buscou trazer ao ato de educar como elemento transformador da realidade do indivíduo. Ele fala como o ensino tradicional apoia e mantém o "status" da sociedade e propõe uma educação como foco a conscientização e o diálogo entre alunos e professores para que, juntos, eles se humanizem na hora de ensinar e aprender. As contribuições de Freire para a metodologia ativa são muitas e convergem com o que os educadores propõem hoje. Uma educação que o conteúdo não seja o centro em si o mesmo. Critica a educação bancária, ou seja, não vê com bons olhos quando o professor tem o aluno como um banco, no qual deposita o conhecimento. Na prática, quer dizer que o aluno é como um cofre vazio em que o professor acrescenta fórmulas, letras e conhecimento científico. Dessa forma, além dos alunos terem conteúdos do seu dia ele pode desenvolver autonomia. Nesse sentido, Freire afirma que

A narração, de que o educador é o sujeito, conduz os educandos à memorização mecânica do conteúdo narrado. Mais ainda, a narração os transforma em “vasilhas”, em recipientes a serem “enchidos” pelo educador. Quanto mais vá “enchendo” os recipientes com seus “depósitos”, tanto melhor educador será. Quanto mais se deixem docilmente “encher”, tanto melhores educandos serão. Desta maneira, a educação se torna um ato de depositar, em que os educandos são os depositários e o educador o depositante. Em lugar de comunicar-se, o educador faz “comunicados” e depósitos que os educandos, meras incidências, recebem pacientemente, memorizam e repetem. Eis aí a concepção “bancária” da educação, em que a única margem de ação que se oferece aos educandos é a de receberem os depósitos, guardá-los e arquivá-los. (Freire, Paulo, 1974 p.37)

## 2.2.2 Sala de aula invertida.

Chamada também de *flipped classroom*, é uma metodologia ativa criada pelos professores Jonathan Bergman e Aaron Sams, autores do livro “Sala de aula invertida. Uma metodologia ativa de aprendizagem” (BERGMANN e SAMS, 2012). Esta obra discute a ideia central do modelo de sala de aula invertida, no qual o estudante estuda previamente conteúdos indicados pelo professor para, no momento do encontro presencial, esclarecer dúvidas e aprofundar o tema pesquisado.

Esse tipo de estratégia pedagógica facilita a aprendizagem e faz com que os alunos estudem previamente o conteúdo que o professor indique, para que as aulas sejam uma continuidade do que foi pesquisado anteriormente pelos discentes. Esta metodologia tende a promover uma reflexão e discussão do que está sendo estudado pelo aluno para que depois na sala de aula haja feedback entre alunos e também com o próprio professor.

Nesta metodologia os alunos já chegam na sala de aula após ter estudado o conteúdo em casa. A escola vai se transformar em um ambiente de discussão, reflexão sobre o que foi estudado e os professores vão tirar dúvidas dos conteúdos que os estudantes estudaram em casa. Os pioneiros realizando esta metodologia percebera também uma pequena falha. Apesar de o aluno ser protagonista, o foco do processo ensino-aprendizagem ainda era o estudo para a prova e avaliação. Por este motivo eles modificaram a metodologia incorporando a aprendizagem para o domínio criando assim a Aula Invertida de Aprendizagem para o Domínio. Essa abordagem indica que a aprendizagem pode ser desenvolvida por qualquer pessoa, desde que sejam fornecidas condições de aprendizagem apropriadas, o que pressupõe que os estudantes aprendem no seu tempo, em seu próprio ritmo e em níveis diferentes.

No modelo tradicional os conteúdos são apresentados no mesmo ritmo e em um tempo determinado para todos os alunos da turma. No entanto, ao final do tempo programado para um tópico há sempre lacunas que não são sanadas totalmente por alguns alunos e já se inicia um novo conteúdo. Na Aprendizagem para o Domínio há uma preocupação de estabelecer um tempo necessário para que diferentes alunos possam desenvolver habilidades e competências atingindo o mesmo nível de domínio. Além disso, os conteúdos devem ser organizados em uma escala crescente de progressão, do mais simples para o mais complexo. Assim o aluno terá condições necessárias para prosseguir para a etapa seguinte quando sentir que está pronto para isso e não ficará prejudicado com a falta de base de alguns pré-requisitos para os próximos conteúdos. Conforme a BNCC (Brasil, 2018), os educadores devem promover a progressão do aprendizado durante o período observado, sem intenção de seleção, promoção ou classificação de alunos em "aptas" e "não aptas". Trata-se de reunir elementos para reorganizar tempos, espaços e situações que garantem os direitos de aprendizagem de todos os alunos.

### 2.2.3 A Aprendizagem Cooperativa.

A Aprendizagem Cooperativa é uma família de metodologias que visa proporcionar o aprendizado dos conteúdos através das habilidades cognitivas e socioemocionais em um ambiente de aprendizagem que há cooperação. Slavin (1994) considera que a Aprendizagem Cooperativa é uma abordagem educativa que envolve alunos a trabalhar em conjunto na resolução de um problema, tarefa ou na criação de um produto. A Aprendizagem Cooperativa é uma metodologia antiga, que experimentou um resultado bem significativo na

pesquisa e prática educacional nos últimos anos. De acordo com Slavin (1994), a pesquisa psicológica social sobre cooperação remonta a 1920, contudo, o estudo sobre metodologias de Aprendizagem Cooperativa e o seu uso na sala de aula só ocorreu a partir dos anos 70 com grande destaque do psicólogo e educador Spencer Kagan quem lançou o livro "Cooperative Learning Structures" que descreve como trabalhar a Aprendizagem Cooperativa a partir de 4 princípios de aprendizagem (Kagan, 2013). Estes princípios visam garantir a participação de todos os alunos nas atividades do grupo proporcionando o desenvolvimento da argumentação, comunicação, empatia, cooperação e a competência socioemocional, entre outras. Os 4 princípios da Aprendizagem Cooperativa segundo Spencer Kagan são.

**Participação equivalente.** Todos os alunos devem ter a mesma oportunidade de participar da atividade proposta. O trabalho deve ser distribuído igualmente entre os estudantes. Desse modo, um aluno não deve ter mais atribuições do que o outro.

**Interdependência positiva.** Caracteriza-se por um sentido de dependência mútua que se cria entre os alunos do grupo. Neste princípio o aluno cumpre a responsabilidade de executar a tarefa atribuída a ele individualmente. E, além disso, o grupo todo ganha quando um aluno compartilha, pois, assim todos têm a oportunidade de observar outros pontos de vista.

**Produção individual.** Cada membro da equipe deve impactar positiva e diretamente o grupo como um todo na sala de aula. Assim, cada estudante é responsável por executar sua tarefa em benefício do restante do grupo.

**Interação simultânea.** Visa oportunizar mais número de alunos trabalhando ativamente ao mesmo tempo.

Alguns dos métodos de Aprendizagem Cooperativa mais utilizados nos ambientes escolares estão detalhadamente descritos em Slavin (1994) e apresentados a seguir.

**Aprendizagem em Grupos de Estudantes (Student Team Learning).** A Aprendizagem em Grupos de Estudantes enfatiza o uso de objetivos de grupo e sucesso de grupo, as quais podem ser alcançadas somente se todos os membros do grupo entenderem os objetivos a serem alcançados. A atividade não visa fazer algo em grupo, mas aprender algo como um grupo.

**Divisão de Escopos entre Equipes de Estudantes.** Os alunos são organizados em grupos heterogêneos de quatro membros. Logo que o professor apresenta a tarefa, os grupos se reúnem para verificar se todos os membros compreenderam a atividade. Em seguida, os estudantes retiram questionários individuais que devem ser respondidos sem a ajuda uns dos outros. A pontuação de cada estudante é comparada com

suas médias anteriores, e os pontos são atribuídos ao grupo de acordo com o grau de evolução de cada um. Os grupos que alcançam um determinado número de pontos recebem certificados ou outras premiações.

**Torneios de Jogos em Equipes.** Os alunos participam de jogos acadêmicos com membros de outras equipes para pontuar a sua equipe.

**Jigsaw II (Quebra-cabeças II).** Os estudantes formam grupos de 4 indivíduos heterogêneos. Recebem textos para leitura, e cada membro da equipe é selecionado para estudar um aspecto do texto. Em seguida, os ‘especialistas’ de cada equipe se reúnem para discutir seus temas comuns, e depois voltam aos seus grupos para ensinar seus tópicos. A atividade é encerrada com uma avaliação sobre todo o texto.

**Investigação em Grupo.** Os estudantes se organizam em grupos de 2 a 6 membros, escolhem tópicos de um assunto que está sendo abordado em sala de aula, dividem estes tópicos em tarefas individuais e organizam a preparação do trabalho de grupo. Cada grupo deve apresentar suas descobertas para toda a turma.

## 2.3 Recursos para o ensino remoto

Há diversos recursos que podem ser utilizados para implementar as aulas durante o ERE, tanto recursos digitais quanto analógicos.

### 2.3.1 Recursos analógicos

Os recursos analógicos consistem em materiais impressos e materiais manipuláveis. Aqui vamos destacar apenas os materiais impressos, pois foram os únicos utilizados neste trabalho.

O material impresso deve ser disponibilizado pela escola, pois não é comum as pessoas terem impressora em casa. O professor pode enviar o material escolhido para a escola por diversas fontes, este material é fotocopiado ou impresso na unidade escolar, para depois ser distribuído para os alunos obedecendo os protocolos sanitários. O material impresso pode consistir em uma lista de exercícios, material de leitura, notas de aula, roteiros de atividades, etc.

Um material impresso que podemos destacar são os Cadernos de Aprendizagem, que contém os conteúdos essenciais para os ensinos, fundamental, médio e EJA, elaborados pela Secretaria de Educação do Estado da Bahia (SEC) em 2020, juntamente com vários professores voluntários. Estes cadernos podem ser encontrados no site <<http://estudantes.educacao.ba.gov.br/cadernos-de-apoio>> para ser impressos e entregar aos alunos. A Superintendente de Políticas para a Educação Básica da Secretaria de Educação do Estado da Bahia, Manuelita Brito, falou sobre o objetivo e estrutura dos cadernos:



Os cadernos são materiais de apoio que ajudam no planejamento e, também, fortalecem tanto o trabalho pedagógico, quanto a autonomia dos estudantes. Organizamos um material que pode ser usado em ambientes on-line ou off-line. Os cadernos estão estruturados, preferencialmente, para o uso digital, com o formato vertical dos conteúdos, observando a questão da leitura e legibilidade. São materiais objetivos e que podem ser acessados por qualquer dispositivo. É importante destacar que os cadernos não substituem os livros didáticos. (<http://escolas.educacao.ba.gov.br/noticias/secretaria-da-educacao-do-estado-lanca-caderno-de-apoio-aprendizagem-da-area-de-linguagens>)

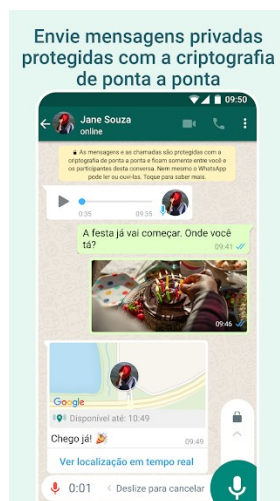
As atividades descritas nesta dissertação não usaram este material. As atividades realizadas com os alunos, neste trabalho, antecedem a criação dos cadernos de apoio feito pela Secretaria de Educação mas apresentam uma certa semelhança pois é uma trilha de aprendizagem cujas atividades são feitas em etapas e cada uma das quais depende do estágio anterior.

### 2.3.2 Recursos digitais

Nesta subseção são descritos apenas os recursos digitais que foram utilizados nas atividades descritas nesta dissertação.

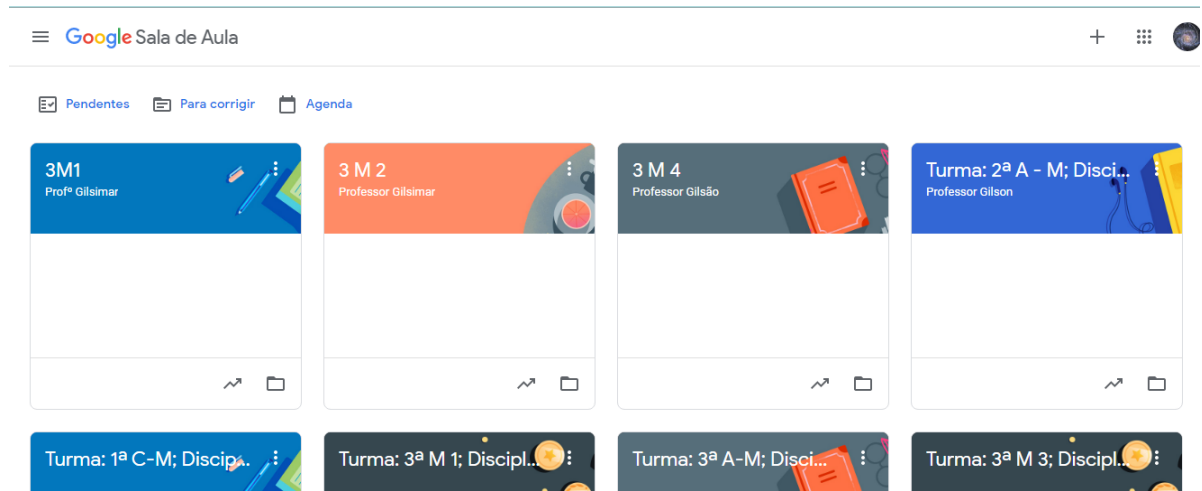
1. **WhatsApp.** É um aplicativo multiplataforma de mensagens instantâneas e chamadas de voz para smartphones (<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.whatsapp&hl=en&gl=US>). Por se tratar de uma ferramenta muito popular, pode ser usado para enviar mensagens de texto, imagens, vídeos e documentos em PDF, além de fazer ligações grátis por meio de vídeo chamada com um grupo de alunos para tirar dúvidas com os professores. Possibilita também compartilhar con-

Figura 1 – Whatsapp



Fonte: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.whatsapp>

Figura 2 – Google Classroom

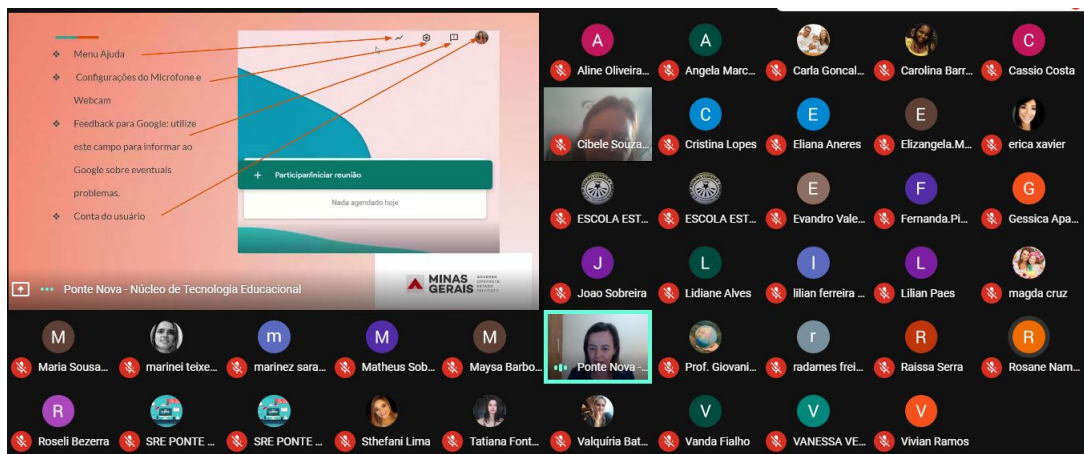


Fonte: <https://classroom.google.com/h>

teúdos no formato de áudio e vídeo, e criar fóruns de discussão e um plantão de dúvidas.

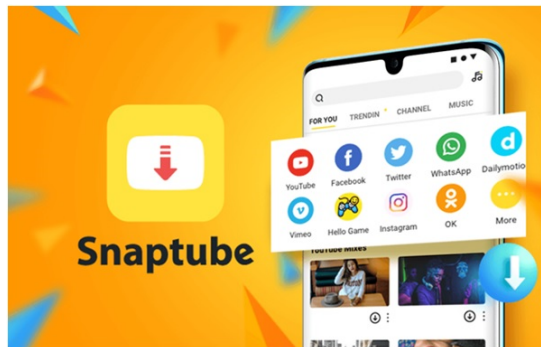
2. **Google Classroom.** É um recurso gratuito para escolas e qualquer pessoa que tem uma conta Google (<<https://classroom.google.com/h>>). Com ele, professores e alunos podem se comunicar de forma assíncrona e criar turmas de salas de aula virtuais. O aplicativo pode ser instalado em computadores e em smartphones. Uma grande vantagem é que ele serve de repositório de atividades, vídeos e arquivos. Os alunos que não tem internet podem ir na escola, conectar ao wi-fi da instituição e baixar os arquivos enviados pelos professores. Todo o conteúdo fica armazenado no dispositivo podendo ser acessado no modo off-line.
3. **Google Meet.** É um serviço de comunicação por vídeo conferência desenvolvido pelo Google. (<<https://meet.google.com/?hs=197&pli=1&authuser=0>>) Este apli-

Figura 3 – Google Meet



Fonte: <https://srepontenova.educacao.mg.gov.br/index.php/9-noticias/186-google-meet-videoaulas>

Figura 4 – Snaptube

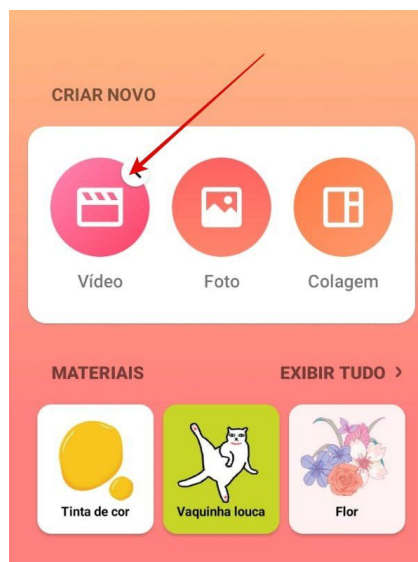


Fonte: <https://tipsmake.com/data1/mimages/Snaptube-Video-Downloader-0.jpg>

cativo pode ser integrado ao Google Classroom podendo realizar as aulas síncronas com todos os alunos cadastrados na turma.

4. **Snaptube e Inshot.** O Snaptube é um aplicativo gratuito para Android que permite baixar vídeos (<<https://www.snaptubeapp.com/>>). Já o Inshot é um aplicativo que faz a edição de vídeos (<<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.camerasideas.instashot&hl=en&gl=US>>). Além disso, pode ser utilizado para reduzir o tamanho de arquivos o que o torna uma ferramenta de valor considerável dada a baixa velocidade da rede de internet da nossa região.
5. **Zoom.** É uma plataforma de videoconferências que possui diversas funções (<<https://zoom.us/>>). É muito útil no ERE pois os professores podem compartilhar a tela com os alunos, interagir com eles em tempo real numa lousa digital, slides e enviar mensagens personalizadas. A versão gratuita permite reuniões de 40 minutos com até 100 participantes.

Figura 5 – Inshot



Fonte: <https://t.ctcdn.com.br/8I7AzcSuqYyiICW6bCWky2Ys=/i440978.jpeg>

Figura 6 – Zoom



Fonte: <https://media.ambito.com/>

6. **Plataformas Multimídias Educacionais e videotecas.** Estas plataformas são repositórios de grandes acervos de recursos educacionais como experimentos, vídeos, materiais concretos, listas de exercícios e outros. Nelas é possível fazer download destes recursos para disponibilizar aos alunos. Dentre estas plataformas podemos citar o Portal da Matemática OBMEP (<<https://portaldaobmep.impa.br/index.php/site/index?a=1>>) e o Portal Multimídia da Unicamp (<<https://m3.ime.unicamp.br/>>), assim como o YouTube que pode ser considerado uma vídeoteca de uso geral.

### 2.3.3 Como a interação com as tecnologias poderão propiciar a construção do conhecimento.

As Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação está cada dia presente nas escolas e possibilitando o acesso de alunos e professores às novas ferramentas digitais, que quando bem trabalhadas, propicia o desenvolvimento cognitivo. O acesso à ‘internet’ vem

Figura 7 – Portal da Matemática OBMEP



Fonte: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/site/index?a=1>

Figura 8 – Portal Multimídia Unicamp



Fonte: <https://https://m3.ime.unicamp.br/static/media/header.c654293f.png>

revolucionando os métodos de pesquisa, mas é preciso avaliar adequadamente o tipo de informação na perspectiva de auxiliar a construção do conhecimento. As TDICs possibilitam o compartilhamento em rede e a integração de conhecimento em grupo, ultrapassando fronteiras de espaço e tempo, fazendo com que conteúdos e informações sejam acessados em tempo real.

É preciso entender que os alunos pertencem ao mundo digital e que a nova geração faz parte deste novo contexto. A tecnologia desperta o interesse e aproxima os objetos de conhecimentos do universo digital em que os estudantes estão inseridos. A integração das novas tecnologias na educação quando bem empregados ajuda na construção do conhecimento. Mas se o uso dessas ferramentas forem propostas por si só como mera fonte de fornecer informação, a finalidade do uso de dispositivos digitais na educação passa a ser uma prática tradicional e sem efeito. Para que haja a construção do conhecimento com o uso das tecnologias é necessária uma postura crítica e reflexiva. Ou seja, o uso da tecnologia no ensino pode ser ainda mais eficaz se novos modelos pedagógicos diferenciados forem propostos com práticas pedagógicas reformuladas de forma construtiva.

Existem muitas ferramentas tecnológicas que traz respostas prontas baseadas apenas na instrução. É semelhante um modelo de ensino de matemática que traz para os alunos modelos de resolução de problemas prontos ou conjuntos de instruções que não faz o aluno pensar. Por outro lado, tem programas como o LOGO que é uma linguagem de programação, voltada para crianças. Ela traz uma concepção diferente do instrucionismo, pois, se fundamenta numa concepção construcionista onde quem recebe instruções é o computador e não o aluno. Por tanto, o uso da tecnologia ajuda na construção do conhecimento quando o aluno é ativo em relação à máquina.

A Linguagem Logo foi desenvolvida em 1968 pelo sul-africano Seymour Papert e se caracteriza como uma linguagem de programação que possibilita a criança dar instruções ao computador para que ele execute as ações determinadas por ela. A vantagem do aluno expressar a resolução de um problema utilizando essa linguagem de programação, é que este recurso fornece um feedback imediato das ações do aprendiz. Assim, eles têm a oportunidade de comparar suas ideias iniciais com o resultado obtido no programa; analisar e refletir sobre seus acertos e erros; levantar hipóteses; fazer novas tentativas, verificar seus conceitos e ideias e, assim construir novos conceitos (ALMEIDA,2000; VALENTE, 2007).

Em síntese, a construção do conhecimento através das novas tecnologias pode ser alcançada se o educador propiciar momentos, com uso das TDCIs, que estimulem o incentivo da leitura possibilitando ao aluno criar histórias, elaborar problemas, promover atividade que possa desenvolver concentração, raciocínio e o pensamento lógico-matemático, etc. A sequência didática descrita nesta dissertação usamos diversos recursos tecnológicos, mas sem perder de vista o protagonismo dos alunos que apesar de usar as ferramentas digitais não receberam respostas prontas, mas tiveram que pensar e construir seu conhecimento.

## 2.4 Competências segundo a BNCC

Integrando recursos mencionados na seção anterior é possível montar atividades pedagógicas seguindo metodologias ativas de aprendizagem, de modo a estimular nos alunos algumas das competências recomendadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Segundo a Base Nacional Comum Curricular,

competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p.8).

As competências que estão na BNCC a serem desenvolvidas nos alunos com este trabalho são descritas a seguir, na Seção 4.3

- **Competência 1.** Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção da sociedade.
- **Competência 2.** Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer a abordagem própria das ciências para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções.
- **Competência 4.** Comunicar-se por meio de linguagens verbais, textuais, corporais, artísticas e científicas, utilizando plataformas multimídia analógicas e digitais.
- **Competência 5.** Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de forma crítica, significativa e ética.
- **Competência 9.** Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação fazendo-se respeitar e respeitando o outro, com acolhimento e valorização da diversidade dos indivíduos, sem preconceitos de qualquer natureza.

## 2.5 Planejamento pedagógico das aulas remotas

Como vimos na Seção 1.1, a EAD e o ERE são modalidades de ensino muito diferentes entre si, por tanto as estratégias para planejamento de aulas na EAD não se aplicam ao planejamento de aulas no ERE. Diante da situação da pandemia a ABED, no intuito de ajudar a educação básica, traduziu e divulgou uma lista de recomendações do site <<https://www.qualitymatters.org/>> sobre o planejamento pedagógico das aulas remotas.

1. Considere o uso de peças curtas de multimídia para interação e garanta que os alunos tenham acesso fácil a qualquer software, plug-ins etc.
2. Planeje oportunidades de aprendizado ativo e use as ferramentas do curso para facilitar significativamente a interação e o aprendizado ativo dos alunos.
3. Forneça materiais e atividades acessíveis para atender às necessidades de diversos alunos.
4. Forneça aos alunos feedback oportuno para permitir que eles acompanhem seu progresso no aprendizado.
5. Explique especificamente como cada tarefa está relacionada aos objetivos do curso e como você avaliará o trabalho enviado.
6. Explique aos alunos como os objetos de aprendizagem os ajudam a concluir as atividades do curso e a alcançar os objetivos de aprendizado do curso.

Cabe observar que quando as atividades escritas neste trabalho foram planejadas não tínhamos conhecimento desta lista de recomendações. No entanto, ao comparar o planejamento feito pôde perceber que de modo intuitivo conseguimos satisfazer as primeiras cinco observações, pois, elas são muito naturais.

### 3 Conteúdo Matemático

Este capítulo descreve os elementos básicos da teoria de matrizes numéricas reais. Aqui é apresentado o conteúdo de matrizes que foi trabalhado com os alunos nas atividades de intervenção didática. No entanto, é fundamental destacar que este objeto de conhecimento não foi apresentado aos alunos da forma que se encontra neste capítulo.

#### 3.1 Definições Gerais e Exemplos Básicos

**Definição 1.** Dados dois números naturais  $m$  e  $n$ , definimos uma matriz numérica  $A$  de ordem  $m \times n$ , como uma tabela formada por números reais distribuídos em  $m$  linhas e  $n$  colunas.

Uma matriz  $A$  é representada por  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , com  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ , onde  $a_{ij}$  é um elemento da matriz  $A$ , e é organizada da seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matriz acima é de ordem  $m \times n$ . No caso em que  $n = m$  temos uma matriz quadrada de ordem  $n$ , e nestas matrizes chamamos diagonal principal ao conjunto dos elementos  $a_{ij}$  tais que  $i = j$  e diagonal secundária ao conjunto dos elementos  $a_{ij}$ , tais que  $i + j = n + 1$ . Por exemplo, a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

é uma matriz do tipo  $2 \times 2$ . A diagonal principal da matriz  $M$  é formada pelos números 5 e 3, e a diagonal secundária é formada pelos números 2 e 4.

**Definição 2.** Dizemos que duas matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , de mesma ordem, são iguais, escrevendo  $A = B$ , quando  $a_{ij} = b_{ij}$  para todo  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ .

Por exemplo, se  $x$  e  $y$  denotam números reais, temos que as matrizes

$$\begin{bmatrix} x & 6 \\ 7 & y \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

são iguais quando  $x = 1$  e  $y = 2$ .



**Definição 3.** Uma matriz é dita nula quando todos seus elementos são iguais a zero e uma matriz quadrada é dita identidade quando todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e todos os outros iguais a 0.

Por exemplo, as matrizes  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  são as matrizes de identidade de ordem 2 e 3; e a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é nula de ordem 2

**Definição 4.** Dada uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  chama-se transposta de  $A$  a matriz  $A^t = (b_{ij})_{n \times m}$ , do tipo  $n \times m$ , onde  $b_{ij} = a_{ji}$  para todo  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ .

### 3.1.1 Operações com matrizes

**Definição 5.** Se  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$  são duas matrizes de mesma ordem  $m \times n$ , a soma de  $A$  e  $B$ , denotada  $A + B$ , é a matriz  $C = (c_{ij})$  de ordem  $m \times n$  tal que  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  para todo  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ .

Por exemplo se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas de ordem 2

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

**Teorema 3.1.** A adição de matrizes do tipo  $m \times n$  goza das seguintes propriedades.

- (i) Propriedade comutativa.  $A + B = B + A$ .
- (ii) Propriedade associativa.  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .
- (iii) Existência do elemento neutro.  $A + 0 = 0 + A = A$ .
- (iv) Existência do elemento oposto.  $A + (-A) = (-A) + A = 0$ .
- (v) Lei do cancelamento. Se  $A + C = B + C$  então  $A = B$ .

*Demonstração.* Demonstramos cada propriedade por separado.

(i) Fazendo  $A + B = C$  e  $B + A = D$ , temos para todo  $i$  e todo  $j$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = d_{ij}$$

logo  $A + B = B + A$ .

(ii) Fazendo  $(A + B) + C = X$  e  $A + (B + C) = Y$ , temos

$$x_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = y_{ij}$$

por tanto,  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .

(iii) Impondo  $A + 0 = B$ , temos  $b_{ij} = a_{ij} + 0 = a_{ij}$ , logo  $B = A$

(iv) Fazendo  $A + (-A) = B$  temos  $b_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$ , logo  $B=0$ .

Por tanto,  $A + (-A) = (-A) + A = 0$ .

(v) Fazendo  $A + C = B + C$ , temos para todo  $i$  e  $j$

$$a_{ij} + c_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \text{ então } a_{ij} + c_{ij} + (-c_{ij}) = b_{ij} + c_{ij} + (-c_{ij})$$

logo  $A = B$ .

A prova está completa. □

**Definição 6.** Se  $A = (a_{ij})$  é uma matriz de ordem  $m \times n$  e  $k$  é um número real, o produto de  $k$  e  $A$ , denotado por  $kA$ , é a matriz  $C = (c_{ij})$  da mesma ordem que  $A$ , onde  $c_{ij} = ka_{ij}$  para todo  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ .

$$\text{Por exemplo, se } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ então, } 2A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

**Definição 7.** Dadas as matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{n \times p}$ , o produto de  $A$  por  $B$ , denotado por  $AB$ , é a matriz  $C = (c_{ij})_{m \times p}$ , onde

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir}b_{rj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

para cada par  $i$  e  $j$  com  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq p$ .

**Teorema 3.2.** A multiplicação de matrizes do tipo  $m \times n$  goza das seguintes propriedades.

(i) Propriedade associativa.  $(AB)C = A(BC)$ .

(ii) Propriedade Distributiva à direita.  $(A + B)C = AC + BC$ .

(iii) Propriedade Distributiva à esquerda.  $C(A + B) = CA + CB$ .

- (iv) Existência do elemento neutro. Dada a matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  seu elemento neutro pela esquerda é a matriz identidade  $I_m$  e seu elemento neutro pela direita é a matriz identidade  $I_n$ .

$$I_m \cdot A = A = A \cdot I_n$$

*Demonstração.* Provamos cada propriedade por separado.

- (i) Sejam as matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{jk})_{n \times p}$  e  $C = (c_{kl})_{p \times r}$ . Pondo  $D = AB = (d_{ik})_{m \times p}$ ,  $E = (AB)C = (e_{il})_{m \times r}$  e  $F = BC = (f_{jl})_{n \times r}$ , temos que,

$$\begin{aligned} e_{il} &= \sum_{k=1}^p d_{ik} \cdot c_{kl} = \sum_{k=1}^p \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{kl} \\ &= \sum_{k=1}^p \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \left( \sum_{k=1}^p b_{jk} \cdot c_{kl} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot f_{jl} \end{aligned}$$

Assim,  $(AB)C = A(BC)$

- (ii) Fazendo  $D = (A + B)C = (d_{ik})_{m \times p}$ , temos.

$$\begin{aligned} d_{ik} &= \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) \cdot c_{jk} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} \cdot c_{jk} + b_{ij} \cdot c_{jk}) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot c_{jk} + \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot c_{jk} \end{aligned}$$

Logo,  $(A + B)C = (AC + BC)$

- (iii) Análoga a (ii).

- (iv) Seja  $I_m = \delta_{ij}$  e  $A = (a_{jk})$ . Onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Fazendo  $I_m \cdot A = B$  temos

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^m \delta_{ij} a_{jk} = \delta_{i1} a_{1k} + \delta_{i2} a_{2k} + \cdots + \delta_{im} a_{mk} = a_{ik}.$$

Logo,  $I_m \cdot A = A$ .

A prova de que  $A \cdot I_n = A$  é análoga.

A prova está completa. □

**Definição 8.** Uma matriz quadrada  $A$  é dita inversível quando existe outra matriz denotada de  $A^{-1}$  tal que  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ .

**Exemplo 1.** Dada a matriz  $X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  sua inversa é  $Y = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ , pois o produto  $X \cdot Y$  é a matriz identidade.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-3) & 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Definição 9.** O determinante de uma matriz  $A$  quadrada de ordem 2 é

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

**Teorema 3.3.** O determinante do produto de duas matrizes quadradas é igual ao produto do determinante dessas matrizes.

O seguinte teorema estabelece a propriedade mais importante do determinante, e aqui vamos prova-la apenas para determinantes de ordem 2.

*Demonstração.* Vamos provar esta propriedade apenas para matrizes quadradas de ordem 2. Se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas de ordem 2, fazendo  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ , temos

$$AB = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix}.$$

Por outro lado temos  $|A| = ad - bc$ ,  $|B| = xw - yz$  e

$$|AB| = (ax + bz)(cy + dw) - (ay + bw)(cx + dz) = adxw + bcyz - bcxw - adyz$$

$$|A| \cdot |B| = (ad - bc)(xw - yz) = adxw + bcyz - bcxw - adyz$$

Logo  $|AB| = |A| \cdot |B|$ . □

Há mais quatro propriedades para o determinante da matriz quadrada  $A$  que foram discutidas nas atividades com os alunos.

**Teorema 3.4.** O determinante de uma matriz é igual o determinante de sua transposta.

*Demonstração.* Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  com a sua matriz transposta  $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

temos que  $|A| = ad - bc$  e  $|A^t| = ad - bc$ . e por tanto  $|A| = |A^t|$  □

**Teorema 3.5.** Ao trocarmos duas linhas ou duas colunas de posição de uma matriz, o valor do seu determinante passa a ser oposto ao determinante da anterior.

*Demonstração.* Sejam as matrizes  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$  calculando os determinantes das matrizes  $A$  e  $B$  temos  $|A| = ad - bc$  e  $|B| = bc - ad$ . Logo  $|A| = -|B|$   $\square$

**Teorema 3.6.** Se os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz forem multiplicadas por uma constante  $k$  real o determinante fica multiplicado pela mesma constante  $k$ .

*Demonstração.* Seja  $k$  um número real,  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$ . Calculando os determinantes de cada matriz temos  $|A| = ad - bc$  e  $|B| = kad - kbc = k(ad - bc)$ . Assim,  $|B| = k|A|$ .  $\square$

**Teorema 3.7.** Se duas linhas ou duas colunas de uma matriz forem iguais, então o determinante da matriz é zero.

*Demonstração.* Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$  temos  $|A| = ab - ab = 0$   $\square$

## 3.2 Criptografia através de Matrizes

Um sistema de criptografia é um método ou conjunto de métodos para codificar e decodificar mensagens. A qualidade de um sistema de criptografia se mede pela dificuldade em se descobrir o conteúdo das mensagens quando não se tem conhecimento de certos detalhes do método de decodificação. As matrizes são usadas em um sistema de criptografia conhecido por cifra de Hill, que recebe este nome por que foi criado por um matemático americano Lester S. Hill em 1929. Nesta seção vamos descrever este sistema de criptografia através de um exemplo.

### 3.2.1 Descrição do método

A cifra de Hill consiste em três ingredientes. A pré-codificação, a codificação e a decodificação.

**Pré-codificação.** Suponha que a mensagem que queremos enviar seja "EU AMO A UESC!". Para poder codificar esta mensagem devemos transforma-la em código numérico, e com esse objetivo usamos a seguinte tabela de tradução.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
U	V	W	X	Y	Z		.	!	?
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Esta tabela de tradução estabelece uma correspondência biunívoca entre caracteres alfa-numéricos e um conjunto de números, de modo que cada caractere é substituído pelo número que está logo abaixo dele. No caso da nossa mensagem, depois de usar a tabela de tradução ela fica assim.

E	U		A	M	O		A		U	E	S	C	!
5	21	27	1	13	15	27	1	27	21	5	19	3	29

Para poder passar para o processo de codificação, esta linha de números é transformada na seguinte matriz de duas linhas,

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 21 & 27 & 1 & 13 & 15 & 27 \\ 1 & 27 & 21 & 5 & 19 & 3 & 29 \end{bmatrix}.$$

**Codificação.** Para codificar a mensagem  $M$  escolhemos uma matriz quadrada de ordem 2 inversível, por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A mensagem codificada é o produto  $P = AM$ . No caso da nossa mensagem obtemos

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 21 & 27 & 1 & 13 & 15 & 27 \\ 1 & 27 & 21 & 5 & 19 & 3 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 198 & 186 & 28 & 134 & 60 & 226 \\ 7 & 75 & 69 & 11 & 51 & 21 & 85 \end{bmatrix}.$$

A matriz  $P$  obtida dessa maneira é a mensagem codificada.

**Decodificação.** Para decodificar a mensagem  $P$ , multiplicamos pela inversa da matriz  $A$ , pois

$$A^{-1}P = A^{-1}(AM) = M$$

## 4 Descrição da Intervenção

Neste capítulo se apresentam os detalhes principais da sequência de atividade didática objeto desta dissertação. A Seção 4.1 discute o contexto no qual este trabalho foi realizado, e na Seção 4.2 se descrevem as etapas preliminares do planejamento da intervenção, como a delimitação da turma, e a escolha dos recursos digitais a serem usados. A descrição da sequência de atividade propriamente é descrita na seção 4.3 Na Seção 4.4 se apresenta o roteiro detalhado de cada uma das atividades agrupadas por semana. Por último, a Seção 4.5 contém o relato dos aspectos mais relevantes do que aconteceu durante a realização das atividades.

### 4.1 O contexto da intervenção

O trabalho foi realizado no Colégio Estadual na cidade de Gandu, a qual possui uma população de mais de 30.000 habitantes, localizada nas margens da BR 101, no baixo sul distante 140,8 km de Itabuna. Sua economia está centrada no cultivo do Cacau e no comércio. Os alunos são em sua maioria da zona urbana e de cidades circunvizinhas. No entanto, os alunos da zona rural tem fácil acesso locomotivo para a cidade e dispõem de internet.

A unidade escolar consta de 12 salas equipadas com ventiladores e 3 salas com ar condicionado. Além de duas salas de vídeo com projetor de imagem, possui um grande laboratório de informática, um recém inaugurado laboratório de ciências da natureza e um Labmath (laboratório de matemática). O Colégio funciona regularmente nos turnos matutino, vespertino e noturno nas modalidades ensino médio regular e Eja. A unidade escolar tem um total de 30 turmas, sendo que destas 14 são no matutino, 4 no vespertino e 12 no noturno. A escola possui 6 professores de matemática.

No ano de 2020 as atividades durante a pandemia foram suspensas nas escolas do estado. O ensino remoto na Rede Estadual só veio a ser aprovado no mês de Março de 2021. No entanto, assim que fecharam as escolas, alguns professores chegaram consenso de que seria pertinente continuar o andamento das aulas para que os estudantes não ficassem parados. Desse modo, as aulas nas escolas continuaram de forma remota usando vídeos aulas disponíveis no YouTube e aulas gravadas pelos próprios professores. No entanto por estas aulas não passarem de uma transposição das práticas tradicionais para atrás das câmaras teve como consequência uma desistência maciça de alunos. Foi com a intenção de contornar este problema que pensamos em fazer aulas síncronas e assíncronas deixando os estudantes mais participativos e protagonistas no processo de ensino-aprendizagem.

Por conta da falta de experiência com a modalidade de ensino remoto não previ-

mos o volume de trabalho que este tipo de aula envolve. Assim, as atividades síncronas e assíncronas se limitaram a atividades motivacionais que estimulassem a participação e engajamentos dos alunos, sem fazer ênfase nos conteúdos que os alunos deveriam estar aprendendo. Preocupado com esta realidade decidi experimentar a realização de uma série de atividades síncronas e assíncronas que focassem na inclusão de conteúdos.

As atividades relatadas neste trabalho fazem parte das atividades que realizei na escola neste contexto. Por ter uma carga horária muito grande, pois ensino em 7 turmas de 3<sup>o</sup> ano, 2 turmas de física do segundo ano e uma turma de 2<sup>o</sup> ano de matemática, optei por escolher apenas uma turma do 3<sup>o</sup> ano matutino (Turma A) para realizar esta intervenção didática. A turma escolhida foi uma do 3<sup>o</sup> ano do Ensino do ensino médio composta de 20 alunos, sendo 14 do sexo feminino e 6 do sexo masculino. Nesta turma há dois alunos da zona rural e uma aluna da cidade circunvizinha de Itamari. A escolha da turma se deu pelo fato de ter trabalhado com ela durante os três anos do ensino médio.

## 4.2 Planejamento Preliminar

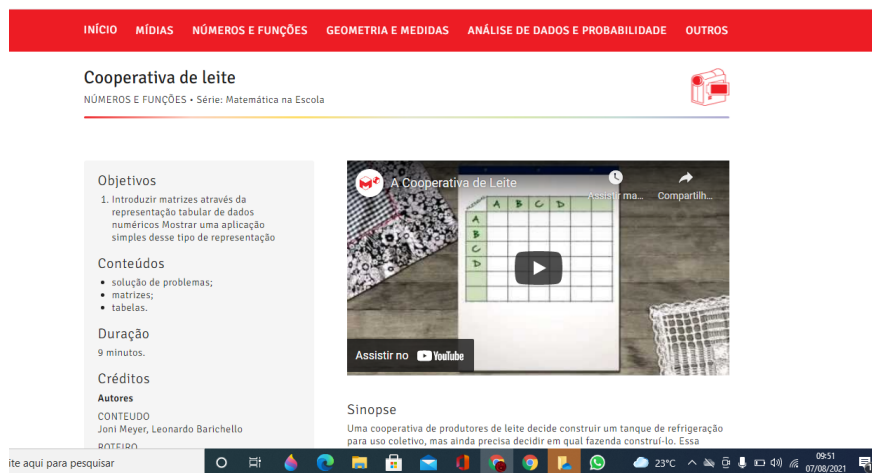
1. **Checagem dos recursos digitais.** Para poder ter uma ideia do número de alunos que poderia participar das atividades foi verificado quantos deles tinham acesso à internet. Foi constatado que todos tinham, porém 8 alunos usavam dados móveis do celular com uma qualidade não tão boa.
2. **Algumas ações em relação a internet de baixa qualidade.** Por conta do levantamento anterior, fiz o download do aplicativo Inshot para poder diminuir o tamanho dos arquivos em vídeos e imagem que iriam ser utilizados nas atividades.
3. **Escolha do objeto de conhecimento matemático.** O tema de matrizes foi escolhido por se tratar de um tema abstrato que costuma ser um desafio nas aulas de matemática.
4. **Escolha das plataformas de aprendizagem on-line.** As plataformas escolhidas foram o WhatsApp, o Google Meet, Google Classroom e o Zoom. O WhatsApp é um aplicativo de uso generalizado e os alunos estão familiarizados com ela. As duas plataformas do Google foram utilizadas pelo fato da escola já as ter adotado no início das atividades remotas. Por último decidi incluir o Zoom pois ele permite a interação na lousa assim como o uso de mensagens personalizadas.

## 4.3 Descrição das Atividades

Nesta seção descrevemos a programação das atividades realizadas. A sequência de 8 atividades programadas foi organizada em 3 aulas síncronas e 5 assíncronas a serem



Figura 9 – Página do vídeo original usada na Atividade 1.



Fonte: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1076>

realizadas ao longo de 3 semanas; duas atividades na primeira semana, e três em cada uma das outras. Cada uma das atividades síncronas foi programada para ser realizada em uma sessão de duas horas.

Para a primeira atividade os alunos recebem via WhatsApp e Google Classroom um arquivo PDF com a descrição das tarefas a serem realizadas e um vídeo retirado do Portal Matemática e Multimídia da Unicamp (<<https://youtu.be/AXiNp1o88jA>>), e editado usando o InShot para diminuir o tamanho do arquivo de 10Mb para 3,2Mb. O vídeo editado se encontra no meu canal do YouTube e pode ser acessado via o link (<<https://youtu.be/EO9hES6dnCE>>). O vídeo apresenta um problema de otimização no transporte de leite entre as fazendas de uma cooperativa, cuja solução leva diretamente ao conceito de matriz.

A segunda atividade é de modo síncrono e consiste em três etapas. A primeira é a socialização das as soluções do problema proposto no vídeo da primeira atividade, a seguir se aproveita a discussão dessas soluções para introduzir o conceito de matriz, e por último se apresenta um problema similar ao da primeira atividade para ser resolvido durante a sessão.

A terceira atividade é um momento assíncrono no qual as tarefas devem levar aos alunos a compreender a adição de matrizes. É solicitado aos alunos que consultem as tabelas da primeira e segunda fases do Campeonato Brasileiro de Futebol de 2019 no site <<https://ge.globo.com/numerologos/noticia/classificacao-do-retorno-veja-se-seu-time-melhorou-ou-ghtml>>, e que organizem os dados numéricos em duas matrizes relativos à quantidade de vitórias, empates e derrotas dos quatro primeiros times em cada fase (veja a Figura 10).

O ponto central dessa atividade é mostrar que a soma dessas duas matrizes descreve o desempenho acumulado no ano desses times. Porém, durante a realização da atividade com os alunos percebi que tinha cometido um erro no desenho da atividade. Como observa-

Figura 10 – Tabelas de Classificação do Campeonato Brasileiro de 2019

CLASSIFICAÇÃO DO PRIMEIRO TURNO							CLASSIFICAÇÃO DO RETORNO								
		PG	%	J	V	E	D			PG	%	J	V	E	D
1		42	74%	19	13	3	3	1		48	84%	19	15	3	1
2		39	68%	19	11	6	2	2		38	67%	19	10	8	1
3		37	65%	19	11	4	4	3		37	65%	19	12	1	6
4		33	58%	19	10	3	6	4		37	65%	19	11	4	4

Fonte:Do Autor

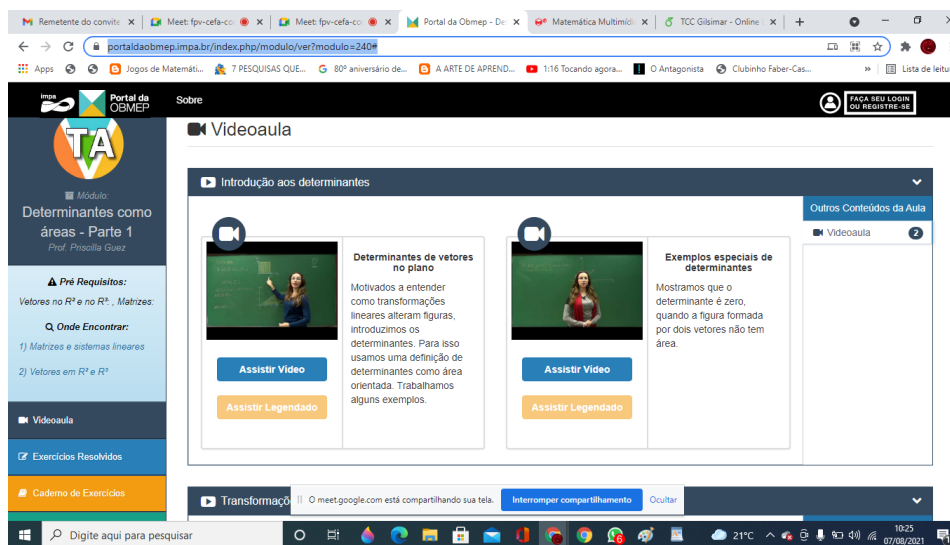
se nas tabelas da 10, a relação dos quatro primeiros times no primeiro turno não é a mesma que a correspondente no retorno. Desse modo, a soma das duas matrizes construídas pelos alunos não irá corresponder ao desempenho acumulado. Assim, o ponto central dessa atividade passou a ser analisar se a soma dessas duas matrizes descreve o desempenho acumulado no ano desses times.

A quarta atividade foi desenhada para introduzir a operação de multiplicação de matrizes sem apresentar a definição formal. Nesta atividade os estudantes devem escolher quatro times de sua preferência da tabela do Campeonato Brasileiro de 2019 e calcular a quantidade total de pontos de cada time baseados no número de vitórias, empates e derrotas. Em seguida devem construir uma matriz de ordem  $4 \times 3$  onde a primeira coluna corresponde ao número de vitórias, a segunda corresponde ao número de empates e a terceira o número de derrotas. Por outro lado cada linha corresponde a um dos times escolhidos. Uma outra matriz deve ser feita com 3 linhas e apenas uma coluna contendo os pontos ele ganha em cada Vitória (3), Empate (1) e Derrota (0). A tarefa que os alunos devem realizar a seguir é comparar os números usados para determinar a pontuação de cada time com as posições dos números nas matrizes construídas. Espera-se que o processo natural de resolução do problema proposto leve diretamente ao processo de multiplicação de duas matrizes.

A quinta atividade também é assíncrona e introduz o conceito de determinantes de matrizes quadradas de ordem 2. Os alunos recebem através do WhatsApp o link do módulo "Determinantes como áreas - Parte 1" no site Portal da OBMEP (<<https://portaldabmeep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=240#>>>), e recebem a incumbência de assistir os primeiros dois vídeos desse módulo (veja a Figura 11). Após assistirem os vídeos, os alunos devem resolver uma sequência de desafios de investigação para descobrir as propriedades de determinantes. Esta atividade permite aos alunos descobrirem as propriedades e generaliza-las através de conjecturas.

As últimas 3 atividades foram dedicadas ao estudo de uma aplicação de matrizes em criptografia. Na sexta atividade os alunos devem assistir o vídeo "Kevin Mitnick Profile" com duração de 7 minutos, que relata a história de um hacker muito famoso; para

Figura 11 – Página do módulo "Determinante como áreas - Parte 1" no site Portal da OBMEP.



Fonte: <https://portaldaoimpbimp.br/index.php/modulo/ver?modulo=240>

isto os alunos recebem o link <https://www.youtube.com/watch?v=1DUpheNCkEQ> via WhatsApp. Kevin Mitnick, antigo número 1 da lista dos mais procurados do FBI, hackeou mais de 40 grandes empresas quebrando códigos de criptografia. Atualmente é um renomado consultor de segurança da informação. O vídeo tem por finalidade instigar e deixar os alunos curiosos em relação a criptografia.

Na sétima atividade a aula é síncrona e expositiva. Neste encontro online deve ser explicado o método de criptografia de Hill e alguns exemplos de aplicação do método de encriptação. Por fim, a oitava atividade deve ser uma oficina em que os alunos tem que se organizar em equipes. Deve-se pedir aos alunos para formarem grupos de 5 pessoas para que cada equipe escreva uma mensagem, a codifique usando o método de Hill, e em seguida trocar as mensagens criptografadas entre eles para decodificá-las.

## 4.4 Roteiros das Atividades

Nesta seção apresentamos os roteiros das atividades realizadas com os alunos. A sequência de atividades foi programada para ser realizada em 8 dias durante 3 semanas.

### 4.4.1 Semana 1 - O conceito de matriz.

**Primeira Atividade.** Introdução ao conceito de matriz.

**Tipo de Aula.** Assíncrona.

**Materiais.** Vídeo "A Cooperativa de Leite", disponível no Portal Matemática Multimídia da Unicamp (<https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1076>). Este ví-

Figura 12 – Mapa de localização das fazendas de cooperativa de leite.



Fonte: <https://m3.ime.unicamp.br/arquivos/1076/cooperativadeleite.pdf>

deo é compartilhado com a turma usando o Whatsapp e o Google Classroom.

**Atividades.** A relação de atividades é enviada aos alunos um dia antes da aula em um arquivo PDF via Whatsapp e Google Classroom.

1. Assistir o vídeo.
2. Resolver o problema planteado no vídeo.

**Problema 1.** Uma cooperativa de 6 fazendas produtoras de leite decidem construir um tanque de refrigeração para uso comum. Em qual delas deve ser instalado o tanque de modo que a fazenda escolhida seja aquela que resultar na menor distancia dentre as maiores distâncias que os outros fazendeiros tem que percorrer (veja a Figura 12).

**Segunda Atividade.** Matrizes

**Tipo de aula.** Síncrona.

**Atividades.** Sessão de resolução de problemas usando a plataforma Zoom.

1. Pedir aos alunos que socializem com a turma as soluções do problema resolvido na atividade anterior.
2. Introduzir o conceito de matriz aproveitando o problema anterior como motivação
3. Pedir aos alunos que resolvam o seguinte problema: Em uma estrada há três postos de gasolina 1, 2 e 3, localizados respectivamente nos quilômetros 34, 63 e 95. No quilômetro 80 há um posto policial. Construa uma matriz  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ , em que  $a_{ij}$  é a distância que um automóvel deve percorrer, nessa estrada, para ir do posto  $i$  ao posto  $j$ , passando necessariamente pelo posto policial.
4. Discutir a resolução do problema.

#### 4.4.2 Semana 2 - Operações com matrizes. Determinantes

**Terceira Atividade.** Adição de matrizes.

**Tipo de aula.** Assíncrona.

**Atividades.** A relação de atividades é enviada aos alunos um dia antes da aula em um arquivo PDF via Whatsapp e Google Classroom.

1. Pedir aos alunos que consultem as tabelas da primeira e segunda fases do Campeonato Brasileiro de Futebol de 2019 no site <<https://ge.globo.com/numerologos/noticia/classificacao-do-retorno-veja-se-seu-time-melhorou-ou-piorou-n.html>>, e que organizem os dados numéricos em duas matrizes relativos à quantidade de vitórias, empates e derrotas dos quatro primeiros times em cada fase
2. Pedir aos alunos que somem as duas matrizes.

**Quarta Atividade.** Multiplicação de matrizes

**Tipo de aula.** Assíncrona

**Atividades.** A relação de atividades é enviada aos alunos um dia antes da aula em um arquivo PDF via Whatsapp e Google Classroom.

1. Pedir aos alunos que escolham 4 times de sua preferência da tabela da atividade anterior e que calculem os pontos obtidos por eles no campeonato; sabendo que cada vitória vale 3 pontos, empate 1 ponto e derrota 0 ponto.
2. Pedir aos estudantes que organizem uma tabela com 4 colunas como o nome do time, número de vitórias, empates e derrotas.
3. Pedir aos alunos que façam uma matriz numérica de ordem 4x3 com base na tabela acima contendo os dados do número de vitórias, empates e derrotas de cada time.
4. Pedir que os alunos façam uma tabela 3 linhas e 2 colunas com os seguintes dados Vitória(V), Empates(E) e Derrota(D) na primeira coluna; e seus valores 3, 1 e 0 na segunda coluna.
5. Solicitar que façam uma matriz numérica de ordem 3x1 com base na tabela do item anterior contendo os dados do valor de cada vitórias, empate e derrota.
6. Solicitar aos alunos que observarem as posições dos números das duas tabelas que eles usaram para calcular o total de pontos de cada time selecionado por eles.
7. Pedir que Organizem os dados numéricos das duas tabelas do item anterior em matrizes numéricas A e B e calculem o total de pontos dos times usando a matriz numérica.

8. Pedir aos alunos que respondam as seguintes perguntas.
  - a) O que aconteceria se fosse acrescentado uma linha da matriz formada por uma coluna?
  - b) O que aconteceria se aumentasse mais linhas colocando um quarto time?
  - c) O que aconteceria se houvesse 5 times? E 20 times?

**Quinta Atividade.** Determinantes.

**Tipo de aula.** Assíncrona.

**Materiais.** Vídeo do site <<https://portaldabmp.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=240#>>

**Atividades.** Assistir ao vídeo e fazer uma sequência de desafios sobre propriedade de determinante.

1. Desafio 1: Crie várias matrizes quadradas de ordem 2 e calcule os seus determinantes. Troque linhas por colunas em cada uma dessas matrizes e calcule seus determinantes. Observação: Essa nova matriz é chamada de matriz transposta. Qual a relação que pode ser feita entre os determinantes da matriz original e de sua transposta?
2. Desafio 2: Quanto vale um determinante que tem uma linha ou coluna toda nula, ou seja, com elementos iguais a 0?
3. Desafio 3: Crie várias matrizes quadradas de ordem 2 e calcule seus determinantes.
  - a) Troque as linhas das matrizes e calcule seus determinantes.
  - b) Troque as colunas das matrizes originais e calcule os seus determinantes.
4. Desafio 4: Escreva várias matrizes com duas linhas iguais ou colunas iguais. Calcule os determinantes da matriz original e da nova matriz. Qual a conclusão que você pode tirar desse experimento?

#### 4.4.3 Semana 3 - Criptografia

**Sexta Atividade.** Criptografia

**Tipo de aula.** Assíncrona.

**Materiais.** Vídeo disponível em <<https://youtu.be/1DUpheNCkEQ>> Este vídeo é compartilhado com a turma usando o Whatsapp. O vídeo "Kevin Mitnick Profile" conta a história do maior hacker dos EUA e tem uma duração de 7 minutos.

**Atividades.** A relação de atividades é enviada aos alunos um dia antes da aula em um arquivo PDF via Whatsapp.

1. Pedir aos alunos para assistir ao vídeo.
2. Pedir aos alunos para escrever no caderno um relato breve de como Kevin Mitnick conseguiu invadir o sistema de segurança das 40 maiores empresas do mundo, e enviar uma foto pelo Whatsapp.

**Sétima Atividade.** Criptografia de Hill - Primeira parte

**Tipo de aula.** Síncrona.

**Atividades.** Aula expositiva usando a plataforma Zoom.

1. Explicar o método de criptografia de Hill.
2. Fornecer exemplos da aplicação do método.

**Oitava Atividade.** Criptografia de Hill - Segunda parte

**Tipo de aula.** Síncrona

**Atividades.** Oficina usando a Plataforma Zoom.

1. Pedir aos aluno para formar grupos de 5 pessoas.
2. Solicitar que cada grupo escreva uma palavra e a codifique.
3. Pedir aos grupos que troquem entre eles a mensagem criptografadas e forneçam a chave.
4. Pedir aos grupos que decodifiquem a mensagem recebida.

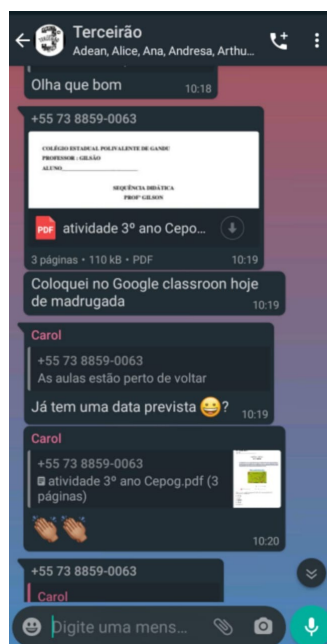
## 4.5 Relato de Experiência

Nesta seção se relatam os incidentes mais relevantes que aconteceram durante a aplicação da intervenção didática.

### 4.5.1 Primeira Atividade

O início das atividades foi recebido de forma positiva pelos estudantes, como ilustra a Figura 13. Embora esta primeira atividade foi assíncrona houve uma comunicação intensa dos alunos comigo através de mensagens de áudio via WhatsApp para conferir a resolução do problema da cooperativa de leite. É importante indicar que essa comunicação se manteve ao longo de todas as aulas assíncronas, com maior intensidade na quarta e quinta atividades.

Figura 13 – Mensagem de resposta de uma aluna à postagem da primeira atividade.



Fonte:Do Autor

#### 4.5.2 Segunda Atividade

A maneira mais direta de resolver o problema proposto nesta atividade é construindo a matriz de distâncias entre cada par das fazendas. Para isto, em lugar de chamar as fazendas por A, B, C, D, E e F é conveniente denota-las por 1, 2, 3, 4, 5 e 6, respectivamente. Deste modo a matriz de distâncias é denotada por  $A = (a_{ij})$ , onde  $a_{ij}$  é a distância entre as cidades  $i$  e  $j$ ,

	1	2	3	4	5	6
1	0	5	11	14	12	15
2	5	0	6	9	14	10
3	11	6	0	3	8	4
4	14	9	3	0	5	2
5	12	14	8	5	0	7
6	15	10	4	2	7	0

Olhando para essa matriz é fácil de identificar a maior distância percorrida para cada localização do tanque, e por tanto, é fácil identificar a menor entre estas distâncias. Esse método de resolução não foi usado por nenhum aluno, porém a maioria dos que resolveram o problema corretamente escreveram explicitamente os elementos dessa matriz e os usaram para identificar a menor dentre as maiores distâncias percorridas, como ilustra a Figura 14. Só faltou eles arrumarem esses elementos na forma de matriz. Esta formalização foi discutida depois de revisar algumas das soluções que eles apresentaram.

Alguns alunos utilizaram uma mistura de descarte, tentativa e erro. No primeiro

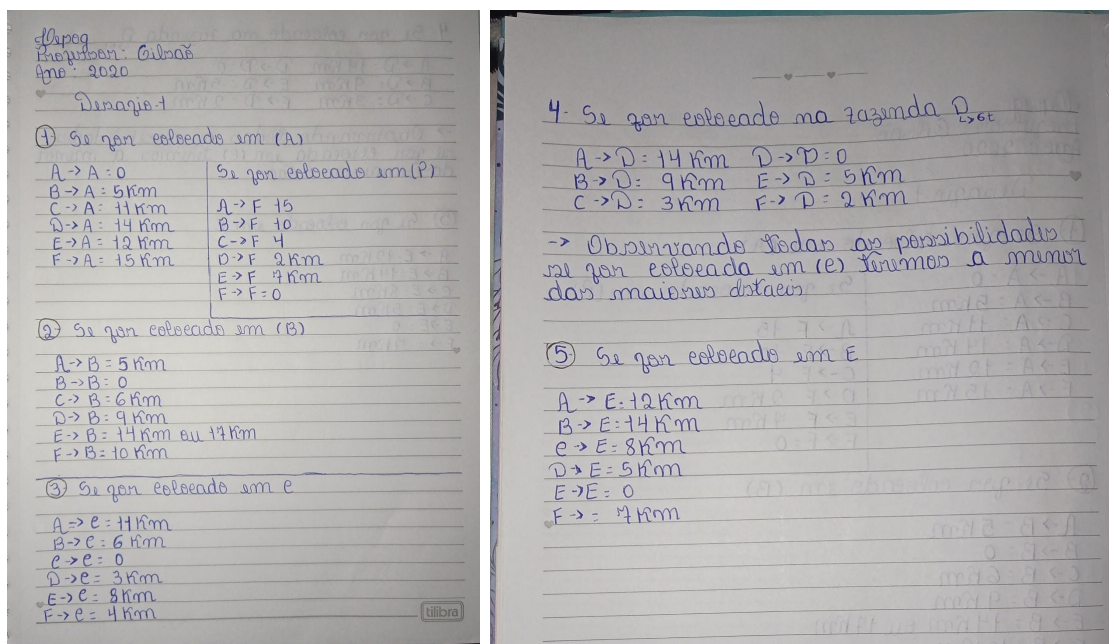


momento se descartam aquelas localizações para as quais é fácil ver que há uma fazenda muito longe. Usando este critério de descarte restam apenas dois candidatos possíveis, as fazendas C e D. Por último, por tentativa e erro é possível ver que a resposta correta é a fazenda C. Na discussão que se seguiu os alunos propuseram que essa era uma maneira mais fácil de resolver o problema por ser muito intuitivo, embora o método de resolução não pudesse ser adequadamente justificado.

Houve alguns alunos que resolveram um problema diferente do proposto, porém bastante similar. Eles determinaram a posição do tanque para a qual a distância percorrida por todos os fazendeiros para chegar nele é mínima. Neste caso apenas uma aluna teve a ideia de arrumar as distâncias entre cada par de fazendas em forma de matriz. No entanto, ela confundiu as colunas da matriz com as filas da matriz, como mostra a Figura 15. Os outros alunos que resolveram esta variante do problema o fizeram usando apenas os elementos da matriz de distâncias, sem arruma-los em forma de matriz. Por coincidência a resposta deste problema coincide com a resposta do problema original.

Após a discussão das soluções do problema da cooperativa de leite foi introduzido o conceito de matriz numérica, e em seguida os alunos foram confrontados com o problema dos postos de gasolina. Muitos alunos tiveram dificuldade para entender o problema devido ao símbolo  $a_{ij}$  que entra no enunciado. Depois de esclarecer com um exemplo o significado desse símbolo os alunos não tiveram dificuldade nenhuma para resolver o problema.

Figura 14 – Resolução da Atividade 1 usando os elementos da matriz de distâncias.



Fonte:Do Autor

Figura 15 – Resolução da Atividade 1 usando a matriz de distâncias.

Yafaela Luciana 3<sup>a</sup> m J

Sequência didática C x V

01.	A	B	C	D	E	F	
A	0	5	11	14	12	15	= 57
B	5	0	6	9	14	10	= 44
C	11	6	0	3	8	4	= 32 *
D	14	9	3	0	5	2	= 33
E	12	14	8	5	0	7	= 46
F	15	10	4	2	7	0	= 38

Resposta: Semando os valores das colunas, o caminho C é o mais viável, pelo fato de as distâncias percorridas para todos chegarem a esportiva ou ser a menor.

Fonte:Do Autor

#### 4.5.3 Terceira Atividade

Os alunos conseguiram realizar as atividades pedidas com êxito, porém houve um incidente muito interessante que merece ser relatado. O objetivo de somar as duas matrizes que descrevem o desempenho dos times na primeira e segunda fase no campeonato brasileiro de futebol era determinar o desempenho de cada time no ano inteiro. No entanto, este detalhe foi omitido, e foi pedido apenas que somassem as duas matrizes. Os alunos fizeram o que foi pedido. Acontece que a ordem e os primeiros quatro times em cada fase em geral são diferentes e por tanto as linhas na mesma posição das matrizes correspondem a times diferentes. Assim sendo, a soma das matrizes não correspondem ao desempenho anual de quatro times. Isso gerou um debate sobre a importância do contexto quando a matemática é aplicada a uma situação real.

#### 4.5.4 Quarta Atividade

Durante a realização desta atividade a comunicação com os alunos via WhatsApp foi particularmente intensa. O cálculo da pontuação de cada time, por ser um assunto intuitivo e familiar, foi realizado sem dificuldades. Apesar das instruções da atividade estarem no arquivo PDF que os alunos receberam, assim que eles iam terminando o cálculo da pontuação dos times, ia pedindo via WhatsApp, para organizar em duas matrizes os dados numéricos que usaram para fazer os cálculos, e que observassem as posições dos números em linhas e colunas. Quase a metade dos alunos conseguiram perceber com certo esforço como funciona o mecanismo de multiplicação de matrizes.

#### 4.5.5 Quinta Atividade

Esta atividade foi muito interessante pois, sem conhecer as propriedades do determinante, os alunos conseguiram resolver os problemas e generalizar a partir da observação,

criando hipóteses e conjecturando algumas propriedades do determinante. Houve muita motivação por parte dos alunos, pois eles passaram a agir como investigadores e gostaram disso. É importante destacar que esta aula foi assíncrona e não houve nenhuma aula expositiva prévia sobre o conteúdo teórico mas a comunicação via WhatsApp durante a realização da atividade foi intensa.

Uma aluna, após fazer os desafios sobre determinantes de matrizes quadradas de ordem 2 com êxito, por uma questão de curiosidade decidiu realizar as mesmas atividades com matrizes quadradas de ordem 3. Ela queria saber se as regras que havia encontrados no caso de determinante de ordem 2 se mantinham quando os determinantes eram de ordem 3. Após a realização da nova investigação a estudante se deu por satisfeita pois percebeu que as propriedades não mudaram. Com isso através da experimentação ela conseguiu estender os resultados obtidos na atividade para o caso tridimensional (Veja a Figura 17).

#### 4.5.6 Sexta Atividade

Nesta atividade os alunos tiveram apenas que assistir um vídeo curto sobre Kevin Mitnick, e escrever um resumo. Pelas conversas que tivemos via WhatsApp deu para perceber que o vídeo chamou a atenção, e despertou o interesse e a curiosidade dos alunos pela criptografia. Aproveitei e falei do filme "The Imitation Game" que conta do episódio da quebra do sistema de criptografia nazista durante a Segunda Guerra Mundial por parte de uma equipe de matemáticos ingleses liderada por Alan Turing. Os alunos ficaram sur-

Figura 16 – Exemplo dos cálculos feitos durante a atividade 4.

② F. Flamengo  $\rightarrow 28 \cdot 3 + 6 = 90$  pontos  
 Santos  $\rightarrow 22 \cdot 3 + 8 = 74$  pontos  
 Palmeiras  $\rightarrow 21 \cdot 3 + 11 = 74$  pontos  
 Grêmio  $\rightarrow 19 \cdot 3 + 8 = 65$  pontos

③.
 

	V	E	D	A			B
FLA	28	6	4	28	6	4	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
SAN	22	8	8	22	8	8	
PAL	21	11	6	21	11	6	
GRE	19	8	1	19	8	11	

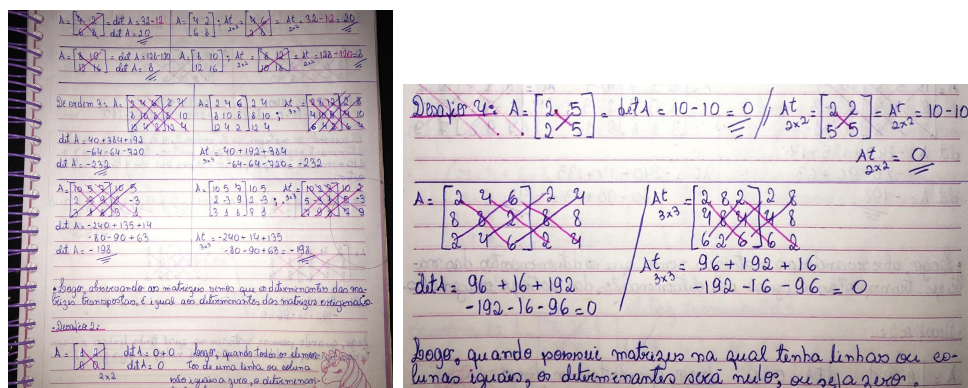
A · B
 

$\begin{pmatrix} 28 \cdot 3 + 6 \times 1 + 4 \cdot 0 \\ 22 \cdot 3 + 8 \times 1 + 8 \cdot 0 \\ 21 \cdot 3 + 11 \times 1 + 6 \cdot 0 \\ 19 \cdot 3 + 8 \times 1 + 11 \cdot 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 90 \\ 74 \\ 74 \\ 65 \end{pmatrix}$
--	--

④  $4 \times 3$       ⑤  $3 \times 1$

Fonte:Do Autor

Figura 17 – Extensão das propriedades do determinantes de ordem 2 para ordem 3 feita por uma aluna por iniciativa própria.



presos porque o filme relata um episódio da Segunda Guerra Mundial onde a matemática teve um papel essencial para a vitória dos Aliados. Como o interesse por assistir ao filme foi alto, enviei o link pelo WhatsApp (<https://youtu.be/Q2xrQ5U0Tbo>).

#### 4.5.7 Sétima Atividade

Como a atividade deste dia foi uma aula expositiva não há nada a relatar. Expliquei o método de criptografia de Hill usando conteúdo de matrizes estudado nos dias anteriores, e mostrei para eles muitos exemplos. Foi uma oportunidade para revisar os conteúdos em um outro contexto. Pelos comentários feitos pelos alunos durante aula deu para perceber que eles estavam bastante interessados no tema.

#### 4.5.8 Oitava Atividade

Nesta oficina os alunos, trabalhando em equipes, tiveram que criar mensagens criptografadas e decodificar mensagens criadas por outros grupos. As mensagens criptografadas continham frases de amor e do universo dos jovens, o que mostra a espontaneidade e conforto que os alunos sentiram durante esta atividade. Houve vários comentários em relação a fazer a interceptação dos celulares dos colegas, mas eu expliquei que em celulares e em muitos outros sistemas onde a segurança digital é essencial se usa um sistema de criptografia muito mais sofisticado chamado RSA, que utiliza conhecimentos mais avançados sobre a Teoria dos Números, sobretudo relacionados com números primos grandes, temas que são estudados no curso de Matemática na Universidade.

## 5 Considerações Finais

A suspensão das atividades letivas por causa da pandemia do Covid-19 em 2020 levou à necessidade de implementar o Ensino Remoto Emergencial. Isso criou um desafio para os professores pois a maioria deles não estava familiarizada com esta modalidade de trabalho. A sequência de atividades relatadas neste TCC foi uma experiência de aprendizado nesse sentido. A grande dificuldade neste tipo de intervenção didática é a falta de contato físico como os alunos de modo a acompanhar seu desempenho. No entanto, durante a execução das atividades relatadas aqui se observou que um bom planejamento permite de fato fazer esse acompanhamento inclusive nos momentos assíncronos. Aprender matemática nesse contexto foi muito complicado até certo tempo, visto que além da dificuldade com a disciplina os alunos tiveram outro obstáculo que foi a falta da interação física entre professores e colegas devido ao isolamento social.

Assim que as escolas fecharam, as aulas em nossa escola continuaram de forma remota através de postagens de videoaula do You Tube e aulas gravadas pelos próprios professores. Com o passar do tempo os alunos começaram a se desanimar. Essa foi a motivação pela qual foi desenvolvida a intervenção descrita com o objetivo de tirar o aluno da condição passiva e deixá-los com mais autonomia dos seus estudos. Percebemos, também, que todo dia tendo aulas os alunos ficavam cansados. Assim, pensamos em fazer aulas síncronas e assíncronas deixando os alunos mais participativos e protagonistas no processo de ensino-aprendizagem. Para isso, pensamos em montar sequências de atividades onde os alunos pudessem ser confrontados a desenvolver a aprendizagem matemática de forma independente e autônoma. Foi desse modo que decidi implementar a metodologia de Sala de Aula Invertida, mesmo sem ter conhecimento dessa modalidade naquela época. Foi durante a escrita desta dissertação que descobri a existência desta e de outras Metodologias Ativas.

O principal resultado obtido com estas atividades foi ter conseguido o engajamento de 100% dos alunos o que por sua vez acredito que se deveu ao papel de ator principal que eles tiveram durante quase todo o trabalho. Estamos aqui falando do uso intensivo de metodologias ativas de aprendizagem na elaboração das atividades. Das 8 seções de trabalho que teve esta sequência de atividades apenas três foram momentos síncronos, e desses três momentos apenas um consistiu em uma aula expositiva. Como evidência adicional a favor desta conclusão podemos citar dois depoimentos feitos por duas alunas no término das atividades.

Quando o professor Gilsimar me ensina o assunto, o fato dele não usar regras prontas me faz evoluir muito mais como estudante. Entender que a matemática é mais do que fórmulas e decoreba abriu a minha mente

para que eu pudesse compreender muito além do que é cobrado nas provas. Além de aprender o assunto de maneira mais fluida, a minha criatividade lógica começou a ser trabalhada, como o professor não ensina um modelo pronto, a minha mente começou a raciocinar diversas maneiras de resolver o mesmo problema, isso me ajudou muito a aprender a matemática e a cada dia mais me apaixonar por ela. (Aluna 1)

Venho afirmar que a maneira como foi trabalhada as atividades na quarentena, em especial, o assunto de matrizes, foi muito boa, pois foi ensinada sem usar regras prontas. Conseguir ter uma visão mais ampla da matemática. Aprender matemática dessa forma me ajudou a raciocinar de maneira natural. (Aluna 2)

Estes e outros comentários similares, assim como o nível de participação dos alunos durante as atividades mostram que elas foram muito bem aceitas pelos alunos. As aulas, segundo eles, não foram maçantes. Apesar do conteúdo ser um tema abstrato os alunos não ficaram presos a regras pré-estabelecidas o que estimulou a criatividade de cada um.

Apesar do distanciamento social, foi possível fazer um acompanhamento graças ao uso eficiente das novas tecnologias. As plataformas WhatsApp e Google Classroom serviram como repositório de modo que os alunos precisavam estar conectados à internet apenas para acessar o material, podendo ele ser usado posteriormente em modo off line. A conexão à internet também foi necessária para devolver as atividades concluídas e para trocas de mensagens com o professor. Apenas durante os três momentos síncronos é que foi necessária uma conexão à internet de alta qualidade e por um tempo prolongado.

Ter um canal de comunicação eficiente, como o WhatsApp, é essencial no ERE quando se trabalha com metodologias ativas. Ao planejar atividades usando estas metodologias é impossível prever o que vai acontecer durante a intervenção. Desse modo, a realização de cada atividade baseada nestas metodologias é uma aventura que torna essencial uma comunicação fluída com os alunos, sobretudo nos momentos assíncronos. Essa comunicação permite também consertar qualquer tipo de erros conforme forem sendo detectados.

Por exemplo, na terceira atividade (sobre adição de matrizes) houve um erro nas instruções. Foi pedido aos alunos que selecionassem os primeiros quatro times da primeira fase e os primeiros quatro da segunda fase do Campeonato Brasileiro de 2019, e construíssem duas matrizes com os números de vitórias, empates e derrotas correspondentes. A seguir foi pedido que somassem as duas matrizes. A intenção do exercício era que determinassem o desempenho do ano dos quatro primeiros times do campeonato, e não percebi que os primeiros quatro times da primeira fase pode ser diferentes dos primeiros quatro times da segunda fase.

Ao perceber este erro durante a execução da atividade iniciou-se uma discussão sobre a importância do contexto na hora de interpretar os resultados obtidos a realizar

a operações de matrizes. Em particular, cheguei à conclusão de que o mais adequado neste tipo de atividade é pedir aos alunos que escolham quatro times de sua preferência e calculem o desempenho acumulado no ano dos times escolhido.

Este trabalho pode ser estendido em duas direções diferentes. A mais imediata a adaptação e uso desta estratégia em outros tópicos da grade curricular e em outros anos do ensino médio. Vários tópicos de Geometria se adéquam a este tipo de trabalho, entre eles podemos citar poliedros, polígonos, cálculo de áreas e volumes, e o Teorema de Pitágoras. Outra área onde esta estratégia podem ser muito útil é a Estatística. A segunda direção em que este trabalho pode ser estendido é na adaptação desta estratégia no modelo híbrido de ensino quando as aulas voltarem a ser presenciais.

Este trabalho é um relato de experiência que, pelos resultados relatados, espero que consiga motivar trabalhos de pesquisa em Educação Matemática que examinem o uso de metodologias ativas integradas a recursos digitais tanto no ERE como na EAD e em implementações do ensino híbrido, vista a grande aceitação que os alunos evidenciaram. O fato do professor fazer uso das novas tecnologias não significa que sua prática pedagógica está sendo inovadora. Conforme Moreira e Schlemmer (2020), o professor pode estar deslocando a prática tradicional do espaço físico escolar para atrás das câmaras de gravação. Nesse caso, a aula continua sendo tradicional pois o professor ainda é quem detém o controle do processo, tornando o sujeito passivo e sustentando o modelo bancário de educação que tanto foi criticado por Paulo Freire.

## Referências

- COZZENS, M., and S. MILLER. **The Mathematics of Encryption: An Elementary Introduction**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.
- GROENWALD, C. L. O.; OLGIN, C. DE A. Criptografia e o Currículo de Matemática no Ensino Médio. *Revista de Educação Matemática*, v. 13, p. 71–78, 2011.
- AYRES JR, FRANK, **Theory and Problem of Matrices**
- COUTINHO, Severino. **Criptografia**. Rio de Janeiro, IMPA, 2015.
- MORAN, JOSÉ MANUEL. Caminhos para a aprendizagem inovadora. In: MORAN, José Manuel. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 15. ed. Campinas: Papyrus 2009, p. 22-24
- MOREIRA, J. A.; SCHLEMMER, E. **Por um novo conceito e paradigma de educação digital onlife**. *Revista UFG*, 2020, v.20
- HODGES, CHARLES et al. The difference between emergency remote teaching and online learning. *EDUCAUSE Review*. 27 mar. 2020. Disponível em: <<https://er.educause.edu/articles/2020/3/the-difference-between-emergency-remote-teaching-and-online-learning>, 2020. Acesso em: 20 jun. 2020.>
- MORAN, JOSÉ. **Metodologias ativas para uma aprendizagem profunda**. In: MORAN, José; BACICH, Lilian (Org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática*. Porto Alegre: Penso, 2018
- MORAN, José Manuel. **Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda** (2013). Disponível em: <[www2.eca.usp.br/moran](http://www2.eca.usp.br/moran)> Acesso em: 20 de Jun. 2020 2020
- BERGMANN, Jonathan; SAMS, Aaron. **Sala de aula invertida: uma metodologia ativa de aprendizagem**. Rio de Janeiro. LTC. 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília, MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 22 Jun. 2021
- Juventudes e a Pandemia do Coronavírus. Atlas da Juventude, 2021. Disponível em: <<https://atlasdasjuventudes.com.br/juventudes-e-a-pandemia-do-coronavirus/>>. Acesso em: 05 Abril, 2021.
- FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. São Paulo: Paz e Terra, 1974



Kagan, Spencer. Kagan Cooperative Learning Structures. Estados Unidos: Kagan Publishing, 2013.

Slavin, R. E. (1994). Cooperative learning: Theory, research and practice. (2nd ed.) Boston: Allyn Baco

## Apêndices

## APÊNDICE A – Atividades

	<b>COLÉGIO ESTADUAL POLIVALENTE DE GANDU</b>		
	ALUNO (a): _____	_____	
	DATA: _____	SÉRIE: 3º	TURNO: MATUTINO
	DISCIPLINA: MATEMÁTICA	PROF. (A): GILSIMAR BATISTA	


### ATIVIDADE 1

1- Assistir o vídeo cooperativa de leite e resolva o problema proposto.



#### Problema:


Uma cooperativa de 6 fazendas produtoras de leite decide construir um tanque de refrigeração para uso comum. Em qual delas deve ser instalado o tanque de modo que a fazenda escolhida seja aquela que resultar na menor distância dentre as maiores distâncias que os outros fazendeiros tem que percorrer.

	<b>COLÉGIO ESTADUAL POLIVALENTE DE GANDU</b>		
	ALUNO (a): _____	_____	
	DATA: _____	SÉRIE: 3º	TURNO: MATUTINO
	DISCIPLINA: MATEMÁTICA BATISTA	PROF. (A): GILSIMAR	

### ATIVIDADE 3

1- Consultar as tabelas da primeira e segunda fases do Campeonato Brasileiro de Futebol de 2019 no site [tabela do primeiro e segundo turno](#) e organizar os dados numéricos em duas matrizes relativos à quantidade de vitórias, empates e derrotas dos quatro primeiros times em cada fase e somem as duas matrizes numéricas.



	<b>COLÉGIO ESTADUAL POLIVALENTE DE GANDU</b>		
	ALUNO (a): _____	_____	
	DATA: _____	SÉRIE: 3ª	TURNO: MATUTINO
	DISCIPLINA: MATEMÁTICA	PROF. (A): GILSIMAR BATISTA	

### ATIVIDADE 4

1. Aproveitando a tabela do campeonato da atividade anterior escolham 4 times de sua preferência e calculem os pontos obtidos por eles no campeonato; sabendo que a vitória vale 3 pontos, empate 1 ponto e derrota 0 ponto.
2. Façam uma tabela com 4 colunas com os nomes dos times da tarefa acima, número de vitórias, empates e derrotas. Conforme o exemplo abaixo.

TIME	VITÓRIA	EMPATE	DERROTA

3. Construa uma matriz numérica de ordem 4x3 com base na tabela acima contendo os dados do número de vitórias, empates e derrotas de cada time.
4. Fazer uma tabela 3 linhas e 2 colunas com os seguintes dados Vitória(V), Empates(E) e Derrota(D) na primeira coluna; e seus valores 3, 1 e 0 na segunda coluna.


VITÓRIA	3
EMPATE	1
DERROTA	0

5. Construa uma matriz numérica de ordem 3x1 com base na tabela acima contendo os dados do valor de cada vitórias, empate e derrota .
- 6- Observem as posições dos números das duas tabelas que vocês usaram para calcular o total de pontos de cada time na tarefa 1 desta atividade

TIME	VITÓRIA	EMPATE	DERROTA

VITÓRIA	3
EMPATE	1
DERROTA	0

7. Organizem os dados numéricos das duas tabelas acima em matrizes numéricas A e B e calculem o total de pontos dos times usando a matriz numérica observando a tabela acima.
  - a) O que aconteceria se fosse acrescentado uma linha da matriz formada por uma coluna?
  - b) O que aconteceria se aumentasse mais linhas colocando um quinto time?
  - c) O que aconteceria se houvesse 5 times? E 20 times?

	COLÉGIO ESTADUAL POLIVALENTE DE GANDU		
	ALUNO (a): _____		
	DATA: _____	SÉRIE: 3º	TURNO: MATUTINO
	DISCIPLINA: MATEMÁTICA		PROF. (A): GILSIMAR BATISTA

### ATIVIDADE 5

1- Assistir os primeiros dois vídeos do módulo "Determinantes como áreas - Parte 1" no site Portal da OBMEP através do link a seguir [determinante](#) para resolver uma sequência de desafios sobre propriedade de determinante.

2- Desafios:

- a) Crie várias matrizes quadradas de ordem 2 e calcule os seus determinantes.
- b) Troque linhas por colunas em cada uma dessas matrizes e calcule seus determinantes. Observação: Essas novas matrizes são chamadas de matriz transposta. Qual a relação que pode ser feita entre os determinantes da matriz original e de sua transpostas?
- c) Quanto vale um determinante que tem uma linha ou coluna toda nula, ou seja, com elementos iguais a 0?
- d) Crie várias matrizes quadradas de ordem 2 e calcule seus determinantes. Troque as linhas das matrizes e calcule seus determinantes. Troque as colunas das matrizes originais e calcule os seus determinantes. Qual a conclusão que você pode tirar dessa investigação?
- e) Escreva várias matrizes com duas linhas iguais ou colunas iguais. Calcule os determinantes da matriz original e da nova matriz. Qual a conclusão que você pode tirar dessa investigação?

## APÊNDICE B – Resolução das Atividades

### Atividade 1.

A maneira mais direta de resolver o problema proposto nesta atividade é construindo a matriz de distâncias entre cada par das fazendas. Para isto, em lugar de chamar as fazendas por A, B, C, D, E e F é conveniente denota-las por 1, 2, 3, 4, 5 e 6, respectivamente. Deste modo a matriz de distâncias é denotada por  $A = (a_{ij})$ , onde  $a_{ij}$  é a distância entre as cidades  $i$  e  $j$ ,

	1	2	3	4	5	6
1	0	5	11	14	12	15
2	5	0	6	9	14	10
3	11	6	0	3	8	4
4	14	9	3	0	5	2
5	12	14	8	5	0	7
6	15	10	4	2	7	0

Olhando para essa matriz é fácil de identificar a maior distância percorrida para cada localização do tanque, e por tanto, é fácil identificar a menor entre estas distância.

### Atividade 3.

Os alunos devem somar as duas matrizes que descrevem o desempenho dos times na primeira e segunda fase no campeonato brasileiro de futebol. A atividade consiste em determinar o desempenho de cada time no ano inteiro.

### Atividade 4.

- 4.1 Os alunos devem calcular a pontuação de cada um dos 4 times sabendo que a vitória, empate e derrota valem, respectivamente, 3, 2 e 1 pontos.
- 4.2 Fazer uma tabela de acordo com o que pede.
- 4.3 Construir uma matriz  $4 \times 3$  conforme os dados da tabela do item anterior.
- 4.4 Fazer uma tabela conforme é pedido.
- 4.5 Construir uma matriz de ordem  $3 \times 1$  com base na tabela do item anterior.

**4.6** Comparar os números usados para determinar a pontuação de cada time com as posições dos números nas matrizes construídas. Espera-se que o processo natural de resolução do problema proposto leve diretamente ao processo de multiplicação de duas matrizes.

**4.7 (a)** Se fosse acrescentado uma linha na matriz de ordem  $3 \times 1$  essa linha não teria uma correspondência na matriz de ordem  $4 \times 3$ . A ideia é o aluno perceber que para uma multiplicação de matrizes valer o número de coluna da primeira matriz deve ser igual ao número de linha da segunda, visto que foi alterado o número de linhas da segunda matriz.

(b) e (c) Os alunos devem perceber que alterando o número de linhas da matriz de ordem  $4 \times 3$  não impediria a multiplicação, pois ele concluiu no item (a) que é o número de coluna da primeira matriz e número de linhas da segunda que devem ser iguais para que duas matrizes possam ser multiplicadas, nesta ordem.

#### Atividade 5. **Respostas do Desafio**

- (a) Criar várias matrizes quadradas de ordem 2 e calcular o determinante de cada uma dessas matrizes.
- (b) Trocar linhas por colunas das matrizes quadradas de ordem 2 do item anterior. Teremos novas matrizes quadradas e ordem 2. Com essas novas matrizes o aluno deve calcular o determinante de cada uma dessas novas matrizes. Espera que o aluno chega na conclusão que os determinantes de uma matriz e de sua transposta são iguais.
- (c) Ao observar uma matriz e verificar que os elementos de uma linha ou uma coluna são iguais a zero, o valor do seu determinante também será zero.
- (d) “trocar duas linhas de lugar” ou coluna altera o sinal do determinante.
- (e) Se uma matriz possui duas linhas ou colunas iguais, o aluno irá perceber que o determinante é nulo.



..