



PROFMAT



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO- CÂMPUS DE SINOP
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

O USO DA PLANILHA DO GEOGEBRA NO ENSINO DE MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

WELINGTON FERREIRA DA SILVA

Sinop/MT
2021

WELINGTON FERREIRA DA SILVA

O USO DA PLANILHA DO GEOGEBRA NO
ENSINO DE MATRIZES, DETERMINANTES E
SISTEMAS LINEARES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do departamento de Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador

Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves

Coorientador

Prof. Me. Odacir Elias Vieira Marques

Sinop/MT

2021

Luiz Kenji Umeno Alencar CRB 1/2037

SILVA, Welington Ferreira da.
S586o O Uso da Planilha do Geogebra no Ensino de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares / Welington Ferreira da Silva - Sinop, 2021.
101 f.; 30 cm. (ilustrações) Il. color. (sim)

Trabalho de Conclusão de Curso
(Dissertação/Mestrado) - Curso de Pós-graduação Stricto Sensu (Mestrado Profissional) Profmat, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Sinop, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2021.
Orientador: Rogério dos Reis Gonçalves
Coorientador: Odacir Elias Vieira Marques

1. Matrizes. 2. Determinantes. 3. Sistemas Lineares. 4. Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação. 5. Geogebra. I. Welington Ferreira da Silva. II. O Uso da Planilha do Geogebra no Ensino de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares: .
CDU 51(07)



ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET – FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT UNEMAT - SINOP



WELINGTON FERREIRA DA SILVA

**O USO DA PLANILHA DO GEOGEBRA NO ENSINO DE MATRIZES,
DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat da Universidade do Estado de Mato Grosso/UNEMAT – Campus Universitário de Sinop, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves

Coorientador: Prof. Me. Odacir Elias Vieira Marques

Aprovado em 30/07/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves
UNEMAT – SINOP - MT

Profa. Dra. Chiara Maria Seidel Luciano Dias
UNEMAT – SINOP - MT

Prof. Dr. Valter Soares de Camargo
UNESPAR - PARANAÍ - PR

Sinop/MT
2021



Programa de Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional – PROFMAT/UNEMAT/Sinop/MT
Av. dos Ingás, 3001, CEP: 78.550-000, Sinop, MT
Tel/PABX: (66) 3511 2100. www.unemat.br – Email:
profmat@unemat.br

UNEMAT

Universidade do Estado de Mato Grosso
Carlos Alberto Reyes Maldonado

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus por esta oportunidade, por esta caminhada tão abençoada e por sempre estar ao meu lado dando força e mostrando o melhor caminho. Pela minha saúde, pela minha esposa Evelin Vieira Lima e filha Manuela Ferreira Lopes especiais que ele colocou na minha vida. À minha família que sempre me apoiou, me incentivou e me ajudou em tudo o que fosse necessário. Em especial aos meus pais, Maria A. da Silva e Moisés F. Braga, e irmãos, Cleiton, Priscila e Silvana, por sempre estarem ao meu lado. Aos professores da UNEMAT que com muita paciência e comprometimento nos capacitaram para alcançarmos este momento tão especial. Em especial ao meu orientador Dr. Rogério dos Reis Gonçalves por ter aceitado me orientar e pela paciência e pelos conhecimentos compartilhados durante a construção desta dissertação e ao meu coorientador Me. Odacir Elias Vieira Marques pelas excelentes orientações. Aos meus amigos e companheiros de mestrado que contribuíram para que o período do mestrado fosse mais leve, apesar das dificuldades e dos desafios enfrentados, sempre estavam ali à disposição para ajudar, motivar e apoiar. Aos meus amigos do IFMT por me apoiarem. Em especial ao Marcionei Rech e ao Breno Dröse Neto que me apoiaram e incentivaram durante esta jornada. À turma do futebol que contribuiu para os períodos de descontração e prática esportiva. Enfim, agradeço a todos que em especial contribuíram de forma direta ou indireta para que este sonho pudesse ser realizado e concretizado. MUITO OBRIGADO!

RESUMO

Podemos considerar que as dificuldades dos professores desenvolverem aulas que atraiam os alunos, impactam de certa maneira na aprendizagem, mas não devemos atribuir toda a causa aos professores, visto que, com a velocidade em que a evolução de novas tecnologias e *softwares* estão sofrendo, outras dificuldades são geradas, tais como o aperfeiçoamento e a capacitação da maioria dos professores para o uso dessas tecnologias digitais da informação e comunicação, colocando assim, o ensino e a aprendizagem significativa de matemática como foco de várias pesquisas. E mais, ao se pesquisar na literatura pertinente e em páginas de internet, verificou-se que havia uma certa vacuidade de materiais voltados ao Ensino Médio que auxiliassem aos professores de Matemática em alguns conteúdos aplicados em novas tecnologias. Sendo mais específico, materiais que discorressem didaticamente sobre o uso da planilha e de outras ferramentas do *software* GeoGebra aplicados no conteúdo de Matemática no Ensino Médio. A fim de contribuir para que se minimize parte dessa vacuidade, desenvolvemos um material que tem o objetivo de apoiar e instigar aos professores a utilização deste *software* em aulas de matemática, no pressuposto de gerar aulas mais atrativas e com aprendizado significativo. Entretanto, o material gerado não é de uso restrito dos professores de Matemática do Ensino Médio, mas sim para qualquer pessoa interessada no tema. Os objetos matemáticos abordados neste trabalho são: Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares. Pretende-se apresentar uma abordagem relativamente simples com o apoio do *software* GeoGebra, na qual utilizou-se uma abordagem qualitativa com procedimentos da pesquisa participante. Também foi realizado um minicurso de forma remota, o qual foi apresentada uma ideia geral do material criado, fornecendo *feedbacks* que destacaram a importância do desenvolvimento desta dissertação para professores, estudantes e interessados no tema.

Palavras-chave: Matrizes; Determinantes; Sistemas Lineares; Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação; GeoGebra.

ABSTRACT

We can consider that the difficulty of teachers to develop classes that attract students, impacts in a certain way on learning, but we must not attribute the whole cause to the teachers, since, with the speed at which the evolution of new technologies and software are suffering, other difficulties are generated, such as the improvement and training of the majority of teachers in the use of these digital information and communication technologies, putting so, the teaching and meaningful learning of mathematics as focus of various research. And more, when searching the relevant literature and on internet pages, it was found that there was a certain emptiness of materials aimed at high school, which would help teachers of Mathematics in some contents applied in new technologies. Being more specific, materials that spoke didactically about the use of the GeoGebra software spreadsheet applied in the content of Mathematics in High School. In order to help minimize part of this emptiness, we have developed material that is objective to support and instigate teachers the use of GeoGebra software in math classes, with the assumption of generating classes more attractive and with meaningful learning. However, the material generated is not from restricted use of high school mathematics teachers, but for any person interested in the topic. The knowledge objects covered in this work are: Matrices, Determinants and Linear Systems. It is intended to present a relatively simple approach with the support of the software GeoGebra, in which a qualitative approach was used with participatory research procedures. A mini-course was also held remotely, which was presented a general idea of the material created, providing feedback that highlighted the importance of the development of this dissertation for teachers, students and those interested in the subject.

Key-words: Matrices; Determinants; Linear Systems; Digital Information and Communication Technologies; GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Interface padrão ao abrir o GeoGebra	16
Figura 2 – Barra de Ferramentas	17
Figura 3 – Manipulação e Ponto	18
Figura 4 – Polígonos e Cônicas	19
Figura 5 – Linhas retas e Posições relativas	21
Figura 6 – Formas circulares e Ângulos	22
Figura 7 – Transformações e Controles	23
Figura 8 – Exibição	24
Figura 9 – Planilha de Cálculo	25
Figura 10 – Barra de Ferramentas da Planilha	25
Figura 11 – Análises e Listas	26
Figura 12 – Janela de Configuração de Lista de Números	26
Figura 13 – Soma	27
Figura 14 – Layout da janela CAS	28
Figura 15 – Barra de Ferramentas da janela CAS	29
Figura 16 – Janela de Visualização 3D	30
Figura 17 – Barra de Ferramentas da janela de visualização 3D	30
Figura 18 – Circunferências na janela 3D	31
Figura 19 – Planos	32
Figura 20 – Prisma e Pirâmide	33
Figura 21 – Posição dos Valores nas Células da Planilha	35
Figura 22 – Janela de Renomeação da Matriz	36
Figura 23 – Exemplo de Adição de Matrizes na Planilha	37
Figura 24 – Resultado da Soma de Matrizes	37
Figura 25 – Exemplo de Adição de Matrizes Usando o Campo de Entrada	38
Figura 26 – Resultado da Adição de Matrizes Usando o Campo de Entrada	38
Figura 27 – Multiplicação entre Matrizes na Célula da Planilha	39
Figura 28 – Multiplicação entre Matriz no Campo de Entrada	40
Figura 29 – Células da Matriz C Programadas	41
Figura 30 – Exemplo da Multiplicação de Matrizes com as Células Programadas	41
Figura 31 – Matriz Inicial	43
Figura 32 – Programação das Células A7 à E9	44
Figura 33 – Comandos das Células da Matriz da Etapa V	48
Figura 34 – Comando das células da Matriz da Etapa VI	49
Figura 35 – Matriz Exemplo do Escalonamento	51
Figura 36 – Matriz na Etapa II	51

Figura 37 – Matriz escalonada na Etapa IV	52
Figura 38 – Regra de Sarrus	53
Figura 39 – Exemplo do cálculo do determinante com o comando	54
Figura 40 – Exemplo do cálculo do determinante com a planilha	54
Figura 41 – Inserção da Equação 1 no GeoGebra	61
Figura 42 – Inserção da Equação 2 no GeoGebra	62
Figura 43 – Interseção entre as Retas	63
Figura 44 – Interpretação Geométrica do Sistema Possível e Indeterminado	64
Figura 45 – Interpretação Geométrica do Sistema Impossível	65
Figura 46 – Representação Geométrica das Equações do Sistema A	66
Figura 47 – Ponto de Interseção dos Planos	66
Figura 48 – Três Planos Coincidentes	67
Figura 49 – Interseção Entre Dois Planos	68
Figura 50 – Interpretação Geométrica do Sistema C	69
Figura 51 – Interpretação Geométrica do Sistema D	70
Figura 52 – Interpretação Geométrica do Sistema E	71
Figura 53 – Interpretação Geométrica do Sistema G	72
Figura 54 – Equações do Sistema Linear na Janela CAS	73
Figura 55 – Representação Gráfica do Sistema Linear	74
Figura 56 – Solução do Sistema Linear na Janela CAS	74
Figura 57 – Resolução com o Comando Resolver	75
Figura 58 – Posição das Coordenadas dos Pontos nas Células	81
Figura 59 – Polígono Exemplo	82
Figura 60 – Polígono Transladado	83
Figura 61 – Reflexão do Polígono	84
Figura 62 – Rotação em Torno do Ponto $(0,0)$	85

SUMÁRIO

Sumário	10
INTRODUÇÃO	12
1 O GeoGebra	15
1.1 Interface do GeoGebra	15
1.2 Barra de Ferramentas	17
1.3 Planilha de Cálculo	24
1.4 Janela CAS	28
1.5 Janela de Visualização 3D	29
2 Matrizes no GeoGebra	35
2.1 Operações com Matrizes	36
2.1.1 Adição e Subtração de Matrizes	36
2.1.2 Multiplicação de Matrizes	39
2.1.2.1 Processo de Programação de Células da Planilha	40
2.1.3 Matriz Transposta	41
2.1.4 Matriz Inversa	42
2.1.5 Matriz Escalonada	42
2.1.5.1 Programação da Planilha de Cálculo para Escalonar Matrizes	43
2.2 Determinante	52
3 Sistemas Lineares no GeoGebra	55
3.1 Resolução de Sistemas Lineares	55
3.1.1 Escalonamento pelo Método de Gauss-Jordan	56
3.1.1.1 Sistemas Lineares, Matrizes e GeoGebra	60
3.1.2 Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares 2×2 Utilizando a Janela de Visualização do GeoGebra	60
3.1.2.1 Representação Geométrica de Sistemas Possíveis e Determinados	61
3.1.2.2 Interpretação Geométrica de Sistemas Possíveis e Indetermináveis	63
3.1.2.3 Interpretação Geométrica de Sistemas impossíveis	64
3.1.3 Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares 3×3 Utilizando a Janela de Visualização 3D do GeoGebra	65
3.1.3.1 Interpretação Geométrica de sistemas possíveis e determinados	65
3.1.3.2 Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares Possíveis e indeterminados	67

3.1.3.3	Representação Geométrica de um Sistema Linear Impossível	69
3.1.4	Resolução de Sistemas Lineares na Janela CAS	72
4	Metodologia	76
4.1	Metodologia Qualitativa	76
4.1.1	Pesquisa Participante	77
4.1.2	Questionário	77
4.1.3	Formulário	79
4.2	Aplicação da ideia	79
4.2.1	A Dinâmica do Minicurso	80
4.3	Análise e Discussão de Dados	86
4.3.1	Dados da Pesquisa	86
4.3.1.1	Questionário de Inscrição	86
4.3.1.2	Formulário de <i>Feedback</i>	89
	Considerações Finais	97
	Referências	99
	APÊNDICE	100
	APÊNDICE A	101
	APÊNDICE B	103

INTRODUÇÃO

Analisando desde que estava no Ensino Médio e durante a graduação, pude notar que o uso de *softwares* matemáticos eram bem específicos e muito pouco utilizados. Entretanto, os professores sempre exaltavam a importância do uso de novas tecnologias no ensino, mas criticavam que a falta de suporte e a falta de material eram elementos que dificultavam a realização de mais aulas com o uso de tecnologias digitais de informação e comunicação.

Algumas pesquisas têm mostrado que a utilização das novas tecnologias por parte dos professores de Matemática no Brasil tem sido artificial, longe do ideal, se restringindo na maiorias dos casos, à utilização de planilhas como o *Excel* e editores de texto (BITTAR, 2000). Com isso, busquei fazer cursos básicos de alguns *softwares* para que minhas aulas de Matemática chamassem mais a atenção dos alunos, até porque a maioria dos estudantes já nasce imerso no mundo da tecnologia.

No momento de preparação das aulas, quando buscava algo além do que eu tinha aprendido com os cursos relacionados ao uso de *softwares*, me deparava com problemas de falta de material. Porém, no decorrer do mestrado e já pensando em um possível tema para a dissertação, realizei algumas pesquisas em páginas de internet e livros didáticos do Ensino Médio e constatei que a quantidade de material que pudesse apoiar o professor em utilizar o *software* GeoGebra em aulas de Matemática de forma simples e prática era pouca, e quando se analisou a utilização de sua planilha, os resultados foram mais escassos. Por esse motivo, pensamos em desenvolver um texto que sirva como apoio e complemento para professores de matemática do Ensino Médio.

Nota-se que tecnologia está presente em praticamente em tudo, no cotidiano de todas as pessoas, mas boa parte dessas pessoas a utiliza sem ter consciência disso, e para outras pessoas é ser algo indispensável. Tendo em vista isso, questiona-se por qual motivo o uso dessa tecnologia em aulas de Matemática é tão pouco aproveitada? Uma das possíveis respostas é que das muitas vezes falta-se material adequado, fazendo que professores sigam metodologias mais tradicionais.

Para (NASCIMENTO, 2012), as tecnologias se mostram dominantes no âmbito educacional. Constitui em fortalecer os recursos tecnológicos no ensino, no qual a escola tem que se adaptar a usar computadores nas aulas, a fim de trabalhar algo diferente, possibilitar a contextualização dos assuntos vistos em sala de aula e fazer com que os alunos busquem um interesse maior pela busca do conhecimento. O uso das tecnologias contribui para a construção de conhecimentos. No entanto, o público alvo no avanço tecnológico hoje são os professores, alunos e os demais membros do corpo escolar, no qual o uso de recursos vem sendo cada vez mais trabalhado nas aulas de Matemática.

Porém, nem sempre os professores estão preparados para um avanço tão repentino de novas tecnologias.

E (MORAN, 2013), destaca que existem novos desafios para os educadores e que a *internet* e as tecnologias digitais são meios facilitadores, podendo auxiliar na descoberta de formas de assimilação, como também disponibilizar inúmeros recursos acessíveis. Sendo um desses os *softwares* gratuitos, que podem e devem ser explorados como material didático, proporcionando uma metodologia de ensino. Considerando os objetivos propostos nas diretrizes de (PARANÁ, 2008) no que diz a respeito ao ensino da matemática, é notável que recursos como a *internet*, *software*, jogos e entre outros, contribui efetivamente no ensino.

Tendo em vista que a tecnologia está presente em quase tudo e que a sociedade está se reformulando com ela, espera-se que a educação também se aproprie das vantagens do meio. Neste caso se pergunta, o uso do GeoGebra está sendo aplicado em aulas de Matemática? Há material de apoio para professores que queiram trabalhar com esse *software*, entre outros materiais inovadores?

Adentrando neste contexto, pretende-se com este trabalho desenvolver um material didático que possa auxiliar e instigar os professores que lecionam para alunos do Ensino Médio a iniciarem o uso do *software* GeoGebra em suas aulas de Matemática e assim torna-las mais atrativas e significativas aos olhos dos alunos. Além disso, um outro objetivo deste trabalho é a elaboração e aplicação de um minicurso na forma remota, indicado para professores, estudantes e outras pessoas interessadas nos temas Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares aplicados no GeoGebra. A escolha pelo GeoGebra foi incentivada pelas suas características e por se tratar de um *software* gratuito e que está em ascendência. Possui versões para vários sistemas operacionais e versões para celulares.

No Capítulo 1 é feita uma apresentação do *software* GeoGebra, detalhando os menus, ferramentas, ícones, janelas de visualização, como a janela de visualização normal e a 3D. Também é apresentado a Planilha de Cálculo e a janela CAS, com figuras ilustrando os comandos e ferramentas, seguidas de algumas orientações de como podem ser utilizadas.

No segundo capítulo, abordamos alguns conceitos de Matrizes e Determinantes aplicados no GeoGebra, seguidos de exemplos e comandos para os leitores utilizarem. São abordados a adição, subtração e multiplicação de matrizes. Na multiplicação de matrizes é apresentada uma programação de células da planilha de cálculo para realizar o cálculo da multiplicação de matrizes. Também é abordado matriz transposta, matriz inversa e matriz na forma escalonada.

Em matrizes escalonadas, é feito o uso da planilha de cálculo do GeoGebra para programar o processo de escalonamento de matrizes do tipo $n \times m$, com $n = 1, 2, 3, 4$ e $m = 1, 2, 3, 4, 5$, utilizando o processo de Gauss-Jordan. Em relação ao estudo de

determinantes, foi feita uma apresentação da Regra de Sarrus e uma aplicação com o apoio do GeoGebra.

No Capítulo 3 é apresentada uma sequência didática pautada em sugestões aos usuários/professores, com o objetivo de utilizar o GeoGebra na resolução de sistemas lineares. São apresentadas resoluções utilizando o escalonamento pelo método de Gauss-Jordan da matriz associada a um sistema linear de até quatro equações e quatro incógnitas, apresentadas no Capítulo 2. Também é feita uma interpretação geométrica de sistemas lineares utilizando as janelas de visualização e uma forma de resolver sistemas lineares na janela CAS.

No Capítulo 4 apresentamos a metodologia aplicada na pesquisa, citando as visões de alguns autores e suas características. É apresentado juntamente a pesquisa participante, tipo de pesquisa que se classificou este trabalho e as formas de coleta de dados utilizadas.

Também foi apresentada a aplicação da ideia. Esse subcapítulo descreve o desenvolvimento de um minicurso realizado para professores e pessoas interessadas no tema, com um roteiro detalhado do que foi trabalhado no minicurso em cada dia de sua aplicação. O Capítulo 4 mostra que a ideia do uso do GeoGebra nas aulas de Matemática pode ser mais explorada.

Fechando o Capítulo 4, o pesquisador disponibiliza dados desta pesquisa, coletados a partir dos participantes do minicurso realizado. Apresenta uma análise dos dados obtidos nas respostas de um questionário (APÊNDICE A) e de um formulário (APÊNDICE B), excluindo as perguntas e respostas que relacionam dados pessoais dos participantes. O objetivo da análise foi obter o perfil dos participantes do minicurso em relação ao conhecimento do *software* GeoGebra e o seu uso, e também de coletar informações para aprimorar a ideia geral do trabalho e melhorar os conhecimentos em relação ao tema.

1 O GEOGEBRA

O projeto de criação do GeoGebra teve início em 2001 por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg, localizada na cidade austríaca de Salzburgo, o GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne as geometrias plana, espacial e analítica. Para além das abordagens geométricas, o *software* também conta com uma Planilha de cálculo, gráficos de funções que podem ser visualizados em duas e três dimensões, probabilidade, estatística, cálculos simbólicos e até realiza o cálculo de integrais e derivadas, tudo em um único pacote.

O grupo de pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TECMEM, 2019) salienta que o *software* possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países, os quais podem realizar alterações nas configurações conforme a necessidade, pois o GeoGebra trabalha com código aberto para usuários não comerciais.

Este *software* também pode ser usado para explorar conceitos de álgebra linear, tais como, o estudo de matrizes, determinantes e sistemas lineares. Estes objetos de conhecimento são temas centrais deste trabalho. O GeoGebra é um *software* gratuito e está disponível para computadores, *tabletes*, *smartphones* e celulares, se adaptando aos sistemas operacionais *Android*, *Linux*, *IOS* e *Windows*. Atualmente, o GeoGebra disponibiliza em seu site oficial <https://www.geogebra.org> duas versões, a mais atual durante esta pesquisa é o "GeoGebra Clássico 6". Neste trabalho será utilizada a versão "GeoGebra Clássico 5¹".

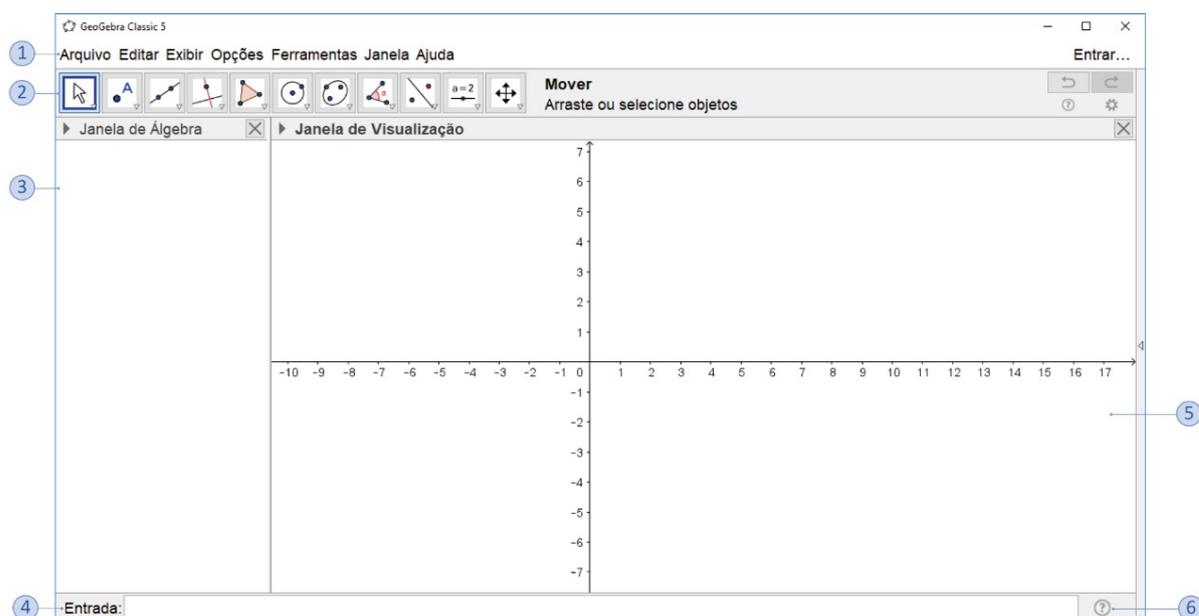
Além das duas versões, o site do GeoGebra disponibiliza outros aplicativos, como calculadora CAS (Sistema de Computação Algébrica), calculadora 3D e calculadora Gráfica. Ainda no site, os usuários podem contar com uma variedade de materiais criados por outros usuários disponíveis para *download*. Nas seções subsequentes serão descritas algumas informações necessárias para o entendimento do trabalho e do próprio uso do *software* GeoGebra.

1.1 INTERFACE DO GEOGEBRA

A versão utilizada neste trabalho é a GeoGebra Clássico 5, para o sistema operacional *Windows*. Tendo como interface padrão do GeoGebra instalado em um computador, ao ser carregado, apresenta a configuração apresentada na Figura 1.

¹ Esta versão GeoGebra Clássico 5 foi utilizada pelos cursistas e pelo autor deste trabalho no desenvolvimento do curso intitulado Nome do Curso

Figura 1 – Interface padrão ao abrir o GeoGebra



Fonte: (DANTAS, 2018).

A Figura 1 ilustra a interface do GeoGebra ao ser carregado, além disso, pode-se observar alguns itens que foram colocados em destaque e explicados separadamente. Estes itens são informações base para os usuários do *software*.

1 Barra de Menu

A barra de menus disponibiliza opções para salvar o projeto em arquivo (.ggb)², editar construções, exibir novas janelas de visualização, ajuda e outras opções para controlar configurações gerais;

2 Barra de Ferramentas

A Barra de ferramentas concentra todas as ferramentas úteis para construir pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos construídos, entre outros. Cada ícone dessa barra esconde outros ícones que podem ser acessados clicando com o *mouse* em seu canto inferior direito;

3 Janela de Álgebra

Local em que é exibida as coordenadas, equações, medidas e outros atributos dos objetos construídos;

4 Entrada

Campo de texto para digitação de comandos;

² Extensão de arquivo gerado pelo GeoGebra

5 Janela de Visualização

Área de visualização gráfica de objetos que possuem representação geométrica e que podem ser desenhados com o mouse, após clicar nos ícones da barra de ferramentas. As construções exibidas na janela de visualização também podem ser realizadas via comandos digitados na entrada;

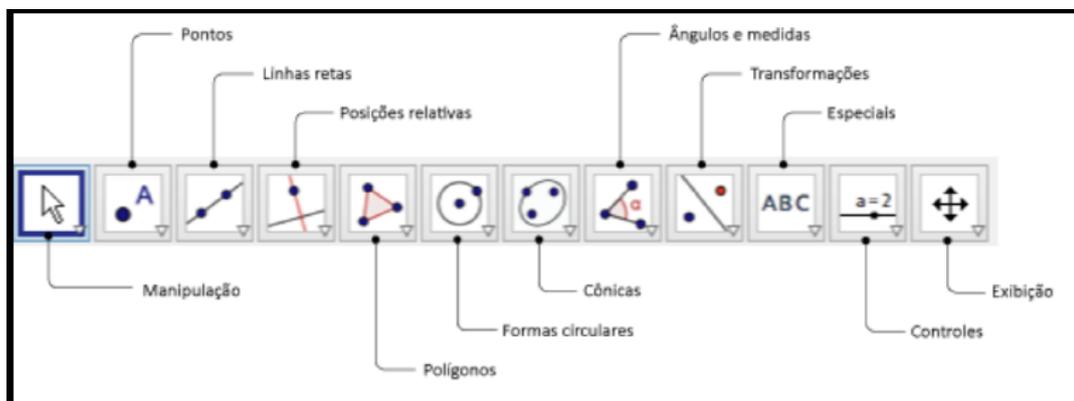
6 Lista de Comandos

Listagem de comandos predefinidos. Entre eles, há comandos relacionados aos ícones da barra de ferramentas.

1.2 BARRA DE FERRAMENTAS

A barra de ferramentas (Figura 2) é composta de doze conjuntos de ícones com as ferramentas necessárias para que os usuários construam, movimentem, obtenham medidas e modifiquem atributos de objetos construídos.

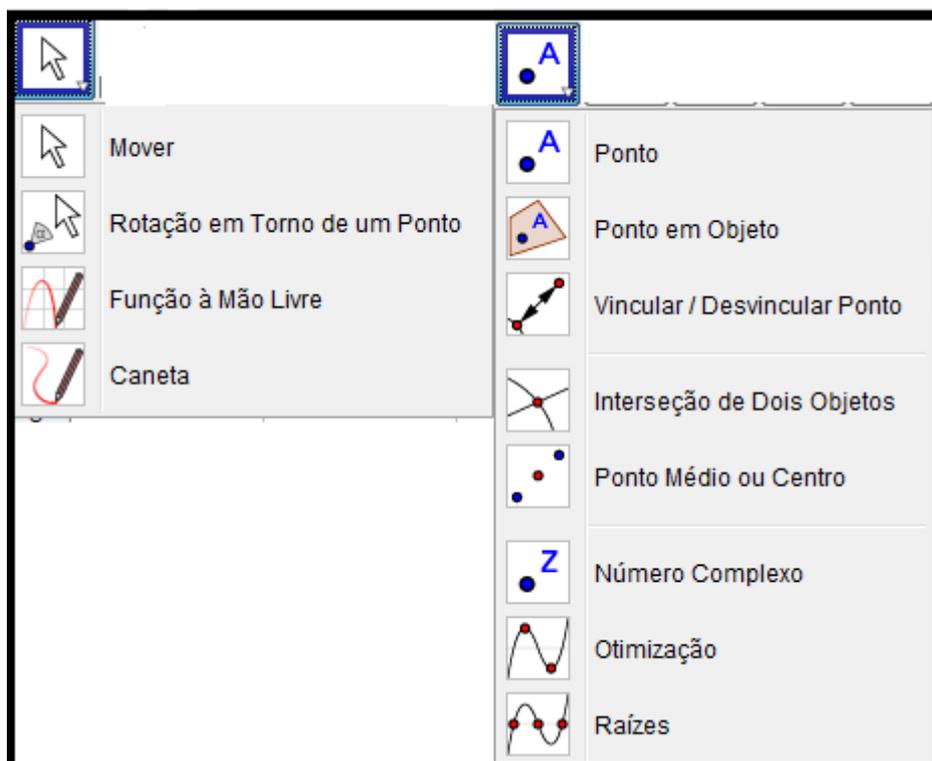
Figura 2 – Barra de Ferramentas



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

É válido ressaltar que dentre esses doze ícones da barra de ferramentas, os usuários contam com inúmeras outras ferramentas que são ocultadas pelo GeoGebra. A fim de esclarecer ao leitor, foram feitas explicações de cada ícone da barra de ferramentas, iniciando com os ícones de 'Mover' e 'Ponto', conforme mostrado na Figura 3.

Figura 3 – Manipulação e Ponto



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

A opção ‘Mover’ deve estar sempre selecionada quando os usuários desejam movimentar o *mouse* ou selecionar algum objeto construído. Uma maneira de selecionar a opção ‘Mover’ é clicando na tecla *Esc*. A opção ‘Rotação em Torno de um Ponto’ é utilizada para rotacionar construções como figuras geométricas, retas, pontos, vetores em torno de um ponto qualquer criado anteriormente.

As ferramentas ‘Função à Mão Livre’ e ‘Caneta’ têm funções similares, em ambas os usuários podem desenhar ou escrever funções na janela de visualização utilizando o *mouse*. As opções ‘Ponto’ e ‘Ponto em Objeto’ servem para criar pontos na janela de visualização clicando com o botão esquerdo do *mouse* no local desejado, mas a diferença entre as duas ferramentas é que quando selecionado ‘Ponto em Objeto’ o ponto criado sobre o objeto estará limitado ao objeto em questão, ou seja, os usuários não conseguirão movimentar o ponto criado antes de realizar a desvinculação do ponto ao objeto.

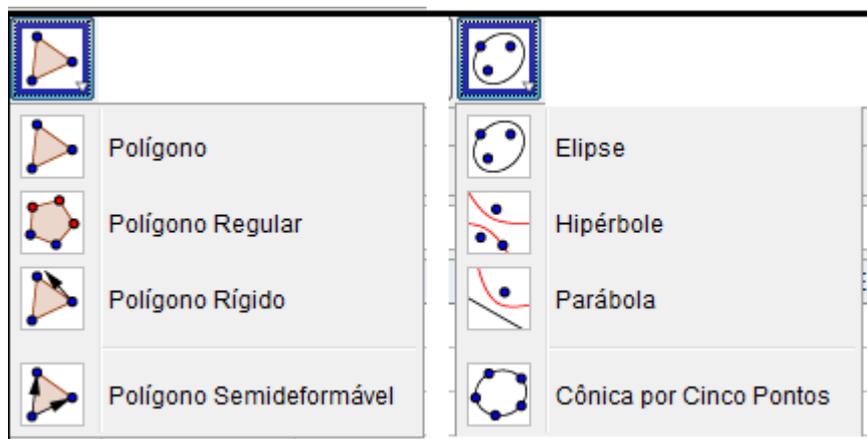
A ferramenta ‘Vincular/Desvincular Ponto’ como o nome já diz, serve para vincular ou desvincular um ponto de um objeto, seja esse objeto uma figura, uma reta ou uma função. Outra ferramenta disponível dentro do ícone ‘Ponto’ é ‘Interseção de Dois Objetos’. Esta ferramenta tem como função encontrar, se houver, a interseção desses dois objetos (que podem ser retas, cônicas, planos, funções, entre outros objetos criados) na janela de visualização. Vale destacar que a interseção pode ser uma reta, um ponto ou até mesmo

uma cônica e, nestes casos, o GeoGebra exibe na janela de Álgebra a equação do objeto encontrado na interseção.

‘Ponto Médio ou Centro’ auxilia no encontro do ponto médio de dois pontos, um segmento ou no encontro do centro de uma circunferência, uma figura ou até mesmo de uma cônica. A ferramenta ‘Número Complexo’ é útil para representar as coordenadas de um ponto qualquer da janela de visualização 2D na forma de número complexo (por exemplo, o ponto $P = (3, 2)$ será representado na ‘Janela de álgebra’ por $3 + 2i$). Por último, ‘Otimização’ e ‘Raízes’ são ferramentas utilizadas em funções, o GeoGebra realiza a otimização ou encontra as raízes reais da função selecionada.

Na Figura 4, os ícones ‘Polígonos’ e ‘Cônicas’ estão revelando as ferramentas disponíveis.

Figura 4 – Polígonos e Cônicas



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Na ferramenta ‘Polígono’ os usuários devem selecionar todos os vértices e, por último, selecionar o primeiro vértice novamente para criá-lo. Note que o GeoGebra exibirá a área deste polígono na janela de Álgebra, inclusive, as coordenadas dos vértices e os comprimentos dos segmentos que representam esses lados. Na opção ‘Polígono Regular’, os usuários só precisam selecionar os dois primeiros pontos, determinando a medida dos lados do polígono e, em seguida, será exibida uma janela perguntando o número de lados deste polígono.

Com a ferramenta ‘Polígono Rígido’ os usuários criam um polígono em que os vértices não poderão ser movimentados separadamente, ou seja, caso queira movimentar algum vértice, o polígono inteiro movimentará junto, preservando assim o polígono. Nesta ferramenta também há a opção de criar um polígono rígido a partir de um outro polígono já existente, basta selecionar a ferramenta ‘Polígono Rígido’ e clicar sobre o polígono existente que o GeoGebra irá criar um novo polígono "ao lado" (que pode ser transladado),

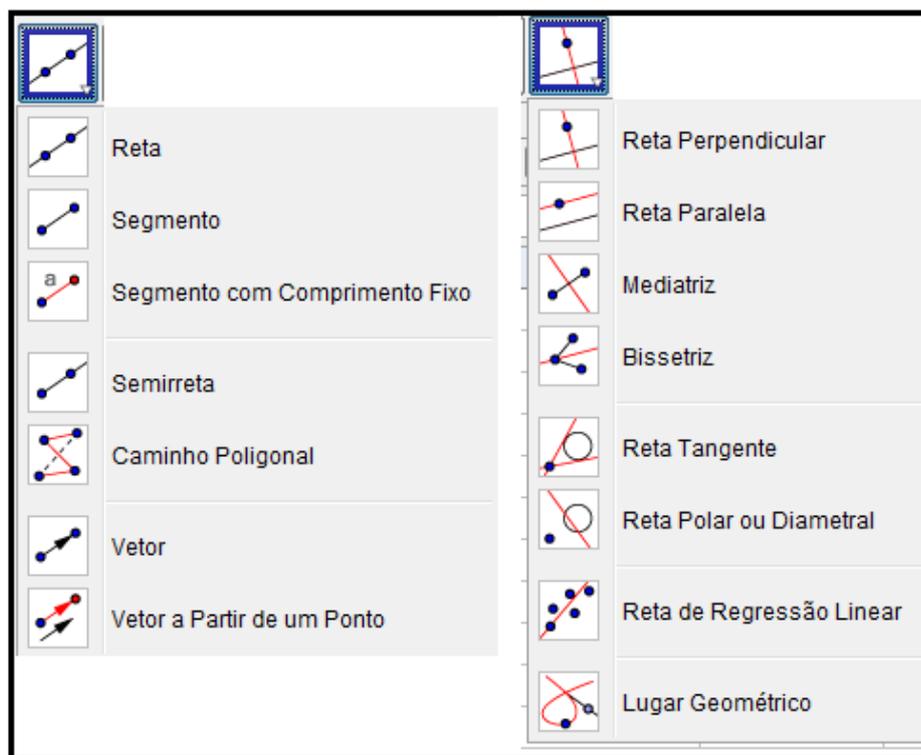
só que agora rígido. A ferramenta ‘Polígono Semideformável’ cria um polígono, em que apenas o vértice inicial é rígido, isto que dizer que se você mudar de posição este vértice, o polígono será movimentado junto, preservando-o. Por outro lado, os demais vértices poderão ser movimentados, alterando assim as características do polígono.

No ícone ‘Cônicas’, são ocultadas quatro ferramentas, sendo elas ‘Elipse’, ‘Hipérbole’, ‘Parábola’ e ‘Cônica por Cinco Pontos’. Todas essas ferramentas são para os usuários criar as cônicas. Nas opções ‘Elipse’ e ‘Hipérbole’ o GeoGebra pede para que os usuários selecionem dois pontos, que serão os focos e, em seguida, um terceiro ponto que irá fazer parte da cônica. Dessa forma, o *software* exibirá o gráfico da cônica na janela de visualização e, a equação correspondente, na janela de Álgebra.

Em relação à ‘Parábola’, os usuários precisam selecionar um ponto e uma reta diretriz (uma parábola é caracterizada por um ponto denominado "foco da parábola" e uma reta denominada diretriz). Note que dado um ponto qualquer da parábola, sua distância ao foco é igual à sua distância em relação à reta diretriz, isso é o que determina a parábola. Na última ferramenta desse ícone, ‘Cônica por Cinco Pontos’, os usuários deverão selecionar quatro pontos distintos na janela de visualização e, ao selecionar o quinto ponto, o GeoGebra exibirá uma prévia do gráfico da cônica a ser criada, facilitando de certa forma a escolha do modelo da cônica para os usuários.

Outros dois ícones que auxiliam aos usuários nas construções de segmentos de retas, retas e algumas retas com uma certa posição, são os ícones ‘Linhas Retas’ e ‘Posições Relativas’, conforme apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Linhas retas e Posições relativas



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

No ícone ‘Linhas Retas’, os usuários têm as opções de criar retas ou segmentos de reta a partir de dois pontos, também podem criar segmentos de reta com um comprimento fixo, semirretas e até mesmo caminhos poligonais. Além dessas ferramentas, ainda há a opção de criar um vetor. Nas ferramentas ‘Reta’ e ‘Segmento’, são necessários dois pontos para a criação de retas ou segmentos de reta. Na ferramenta ‘Semirreta’, primeiramente deve ser selecionado o ponto de origem e outro ponto para concluir a construção da semirreta. Na opção ‘Segmento com Comprimento Fixo’, deve ser selecionado um ponto e, após a seleção deste ponto, o GeoGebra abrirá uma janela para que o usuário digite o comprimento do segmento.

Para criar caminhos poligonais com a ferramenta do GeoGebra, os usuários devem selecionar todos os pontos que serão os vértices do caminho poligonal e por último selecionar o vértice inicial para concluir o caminho poligonal. E com a ferramenta ‘Vetor’, pode-se criar vetores selecionando dois pontos, onde o primeiro ponto é a origem do vetor e o segundo a outra extremidade. Já a opção ‘Vetor a Partir de um Ponto’, cria vetores a partir de um ponto que será a origem e de um outro vetor já criado, desta forma o GeoGebra copiará o vetor existente com uma nova origem. Esta ferramenta é interessante, pois a partir de um ponto, soma-se um vetor, obtendo-se assim, outro ponto que representa a extremidade da cópia deste vetor que agora estará representado com uma nova origem.

A Figura 5 também mostra as ferramentas ocultas no ícone ‘Posições Relativas’, no qual os usuários podem criar retas com características específicas como reta perpendicular, reta paralela, mediatriz, bissetriz, reta tangente, reta polar ou diametral, reta de Regressão Linear ou criar um lugar geométrico. Em todos os casos, os usuários deverão já ter à disposição, pontos ou objetos criados na janela de visualização para realizar o processo de construção das retas. Por exemplo, para a criar uma reta de Regressão Linear, deve-se ter criado anteriormente uma lista de pontos ou pontos aleatórios na janela de visualização.

Os usuários do GeoGebra têm a opção de criar círculos/circunferências, entre outros objetos relacionados ao tema circunferência, tais como, semicírculo, arco circular e setor circular no ícone ‘Formas Circulares’ e realizar cálculos de ângulos, comprimento de segmento, cálculo de perímetro, área de um polígono, inclinação de retas, verificar a relação entre dois objetos, criar listas selecionando células da planilha de cálculo do GeoGebra e até inspecionar funções (Figura 6).

Figura 6 – Formas circulares e Ângulos



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

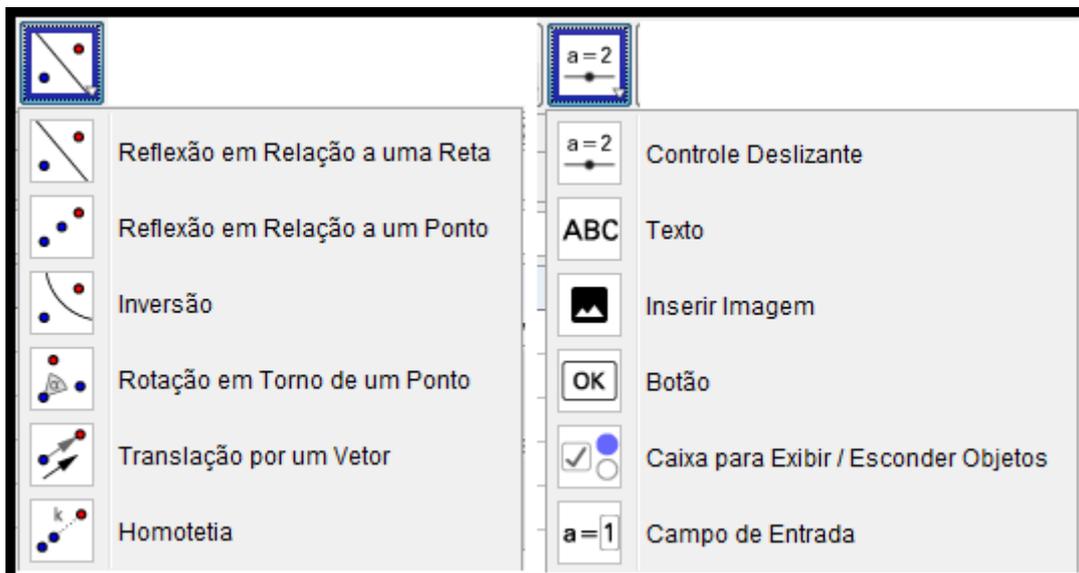
A Figura 7 exibe os ícones ‘Transformações’ e ‘Controles’. As ferramentas ocultas no ícone de ‘Transformações’ possibilitam aos usuários do GeoGebra realizarem reflexões de objetos em relação a uma reta ou a um ponto, a inversão de objetos a um círculo,

rotação em torno de um ponto com ângulo pré-definido e sentido de rotação (sentido horário ou anti-horário), translação de objetos por vetor e homotetia.

Com as ferramentas do ícone ‘Controles’ (Figura 7), pode-se criar controles deslizantes, que é uma ferramenta interessante, pois com essa ferramenta os usuários podem controlar valores, ângulos e realizar animações. Para criar um controle deslizante, deve-se selecionar a ferramenta ‘Controle Deslizante’ e clicar em qualquer lugar na janela de visualização, dessa forma, o GeoGebra pedirá para que os usuários escolham o tipo de controle a ser criado (número, ângulo ou inteiro) e, em seguida, selecionar os valores mínimos e máximos do controle deslizantes juntamente com o valor do incremento³. Também fornecerá a opção de se apresentar na forma horizontal ou vertical e a velocidade da animação.

O ícone ‘Controles’ disponibiliza ainda as ferramentas ‘Texto’ a fim de criar textos na janela de visualização, ‘inserir imagem’, criar botões para realizar interações, criar caixas para esconder/exibir objetos e abrir um campo de entrada na janela de visualização para exibir legendas a objetos.

Figura 7 – Transformações e Controles

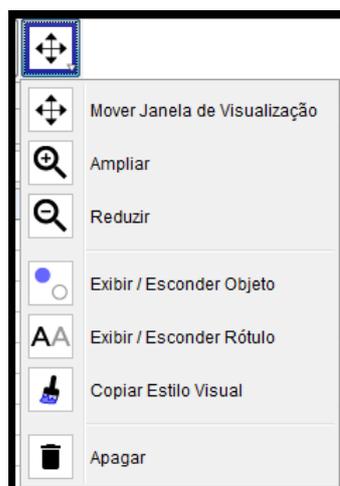


Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Por fim, o ícone ‘Exibição’ (Figura 8) possui algumas ferramentas importantes como ‘Mover Janela de Visualização’, ampliar e reduzir o zoom da janela de visualização, esconder ou exibir objetos criados, esconder ou exibir os rótulos dos objetos, copiar o estilo visual dos objetos e apagar qualquer criação.

³ Valor no qual o controle deslizante aumentará ou diminuirá

Figura 8 – Exibição



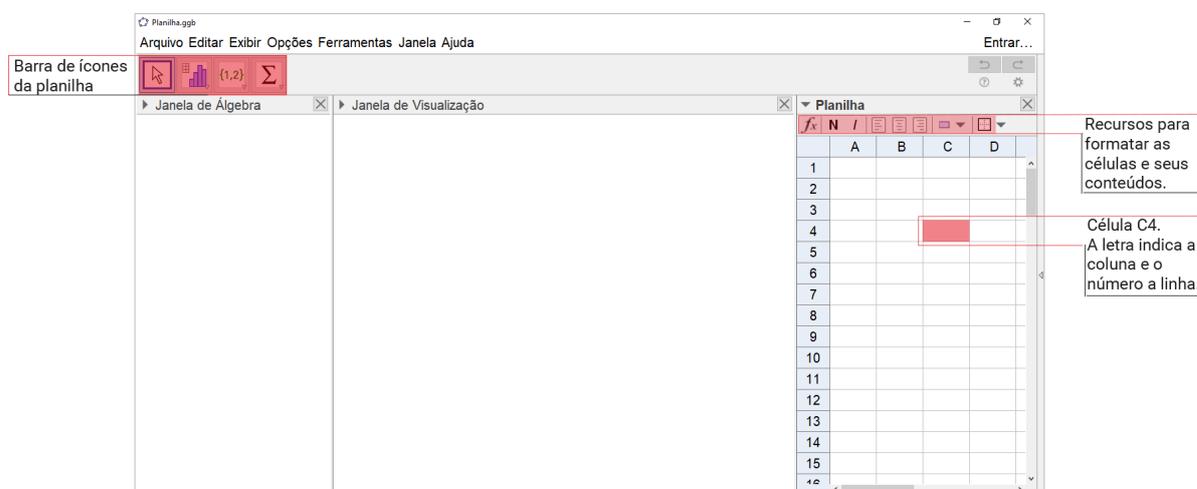
Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

1.3 PLANILHA DE CÁLCULO

A planilha de cálculo do GeoGebra é uma planilha semelhante a planilha da *Microsoft Excel*, entretanto algumas características tornar a planilha do GeoGebra mais específica, uma dessas características é a interação das células com o restante do *software*, ou seja, pode-se criar matrizes, funções, análises estatísticas e plotar pontos de forma que essas operações possam ser aproveitadas na janela de visualização, janela de Álgebra e janela de visualização 3D. Como material de estudo nesse trabalho, esta seção explanará a planilha de cálculo do GeoGebra para que os usuários estejam familiarizados com a ferramenta.

Ao carregar a planilha de cálculo do GeoGebra, os usuários podem escolher em selecionar o ícone *Exibir* da barra de menus e a opção 'planilha' ou podem acessar utilizando as teclas de atalho (*ctrl + shift + s*). Deste modo o *software* apresentará a interface apresentada na Figura 9.

Figura 9 – Planilha de Cálculo



Fonte: Dantas (2018).

Quando a planilha de cálculo é exibida e selecionada, novos ícones específicos do menu da planilha também são exibidos e outras ferramentas podem ser acessadas selecionando a seta no canto inferior direito. Os ícones da barra de ferramentas da planilha (Figura 10) apresentam análises univariadas, criação de listas e matrizes, encontrar números e realizar cálculo de média aritmética como opções aos usuários.

Figura 10 – Barra de Ferramentas da Planilha

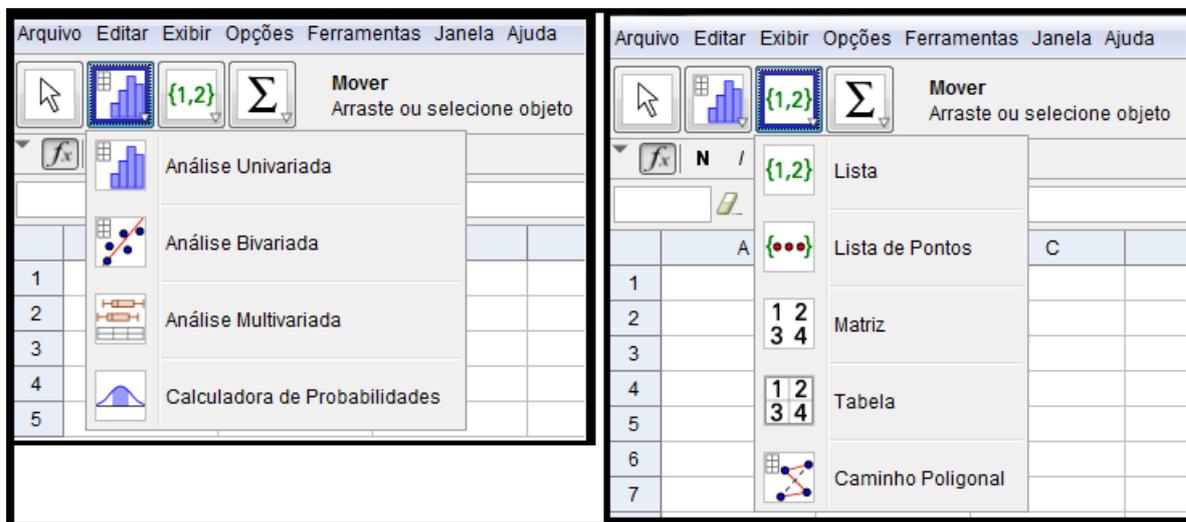


Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

O primeiro ícone da barra de ferramentas da planilha do GeoGebra é o ícone ‘Mover’, usado para arrastar e selecionar objetos. O segundo ícone trata-se da parte estatística, o qual os usuários podem realizar ‘Análise Univariada’, ‘Análise Bivariada’, ‘Análise Multivariada’ e contam com a ‘Calculadora de Probabilidade’ (Figuras 11).

No terceiro ícone, o GeoGebra disponibiliza a criação de listas de números, listas de pontos, matrizes, tabelas e caminho poligonal (Figuras 11).

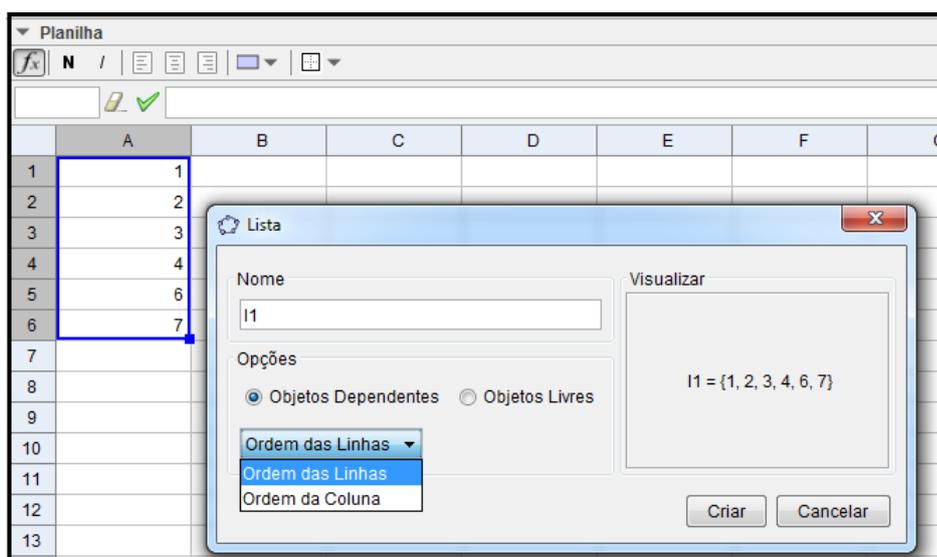
Figura 11 – Análises e Listas



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Para a criação de listas de números, os usuários do *software* GeoGebra devem digitar os números nas células seguindo uma ordem, sem pular células, em seguida devem selecionar o ícone 'Lista' e selecionar as células na ordem em que os números vão ficar na lista criada de preferência. Ao selecionar as células com o ícone 'Lista' ativo, o GeoGebra abrirá uma janela de configuração da lista (Figura 12), onde pode-se escolher se os números da lista serão dependentes das células da planilha ou serão livres e ainda podem escolher se a ordem dos números seguem as colunas ou as linhas da planilha.

Figura 12 – Janela de Configuração de Lista de Números



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra

Já na criação de lista de pontos, células de duas colunas sequenciadas devem ser

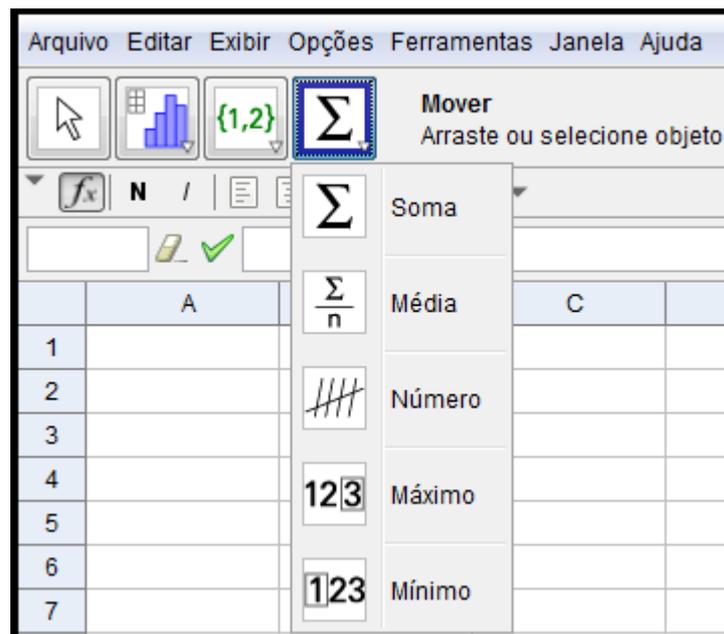
preenchidas com valores das coordenadas dos pontos, em seguida selecione todas as células e seleciona o ícone ‘Lista’ e ‘Lista de Pontos’, da mesma forma que a lista de números, uma janela de configuração de lista de pontos abrirá com a opção de alterar a ordem das entradas dos pontos, isto é, se um ponto da lista for da forma (x, y) pode ser modificado para (y, x) . Além disso, pode fixar a lista selecionando opção ‘Objetos Livres’, assim se alterar os valores nas células selecionadas, os valores na lista de pontos não se altera, mas, se escolher a opção ‘Objetos Dependentes’, os valores podem ser alterados após a criação. Após a criação da lista de pontos na planilha, o GeoGebra exibirá a lista na janela de álgebra e plotará os pontos na janela de visualização.

Os ícones ‘Matriz’ e ‘Tabela’ são parecidos, a forma de criar ambos são iguais. Os usuários devem selecionar as células na ordem que cada entrada da matriz ou tabela quer que fique e, em seguida, devem nomear e escolher se vai ser da forma selecionada das células ou transposta. A diferença entre matriz e tabela no GeoGebra é que a matriz a ser criada é exibida na janela de Álgebra e a tabela na janela de visualização.

A última ferramenta do ícone ‘Análise’ e ‘Caminho Poligonal’, que é criado selecionando células de duas colunas da forma que se cria-se uma lista de pontos e em seguida o GeoGebra plotará o caminho poligonal na janela de visualização e exibirá os pontos e o comprimento do caminho poligonal na janela de Álgebra.

O último ícone da barra de ferramentas da planilha é ‘Soma’ (Figura 13), disponibiliza aos usuários as ferramentas ‘Soma’, ‘Média’, ‘Número’, ‘Máximo’ e ‘Mínimo’.

Figura 13 – Soma



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

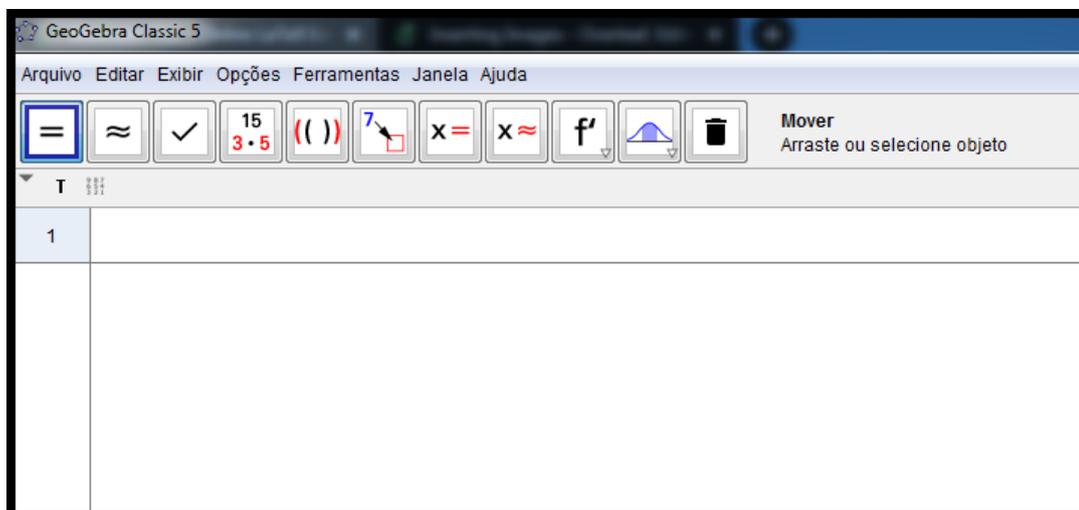
As ferramentas ‘Máximo’ e ‘Mínimo’ são úteis para que os usuários encontrem o valor máximo e o mínimo das células selecionadas, enquanto a ferramenta ‘Soma’ realiza a soma dos valores das células selecionadas e a ferramenta ‘Número’ conta o número de células selecionadas. Na opção ‘Média’, o GeoGebra realizará o cálculo de média aritmética das células selecionadas.

1.4 JANELA CAS

O termo CAS é a abreviação de *Computer Algebra System* que em português significa Sistema de Computação Algébrica. Nesta janela os usuários podem realizar cálculos de expressões numéricas, fatoração, resolver equações, sistemas lineares, derivar e integrar funções e realizar cálculos de probabilidade.

No GeoGebra a janela CAS pode ser acessada por meio do menu ‘Exibir’ e clicando nesta janela ou usando as teclas de atalho (*Ctrl + Shift + K*). Desta forma, o GeoGebra exibirá a janela CAS entre a janela de Álgebra e a janela de Visualização e apresentará o seguinte *layout* (Figura 14).

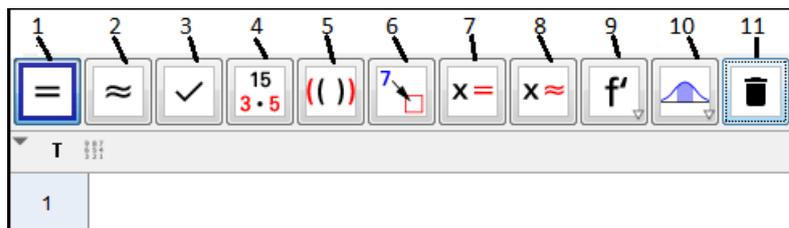
Figura 14 – Layout da janela CAS



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Da mesma forma quando ativa-se a Planilha, acontece ao ativar a janela CAS, um novo menu de ferramentas fica disponível para os usuários (Figura 15). E, para auxiliar os leitores, foi feito uma legenda de cada ícone da barra de ferramenta da janela CAS que será reutilizada no Capítulo 3.

Figura 15 – Barra de Ferramentas da janela CAS



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

- 1- Avaliar Simbolicamente;
- 2- Valor Numérico;
- 3- Manter entrada;
- 4- Fatorar;
- 5- Expandir;
- 6- Substituir;
- 7- Resolver;
- 8- Resolver Numericamente;
- 9- Derivar/ Integrar;
- 10- Calculadora de probabilidade;
- 11- Apagar.

A janela CAS trabalha com linhas de processamento e cada ferramenta da janela funciona quando os usuários selecionam a linha e, em seguida, a ferramenta. Por exemplo, é possível fatorar expressões numéricas e algébricas, caso os usuários digitem na linha 1- 62 e na linha 2- $(x^2 - x - 6)$ com o ícone ‘Avaliar Simbolicamente’ ativo e em seguida clicar em uma das linhas e no ícone ‘Fatorar’. Nas mesmas linhas selecionadas, o GeoGebra exibirá abaixo a frase ‘Fatorar: $2 \cdot 31$ ’ na linha 1 e ‘Fatorar: $(x - 3)(x + 2)$ ’ na linha 2, que representam a fatoração do número 62 e da expressão $x^2 - x - 6$.

1.5 JANELA DE VISUALIZAÇÃO 3D

Nesta seção apresentaremos a janela de Visualização 3D e os novos ícones da barra de ferramentas que são exibidos quando os usuários abrem essa janela. Para isso, os usuários podem acessar utilizando o menu ‘Exibir’ e clicando em Janela de Visualização 3D ou também podem utilizar o atalho teclando conjuntamente as teclas (*Ctrl + Shift +*

Figura 18 – Circunferências na janela 3D



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

A operação ‘Círculo dados Eixos e Um de seus Pontos’ exige dos usuários criarem um ponto no espaço da janela de visualização 3D e, em seguida, com a opção selecionada os usuários escolhem o eixo, no qual o centro da circunferência pertencerá e o um ponto que irá fazer parte da circunferência, imediatamente o GeoGebra exibirá o círculo na janela de visualização 3D e a equação na janela de Álgebra. E na opção ‘Círculo (Centro- Raio + Direção)’ os usuários devem escolher um ponto do espaço para ser o centro do círculo, para a direção em que a circunferência ficará, os usuários podem escolher algum dos eixos, por exemplo, se selecionar o eixo z como a direção, a circunferência pertencerá a um plano paralelo ao plano xOy e por último o GeoGebra abrirá uma caixa de diálogo perguntando o comprimento do raio do círculo.

‘Planos’, é um novo ícone que também é exibido quando a janela de visualização 3D é acessada, auxilia os usuários do GeoGebra na criação de planos com as ferramentas ‘Plano por três pontos’ e ‘Plano’, além disso, proporciona a criação de planos paralelos e

perpendiculares com as ferramentas ‘Plano Paralelo’ e ‘Plano Perpendicular ’(Figura 19).

Figura 19 – Planos



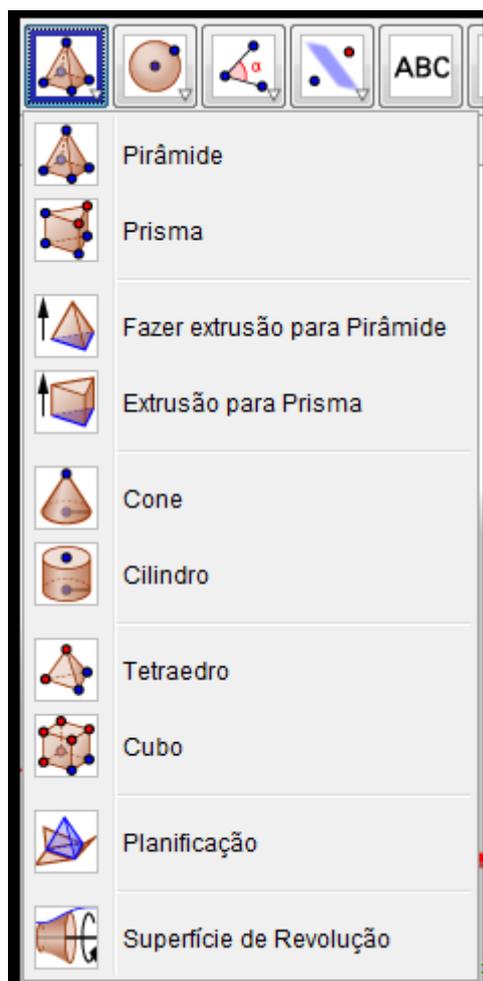
Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

A construção de um plano qualquer dá-se pela escolha de três pontos não colineares (três pontos distintos que não pertencem a uma mesma reta). É isso que a ferramenta ‘Plano por três pontos’ da janela de visualização 3D utiliza. Com a opção "Plano por três pontos" selecionada, os usuários precisam selecionar três pontos não colineares e o GeoGebra realizará a criação do plano na janela de visualização 3D, além de exibir sua equação na janela de Álgebra.

Com a ferramenta ‘Plano’, o GeoGebra disponibiliza a criação de planos utilizando outros objetos, além de pontos. Esta ferramenta sugere a opção de criação de planos a partir de uma reta e um ponto fora dela, duas retas concorrentes ou um polígono. Na opção ‘Plano Perpendicular’, o GeoGebra pede para os usuários selecionarem um ponto e uma reta na qual o novo plano a ser criado vai ser perpendicular, já em ‘Plano Paralelo’, são necessários um ponto e um plano, pois o GeoGebra cria planos paralelos a partir de planos já existentes.

Quando se trabalha com a janela de visualização 3D, um ícone que chama a atenção é o ‘Prisma e Pirâmide’ (Figura 20). Este ícone oculta dez ferramentas, onde os usuários do GeoGebra possam criar prismas, pirâmides, cones, cilindros, tetraedros, cubos e superfícies de revolução, também podem fazer extrusão para prismas e pirâmides e até realizar a planificação dos sólidos criados com animação.

Figura 20 – Prisma e Pirâmide



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Para a criação de prismas e pirâmides, os usuários devem selecionar a opção desejada e, em seguida, selecionar um polígono para a ser a base e um ponto para determinar o topo da pirâmide ou onde a outra base do prisma vai ficar. Caso não haja polígono construído na janela de visualização 3D, os usuários podem criá-lo no momento da criação do prisma ou da pirâmide, selecionando os pontos que representam os vértices do polígono e, em seguida, o ponto do topo. Ao finalizar a operação, o GeoGebra exibirá o objeto na janela de visualização 3D, os pontos dos vértices e o volume dos sólidos na janela de Álgebra.

Com as ferramentas ‘Cone’ e ‘Cilindro’, os usuários podem gerar cones e cilindros selecionando dois pontos e escolhendo o comprimento do raio da base do cone e das bases do cilindro. Os dois pontos a ser selecionados servirão para delimitar os sólidos em questão, no caso do cone, o primeiro ponto será o centro da base e o segundo o topo do cone, no cilindro, os pontos serão os centros das bases e a distância entre eles o comprimento do cilindro.

As ferramentas ‘Tetraedro’ e ‘Cubo’ servem para a criação de tetraedros regulares

e cubos utilizando dois pontos da janela de visualização 3D. Estes pontos servirão como comprimento das arestas dos sólidos escolhidos, ou seja, ao escolher a opção ‘Cubo’ o GeoGebra sugere que os usuários escolham dois pontos distintos e, imediatamente, o sólido é construído.

As extrusões de pirâmides e primas são mais duas ferramentas ocultas no ícone ‘Prisma e Pirâmide’. Para a utilização dessas ferramentas, os usuários do GeoGebra necessitarão de um polígono, que será de certa forma a base do objeto, e deverão escolher a altura da extrusão. Com isso, o *software* realizará a extrusão na janela de visualização 3D. Já para utilizar a ferramenta ‘Superfície de Revolução’, os usuários devem ter uma curva construída anteriormente, dessa maneira, com a ferramenta acionada, basta selecionar a curva e arrastar em torno de um eixo qualquer com o *mouse*.

Por fim, a ferramenta ‘Planificação’, usada para planificar poliedros criados na janela de visualização 3D na janela de visualização básica. Ativando a ferramenta ‘Planificação’ e selecionando o poliedro, o GeoGebra criará a planificação na janela de visualização básica juntamente com um controle deslizante para que os usuários possam observar *frame a frame* a planificação na janela de visualização 3D, ou seja, quando os usuários movimentam o controle deslizante na janela de visualização básica, a planificação se movimenta na janela de visualização 3D.

2 MATRIZES NO GEOGEBRA

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos de Matrizes e Determinantes por meio do uso do GeoGebra, tais como, adição e subtração de matrizes, multiplicação de matrizes, matriz transposta, matriz inversa, escalonamento de matrizes e cálculo de determinante. Aplicaremos o conceito de Matrizes e Determinantes no *software* GeoGebra e serão utilizados exemplos numéricos para auxiliar na compreensão das aplicações.

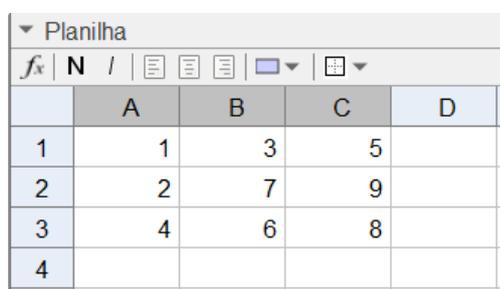
Para as aplicações desses conceitos, utilizaremos a planilha de cálculo, a janela de Álgebra e o campo de entrada do GeoGebra, que foram apresentados no Capítulo 1. Sendo assim, serão descritos procedimentos para que os professores possam utilizar como material de apoio na preparação das suas aulas. Iniciaremos com a criação de matrizes na planilha de cálculo.

Exemplificamos o processo de criação de matriz com a criação da matriz A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Com a planilha de cálculo aberta no GeoGebra, os usuários podem utilizar nove células seguidas, de forma que estejam em um bloco de 3×3 , por exemplo as células ‘A1, B1, C1, A2, B2, C2, A3, B3 e C3’. Nas células separadas, os usuários devem digitar os valores das entradas da matriz A na mesma sequência. A Figura 21 ilustra a forma correta a inserção das entradas (coeficientes) da matriz.

Figura 21 – Posição dos Valores nas Células da Planilha



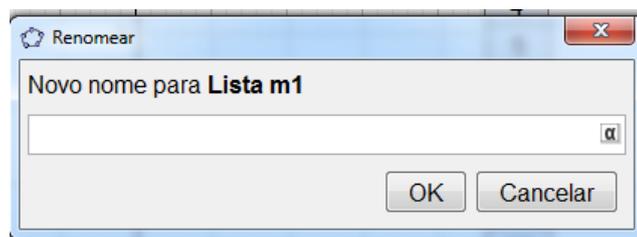
Planilha				
	A	B	C	D
1	1	3	5	
2	2	7	9	
3	4	6	8	
4				

Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Após a inserção dos dados, a criação da matriz pode ser feita selecionando todas as células com os valores das entradas. Para isso, mantenha pressionado o botão esquerdo do *mouse* na célula ‘A1’ e arraste até a célula ‘C3’. Em seguida, clique com o botão direito do *mouse* sobre as células selecionadas, depois no ícone ‘Criar’ e, por fim, no item ‘Matriz’.

A criação da matriz também pode ser feita de outra maneira. Após a seleção das células, basta clicar com o botão esquerdo do *mouse* na seta localizada junto ao ícone  que se encontra na barra de ferramentas e, em seguida, no comando ‘Matriz’. Automaticamente o *software* GeoGebra plotará a matriz na janela de Álgebra. Os usuários podem renomear a matriz criada clicando com o botão direito do *mouse* sobre a matriz na janela de Álgebra e, em seguida, no comando ‘Renomear’. Uma janela se abrirá (Figura 22), mostrando a opção de renomeação.

Figura 22 – Janela de Renomeação da Matriz



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

2.1 OPERAÇÕES COM MATRIZES

As operações com matrizes são normalmente ensinadas utilizando valores racionais nas entradas. Seguindo esse pensamento, foram descritos alguns exemplos, mas cabe salientar que as entradas das matrizes podem ser valores irracionais. As operações podem ser feitas utilizando o campo ‘Entrada’ ou uma célula livre da planilha do GeoGebra. Vejamos então como é realizar certas operações com matrizes no GeoGebra.

2.1.1 Adição e Subtração de Matrizes

Quando se trabalha com matrizes de entradas reais, deve-se apresentar as propriedades e as situações em que se pode realizar com matrizes, ou seja, ao realizar a Adição ou a Subtração de matrizes, deve-se notar que ambas devem ser do mesmo tipo, e isso também se aplica no *software* GeoGebra. Mas se tem que seguir as “regras”, por que usa-las? A exemplificação de maneira prática pode trazer ao aluno uma melhor compreensão.

Dessa forma, foi realizado a adição entre duas matrizes no GeoGebra, detalhando o procedimento. Com as duas matrizes já criadas no GeoGebra, e caso o professor ache necessário renomear, foi visto anteriormente na Seção 2 como realizar o processo. Assim, clicando em alguma célula livre da planilha, digita-se o nome de uma das matrizes criadas, em seguida adicionamos o sinal da operação desejada, no caso da Adição o sinal (+), no

caso da Subtração (-), e clica-se na tecla *Enter*. Imediatamente o GeoGebra mostrará na própria célula a matriz resultante da operação realizada.

Exemplificando o processo de Adição de matrizes, a Figura 23 apresenta a criação de duas matrizes de ordem 3. A matriz A utilizando as células 'A1' a 'C3' com valores aleatórios e a matriz B nas células 'E1' a 'G3'. Na célula 'D6', digitado 'A+B', aguardando o clique na tecla *Enter* para a realização da operação de Adição.

Figura 23 – Exemplo de Adição de Matrizes na Planilha

The screenshot shows the GeoGebra interface with a spreadsheet. On the left, a 'Lista' (List) window displays two matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. The main spreadsheet has columns A, B, C, D, E, F, G and rows 1-7. Cells A1-C3 contain the values of matrix A (1, 3, 5; 2, 7, 9; 4, 6, 8). Cells E1-G3 contain the values of matrix B (2, 9, 8; 7, 5, 4; 6, 1, 1). Cell D6 contains the formula 'A+B'.

Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Na Figura 24, o resultado da adição das matrizes A e B está exibido na célula 'D6', na qual foi digitado a operação de adição. Caso o professor escolha outra célula livre para realizar a adição de matrizes, o resultado é sempre exibido na célula escolhida.

Figura 24 – Resultado da Soma de Matrizes

The screenshot shows the same spreadsheet as Figure 23, but now cell D6 displays the result of the matrix addition: $\begin{pmatrix} 3 & 12 & 13 \\ 9 & 12 & 13 \\ 10 & 7 & 9 \end{pmatrix}$. The formula bar above the spreadsheet shows '-A+B'. A label 'Lista D6: A+B' is visible at the bottom right of the spreadsheet area.

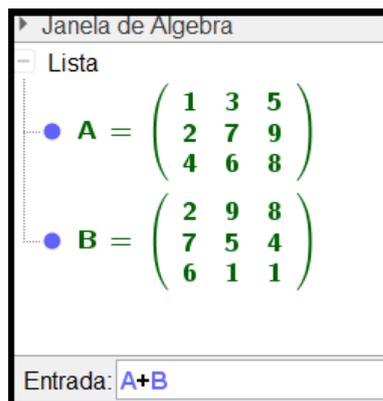
Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

A operação de subtração de matrizes pode ser realizada de forma análoga.

Para realizar a Adição ou a Subtração de matrizes pelo campo de entrada, os usuários devem criar as matrizes anteriormente e renomear, se necessário, e então, deve-se

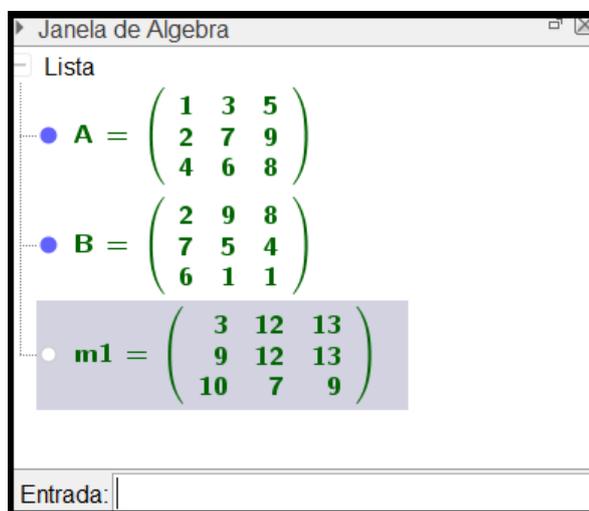
digitar o nome da primeira matriz no campo ‘Entrada’, o sinal da operação desejada e o nome da segunda matriz e, por último, a tecla *Enter*. O *software* GeoGebra gerará uma matriz na janela de Álgebra, no qual é a matriz resultado da operação escolhida. Este processo está exemplificado na Figura 25, que ilustra duas matrizes A e B já criadas e a digitação da operação no campo ‘Entrada’ e na Figura 26, o resultado da operação.

Figura 25 – Exemplo de Adição de Matrizes Usando o Campo de Entrada



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Figura 26 – Resultado da Adição de Matrizes Usando o Campo de Entrada



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Quando se realiza uma operação com matrizes no campo ‘Entrada’, a matriz gerada recebe um nome genérico escolhido pelo GeoGebra, no caso da adição realizada na Figura 25, a matriz resultado recebeu o nome ‘m1’ (Figura 26).

2.1.2 Multiplicação de Matrizes

A Multiplicação de matrizes é um processo extenso e cansativo quando se trata de matrizes de ordem maiores que 3. Entretanto, o GeoGebra realiza esse cálculo de maneira relativamente rápida no contexto do ensino. Em uma aula, em que os alunos já passaram pelo processo de como realizar a multiplicação de matrizes, assim como as propriedades, as “regras” de quando pode-se realizar a multiplicação entre duas matrizes, pode ser interessante instiga-los a usar o *software* GeoGebra para exemplificar quando se altera o valor de uma entrada de uma das matrizes (o que contribui na investigação), verificar se pode multiplicar uma matriz de ordem 3×1 por uma matriz de ordem 2, ou até mesmo verificar que as propriedades são válidas.

Para realizar a multiplicação entre duas matrizes, pode-se usar uma célula livre da planilha ou o campo ‘Entrada’. Utilizando uma célula livre da planilha, a matriz resultado da multiplicação será exibida na célula escolhida e, para isso, deve-se primeiramente criar essas matrizes, observando se a multiplicação entre elas está bem definida (o número de colunas da primeira matriz tem que ser igual ao número de linhas da segunda). Após ter criado as matrizes que serão multiplicadas, o produto entre elas pode ser realizado clicando em uma célula livre da planilha e digitando o nome da primeira matriz, depois o caractere (*) e, em seguida, o nome da segunda. Desta forma, o resultado será exibido.

A Figura 27 exemplifica o processo de multiplicação entre duas matrizes na célula da planilha.

Figura 27 – Multiplicação entre Matrizes na Célula da Planilha

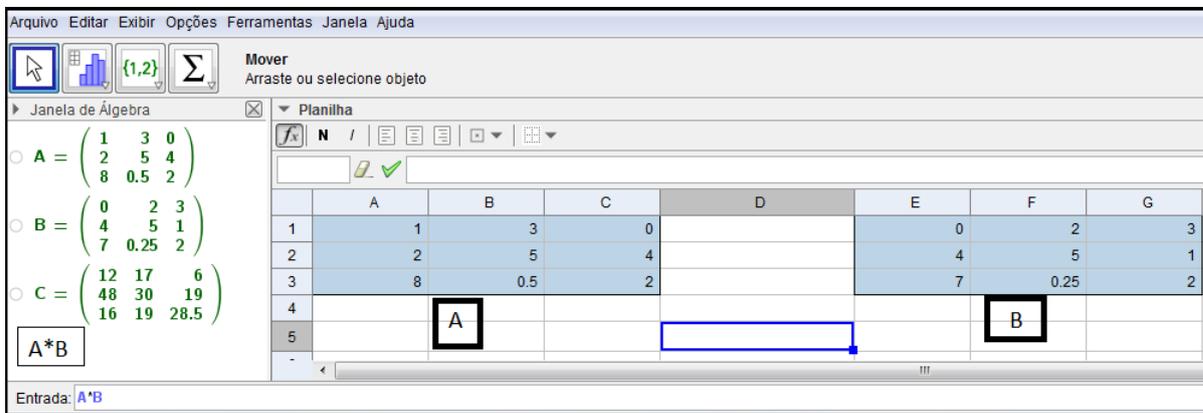
The screenshot shows the GeoGebra interface. On the left, the 'Janela de Álgebra' (Algebra View) displays two matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 8 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 0.25 & 2 \end{pmatrix}$. On the right, the 'Planilha' (Spreadsheet View) shows a grid with columns A through G and rows 1 through 6. Matrix A is entered in cells A1:A3, and Matrix B is entered in cells E1:E3. The result of the multiplication, $A * B = \begin{pmatrix} 12 & 17 & 6 \\ 48 & 30 & 19 \\ 16 & 19 & 28.5 \end{pmatrix}$, is displayed in a green cell at D5. The formula $A * B$ is visible in the cell to the right of the result.

Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

No campo ‘Entrada’, pouco se altera, o comando continua o mesmo, nome da primeira matriz, caractere (*) e segunda matriz. A alteração é o local onde a matriz

resultado da multiplicação é exibida. Neste caso, é exibida na janela de Álgebra, conforme apresentado na Figura 28.

Figura 28 – Multiplicação entre Matriz no Campo de Entrada



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Outra maneira de realizar a multiplicação de matrizes é programar as células. Esta maneira pode parecer mais complicada mas, por outro lado, é interessante, pois o estudante poderá ver o algoritmo da multiplicação funcionando.

Neste momento, será exemplificado o processo de programação das células da planilha para a multiplicação de matrizes de ordem até 4, isto inclui multiplicação entre matrizes de tipos 3×4 , 4×1 , 4×2 , 4×3 e 4×4 , entre outras compreendidas entre as matrizes de ordem 1 a 4.

2.1.2.1 Processo de Programação de Células da Planilha

Inicia-se deixando livres as células 'A1' até 'D4' para inserir os valores das entradas da matriz A e deixando livres as células 'F1' até 'I4' para os valores da matriz B da multiplicação.

As células que serão programadas são as da matriz C (resultado da multiplicação), pois desta forma, quando alterar qualquer entrada da matriz A ou da matriz B, o resultado da alteração será visto, o que é útil quando o aluno tem que entender como certa entrada da matriz C chegou àquele resultado, ou no caso em que o aluno precisa de apenas uma entrada da matriz C.

Deixando as células 'A6' a 'D9' da planilha para a matriz C, digita-se nas células correspondentes os consecutivos comandos, como ilustra a Figura 29.

Figura 29 – Células da Matriz C Programadas

	A	B	C	D
6	=A1*F1+ B1*F2+ C1*F3+ D1*F4	=A1*G1+ B1*G2+ C1*G3+ D1*G4	= A1*H1+ B1*H2+ C1*H3+ D1*H4	= A1*I1+ B1*I2+ C1*I3+ D1*I4
7	=A2*F1+ B2*F2+ C2*F3+ D2*F4	=A2*G1+ B2*G2+ C2*G3+ D2*G4	= A2*H1+ B2*H2+ C2*H3+ D2*H4	= A2*I1+ B2*I2+ C2*I3+ D2*I4
8	=A3*F1+ B3*F2+ C3*F3+ D3*F4	=A3*G1+ B3*G2+ C3*G3+ D3*G4	= A3*H1+ B3*H2+ C3*H3+ D3*H4	= A3*I1+ B3*I2+ C3*I3+ D3*I4
9	=A4*F1+ B4*F2+ C4*F3+ D4*F4	=A4*G1+ B4*G2+ C4*G3+ D4*G4	= A4*H1+ B4*H2+ C4*H3+ D4*H4	= A4*I1+ B4*I2+ C4*I3+ D4*I4

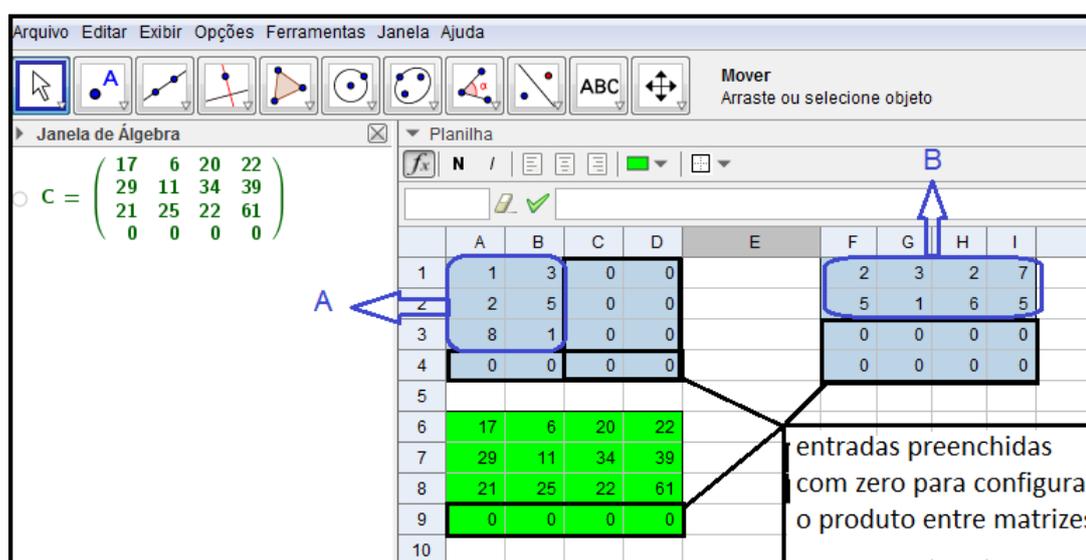
Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Assim, tem-se células da planilha programadas para realizar a multiplicação entre duas matrizes. Claramente, os valores das entradas da matriz produto podem ser alterados à medida que são alteradas as entradas da matriz A e/ou B .

Nota: como na programação da matriz C foi feita utilizando todas as células, isso faz com que as células citadas estejam ocupadas de alguma forma, isto é, as células que não vão valores, devem ser preenchidas com o número zero.

Para exemplificar, a Figura 30 apresenta uma multiplicação entre uma matriz tipo 3×2 e outra 2×4 . Os valores das matrizes A e B foram escolhidos aleatoriamente e foi criado a matriz C na janela de Álgebra após a programação para ser ilustrado a forma da matriz resultado da multiplicação entre matrizes.

Figura 30 – Exemplo da Multiplicação de Matrizes com as Células Programadas



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

2.1.3 Matriz Transposta

Dentre as operações entre matrizes, a Matriz Transposta é a que realiza a transformação da matriz A , de ordem $m \times n$, na matriz A^t que tem por colunas as linhas de A ,

consequentemente, A^t é uma matriz de ordem $n \times m$.

No *software* GeoGebra, esta operação pode ser realizada utilizando o comando ‘MatrizTransposta(<Matriz>)’ no campo ‘Entrada’ ou dentro de uma célula livre da planilha. Com o comando digitado, dentre parenteses digite o nome da matriz que deseje realizar a operação de transposição e o GeoGebra realizará o processo.

2.1.4 Matriz Inversa

Como citado na Subseção 2.1.2, as propriedades das matrizes são aplicadas no GeoGebra e a operação Matriz Inversa só pode ser executada se a matriz em questão for invertível, caso contrário, o *software* GeoGebra não executa o comando.

Vale dizer que a versão clássica 5 do GeoGebra não tem o comando ‘MatrizInversa(<Matriz>)’, mas isso não o impede de realizar essa operação. A operação de Matriz Inversa pode ser feita digitando no campo ‘Entrada’ o comando ‘nome da matriz, acento circunflexo e (-1)’, por exemplo ‘A \wedge (-1)’, o GeoGebra exibirá uma matriz inversa da matriz desejada, caso a matriz seja invertível (determinante diferente de zero).

2.1.5 Matriz Escalonada

Um comando interessante do GeoGebra é o ‘MatrizEscalonada(<Matriz>)’, como o nome já diz, este comando escalona qualquer matriz criada no *software*, independente da ordem e tipo da matriz. O GeoGebra realizará o escalonamento completo da matriz selecionada, mas a desvantagem é não mostrar o processo de escalonamento e no ponto de vista didático, o algoritmo do processo de escalonamento é interessante e a importância se dá pelo processo de eliminação por linhas de Gauss-Jordan, um método que pode ser programado na planilha de cálculo do GeoGebra, fornecendo ao aluno em uma possível aula o esclarecimento do processo de escalonamento de uma matriz que, por consequência, é útil na resolução de sistemas lineares.

Neste momento, será descrita a programação do processo de escalonamento da parte inferior de matrizes de tipos iguais ou inferiores a 4×5 , assim, pode-se realizar a conexão entre as quatro primeiras linhas matrizes com as quatro equações lineares e as quatro primeiras colunas da matriz posicionando os coeficientes das incógnitas das equações lineares, e a quinta coluna realizando a referência com os termos independentes. Esse processo de escalonamento de matrizes programado servirá para matrizes e para resolução de Sistemas Lineares.

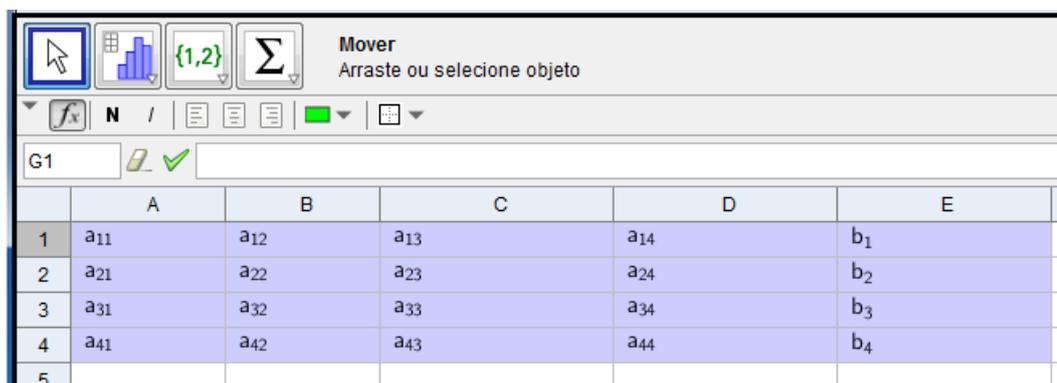
2.1.5.1 Programação da Planilha de Cálculo para Escalonar Matrizes

Para melhor organização do processo de programação das células da planilha de cálculo do GeoGebra, foram separados em etapas os passos a serem seguidos pelos usuários ou professores.

- Etapa I

Inicia-se reservando as células 'A1' à 'E4' para digitar as entradas da matriz a ser escalonada como ilustra a Figura 31. Foram digitados os elementos genéricos de uma matriz e os termos independentes para que fique claro a forma que devem ser inseridos os valores nas células da planilha.

Figura 31 – Matriz Inicial



The screenshot shows the GeoGebra spreadsheet interface. At the top, there is a toolbar with icons for selection, charting, and calculation. Below the toolbar is a formula bar with 'G1' and a green checkmark. The main area is a grid with columns labeled A, B, C, D, and E, and rows numbered 1 to 5. The cells A1 through E4 are highlighted in light blue and contain the following generic elements:

	A	B	C	D	E
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	b_4
5					

Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

As células de 'A1' à 'E4' estão preenchidas genericamente para ilustrar a posição dos elementos da matriz a ser escalonada, no qual o aluno vai substituir pelos valores dos elementos das matrizes. Caso a matriz a ser inserida seja de tipo diferente de 4×5 , o aluno deverá preencher as células correspondentes com o valor zero, por exemplo, se a matriz a ser escalonada é do tipo 3×3 , nas células, depois de programadas, os alunos inserem os valores da matriz 3×3 e nas células A4, B4, C4, D1, D2, D3, D4 E1, E2, E3 e E4 inserem o valor zero. Além disso, para esse processo funcionar, o elemento $a_{11} \neq 0$, caso o elemento $a_{11} = 0$, basta orientar os alunos a permutar duas linhas da matriz, pois essa operação elementar entre linhas preserva o conjunto solução do sistema linear.

- Etapa II

Com a primeira etapa concluída, a segunda é programar as células 'A6' à 'E9' utilizando o algoritmo de Gauss-Jordan. Neste algoritmo, a primeira linha da matriz não altera, neste caso, digita-se A1, B1, C1, D1 e E1 nas células A6, B6, C6, D6 e E6,

respectivamente. E nas demais células a Figura 32 descreve o que deve ser digitado em cada célula.

Figura 32 – Programação das Células A7 à E9

	A	B	C	D	E
6	A1	B1	C1	D1	E1
7	=A2-(A2/A1)*A1	=B2-(A2/A1)*B1	=C2-(A2/A1)*C1	=D2-(A2/A1)*D1	=E2-(A2/A1)*E1
8	=A3-(A3/A1)*A1	=B3-(A3/A1)*B1	=C3-(A3/A1)*C1	=D3-(A3/A1)*D1	=E3-(A3/A1)*E1
9	=A4-(A4/A1)*A1	=B4-(A4/A1)*B1	=C4-(A4/A1)*C1	=D4-(A4/A1)*D1	=E4-(A4/A1)*E1

Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Com essa parte programada, o aluno perceberá que os elementos da primeira coluna da matriz exceto a_{11} serão zerados, isto é, $a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0$.

- Etapa III

A terceira etapa é programar as células ‘A11’ à ‘E14’ para organizar a nova matriz para a continuação do escalonamento, que é zerar os elementos da matriz que estão nas posições a_{32} e a_{42} . Para isso, o algoritmo do processo de Gauss-Jordan orienta que o pivô da segunda linha, que é o elemento a_{22} , também seja diferente de zero. Neste caso, não vai ser necessário alterar a primeira linha matriz encontrada na etapa II, mas verificar nas demais linhas da matriz da etapa II quais delas podem ser realocadas para a segunda linha de maneira que satisfaça a condição do algoritmo de Gauss-Jordan. Caso não haja uma linha da matriz da etapa II que o satisfaça, o que matematicamente significa que a variável associada a segunda coluna da matriz é uma variável livre, a programação manterá a matriz apresentada na etapa II e estará pronta para avançar para a etapa III.

A programação das células ‘A11’ à ‘E14’ inicia-se digitando nas células A11, B11, C11, D11 e E11 os comando A6, B6, C6, D6 e E6, respectivamente. E como os elementos da matriz que ocupam as posições a_{21} , a_{31} e a_{41} são nulos e não serão alterados, digita-se nas células A12, A13 e A14 os comandos A7, A8 e A9 respectivamente. Isto copiará a primeira linha e os demais elementos da primeira coluna da matriz da etapa II.

Já nas células B12 à E14 utilizará o comando ‘Se(<Condição>, <Então>, <Senão>)’ do GeoGebra em sequência, que possibilita aos usuários impor condições para que cada coisa aconteça ou não. Por exemplo, caso ao desenvolver o escalonamento de uma matriz pelo processo de escalonamento de Gauss-Jordan, esta matriz se encontra na segunda etapa com o elemento $a_{22} = 0$, o comando ‘Se’ auxiliará encontrar uma linha da matriz diferente da primeira que contém um elemento da segunda coluna não nulo, caso nenhum elemento seja diferente de zero, manterá a matriz da mesma forma.

Foram separados célula por célula os comandos a ser seguidos com uma explicação do que o GeoGebra estará realizando com os comandos digitados, a fim de auxiliar os usuários/professores na compreensão da programação e do entendimento de o por que do uso do comando ‘Se’.

B12- = $\text{Se}(B7 \neq 0, B7, \text{Se}(B8 \neq 0, B8, \text{Se}(B9 \neq 0, B9, B7)))$

Foi utilizado o comando ‘Se(<Condição>, <Então>, <Senão>)’ três vezes, a primeira impõe a condição de que o valor na célula B7 seja diferente de zero, se caso for, mantém o valor da célula B7 da forma que está, para o caso contrário, aplicou-se pela segunda vez o comando ‘Se(<Condição>, <Então>, <Senão>)’, impondo que se o valor da célula B7 for igual a zero, verificará se o valor da célula B8 é diferente de zero, caso seja, então trocará o valor da célula B7 pelo valor da B8 (neste caso, trocam-se estas linhas de posição), se o valor da célula B8 for igual a zero, aplicou-se pela terceira vez o comando ‘Se(<Condição>, <Então>, <Senão>)’, agora tomando como último caso possível, se os valores das células B7 e B8 forem iguais a zero e de B9 diferente de zero, trocará o valor da célula B7 pelo valor da célula B9, mas se o valor da célula B9 também for igual a zero, mantém o valor da célula B7.

B13- = $\text{Se}(B7 \neq 0, B8, \text{Se}(B8 \neq 0, B7, B8))$

Foi utilizado o comando ‘Se(<Condição>, <Então>, <Senão>)’ duas vezes, a primeira condição é que se o valor da célula B7 for diferente de zero, mantém o valor da célula B8, se não, aplicou-se o comando ‘Se(<Condição>, <Então>, <Senão>)’ novamente, impondo que se o valor da célula B7 for igual a zero e da célula B8 for diferente de zero, troque o valor da célula B8 pelo da célula B7, caso contrário não altere o valor da célula B8.

B14- = $\text{Se}(B7 \neq 0, B9, \text{Se}(B8 \neq 0, B9, \text{Se}(B9 \neq 0, B7, B9)))$

O comando ‘Se(<Condição>, <Então>, <Senão>)’ foi utilizado com o mesmo conceito que foi utilizado na célula B13. Realizar a troca ou não do valor da célula B9 pelo valor da célula B7. Caso os valores das células B7 e B8 forem iguais a zero e da célula B9 não, realizará a troca do valor da célula B7 para B9, caso o valor de B9 também seja zero, então não altera nenhum.

C12- = $\text{Se}(B7 \neq 0, C7, \text{Se}(B8 \neq 0, C8, \text{Se}(B9 \neq 0, C9, C7)))$

O comando de programação utilizado na células C12 é idêntico ao comando utilizado na célula B12, exceto pelo fato de que os valores das células a serem trocadas são as das células C7, C8 ou C9. As condições impostas nos comandos ‘Se’ do GeoGebra na célula C12 são as mesmas impostas na célula B12. Lembrando que condição é o primeiro termo do comando ‘Se’.

C13- = Se($B7 \neq 0$, C8, Se($B8 \neq 0$, C7, C8))

Programação da célula C13 é parecida com a da célula B13, difere-se apenas pelas células que estão no termo <Então> do comando ‘Se(<Condição>, <Então>, <Senão>)’ e da célula que está no último termo <Senão> do comando ‘Se’. Já a intenção com esse comando na programação é a mesma, verificação de quando realizar a troca dos valores das células envolvidas.

C14- = Se($B7 \neq 0$, C9, Se($B8 \neq 0$, C9, Se($B9 \neq 0$, C7, C9)))

Também com fim de organizar a matriz para a quarta etapa, o comando de programação utilizado na célula C14 segue a mesma ideia aplicadas na programação da célula B14.

D12- = Se($B7 \neq 0$, D7, Se($B8 \neq 0$, D8, Se($D9 \neq 0$, D9, D7)))

Os comandos de programação utilizados nas células D12, D13, D14, E12, E13 e E14 tem os mesmos princípios aplicados na programação das células B12, B13 e B14 respectivamente, diferenciados pelas células a serem aplicadas as condições e conclusões.

D13- = Se($B7 \neq 0$, D8, Se($B8 \neq 0$, D7, D8))

D14- = Se($B7 \neq 0$, D9, Se($B8 \neq 0$, D9, Se($D9 \neq 0$, D7, D9)))

E12- = Se($B7 \neq 0$, E7, Se($B8 \neq 0$, E8, Se($E9 \neq 0$, E9, E7)))

E13- = Se($B7 \neq 0$, E8, Se($B8 \neq 0$, E7, E8))

E14- = Se($B7 \neq 0$, E9, Se($B8 \neq 0$, E9, Se($E9 \neq 0$, E7, E9)))

Com esta etapa concluída, os usuários/professores podem verificar que os elementos a_{21} , a_{31} e a_{41} serão nulos e a matriz estará pronta para realizar o próximo passo do processo de escalonamento de Gauss-Jordan.

- Etapa IV

Para essa etapa, usarás as células ‘A16’ à ‘E19’ para representar a nova matriz, na qual o objetivo é zerar os elementos a_{32} e a_{42} da matriz gerada na etapa III, caso necessário, e, para isso, as duas primeiras linhas da matriz da etapa III não sofrerão alterações. Os valores exibidos nas células ‘A11’ à ‘E12’ serão repetidos na matriz da etapa IV, para isso nas células A16, B16, C16, D16, E16 digita-se A11, B11, C11, D11 e E11, e, nas células A17, B17, C17, D17 e E17 digita-se A12, B12, C12, D12 e E12 respectivamente. Além das duas primeiras linhas não sofrerem alterações, os elementos a_{31} a_{41} da matriz da etapa III

que já foram zerados, também não serão alterados na etapa IV, desta forma, na célula A18 digita-se A13 e na célula A19, A14.

Agora restam as células B18 à E19 para serem programadas. Seguindo o processo de escalonamento de Gauss-Jordan, foram separadas as células e as programações uma por uma para que os usuários/professores entendessem de maneira clara os comandos, pois entender os comandos para explicar aos alunos é interessante, isto é algo que poderá auxiliar os alunos à compreensão do funcionamento do algoritmo do processo de escalonamento.

B18- = Se($B12 \neq 0$, $B13 - (B13 / B12) * B12$, B13)

Na célula B18, foi usado o comando do GeoGebra ‘Se(<Condição>, <Então>, <Senão>)’, com a condição do valor na célula B12 diferente de zero, realizar a operação $B13 - \left(\frac{B13}{B12}\right) \cdot B12$. Caso contrário, se o valor da célula B12 for igual a zero, manter o valor da célula B13. Esta condição foi posta pelo motivo de que, em alguns casos os elementos a_{22} , a_{32} e a_{42} podem ser iguais a zero quando realizarem a etapa II e III.

C18- = Se($B12 \neq 0$, $C13 - (B13 / B12) * C12$, C13)

Aplicado o comando ‘Se(<Condição>, <Então>, <Senão>)’ apenas uma vez, para orientar a programação a não alterar o valor da célula C13 caso o valor da célula B12 for igual a zero, se não, pode-se realizar o cálculo $C13 - \left(\frac{B13}{B12}\right) \cdot C12$. O motivo dessa condição ‘ $B12 \neq 0$ ’ estar presente nos comandos das células dessa etapa é que esta célula representa o elemento chamado de pivô no processo de escalonamento de Gauss-Jordan, o que lhe tornar o termo principal nas etapas do escalonamento.

Nas células D18, E18, C19, D19 e E19 os comandos descritos têm os mesmos significados do comando posto na célula C18.

D18- = Se($B12 \neq 0$, $D13 - (B13 / B12) * D12$, D13)

E18- = Se($B12 \neq 0$, $E13 - (B13 / B12) * E12$, E13)

B19- = Se($B12 \neq 0$, $B14 - (B14 / B12) * B12$, B14)

O comando representa a mesma ideia posta na célula B18, com o algoritmo do processo de escalonamento feito para zerar o valor do elemento a_{42} da matriz gerada na etapa IV caso o mesmo seja diferente de zero na matriz da etapa III.

C19- = Se($B12 \neq 0$, $C14 - (B14 / B12) * C12$, C14)

D19- = Se($B12 \neq 0$, $D14 - (B14 / B12) * D12$, D14)

E19- = Se($B12 \neq 0$, $E14 - (B14 / B12) * E12$, E14)

Com estes comandos digitados encerra-se a etapa IV e pode-se seguir para etapa V, que é organizar a matriz gerada na etapa IV para o último passo do escalonamento na etapa VI.

- Etapa V

Nesta etapa utilizarás as células A21 à E24 para programar a organização da matriz gerada na etapa IV. Os usuários/professores devem notar que nesta etapa apenas as células representantes dos elementos a_{33} , a_{34} , a_{43} e a_{44} e dos termos independentes b_3 e b_4 que serão organizados, as demais se manterão nas posições originais da matriz gerada na etapa IV.

Dado o fato de que a maioria dos elementos da matriz da etapa IV vão se manter na mesma posição, a Figura 33 apresenta os comandos a serem digitados nas células correspondentes.

Figura 33 – Comandos das Células da Matriz da Etapa V

	A	B	C	D	E
21	A16	B16	C16	D16	E16
22	A17	B17	C17	D17	E17
23	A18	B18			
24	A19	B19			

Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Na célula C23 deve ficar o elemento que representará o pivô na etapa VI, então deve-se verificar se o valor na célula C18 ou da célula C19 é diferente de zero para escolher o pivô, caso ambos sejam iguais a zero, temos o caso que a variável da terceira coluna é livre.

O comando ‘= Se(C18 \neq 0, C18, Se(C19 \neq 0, C19, C18))’ deve ser digitado na célula C23. É aplicado o comando ‘Se(<Condição>, <Então>, <Senão>)’ do GeoGebra duas vezes seguidas, na primeira tem como condição inicial verificar se o valor da célula C18 é diferente de zero, então copia o valor da célula C18 pra célula C23, se o valor de C18 for igual a zero, aplica-se o comando ‘Se’ novamente com condição de verificar se o valor da célula C19 é diferente de zero, caso seja então o valor da célula C19 é escolhido para célula C23, caso contrário, mantém o valor da célula C18 na C23.

Na célula C24 digita-se o comando ‘= Se(C18 \neq 0, C19, Se(C19 \neq 0, C18, C19))’, que irá realizar o mesmo processo da célula C23, mas agora vai verificar se o valor da célula C18 ou C19 vai para a célula C24.

Os comandos das células D23, D24, E23 e E24 dependem dos comandos das células C23 e C24, pois estas duas células indicam se o restante das linha irão trocar de lugar uma com a outra ou se mantêm da forma que estão na matriz da etapa IV.

$$D23 = \text{Se}(C18 \neq 0, D18, \text{Se}(C19 \neq 0, D19, D18))$$

$$D24 = \text{Se}(C18 \neq 0, D19, \text{Se}(C19 \neq 0, D18, D19))$$

$$E23 = \text{Se}(C18 \neq 0, E18, \text{Se}(C19 \neq 0, E19, E18))$$

$$E24 = \text{Se}(C18 \neq 0, E19, \text{Se}(C19 \neq 0, E18, E19))$$

Com os comandos digitados nas células A21 à E24, conclui-se a etapa V e se obtém uma nova matriz organizada.

- Etapa VI

Nesta etapa, conclui-se o escalonamento dos elementos da parte inferior da diagonal principal, para tanto usarás as células A26 à E29 da planilha do GeoGebra. Nas três primeiras linhas e nas duas primeiras colunas da matriz gerada na etapa V, nada será alterado como mostra a Figura 34. Esta figura também mostra os comandos que os usuários/professores devem realizar nas células em destaque.

Figura 34 – Comando das células da Matriz da Etapa VI

	A	B	C	D	E
26	A21	B21	C21	D21	E21
27	A22	B22	C22	D22	E22
28	A23	B23	C23	D23	E23
29	A24	B24			

Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Na célula C29 digita-se o seguinte comando ‘= Se(C23 \neq 0, C24 - (C24 / C23) * C23, C24)’, este comando verifica se o pivô a_{33} da matriz da etapa V é diferente de zero e, caso seja, realiza a o algoritmo do processo de escalonamento de Gauss-Jordan descrito na parte ‘<Então>’ do comando ‘Se(<Condição>, <Então>, <Senão>)’, caso o valor da célula C23 for igual a zero, manterá o valor da célula C24 que, pela programação da matriz da etapa IV e V, também é zero.

E na célula D29 digita-se o comando ‘= Se(C23 \neq 0, D24 - (C24 / C23) * D23, D24)’, que faz a verificação do valor do pivô, desenvolve o algoritmo do processo de escalonamento, se a condição for válida, caso contrário, mantêm o valor da célula D24.

Por fim, na célula E29, o comando ‘= Se(C23 ≠ 0,E24 - (C24 / C23) * E23 , E24) verifica se o pivô não é nulo, aplica o algoritmo do processo de escalonamento de Gauss-Jordan ou repete o valor da célula E24.

Desta maneira o GeoGebra exibirá a matriz escalonada nas células A26 à E29, caso o valor da célula D29 seja nulo, indica-se que a variável da coluna quatro é livre.

Fica a critério dos usuários/professores criarem matrizes para cada etapa do processo de escalonamento, desta forma os alunos conseguirão ver as matrizes equivalentes na janela de Álgebra, além das células da planilha, podendo restringir apenas as células correspondentes a matriz trabalhada. Caso queira selecionar todas as células de cada etapa, um detalhe que pode atrapalhar é: as matrizes a serem criadas estão relacionadas a todas as células separadamente por etapas, isto é, as matrizes sempre serão da forma 4×5 , vai ser de responsabilidade do professor orientar quando se trabalhar com matrizes menores, em que as linhas e colunas nulas não fazem parte da matriz escalonada. Isto é, se tiverem trabalhando com uma matriz de ordem 3, a quarta linha, e a quarta e quinta colunas da matriz não farão parte da matriz escalonada.

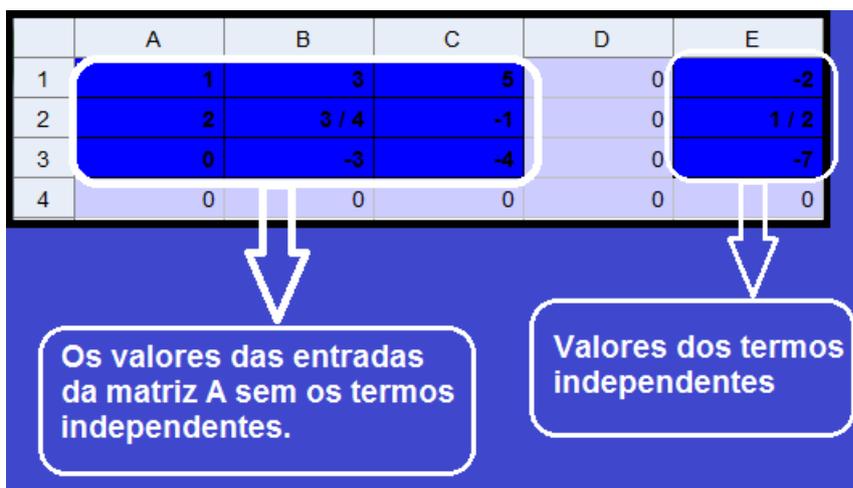
Com intuito de exemplificar o funcionamento do processo programado do escalonamento nas células do GeoGebra, foi realizado a aplicação em uma matriz com valores reais quaisquer.

A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \vdots & -2 \\ 2 & 3/4 & -1 & \vdots & 1/2 \\ 0 & -3 & -4 & \vdots & -7 \end{pmatrix}$ para aplicação é uma matriz tipo 3×4 que

pode ser associada a um sistema linear de três equações e três variáveis, mas lembrando que a ideia aqui é apenas realizar o escalonamento da parte inferior da matriz A .

A Figura 35 mostra como deve ser posto os valores das entradas da matriz A nas células reservadas na etapa I.

Figura 35 – Matriz Exemplo do Escalonamento

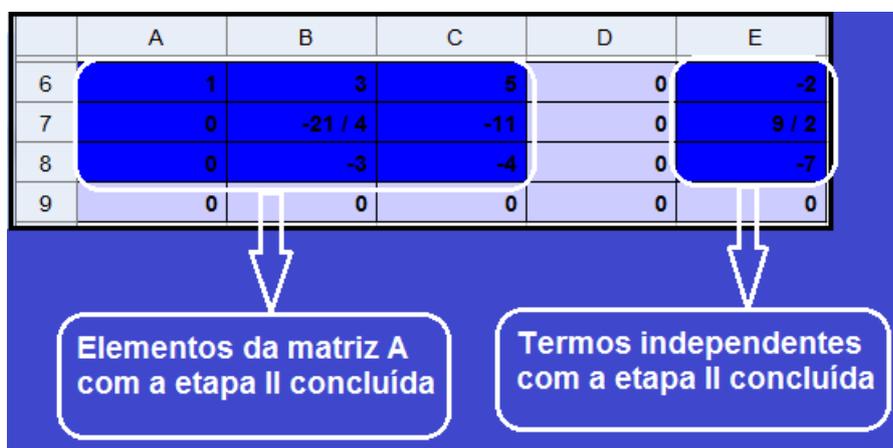


Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Note que nas células que não representam entradas, foram inseridos o valor zero, como orientado na etapa I do processo de escalonamento.

A Figura 36 mostra a matriz A após passar pela etapa II, com os elementos a_{21} e a_{31} zerados pelo processo de escalonamento.

Figura 36 – Matriz na Etapa II



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

A etapa III é uma etapa de organização da matriz, no caso desse exemplo a matriz não sofreu alterações da etapa II para III, pois o valor do elemento a_{22} na célula B7 é diferente de zero, então seguiu-se direto para a etapa IV.

Na etapa IV, o elemento a_{32} foi zerado com o algoritmo do processo de escalonamento de Gauss-Jordan e, desta forma, já se obteve a matriz escalonada procurada, como mostra a Figura 37.

Figura 37 – Matriz escalonada na Etapa IV

	A	B	C	D	E
16	1	3	5	0	-2
17	0	-5.25	-11	0	4.5
18	0	0	16 / 7	0	-67 / 7
19	0	0	0	0	0



Elementos inferiores a diagonal principal zerados

Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Como pode-se notar, nem sempre será preciso de todas as etapas para concluir o escalonamento, tudo depende do tipo das matrizes e de suas entradas. Cabe aos usuários/professores aproveitar estas diferentes matrizes para mostrar propriedades como multiplicidade entre linhas ou colunas.

2.2 DETERMINANTE

O cálculo do determinante de uma matriz de ordem n pode ser utilizado na resolução de sistemas lineares, verificação de matrizes inversíveis, cálculo de área, entre outras funções na Matemática. Nesta seção foi descrito procedimentos para realizar o cálculo do determinante de matrizes de ordem n , com $n \in \mathbb{N}$, utilizando um comando do GeoGebra e o cálculo do determinante de matrizes de ordem 3, programando células da planilha de cálculo com a Regra de Sarrus¹.

O processo para calcular o determinante de uma matriz não é único, mas quando se trata do *software* GeoGebra, há um comando que realiza o cálculo de determinante de uma matriz criada no GeoGebra. Com uma matriz quadrada criada no GeoGebra, digita-se no campo de entrada ‘Determinante(<Matriz>)', e no local de (<Matriz>) substitua pelo nome da matriz quadrada na qual quer que seja calculado o determinante e o GeoGebra exibirá na janela de Álgebra o seu valor.

Outra maneira de calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 utilizando a planilha de cálculo do GeoGebra é programando as células para realizarem a Regra de Sarrus.

¹ Pierre Frédéric Sarrus (1798 – 1861), matemático francês.

A Regra de Sarrus para calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 3, segundo (DANTE, 2017) é:

Dada matriz genérica A de ordem 3.

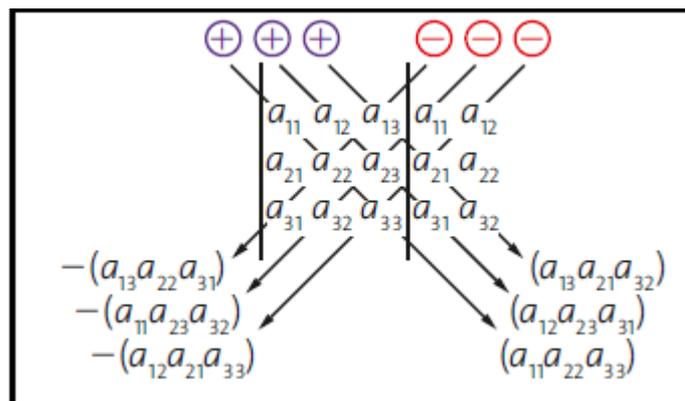
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Define-se o determinante da matriz de ordem 3 ao número:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

que pode ser obtido pela Regra de Sarrus, ilustrado na Figura 38

Figura 38 – Regra de Sarrus



Fonte: Dante (2017).

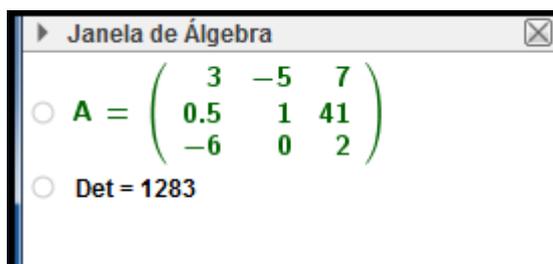
Agora, para programar o algoritmo de Sarrus na planilha do GeoGebra, inicia-se separando as células A1 à C3 para inserir os elementos da matriz, cujo determinante será calculado.

Na célula A5 digita-se ‘= A1 * B2 * C3’ e, em B5, ‘= B1 * C2 * A3’, e em C5 ‘= C1 * A2 * B3’, o que gerará os três primeiros termos da soma da Regra de Sarrus. Seguindo, digita-se na célula A6 ‘= -(C1 * B2 * A3)’, em B6 ‘= -(B1 * A2 * C3)’ e ‘= -(A1 * C2 * B3)’ na célula C6 para concluir os três últimos termos da soma.

Para finalizar, na célula B8 digita-se ‘= A5 + B5 + C5 + A6 + B6 + C6’. Ao digitar os valores das entradas da matriz nas células A1 à C3, as células da planilha irão calcular o determinante da matriz e exibir o valor na célula B8.

A Figura 39 mostra um exemplo do cálculo do determinante de uma matriz qualquer de ordem 3, utilizando o comando ‘Determinante(<Matriz>)’.

Figura 39 – Exemplo do cálculo do determinante com o comando



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

A Figura 40, apresenta o cálculo do determinante utilizando as células da planilha de cálculo do GeoGebra programadas, podendo comparar a igualdade nos resultados.

Figura 40 – Exemplo do cálculo do determinante com a planilha

	A	B	C
1	3	-5	7
2	0.5	1	41
3	-6	0	2
4			
5	6	1230	0
6	42	5	0
7			
8		1283	
9			

Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

3 SISTEMAS LINEARES NO GEOGEBRA

Neste capítulo apresentaremos uma sequência didática pautada em sugestões aos usuários/professores, com o objetivo de utilizar o *software* GeoGebra na resolução de sistemas lineares. Serão apresentadas resoluções utilizando o escalonamento pelo método de Gauss-Jordan da matriz associada a um sistema linear de até quatro equações e quatro incógnitas apresentado no Capítulo 2, a resolução com a ajuda da visualização geométrica de retas e planos na janela de visualização simples e 3D e a resolução com o auxílio da Janela CAS.

Em relação às soluções de um sistema linear, no Ensino Básico é comum classificá-lo por sistema impossível, possível e indeterminado ou possível e determinado. Um sistema linear é dito impossível, quando não tem solução, quando tem mais de uma solução, o sistema linear é possível e indeterminado e quando a solução é única, diz-se que o sistema é possível e determinado.

Pede-se a consideração do leitor a entender sistema(s) linear(es) quando se ler sistema(s), na intenção de simplificar o texto. Partes do texto da seção 3.1 foi baseado nos estudos realizados por (SANTOS, 2016), (OLIVEIRA, 2019) e (SANTANA, 2015).

3.1 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Quando se trata de resolução de sistemas lineares, não se afirma uma única maneira de discutir/resolver o sistema, mas quando direcionamos este conteúdo para o Ensino Médio, geralmente os métodos encontrados nos livros didáticos são o da adição, que consiste em realizarmos a soma dos respectivos termos de cada uma das equações, a fim de obter uma equação com apenas uma incógnita, permitindo-se a utilizar o artifício de multiplicar todos os termos de uma equação por um valor diferente de zero, que permita obter uma equação equivalente com uma única incógnita. Método que pode ser extenso e complicado quando se trabalha sistemas de equações com quatro ou mais incógnitas.

O método da substituição, que consiste em escolher de forma arbitrária uma das equações e, nesta, isolar uma das incógnitas. Feito isto, substitui-se na outra equação a variável isolada na primeira pela expressão. Repete-se esse processo até que a equação resultante resulte em uma equação de grau 1.

Um método bastante conhecido e utilizado, principalmente no Ensino Médio é a Regra de Cramer. Este método, criado pelo matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752), por volta do século XVIII, com o intuito de solucionar sistemas com um número arbitrário

de incógnitas, consiste em resolver com o auxílio do cálculo do determinante das matrizes associadas aos sistemas, mas não é aplicado quando o determinante da matriz associada aos coeficientes da variáveis do sistema é igual a zero. Este número arbitrário de incógnitas geralmente restringe-se a 3 ou 4, visto que a Regra de Cramer é usada praticamente para fins didáticos, visto que exige um número muito grande de operações quando lidamos com problemas reais, em que o número de variáveis geralmente é muito grande. A saber, se considerarmos 20 variáveis, o tempo gasto pelo computador mais veloz do mundo é maior do que o tempo de existência da humanidade.

Por outro lado, podemos nortear nosso estudo com base no escalonamento de matrizes, que consiste realizar operações elementares entre linhas de uma matriz (equivalentemente, realizar operações elementares nas equações do sistema) até se obter uma matriz escalonada (isto é, um sistema equivalente escalonado). Uma das formas de realizar o escalonamento esta baseado em um algoritmo, conhecido por método de Gauss-Jordan, o qual apresentaremos no decorrer deste trabalho.

3.1.1 Escalonamento pelo Método de Gauss-Jordan

Quando se trata de Sistemas Lineares de n equações e m incógnitas, um método prático de resolução é o método desenvolvido por Gauss-Jordan, que descreve operações elementares entre as equações do sistemas. Vejamos como funciona este método genericamente.

Considere o sistema de equações lineares

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

O método de eliminação de Gauss consiste em transformar convenientemente o sistema linear original para obter um sistema linear equivalente com a matriz dos coeficientes sendo triangular superior. Para modificar convenientemente um sistema linear num equivalente, fazemos uso das seguintes operações elementares que não modificam a solução do sistema original:

- Trocar duas equações ou duas colunas;
- Multiplicar uma equação por uma constante não-nula;
- Adicionar um múltiplo de uma equação a outra equação.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + a_{22}^2x_2 + a_{23}^2x_3 + \cdots + a_{2n}^2x_n = b_2 \\ 0 + 0 + a_{33}^3x_3 + \cdots + a_{3n}^3x_n = b_3^3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 + 0 + a_{n3}^3x_n + \cdots + a_{nn}^3x_n = b_n^3 \end{array} \right.$$

- Eliminação da k-ésima coluna

Supondo $a_{kk}^k \neq 0$ (pivô) eliminamos a incógnita x_k das últimas $n - k$ equações fazendo:

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k} \cdot L_{k-1} \quad i = k + 1, \dots, n$$

Em termos dos coeficientes para cada $i = k + 1, \dots, n$ temos,

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - \frac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k} \cdot a_{k-1j}^k, \quad j = k + 1, \dots, n$$

$$b_i^{k+1} = b_i^k - \frac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k} \cdot b_{k-1}^k$$

Com esse passo obtemos o sistema linear escalonado

$$S' = \left\{ \begin{array}{l} a_{1r_1}x_{r_1} + a_{1r_2}x_{r_2} + a_{1r_3}x_{r_3} + \cdots + \cdots + a_{1n}x_n = b_n \\ 0 + a_{2r_2}x_{r_2} + a_{2r_3}x_{r_3} + \cdots + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ 0 + 0 + a_{3r_3}x_{r_3} + \cdots + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \vdots \\ 0 + 0 + 0 + \cdots + a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n = b_{n-1} \\ 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Daí, obtemos

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

e depois

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1n}x_n}{a_{n-1n-1}}$$

$$\vdots$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

Para exemplificar o método de Gauss-Jordan, foi resolvido o seguinte sistema de equação linear de três equações e três incógnitas.

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

Pivô $a_{11} = 1$, para a eliminação da primeira coluna, realizamos as operações $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot L_1$ com $i = 2$ e 3 . Em termos de valores dos coeficientes.

$$L_2 \leftarrow \begin{cases} a_{21} = 3 - \frac{3}{1} \cdot 1 = 0 \\ a_{22} = 2 - \frac{3}{1} \cdot (-3) = 11 \\ a_{23} = -1 - \frac{3}{1} \cdot 2 = -7 \\ b_2 = 0 - \frac{3}{1} \cdot 1 = -3 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow \begin{cases} a_{31} = 2 - \frac{2}{1} \cdot 1 = 0 \\ a_{32} = 1 - \frac{2}{1} \cdot (-3) = 7 \\ a_{33} = 1 - \frac{2}{1} \cdot 2 = -3 \\ b_3 = 2 - \frac{2}{1} \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Gerando o novo sistema linear equivalente.

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 0 + 11y - 7z = -3 \\ 0 + 7y - 3z = 0 \end{cases}$$

No segundo passo, realizaremos o cálculo para anular o elemento $a_{32} = 7$ do sistema. Para isso, tomamos o pivô da segunda linha $a_{22} = 11$ e realizamos as operações $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} \cdot L_2$. Em termos de valores dos coeficientes

$$L_3 \leftarrow \begin{cases} a_{31} = 0 - \frac{7}{11} \cdot 0 = 0 \\ a_{32} = 7 - \frac{7}{11} \cdot 11 = 0 \\ a_{33} = -3 - \frac{7}{11} \cdot (-7) = \frac{16}{11} \\ b_3 = 0 - \frac{7}{11} \cdot (-3) = \frac{21}{11} \end{cases}$$

Concluindo o escalonamento triangular inferior como pode ser visto no sistema escalonado

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 0 + 11y - 7z = -3 \\ 0 + 0 + \frac{16}{11}z = \frac{21}{11} \end{cases}$$

Por fim, temos do sistema escalonado que

$$z = \frac{21}{16}, y = \frac{9}{16} \text{ e } x = \frac{1}{16}.$$

3.1.1.1 Sistemas Lineares, Matrizes e GeoGebra

Sabe-se que todo sistema de equações lineares pode ser representado matricialmente, isto é

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m = b_m \end{cases}$$

que pode ser representado da forma

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Com a representação matricial dos sistemas lineares, adaptar o método de Gauss-Jordan para o escalonamento de matrizes associadas aos sistemas lineares pode ser visto como uma aplicação de Matrizes em Sistemas Lineares, e ensinar esse método aos alunos do Ensino Médio apresenta uma explicação significativa do porque estudar Matriz. Com isto em vista, no Capítulo 2 na Seção 2.1.5.1, foi apresentada a programação das células da planilha do GeoGebra para o escalonamento de matrizes utilizando o método de Gauss-Jordan.

Com a programação, os professores poderão ensinar o escalonamento de sistemas lineares e aproveitar para solucionar sistemas lineares de até quatro equações e quatro incógnitas.

3.1.2 Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares 2×2 Utilizando a Janela de Visualização do GeoGebra

Além da planilha de cálculo do GeoGebra, outras ferramentas podem ser utilizadas para o ensino de resolução de sistemas lineares tipo 2×2 em específico. A resolução de sistemas lineares 2×2 por análise de retas podem ser método que aumente a curiosidade dos alunos, e quando esse ensino pode ser feito com o auxílio de um *software* como o GeoGebra, onde se pode ter a visualização das equações lineares como retas no plano, a aprendizagem pode ser significativa.

Levando em consideração esse pensamento, nesta subseção, mostraremos como os usuários/professores podem estar apresentando a ideia de resolução de sistemas lineares 2×2 por meio de retas no plano com o auxílio do GeoGebra, separando quando o sistema é possível e determinado, possível e indeterminado, e por último quando o sistema é impossível.

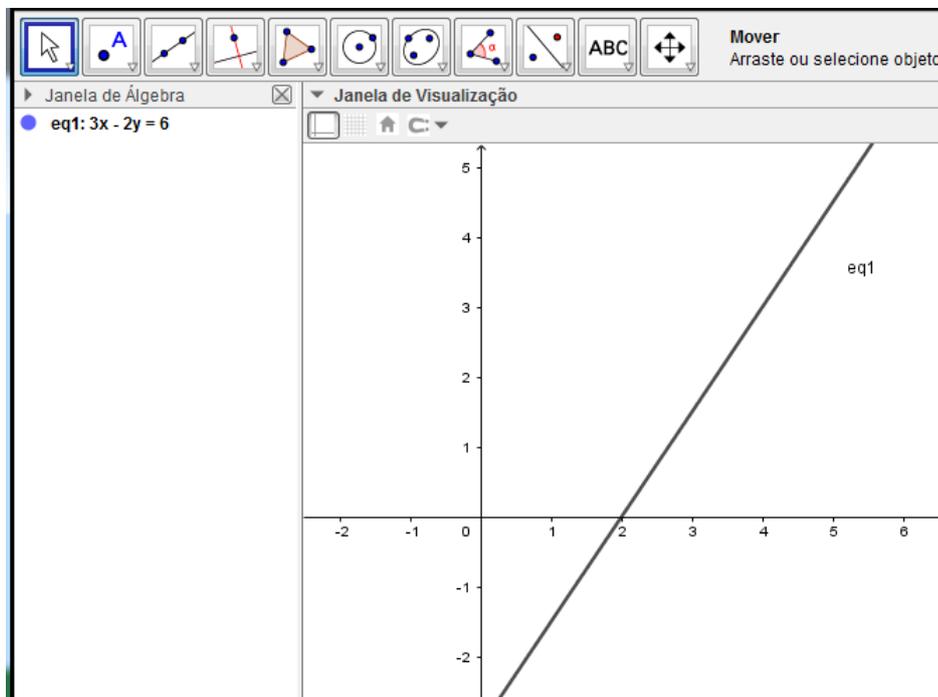
3.1.2.1 Representação Geométrica de Sistemas Possíveis e Determinados

Utilizaremos um exemplo numérico para exemplificar um sistema possível e determinado, neste caso o sistema é da forma:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$$

Para ter uma representação geométrica deste sistema, inserimos as equações no GeoGebra e analisaremos as retas na janela de visualização. Inicia-se com o *software* GeoGebra carregado, digitando a equação 1- $3x - 2y = 6$ do sistema linear no campo ‘Entrada’. Desta forma o GeoGebra plotará o gráfico da equação 1 na janela de visualização e exibirá a equação na janela de álgebra, como mostra a Figura 41.

Figura 41 – Inserção da Equação 1 no GeoGebra

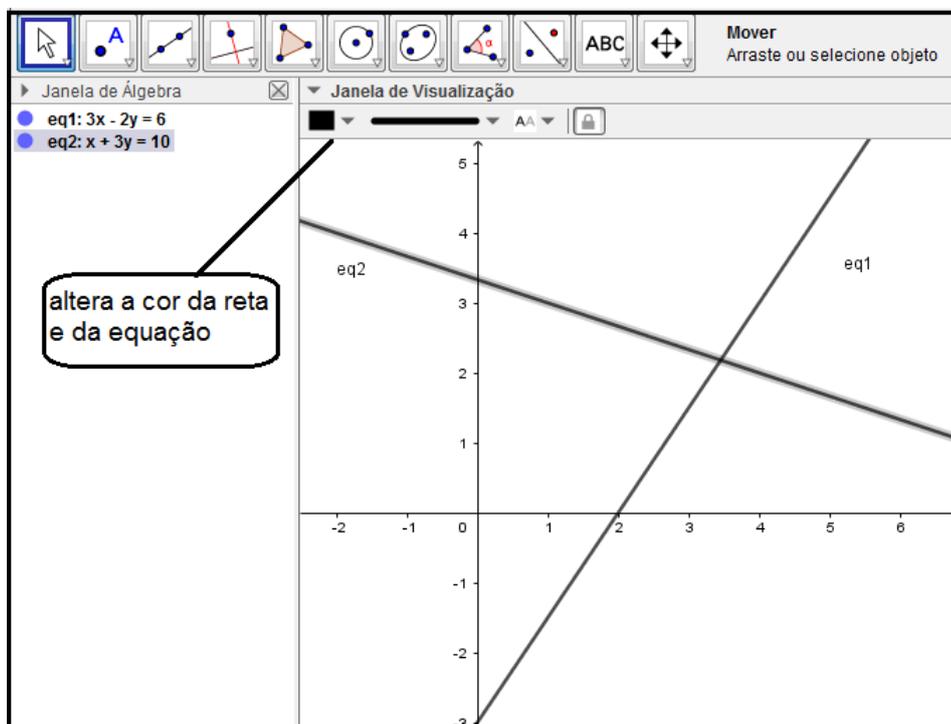


Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Em seguida, também no campo ‘Entrada’, digita-se a equação 2 do sistema $x + 3y = 10$. O GeoGebra exibirá o gráfico na janela de visualização e a equação na janela de álgebra

(Figura 42). Neste ponto, o professor pode estar clicando com o botão esquerdo sobre uma das retas e alterando a cor, para facilitar o entendimento de qual reta representa qual equação, pois o GeoGebra também altera a cor da equação na janela de álgebra.

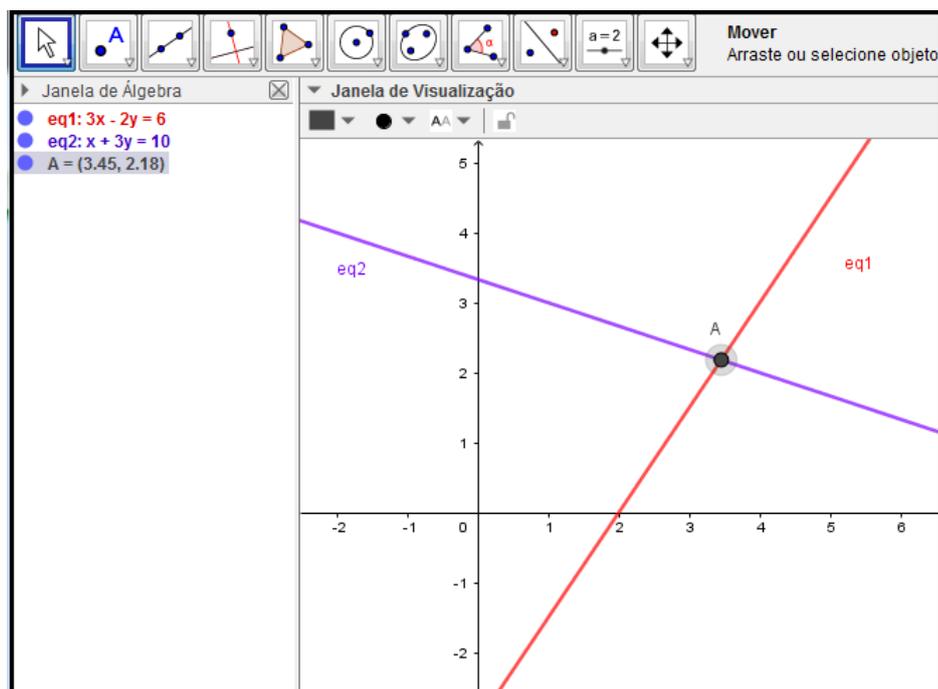
Figura 42 – Inserção da Equação 2 no GeoGebra



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Com as duas equações plotadas no GeoGebra, o professor utilizará a ferramenta 'Interseção de Dois Objetos', localizada no ícone 'Ponto', como apresentado no Capítulo 1. Selecionando a ferramenta, basta clicar com o botão esquerdo do *mouse* sobre as duas retas plotadas na janela de visualização, que o GeoGebra e exibirá o ponto de interseção na janela de visualização e as coordenadas desse ponto na janela de álgebra (Figura 43). Note que esse ponto de interseção é a solução do sistemas, a primeira coordenada representa o valor da incógnita x e a segunda coordenada do ponto representa o valor da incógnita y .

Figura 43 – Interseção entre as Retas



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Caso o professor queira estar realizando a resolução do sistema anteriormente manualmente, para que possa comparar os resultados, é algo interessante a se fazer, pois o GeoGebra mostra o ponto de interseção, que é a solução do sistema, com valores da forma decimais, que muitas das vezes é diferente da qual o aluno encontra quando faz em seu caderno. Neste caso, ao fazer manualmente encontra-se como resultado $x = \frac{38}{11}$ e $y = \frac{24}{11}$, que são uma maneira diferente de apresentar os mesmos valores do GeoGebra. Aqui o GeoGebra está configurado para apresenta apenas duas casas decimais, desta forma apresenta uma aproximação do valor exato.

Além disso com a visualização das retas no GeoGebra, os alunos poderão perceber que se há interseção entre as retas e essa interseção é única, isto significa que o sistema linear é um sistema possível e determinado.

3.1.2.2 Interpretação Geométrica de Sistemas Possíveis e Indetermináveis

A interpretação geométrica de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas que é possível e indeterminado, nos mostra que as duas retas são paralelas coincidentes, isto indica que existem infinitos pares ordenados que são soluções do sistema.

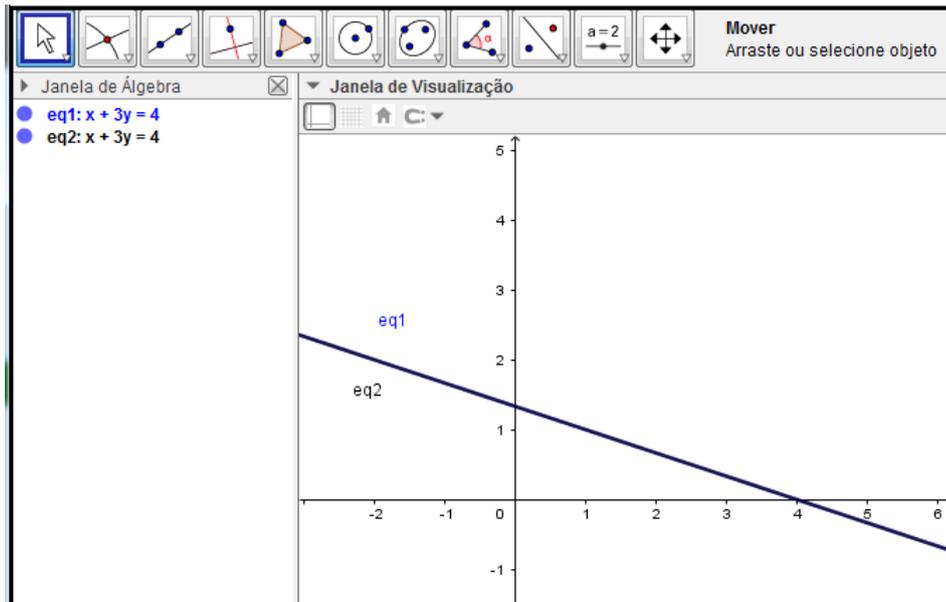
Tomemos como exemplo o sistema linear

$$T = \begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 3x + 9y = 12 \end{cases}$$

Note que o conjunto solução do sistema T é $\{x = 4 - 2y\}$ com $y \in \mathbb{R}$ ou seja, equação de uma reta.

No GeoGebra após ter inserido as duas equações do sistema T , pode-se observar que as retas estão postas uma sobre a outra, justificando as infinitas solução (Figura 44).

Figura 44 – Interpretação Geométrica do Sistema Possível e Indeterminado



Fonte: elabora pelo autor no software GeoGebra.

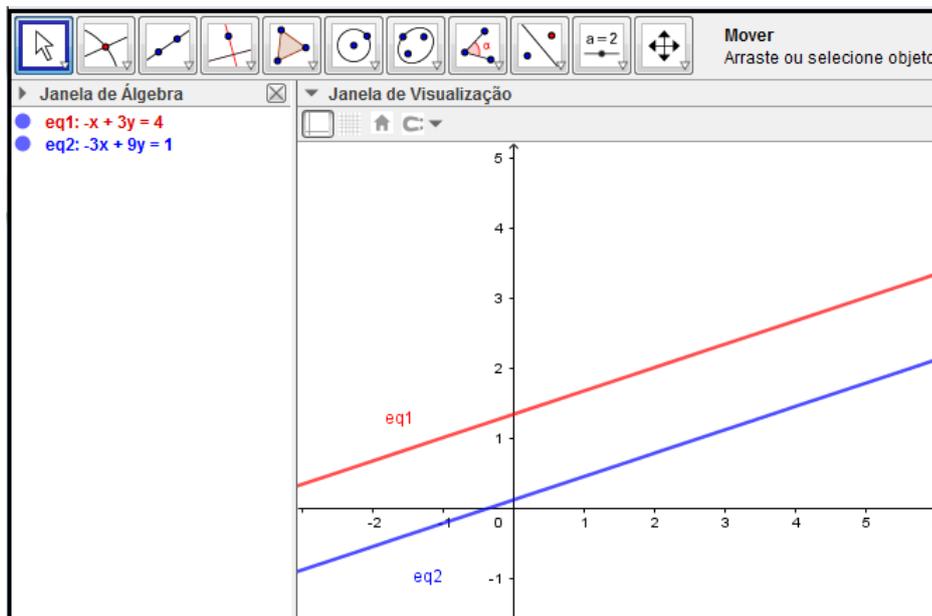
3.1.2.3 Interpretação Geométrica de Sistemas impossíveis

Por último, resolução de sistemas impossíveis, na verdade não é uma resolução pois não há soluções, mas saber a interpretação geométrica de quando o sistema é impossível também é importante.

Quando se tem um sistema impossível, isto significa que as retas que representam as equações lineares são retas distintas paralelas entre si. A Figura 45 ilustra duas retas paralelas no plano e suas equações plotadas no GeoGebra, nas quais representam o sistema linear

$$S = \begin{cases} -x + 3y = 4 \\ -3x + 9y = 1 \end{cases}$$

Figura 45 – Interpretação Geométrica do Sistema Impossível



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

3.1.3 Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares 3×3 Utilizando a Janela de Visualização 3D do GeoGebra

A janela de visualização 3D pode ser útil para auxiliar na resolução e na interpretação geométrica de sistemas lineares de três equações e três incógnitas. Nesta seção é apresentado uma maneira de ilustrar o que o aluno está realizando quando está resolvendo um sistema linear 3×3 .

Separamos em sub-seções as interpretações geométricas de sistemas possíveis e determináveis, sistemas possíveis indeterminados e sistemas impossíveis, utilizando exemplos numéricos para exemplificar.

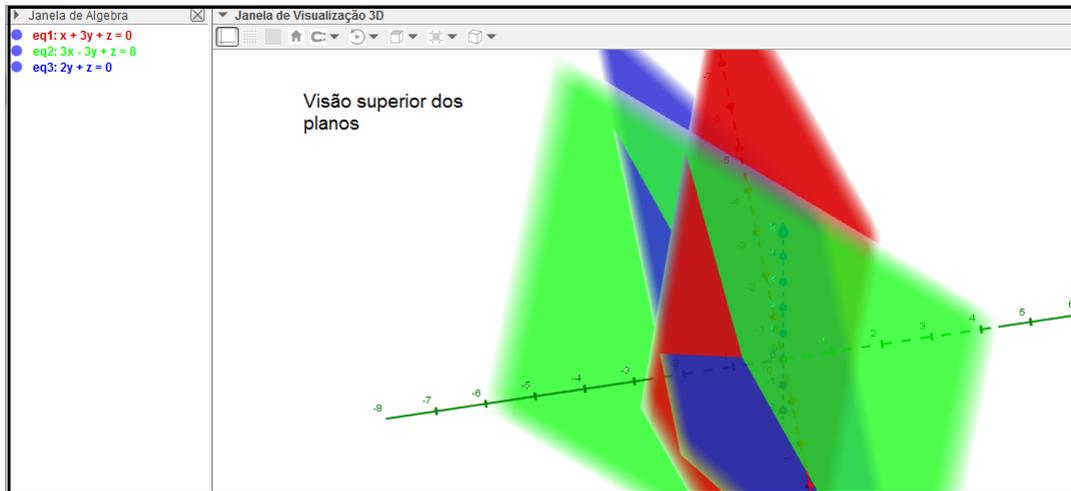
3.1.3.1 Interpretação Geométrica de sistemas possíveis e determinados

Quando se fala que um certo sistema é possível e determinado, isto significa que há uma única solução, na interpretação geométrica, significa que existe um único ponto em que os três planos se intersectam.

Tomemos o sistema $A = \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x - 3y + z = 8 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ como exemplo. Ao se resolver o sistema A encontra-se como solução $x = 1, y = -1$ e $z = 2$, e como fica isto no GeoGebra?

Com a janela de visualização 3D e a janela de álgebra abertos no GeoGebra, inseri-se as equações, uma a uma no campo de ‘Entrada’ e obterás a seguinte imagem (Figura 46).

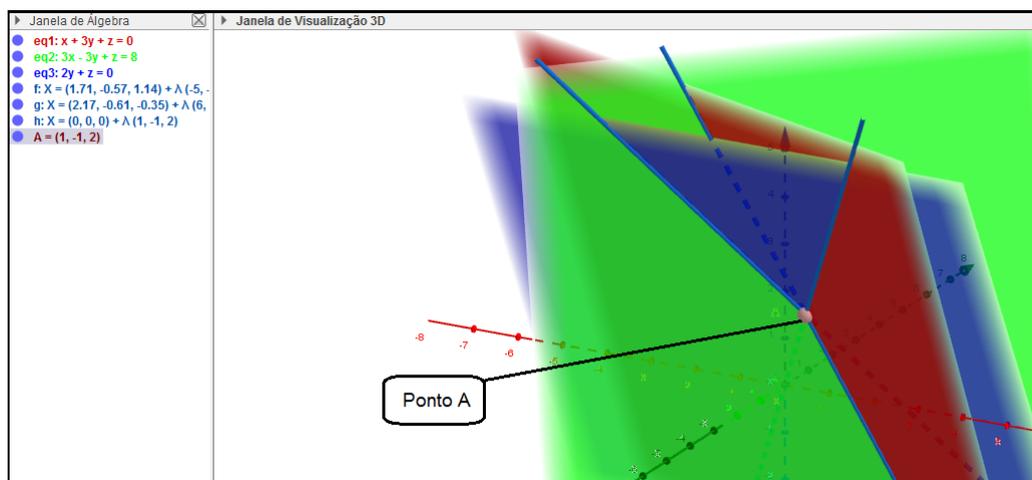
Figura 46 – Representação Geométrica das Equações do Sistema A



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Utilizando a ferramenta ‘Interseção de duas superfícies’, seleciona-se dois a dois os planos, gerando assim três retas, em seguida, com a ferramenta ‘Interseção de Dois Objetos’, seleciona-se duas retas que foram criadas com a interseção dos planos. O GeoGebra exibirá na janela de álgebra e na janela de visualização 3D um ponto, onde as coordenadas representam os valores das incógnitas do sistemas na ordem (x, y, z) (Figura 47).

Figura 47 – Ponto de Interseção dos Planos



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

3.1.3.2 Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares Possíveis e indeterminados

Quando se tem um sistema linear que é possível e indeterminado, isto significa que tem infinitas soluções, geometricamente, os três planos podem ser coincidentes, ou ter dois planos coincidentes e o terceiro os intersecta gerando uma reta, ou quando a interseção entre os três planos for uma reta.

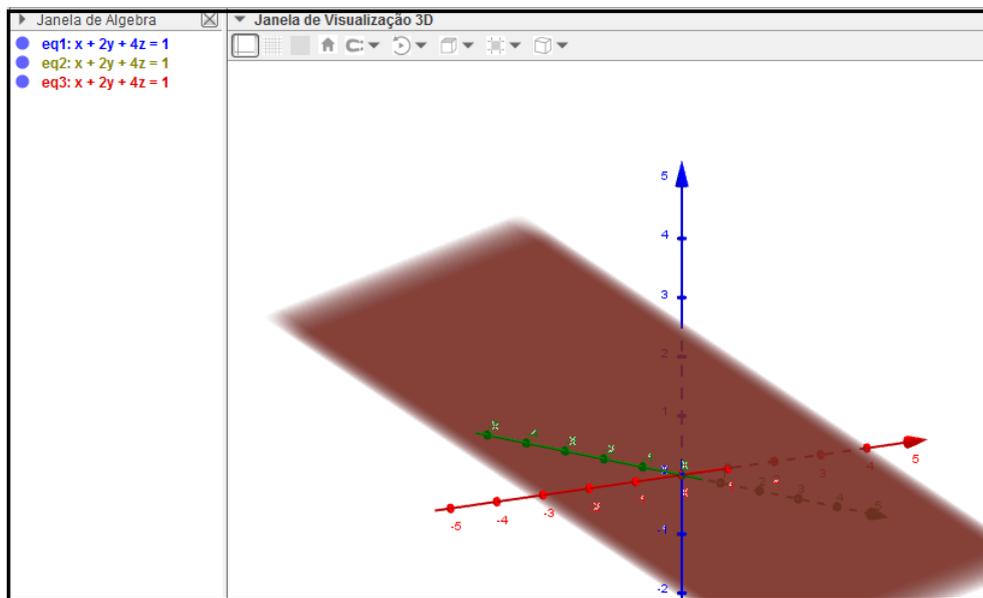
Vejamos um exemplo de quando os três planos são coincidentes, seja o sistema

$$A = \begin{cases} x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + 4y + 8z = 2 \\ 3x + 6y + 12z = 3 \end{cases}$$

tem como conjunto solução do sistema $A = \{(x, y, z = \frac{1}{4} - \frac{x}{4} - \frac{y}{2}); x, y \in \mathbb{R}\}$.

Inserindo no GeoGebra as equações do sistema, o *software* exibirá na janela de visualização 3D, três planos coincidentes, e na janela de álgebra as respectivas equações dos planos (Figura 48).

Figura 48 – Três Planos Coincidentes



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

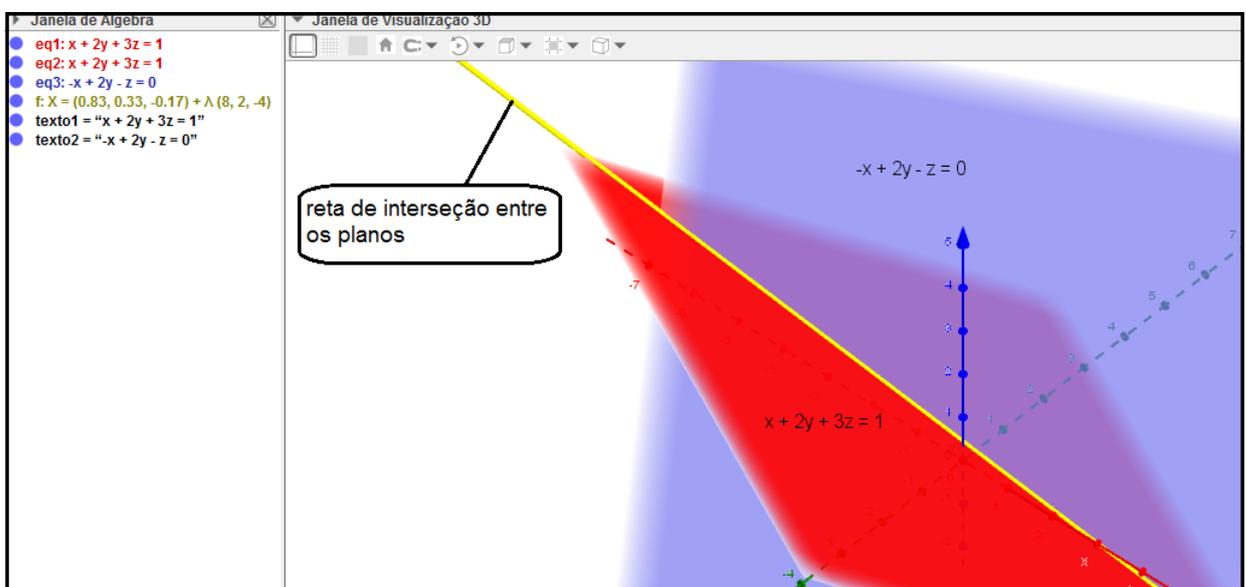
A outra opção de sistemas lineares possíveis e indeterminados é quando tem-se dois planos coincidentes e o terceiro intersectando-os e gerando uma reta. Tomemos como exemplo o sistema

$$B = \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Ao se resolver o sistema B tem-se que o conjunto solução é da forma $\{(1 + 4y, y, -2y); y \in \mathbb{R}\}$, isto é, para cada valor real de y temos um ponto que é solução do sistema B .

Para obter essa visualização no GeoGebra, deve-se inserir as equações do sistema B , e em seguida utilizar a ferramenta ‘Interseção de Duas Superfícies’, selecionando os dois planos que foram plotados quando se inseriu as equações. Imediatamente o GeoGebra exibirá a reta na janela de visualização 3D, que representa a interseção entre os planos e a equação cartesiana da reta na janela de álgebra (Figura 49).

Figura 49 – Interseção Entre Dois Planos



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

O último caso de sistemas possíveis e indeterminados é o qual se têm três planos distintos se intersectando e gerando uma reta.

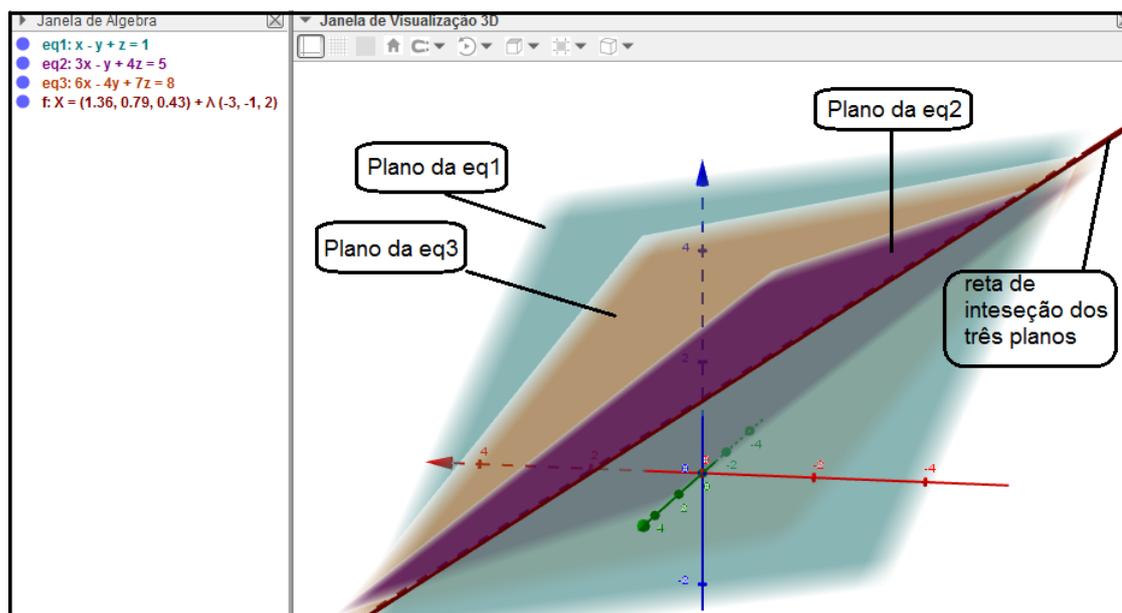
Seja o sistema

$$C = \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - y + 4z = 5 \\ 6x - 4y + 7z = 8 \end{cases}$$

Como já se sabe que o sistema é possível e indeterminado, o conjunto solução é da forma $\{(\frac{4-3z}{2}, \frac{2-z}{2}, z); z \in \mathbb{R}\}$.

A visualização do sistema C no GeoGebra pode ser elaborado inserindo as equações do sistema C e utilizando a ferramenta ‘Interseção de Duas Superfícies’, selecionando dois planos da janela de visualização 3D, o GeoGebra já plotará a reta de interseção e apresentará sua equação cartesiana na janela de álgebra como ilustra a Figura 50.

Figura 50 – Interpretação Geométrica do Sistema C



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

3.1.3.3 Representação Geométrica de um Sistema Linear Impossível

Quando trabalha-se com sistema impossível, tem-se que não há solução, mas geometricamente, isto mostra para os alunos que os três planos podem ser paralelos entre si dois a dois, ou dois planos serem coincidentes e o terceiro ser paralelo a esses dois, dois planos serem paralelos e o terceiro intersecta os dois planos gerando duas retas e um outro caso que é quando os três planos são distintos e se intersectam, dois a dois, gerando três retas paralelas uma às outras.

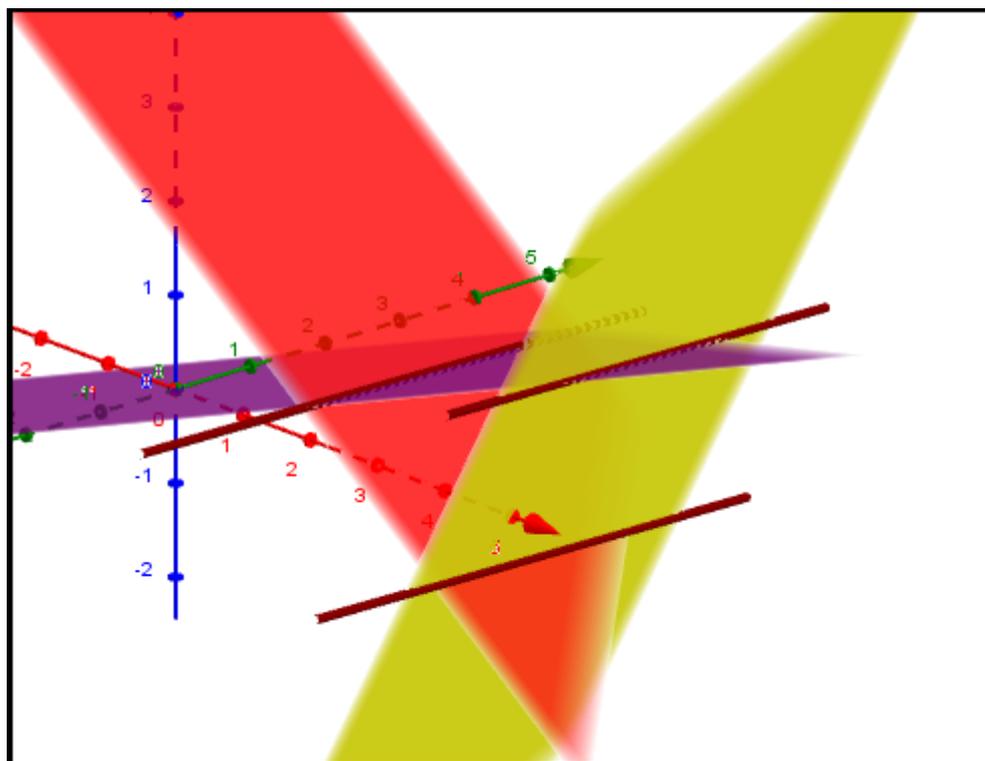
Iniciamos com o caso em que se tem três planos distintos que se intersectam dois a dois, gerando três retas paralelas uma às outras. Tomemos como exemplo o seguinte sistema

$$D = \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + y - z = 10 \\ 2x - y - 7z = 0 \end{cases}$$

Note que ao escalonar o sistema D , depara-se com uma igualdade falsa que é $0 = -14$ o que significa que o sistema é impossível.

Para ilustrar esse resultado no GeoGebra, deve-se inserir as equações do sistema D e com a ferramenta ‘Interseção de Duas Superfícies’ selecionar dois a dois os planos, desta maneira o GeoGebra exibirá as três retas na janela de visualização 3D, como pode ser visto na Figura 51.

Figura 51 – Interpretação Geométrica do Sistema D



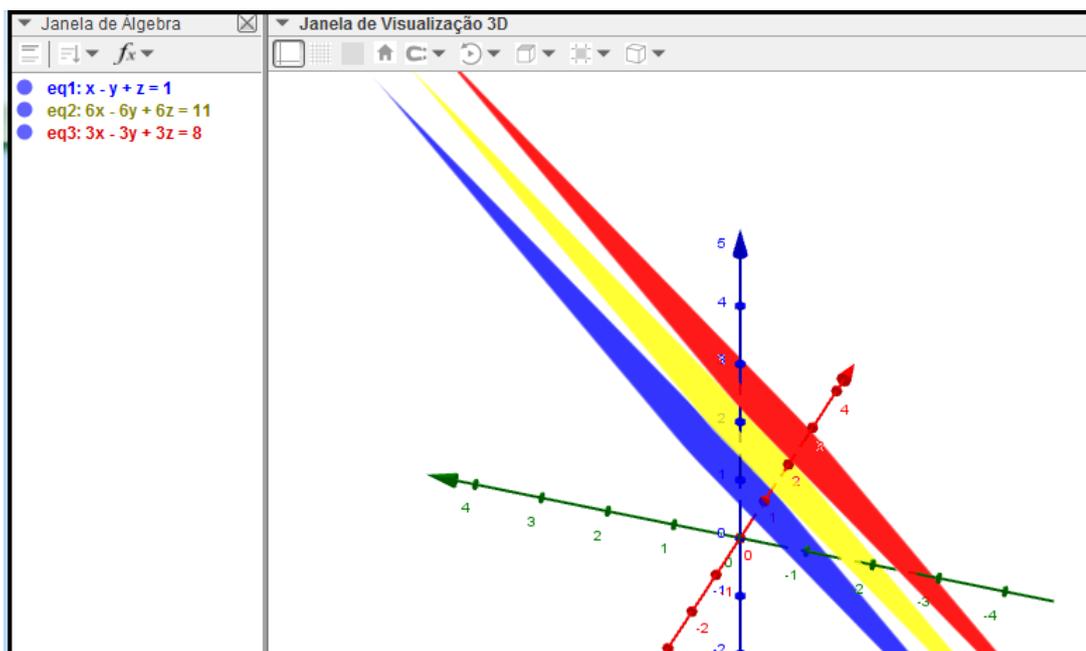
Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

O outro caso que iremos mostrar agora, é o caso em que se têm três planos paralelos entre si, dois a dois, neste caso como os planos são todos paralelos, não há interseção entre nenhum dos planos, ou seja, não há pontos em comuns, desta forma o sistema é classificado como impossível. Vejamos um exemplo numérico, consideremos o sistema

$$E = \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 3y + 3z = 8 \\ 6x - 6y + 6z = 11 \end{cases}$$

A Figura 52 ilustra a interpretação geométrica do sistema linear E , onde foi inserido as três equações do sistema no GeoGebra e alterado as cores dos planos para melhorar a visibilidade.

Figura 52 – Interpretação Geométrica do Sistema E



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Um caso bem parecido com o que acabamos de apresentar é o caso onde se têm dois planos coincidentes e um terceiro plano paralelo a esse dois planos coincidentes.

O sistema é dito impossível, pois ao escalonar o sistema se obterá uma linha nula, e uma igualdade não válida, por exemplo, dado o sistema

$$F = \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 3y + 3z = 3 \\ 6x - 6y + 6z = 11 \end{cases}$$

Ao escalonar o sistema nota-se que a segunda equação será anulada e na última equação teremos a igualdade $0 = 5$ que é um absurdo, mostrando assim que o sistema é impossível. A interpretação Geométrica é análoga com o caso dos três planos paralelos, sendo assim, não será exibir a imagem desse exemplo feito no GeoGebra.

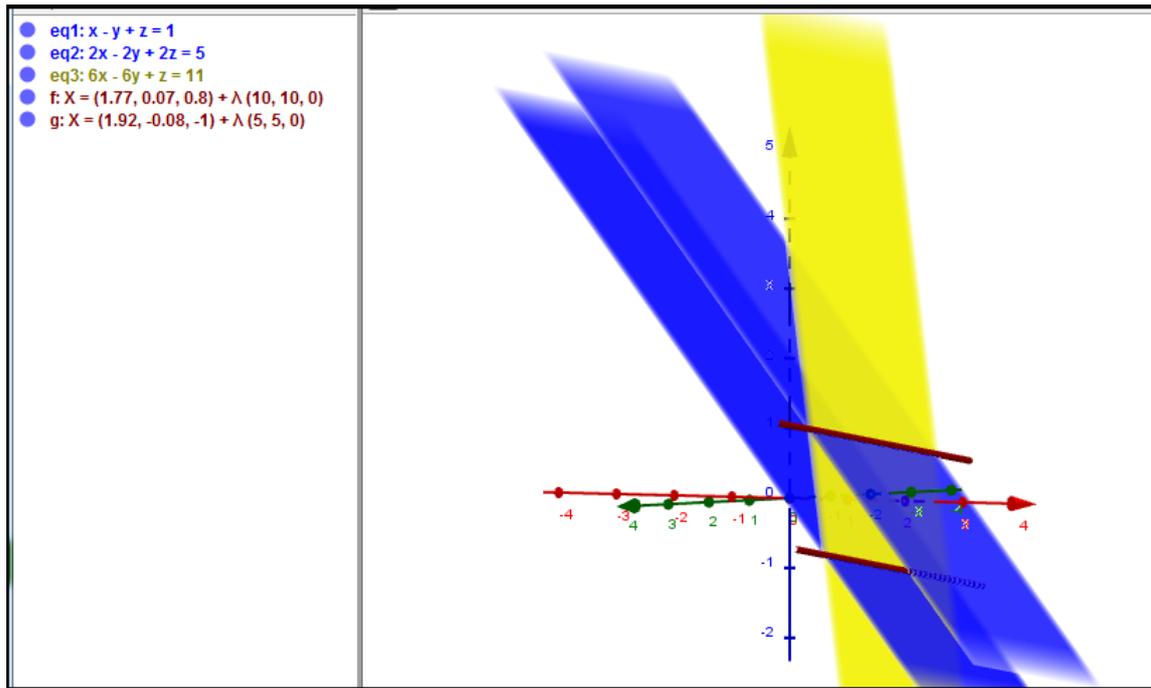
O último caso é quando o sistema gerará dois planos paralelos entre si e um terceiro intersectando os dois planos gerando duas retas paralelas entre si, tornando-o o sistema impossível, pois não haverá pontos que resolverão as três equações ao mesmo tempo.

Por exemplo, tomemos com exemplo numérico o sistema

$$G = \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = 5 \\ 6x - 6y + z = 11 \end{cases}$$

Plotando as equações do sistema G no GeoGebra, pode-se notar que dois planos são paralelos e um outro intersecta os dois planos, para visualizar as retas que representam as interseção, deve utilizar a ferramenta ‘Interseção de Duas Superfícies’ e selecionar dois a dois os planos que se intersectam. Desta maneira o GeoGebra exibirá as retas como mostra a Figura 53.

Figura 53 – Interpretação Geométrica do Sistema G



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

3.1.4 Resolução de Sistemas Lineares na Janela CAS

A janela CAS é um ambiente que os usuários/professores podem trabalhar a resolução de sistemas lineares com número de equações ilimitado, e no ponto de vista didático, os resultados quando se tem sistemas possíveis e determinados, são expressados na forma fracionaria quando necessário, aproximando assim do habitual trabalhado em sala de aula.

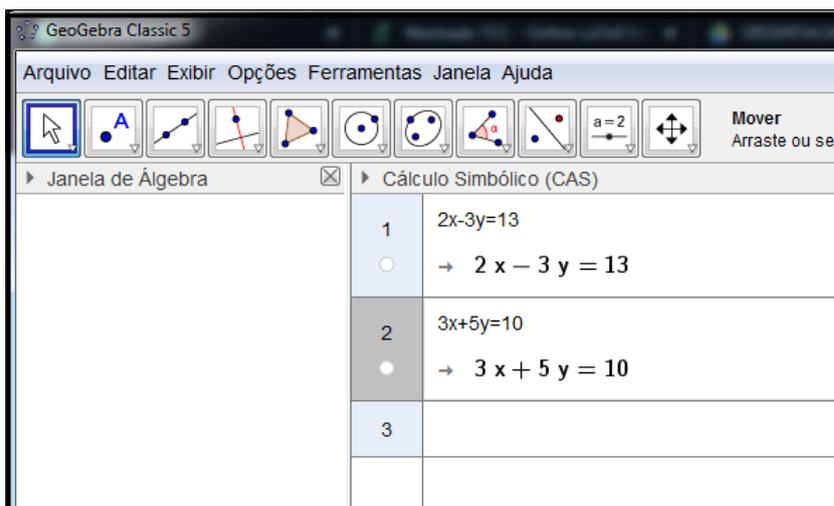
Outro ponto positivo do uso da janela CAS é a interação que pode ser feita com a janela de visualização básica e a janela de visualização 3D ou seja, ao resolver um sistema linear de três equações e três incógnitas por exemplo, pode-se utilizar a visualização dos planos na janela 3D para a realização da interpretação gráfica.

Vejamos como pode ser resolvido um sistema linear 2×2 utilizando a janela CAS com um exemplos numéricos.

$$\text{Seja o sistema linear } \begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x + 5y = 10 \end{cases} .$$

Primeiramente, deve-se inserir na linha 1 da janela CAS a equação 1 do sistema linear, para isto, com o ícone ‘Avaliar Simbolicamente’ selecionado, digita-se na linha 1- $2x - 3y = 13$ e depois clique na tecla *Enter*. Em seguida na linha 2, digita-se a segunda equação $3x + 5y = 10$, concluindo a inserção das equações do sistema linear (Figura 54).

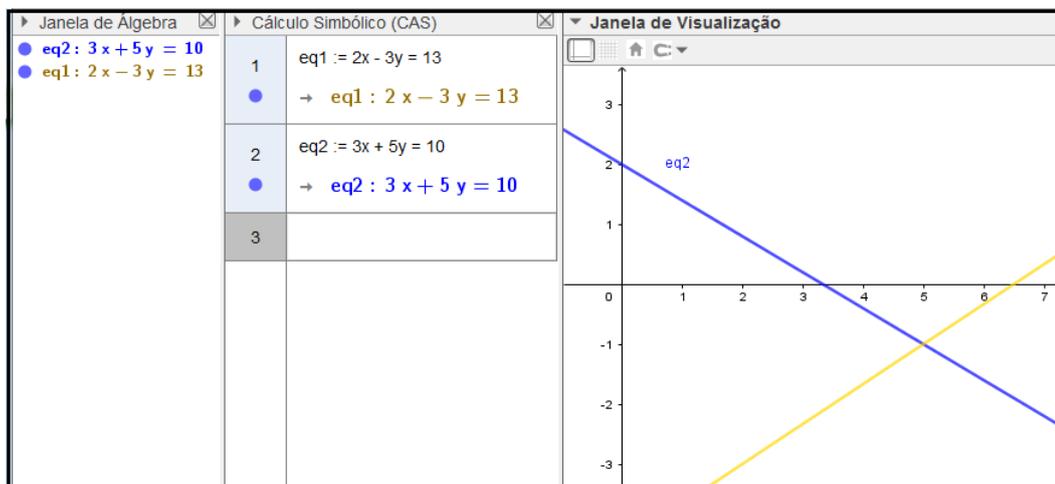
Figura 54 – Equações do Sistema Linear na Janela CAS



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Para se obter a representação gráfica das equações, deve-se selecionar o botão que está logo a baixo do número que marca a linha da equação, assim a “bolinha” ficará selecionada, a equação será exibida na janela de Álgebra e neste caso como se trata de retas, a representação gráfica pode ser vista na janela de visualização básica e/ou na janela de visualização 3D. A Figura 55 ilustra a representação gráfica das retas na janela de visualização básica, as equações na janela de Álgebra e as equações nas linhas 1 e 2 da janela CAS.

Figura 55 – Representação Gráfica do Sistema Linear

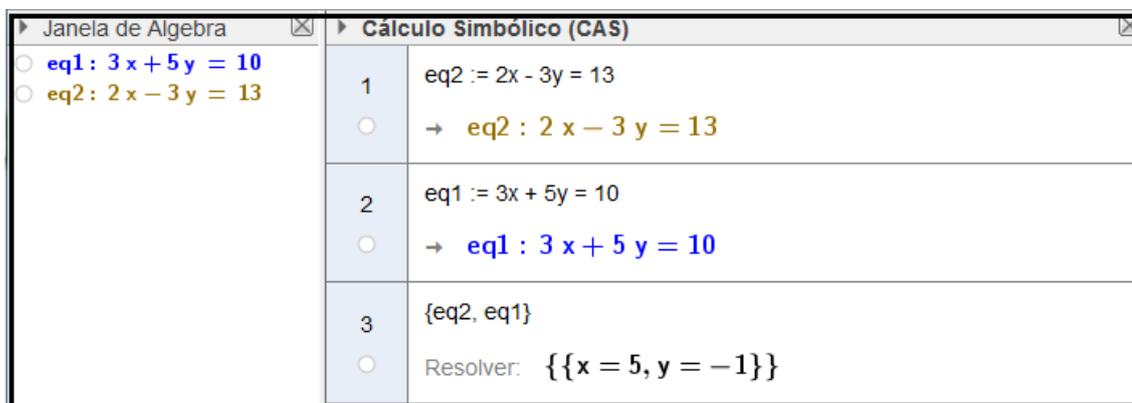


Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Com a visualização da representação gráfica do sistema linear, pode-se classificar o sistema, mas como a ideia é resolver o usuário pode utilizar da janela de visualização e com a ferramenta ‘Interseção de Dois Objetos’ selecionar as duas retas que o GeoGebra exibirá o ponto de interseção, caso haja, que é a solução do sistema.

Mas na janela CAS tem-se também uma ferramenta que resolve sistemas lineares, chamada ‘Resolver’. Para utilizá-la deve-se primeiro selecionar a linha 1 e a linha 2, que para isso o usuário terá que clicar com o botão esquerdo do *mouse* na linha 1 e em seguida com a tecla *Ctrl* selecionada clicar na segunda linha que contém a segunda equação do sistema linear. Com as duas linhas selecionadas, clique na ferramenta ‘Resolver’ que o GeoGebra exibirá na linha 3 a solução do sistema, como podemos observar na Figura 56.

Figura 56 – Solução do Sistema Linear na Janela CAS



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Nas linhas de comando da janela CAS, também podem ser digitados alguns coman-

dos, como por exemplo o comando ‘Resolver(<Lista de Equações>, <Lista de Variáveis>’, que também pode ser utilizado para resolver sistemas lineares. No exemplo da Figura 55 temos que a equação da linha 1 foi nomeada automaticamente para ‘eq1’ e a equação da linha 2 para ‘eq2’. Utilizando esses nomes pode-se resolver o sistema linear, na linha 3 com o comando ‘Resolver(<Lista de Equações>, <Lista de Variáveis>’ digitado, substitua <Lista de Equações> por ‘{eq1,eq2}’ e <Lista de Variáveis> por ‘{x,y}’, que o GeoGebra resolverá o sistema linear (Figura 57).

Figura 57 – Resolução com o Comando Resolver

Janela de Álgebra		Cálculo Simbólico (CAS)	
●	eq2: $3x + 5y = 10$	1	eq1 := $2x - 3y = 13$
●	eq1: $2x - 3y = 13$	●	→ eq1 : $2x - 3y = 13$
		2	eq2 := $3x + 5y = 10$
		●	→ eq2 : $3x + 5y = 10$
		3	Resolver({eq1,eq2}, {x,y})
		○	→ {{x = 5, y = -1}}

Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra

4 METODOLOGIA

Neste capítulo apresentaremos os conceitos metodológicos que nortearam a pesquisa e o comportamento do pesquisador na elaboração de um minicurso, na coleta e análise dos dados para elaborar um material que possa auxiliar na resolução da problematização apresentada anteriormente no presente trabalho.

Utiliza-se neste trabalho a Pesquisa Qualitativa como base nas orientações para todo o desenvolvimento, bem como a utilização do Questionário e de Formulário como meio de adquirir informações para a complementação do trabalho final. A seguir, será apresentada a Pesquisa Qualitativa e suas características, as quais serão obedecidas pelo pesquisador no presente trabalho.

4.1 METODOLOGIA QUALITATIVA

Sobre a pesquisa qualitativa, (POUPART JEAN E DESLAURIERS, 2008) afirma que o cientista é ao mesmo tempo o sujeito e o objeto de suas pesquisas, alegando que o desenvolvimento da pesquisa é imprevisível e que o conhecimento do pesquisador é parcial e limitado, deixando claro que em nenhum momento o pesquisador tem o dever de saber quais resultados esperar em sua pesquisa, até porque a Pesquisa Qualitativa busca resultados não quantitativos.

Para efeito deste trabalho, a pesquisa de campo foi realizada em um único ambiente, sendo na forma *on-line*, com graduandos e professores de Matemática de praticamente todo os estados brasileiros, e alguns de outros países. O pesquisador teve participação direta com a pesquisa, gerenciando os acontecimentos, coletando e analisando os dados para o desenvolvimento e aprimoramento.

Para (LUDKE; ANDRÉ, 2011) uma das características da Pesquisa Qualitativa é que todos os seus dados coletados geram um material rico em descrições e considerados importantes, fazendo com que o pesquisador fique atento para qualquer possível elemento essencial para a melhor compreensão do problema estudado.

A coleta de dados para a realização deste trabalho foi feita por meio de questionário para conhecer os fornecedores das informações para o aprimoramento do trabalho, por meio de formulário para a coleta de dados do tipo *feedback* ao final do minicurso e a troca de informações por meio de diálogos. As informações obtidas foram analisadas e colocadas em prática no trabalho, na tentativa de aprimorar o estudo.

A análise dos dados utilizada foi o formulário, onde sua leitura foi uma interpretação

das informações adquiridas que contribuíram diretamente para o desfecho do trabalho.

4.1.1 Pesquisa Participante

Este trabalho adotou a pesquisa participante, que se caracteriza pelo envolvimento e identificação do pesquisador com as pessoas investigadas. Supostamente criada por Bronislaw Malinowski na tentativa de conhecer os nativos das ilhas Trobriand, ele se tornou um nativo, rompendo com a sociedade ocidental, morando em tendas nas aldeias que desejava estudar, aprendendo suas línguas e observando a vida cotidiana (FONSECA, 2002).

A autora (FAERMANN, 2014) ¹, em um dos seus trabalhos ressalta que a pesquisa participante é ancorada na abordagem qualitativa, direcionada para a realidade social dos sujeitos, suas experiências, suas culturas e seus modos de vida, prevendo uma aproximação do sujeito e o objeto de estudo.

Fica claro que neste trabalho a participação do pesquisador na pesquisa e o seu envolvimento com o objeto de pesquisa, e isto vai mais além, o interesse por realizar a pesquisa está vinculada na caminhada do pesquisador desde o Ensino Médio até o presente momento de professor, demonstrando que sua identificação ao objeto de estudo.

Mas em muitos pontos pode-se assimilar algumas características da pesquisa participante e pesquisa ação, e na tentativa de esclarecer, destacamos a diferenciação feita por (BRANDÃO; THIOLENT, 1984), em que a pesquisa-ação tem como objetivo contribuir para o desenvolvimento de uma ação não rotineira e a pesquisa participante não é necessariamente, pesquisa-ação, dado que, em alguns casos, refere-se às experiências de observadores participantes ou quando a participação dos pesquisadores consiste em aparente identificação com os valores e os comportamentos que são necessários para sua aceitação pelo grupo considerado.

4.1.2 Questionário

Segundo (GERHARDT; SILVEIRA, 2009) o questionário é um instrumento de coleta de dados constituídos por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do entrevistador. No contexto do momento em que a pesquisa foi desenvolvida, a aplicação de questionário é uma forma prática para alcançar maiores resultados mais pessoas entrevistadas num curto tempo.

Algumas vantagens fazem o questionário um bom instrumento de coleta de dados, tais vantagens descritas por GERHARDT: economiza tempo e viagens e obtém grande

¹ Assistente social, doutora pela PUC-SP

número de dados, atinge maior número de pessoas simultaneamente, abrange uma área geográfica mais ampla, economiza pessoal, tanto em treinamento quanto em trabalho de campo, obtém respostas mais rápidas e mais precisas, propicia maior liberdade nas respostas, em razão do anonimato, dá mais segurança, pelo fato de suas respostas não serem identificadas, expõe a menos riscos de distorções, pela não influência do pesquisador, dá mais tempo para responder, e em hora mais favorável, permite mais uniformidade na avaliação, em virtude da natureza impessoal do instrumento, obtém respostas que materialmente seriam inacessíveis.

Mas também deixa claro algumas desvantagens como: a pequena percentagem dos questionários que voltam e os que retornam deixam grande número de perguntas sem respostas, não pode ser aplicado a pessoas analfabetas, não é possível ajudar o informante em questões mal compreendidas, leva a uma uniformidade aparente devido à dificuldade de compreensão por parte dos informantes, uma questão pode influenciar outra quando é feita a leitura de todas as perguntas antes do início das respostas, a devolução tardia prejudica o calendário ou sua utilização, o desconhecimento das circunstâncias em que foram preenchidos torna difícil o controle e a verificação, nem sempre é o escolhido quem responde ao questionário, invalidando, portanto, as respostas, exige um universo mais homogêneo.

(GERHARDT; SILVEIRA, 2009) também deixa claro os três tipos de perguntas que pode estar presentes no questionário sendo elas:

Perguntas abertas: São aquelas que o informante responde livremente, expondo sua opinião e o entrevistador anota tudo o que for declarado no caso de entrevistas, caso seja digital o entrevistador aceita a resposta por completo sem cortes e mudança de opinião.

Perguntas fechadas: São aquelas que o informante deve escolher uma resposta entre as opções posta em uma lista predeterminada, indicando aquela que mais se aproxima a sua opinião.

Perguntas mistas: São aquelas em que, contém uma lista de respostas predeterminadas e mais um campo aberto, onde o informante pode expressar sua opinião, caso não tenha encontrado nenhuma que assimile com a sua.

Neste trabalho foram utilizados utilizados questionários de perguntas abertas e fechadas, para obter informações sociais como, qual cidade reside, grau de escolaridade e informações sobre o conhecimento do *software* GeoGebra, se já utilizarão o GeoGebra, na tentativa de ter um maior conhecimento dos participantes da pesquisa.

O questionário (APÊNDICE A) foi o único utilizado, e esse questionário foi utilizado para que os participantes se inscreve-rem no minicurso, no qual foi fonte da coleta de dados desta pesquisa.

4.1.3 Formulário

No caso do formulário, (GERHARDT; SILVEIRA, 2009) informa que é uma coleção de questões formuladas e anotadas por um entrevistador, geralmente utilizadas face a face com o entrevistado. As perguntas devem estar ordenadas, das mais simples para às mais complexas de modo que possibilita uma única interpretação. Gerhardt diferencia questionário e formulário pelo método de preenchimento, onde o questionário é preenchido pelo entrevistado, e o formulário pelo entrevistador.

No caso deste trabalho, o formulário também foi preenchido pelo entrevistado, pois a pesquisa se desenvolveu durante a pandemia da COVID-19. E o formulário (APÊNDICE B), foi utilizado para coletar um **feedback** dos participantes, no qual as perguntas estavam interessadas em saber a satisfação dos participantes no minicurso, as considerações e opiniões para o aprimoramento do minicurso e os aspectos que o minicurso foi mais úteis ou valiosos.

As vantagens de se utilizar formulário citados por (GERHARDT; SILVEIRA, 2009) são: Utilizados para quase todos os segmentos da população, alfabetizados, analfabetos e população heterogêneas; Presença do pesquisador; Flexibilidade para adaptar-se às necessidades de cada situação; Obtenção de dados mais complexos e úteis; Uniformidade dos símbolos.

Já nas desvantagens, indica a falta de liberdade nas respostas, quando o entrevistador está presente; Risco de distorções, devido à influência do aplicador; Menor prazo para responder às perguntas; Mais demorado, por ser aplicado a uma pessoa de cada vez; insegurança nas respostas e não conseguir atingir pessoas distantes. No caso deste trabalho, muitas das desvantagens citadas não se aplicou, pois o formulário foi preenchido pelos entrevistados e com um período para responder de sete dias, via formulário *Google forms*. Entretanto, o número de formulários e questionários retornados foi menor do que o número de entrevistados.

4.2 APLICAÇÃO DA IDEIA

Nesta seção será apresentada a aplicação da ideia. A seção descreve a aplicação de um minicurso realizado na forma remota para um público cursista constituído por professores e pessoas interessadas no tema, detalhando o que foi trabalhado no minicurso em cada dia de sua aplicação. O presente subcapítulo mostra de que modo a ideia do uso do GeoGebra nas aulas de Matemática pode ser explorada, não só na área da Álgebra, mas também nas demais áreas como Cálculo, Geometria, Estatísticas, estudos de funções e outras.

São feitas ligações das ideias aplicadas no minicurso com partes deste trabalho, citando ferramentas, comandos e métodos de construção. Também apresenta exemplos utilizados no minicurso e como foi disponibilizado as informações para os cursistas.

4.2.1 A Dinâmica do Minicurso

Na tentativa de compartilhar a ideia que levou a essa pesquisa, pensou-se na criação de um minicurso intitulado "O uso da planilha de cálculo do *software* GeoGebra no ensino de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares". Entretanto, para que esse minicurso se concretizasse, foi necessária a elaboração de uma estratégia para que o mesmo acontecesse durante a pandemia da COVID-19 (tomando todos os cuidados necessários). Visto que isso seria um grande problema, a solução foi realizar o minicurso de forma online, utilizando a plataforma do *Google Meet*².

O minicurso foi realizado em parceria com a Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT) e apoiado pelo Projeto de Apoio ao Ensino de Matemática (PAEM), no qual auxiliaram na certificação dos participantes e dos organizadores com a carga horária de 8 horas.

De início foi-se pensado em aplicação para 40 participantes, mas visto que a procura foi de forma satisfatória, acabou-se disponibilizando 150 vagas, no quais foram esgotadas em um período de 72 horas. As inscrições foram realizadas via questionário criado no *Google Forms* (Apêndice A), no qual conseguimos algumas informações dos participantes em relação ao uso do GeoGebra, nacionalidade, naturalidade e formação acadêmica.

A proposta do minicurso consistiu-se na instrumentalização do ensino do conceito de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares utilizando o GeoGebra, servindo como apoio e incentivo aos professores de Matemática e a todos os interessados em atuar na área de Matemática.

Ministrado pelo pesquisador, o minicurso foi desenvolvido no formato *online* e contou com participantes de praticamente todos os estados brasileiros e com participantes de Angola e Chile. O público cursista era composto por professores mestres e doutores e graduandos em Matemática, por professores de Física e pessoas interessadas no tema do minicurso.

O Minicurso foi dividido em dois módulos. No primeiro módulo, realizado em 6 de fevereiro foi ensinada a instalação do *software* GeoGebra e também foi feita uma apresentação do *software* como descrito no Capítulo 1.

No primeiro encontro, contamos com a participação de 87 inscritos e como para alguns seria a primeira interação com o GeoGebra, foi deixado um total de 3 horas para

² Programa de videoconferências do Google.

essa primeira parte. Além disso a apresentação foi gravada e disponibilizada para os participantes e para o público em geral no *Youtube*, para que pudessem rever os passos decorrido no minicursos.

Apresentamos o segundo módulo No dia 13/02/2021. Este módulo ficou reservado para o desenvolvimento do tema principal Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares. Iniciamos com a construção de matrizes na planilha de cálculo do GeoGebra. Em seguida, foi mostrado como é feita a renomeação das matrizes e realizamos algumas operações, como adição e subtração de matrizes, multiplicação entre duas matrizes utilizando o campo ‘Entrada’. Também foi feita a multiplicação de matrizes utilizando uma célula livre da planilha, desta forma comparamos onde cada matriz produto fica localizada. Foi mostrado na sequência, a utilização do comando ‘MatrizTrasposta(<Matriz>’, para que pudessem encontrar a matriz transposta de uma matriz qualquer criada no GeoGebra.

O próximo ponto do minicurso foi calcular o determinante de uma matriz quadrada, primeiramente utilizamos o comando ‘Determinante(<Matriz>’ e depois foi mostrado a programação das células da planilha do GeoGebra para realizar o cálculo do determinante de matrizes de ordem 3, utilizando a regra de Sarrus, como pode ser visto no Capítulo 2 na seção 2.2.

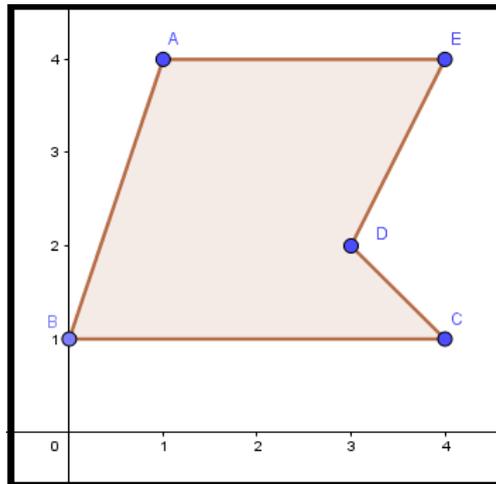
Para mostrar uma aplicação de matrizes utilizando o GeoGebra, foi trabalhado a translação, reflexão e rotação de figuras. Neste momento, foi pedido que os participantes criassem um polígono qualquer na janela de visualização, depois transcrever as coordenadas dos vértices do polígono nas células da planilha do GeoGebra, de forma que a coordenada x ficasse em uma célula e a coordenada y ficasse na célula logo a baixo (Figura 58). O exemplo utilizado no dia do minicurso foi um polígono de cinco vértices localizados nas seguintes coordenadas, ponto $A = (1, 4)$, $B = (0, 1)$, $C = (4, 1)$, $D = (3, 2)$, e o ponto $E = (4, 4)$, gerando o polígono da Figura 59.

Figura 58 – Posição das Coordenadas dos Pontos nas Células

	A	B	C	D	E
1	1	0	4	3	4
2	4	1	1	2	4
3	3	2	4	4	1

Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Figura 59 – Polígono Exemplo



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Após terem colocados os pontos na planilha do GeoGebra, foi pedido para que criassem uma matriz

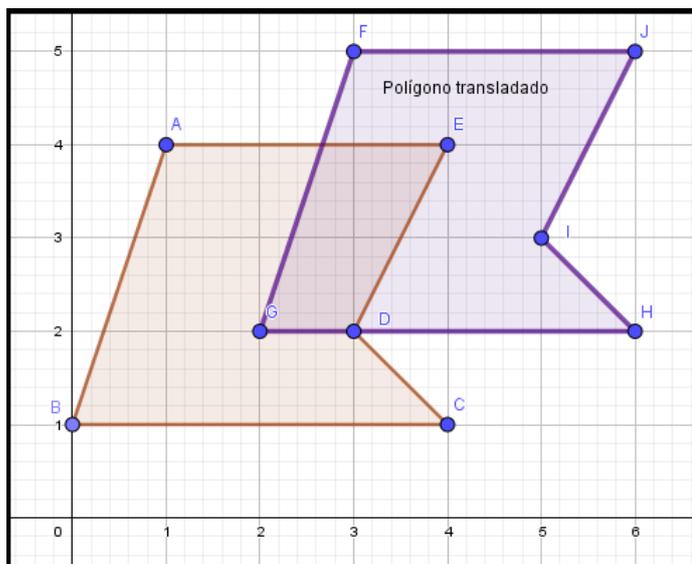
$$P1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

com todos os pontos colocados na forma de coluna, dando a entender que a matriz fazia referencia ao polígono criado.

Iniciamos trasladando o polígono da Figura 4.2 duas unidades para a direita no eixo x e uma unidade para cima no eixo y . Para isso, foi pedido que os participantes criassem uma matriz T de mesma ordem que a matriz $P1$, mas que os elementos $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = 2$ e os $a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{34} = a_{25} = 1$, e em seguida eles deveriam realizar a operação de adição entre a matriz $P1$ e a matriz T em uma célula livre da planilha do GeoGebra, gerando a matriz que translada os vértices do polígono.

Para finalizar a translação, com a ferramenta ‘Polígono’ selecionada, os participantes foram selecionando os vértices obtidos com a adição das duas matrizes, lembrando que os vértices estavam na forma de coluna, gerando assim, a Figura 60.

Figura 60 – Polígono Transladado



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Na continuação do minicurso, foi feita a reflexão do mesmo polígono em relação ao eixo y e ao eixo x . Para a reflexão em relação ao eixo y , os participantes criaram uma matriz R de ordem 2 da forma $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pois quando realizassem a multiplicação com a matriz $P1$, geraria a matriz

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

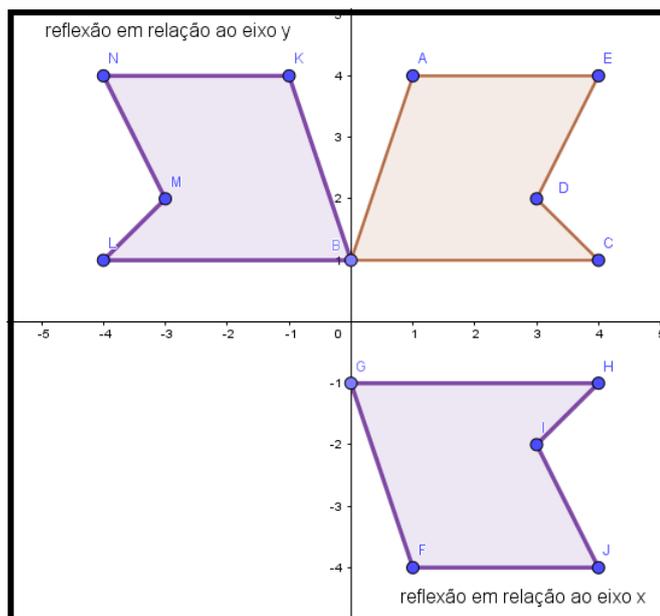
que é a reflexão dos vértices do polígono $P1$ em relação ao eixo y , lembrando que os pontos estão na forma de colunas nas matrizes.

Para a reflexão em relação ao eixo x , o que os participantes tiveram que alterar foi a matriz R . Para realizarem a reflexão em relação ao eixo x , a matriz R tinha que ser da forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, que ao realizar a multiplicação com a matriz $P1$, resultava na matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ -4 & -1 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

A Figura 61 ilustra as reflexões em relação ao eixo y e x quando os participantes realizaram a plotagem dos vértices das matrizes Y e X na janela de visualização.

Figura 61 – Reflexão do Polígono



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra;

Uma outra aplicação das matrizes mostrado no minicurso foi a rotação de um polígono qualquer por um ângulo fixo em relação ao ponto de origem do plano cartesiano. Neste momento do minicurso os participantes já tinham uma certa autonomia, então foi pedido que eles criassem um novo polígono com os vértices nos pontos $A = (1, 1)$, $B = (4, 3)$, $C = (4, 2)$, $D = (5, 1)$ e $E = (1, 1)$. Note que o ponto A é igual ao ponto E , isto foi necessário para que o polígono fechasse.

Em seguida os participantes deveriam criar uma matriz P com os pontos do polígono colocados nas colunas da matriz, iniciando com o ponto A e terminando com o ponto E . Depois deveriam criar um controle deslizante α , onde seria controlado o valor do ângulo de rotação.

Por último deveriam criar a matriz de rotação da seguinte forma

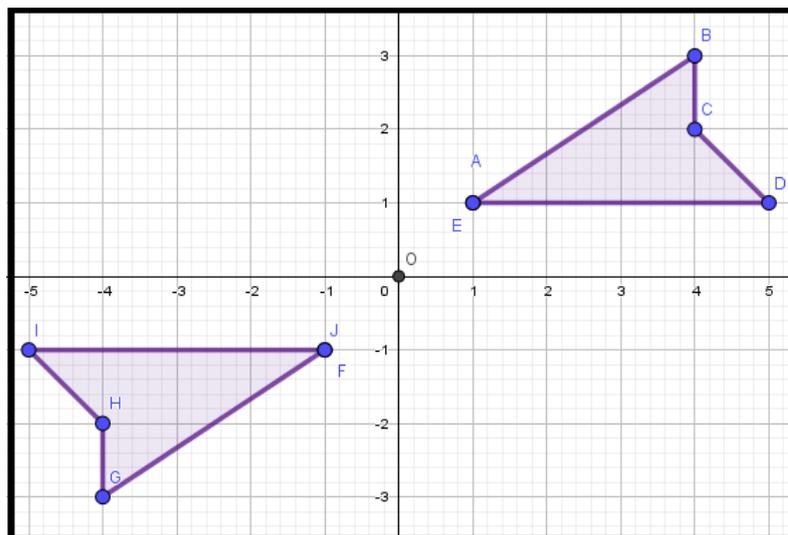
$$R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

na planilha do GeoGebra.

Com a matriz de rotação e a matriz dos pontos que representam os vértices do polígono prontas, os participantes deveriam escolher um ângulo qualquer no controle deslizante que os valores das entradas da matriz de rotação iam se alterando automaticamente. Para realizar a rotação do polígono de um ângulo α em relação a origem do plano cartesiano, os participantes realizaram a multiplicação da matriz R (rotação) e a matriz P , a matriz resultado era as coordenadas dos pontos que representam os vértices do polígono rotacionados.

Para a visualização ficar completa, restava eles selecionar a ferramenta ‘Polígonos’ e selecionar os pontos obtidos na matriz resultante do produto $R \cdot P$ na janela de visualização. A Figura 62 ilustra a rotação do polígono P em 180 graus em relação ao ponto de origem do plano cartesiano.

Figura 62 – Rotação em Torno do Ponto (0,0)



Fonte: elaborado pelo autor no software GeoGebra.

Mais um ponto apresentado no minicurso, foi a programação das células da planilha de cálculo do GeoGebra para a realização de escalonamento de matrizes de ordem 3. A programação realizada no minicurso é a mesma utilizada no Capítulo 2 na seção 2.1.5.1, mostrando para os participantes que pode-se resolver sistemas lineares com auxílio de matrizes.

Na última parte do minicurso, apresentamos a janela de visualização 3D e a janela CAS na representação geométrica dos sistemas lineares e na resolução como já descrito no Capítulo 3 nas seções 3.1.3 e 3.1.4.

Da mesma forma que no primeiro encontro com os participantes, a apresentação do minicurso foi gravada e disponibilizada na plataforma *YouTube*, para que os mesmos pudessem rever os passos desenvolvidos durante o decorrer do minicurso.

Ao final do minicurso foi enviado por e-mail aos participantes um formulário de *feedback* do minicurso (Apêndice B), que nos possibilitou realizar algumas correções para a escrita deste trabalho e nos incentivou ainda mais escrever sobre o tema.

4.3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DE DADOS

Esta seção possui dados da pesquisa realizada com os participantes do minicurso realizado pelo pesquisador, onde será apresentada a seguir uma análise dos dados obtidos nas respostas do questionário e do formulário, excluindo as perguntas e respostas que relacionam dados pessoais dos participantes. O objetivo desse trabalho é analisar o perfil dos participantes do minicurso em relação ao conhecimento do *software* GeoGebra e o uso do mesmo, também adquirir informações para aprimorar a ideia geral do trabalho e melhorar os conhecimentos em relação ao tema.

4.3.1 Dados da Pesquisa

A coleta de dados utilizada neste trabalho foi realizada por meio de questionário e formulário elaborados na plataforma do *Google Forms*, com questões abertas e fechadas. O questionário de inscrição do minicurso foi disponibilizado por meios de grupos de *WhatsApp* e na página da Universidade Estadual de Mato Grosso no dia 26/01/2021, com fechamento das inscrições quando atingisse 150 inscritos, no qual aconteceu no dia 28/01/2021. Já o formulário de *feedback* foi encaminhado para os participantes do minicurso via e-mail no dia 15/02/2021, onde poderia receber respostas até o dia 22/02/2021.

4.3.1.1 Questionário de Inscrição

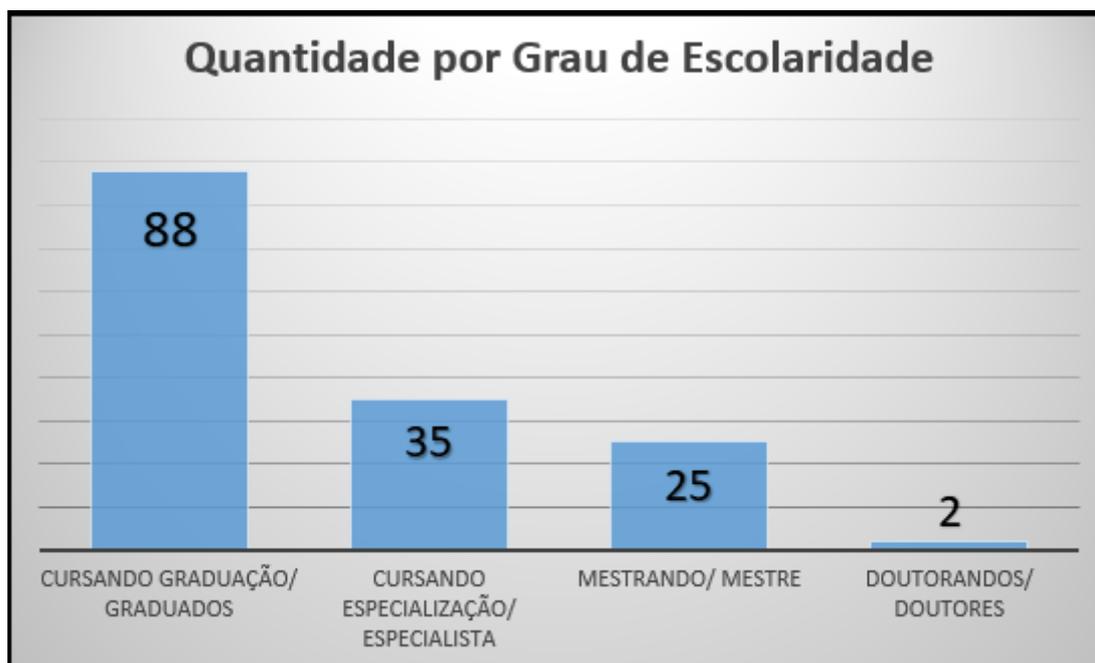
A análise foi realizada utilizando os gráficos e tabelas fornecidos pelo *Google Forms*, cabendo ao pesquisador interpretar as respostas e criar gráficos quando se fosse necessário.

A primeira questão a ser analisada é :

4- Grau de Escolaridade

Conforme os resultados demonstrados (Gráfico 1), a escolaridade dos participantes do minicurso variava de graduados e cursistas de cursos superiores e doutores, onde 58,67% eram graduados ou cursava algum curso superior, 23,33% cursava ou já tinha concluído alguma especialização, 16,67% eram mestres ou estava mestrando e 1,33% eram doutores ou doutorandos.

Gráfico 1: Grau de Escolaridade



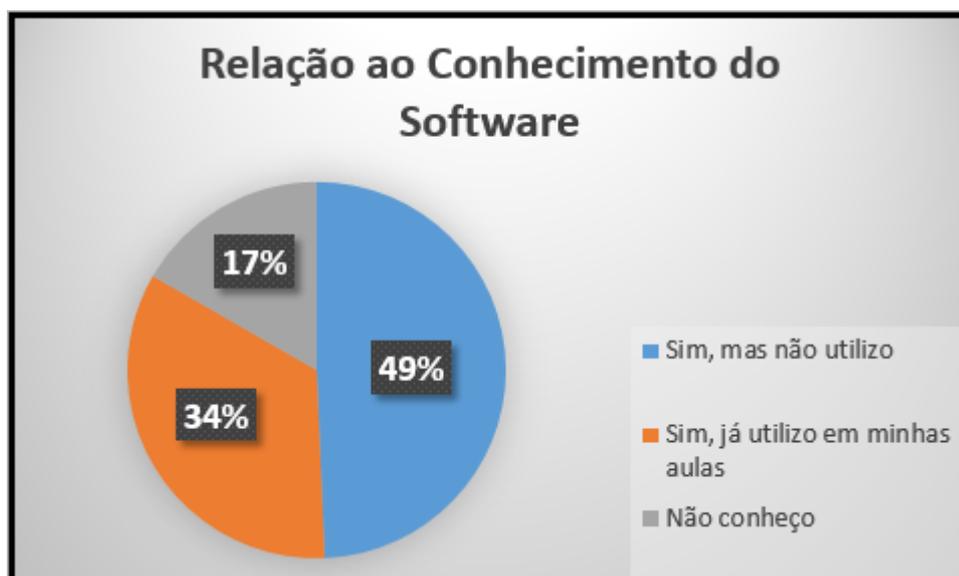
Fonte: elaborado pelo autor (2021).

A segunda questão a ser analisada é uma questão fechada, onde se perguntava:

5- Conhece o software GeoGebra?

Obteve-se as seguintes respostas:

Gráfico 2: Conhecimento do *Software* GeoGebra



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

O Gráfico 2 demonstra que 34% dos participantes do minicurso já tinham conhecimento do *software* GeoGebra e ainda utilizavam em suas aulas, já 49% conheciam o *software* mas não utilizavam-o em aulas e também demonstra que 17% dos participantes não conheciam o GeoGebra.

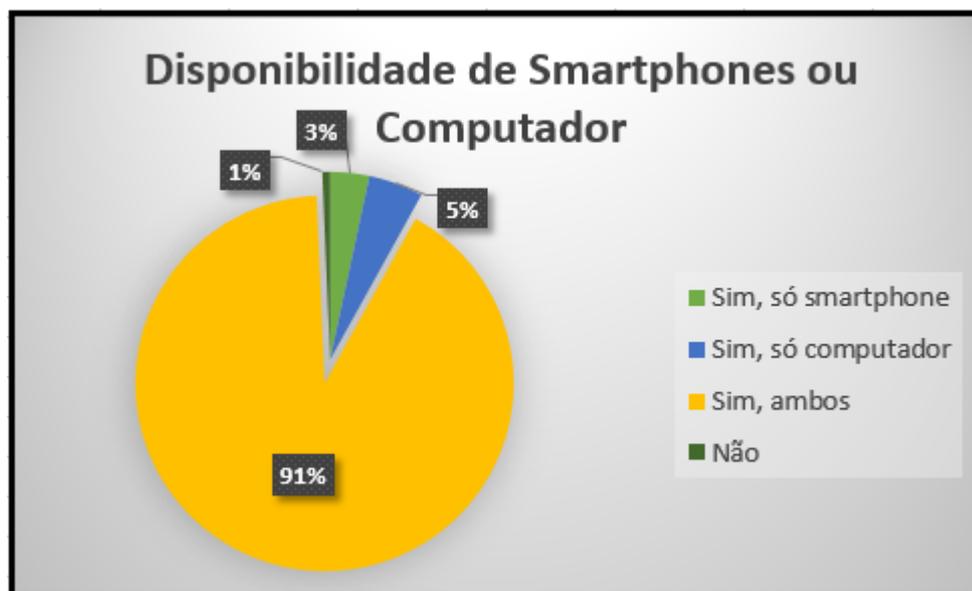
Ao analisar esta questão, e perceber que um número considerável de participantes não tinham nenhum conhecimento do *software*, fez com que o autor desenvolvesse um minicurso mais detalhado, no primeiro módulo para servir como base para essa porcentagem de participantes.

A última questão a ser analisada do questionário de inscrição (APÊNDICE A), foi a seguinte:

6- Possui *smartphone* ou computador? Qual?

E as resposta que obteve-se foram as seguintes:

Gráfico 3: Meios de Acesso dos Participantes



Fonte: elaborado pelo autor (2021)

Como se tratava de um minicurso na forma *online*, saber a disponibilidade de acesso dos participantes era de alta necessidade, e como demonstra o (Gráfico 3) 91% dos participantes possuíam computadores e *smartphones*, 5% somente computador, 3% só *smartphone* e 1% dos participantes não possuíam nenhum dos dois, mas participaram com algum meio emprestado.

O questionário de inscrição foi analisado após o pesquisador ter criado a programação do minicurso, o que poderia ser feito da forma ao contrária, pois poderia mostrar

outros pontos não pensados pelo pesquisador no momento da elaboração dos temas e da mecânica do minicurso.

4.3.1.2 Formulário de *Feedback*

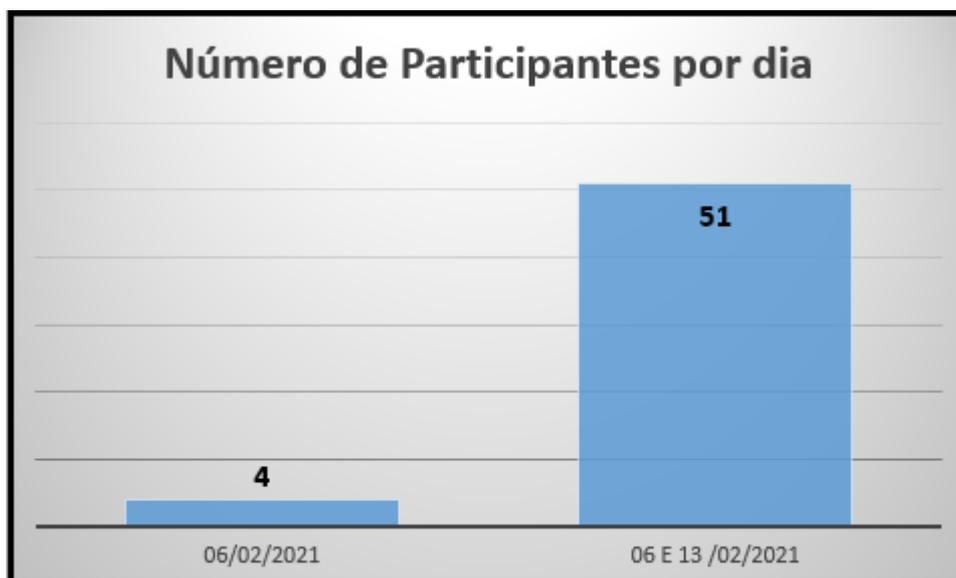
As questões do formulário utilizadas são do tipo abertas e fechadas, e as análises foram feitas utilizando gráficos e quadros. As questões abertas utilizou-se um enquadramento de respostas, aproximando respostas com contextos paralelos.

No caso do formulário de *Feedback*, como o preenchimento não fez obrigatório a todos os participantes, foram contabilizados 55 formulários respondidos nos quais apresentaram as seguintes respostas para as questões que não envolviam dados pessoais.

Questão 3- “Quais dias do minicurso você participou?”

Obteve-se as respostas:

Gráfico 4: Número de Participantes por dia de Minicurso



Fonte: elaborado pelo autor (2021)

Conforme os resultados demonstrados (Gráfico 4), cinquenta e um participante participaram dos dois dias do minicurso, o que representa 92,73% dos participantes que preencheram o formulário e quatro participantes responderam que participaram apenas no primeiro dia de minicurso e representam 7,27% dos participantes que preencheram o formulário.

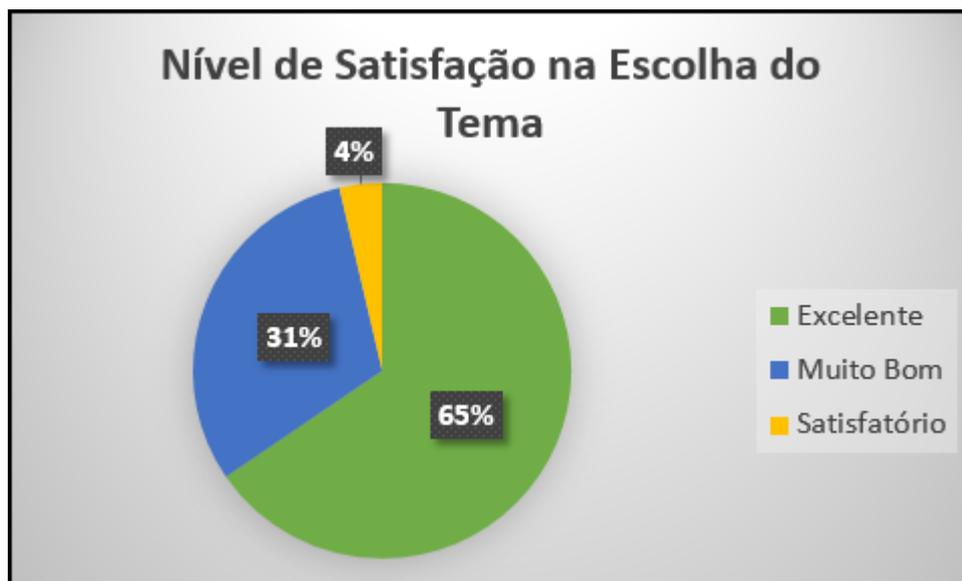
O número menor de formulários preenchidos está coerente como uma das desvantagens de aplicar coleta de dados via *online*, citadas por GERHARDT (2009). Pela gravação

do minicurso, pode notar a presença de 81 participantes no primeiro dia de minicurso (06/02/2021) e 67 participantes no segundo dia (13/02/2021).

Questão 4- “O que achou da escolha do tema do minicurso?”

Obteve-se as seguintes porcentagens nas respostas predeterminadas:

Gráfico 5: Opinião Sobre o Tema do Minicurso



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

O (Gráfico 5), demonstra que 65% dos participantes que preencheram o formulário acham a escolha do tema excelente, o que representa 36 participantes, 31% ou 17 participantes determinaram que o tema escolhido para o minicurso foi muito bom e 4% acharam satisfatória a escolha do tema, que representa 2 participantes, as opções de respostas moderado e ruim, não obtiveram nenhuma escolha e por esse motivo não apareceu no Gráfico 5.

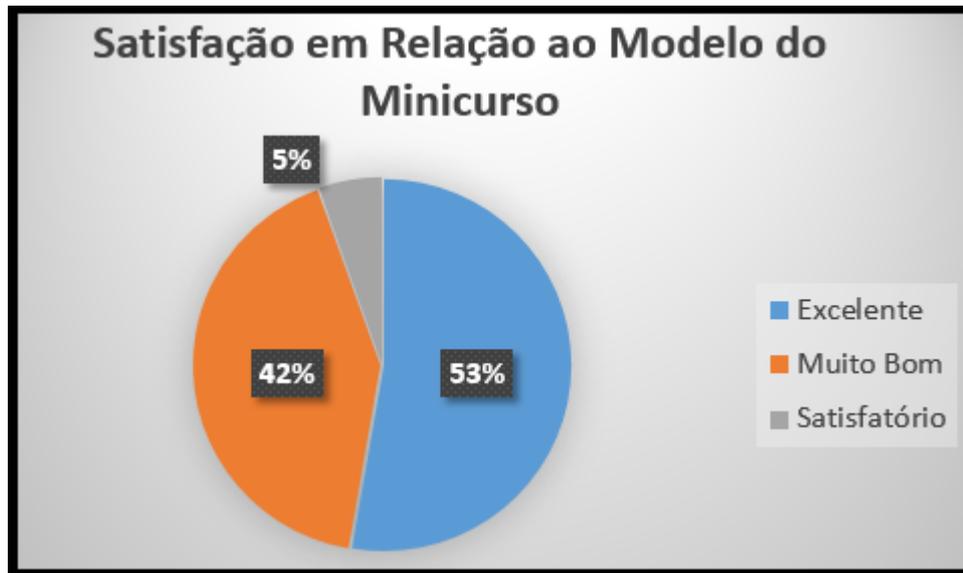
Uma outra coisa avaliada foi a satisfação em relação ao modelo do minicurso, no caso a forma que o mesmo foi aplicado, forma *online*.

Questão 5- “O que achou do modelo do minicurso (aula online)?”

Apresentado no (Gráfico 6), os dados revelam que 53% dos participantes que preencheram o formulário de *feedback* acharam excelente a forma digital em que o minicurso ocorreu, 42% escolheram a opção ‘muito bom’, isto é 23 participantes tiveram está satisfação e 5%, que representa 3 participantes acharam satisfatório a forma *online* do minicurso. Por se tratar de um período onde o encontro com os participantes não poderia acontecer, por

motivos maiores, a ideia de realizar na forma remota foi vista como a principal maneira entre o autor e o orientador do trabalho, e pelo índice satisfatório das respostas dos participantes, consideramos que foi uma escolha boa. As respostas ‘Ruim’ e ‘Moderado’ não receberam nenhum voto, por esse motivo não foi apresentado junto ao Gráfico 6.

Gráfico 6: Opinião em Relação ao Modelo Aplicado do Minicurso



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Questão 6- “Sobre o conteúdo apresentado no minicurso, diga o nível de satisfação?”

Conforme demonstrado (Gráfico 7), 28 participantes que correspondem a 51% das respostas, acharam o tema do minicurso (Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares) excelente, 44% ou 24 participantes acharam o tema muito bom e 5% satisfatório. Nenhum participante achou o tema ruim ou moderado.

Gráfico 7: Nível de Satisfação em Relação ao Tema Apresentado no Minicurso



Fonte: elaborado pelo autor (2021)

Questão 7- “Cite 3 ou mais pontos negativos do minicurso”

Para apresentação das respostas obtidas, foi criado um quadro com as principais respostas, e respostas com a mesma interpretação foi adicionadas nas que mais se adequavam. E as respostas foram:

Quadro 1: Respostas mais Frequentes na Questão 7

Respostas mais Frequentes	Número de vezes Citadas
Carga horária curta	28
Falta de continuidade do Minicurso	15
Falta de atividades para os cursistas	10
Falta de material para os cursistas	6
Nenhum ponto negativo	24

Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Dentre as respostas apresentadas no Quadro 1, conclui-se que o minicurso poderia ter uma carga horária maior ou até uma sequência detalhando mais o tema e podendo estender para outros temas. Poderia ter sido disponibilizado um material de apoio para os participantes antes de o minicurso acontecer ou após o fim, mas que fique claro que este trabalho será disponibilizado após a aprovação.

Um outro ponto que poderia se visto, era a indicação de atividades aos cursistas durante o minicurso. Um ponto positivo entre os negativos é que para 24 participantes não teve nenhum ponto negativo.

Questão 8- “Cite 3 ou mais pontos positivos do minicurso”

Obteve-se as seguintes respostas mais frequentes:

Quadro 2: Respostas mais Frequentes na Questão 8

Respostas mais Frequentes	Número de vezes Citadas
O tema escolhido/ apresentado	30
Didática do palestrantes/ paciência	36
Organização do minicurso	31
Horário e dias acessíveis	10

Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Analisando o Quadro 2, destaca-se a didática do palestrante, a paciência com os cursistas iniciantes com o GeoGebra, a organização do curso que está relacionada a escolha da forma remota, a escolha da plataforma em que o minicurso foi apresentado e do *software* em que foi aplicado o tema, que por sua vez, foi bem aceito pelos cursistas, sendo citado como ponto positivo 30 vezes.

Questão 9- “Quais aspectos deste minicurso foram mais úteis ou valiosos?”

As respostas mais frequentes obtidas são:

Quadro 3: Respostas mais Frequentes na Questão 9

Respostas mais Frequentes	Número de vezes Citadas
Capacitação dos professores para trabalhar com o <i>software</i> GeoGebra	27
A maneira abordado o tema	11
Incentivo ao uso do <i>software</i> nas aulas	17
Todos os aspectos	13

Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Considera-se aspectos do minicurso, o tema e a forma que foi abordado, a utilização do minicurso, incentivo aos professores a começarem a utilizar nas aulas, a forma (*online*) em que o minicurso foi trabalhado, duração do minicurso. Dentre esses, o que achado mais valioso foi a capacitação dos professores, o que pode levar a pensar que foi um dos motivos que levaram a grande busca pelo minicurso.

Como um dos objetivos do trabalho, incentivar os professores a utilizarem o GeoGebra nas aulas de Matemática ou em áreas afins foi a segunda mais indicada como valiosa.

Questão 10- “Como você melhoraria este minicurso?”

Arrecadou-se as seguintes respostas:

Quadro 4: Respostas mais Frequentes na Questão 10

Respostas mais Frequentes	Número de vezes Citadas
Diminuição da carga horária por dia e aumentando o número de dias	26
Disponibilização de material	6
Aplicação de atividades	9
Trabalhar sequências didáticas e outros conteúdos	8
Não mudaria nada	12

Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Notavelmente, a opção de aumentar os dias de curso com a carga horária menor foi a mais citada, seguida da opção de não alterar nada. Destaca-se também que o número de citações em relação a aplicação de atividades durante o minicurso e trabalhar outros conteúdos além do tema em destaque. Uma cobrança durante o minicurso foi da disponibilidade de algum material para os cursistas, para auxiliar nas construções e algumas funções que necessitam de mais atenção ou mais tempo.

Questão 11- “De seu feedback geral do minicurso”

Foi destacado 3 respostas que representam de forma geral as demais respostas recebidas.

feedback 1:

“O profissionais da área da educação precisa estar atentos às inovações tecnológicas. Dessa forma, o presente minicurso foi essencial para a capacitação de professores de matemática e áreas afins, onde, contribuiu de forma ampla fortalecendo os saberes docentes. O uso das Tecnologias de Informações e Comunicações (TICs) estão presente no currículo de ensino de matemática nos diferentes níveis do ensino básico e superior. Assim sendo, este minicurso foi de extrema importância para o cotidiano do professor de matemática, onde o mesmo levará para o âmbito escolar novas ações metodológicas.”

feedback 2:

“Curso muito bom, principalmente para quem não conhecia o App, meu caso. Fiquei muito interessada pelo App e, em assim que possível, utilizá-lo na prática docente. A linguagem utilizada e a forma que a utilizou facilitou a compreensão até de leigos. Parabéns pelo mini curso, espero ter a possibilidade de participar de mais destes!”

feedback 3:

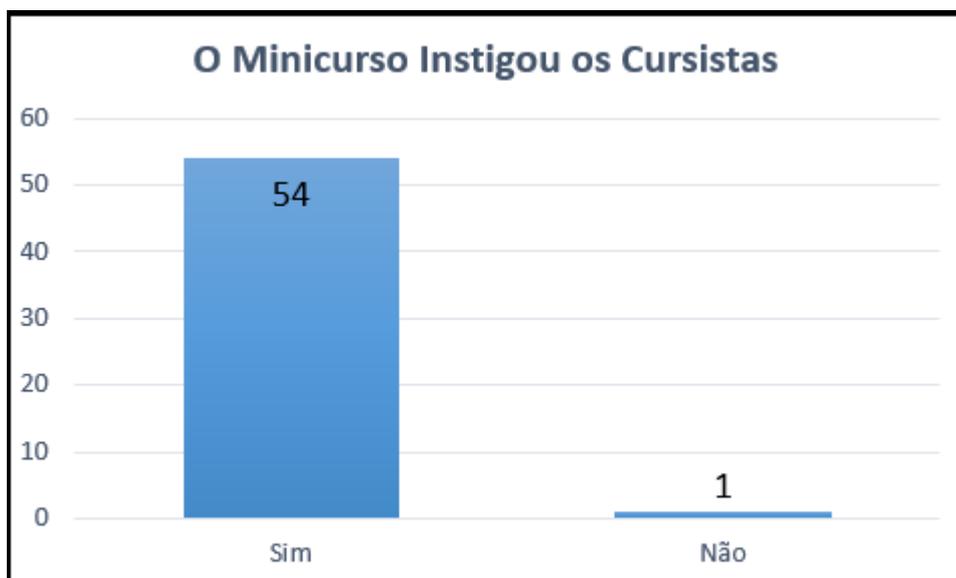
“O software GeoGebra na disciplina da Matemática é excelente tem muitos mais ainda para se aprender. Com relação do curso muito organizado o professor explicou com paciência e tirou todas as dúvidas que ia surgindo dos alunos. se tiver outro me avise que quero.”

Os *feedbacks* mostraram a importância que o minicurso teve, tocando em um assunto que apresenta estar em destaque que são as Tecnologias de Informações e Comunicações (TICs), contribuindo para a capacitação dos professores. Destaca-se também como o GeoGebra pode ser versátil em relação aos conteúdos que pode ser abordados.

Questão 12- O minicurso lhe instigou a utilização do GeoGebra em suas aulas?

Na tentativa de descobrir com o minicurso, se a ideia deste trabalho cumpriria um dos objetivos, a questão 12 apresentou as seguintes respostas:

Gráfico 8: Verificação se o Minicurso Instigou os Participantes a Utilizarem o GeoGebra nas aulas



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Demonstrado no Gráfico 8, 54 participantes que preencheram o formulário indicaram que o minicurso instigou os cursistas a utilizarem o GeoGebra no ensino de Matemática nas aulas de aulas. Um participante não se sentiu instigado a trabalhar o *software* nas aulas.

Com a análise das questões do questionário e do formulário pode adaptar alguns pontos neste trabalho na tentativa de alcançar o maior número de pessoas, deixando o mais claro possível e atingir os objetivos projetados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista que a tecnologia está presente em quase tudo, e que a sociedade se reorganiza com ela, espera-se que a educação, em particular, o ensino de matemática, acompanhe as mudanças sociais e culturais advindas destas. Entretanto, o ensino de matemática está acompanhando essas mudanças? a tecnologia está sendo usada no ensino de matemática? os professores estão qualificados para trabalhar com *softwares* que possam auxiliar no ensino de Matemática? São tantas perguntas, mas será que o problema não está nas respostas, ou na busca delas? Pensa-se em introduzir tecnologias no ensino, mas pouco se pensa em como introduzir, em como qualificar e preparar os professores para nova realidade.

Com esse problema em mente que o atual trabalho foi estruturado e desenvolvido, baseando-se em dissertações sobre as tecnologias no ensino, dissertação do programa PROFMAT, artigos e livros, sempre na busca de informações para alcançar os objetivos colocados inicialmente.

Relembrando o objetivo principal deste trabalho, que é instrumentalizar o ensino de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares, de maneira que os professores de Matemática pudessem ter acesso a um material que os auxiliem e ao mesmo tempo estimulem o uso do GeoGebra, considera-se que objetivo foi alcançado diante das informações coletadas.

Mas a caminhada até aqui foi árdua, a escolha do *software* GeoGebra deu-se por se tratar de um *software* gratuito, de fácil manuseio e por conter muitas ferramentas que podem ser exploradas em varias áreas, como Geometria, Cálculo, Estatística, estudo de funções, entre outras.

E quanto à realização do minicurso, como aplica-lo em período de pandemia? Quais pontos selecionar para apresentar em um curso de 8 horas? Qual o grau de conhecimento em relação a este **software** os participantes do minicurso trazem de casa? Todas essas perguntas nortearam a construção do minicurso aplicado. Contudo, as expectativas foram superadas, começando com o número de inscritos, que inicialmente foi pensado em oferecer 40 vagas, foi ampliado na tentativa de atender mais pessoas, visto que a procura, em certo momento, já havia ultrapassado 4 vezes o número inicial de vagas. A presença e participação dos cursistas foi algo a se destacar, ajudando na moldagem do trabalho, de modo que deixasse o material em uma linguagem acessível para todos os níveis de professores, graduados, mestre e doutores.

Com a análise do questionário e do formulário, alguns pontos foram pautados em relação aos "olhares" dos cursistas, como a dificuldade de encontrar material para aperfeiçoamento do ensino com auxílio de tecnologias e a grande busca por capacitação/qualificação.

Ainda sobre o minicurso, do ponto de vista dos cursistas, concluíram que há muitos recursos didáticos voltados ao uso de tecnologias, mas eles sentiram que faltam materiais de apoio, como, por exemplo, manuais de instrução.

Com a realização desta dissertação, tive a percepção que o ensino de Matemática com o auxílio de ferramentas tecnológicas, neste caso o GeoGebra, pode levar a um ensino significativo, de modo a ilustrar para os estudantes coisas que poderiam não ser vistas em um ensino sem tais ferramentas, visto que elas também contribuem para que alunos e professores possam fazer conjecturas por meio da investigação. Em outras palavras, se o professor inserir em sua prática docente o uso de uma ferramenta tecnológica como o GeoGebra, o ensino poderá ser mais significativo e, assim, maiores possibilidades de ocorrer também a aprendizagem do aluno.

Por fim, o presente trabalho faz o convite aos professores de matemática a inserir o uso de tecnologias digitais de informação e comunicação em sua docência, em especial, o *software* GeoGebra.

REFERÊNCIAS

- BITTAR, M. Informática na educação e formação de professores no Brasil. *Série-Estudos-Periódico do Programa de Pós-Graduação em Educação da UCDB*, 2000. Citado na página 12.
- BRANDÃO, C. R.; THIOLENT, M. Notas para o debate sobre pesquisa ação. *Repensando a pesquisa participante*, p. 82–103, 1984. Citado na página 77.
- DANTAS, S. C. Curso: O geogebra. p. 1–4, 2018. Citado na página 16.
- DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. *São Paulo: Ática*, v. 2, 2017. Citado na página 53.
- FAERMANN, L. A. A pesquisa participante: suas contribuições no âmbito das ciências sociais. *Revista Ciências Humanas*, v. 7, n. 1, 2014. Citado na página 77.
- FONSECA, J. J. S. da. *Apostila de metodologia da pesquisa científica*. [S.l.]: João José Saraiva da Fonseca, 2002. Citado na página 77.
- GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. *Métodos de pesquisa*. [S.l.]: Plageder, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 77, 78 e 79.
- LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. *Em Aberto*, v. 5, n. 31, 2011. Citado na página 76.
- MORAN, J. M. Ensino e aprendizagem inovadores com apoio de novas tecnologias. *MORAN, José Manuel; BEHRENS, Marilda Aparecida; MASETTO, Marcos T. Novas tecnologias e mediação pedagógica. Campinas: Papirus*, 2013. Citado na página 13.
- NASCIMENTO, M. R. L. d. *A inserção das tecnologias nas escolas e a cultura escolar*. 2012. Disponível em: <<http://www.ffp.uerj.br/arquivos/dedu/monografias/mrln.pdf>>, Acesso em: 30 de jun. de 2021. Citado na página 12.
- OLIVEIRA, G. B. de. Estudo do escalonamento de sistemas lineares através do software geogebra. Uberaba, 2019. Citado na página 55.
- PARANÁ, G. D. Diretrizes curriculares da educação básica matemática. 2008. Citado na página 13.
- POUPART JEAN E DESLAURIERS, J.-P. e. G. L.-H. e. L. ‘e. r. A. e. M. R. e. P. ’A. l. A pesquisa qualitativa. *Enfoques epistemológicos e metodológicos*, v. 2, 2008. Citado na página 76.
- SANTANA, E. G. Sistemas lineares 3 x 3: uma visão geométrica com o geogebra 3d. Salvador -BA, 2015. Citado na página 55.
- SANTOS, L. C. dos. Uma ferramenta computacional para o cálculo e treinamento do método de escalonamento de gauss. Macapá, 2016. Citado na página 55.
- TECMEM. *Sobre o Geogebra*. 2019. Disponível em: <<https://www.pucsp.br/geogebra/sp/geogebra.html>>. Acessado em 30 de jun. 2021. Citado na página 15.

APÊNDICE

APÊNDICE A

Inscrição Para o Minicurso

“O uso da planilha de cálculo do software GeoGebra no ensino de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares.”

Minicurso: O uso da planilha de cálculo do software GeoGebra no ensino de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares (via plataforma Google Meet).

Coordenador: Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves.

Membros:

Prof^a. Dra. Luciana Mafalda Elias de Assis,

Prof. Welington Ferreira da Silva.

Cronograma:

Dia: 06/02/21- 13:30 à 16:30

Instalação do software GeoGebra versão 5 Clássico;

Introdução ao software, conhecendo menus e ferramentas;

Conhecendo as janelas de visualização e visualização 3D, janela CAS e Planilha de Cálculo;

Realização de algumas construções.

Dia 13/02/21- 13:30 à 16:30

Criação de matrizes na Planilha de Cálculo;

Operações com Matrizes utilizando as células da Planilha e o Campo de entrada;

Sistemas Lineares na Janela CAS;

Discussão de Sistemas Lineares relacionando Matrizes e visualização de retas e planos.

Carga Horária: 8 horas.

Total de Participantes: 40.

Dúvidas: welington.silva@unemat.br

1- Nome completo:

2- E-mail:

3- CPF:

4- Grau de Escolaridade:

5- Conhece o software GeoGebra?

Sim, mas não utilizo. Sim, já utilizo em minhas aulas Não conheço.

6- Possui smartphone ou computador? Qual?

Sim, só smartphone Sim, só computador Sim, ambos Não

7-Reside em qual cidade/estado?

APÊNDICE B

Feedback do Minicurso!

Olá a todos, esse feedback do minicurso intitulado "O uso da planilha de cálculo do software GeoGebra no ensino de Matrizes, Determinante e Sistemas Lineares". A execução dessa atividade é fundamental para o Professor Welington Ferreira da Silva, pois suas respostas serão usadas na dissertação de mestrado, por favor serem sinceros.

A certificação será encaminhada após a resposta do feedback, caso não responda, a certificação não será disponibilizada. Agradecemos pela participação de todos e pela colaboração.

- 1- Nome completo:
- 2- E-mail:
- 3- CPF:
- 4- Quais dia do minicurso você participou?
 Apenas no 1º dia (06/02/2021) Apenas no 2º dia (13/02/2021) Nos dois dias (06 e 13/02/2021)
- 5- O que achou da escolha do tema do minicurso?(Marque apenas uma opção)
 Ruim Moderado Satisfatório Muito Bom Excelente
- 6- O que achou do modelo do minicurso (aula online)?(Marque apenas uma opção)
 Ruim Moderado Satisfatório Muito Bom Excelente
- 7- Sobre o conteúdo apresentado no minicurso, diga o nível de satisfação?(Marque apenas uma opção)
 Ruim Moderado Satisfatório Muito Bom Excelente
- 8- Cite 3 ou mais pontos negativos do minicurso.
- 9- Cite 3 ou mais pontos positivos do minicurso.
- 10- Quais aspectos deste minicurso foram mais úteis ou valiosos?
- 11- Como você melhoraria este minicurso?

12- De seu feedback geral do minicurso.

13- O minicurso lhe instigou a utilização do GeoGebra em suas aulas?

Sim Não