Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

# O conjunto dos números complexos
# Uma proposta didática

**Gilmar Francisco de Lara**
Mestrado Profissional em Matemática: Profmat/SBM

Orientador: **Prof. Dr. André Krindges**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Outubro/2021

# O conjunto dos números complexos
# Uma proposta didática

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Gilmar Francisco de Lara e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 20 de outubro de 2021.

Prof. Dr. André Krindges
Orientador

**Banca examinadora:**

Prof. Dr. André Krindges
Prof. Dr. Edgar Nascimento
Prof. Dr. Reinaldo de Marchi

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – Profmat, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

**Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.**

L318c Lara, Gilmar Francisco de.
O conjunto dos números complexos : Uma proposta didática / Gilmar Francisco de Lara. -- 2021
xii, 48 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Andre Krindges.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2021.
Inclui bibliografia.

1. História da matemática. 2. equações cúbicas. 3. sugestões de atividades. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO**

**PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

**AV. FERNANDO CORRÊA DA COSTA, 2367 - BOA ESPERANÇA - 78.060-900 - CUIABÁ/MT**

**FONE: (65) 3615-8576 – E-MAIL: PROFMAT@UFMT.BR**

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

Título**:** O conjunto dos números complexos: uma proposta didática

Autor: mestrando Gilmar Francisco de Lara

Dissertação defendida e aprovada em 20 de outubro de 2021.

**COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA**

1. **Doutor Andre Krindges** (Presidente Banca/orientador)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

2. **Doutor Edgar Nascimento** (Membro Externo)

Instituição: Instituto Federal de Mato Grosso

3. **Doutor Reinaldo de Marchi** (Membro Interno)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

**Cuiabá, 20/8/2021**.

Documento assinado eletronicamente por **ANDRE KRINDGES**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 20/10/2021, às 17:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **REINALDO DE MARCHI**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 20/10/2021, às 17:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **EDGAR NASCIMENTO**, **Usuário Externo**, em 20/10/2021, às 17:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4049643** e o código CRC **041C20FA**.

**Referência:** Processo nº 23108.090605/2021-14 SEI nº 4049643

*Às minhas filhas: Izabelly, Thatyelly e Maryelly.*

# Agradecimentos

À Deus, a Verdadeira Fonte de Sabedoria, que me possibilitou esta conquista.

A meus pais, Onilto e Terezinha, pelo quanto batalharam em sua simplicidade e me incentivaram a não desistir.

A meus irmãos, Vilmar e Cilda, que me enchem de orgulho por existirem.

A minha esposa Leandra, minha companheira das horas felizes e fortaleza nas horas difíceis.

A minhas filhas Izabelly, Thatyelly e Maryelly, por serem minha motivação para enfrentar todas as batalhas e permanecer em pé.

A meu orientador, Dr. André Krindges, que se dispôs a caminhar comigo esta parte da jornada.

A todos meus professores, desde a primeira professora que tive, Sra. Vanilda, até os professores deste curso, por serem exemplos a serem seguidos.

Muito obrigado a todos.

“Para ser sábio, é preciso primeiro temer a Deus, o SENHOR. Os tolos desprezam a sabedoria e não querem aprender.” NTLH, Prov. 1:7

.

# Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma abordagem histórica para a construção do conjunto dos números complexos, a fim de que os alunos da educação básica possam compreender de forma eficaz as operações e propriedades deste conjunto. Trazemos também o conceito atual de números complexos, bem como suas propriedades e representações, demonstradas e exemplificadas. Além disso, criamos dois modelos de atividades dirigidas, para que professores do ensino médio possam aplicar em sala e, com ajuda de softwares como o Geogebra, construir com os alunos a ideia de números complexos e suas operações básicas, bem como elas foram concebidas a séculos atrás.

**Palavras chave:** História da matemática; equações cúbicas; sugestões de atividades.

# Abstract

In this work, we present a historical approach to the construction of the complex number set, so that basic education students can effectively understand the operations and properties of this set. We also bring the current concept of complex numbers, as well as their properties and representations, demonstrated and exemplified. In addition, we created two models of directed activities, so that high school teachers can apply in the classroom and, with the help of software such as Geogebra, build with the students the idea of complex numbers, as well as their basic operations, as they were conceived centuries ago.

**Keywords:** History of mathematics; cubic equations; suggestions of activities.

# Sumário

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# Introdução

> “O número imaginário é um ótimo e maravilhoso recurso do espírito divino, quase um anfíbio entre ser e não ser.”
> (Gottfried Wilhelm Leibniz)

O estudo dos números complexos na educação básica geralmente se dá por volta do terceiro ano do ensino médio. Em geral, os livros didáticos os apresentam de maneira algébrica, apenas mencionando nomes de matemáticos que participaram de seu desenvolvimento. Isso pode tornar seu estudo maçante e desmotivador, por se tratar de algo aparentemente muito distante da realidade, uma vez que sua aplicação não se dá de forma tão imediata como é o caso dos números reais.

Neste trabalho abordaremos os principais fatos históricos que levaram a construção do conjunto dos números complexos. Entre eles, destacaremos o papel de matemáticos como Cardano, que pela primeira vez pensou na possibilidade de se operar com raízes de números negativos; Tartaglia, que desenvolveu técnicas para determinar as soluções de equações cúbicas (técnicas que foram publicadas por Cardano); e Bombelli, que ao utilizar a técnica de Cardano/Tartaglia, percebeu a existência real e operacional da raiz quadrada de números negativos.

Abordaremos também algumas aplicações básicas, de utilização viável para os alunos em seu primeiro contato com os números complexos, como rotações e translações de pontos no plano cartesiano, através das operações básicas de somo e multiplicação. Como produto deste trabalho, faremos sugestões de planos de aula a serem trabalhados com os alunos a fim de que possam desenvolver a construção dos números complexos bem como compreender suas propriedades operacionais.

# Capítulo 1

# A história

Neste capítulo estaremos abordando fatos históricos nos quais os números complexos foram concebidos, por volta de meados do século XVI. Entender o surgimento de tal conjunto torna mais fácil a abordagem do assunto em sala de aula, pois quando se anuncia o estudo dos números complexos na educação básica, inevitavelmente corremos o risco de ouvir perguntas do tipo: "Quem foi que inventou esse negócio?" Ou talvez "O que a pessoa estava fazendo para inventar uma coisa dessas?".

Diante dessas situações, de acordo com Figueiredo (2008), muitos livros didáticos apelam para as equações de segundo grau. Afinal, o primeiro contato que temos com a necessidade de calcular as raízes quadradas de número negativo se dá com a famosa Fórmula de Bhaskara, que segundo Rodrigues e Silva (2004) é atribuída a Bhaskara Akaria, um matemático indiano que viveu por volta do século XII. No entanto, há controvérsias, e de acordo com Vale (2013) as primeiras fórmulas matemáticas criadas surgiram cerca de 400 anos mais tarde, sendo que em sua época, usavam-se regras para resolução de equações. Independentemente de quem a tenha descoberto, a Fórmula de Bhaskara diz que dada a equação geral $ax^2 + bx + c = 0$ temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \Rightarrow \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \Rightarrow \\ 4a^2x^2 + 4abx + b^2 &= b^2 - 4ac \Rightarrow \\ (2ax)^2 + 2.2ax.b + b^2 &= b^2 - 4ac \Rightarrow \\ (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac \qquad (1.1) \end{aligned}$$

Na equação (1.1), se temos $b^2 - 4ac \geq 0$, podemos continuar os cálculos e temos:

$$\begin{aligned} 2ax + b &= \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow \\ 2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Tomando $\Delta = b^2 - 4ac$, quando temos $\Delta < 0$ dizemos que a equação de segundo grau não têm soluções reais, pois, nas palavras do próprio Bhaskara, "Não há raiz quadrada de um negativo; pois ele não é um quadrado."(Milies, 2018).

Acontece que, segundo Figueiredo (2008), as descobertas matemáticas sempre foram motivadas por problemas práticos. Equações de segundo grau são usadas geralmente para modelar situações envolvendo áreas (quando se trata de geometria plana), ou equações do círculo (tratando-se de geometria analítica). Nessas situações podemos facilmente encontrar equações de segundo grau sem soluções reais. Uma situação como essa aparece em Dutra et al. (2017) no seguinte exercício: "Estude a posição da reta $s$ relativa à circunferência $\lambda$ no caso a seguir: $s : x - y - 2 = 0$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 8x + 4y + 18 = 0$". Uma das formas de resolver tal questão é montar o sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} s : x - y - 2 &= 0 \ (I) \\ \lambda : x^2 + y^2 - 8x + 4y + 18 &= 0 \ (II) \end{cases} \tag{1.2}$$

De (1.2)(I) temos $y = x - 2$. Substituindo em (1.2)(II), temos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8x + 4y + 18 &= 0 \\ x^2 + (x - 2)^2 - 8x + 4(x - 2) + 18 &= 0 \\ x^2 + x^2 - 4x + 4 - 8x + 4x - 8 + 18 &= 0 \\ 2x^2 - 8x + 14 &= 0 \end{aligned}$$

Sendo $\Delta = (-8)^2 - 4.2.14 = -48 < 0$, sabemos que o sistema de equações não tem soluções reais. Se analisarmos graficamente, percebemos que de fato não ha intersecções entre $s$ e $\lambda$:

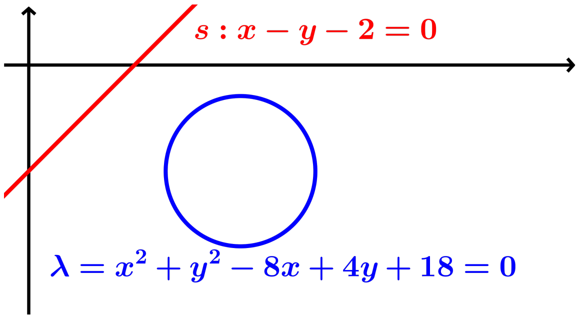



Figura 1.1: Representação gráfica da reta $s$ e da circunferência $\lambda$.

Na figura (1.1) fica evidente a inexistência de soluções, e nos damos por satisfeitos com isso! Desta maneira, não se tem aparentes motivos para esforços em determinar uma raiz quadrada para $-48$, uma vez que sua aparente inexistência cumpre perfeitamente o papel de mostrar a impossibilidade de resolver a questão.

## 1.1 Números complexos: de onde vêm?

### 1.1.1 As experiências de Cardano.

Embora, segundo Castelo (2013), os registros históricos acusem que por volta de 1700 a.C. os escribas babilônicos já se ocupavam em resolver equações, foi somente por volta do século XVI que este assunto amadureceu a ponto de que ideias surgissem a fim de solucionar o problema das raízes quadradas de números negativos.

O médico e matemático Girolamo Cardano (1501 – 1576), de acordo com Milies (2018), ao tentar dividir uma corda de 10m em dois pedaços, cujo produto fosse 40, percebeu que tais números não existiam, pois o sistema se reduz a uma equação de segundo grau com $\Delta < 0$. Veja:

$$\begin{cases} x + y & = & 10 & (I) \\ xy & = & 40 & (II) \end{cases} \tag{1.3}$$

Isolando $y$ na equação (1.3)(I), temos:

$$y \quad = \quad 10 - x$$

Substituindo na equação (1.3)(II):

$$\begin{aligned} x(10-x) &= 40 \Rightarrow \\ 10x - x^2 &= 40 \Rightarrow \\ x^2 - 10x + 40 &= 0 \end{aligned}$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} \Delta &= (-10)^2 - 4.1.40 \\ \Delta &= 100 - 160 \\ \Delta &= -60 \end{aligned}$$

Então, Cardano resolveu supor que $\sqrt{-60}$ existisse, por pura curiosidade:

$$\begin{aligned} x &= \frac{10 \pm \sqrt{-60}}{2.1} \\ x &= \frac{10 \pm \sqrt{4.(-15)}}{2} \\ x &= \frac{10 \pm 2\sqrt{-15}}{2} \\ x &= 5 \pm \sqrt{-15} \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 + \sqrt{-15} \Rightarrow \\ y &= 10 - (5 + \sqrt{-15}) \Rightarrow \\ y &= 5 - \sqrt{-15} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x_2 &= 5 - \sqrt{-15} \Rightarrow \\ y &= 10 - (5 - \sqrt{-15}) \Rightarrow \\ y &= 5 + \sqrt{-15} \end{aligned}$$

Apesar desses números aparentemente não fazerem nenhum sentido para Cardano, ele resolveu continuar os cálculos seguindo as mesmas regras que sempre utilizou com os números reais. Para tanto considerou que $-\sqrt{-15}$ e $\sqrt{-15}$ eram números opostos e, portanto, somavam 0. Considerou também que $(\sqrt{-15})^2 = -15$. Logo,

$$x + y \;=\; (5+\sqrt{-15}) + (5-\sqrt{-15}) \;=\; 10$$
$$xy \;=\; (5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) \;=\; 5^2 - (\sqrt{-15})^2 \;=\; 25-(-15) \;=\; 40$$

Embora satisfizessem as especificações, estas soluções não tinham o menor sentido prático e, portanto, foram deixadas de lado.

### 1.1.2 O desafio de Tartaglia.

Mais tarde, de acordo com Oliveira (2015) outro ilustre matemático da época, Nicolo Tartaglia, foi desafiado por Antônio Maria Fior a resolver alguns exercícios selecionados por ele. Como a maior parte dos exercícios eram relacionados às equações cúbicas, Tartáglia se dedicou a encontrar uma fórmula geral para resolução das mesmas. Seu método foi compartilhado com Cardano, depois de muita insistência do mesmo, que acabou aperfeiçoando-o e publicando-o em seu livro *Ars Magna* em 1545, motivo pelo qual até os dias de hoje o método é conhecido como Método de Cardano.

Limitados pela linguagem matemática que até então não era desenvolvida e pelos meios de comunicação da época, Tartáglia e Cardano trocaram mensagens através de cartas, que por meio de poemas Tartáglia passou a Cardano suas técnicas de cálculo. Em linguagem atual, o que descobriram se baseia nos seguintes argumentos:

Dada a equação cúbica

$$jx^3 + kx^2 + lx + m \;=\; 0 \tag{1.4}$$

podemos colocar $j$ em evidência, $j(x^3 + \frac{k}{j}x^2 + \frac{l}{j}x + \frac{m}{j}) = 0$, e reescrevê-la na forma

$$j(x^3 + ax^2 + bx + c) \;=\; 0.$$

Assim, as soluções da equação (1.4) são as mesmas da equação

$$x^3 + ax^2 + bx + c \;=\; 0 \tag{1.5}$$

Na equação (1.5) podemos "completar cubo", eliminando o termo de grau 2:

$$\begin{aligned}
x^3+3(\frac{a}{3})x^2+3(\frac{a}{3})^2x-3(\frac{a}{3})^2x+(\frac{a}{3})^3-(\frac{a}{3})^3+bx+c &= 0 \Rightarrow \\
x^3+3(\frac{a}{3})x^2+3(\frac{a}{3})^2x+(\frac{a}{3})^3+(b-\frac{a^2}{3})x+(c-\frac{a^3}{27}) &= 0 \Rightarrow \\
(x+\frac{a}{3})^3+(b-\frac{a^2}{3})x+(c-\frac{a^3}{27}) &= 0 \Rightarrow \\
(x+\frac{a}{3})^3+(b-\frac{a^2}{3})x+(c-\frac{ab}{3}+\frac{ab}{3}+2\frac{a^3}{27}-3\frac{a^3}{27}) &= 0 \Rightarrow \\
(x+\frac{a}{3})^3+(b-\frac{a^2}{3})x+\frac{a}{3}(b-\frac{a^2}{3})+(c-\frac{ab}{3}+2\frac{a^3}{27}) &= 0 \Rightarrow \\
(x+\frac{a}{3})^3+(b-\frac{a^2}{3})(x+\frac{a}{3})+(c-\frac{ab}{3}+2(\frac{a}{3})^3) &= 0
\end{aligned}$$

Tomando $p=\frac{a^2}{3}-b$, $q=\frac{ab}{3}-2(\frac{a}{3})^3-c$ e $y=x+\frac{a}{3}$ temos:

$$y^3 = py+q \tag{1.6}$$

Assim, a partir das soluções de (1.6), pode-se obter as soluções de (1.4), fazendo $x=y-\frac{a}{3}$.

Fazendo uma mudança de variável em (1.6) tome $y=u+v$, com $u\neq 0$ ou $v\neq 0$. Daí, temos

$$\begin{aligned}
(u+v)^3 &= p(u+v)+q \\
u^3+3u^2v+3uv^2+v^3 &= p(u+v)+q \\
u^3+v^3+3uv(u+v) &= p(u+v)+q \\
u^3+v^3-q+(3uv-p)(u+v) &= 0 \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Evidentemente, se encontrarmos dois números $u$ e $v$ de forma que $u^3+v^3=q$ e $3uv=p$, estes satisfazem (1.7) e, portanto, $u+v=y$ é solução de (1.6). Logo, uma das soluções de (1.6) é dado pelo sistema

$$\begin{cases} u^3+v^3 = q \quad (I) \\ 3uv = p \quad (II) \end{cases} \tag{1.8}$$

Para resolver (1.8), isole $v$ em (1.8)(II) e substitua em (1.8)(I):

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{p}{3u} \Rightarrow \\
u^3 + (\frac{p}{3u})^3 &= q \Rightarrow \\
u^6 + (\frac{p}{3})^3 &= qu^3 \Rightarrow \\
u^6 - qu^3 + (\frac{p^3}{27}) &= 0
\end{aligned}
$$

Tomando $u^3 = w$, temos:

$$
\begin{aligned}
w^2 - qw + (\frac{p^3}{27}) &= 0 \Rightarrow \\
w &= \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4.1.(\frac{p^3}{27})}}{2} \Rightarrow \\
w &= \frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}
\end{aligned}
$$

Logo, como $u^3 = w \Rightarrow u = \sqrt[3]{w}$, temos

$$
u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}}
$$

De (1.8)(I) temos:

$$
\begin{aligned}
w + v^3 &= q \Rightarrow \\
v &= \sqrt[3]{q - w} \Rightarrow \\
v &= \sqrt[3]{q - (\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3})} \\
v &= \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
y &= u + v \\
&= \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}}
\end{aligned}
$$

é solução de (1.6) e, portanto,

$$\begin{aligned} x &= y - \frac{a}{3} \\ &= \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}} - \frac{a}{3} \end{aligned}$$

é solução de (1.4).

Tudo parecia perfeito. Por exemplo, dada a equação:

$$2x^3 + 18x^2 + 6x - 234 = 0 \tag{1.9}$$

temos:

$$\begin{aligned} 2(x^3 + 9x^2 + 3x - 117) &= 0 \Rightarrow \\ p &= \frac{(9)^2}{3} - (3) = 27 - 3 = 24 \\ q &= \frac{9.3}{3} - 2\left(\frac{9}{3}\right)^3 - (-117) = 9 - 54 + 117 = 72 \end{aligned}$$

Assim, uma das soluções de (1.9) é dada por

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{a}{3} \\ &= \sqrt[3]{\frac{72}{2} + \sqrt{\left(\frac{72}{2}\right)^2 - \left(\frac{24}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{72}{2} - \sqrt{\left(\frac{72}{2}\right)^2 - \left(\frac{24}{3}\right)^3}} - \frac{9}{3} \\ &= \sqrt[3]{36 + \sqrt{36^2 - 8^3}} + \sqrt[3]{36 - \sqrt{36^2 - 8^3}} - 3 \\ &= \sqrt[3]{36 + 28} + \sqrt[3]{36 - 28} - 3 \\ &= 4 + 2 - 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

### 1.1.3 A descoberta de Bombelli.

Segundo Oliveira (2015) e Figueiredo (2008), por volta de 1572, um grande admirador das obras de Cardano, seu discípulo Rafael Bombelli, publicou em seu livro *l'Algebra* um capítulo no qual se dedicava a aplicar a fórmula de Cardano a seguinte equação:

$$x^3 \;=\; 15x + 4 \tag{1.10}$$

Note que temos $p = 15$ e $q = 4$. Assim, ao aplicar o método de Cardano, Bombelli chega a uma situação até então inusitada. Veja:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} \\ x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{2^2 - 5^3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{2^2 - 5^3}} \\ x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \qquad (1.11) \end{aligned}$$

Diante dessa situação, Bombelli se via com duas opções: admitir que a equação não tivesse solução real ou de alguma maneira encontrar uma raiz quadrada para $-121$. Acontece que analisando graficamente a equação, através dos gráficos das funções $y = x^3$ e $y = 15x + 4$, percebe-se claramente que existe ao menos uma solução real, já que a função $y = x^3$ cresce muito mais rapidamente do que a $y = 15x + 4$, como mostra a figura a seguir:

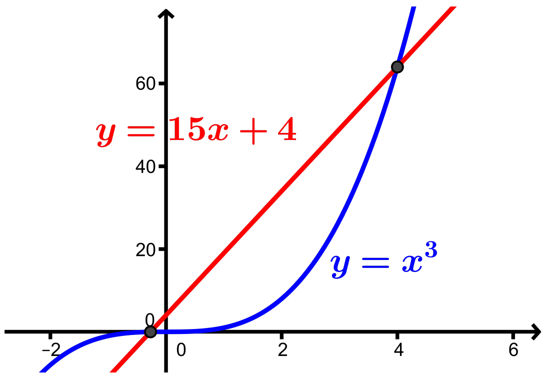



Figura 1.2: Gráfico das funções $y = x^3$ e $y = 15x + 4$.

Apesar de não contar com este recurso em sua época (os metodos de representações gráficas de funções foram desenvolvidos apenas no seculo XVII), Bombelli descobriu por meio de testes que $x = 4$ satisfaz (1.10). Sabendo da existência de uma solução, segundo Milies (2018), Bombelli considerou que o problema se resolveria ao calcular $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$. Acreditando que a raiz cúbica de $2 + \sqrt{-121}$ fosse algum número deste mesmo tipo, ou seja, na forma $r + \sqrt{s}$, era razoável esperar que a raiz cúbica de

$2-\sqrt{-121}$ fosse $r-\sqrt{s}$. De maneira direta, Bombelli constatou que 4 era uma solução de (1.10). Assim, de (1.11)

$$
\begin{aligned}
4 &= (r+\sqrt{s})+(r-\sqrt{s}) \Rightarrow \\
4 &= 2r \Rightarrow \\
r &= 2 \Rightarrow \\
(2+\sqrt{s})^3 &= 2+11\sqrt{-1} \Rightarrow \\
(2+\sqrt{s})(2+\sqrt{s})(2+\sqrt{s}) &= 2+\sqrt{-121} \Rightarrow \\
\left[4+2\sqrt{s}+2\sqrt{s}+(\sqrt{s})^2\right](2+s\sqrt{-1}) &= 2+\sqrt{-121} \Rightarrow \\
\left[4+4\sqrt{s}+s\right](2+\sqrt{s}) &= 2+\sqrt{-121} \Rightarrow \\
\left[(4+s)+4\sqrt{s}\right](2+\sqrt{s}) &= 2+\sqrt{-121} \Rightarrow \\
(8+2s)+(4+s)\sqrt{s}+8\sqrt{s}+4(\sqrt{s})^2 &= 2+\sqrt{-121} \Rightarrow \\
(8+6s)+(12+s)\sqrt{s} &= 2+\sqrt{-121} \Rightarrow \\
(8+6s)+\sqrt{s(12+s)^2} &= 2+\sqrt{-121} \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
8+6s = 2 \quad (I) \\
s(12+s)^2 = -121 \quad (II)
\end{cases} \tag{1.12}
$$

De (1.12)(I) temos que $s=-1$. Testando, percebemos que $s=-1$ satisfaz também a (1.12)(II). E, de fato,

$$
\begin{aligned}
(2+\sqrt{-1})^3 &= (2+\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1}) \\
&= \left[4+2\sqrt{-1}+2\sqrt{-1}+(\sqrt{-1})^2\right](2+\sqrt{-1}) \\
&= (4+4\sqrt{-1}-1)(2+\sqrt{-1}) \\
&= (3+4\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1}) \\
&= 6+3\sqrt{-1}+8\sqrt{-1}+4(\sqrt{-1})^2 \\
&= 6+11\sqrt{-1}+4(-1) \\
&= 2+\sqrt{-121}
\end{aligned}
$$

E, analogamente,

$$
\begin{aligned}
(2+\sqrt{-1})^3 &= (2-\sqrt{-1})(2-\sqrt{-1})(2-\sqrt{-1}) \\
&= \left[4-2\sqrt{-1}-2\sqrt{-1}+(\sqrt{-1})^2\right](2+\sqrt{-1}) \\
&= (4-4\sqrt{-1}-1)(2-\sqrt{-1}) \\
&= (3-4\sqrt{-1})(2-\sqrt{-1}) \\
&= 6-3\sqrt{-1}+8\sqrt{-1}+4(\sqrt{-1})^2 \\
&= 6-11\sqrt{-1}+4(-1) \\
&= 2-\sqrt{-121}
\end{aligned}
$$

Logo, em (1.11) temos

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \Rightarrow \\
x &= (2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1}) \Rightarrow \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

conforme o esperado.

Assim, Bombelli começou a admitir que, embora esses novos números não fizessem o mesmo sentido que os antigos, admitir a existencia de $\sqrt{-1}$ funcionava muito bem para cálculos.

Com o passar do tempo, segundo Milies (2018) e também Oliveira (2015), grandes personalidades matemáticas contribuíram para a formalização do que hoje conhecemos como números complexos. Albert Girard (1595-1632) foi o primeiro a utilizar $\sqrt{-1}$ como um símbolo em 1629, representando por exemplo $\sqrt{-4}$ por $2\sqrt{-1}$. René Descartes (1596-1650) instituiu em 1637 os termos *real* e *imaginário*. Leonhard Euler (1707-1783) em 1777 usou pela primeira vez o símbolo $i$ para $\sqrt{-1}$, que foi amplamente difundido por Carl Frederico Gauss (1777-1855). Já no século XVII, Caspar Wessel (1745-1818), Jean-Robert Ar-gand (1768-1822) e Carl Friederich Gauss (1777-1855) propuseram, cada uma à sua maneira e independentemente, a interpretação geométrica dos números complexos, sendo que apenas este último teve maior repercussão e reconhecimento.

# Capítulo 2

# O conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$)

Neste capítulo abordaremos a definição do conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$) da maneira que temos hoje e que, geralmente, é abordada nos livros didáticos, com suas principais propriedades algébricas e operacionais, juntamente com suas respectivas demonstrações.

## 2.1 Definição

A ideia que surgiu quando Bombelli tentava resolver as equações cúbicas pelo método de Cardano amadureceu e hoje, quase cinco séculos depois, os números complexos são apresentados por Dutra et al. (2017) da seguinte maneira:

**Definição 1** *O Conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$) é formado pelos números do tipo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$.*

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi, \text{ com } a, b \in (\mathbb{R})\}$$

Em $z = a+bi$, $a$ é chamado de *parte real* (*Re(z)*) e $b$ chamado de *parte imaginária* (*Im(z)*) do número complexo. Assim, quando temos $b = 0$ chamamos $z$ de *número real*. Se $a = 0$, $z$ é chamado de *número imaginário puro*.

Outro termo também muito utilizado durante os estudos de números complexos é *conjugado*:

**Definição 2** *Dado o número complexo $z = a+bi$, chamamos de conjugado de $z$ o número complexo $\overline{z} = a - bi$*

Por exemplo:

- O conjugado de $z = 3 + 2i$ é $\overline{z} = 3 - 2i$;
- O conjugado de $z = 3 - i$ é $\overline{z} = 3 + i$;
- O conjugado de $z = 2i$ é $\overline{z} = -2i$;
- O conjugado de $z = 5$ é $\overline{z} = 5$;

## 2.2 Operações com números complexos

Assim como Cardano e outros pioneiros faziam, as operações com números complexos hoje são feitas de maneira muito parecida com as que fazemos com os números reais. No entanto, não devemos nos esquecer de que $i = \sqrt{-1}$, ou equivalentemente, $i^2 = -1$.

### 2.2.1 Adição

A adição de números complexos consiste em uma espécie de simplificação, na qual operamos a parte real e a parte imaginária do número separadamente. Dados dois números complexos $u = a + bi$ e $v = c + di$, a soma $u + v$ é dada por:

$$\begin{aligned} u + v &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \end{aligned}$$

Ex:

$$\begin{aligned} (3 + 2i) + (4 - 3i) &= (3 + 4) + (2 + (-3))i \\ &= 7 - i \end{aligned}$$

### 2.2.2 Subtração

A subtração é feita de forma muito semelhante à adição. Dados dois números complexos $u = a + bi$ e $v = c + di$, a diferença $u - v$ é dada por:

$$\begin{aligned} u - v &= (a + bi) - (c + di) \\ &= (a - c) + (b - d)i \end{aligned}$$

Ex:

$$\begin{aligned} (4 + 1i) - (-2 + 5i) &= (4 - (-2)) + (1 - 5)i \\ &= 6 - 4i \end{aligned}$$

### 2.2.3 Multiplicação

A multiplicação de números complexos é feita por meio de uma distributividade de um número em relação a outro. Dados os números complexos $u = a + bi$ e $v = c + di$, o produto $u \cdot v$ é dada por:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Ex:

$$\begin{aligned} (4 + 1i) \cdot (-2 + 5i) &= 4 \cdot (-2) + 4 \cdot 5i + (-2)i + 5i^2 \\ &= -8 + 20i - 2i + 5 \cdot (-1) \\ &= -13 + 18i \end{aligned}$$

Em particular:

- Se $v = \overline{u}$, então temos:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + abi - abi - (bi)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= a^2 - b^2(-1) \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

- Se $v = c + 0i$, então temos:

$$
\begin{aligned}
(a+bi)\cdot(c+0i) &= ac + a0i + bci + (0bi^2) \\
&= ca + cbi
\end{aligned}
$$

Esta operação tambem é conhecida como *multiplicação de escalar por complexo.*

### 2.2.4 Divisão

A divisão de dois números complexos é feita de maneira muito semelhante ao que chamamos de racionalização de denominadores no conjunto dos números reais: usando a forma de fração para divisão, multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado deste último.

Assim, dados os números complexos $u = a+bi$ e $v = c+di$, o quociente $\dfrac{u}{v}$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
\frac{u}{v} &= \frac{a+bi}{c+di} \\
&= \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}
\end{aligned}
$$

Ex:

$$
\begin{aligned}
\frac{2+3i}{1+i} &= \frac{2+3i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} \\
&= \frac{5+i}{2} \\
&= \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i
\end{aligned}
$$

## 2.3 Propriedades

No conjunto dos números complexos, munido com as operações citadas no item anterior, dados $u = a + bi$, $v = c + di$ e $w = e + fi$ quaisquer, temos as seguintes propriedades operacionais:

- Adição:

  - *Comutativa*: $\forall\ u, v \in \mathbb{C}$, temos $u + v = v + u$.

$$\begin{aligned} u + v &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \\ &= (c + a) + (d + b)i \\ &= v + u \end{aligned}$$

Ex:

$$\begin{aligned} * \ (3 + 2i) + (7 - 4i) &= (3 + 7) + (2 + (-4))i \\ &= 10 - 2i \\ * \ (7 - 4i) + (3 + 2i) &= (7 + 3) + ((-4) + 2)i \\ &= 10 - 2i \end{aligned}$$

  - *Associativa*: $\forall\ u, v, w \in \mathbb{C}$, temos $u + (v + w) = (u + v) + w$.

$$\begin{aligned} u + (v + w) &= (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)] \\ &= (a + bi) + [(c + e) + (d + f)i] \\ &= [a + (c + e)] + [b + (d + f)]\, i \\ &= [(a + c) + e] + [(b + d) + f]\, i \\ &= [(a + c) + (b + d)]\, i + (e + f)i \\ &= [(a + b)i + (c + d)i] + (e + f)i \\ &= (u + v) + w \end{aligned}$$

Ex:

$$\begin{aligned} * \ [(3+2i)+(7-4i)]+(-1+5i) &= [(3+7)+(2+(-4))i]+(-1+5i) \\ &= (10-2i)+(-1+5i) \\ &= (10+(-1))+(-2+5) \\ &= 9+3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \ (3+2i))+[(7-4i+(-1+5i)] &= (3+2i)+[(7+(-1))+((-4)+5)i] \\ &= (3+2i)+(6+1i) \\ &= (3+6)+(2+1)i \\ &= 9+3i \end{aligned}$$

– *Elemento neutro*: $\forall\ u \in \mathbb{C},\ \exists\ 0 = 0+0i \in\ \mathbb{C} /\ u+0 = u$

$$\begin{aligned} u+0 &= (a+bi)+(0+0i) \\ &= (a+0)+(b+0)i \\ &= a+bi \\ &= u \end{aligned}$$

Ex:

$$\begin{aligned} * \ (3+2i)+(0+0i) &= (3+0)+(2+0)i \\ &= 3+2i \end{aligned}$$

– *Elemento Oposto*: $\forall\ u = a+bi \in\ \mathbb{C},\ \exists -u = -a-bi \in\ \mathbb{C} /\ u+(-u) = 0$

$$\begin{aligned} u+(-u) &= (a+bi)+(-a-bi) \\ &= (a+(-a))+(b+(-b)) \\ &= 0+0i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ex:

Dado $u = 3 + 2i$, temos $-u = -3 - 2i$. Logo,

$$\begin{aligned} * \ (3+2i) + (-3-2i) &= (3+(-3)) + (2+(-2))i \\ &= 0 + 0i \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Multiplicação:
  - *Comutatividade*: $\forall\ u, v \in \mathbb{C}$, temos $uv = vu$.

$$\begin{aligned} uv &= (a+bi)(c+di) \\ &= (ac-bd) + (ab+bc)i \\ &= (ca-db) + (cb+da)i \\ &= (c+di)(a+bi) \\ &= vu \end{aligned}$$

Ex:

$$\begin{aligned} * \ (3+2i).(7-4i) &= (3.7 - 2.(-4)) + (3.(-4) + 2.7)i \\ &= (21+8) + (-12+14) \\ &= 29 + 2i \\ * \ (7-4i).(3+2i) &= (7.3 - (-4).2) + (7.2 + (-4).3)i \\ &= (21 - (-8)) + (14 + (-12))i \\ &= 29 + 2i \end{aligned}$$

– *Associativa*: $\forall\ u, v, w \in\ \mathbb{C}$, temos $u(vw) = (uv)w$.

$$\begin{aligned}
u(vw) &= (a+bi)\,[(c+di)(e+fi)] \\
&= (a+bi)\,[(ce-df)(cf+de)i] \\
&= [a(ce-df)-b(cf+de)]+[a(cf+de)+b(ce-df)] \\
&= [(ace-adf)-(bcf+bde)]+[(acf+ade)+(bce-bdf)] \\
&= [(ace-bde)-(adf+bcf)]+[(acf-bdf)+(ade+bce)]\,i \\
&= [(ac-bd)e-(ad+bc)f]+[(ac-bd)f+(ad+bc)e]\,i \\
&= [(ac-bd)+(ad+bc)i]\,(e+f)i \\
&= [(a+b)i(c+d)]\,i(e+f)i \\
&= (uv)w.
\end{aligned}$$

Ex:

$$\begin{aligned}
*\ [(3+2i)\cdot(7-4i)]\cdot(-1+5i) &= [(3\cdot 7-2(-4))+(3\cdot(-4)+2\cdot 7)i]\cdot(-1+5i) \\
&= [(21+8)+(-12+14)i]\cdot(-1+5i) \\
&= (29+2i)\cdot(-1+5i) \\
&= (29\cdot(-1)-2\cdot 5)+(29\cdot 5+2\cdot(-1))i \\
&= (-29-10)+(145-2)i \\
&= -39+143i \\
*\ (3+2i)\cdot[(7-4i)\cdot(-1+5i)] &= (3+2i)\cdot[(7\cdot(-1)-(-4)\cdot 5)+ \\
+(7\cdot 5+(-4)\cdot(-1))i] & \\
&= (3+2i)\cdot[(-7+20)(35+4)i] \\
&= (3+2i)\cdot(13+39i) \\
&= (3\cdot 13-2\cdot 39)+(3\cdot 39+2\cdot 13)i \\
&= (39-78)+(117+26)i \\
&= -39+143i
\end{aligned}$$

– *Elemento Unidade*: $\forall\, u = a + bi \in\ \mathbb{C}\ \exists\ 1 = 1 + 0i /\ 1 \cdot u = u$

$$\begin{aligned} 1 \cdot u &= (1 + 0i) \cdot (a + bi) \\ &= (1a - 0b) + (1b + 0a)i \\ &= a + bi \\ &= u \end{aligned}$$

Ex:

$$\begin{aligned} *\ 1 \cdot (4 + 2i) &= (1 + 0i) \cdot (4 + 2i) \\ &= (1 \cdot 4 - 0 \cdot 2) + (1 \cdot 2 + 0 \cdot 4)i \\ &= 4 + 2i \end{aligned}$$

– *Elemento Inverso*: $\forall\, u = a+bi \in\ \mathbb{C},\ \exists\, u^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i \in\ \mathbb{C}/u \cdot u^{-1} = 1$

$$\begin{aligned} u \cdot u^{-1} &= (a + bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) \\ &= (a + bi)\left(\frac{a - bi}{a^2+b^2}\right) \\ &= \frac{(a + bi)(a - bi)}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ex: Dado $u = 3 + 4i$, temos $u^{-1} = \dfrac{3}{3^2+4^2} - \dfrac{4}{3^2+4^2}i = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i$. Daí, temos

$$\begin{aligned} *\ (3 + 4i) \cdot (\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i) &= (3 \cdot \frac{3}{25} - 4 \cdot (-\frac{4}{25})) + (3 \cdot (-\frac{4}{25}) + 4 \cdot \frac{3}{25})i \\ &= (\frac{9}{25} + \frac{16}{25}) + (-\frac{12}{25} + \frac{12}{25})i \\ &= \frac{25}{25} + 0i \\ &= 1 + 0i \\ &= 1 \end{aligned}$$

– *Distributividade*: $\forall\ u, v, w \in\ \mathbb{C}$, temos $u(v+w) = uv + uw$.

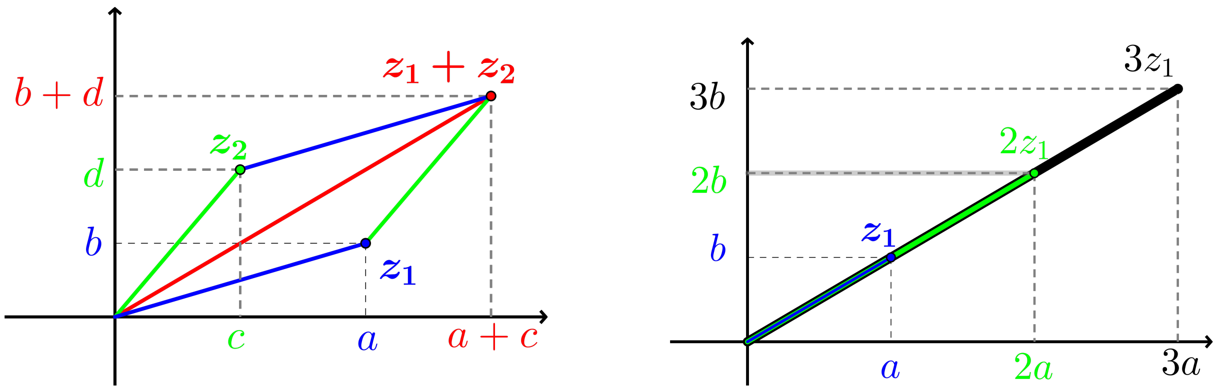
$$\begin{aligned}
u(v+w) &= (a+bi)\,[(c+di)+(e+fi)] \\
&= (a+bi)\,[(c+e)+(d+f)i] \\
&= [a\cdot(c+e) - b\cdot(d+f)] + [a\cdot(d+f) + b(c+e)]\,i \\
&= [ac+ae-bd-bf] + [ad+af+bc+be]\,i \\
&= [(ac-bd)+(ae-bf)] + [(ad+bc)+(af+be)]\,i \\
&= [(ac-bd)+(ad+bc)i] + [(ae-bf)+(af+be)i] \\
&= [(a+bi)\cdot(c+di)]\,[(a+bi)\cdot(e+fi)] \\
&= uv + uw
\end{aligned}$$

Ex: Tomando $u = -1+5i$, $v = 3+2i$ e $w = 7-4i$, temos:

$$\begin{aligned}
*\ u\cdot(v+w) &= (-1+5i)\cdot[(3+2i)+(7-4i)] \\
&= (-1+5i)\cdot[(3+7)+(2+(-4))i] \\
&= (-1+5i)\cdot(10-2i) \\
&= ((-1)\cdot 10 - 5\cdot(-2)) + ((-1)\cdot(-2) + 5\cdot 10)i \\
&= (-10+10) + (2+50)i \\
&= 0 + 52i \\
*\ u\cdot v + u\cdot w &= (-1+5i)\cdot(3+2i) + (-1+5i)\cdot(7-4i) \\
&= [(-1\cdot 3 - 5\cdot 2) + (-1\cdot 2 + 5\cdot 3)i] + [(-1\cdot 7 - 5\cdot(-4)) + \\
+(-1.(-4)+5.7)i] & \\
&= [(-3-10)+(-2+15)i] + [(-7+20)+(4+35)] \\
&= (-13+13i) + (13+39) \\
&= 0 + 52i
\end{aligned}$$

## 2.4 Representação geométrica

De acordo com Oliveira (2015), o cartógrafo, agrimensor e matemático norueguês Caspar Wessel, apresentou em sua obra "*Directionens analytiske Betegning, et Fors$\phi$g* *anvendt fornemmelig til planeog sphoeriske Polygoners Oplϕsnin, Academia Real Dinamarquesa de Ciências*", em 1797, o conceito de vetores. Mais tarde, em 1798, em seu memorial "*On the analytical representation of direction - an essay*" registra sua ideia de representar pontos no plano por números complexos, diante das dificuldades encontradas durante os trabalhos prestados a coroa real dinamarquesa, junto com uma equipe tinham a missão de fazer as observações astronômicas e triangulações, que serviriam de base para a primeira cartografia geral da Dinamarca. Dadas as distorções observadas entre os polígonos planos e esféricos, Wessel estabeleceu uma relação entre vetores e números complexos, a fim de operar com segmentos orientados (conforme a Figura (2.1)), definindo as operações de *soma* e *multiplicação por escalar* de forma geométrica. No entanto, sua obra não teve reconhecimento nem influência na época em que foi lançada.




(a) Soma. (b) Produto por escalar.

Figura 2.1: Soma e produto por escalar do ponto de vista geométrico.

Ainda segundo Oliveira (2015), outro que passou despercebido foi o suíço Jean Robert Argand, que em sua obra "*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions geometriques*", interpreta $\sqrt{-1}$ como uma rotação de 90°no sentido anti-horário. Assim, Argand entende que o produto $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ equivale a duas rotações consecutivas de 90°ou uma reflexão.

No entanto, pouco tempo depois, de acordo com Oliveira (2015), o alemão Carl Friedrich Gauss, tendo conhecimento de tais interpretações tornou-se um ferrenho lutador contra o até então existente preconceito em relação aos números complexos. Em uma carta a seu amigo Bessel, diz "...Números reais e imaginários podem ser visualizados como um plano infinito, no qual o ponto definido pela abscissa $a$ e ordenada $b$, representa a magnitude do número $a+bi$." (Oliveira, 2015). Em 1831, Gauss publicou "*Theoria Residuorum Biquadraticorum. Comentatio Secunda*", em que critica a forma com que seus contemporâneos tratam os números complexos: "Mas estes números imaginários.../... foram apenas tolerados, em vez de dado cidadania plena e, portanto, aparecem mais como, um jogo jogado com símbolos desprovidos de conteúdo em si, a que um se abstém absolutamente de atribuir qualquer substrato visualizável. Ao dizer isto não se tem vontade de depreciar o tributo rico que este jogo com os símbolos tem contribuído para o tesouro das relações entre os números reais." (Oliveira, 2015). A partir de então, o conjunto dos números complexos começa a ser aceito na sociedade matemática, bem como sua representação geométrica. Hoje, utilizamos a notação $z = (a, b)$ para o número complexo $z = a + bi$.

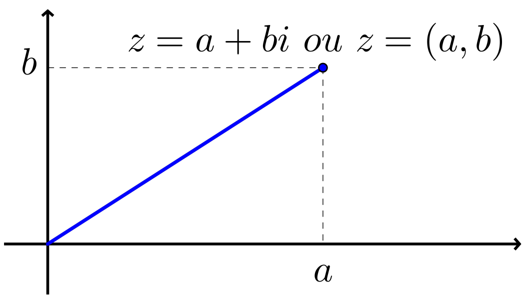



Figura 2.2: Representação geométrica do complexo $z = a + bi$.

### 2.4.1 Módulo do número complexo $z = a + bi$.

A partir da representação geométrica de um número complexo temos:

**Definição 3** *O comprimento do segmento formado pela origem* $(0, 0)$ *e o ponto* $(a, b)$*, que representa o complexo* $z = a + bi$*, é chamada de módulo de* $z$ *e denotada por* $|z|$.

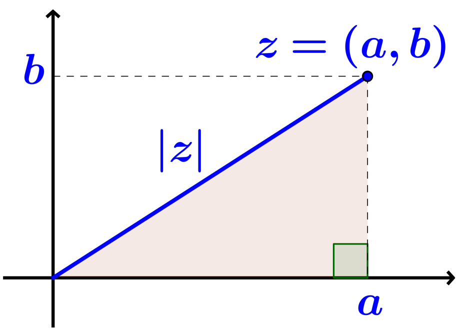



Figura 2.3: Módulo do complexo $z = a + bi$.

Parte do teorema de Pitágoras que:

$$\begin{aligned} |z|^2 &= a^2 + b^2 \Rightarrow \\ |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Por exemplo, dado $z = 3 - 4i$, temos

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{3^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

#### 2.4.1.1 Propriedades do módulo do número complexo.

Considere $u = a + bi$ e $v = c + di$. Então a operação módulo do número complexo tem as seguintes propriedades:

- $|u| = |\overline{u}|$

  *Demonstração:*

$$\begin{aligned} |u| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{a^2 + (-b)^2} \\ &= |\overline{u}| \end{aligned}$$

Ex: Dado $u = 5 + 12i$, temos $\overline{u} = 5 - 12i$. logo:

$$\begin{aligned} * \ |u| &= \sqrt{5^2 + 12^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \\ * \ |\overline{u}| &= \sqrt{5^2 + (-12)^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

- $|u|^2 = u.\overline{u}$

  *Demonstração:*

$$\begin{aligned} |u|^2 &= (\sqrt{a^2 + b^2})^2 \\ &= a^2 + b^2 \\ &= u.\overline{u} \end{aligned}$$

Ex: Note que dado $u = 3 - 4i$, temos:

$$\begin{aligned} * \ |3 - 4i|^2 &= \sqrt{3^2 + (-4)^2}^2 \\ &= \sqrt{9 + 16}^2 \\ &= \sqrt{25}^2 \\ &= 25 \\ * \ (3 - 4i)(3 + 4i) &= (3^2 + 4^2) + (3.4 + (-4).3)i \\ &= 25 + 0i \\ &= 25 \end{aligned}$$

- $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$

*Demonstração:*

$$
\begin{aligned}
|u \cdot v| &= |(ac-bd)+(ad+bc)i| \\
&= \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} \\
&= \sqrt{(a^2c^2-2abcd+b^2d^2)+(a^2d^2+2abcd+b^2c^2)} \\
&= \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} \\
&= |u|\cdot|v|
\end{aligned}
$$

Ex:

$$
\begin{aligned}
* \ |(4-1i)\cdot(2+3i)| &= |(4\cdot 2-(-1)\cdot 3)+(4\cdot 3+(-1)\cdot 2)| \\
&= |(8+3)+(12-2)| \\
&= |11+10i| \\
&= \sqrt{11^2+10^2} \\
&= \sqrt{121+100} \\
&= \sqrt{221}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
* \ |4-1i|\cdot|2+3i| &= \sqrt{4^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2} \\
&= \sqrt{16+1}\cdot\sqrt{4+9} \\
&= \sqrt{17}\cdot\sqrt{13} \\
&= \sqrt{17\cdot 13} \\
&= \sqrt{221}
\end{aligned}
$$

- $\left|\dfrac{u}{v}\right| = \dfrac{|u|}{|v|}$

*Demonstração:* Note que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{v}\right| &= \left|\frac{1}{c+di}\right| \\
&= \left|\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{c}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{d}{c^2+d^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{c^2+d^2}{(c^2+d^2)^2}} \\
&= \frac{\sqrt{c^2+d^2}}{\sqrt{(c^2+d^2)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(c^2+d^2)}} \\
&= \frac{1}{|v|}
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{u}{v}\right| &= \left|u \cdot \frac{1}{v}\right| \\
&= |u| \cdot \left|\frac{1}{v}\right| \\
&= |u| \cdot \frac{1}{|v|} \\
&= \frac{|u|}{|v|}
\end{aligned}$$

Ex:

$$
\begin{aligned}
* \left|\frac{4-3i}{2+1i}\right| &= \left|\frac{4-3i}{2+1i}\cdot\frac{2-1i}{2-1i}\right| \\
&= \left|\frac{[(4\cdot 2-(-3)\cdot(-1))+(4\cdot(-1)+(-3)\cdot 2)i]}{2^2+(-1)^2}\right| \\
&= \left|\frac{[(8-3)+(-4-6)i]}{4+1}\right| \\
&= \left|\frac{5-10i}{5}\right| \\
&= |1-2i| \\
&= \sqrt{1^2+(-2)^2} \\
&= \sqrt{5} \\
* \frac{|4-3i|}{|2+1i|} &= \frac{\sqrt{4^2+(-3)^2}}{\sqrt{2^2+1^2}} \\
&= \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}} \\
&= \sqrt{5}
\end{aligned}
$$

- $|u+v| \leq |u|+|v|$

  *Demonstração:* Inicialmente, note que

$$
\begin{aligned}
u\cdot\overline{v} &= (a+bi)(c-di) = (ac+bd)+(ad-bc)i \\
Re(u) &\leq |Re(u)| = \sqrt{Re(u)^2} \leq \sqrt{Re(u)^2+Im(u)^2} = |u|
\end{aligned}
$$

logo,

$$
\begin{aligned}
|u+v|^2 &= (\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2})^2 \\
&= a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2 \\
&= (a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2(ac+bd) \\
&= |u|^2+|v|^2+2\cdot Re(u\cdot\overline{v}) \\
&\leq |u|^2+|v|^2+2|u\cdot\overline{v}| \\
&= |u|^2+|v|^2+2|u|\cdot|v| \\
&= (|u|^2+|v|)^2
\end{aligned}
$$

daí, temos $|u+v| \leq |u|+|v|$.

Ex:

$$\begin{aligned}
* \ |(1+4i)+(9-7i)| &= |(1+9)+(4+(-7))i| \\
&= |10-3i| \\
&= \sqrt{10^2+(-3)^2} \\
&= \sqrt{100+9} \\
&= \sqrt{109} \\
* \ |(1+4i)|+|(9-7i)| &= \sqrt{1^2+4^2}+\sqrt{9^2+(-7)^2} \\
&= \sqrt{1+16}+\sqrt{81+49} \\
&= \sqrt{17}+\sqrt{130}
\end{aligned}$$

Note que de fato o módulo da soma é menor do que a soma dos módulos!

- $|u-v| \geq |u|-|v|$

  *Demonstração:*

$$\begin{aligned}
|u| &= |u-v+v| \\
&\leq |u-v|+|v| \Longrightarrow \\
|u|-|v| &\leq |u-v| \Longleftrightarrow \\
|u-v| &\geq |u|-|v|
\end{aligned}$$

Ex:

$$\begin{aligned}
* \ |(1+4i)-(9-7i)| &= |(1-9)+(4-(-7))i| \\
&= |-8-11i| \\
&= \sqrt{(-8)^2+(-11)^2} \\
&= \sqrt{64+121} \\
&= \sqrt{185} \\
* \ |(1+4i)|-|(9-7i)| &= \sqrt{1^2+4^2}-\sqrt{9^2+(-7)^2} \\
&= \sqrt{1+16}-\sqrt{81+49}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{17} - \sqrt{130}$$

Assim, percebemos que o módulo da diferença é maior do que a diferença dos módulos.

### 2.4.2 Argumento do número complexo $z = a + bi$.

**Definição 4** *O semi-eixo positivo das abscissas e o segmento formado pela origem $z = (0,0)$ e o ponto $(a,b) \neq (0,0)$, determinam em $(0,0)$ um ângulo, a ser medido no sentido anti-horário. A este ângulo denomina-se argumento de $z$.*

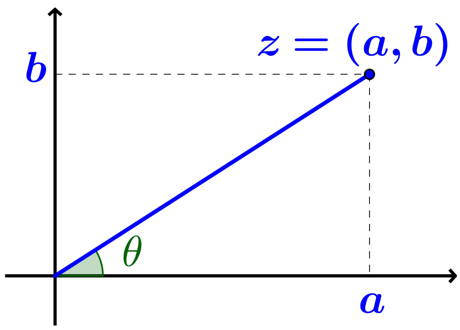



Figura 2.4: Argumento do número complexo $z = a + bi$.

Segue da figura (2.4) que $\theta$ é um ângulo que satisfaz:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \end{cases} \tag{2.1}$$

## 2.5 Forma trigonométrica de um número complexo

Das equações de (2.1), temos:

$$\begin{cases} b = |z| \cdot \operatorname{sen}\theta \\ a = |z| \cdot \cos\theta \end{cases}$$

logo, dado o número complexo $z = a + bi$, podemos escrevê-lo na seguinte forma:

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ z &= (|z| \cdot \cos\theta) + (|z| \cdot \operatorname{sen}\theta)i \\ z &= |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

Ex:

Dado $z = 1+\sqrt{3}\,i$ temos:

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}\\
&= \sqrt{1+3}\\
&= \sqrt{4}\\
&= 2
\end{aligned}$$

Assim, das equações (2.1) temos

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

donde se conclui que $\theta = 60°$. Logo,

$$z = 1+\sqrt{3}\,i = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°).$$

### 2.5.1 Multiplicação, divisão e potência na forma trigonométrica.

Alguns cálculos, como o de potências com números complexos, podem ser deveras complexo. Imagine calcular $(1+\sqrt{3}i)^{100}$! Seria um longo trabalho! No entanto, isso pode ser consideravelmente facilitado se usarmos a forma trigonométrica dos números complexos.

Para entender e demonstrar tais relações, precisaremos usar algumas relações trigonométricas. São elas:

$$\begin{aligned}
\bullet\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta\\
\bullet\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta\\
\bullet\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha.\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta\\
\bullet\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

Para os exemplos nesta seção, considere $p = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}i$, $q = 3+3\sqrt{3}\,i$ e $r = -64$. Assim temos:

$$
\begin{aligned}
* \ |p| &= \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{75}{4}\right) + \left(\frac{25}{4}\right)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{100}{4}\right)} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5 \\
&\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\theta &= \dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{5} &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta &= \dfrac{\frac{5}{2}}{5} &= \dfrac{1}{2} \end{cases} \\
&\Rightarrow \ \theta \ = \ 30^\circ \\
&\Rightarrow \ p \ = \ 5(\cos\ 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) \\
* \ |q| &= \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{9 + 27} \\
&= \sqrt{36} \\
&= 6 \\
&\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\theta &= \dfrac{3}{6} &= \dfrac{1}{2} \\ \cos\theta &= \dfrac{3\sqrt{3}}{6} &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\
&\Rightarrow \ \theta \ = \ 60^\circ \\
&\Rightarrow \ q \ = \ 6(\cos\ 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) \\
* \ |r| &= \sqrt{(-64)^2 + 0^2} \\
&= \sqrt{4096} \\
&= 64 \\
&\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\theta &= \dfrac{64}{-64} &= -1 \\ \cos\theta &= \dfrac{0}{-64} &= 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \ \theta \ = \ 180^\circ \\
&\Rightarrow \ r \ = \ 64(\cos\ 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ)
\end{aligned}
$$

Dados os complexos $u = |u|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ e $v = |v|(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$ temos

- Multiplicação: $u \cdot v = |u||v|[\cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}\,(\alpha+\beta)]$

$$\begin{aligned} u \cdot v &= |u|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha).|v|(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta) \\ &= |u||v|(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \text{ sen}\,\alpha\cdot\text{ sen}\,\beta) + i(\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\beta + \text{ sen}\,\alpha\cdot\cos\beta) \\ &= |u||v|[\cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}\,(\alpha+\beta)] \end{aligned}$$

Ex:

$$\begin{aligned} p \cdot q &= (\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}i)\cdot(3+3\sqrt{3}\,i) \\ &= 5(\cos\ 30^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ)\cdot 6(\cos\ 60^\circ + i\,\text{sen}\,60^\circ) \\ &= 30(\cos\ 90^\circ + i\,\text{sen}\,90^\circ) \\ &= 30(0+1i) \\ &= 30i \end{aligned}$$

- Divisão: $\dfrac{u}{v} = \dfrac{|u|}{|v|}[\cos(\alpha-\beta)] + [\text{sen}\,(\alpha-\beta)]$

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} &= \frac{|u|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)}{|v|(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)} \\ &= \frac{|u|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)}{|v|(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)}\cdot\frac{|v|(\cos\beta - i\,\text{sen}\,\beta)}{|v|(\cos\beta - i\,\text{sen}\,\beta)} \\ &= \frac{|u||v|(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \text{ sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta) + (\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\text{sen}\,\beta)i}{|v||v|(\cos^2\beta + \text{ sen}^2\,\beta) + (\cos\beta\cdot\text{sen}\,\beta - \text{ sen}\,\beta\cdot\cos\beta)i} \\ &= \frac{|u|[\cos(\alpha-\beta)] + [\text{sen}\,(\alpha-\beta)]}{|v|(1+0i)} \\ &= \frac{|u|}{|v|}[\cos(\alpha-\beta)] + [\text{sen}\,(\alpha-\beta)] \end{aligned}$$

Ex:

$$\begin{aligned} \frac{q}{p} &= \frac{(3+3\sqrt{3}\,i)}{(\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}i)} \\ &= \frac{6(\cos 60^\circ + i\text{sen}\,60^\circ)}{5(\cos 30^\circ + i\text{sen}\,30^\circ)} \\ &= \frac{6}{5}(\cos 30^\circ + i\text{sen}\,30^\circ) \\ &= \frac{6}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{6\sqrt{3}}{10} + \frac{6}{10}i \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{5} + \frac{3}{5}i
\end{aligned}
$$

- Potenciação (**primeira lei de Moivre**): $u^n = |u|^n[\cos(n\alpha) + i\,\text{sen}\,(n\alpha)]$

  Para esta demonstração, usaremos o *Princípio da indução matemática*. Note que para $n = 2$, temos

$$
\begin{aligned}
u^2 &= u \cdot u \\
&= |u|(\cos\alpha + i\text{sen}\,\alpha)|u|(\cos\alpha + i\text{sen}\,\alpha) \\
&= |u|^2(\cos^2\alpha - \text{sen}\,^2\alpha) + i(2\cos\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha) \\
&= |u|^2(\cos 2\alpha + i\text{sen}\,2\alpha)
\end{aligned}
$$

Agora, suponha que a igualdade $u^n = |u|^n[\cos(n\alpha) + i\text{sen}\,(n\alpha)]$ seja válida para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
u^{n+1} &= u^n \cdot u \\
&= |u|^n[\cos(n\alpha) + i\text{sen}\,(n\alpha)] \cdot |u|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) \\
&= |u|^n \cdot |u|[\cos(n\alpha).\cos\alpha -\ \text{sen}\,(n\alpha)\cdot \text{sen}\,\alpha] + i[\text{sen}\,(n\alpha \cdot \cos\alpha + \cos(n\alpha)\cdot \text{sen}\,\alpha)] \\
&= u^{n+1} = |u|^{n+1}[\cos(n+1)\cdot\alpha + i\,\text{sen}\,(n+1)\alpha]
\end{aligned}
$$

Logo, $u^n = |u|^n[\cos(n\alpha) + i\,\text{sen}\,(n\alpha)]$ é valida $\forall n \in \mathbb{N}$

Ex:

$$
\begin{aligned}
q^4 &= (\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}i)^4 \\
&= [5(\cos 30^\circ + i\text{sen}\,30^\circ)]^4 \\
&= 5^4(\cos 120^\circ + i\text{sen}\,120^\circ) \\
&= 625\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= -\frac{625}{2} + \frac{625\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}
$$

- Radiciação (**segunda lei de Moivre**):

$\sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{|u|}\left[\cos\left(\frac{\alpha + k.360}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\alpha + k.360}{n}\right)\right]$, para $k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1$.

Seja $\sqrt[n]{u} = z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta)$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} z^n &= u \Longrightarrow \\ |z|^n[\cos(n\theta) + i\text{sen}\,(n\theta)] &= |u|(\cos\alpha + i\text{sen}\,\alpha). \end{aligned}$$

e, portanto, pela igualdade de números complexos,

- $|z|^n = |u| \Longrightarrow |z| = \sqrt[n]{|u|}$
- $\left.\begin{array}{c}\cos(n\theta) = \cos(\alpha) \\ \text{sen}\,(n\theta) = \text{sen}\,(\alpha)\end{array}\right\} \Longrightarrow n\theta = \alpha + k\cdot 360° \Longrightarrow \theta = \frac{\alpha + k\cdot 360°}{n}, k \in \mathbb{Z}$

No entanto, note que, dado $k \in \mathbb{Z}$, temos

$$k = n\cdot q + r,\ com\ 0 \leq r < n.$$

logo,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + k\cdot 360°}{n} &= \frac{\alpha + (n.q + r)\cdot 360°}{n} \\ &= \frac{\alpha + r\cdot 360°}{n} + \frac{nq\cdot 360\circ}{n} \\ &= \frac{\alpha + r\cdot 360°}{n} + q\cdot 360° \end{aligned}$$

Assim, $\frac{\alpha + k\cdot 360°}{n}$ e $\frac{\alpha + r\cdot 360°}{n}$ são arcos congruentes e, portanto,

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\alpha + k\cdot 360°}{n}\right) = \cos\left(\frac{\alpha + r\cdot 360°}{n}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\alpha + k\cdot 360°}{n}\right) = \text{sen}\left(\frac{\alpha + r\cdot 360°}{n}\right) \end{array}\right.$$

donde se conclui que:

- Os valores de $k$ que nos dão as raízes $n$-ésimas de $u$ pertencem ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}$.

– Existem exatamente $n$ raízes $n$-ésimas de $u$.

– As raízes $n$-ésimas de $u$ são:

$z_0 = \sqrt[n]{|u|}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right]$ (a principal);

$z_1 = \sqrt[n]{|u|}\left[\cos\left(\frac{\alpha+360}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\alpha+360}{n}\right)\right]$;

$z_2 = \sqrt[n]{|u|}\left[\cos\left(\frac{\alpha+2\cdot 360}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\alpha+2\cdot 360}{n}\right)\right]$;

$\vdots$

$z_{n-1} = \sqrt[n]{|u|}\left[\cos\left(\frac{\alpha+(n-1)360}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\alpha+(n-1)360}{n}\right)\right]$;

– Todas as raízes $n$-ésimas de $u$ têm o mesmo módulo: $\sqrt[n]{|u|}$. Portanto, geometricamente estão todas localizadas sobre uma circunferências de centro em $(0, 0)$;

– A diferença entre os argumentos de $z_k$ e $z_{k+1}$ é de $\left(\frac{360}{n}\right)$ graus $\forall\ k$. Logo, as raízes $n$-ésimas de $u$ são vértices de um polígono regular.

Ex:

$$
\begin{aligned}
\sqrt[6]{r} &= \sqrt[6]{-64} \\
&= \sqrt[6]{64(\cos\ 180° + i\text{sen}\,180°)} \\
&= \sqrt[6]{64}\left[\cos\left(\frac{180° + k\cdot 360°}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{180° + k\cdot 360°}{6}\right)\right] \\
&= 2\left[\cos\ (30° + k\cdot 60°) + i\,\text{sen}\ (30° + k\cdot 60°)\right], k = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}.
\end{aligned}
$$

Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
*\ z_0 &= 2\left[\cos\ (30° + 0\cdot 60°) + i\text{sen}\ (30° + 0\cdot 60°)\right] \\
&= 2(\cos\ 30° + i\text{sen}\,30°) \\
&= 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) \\
&= \sqrt{3} + 1i \\
*\ z_1 &= 2\left[\cos\ (30° + 1\cdot 60°) + i\text{sen}\ (30° + 1\cdot 60°)\right] \\
&= 2(\cos\ 90° + i\text{sen}\,90°) \\
&= 2(0 + 1i) \\
&= 2i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
* \ z_2 &= 2\left[\cos\left(30^\circ + 2\cdot 60^\circ\right) + i\operatorname{sen}\left(30^\circ + 2\cdot 60^\circ\right)\right] \\
&= 2(\cos 150^\circ + i\operatorname{sen} 150^\circ) \\
&= 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) \\
&= -\sqrt{3} + 1i \\
* \ z_3 &= 2\left[\cos\left(30^\circ + 3\cdot 60^\circ\right) + i\operatorname{sen}\left(30^\circ + 3\cdot 60^\circ\right)\right] \\
&= 2(\cos 210^\circ + i\operatorname{sen} 210^\circ) \\
&= 2(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\
&= -1 - \sqrt{3}i \\
* \ z_4 &= 2\left[\cos\left(30^\circ + 4\cdot 60^\circ\right) + i\operatorname{sen}\left(30^\circ + 4\cdot 60^\circ\right)\right] \\
&= 2(\cos 270^\circ + i\operatorname{sen} 270^\circ) \\
&= 2(0 - 1i) \\
&= -2i \\
* \ z_5 &= 2\left[\cos\left(30^\circ + 5\cdot 60^\circ\right) + i\operatorname{sen}\left(30^\circ + 5\cdot 60^\circ\right)\right] \\
&= 2(\cos 330^\circ + i\operatorname{sen} 330^\circ) \\
&= 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) \\
&= \sqrt{3} - 1i
\end{aligned}
$$

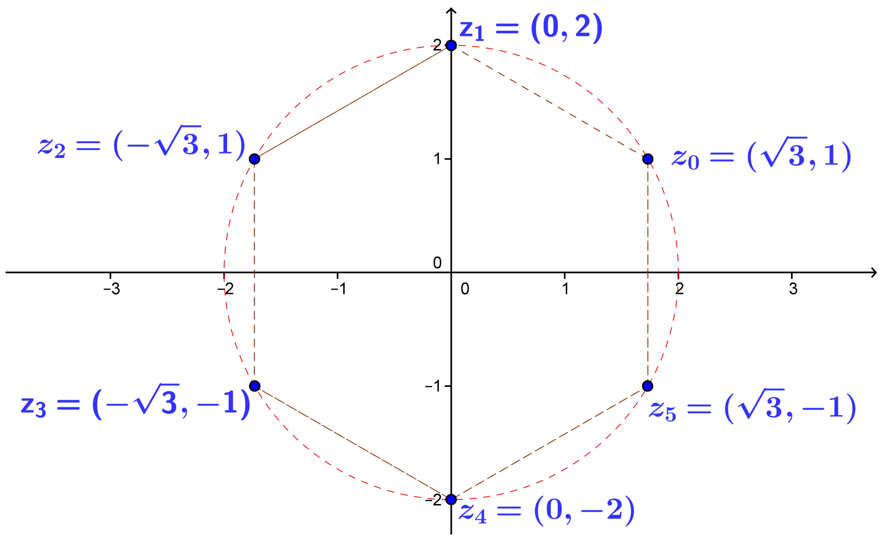



Figura 2.5: Raízes sextas de $r = -64$.

# Capítulo 3

# Uma aplicação: translações e rotações.

Neste capítulo iremos abordar uma entre tantas aplicações para os números complexos: a rotação em torno da origem e a translação de pontos no plano.

A ideia de somar segmentos orientados utilizando números complexos, desenvolvida por Wessel, nos permite criar a partir de um dado número complexo $z$ um segundo ponto $z'$ (ou transladar o ponto $z$), na distância e direção desejados, fazendo a soma de $z$ com um determinado $y = |y|(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta)$, em que $|y|$ é distância e o argumento de $y$ indica a direção desejada, que é determinada tomando por orientação a semirreta com origem em $z$, paralela e com mesma direção do semi-eixo positivo Ox, e o sentido anti-horário para ângulos positivos.

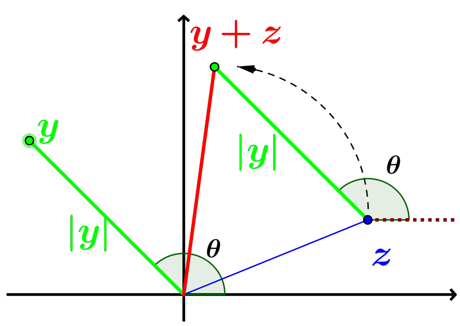



Figura 3.1: Translação de um ponto no plano.

Como vimos na subseção 2.5.1, o produto entre dois números complexos $u$ e $v$ possui o módulo igual ao produto dos módulos de $u$ e $v$, e argumento igual a soma dos argumentos de $u$ e $v$: $u \cdot v = (|u||v|)[\cos(\alpha+\beta) + i\text{sen}\,(\alpha+\beta)]$. Assim, se $|v| = 1$, temos que tal multiplicação provoca, em termos geométricos, uma rotação em torno da origem. Por exemplo, tome $u = 2(\cos 120° + i\text{sen}\, 120°)$ e $v = (\cos 30° + i\text{sen}\, 30°)$. Assim, temos $u \cdot v = 2(\cos 150° + i\text{sen}\, 150°)$

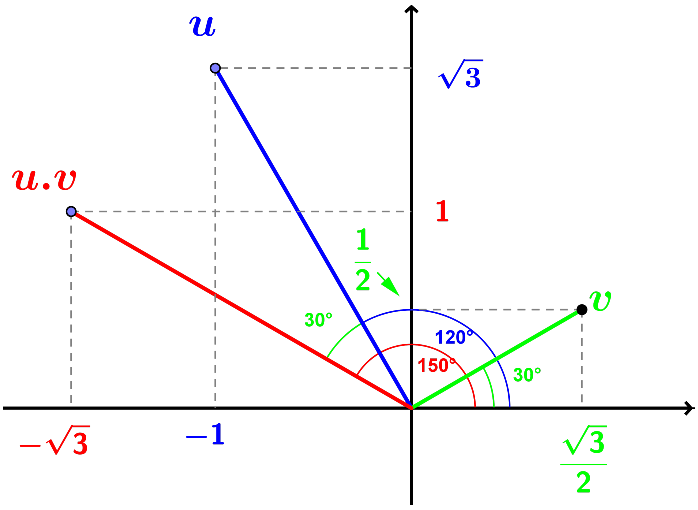



Figura 3.2: Rotação de 30° em torno da origem.

Essas ferramentas podem ser utilizadas em situações simples, como a de rotacionar os vértices de um polígono.

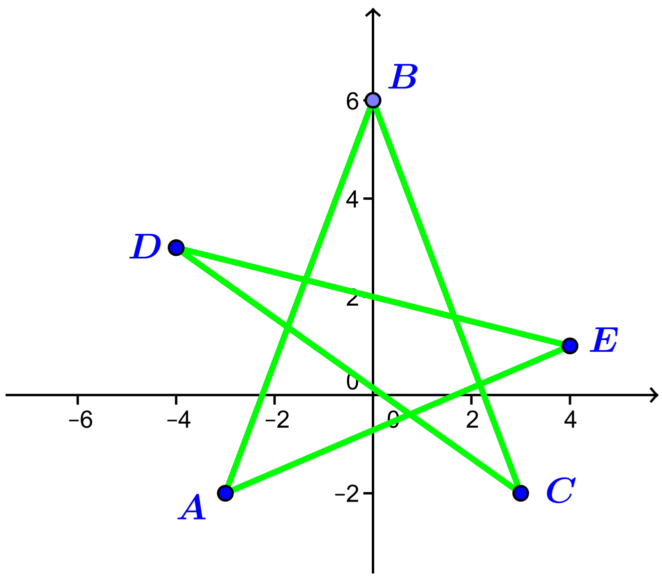



Figura 3.3: Estrela de cinco pontas.

Por exemplo, na Figura (3.3), temos os pontos $A = (-3, -2)$, $B = (0, 6)$ , $C = (3, -2)$ , $D = (-4, 3)$ e $E = (4, 1)$ formando uma estrela de cinco pontas. Cada um destes pontos é a representação geométrica de um número complexo. Se multiplicarmos todos estes números por $r = \cos 90° + i\text{sen}\, 90° = i$ obtemos novos pontos, como mostrado na tabela:

Tabela 3.1: Vértices da estrela rotacionada.

| Ponto inicial $(P)$ | N°inicial $(p)$ | N°rotacionado $(p \cdot r)$ | Ponto rotacionado $(P')$ |
|---|---|---|---|
| $A = (-3, -2)$ | $-3 - 2i$ | $2 - 3i$ | $A' = (2, -3)$ |
| $B = (0, 6)$ | $6i$ | $-6$ | $B' = (-6, 0)$ |
| $C = (3, -2)$ | $3 - 2i$ | $2 + 3i$ | $C' = (2, 3)$ |
| $D = (-4, 3)$ | $-4 + 3i$ | $-3 - 4i$ | $D' = (-3, -4)$ |
| $E = (4, 1)$ | $4 + i$ | $-1 + 4i$ | $E' = (-1, 4)$ |

E, com esses novos pontos, obtemos a seguinte figura:

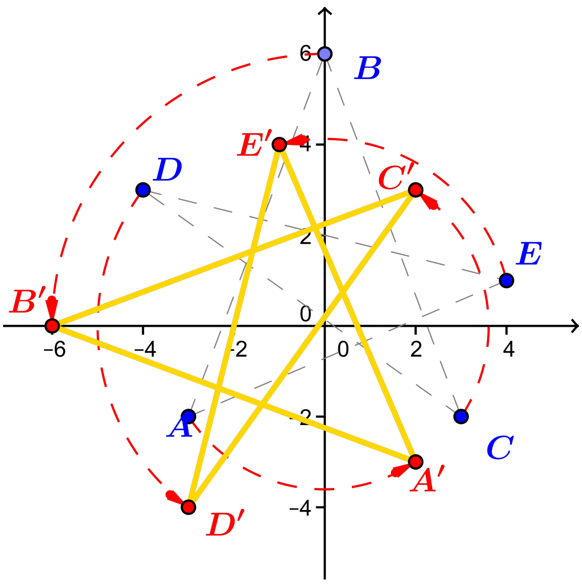


Figura 3.4: Estrela de cinco pontas rotacionada.

Também podemos transladar a figura somando uma constante $t \in \mathbb{C}$ a cada ponto. Por exemplo: Para transladar na direção de 30° por 4 unidades de distância devemos somar $t = 4(\cos 30° + i\text{sen}\, 30°) = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 2\sqrt{3} + 2i$. Veja a tabela 3.2:

Tabela 3.2: Vértices da estrela transladada.

| Ponto inicial $(P')$ | N°inicial $(p')$ | N°transladado $(p' + t)$ | Ponto transladado $(P'')$ |
|---|---|---|---|
| $A' = (2, -3)$ | $2 - 3i$ | $(2 + 2\sqrt{3}) - i$ | $(2 + 2\sqrt{3}, -1)$ |
| $B' = (-6, 0)$ | $-6$ | $(-6 + 2\sqrt{3}) + 2i$ | $(-6 + 2\sqrt{3}, 2)$ |
| $C' = (2, 3)$ | $2 + 3i$ | $(2 + 2\sqrt{3}) + 5i$ | $(2 + 2\sqrt{3}, 5)$ |
| $D' = (-3, -4)$ | $-3 - 4i$ | $(-3 + 2\sqrt{3}) - 2i$ | $(-3 + 2\sqrt{3}, -2)$ |
| $E' = (-1, 4)$ | $-1 + 4i$ | $(-1 + 2\sqrt{3}) + 6i$ | $(-1 + 2\sqrt{3}, 6)$ |

A Figura 3.5 representa a translação indicada na tabela 3.2.

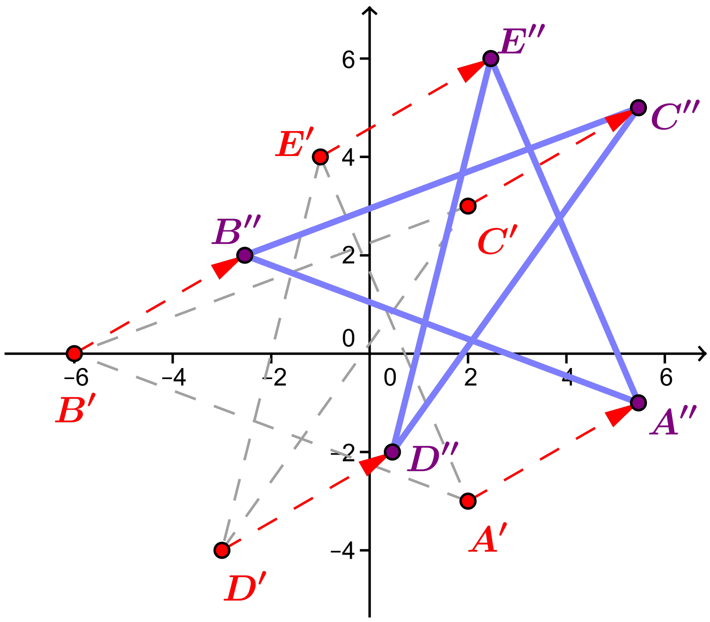



Figura 3.5: Estrela de cinco pontas transladada.

Ao associar as coordenadas dos pontos de uma figura a cor expressada por eles, se pode aplicar a mesma técnica para rotacionar e/ou transladar uma figura.

# Capítulo 4

# Sugestões de atividades.

Neste capítulo elaboramos duas atividades dirigidas, para que o professor do ensino médio possa construir o conjunto dos números complexos com os alunos. A atividade 1 é uma atividade introdutória, visando mostrar ao aluno a necessidade de um conjunto mais amplo para resolução de questões envolvendo os números reais, no caso as equações cúbicas. Atividade 2, indicada para alunos que já tiveram o primeiro contato com o conjunto dos números complexos, tem como objetivo desenvolver as operações básicas com os elementos deste novo conjunto, através de uma aplicação simples de rotação e translação do ponto no plano.

- **Atividade 1:**

  **Público alvo:**

  Alunos do ensino médio.

  **Objetivos:**

  - Construir o conjunto dos números complexos;
  - Estabelecer as operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão) entre números complexos;
  - Compreender as propriedades operacionais e algébricas de tal conjunto;
  - Utilizar a tecnologia como meio facilitador para compreensão de tal conjunto.

  **Pré-requisitos:**

  - Conhecimentos básicos sobre o conjunto dos números reais;

– Fórmula de resolução da equação de segundo grau e equações quadráticas;

– Familiaridade com o software Geogebra.

**Desenvolvimento**

Comece a aula comentando com os alunos sobre o que acontece quando, ao usarmos a fórmula de solução da equação quadrática, por exemplo, encontramos discriminante ($\Delta$) negativo.

Revele que por volta de 1540-1545, os matemáticos Cardano e Tartaglia descobriram uma fórmula para encontrar uma das soluções de equações cúbicas do tipo $x^3 = px + q$, dada por $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}}$ e que, mais tarde, Rafael Bombelli tentou usá-la para resolver a equação $x^3 = 15x + 4$.

Depois, proponha aos alunos as seguintes atividades.

1. Resolva a equação

$$x^3 = 15x + 4 \tag{4.1}$$

usando a fórmula de Cardano-Tartaglia.

2. Que conclusão podemos tirar com os resultados encontrados na fórmula de Cardano-Tartaglia?

3. Utilizando o software Geogebra tente resolver a equação geometricamente esboçando simultaneamente os gráficos de $y = x^3$ e $y = 15x + 4$.

4. Verifique se x = 4 é de fato uma solução da equação.

5. Agora, leve os alunos a pensar sobre os seguintes aspectos:

– Se existe uma solução para a equação (4.1), por que não conseguimos encontrá-la?

– E se $\sqrt{-1}$ existisse? Faria sentido calcular $\sqrt{121 \cdot (-1)}$, assim como quando fazemos $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$?

– Quanto seria $(\sqrt{-1})^2$? E $(\sqrt{-121})^2$, quanto seria?

– Quanto seria $(2 + \sqrt{-1})^3$?

* E $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$?

- Quanto seria $(2-\sqrt{-1})^3$?
  * E $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$?
- E $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$

**Conclusão:**

Mesmo que na época tais números não fizessem sentido prático, Rafael Bombelli percebeu sua utilidade ao conseguir encontrar a raiz real de uma equação por meio deles. Por este motivo continuou investigando, assim como outros matemáticos, que também aderiram a ideia, até que cerca de 200 anos depois tínhamos um novo conjunto formado: o conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$)!

- **Atividade 2:**

**Público alvo:**

Alunos do ensino médio

**Objetivos**

- Compreender a representação geométrica dos números complexos;

- Desenvolver as operações básicas com números complexos.

**Pré-requisitos**

- Definição de números complexos;

- Operações na forma algébrica dos números complexos;

- Forma Trigonométrica do número complexo;

- Familiaridade com software Geogebra.

**Desenvolvimento**

Comece a aula solicitando aos alunos que representem dois números complexos no Geogebra. Depois peça aos alunos que façam a soma de tais números e represente também no Geogebra. Repita esse procedimento algumas vezes, levando-os a refletir sobre o comportamento dessas operações.

Em seguida, faça o mesmo procedimento, mas usando a operação multiplicação: escolha dois números, represente-os no Geogebra, multiplique-os e represente os resultados no gráfico.

Espera-se que, com essa atividade, o aluno entenda que a multiplicação provoca uma rotação em torno da origem do sistema, a depender do argumento do segundo fator; enquanto a soma desloca o ponto de acordo com o módulo e o argumento da segunda parcela.

A segunda parte da aula consiste em propor que os alunos realizem as seguintes etapas:

1. Escolher alguns pontos no plano, formando um desenho, de acordo com a criatividade de cada um (vale salientar que se escolher muitos pontos, a atividade se torna trabalhosa).

2. Determinar o número complexo $r = |r|(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta)$ que provocará em um ponto $z$ uma rotação de 45 graus em torno da origem, sem afastar $|z|$.

3. Preencher a tabela abaixo, afim de rotacionar sua figura:

Tabela 4.1: Tabela para o aluno organizar os cálculos relacionados a rotação de sua figura.

| $(P)$ | $(p)$ | $(P.r)$ | $(P')$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

Na tabela 4.1:

$P$ É o ponto escolhido no Geogebra.

$p$ É o número representado por $P$.

$P \cdot r$ É o produto de $p$ pela constante de rotação $r$.

$P'$ É o ponto representado por $P \cdot r$.

4. Representar os novos pontos no plano cartesiano do Geogebra para verificar a nova figura formada.

Neste momento o professor pode comentar com os alunos sobre a rotação obtida por cada um. Salientar que a rotação é feita em torno da origem pode ser fundamental para um bom entendimento. Na sequência, os alunos farão os seguintes passos:

1. Determinar o número complexo $t = |t|(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta)$ que provocará uma translação de 10 unidades de distancia à uma direção de 60°em relação ao semi-eixo $Ox$ positivo, no sentido anti-horário.

2. Preencher a tabela abaixo, afim de transladar sua figura:

Tabela 4.2: Tabela para o aluno organizar os cálculos relacionados a translação de sua figura.

| $(P)$ | $(p)$ | $(P \cdot t)$ | $(P'')$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

Na tabela 4.2:

$P$ É o ponto escolhido no Geogebra.

$p$ É o número representado por $P$.

$P \cdot t$ É o produto de $p$ pela constante de translação $t$.

$P''$ É o ponto representado por $P \cdot t$.

3. Representar os novos pontos no plano cartesiano do Geogebra para verificar a nova figura formada.

Novamente o professor deve comentar os resultados obtidos pelos alunos, garantindo que entendam de fato o que aconteceu.

**Conclusão:**

As operações com números complexos que podem ser usadas como ferramentas para mover um ponto através do plano. Isso permite com que uma figura possa ser transladada ou rotacionada de acordo com a necessidade. Essas ferramentas foram utilizadas pela primeira vez por Caspar Wessel, na década de 1790, na Dinamarca, enquanto fazia medições para a construção da primeira carta cartográfica da Dinamarca.

# Considerações finais

.

Neste trabalho apresentamos de maneira detalhada e de acordo com fatos históricos a construção do conjunto dos números complexos, mostrando ao professor de matemática da educação básica uma forma suave para transição do "não existe raiz quadrada de números negativos" , tantas vezes dito durante o ensino fundamental início do ensino médio, para o "assim é o número complexo"!

Em geral, o primeiro contato dos alunos com a necessidade de se obter uma raiz quadrada para um número negativo se dá através do discriminante ($\Delta$) de uma equação de segundo grau. Em casos assim, estes são instruídos de que a equação não possui raízes reais. Possivelmente mais tarde, em alguma aplicação de tais equações, o aluno pode verificar que o discriminante negativo implica na impossibilidade da realização de tal situação, assim como Cardano percebeu que era impossível cortar uma corda de 10m em dois pedaços cujo produto de seus tamanhos fosse igual 40. Por muito tempo, essa interpretação foi aceita e desmotivou a busca por tais raízes. Dessa forma, não podemos esperar reação diferente dos alunos do ensino médio ao serem apresentados ao conjunto dos números complexos. Afinal, por que procuraríamos por uma solução, uma vez que a inexistência de tal solução tem seu significado tão prático e visível?

Assim, a proposta de apresentar os números complexos de acordo com fatos históricos evita tal conflito, mostrando essa invenção como produto de algo lógico, racionalizado a partir dos conceitos e propriedades já entendidos em relação ao conjunto dos números reais, fazendo com que o aluno possa ser motivado a compreender o que de fato acontece com os números negativos e entender as operações e propriedades do conjunto dos números complexos e mostrando que a existência de tais números é uma ferramenta muito valiosa para a matemática. Além disso, conhecer a importância e a aplicabilidade de um conteúdo, pode ser um excelente motivador para os alunos.

# Referências Bibliográficas


Castelo, J. A. M. (2013). Resolução de equações quadráticas: um resgate histórico dos métodos e uma proposta de aplicação da Sequência Fedathi no seu ensino. Dissertação de Mestrado, UFC, Fortaleza/CE.

Dutra, A. S., Carvalho, A. L. T., e Valenço, I. R. P. (2017). *Matemática*. CPB - Casa Publicadora Brasileira, Tatuí/SP.

Figueiredo, L. H. (2008). PAPMEM - Julho de 2008 - Números Complexos. Disponível em: `https://youtu.be/rjpQWYoHc0k` Acesso em: 12/06/2021.

Milies, C. P. (2018). A emergência dos números complexos. *Revista do Professor de Matemática*.

Oliveira, L. S. A. (2015). Evolução das ideias sobre Números Imaginários. Dissertação de Mestrado, UFPB, João Pessoa/PB.

Rodrigues, H. O. e Silva, J. R. (2004). Fórmula de Bhàskara e resolução de equação do 2° grau inspirados em procedimentos do Papiro de Moscou e Rhind. Disponível em `http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/MC06193102434.pdf` Acesso em: 07/06/2021.

Vale, A. F. A. (2013). As diferentes estraégias de resolução da equação do segundo grau. Dissertação de Mestrado, UFERSA, Mossoró/RN.